

Non-explosion en temps grand et stabilité de solutions globales des équations de Navier–Stokes

Isabelle Gallagher^a, Dragos Iftimie^{a,b}, Fabrice Planchon^c

^a Centre de mathématiques, UMR 7640, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

^b IRMAR, UMR 6625, Université de Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes, France

^c Laboratoire d'analyse numérique, UMR 7598, boîte 187, Université Paris-VI, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu et accepté le 17 décembre 2001

Note présentée par Jean-Michel Bony.

Résumé

Nous nous donnons a priori une solution globale des équations de Navier–Stokes incompressibles dans \mathbb{R}^3 , dans la classe $C_t(\dot{H}^{1/2})$. Nous montrons successivement que la norme $\dot{H}^{1/2}$ tend vers 0 à l'infini, que cette norme contrôle la norme $L_t^2(\dot{H}^{3/2})$, et qu'une telle solution globale est stable. *Pour citer cet article : I. Gallagher et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 289–292.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Non-blowup at large times and stability for global solutions to the Navier–Stokes equations

Abstract

Suppose there exists a global solution u to the incompressible Navier–Stokes equations, such that $u \in C_t(\dot{H}^{1/2})$. We prove that its $\dot{H}^{1/2}$ norm goes to 0 at infinity. We next use this fact to control the $L_t^2(\dot{H}^{3/2})$ norm of u , and finally we prove that such a solution is stable. *To cite this article : I. Gallagher et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 289–292.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Introduction. – Nous nous intéressons aux équations de Navier–Stokes incompressibles dans l'espace entier,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla \cdot (u \otimes u) - \nabla p, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Il est bien connu qu'il existe deux théories distinctes pour le problème de Cauchy : les solutions faibles de Leray [8], pour des données initiales $u_0 \in L^2$, qui sont globales mais pour lesquelles l'unicité (ou la propagation de la régularité) est un problème ouvert ; et les solutions « fortes » de Fujita et Kato [4] pour des données initiales $u_0 \in \dot{H}^{1/2}$, qui sont uniques et locales en temps, c'est-à-dire que $u \in C([0, T^*), \dot{H}^{1/2})$. Le

Adresses e-mail : Isabelle.Gallagher@math.polytechnique.fr (I. Gallagher); Dragos.Iftimie@math.polytechnique.fr (D. Iftimie); fabrice.planchon@ann.jussieu.fr (F. Planchon).

but de cette Note est d'étudier une solution pour laquelle on suppose a priori que $T^* = +\infty$. Remarquons que si l'on suppose la donnée petite alors la solution est effectivement globale. Nous montrons qu'une solution globale « grande » devient nécessairement petite après un certain temps, ce qui induit en particulier qu'elle est stable. Plus précisément, nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 1. – Soit $u \in C([0, +\infty[, \dot{H}^{1/2})$ une solution de (1). Alors,
 – il ne peut y avoir explosion à $t = +\infty$, et plus précisément $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} = 0$.
 – la solution u appartient à $L^2(0, +\infty; \dot{H}^{3/2})$.

Remarque. – Une version L^3 de la première partie du théorème 1 est implicite dans [7], où il est montré qu'une solution $u \in C_t(L^3)$ est telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} \|u(t)\|_\infty = 0$.

Insistons bien sur le fait qu'aucune hypothèse n'est faite sur le taux de croissance de la norme $\dot{H}^{1/2}$ de la solution. La seconde partie du théorème peut se voir comme une conséquence de la première partie et du théorème qui suit. Celui-là est un résultat de persistance, pour lequel il ne semble pas exister de référence, bien qu'il fasse partie du folklore des solutions fortes. Il s'agit de la réciproque du résultat bien connu [3] suivant : si une solution $u \in C([0, T^*); \dot{H}^{1/2})$ appartient à $L^2((0, T^*), \dot{H}^{3/2})$ alors elle est prolongeable dans $\dot{H}^{1/2}$ au-delà de T^* .

