C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 961–966

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Non existence de solutions globales de certaines équations d'ondes non linéaires

Mohammed Aassila

Institut de Mathématique, Université de Fribourg, Pérolles, CH-1700, Fribourg, Suisse

Reçu le 15 octobre 2001 ; accepté après révision le 28 février 2002

Note présentée par Thierry Aubin.

Résumé On étudie l'équation des ondes semi-linéaire $u_{tt} - \Delta u = p^{-k}|u|^m$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, où p est un facteur conforme tendant vers 0 à l'infini. On montre que les solutions explosent en temps fini pour des petites puissances m, alors qu'elles ont un temps de vie arbitrairement long pour les m grands. De plus, on étudie l'explosion en temps fini des solutions de la classe d'équations des ondes quasilinéaires $u_{tt} - \Delta u = p^{-k}|Lu|^m$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. ***Pour citer cet article : M. Aassila, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 961–966.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Nonexistence of global solutions to some nonlinear wave equations

Abstract We study the semilinear wave equation $u_{tt} - \Delta u = p^{-k}|u|^m$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, where p is a conformal factor approaching 0 at infinity. We prove that the solutions blow-up in finite time for small powers m, while having an arbitrarily long life-span for large m. Furthermore, we study the finite time blow-up of solutions for the class of quasilinear wave equations $u_{tt} - \Delta u = p^{-k}|Lu|^m$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. ***To cite this article: M. Aassila, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 961–966.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In this Note we study the non existence of global solutions to the nonlinear wave equation $u_{tt} - \Delta u = F(u, \partial u)$ for $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. This equation arises in different areas of applied mathematics, physics, and engineering, and describes such familiar and important processes as the movement of vibrating strings, drum heads, sound and electromagnetic waves. The nonlinearities like $F(u, \partial u) = mu + u^3$, $m \geqslant 0$, were proposed as models in relavistic quantum mechanics with local self-interaction, see [4]. The so-called σ-model for the pure jauge solutions of the Yang–Mills equations involves nonlinearities of the type $F(u, \partial u) = u(|u_t|^2 - |\nabla u|^2)$, see [5].

First, we consider a semilinear wave equation:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = p^{-k}|u|^m, & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, \mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}), \quad u_t(0, \mathbf{x}) = u^1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{P$_1$}$$

where $m > 1$, $k = sm - \frac{n+3}{2}$, $s = \frac{n-1}{2}$, p is a conformal factor approaching 0 at infinity, and u^0, u^1 belong to $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. We prove the following result:

Adresse e-mail : mohammed.aassila@unifr.ch (M. Aassila).

S1631-073X(02)02355-5/FLA

THEOREM 1. – *Let* $1 < m < \frac{2}{n} + 1$, *and* u *be a solution to* (P_1) *with initial data* $u^0 \geqslant 0$ *and* $u^1 \geqslant 0$, *then* u *blows up is a finite time.*

Second, we study the quasilinear wave equation:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = p^{-k}|Lu|^m, & (t, \mathrm{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, \cdot) = u^0, \quad u_t(0, \cdot) = u^1 \end{cases} \tag{P$_2$}$$

(see the French version for a definition of L). We prove the following result:

THEOREM 2. – *Let* $1 < m < \frac{2}{n} + 1$, *and* u *be a solution to* (P_2) *with initial data* $u^0 \leqslant 0$, *then* u *blows up in a finite time.*

---

1. Introduction

Dans cette Note on s'intéresse à l'explosion en temps fini des solutions de l'équation des ondes non linéaires :

$$u_{tt} - \Delta u = F(x, \partial u) \quad \text{pour } (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Motivés par le travail de Christodolou [3] et Penrose [4], nous utilisons une modification de la méthode de compactification conforme pour établir la non existence globale des solutions pour des équations d'ondes semi-linéaires et quasi-linéaires.

Soient $\mathbf{M}_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'espace de Minkowski, et $\mathbf{E} = \mathbb{R} \times S^n$ l'univers d'Einstein, définissons l'application $c : \mathbf{M}_0 \to \mathbf{E}$ par :

$$c(t, \mathbf{x}) = c(t, x_1, \ldots, x_n) = (T, Y_1, \ldots, Y_{n+1}),$$

où

$$\sin T = pt, \quad \cos T = p\left(1 - \frac{t^2 - \mathbf{x}^2}{4}\right), \quad T \in (-\pi, \pi),$$

$$Y_j = px_j, \quad j = 1, \ldots, n, \quad Y_{n+1} = p\left(1 + \frac{t^2 - \mathbf{x}^2}{4}\right)$$

avec

$$p = \left(t^2 + \left(1 - \frac{t^2 - \mathbf{x}^2}{4}\right)^2\right)^{-1/2}.$$

Munissons $\mathbf{M}_0$ de la métrique de Minkowski :

$$g = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{x}^2 = \mathrm{d}t^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i^2$$

et $\mathbf{E}$ de la métrique

$$\widetilde{g} = \mathrm{d}T^2 - \mathrm{d}S^2,$$

où $\mathrm{d}S^2$ est la métrique canonique sur S^n. L'application c est une application conforme entre les variétés de Lorentz $(\mathbf{M}_0, g)$ et $(\mathbf{E}, \widetilde{g})$ avec un facteur conforme p, c'est-à-dire, $c^*\widetilde{g} = p^2 g$.

