C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 135–138

Probabilités/*Probability Theory*

Absolue continuité des lois jointes des intégrales stables multiples

Jean-Christophe Breton

Laboratoire de statistique et probabilités, Bât. M2, FRE-CNRS 2222, Université des sciences et technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 19 octobre 2001 ; accepté après révision le 1er décembre 2001

Note présentée par Marc Yor.

Résumé On s'intéresse aux lois des intégrales stochastiques stables multiples définies par des représentations en séries de type LePage (*voir* [1,6]). On poursuit l'étude initiée dans [1] en donnant des conditions pour que les lois jointes d'intégrales stables soient absolument continues. On applique pour cela une méthode de stratification sur l'espace de Skorokhod sur lequel on se ramène préalablement. Pour citer cet article : J.-C. Breton, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 135–138. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Absolute continuity of joint laws of multiple stable integrals

Abstract We are interested in the laws of multiple stable stochastic integrals defined by LePage series representation (*see* [1,6]). We continue the study begun in [1] giving conditions ensuring absolute continuity of joint laws of stable integrals. To this way, we apply a stratification method on the Skorokhod space on which we first take back the problem. To cite this article: J.-C. Breton, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 135–138. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

On considère sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, M une mesure aléatoire α-stable sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ de mesure de contrôle la mesure de Lebesgue λ, de fonction de biais $\beta : [0,1] \to [-1,1]$ selon la terminologie de [7], § 3. On s'intéresse ici aux intégrales α-stables d-multiples dont la construction a été décrite dans [1]. Le but est de poursuivre l'étude de [1] où on a prouvé l'absolue continuité des lois de ces intégrales en considérant maintenant le cas des lois jointes de ces intégrales. Rappelons que d'après [1], on définit l'intégrale α-stable d-multiple $I_d(f)$ pour

$$f \in \mathrm{L}^\alpha (\log_+)^{d-1}\big([0,1]^d\big) := \left\{ f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \;\middle|\; \int_{[0,1]^d} |f|^\alpha \big(1 + \log_+ |f|\big)^{d-1} \, \mathrm{d}\lambda^d < +\infty \right\}$$

Adresse e-mail : breton@jacta.univ-lille1.fr (J.-C. Breton).

S1631-073X(02)02243-4/FLA

avec l'hypothèse $\beta \equiv 0$ quand $\alpha \geqslant 1$; pour cela, on passe par une représentation de LePage

$$S_d(f) = C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{i_1,\dots,i_d>0} \gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_d}\, \Gamma_{i_1}^{-1/\alpha}\cdots\Gamma_{i_d}^{-1/\alpha}\, f(V_{i_1},\dots,V_{i_d}),$$

où $\{\Gamma_i\}_i$ est une suite de v.a. de loi gamma indépendante des suites $(V_i)_i$ de v.a.i.i.d. uniforme sur $[0,1]$ et $(\gamma_i)_i$ de loi conditionnelle par rapport à V_i donnée par $\frac{1}{2}(1+\beta(V_i))\,\delta_{\{1\}} + \frac{1}{2}(1-\beta(V_i))\,\delta_{\{-1\}}$ et C_α est une constante de normalisation. On a alors $I_d(f) \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_d(f)$. On considère dans la suite, pour $p \geqslant 1$, $d_1,\dots,d_p \in \mathbb{N}^*$, la loi jointe de $(I_{d_1}(f_1),\dots,I_{d_p}(f_p))$ où $f_i \in L^\alpha(\log_+)^{d_i-1}([0,1]^{d_i})$. On propose une condition (H) sur les noyaux f_i qui garantit l'absolue continuité. La preuve suit la même idée générale que dans [1] où on applique la méthode de stratification (*voir* [3,5] pour une description). On commence par préciser les notations et énoncer le résultat, on termine avec des exemples concrets où (H) est satisfaite.

2. Résultat

Soient $N = d_1 + \cdots + d_p$, $a^i = (a_0^i,\dots,a_p^i) \in \mathbb{N}^{p+1}$ une $(p+1)$-partition de d_i. Pour $b \in \mathbb{N}^p$, considérons l'ensemble

$$E(b) = \left\{ a = \left(a^1,\dots,a^p\right) \in \left(\mathbb{N}^p\right)^{p+1} \;\middle|\; \left|a^i\right| = d_i,\ \sum_{i=1}^p a_k^i = b_k \text{ pour } k = 1,\dots,p \right\}.$$

Pour $a \in (\mathbb{N}^p)^{p+1}$, considérons M_a la matrice $(a_j^i)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, σ_a la permutation de $\{1,\dots,N\}$ qui à $j = \sum_{u=1}^{k-1} b_u + \sum_{s=1}^{i-1} a_{s,k} + l$, $l = 1,\dots,a_{i,k}$ associe $\sigma_a(j) = \sum_{v=1}^{i-1} d_i + \sum_{s=1}^{k-1} a_{i,s} + l$ et U_a le changement de variable correspondant. Étant donné $\phi(t) = f_1(t_1,\dots,t_{N_1})\cdots f_p(t_{N_{p-1}+1},\dots,t_{N_p})$, on note

$$\phi_b(t) = \sum_{a\in E(b)} \prod_{i=1}^p \frac{d_i!}{a_0^i!\cdots a_p^i!} \det M_a\, \phi\big(U_a(t)\big),$$

et $\bar{\phi}_b$ la symétrisée de ϕ_b dans les blocs $(b_1+\cdots+b_i+1,\dots,b_1+\cdots+b_{i+1})$. Le résultat est alors :