THÉORÈME 2. – Soit $T^* < +\infty$ et soit $u \in C([0, T^*]; \dot{H}^{1/2})$ une solution de (1). Alors $\int_0^{T^*} \|u\|_{\dot{H}^{3/2}}^2 ds < +\infty$.

Nous obtenons donc la seconde propriété du théorème 1 de la manière suivante. Il existe T tel que $u(T)$ soit petit en norme $\dot{H}^{1/2}$; par la théorie des solutions à données petites $u \in L^2((T, \infty); \dot{H}^{3/2})$ et par le théorème 2 (cas T^* fini), $u \in L^2((0, T); \dot{H}^{3/2})$ d'où l'on conclut que $u \in L^2((0, \infty); \dot{H}^{3/2})$.

Une conséquence importante du théorème 1 est qu'il permet de démontrer un théorème de stabilité sous l'hypothèse générique $u \in C_t(\dot{H}^{1/2})$. Remarquons que si l'on suppose que la solution est légèrement plus régulière, $u \in L_{t,loc}^\infty(\dot{H}^1) \cap L_{t,loc}^2(\dot{H}^2)$, alors un théorème de stabilité a été démontré dans [10] sous l'hypothèse d'intégrabilité à l'infini $\nabla u \in L_t^4(L_x^2)$, qui peut être éliminée grâce au théorème 1.

THÉORÈME 3. – Soit $u \in C_t(\dot{H}^{1/2})$ une solution a priori globale de (1). Alors cette solution est stable, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon(u)$ tel que si $\|u_0 - v_0\|_{\dot{H}^{1/2}} < \varepsilon(u)$ alors v , la solution de condition initiale v_0 , est globale et

$$\|(u - v)(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \int_0^t \|\nabla(u - v)(s)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 ds \leq C \|u_0 - v_0\|_{\dot{H}^{1/2}} e^{C(\int_0^t \|u\|_{\dot{H}^{3/2}}^2 ds + \int_0^t \|u\|_{\dot{H}^1}^4 ds)}.$$

Nous renvoyons à [6] pour les preuves complètes et étendues au cadre des espaces de Besov, qui incluent en particulier le cas $u \in C_t(L^3)$. Remarquons que la stabilité des solutions L^3 a été récemment obtenue par Tchamitchian [11] par des techniques complètement différentes, avec une hypothèse supplémentaire de petitesse à temps grand, qui peut être éliminée en prenant en compte les résultats de Lemarié [7]. Nous donnons maintenant une idée des preuves, qui s'adaptent au cas des espaces de Besov modelés sur L^p en utilisant une combinaison des techniques introduites dans [2] et [5].

Démonstration du théorème 1. – La remarque importante est la suivante : si $u_0 \in \dot{H}^{1/2}$, l'espace de Sobolev inhomogène, alors par unicité fort-faible [12] la solution u reste dans L^2 et vérifie l'inégalité d'énergie $\forall t \geq 0$, $E(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2$. Par suite, $u \in L_t^\infty(L^2) \cap L_t^2(\dot{H}^1)$, et par interpolation u est dans $L_t^4(\dot{H}^{1/2})$. Pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe donc un temps t_0 tel que $\|u(t_0)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq \varepsilon_0$, et à partir de ce temps on peut appliquer la théorie des petites solutions, donc la solution reste petite et tend vers zéro à l'infini en norme $\dot{H}^{1/2}$ (voir par exemple [9]). Pour réduire le cas général à ce cas, on utilise la procédure de séparation hautes fréquences/basses fréquences introduite dans [1] dans le contexte de Navier–Stokes, et réutilisée avec succès dans [5] pour obtenir des solutions globales d'énergie infinie en dimension 2. Plus précisément, on décompose $u_0 = v_0 + w_0$ où $w_0 \in \dot{H}^{1/2}$ avec une petite norme et $v_0 \in \dot{H}^{1/2}$ avec une grande norme. On résout l'équation $\partial w / \partial t = \Delta w - \nabla \cdot (w \otimes w) - \nabla p$, avec $\nabla \cdot w = 0$,

