C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 743–746

Théorie des groupes/*Group Theory*

Une alternative sur l'entropie des groupes

Vincent Guirardel

Institut Fourier, UMR 5582, BP 74, Université Grenoble 1, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France

Reçu le 13 mars 2002 ; accepté le 18 mars 2002

Note présentée par Étienne Ghys.

Résumé On démontre l'alternative suivante : ou bien il existe un groupe de type fini à croissance exponentielle et à entropie nulle, ou bien il existe une constante universelle $M > 0$ qui minore les entropies de tous les groupes hyperboliques non élémentaires à centralisateurs cycliques et celle de leurs sous-groupes non élémentaires. ***Pour citer cet article : V. Guirardel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 743–746.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

An alternative about entropy of groups

Abstract We prove the following alternative: either there exists a finitely generated group with exponential growth whose entropy is zero, or there exists a universal constant $M > 0$ such that the entropy of all non-elementary hyperbolic groups with cyclic centralizers and their non-elementary subgroups is at least M. ***To cite this article: V. Guirardel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 743–746.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Considérons un groupe de type fini G et S une famille génératrice finie. On note $b_R(G,S)$ le cardinal d'une boule de rayon R dans G muni de la métrique des mots induite par S. La suite $b_R(G,S)$ étant sous-multiplicative, on peut définir *l'entropie marquée* $h(G,S)$ par

$$h(G,S) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log b_R(G,S) = \inf_{R\geqslant 1} \frac{1}{R} \log b_R(G,S).$$

L'entropie marquée dépend *a priori* de la famille génératrice considérée mais le fait que l'entropie marquée soit non-nulle n'en dépend pas (c'est même un invariant de quasi-isométrie) : on dit dans ce cas que G est à *croissance exponentielle*. *L'entropie algébrique* de G est alors définie par $H(G) = \inf\{h(G,S) \mid S$ famille génératrice finie de $G\}$.

Gromov a posé la question suivante en 1981 ([6], main open problem dans [7]).

QUESTION 1 (Gromov). – Existe-t-il des groupes à croissance exponentielle dont l'entropie est nulle ?

On connaît plusieurs classes de groupes ayant une entropie non nulle dès qu'ils sont à croissance exponentielle (*voir* [7]) : les groupes agissant minimalement par isométries sur des arbres réels [1] qui ne sont pas des droites [1], les groupes à un relateur [5], les groupes résolubles [10], les groupes linéaires en caractéristique nulle [3], et les groupes hyperboliques [8]. Notons au passage que la preuve de Koubi [8] démontre le fait suivant :

FAIT 0.1. – *Étant donné un groupe hyperbolique Γ, il existe une constante $C_\Gamma > 0$ telle que tout sous-groupe de type fini non élémentaire de Γ a une entropie minorée par C_Γ.*

Adresse e-mail : vincent.guirardel@ujf-grenoble.fr (V. Guirardel).

S1631-073X(02)02365-8/FLA

Il est remarquable que les deux premières familles de groupes citées ont des entropies *uniformément* minorées (par une constante indépendante du choix du groupe dans la famille).

QUESTION 2. – *Existe-t-il une constante $M > 0$ telle que l'entropie algébrique de tout groupe hyperbolique non élémentaire soit minorée par M* ?

L'objet de cette note est de démontrer que l'une au moins des deux questions précédentes possède une réponse positive :

THÉORÈME 0.2. – *L'un au moins des énoncés suivants est vrai* :

(a) *il existe un groupe de type fini à croissance exponentielle mais dont l'entropie algébrique est nulle* ;

(b) *il existe une constante universelle $M > 0$ telle que tous les groupes hyperboliques non élémentaires à centralisateurs cycliques et tous leurs sous-groupes non élémentaires de type fini ont une entropie algébrique minorée par M.*

Rappelons qu'un groupe G est à centralisateurs cycliques si le centralisateur de tout élément de G est cyclique (fini ou infini). En particulier, un groupe hyperbolique sans torsion est à centralisateurs cycliques. Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème plus précis suivant :

THÉORÈME 0.3. – *Soit M la borne inférieure des entropies des groupes hyperboliques non élémentaires à centralisateurs cycliques et de leurs sous-groupes de type fini non élémentaires.*
Il existe un groupe G de type fini tel que G est à croissance exponentielle et $H(G) = M$.