On modifiera la transformation conforme c en la composant avec une famille à un paramètre de dilatations, et on obtient donc une famille à un paramètre de transformations conformes. On utilisera ensuite ces applications pour transformer dans l'univers d'Einstein $\mathbf{E}$ l'équation

$$\Box u = p^{-k}|Lu|^m, \quad m > 1,$$

où $s=\frac{n-1}{2}$, $k=sm-\frac{n+3}{2}$, et Lu est défini par :

$$Lu := a(t,r)u_t + b(t,r)u_r + c(t,r)u, \quad r = |\mathbf{x}|.$$

Le facteur p^{-k} apparaît dans l'équation ci-dessus pour une raison technique. Il nous permet d'éviter de travailler avec les singularités le long de la frontière dans $\mathbf{E}$ de l'espace de Minkowski compactifié $c(\mathbf{M}_0)$. Cependant, lorsque le paramètre R tend vers l'infini, ce facteur tend vers 1 uniformément sur tout ensemble compact de $\mathbf{M}_0$. Dans le cas semi-linéaire $Lu=u$, ceci fait de l'équation ci-dessus une bonne approximation de l'équation classique $\Box u = |u|^m$.

Enfin, on définit les espaces $X := \{f : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ f \geqslant 0\}$ et $Y := \{f : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ f \leqslant 0\}$.

Nos principaux résultats sont les suivants :

THÉORÈME 1. – *Soient* $1 < m < \frac{2}{n}+1$, *et* u *une solution de* :

$$\begin{cases} \Box u = p^{-k}|u|^m & \textit{dans } \mathbf{M}_0, \\ u(0,\cdot) = u^0 \in X, \quad u_t(0,\cdot) = u^1 \in X. \end{cases}$$

Alors, u *explose en un temps fini.*

THÉORÈME 2. – *Soient* $1 < m < \frac{2}{n}+1$, *et* u *solution de* :

$$\begin{cases} \Box u = p^{-k}|Lu|^m & \textit{dans } \mathbf{M}_0, \\ u(0,\cdot) = u^0 \in Y, \quad u_t(0,\cdot) = u^1, \end{cases}$$

où

$$Lu = A\left(R + \frac{t^2+r^2}{4R}\right)u_t + A\frac{tr}{2R}u_r + \left(A\frac{st}{2R} + C\right)u.$$

Alors, u *explose en un temps fini.*

(*Avec les coordonnées d'Einstein,* $A = \sin sT$ *et* $C = -s\cos sT$.)

La relation $m < \frac{2}{n}+1$ n'est pas une puissance critique précise différenciant le cas global du cas de l'explosion. Cependant, le Théorème 1 a l'avantage, en plus de l'explosion en temps fini, que la nonlinéarité dans l'équation $\Box u = p^{-k}|u|^m$ est tempérée à l'infini par le facteur p^{-k}, qui pour $m < \frac{2}{n}+1$ tend vers 0 lorsque $|\mathbf{x}|$ tend vers l'infini, et la nonlinéarité donne toujours une explosion en temps fini.

Pour $m < \frac{n+3}{n+1} < \frac{2}{n}+1$, les coefficients de la nonlinéarité de l'équation $\Box u = p^{-k}|Lu|^m$ tendent vers 0 lorsque $|\mathbf{x}|$ tend vers l'infini. Donc, pour de telles puissances même si la nonlinéarité est tempérée à l'infini, on a toujours explosion en temps fini. Nous renvoyons à [2,6] pour d'autres résultats sur l'explosion en temps fini.

2. Idée de la démonstration du Théorème 1

On considère dans $\mathbf{M}_0$ le d'alembertien $\Box$ relatif à la métrique g et dans $\mathbf{E}$ l'opérateur $\Box_c = \widetilde{\Box} + s^2$, $s = \frac{n-1}{2}$, où $\widetilde{\Box}$ est le d'alembertien relatif à la métrique $\widetilde{g}$. On utilisera u ou ϕ pour désigner une fonction dans $\mathbf{M}_0$ et $\widetilde{\phi}$ pour désigner une fonction dans $\mathbf{E}$. On montre que :