$w(x, 0) = w_0(x)$, par la théorie des données petites, pour obtenir une solution $w \in C_t(\dot{H}^{1/2}) \cap L_t^2(\dot{H}^{3/2})$ avec une petite norme (voir par exemple [3]) et qui tend vers zéro à l’infini ; on a en particulier

$$\|w(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \int_0^t \|w(s)\|_{\dot{H}^{3/2}}^2 ds \leq \|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}}^2. \quad (2)$$

Ensuite, $v \stackrel{\text{déf}}{=} u - w$ vérifie l’équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - \nabla \cdot (v \otimes v) - \nabla \cdot (w \otimes v) - \nabla \cdot (v \otimes w) - \nabla p, \quad \text{avec } \nabla \cdot v = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (3)$$

et v appartient à l’espace $C_t(\dot{H}^{1/2}) \cap L_{t,\text{loc}}^2(\dot{H}^{3/2})$, car w appartient à cet espace, de même que u grâce au théorème 2. Ainsi, à partir de l’équation de v , on obtient $\partial_t v \in L_{t,\text{loc}}^2(\dot{H}^{-1/2})$. En se souvenant que $v_0 \in L^2$ et $v \in L_{t,\text{loc}}^\infty(\dot{H}^{1/2}) \subset L_{t,\text{loc}}^2(\dot{H}^{1/2})$, on en déduit que $v \in C_t(L^2)$. Nous pouvons donc écrire une inégalité d’énergie pour v : multiplions l’équation de v par v et intégrons en temps et espace pour obtenir

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|v\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|v_0\|_{L^2}^2 + 2 \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla w) \cdot v \, dx \, ds \right|. \quad (4)$$

On estime maintenant par des théorèmes de produit classiques

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla w) \cdot v \, dx \, ds \right| &= \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (v \otimes w) \cdot \nabla v \, dx \, ds \right| \leq C \int_0^t \|w\|_{\dot{H}^{1/2}} \|v\|_{\dot{H}^1}^2 ds \\ &\leq C \|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}} \int_0^t \|v\|_{\dot{H}^1}^2 ds, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est une conséquence de (2). En supposant que $C \|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq \frac{1}{2}$ on peut simplifier le terme ci-dessus dans la partie gauche de (4) ce qui permet de conclure que l’énergie de v , $E(v)$ reste bornée. On obtient alors par le raisonnement précédent qu’il existe T tel que $\|v(T)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq \|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}}$. On en déduit que $\|u(T)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq 2 \|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}}$ et par la théorie des solutions petites que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} = 0$. Remarquons qu’il n’est en fait pas nécessaire d’invoquer ce résultat issu de la théorie des solutions petites : un argument auto-contenu consiste simplement à remarquer qu’à partir de $\|u(T)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq 2 \|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}}$ et de la relation (2) appliquée à $u|_{[T, \infty[}$ on peut déduire que $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq \|u(T)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq 2 \|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}}$, ce qui conclut la démonstration de la première partie du théorème 1 puisque $\|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}}$ peut être choisi arbitrairement petit. Nous avons déjà montré la seconde partie à partir de la première et du théorème 2, le théorème 1 est donc démontré.

Démonstration du théorème 2. – On commence par remarquer que la norme $L_t^2(\dot{H}^{3/2})$ est finie pour un petit intervalle de temps après l’instant initial (par unicité). Il s’agit donc de montrer qu’elle ne peut exploser jusqu’à T^* inclus. On écrit donc l’inégalité d’énergie pour le produit scalaire $\dot{H}^{1/2}$, noté $(\cdot | \cdot)_{\dot{H}^{1/2}}$. Il vient

$$\|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + 2 \int_0^t \|u\|_{\dot{H}^{3/2}}^2 ds \leq \|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + 2 \left| \int_0^t (\nabla(u \otimes u) | u)_{\dot{H}^{1/2}} ds \right|. \quad (5)$$