L'idée de cette note est de considérer un groupe générique G dans l'adhérence des groupes hyperboliques à centralisateurs cycliques (au sens de la topologie sur l'espace des groupes marqués, voir les définitions dans la section suivante). Un tel groupe a la propriété (T) ce qui assure qu'il est à croissance exponentielle. En utilisant à la fois que G est limite de groupes hyperboliques, et que tout groupe hyperbolique est limite de groupes isomorphes à G, on montre que l'entropie de G est égale à la borne inférieure des entropies des groupes hyperboliques.

Une version du Théorème 0.2 a été indépendamment démontrée par Osin dans [11] en utilisant des idées très proches de cette note.

1. Quelques rappels sur la topologie sur l'espace des groupes marqués

Cette partie commence par des rappels folkloriques (*voir* par exemple [2]).

DÉFINITION 1.1. – Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on appelle *groupe marqué* (G, S) la donnée d'un groupe de type fini G avec une famille finie de générateurs $S = (s_1, \ldots, s_n)$ numérotés de 1 à $n = \#S$. On note X_n l'ensemble des groupes marqués.

L'ensemble X_n est muni d'une topologie qui a été utilisée par R. Grigorchuk puis C. Champetier [4,2] : deux groupes sont proches si des boules de grand rayon de leurs graphes de Cayley sont isomorphes en tant que graphes étiquetés. Cette topologie fait de X_n un compact totalement disconnexe.

LEMME 1.2 (Cas des groupes de présentation finie). – *Soit $(G, S) \in X_n$ avec G de* présentation finie. *Alors il existe un voisinage V de (G, S) tel que $\forall (G', S') \in V$, G' est un quotient de G.*

Démonstration. – On peut lire les relations de G dans une boule de rayon suffisamment grand. □

DÉFINITION 1.3. – La *classe d'isomorphisme* de G dans X_n est l'ensemble des groupes marqués (G', S') avec G' isomorphe à G. On la note $\mathrm{Iso}_n(G)$. Un sous-ensemble $E \subset X_n$ est *saturé* si c'est une union de classes d'isomorphismes.

Le lemme suivant est un exercice :

LEMME 1.4. – *L'adhérence d'un ensemble saturé est saturé.*

Dynamique dans l'adhérence des groupes hyperboliques, transitivité. – Nous rappelons ici les résultats principaux de [2]. Soit $\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}$ (resp. $\mathcal{H}_n^{\mathrm{st}}$) le sous-espace saturé de X_n constitué des groupes hyperboliques à centralisateurs cycliques (resp. sans torsion). On notera $\overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}}$ et $\overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{st}}}$ leurs adhérences.

DÉFINITION 1.5. – Soit $\mathcal{H} \subset X_n$ un ensemble saturé. On dit que $\overline{\mathcal{H}}$ est *transitif* s'il existe $(G_0, S_0) \in \overline{\mathcal{H}}$ tel que $\overline{\mathrm{Iso}_n(G_0)} = \overline{\mathcal{H}}$. On dira qu'un tel point (G_0, S_0) est un *point transitif* de $\overline{\mathcal{H}}$.

THÉORÈME 1.6 ([2]). – *Les espaces $\overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}}$ et $\overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{st}}}$ sont transitifs et admettent un G_δ-dense de points transitifs.*

COROLLAIRE 1.7 ([2]). – *Il existe un G_δ-dense de groupes marqués (G_0, S_0) dans $\overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}}$ (resp. $\overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{st}}}$) qui sont infinis, possèdent la propriété* (T) *de Kazhdan, et qui sont donc non moyennables et à croissance exponentielle.*

Remarque 1. – Le corollaire découle facilement du Théorème 1.6. Par exemple, soit G_0 tel que $\overline{\mathrm{Iso}_n(G_0)} = \overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{st}}}$, et $(G, S) \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{st}}$ un groupe hyperbolique ayant la propriété (T). Puisque $(G, S) \in \overline{\mathrm{Iso}_n(G_0)}$ et que G est de présentation finie, G_0 est un quotient de G et a donc la propriété (T). On voit de même qu'un point transitif possède toujours une famille génératrice de cardinal 2.