LEMME 2.1. – *Si* u *et* $\widetilde{\phi}$ *sont tels que* $u = p^s(\widetilde{\phi}\circ c)$, *alors on a* :

$$(\Box_c\widetilde{\phi})\circ c = p^{-(n+3)/2}\Box u.$$

Maintenant, on compose la transformation conforme c avec une famille à un paramètre de dilatations pour obtenir une nouvelle famille à un paramètre de transformations conformes c_R. Considérons la famille à un paramètre de dilatations sur $\mathbf{M}_0$

$$d_R : (t,\mathbf{x}) \mapsto \left(\frac{t}{R}, \frac{\mathbf{x}}{R}\right), \quad R > 0,$$

alors d_R est une application conforme, c'est-à-dire, $d_R^* g = R^{-2}g$, et on montre que :

LEMME 2.2. –
(i) *L'application* c_R, $R>0$, *est conforme. Plus précisément,* $c_R^*\widetilde{g} = R^{-2}p^2g$.
(ii) *Si* u *et* $\widetilde{\phi}$ *sont tels que* $u = R^2p^s(\widetilde{\phi}\circ c_R)$, *alors*
$$\big(\Box_c\widetilde{\phi}\big)\circ c_R = p^{-(n+3)/2}\Box u.$$

Pour une fonction $v\in\mathbf{E}$, définissons :
$$\mathcal{L}v := A(T,\rho)v_T + B(T,\rho)v_\rho + C(T,\rho)v,$$
où $\rho\in[0,\pi)$ est la distance sur S^n à partir du pôle Nord. Alors en identifiant $\mathbf{M}_0$ et $c_R(\mathbf{M}_0)$ on a le :

LEMME 2.3. –
(i) *Si* u *et* v *sont tels que* $u = R^{-2/(m-1)}p^sv$, *alors*
$$\mathcal{L}v = R^{2/(m-1)}p^{-s}Lu,$$
où la relation entre les coefficients a, b, c *de* L *et* A, B, C *de* $\mathcal{L}$ *est donnée par* :
$$a = A\left(R+\frac{t^2+r^2}{4R}\right)+B\frac{tr}{2R},\quad b = A\frac{tr}{2R}+B\left(R+\frac{t^2+r^2}{4R}\right),\quad c = A\frac{st}{2R}+B\frac{sr}{2R}+C.$$
(ii) *L'équation* $\Box u = p^{-k}|Lu|^m$ *se transforme par* c_R *en* $\Box_cv = |\mathcal{L}v|^m$, *où* u *et* v *sont reliés par* $u = R^{-2/(m-1)}p^sv$, *et* $k = sm-\frac{n+3}{2}$.

Ebauche de la démonstration du Théorème 1. – En définissant $\widetilde{u^0} = u^0\circ c^{-1}$, $\widetilde{u^1} = u^1\circ c^{-1}$, le problème :
$$\begin{cases}\Box u = p^{-k}|u|^m & \text{dans } \mathbf{M}_0,\\ u(0,\cdot)=u^0, \quad u_t(0,\cdot)=u^1,\end{cases}$$
se transforme par c en :
$$\begin{cases}\Box_cv = |v|^m & \text{dans } \mathbf{E},\\ v(0,\cdot) = R^{2/(m-1)}p_0^{-s}\widetilde{u^0}, \quad v_T(0,\cdot) = R^{(m+1)/(m-1)}p_0^{-(s+1)}\widetilde{u^1},\end{cases}$$
où $u = R^{-2/(m-1)}p^sv$ et $p_0 = \cos^2\frac{\rho}{2}$.
Ensuite, on définit la fonction :
$$H(T) := \int_{S^n} v(T,\cdot)\,\mathrm{d}S,$$
comme on a $\int_{S^n}\Box_cv = \int_{S^n}|v|^m$ et que $\int_{S^n}\Delta_{S^n}v\,\mathrm{d}S = 0$ par le théorème de divergence, on arrive à :
$$H''(T)+s^2H(T) = \int_{S^n}\big|v(T,\cdot)\big|^m\,\mathrm{d}S.$$
Par l'inégalité de Hölder, on déduit que
$$H'' \geqslant C|H|^m + \big(C|H|^{m-1}-s^2\big)|H|. \tag{1}$$
Comme $\mathrm{d}S = (p^n/R^n)\,\mathrm{d}x$, on a :
$$\begin{aligned}H(0) &= R^{2/(m-1)}\int_{S^n}\big(p_0^{-s}\widetilde{u^0}\big)\,\mathrm{d}S = R^{2/(m-1)-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{r^2}{4R^2}\right)^{-(n+1)/2}u^0\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant R^{2/(m-1)-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{r^2}{4}\right)^{-(n+1)/2}u^0\,\mathrm{d}x = CR^{2/(m-1)-n},\\ H'(0) &= R^{(m+1)/(m-1)}\int_{S^n}\big(Rp_0^{-(s+1)}\widetilde{u^1}\big)\,\mathrm{d}S = R^{(m+1)/(m-1)-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{r^2}{4R^2}\right)^{-(n-1)/2}u^1\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant R^{(m+1)/(m-1)-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{r^2}{4}\right)^{-(n-1)/2}u^1\,\mathrm{d}x = CR^{(m+1)/(m-1)-n}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{2}{m-1} > n$ on a par (1) pour $R \gg 1$:

$$H'' \geqslant C H^m$$

et donc par intégration,

$$H'^2 \geqslant C\left(H^{m+1} - H(0)^{m+1}\right) + H'(0)^2.$$

Par suite, si on pose $x(T) = H(0)^{-1} H(C^{-1/2} H(0)^{-(m-1)/2} T)$, alors x est solution de :

$$\begin{cases} x' \geqslant \sqrt{x^{m+1} - 1 + C(R^{2/(m-1)-n})^{1-m}}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

En choisissant, encore une fois, R suffisamment grand pour que $R^{2/(m-1)-n} \geqslant 2$, on déduit du Lemme 2.4 (*voir* ci-dessous) que $L_x \leqslant C$ où L_x est le temps de vie de x. Par conséquent, le temps de vie T_0 de $H(T)$ est tel que

$$T_0 \leqslant C\left(R^{2/(m-1)-n}\right)^{-(m-1)/2} = C R^{n(m-1)/2-1}.$$

Finalement, par définition de c, on a pour le temps de Minkowski correspondant l'expression :

$$t_0 \sim R T_0 \leqslant C R^{n(m-1)/2} \leqslant C R.$$

LEMME 2.4. – *Considérons le problème suivant* :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x^{m+1} - M^{m+1} + M^2}, \\ x(0) = M \end{cases}$$

avec $M \geqslant 2$ *une constante. Alors, le temps de vie* L_x *de la solution* x *vérifie*

$$L_x \sim M^{-(m-1)/2}.$$

3. Idée de la démonstration du Théorème 2

Soit $v = R^{2/(m-1)} p^{-s} u$, alors par les Lemmes 2.1, 2.2 on a :

$$\Box_c v = |\mathcal{L} v|^m \quad \text{et} \quad \mathcal{L} v = (\sin sT) v_T - (s \cos sT) v.$$

On définit $H(T) = \int_{S^n} \mathcal{L} v \, \mathrm{d}S$, et par le théorème de divergence on déduit que

$$H'(T) = \int_{S^n} \sin sT \cdot \Box_c v \, \mathrm{d}S.$$

Maintenant, on a :

$$0 = \int_{S^n} \left(\sin sT (\Box_c v) - \sin sT |\mathcal{L} v|^m \right) \mathrm{d}S$$

et donc pour $T \in [0, \frac{2\pi}{n-1})$ on déduit que $H'(T) \geqslant \sin sT |H(T)|^m$ et par suite

$$\frac{1}{H^{m-1}} \leqslant \frac{1}{H(0)^{m-1}} - C \sin^2 \frac{s}{2} T,$$

où C est une constante dépendant seulement de n et m. D'où v explose en un temps au plus égal à T_0, où T_0 est la plus petite solution de l'équation :

$$H(0)^{-(m-1)} = C \sin^2 \frac{s}{2} T.$$

Comme $\mathrm{d}S = (p^n / R^n) \, \mathrm{d}x$, on a :

$$H(0) = -s \int_{S^n} v(0, \cdot) \, \mathrm{d}S = -s R^{2/(m-1)-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^{-(n+1)/2} u^0 \, \mathrm{d}x = C' R^{2/(m-1)-n},$$

où C' est une constante positive. Par suite

$$T_0(R) = \mathrm{O}\left(R^{-1+n(m-1)/2}\right).$$

Finalement,

$$t_0 \sim RT_0 = \mathrm{O}\big(R^{n(m-1)/2}\big).$$

Pour les démonstrations complètes, nous renvoyons le lecteur à [1].

Acknowledgements. The author is supported by the Swiss National Science Foundation, grant 2100-063464.00/1.

Références bibliographiques

[1] M. Aassila, Blow-up of solutions to some nonlinear wave equations, Preprint.
[2] C. Antonini, F. Merle, Optimal bounds on positive blow-up solutions for a semilinear wave equation, Intern. Math. Res. Notices 21 (2001) 1143–1167.
[3] D. Christodolou, Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data, Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986) 267–282.
[4] R. Penrose, Conformal treatment of infinity, in relativity, groups and topology, in: B. De Witt, C. De Witt (Eds.), Gordon and Breach, 1963.
[5] J. Shatah, Weak solutions and the development of singularities in the SU(2) σ-model, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988) 459–469.
[6] W. Strauss, Nonlinear Wave Equations, American Mathematical Society, Providence, 1989.