Par densité des fonctions régulières dans $C_t(\dot{H}^{1/2})$ on peut séparer de nouveau u en deux parties : une partie $w \in C_t(\dot{H}^{1/2})$ petite et une partie v grande et régulière. Par les théorèmes de produit classiques, on peut estimer

$$\begin{aligned} |(\nabla(u \otimes u) | u)_{\dot{H}^{1/2}}| &\leq |(w \cdot \nabla u | u)_{\dot{H}^{1/2}}| + |(v \cdot \nabla u | u)_{\dot{H}^{1/2}}| \\ &\leq C \|w\|_{\dot{H}^{1/2}} \|u\|_{\dot{H}^{3/2}}^2 + C \|v\|_{\dot{H}^{3/2} \cap L^\infty} \|u\|_{\dot{H}^{3/2}} \|u\|_{\dot{H}^{1/2}} \\ &\leq \left(C \|w\|_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{1}{2} \right) \|u\|_{\dot{H}^{3/2}}^2 + C \|v\|_{\dot{H}^{3/2} \cap L^\infty}^2 \|u\|_{\dot{H}^{1/2}}^2. \end{aligned}$$

En choisissant $\|w\|_{\dot{H}^{1/2}}$ assez petit, on peut simplifier le premier terme du membre de droite de cette inégalité dans la partie gauche de (5). Le résultat suit par application du lemme de Gronwall, puisque $v \in L^2((0, T^*), \dot{H}^{3/2} \cap L^\infty)$.

Remarque 1. – La démonstration s’applique également au cas $T^* = +\infty$, compte-tenu de la première partie du théorème 1 qui assure $\lim_{+\infty} \|u\|_{\dot{H}^{1/2}} = 0$.

Remarque 2. – La démonstration précédente procède d’un argument de séparation qui est au cœur de chacun des résultats énoncés ici. On peut aussi obtenir le théorème 2 de la façon suivante, qui nous a été indiquée par J.-Y. Chemin : en examinant la démonstration de l’existence locale de solutions $\dot{H}^{1/2}$, il est facile de voir que le temps d’existence est uniformément minoré pour des données initiales dans un compact de $\dot{H}^{1/2}$. Alors le théorème 2 est une simple conséquence de l’unicité des solutions $\dot{H}^{1/2}$, puisque l’ensemble de données initiales $v_t(x) = u(x, t)$ pour $t \in [0, T^*]$ est compact (comme image d’un compact).

Démonstration du théorème 3. – Comme il l’a été remarqué, la solution a priori globale $u \in C_t(\dot{H}^{1/2})$ est automatiquement dans $L_t^2(\dot{H}^{3/2})$. On considère donc l’équation vérifiée par la différence $w \stackrel{\text{déf}}{=} u - v$, c’est-à-dire $\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w - \nabla \cdot (w \otimes w) - \nabla \cdot (w \otimes u) - \nabla \cdot (u \otimes w) - \nabla p$, avec $\nabla \cdot w = 0$, $w(x, 0) = w_0(x) \stackrel{\text{déf}}{=} u_0(x) - v_0(x)$, et l’on cherche une estimation a priori pour cette équation. On écrit donc de nouveau l’inégalité d’énergie dans $\dot{H}^{1/2}$, pour obtenir

$$\|w(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + 2 \int_0^t \|w\|_{\dot{H}^{3/2}}^2 ds \leq \|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + C \left| \int_0^t (w \cdot \nabla w | w)_{\dot{H}^{1/2}} + (w \cdot \nabla u | w)_{\dot{H}^{1/2}} + (u \cdot \nabla w | w)_{\dot{H}^{1/2}} ds \right|.$$