2. Preuve du théorème

2.1. La fonction entropie marquée

Il semble que l'observation suivante, bien que complètement élémentaire, n'est pas explicitement mentionnée dans la littérature.

OBSERVATION 2.1. – *La fonction entropie marquée $h : X_n \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement. Autrement dit,*

$$si\ (G_k, S_k) \xrightarrow{k\to\infty} (G, S), \quad alors\ h(G, S) \geqslant \limsup h(G_k, S_k)$$

soit encore, pour toute partie $E \subset X_n$, $\inf h(E) = \inf h(\overline{E})$.

Démonstration. – Les fonctions $b_R : X_n \to \mathbb{R}$ sont continues, et $h = \inf_R \frac{1}{R} \log b_R$ est donc semi-continue supérieurement comme infimum de fonction continues. □

2.2. Une version faible du théorème

Dans la suite, on se place dans le cadre des groupes hyperboliques à centralisateurs cycliques, le cas sans torsion étant complètement similaire. Étant donné un entier n fixé, on définit une entropie *restreinte* où on ne considère que des familles génératrices de cardinal n :

$$H_n(G) = \inf\bigl\{h(G, S) \mid S \text{ famille génératrice de cardinal } n \text{ de } G\bigr\} = \inf h\bigl(\mathrm{Iso}_n(G)\bigr).$$

Notons que $H_n(G) \geqslant H_{n+1}(G) \geqslant H(G)$ puisque $h(G, (s_1, \ldots, s_n)) = h(G, (s_1, s_1, \ldots, s_n))$.

PROPOSITION 2.2. – *Soit $M_n = \inf\{H_n(G) \mid (G, S) \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}\} = \inf h(\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}})$. Pour tout point transitif $(G_0, S_0) \in \overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}}$, on a $H_n(G_0) = M_n$.*

Démonstration. – Soit (G_0, S_0) transitif dans $\overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}}$, i.e. tel que $\overline{\mathrm{Iso}_n(G_0)} = \overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}}$. La semi-continuité de l'entropie donne donc $H_n(G_0) = \inf h(\mathrm{Iso}_n(G_0)) = \inf h(\overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}}) = \inf h(\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}) = M_n$. □

2.3. L'espace des sous-groupes. Preuve du théorème principal

DÉFINITION 2.3. – On note $\mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}} \subset X_n$ l'ensemble des groupes marqués $(H, S) \in X_n$ où H est un sous-groupe non élémentaire d'un groupe hyperbolique à centralisateurs cycliques.

PROPOSITION 2.4. – $\overline{\mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}}} = \overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}}$. *En particulier $\overline{\mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}}}$ est transitif, et $M_n = \inf h(\overline{\mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}}})$.*

Démonstration. – C'est une conséquence du résultat principal de [2] (Théorème 5.19) (*voir* aussi [9]) qui affirme qu'étant donnés des sous-groupes $H_1, \ldots, H_p$ de type fini non élémentaires d'un groupe hyperbolique Γ à centralisateurs cycliques et un entier R, il existe un quotient Γ' de Γ hyperbolique à centralisateurs cycliques dans lequel la boule de rayon R de Γ s'injecte, et sur lequel chacun des H_i se surjecte. En particulier l'ensemble des boules des groupes hyperboliques non élémentaires à centralisateurs cycliques est le même que l'ensemble des boules de leurs sous-groupes non élémentaires. Un ensemble fermé de X_n étant caractérisé par les boules des groupes marqués qui le composent, on a donc $\overline{\mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}}} = \overline{\mathcal{H}_n^{\mathrm{cc}}}$. □