Les deux premiers termes s’estiment facilement : le premier qui est non-linéaire en w peut être absorbé à gauche si l’on suppose a priori que le membre de gauche est petit, puisque l’on a $\left| \int_0^t (w \cdot \nabla w | w)_{\dot{H}^{1/2}} ds \right| \leq \int_0^t \|w(s)\|_{\dot{H}^{1/2}} \|w(s)\|_{\dot{H}^{3/2}}^2 ds$. Le second se majore simplement en utilisant les mêmes règles de produit et le fait que $\nabla u \in L_t^2(\dot{H}^{1/2})$. Le dernier terme est un peu plus délicat, puisqu’à priori il n’est pas possible d’estimer (les basses fréquences de) u à l’aide de la norme $L_t^2(\dot{H}^{3/2})$. On fait alors appel à la norme $L_t^4(\dot{H}^1)$ en estimant par les lois de produits

$$\left| (u \cdot \nabla w | w)_{\dot{H}^{1/2}} \right| \leq C \|u\|_{\dot{H}^1} \|w\|_{\dot{H}^1} \|w\|_{\dot{H}^{3/2}} \leq C \|u\|_{\dot{H}^1} \|w\|_{\dot{H}^{1/2}}^{1/2} \|w\|_{\dot{H}^{3/2}}^{3/2} \leq \frac{1}{4} \|w\|_{\dot{H}^{3/2}}^2 + C \|u\|_{\dot{H}^1}^4 \|w\|_{\dot{H}^{1/2}}^2.$$

Ceci permet de traiter ce terme comme le second. Remarquons que le second terme devient similaire au terme ci-dessus à la différence près que la norme $\|u\|_{\dot{H}^1}^4$ est remplacée par la norme $\|u\|_{\dot{H}^{3/2}}^2$. Notons en outre qu’une utilisation de la théorie de Littlewood–Paley et de commutateurs permet de s’affranchir de la présence de norme $\|u\|_{\dot{H}^1}^4$ dans la majoration (et donc dans l’estimation finale), au prix d’un peu plus de technique. On termine ensuite classiquement en appliquant le lemme de Gronwall.

Références bibliographiques

- [1] C.P. Calderón, Existence of weak solutions for the Navier–Stokes equations with initial data in L^p , Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1) (1990) 179–200.
- [2] M. Cannone, F. Planchon, Fonctions de Lyapunov pour les équations de Navier–Stokes, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1999–2000, Exp. No. XII, 7. École Polytech., Palaiseau, 2000.
- [3] J.-Y. Chemin, Remarques sur l’existence globale pour le système de Navier–Stokes incompressible, SIAM J. Math. Anal. 23 (1) (1992) 20–28.
- [4] H. Fujita, T. Kato, On the Navier–Stokes initial value problem. I, Arch. Rational Mech. Anal. 16 (1964) 269–315.
- [5] I. Gallagher, F. Planchon, On infinite energy solutions to the Navier–Stokes equations: global 2D existence and 3D weak-strong uniqueness. Arch. Rational Mech. Anal. (2001) (à paraître).
- [6] I. Gallagher, D. Ifimie, F. Planchon, Non blow-up at infinity and stability of global solutions to the Navier–Stokes equations, Manuscript.
- [7] P.-G. Lemarié-Rieusset, Recent progress in the Navier–Stokes problem, à paraître à CRC Press.
- [8] J. Leray, Sur le mouvement d’un liquide visqueux remplissant l’espace, Acta Math. 63 (1934) 193–248.
- [9] F. Planchon, Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the incompressible Navier–Stokes equations in \mathbf{R}^3 , Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13 (1996) 319–336.
- [10] G. Ponce, R. Racke, T. Sideris, E. Titi, Global stability of large solutions to the 3D Navier–Stokes equations, Comm. Math. Phys. 159 (2) (1994) 329–341.
- [11] P. Tchamitchian, Communication personnelle.
- [12] W. von Wahl, The Equations of Navier–Stokes and Abstract Parabolic Equations, Vieweg, Braunschweig, 1985.