LEMME 2.5. – *M_n est indépendant de n, c'est une constante universelle notée M. En particulier, M s'exprime en termes de l'entropie algébrique* (*non restreinte*) :

$$M = \inf\bigl\{H(G) \mid G \text{ sous-groupe non élémentaire d'un groupe hyperboliques à c.c.}\bigr\}.$$

Démonstration. – Puisque tout groupe marqué de $\mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}}$ apparaît dans $\mathcal{SH}_{n+1}^{\mathrm{cc}}$ par répétition d'un générateur, on a $M_n \geqslant M_{n+1}$. Par ailleurs, si $(G, S) \in \mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}}$, il existe $s_i, s_j \in S$ tels que $\langle s_i, s_j\rangle$ soit non élémentaire. Puisque $h(\langle s_i, s_j\rangle, (s_i, s_j)) \leqslant h(G, S)$ on en déduit que $M_2 \leqslant M_n$ pour tout $n \geqslant 2$. Donc $M_n = M_2 = M$ est indépendant de n. □

LEMME 2.6. – *Il existe un G_δ-dense de groupes marqués dans $\overline{\mathcal{SH}_2^{\mathrm{cc}}}$ qui sont transitifs dans tous les $\overline{\mathcal{SH}_m^{\mathrm{cc}}}$ pour $m \geqslant 2$.*

Démonstration. – Étant donné $n \geqslant 2$, considérons l'application $i_n : \overline{\mathcal{SH}_2^{\mathrm{cc}}} \to \overline{\mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}}}$ correspondant à la répétition $n - 2$ fois du premier élément de S. L'image de i_n est un ouvert-fermé, et i_n est un homéomorphisme sur son image. L'image réciproque par i_n du G_δ dense des points transitifs de $\overline{\mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}}}$ est donc un G_δ dense. En passant à l'intersection sur n, on obtient un G_δ dense de $\overline{\mathcal{SH}_2^{\mathrm{cc}}}$ de groupes transitifs dans tous les $\overline{\mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}}}$. □

Preuve du Théorème 0.3. – Considérons G_0 un groupe transitif dans $\overline{\mathcal{SH}_n^{\mathrm{cc}}}$ pour tout n. D'après la Proposition 2.2, on a pour tout n, $H_n(G_0) = M$. Donc $H(G_0) = \inf_n H_n(G_0) = M$. □

Remerciements. Je voudrais adresser un grand merci à Christophe Champetier pour tout le temps passé à m'expliquer des maths, et pas seulement les siennes.

[1] Bucher et de la Harpe donnent le résultat pour des arbres simpliciaux mais la preuve s'applique aux arbres réels.

Références bibliographiques

[1] M. Bucher, P. de la Harpe, Free products with amalgamation and HNN-extensions of uniformly exponential growth, Math. Notes 67 (2000) 686–689.
[2] C. Champetier, L'espace des groupes de type fini, Topology 39 (2000) 657–680.
[3] A. Eskin, S. Mozes, H. Oh, Uniform exponential growth for linear groups, Internat. Res. Notices, to appear.
[4] R.I. Grigorchuk, Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means, Math. USSR-Izv. 25 (2) (1985) 259–300.
[5] R.I. Grigorchuk, P. de la Harpe, One-relator groups of exponential growth have uniformly exponential growth, Math. Notes 69 (3–4) (2001) 575–577.
[6] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu, Structures métriques pour les variétés Riemanniennes, Cedic/F-Nathan, 1981.
[7] P. de la Harpe, Uniform growth in groups of exponential growth, Geom. Dedicata, to appear.
[8] M. Koubi, Croissance uniforme dans les groupes hyperboliques, Ann. Inst. Fourier 48 (1998) 1441–1453.
[9] A.Y. Ol'shanskii, On residualing homomorphisms and G-subgroups of hyperbolic groups, Internat. J. Algebra 3 (4) (1993) 365–409.
[10] D.V. Osin, The entropy of solvable groups, Ergodic Theory Dynamical Systems, to appear.
[11] D.V. Osin, Weakly amenable groups, Preprint, December 2001.