THÉORÈME 1. – *Soient* $f_i \in \mathrm{L}^\alpha(\log_+)^{d_i-1}([0,1]^{d_i})$, $i = 1,\dots,p$, *satisfaisant l'hypothèse* (H) :

$$\textit{il existe } b = (b_1,\dots,b_p) \in \mathbb{N}^p,\ |b| = N,\ \textit{avec } \bar{\phi}_b \textit{ non presque partout nulle sur } [0,1]^N.$$

Alors la loi jointe de $(I_{d_1}(f_1),\dots,I_{d_p}(f_p))$ *est absolument continue par rapport à* λ^p.

L'hypothèse (H) est à rapprocher de celle analogue du théorème 5 de [4] pour l'absolue continuité des lois jointes des intégrales de Wiener–Itô. La preuve détaillée est donnée dans [2], on en donne dans la suite une esquisse.

Démonstration. – D'après le résultat de représentation des intégrales stables (*cf.* [1,6]), il est facile de voir que $(S_{d_1}(f_1),\dots,S_{d_p}(f_p)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (I_{d_1}(f_1),\dots,I_{d_p}(f_p))$. De la même façon que dans [1], on introduit $F = (F_1,\dots,F_p)$ de l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}$ des fonctions *cadlag* sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^p$:

$$F_i(x) = \sum_{t_1,\dots,t_{d_i}>0} \delta_x(t_1)\cdots\delta_x(t_{d_i})\, f_i(t_1,\dots,t_{d_i}),$$

où $\delta_x(t) = x(t) - x(t-)$ désigne le saut de x en t. Soit η le processus stable, de loi P, donné par $\eta_t = M([0,t])$, on a facilement, en utilisant le théorème de représentation dans le cas unidimensionnel,

$F(\eta) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (S_{d_1}(f_1), \ldots, S_{d_p}(f_p))$. On se ramène donc à étudier PF^{-1}. Par approximation, il suffit de trouver pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{X}_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ tel que $P(\mathcal{X}_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$ et $P_{\mathcal{X}_\varepsilon} F^{-1} \ll \lambda^p$. Pour cela, on considère un point de Lebesgue de l'ensemble de mesure positive $A_{\bar{\phi}_b} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \bar{\phi}_b(x) \neq 0\}$ où b est donné par (H). Pour $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V_\varepsilon = U_1^\varepsilon \times \cdots \times U_N^\varepsilon$ avec les propriétés

$$\frac{\lambda^N(V_\varepsilon \cap A_{\bar{\phi}_b})}{\lambda^N(V_\varepsilon)} \geqslant 1 - \varepsilon, \quad U_i^\varepsilon \cap U_j^\varepsilon = \emptyset, \quad i \notin j.$$

On montre alors que $\mathcal{X}_\varepsilon$, l'ensemble des x avec un unique saut maximal sur chaque U_i^ε en $T_{U_i^\varepsilon}(x)$ avec de plus $T_\varepsilon(x) := (T_{U_1^\varepsilon}(x), \ldots, T_{U_N^\varepsilon}(x)) \in A_{\bar{\phi}_b}$, vérifie $P(\mathcal{X}_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$. Pour voir maintenant $P_{\mathcal{X}_\varepsilon} F^{-1} \ll \lambda^p$, il suffit, par séparabilité, pour $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$ fixé de trouver un voisinage $V(x)$ tel que $P_{V(x)} F^{-1} \ll \lambda^p$. On appliquera pour cela la méthode de stratification sur ce voisinage. Soit donc $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$ fixé, notons $t_i = T_{U_i^\varepsilon}(x)$, t_i' l'instant du second plus grand saut de x sur U_i^ε pour $i = 1, \ldots, N$, et $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \min_{i=1,\ldots,N} |\delta_x(t_i)|$. Par finitude du nombre de sauts de x en module supérieur à $\varepsilon_0/2$, on choisit $\delta_1 > 0$ tel que t_i soit le seul instant de $\Delta_i' = (t_i - \delta_1, t_i + \delta_1) \subset U_i^\varepsilon$ d'un saut de module supérieur à $\varepsilon_0/2$. Soient alors

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0/2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_p < \varepsilon_0\ ;\\
&\delta_2 < \frac{1}{4} \min\Big\{\varepsilon_0, 2\delta_1, \inf_{i=1,\ldots,N}\big\{\left|\delta_x(t_i)\right| - \left|\delta_x\left(t_i'\right)\right|\big\}, 2\varepsilon_1 - \varepsilon_0\Big\}\ ;\\
&\beta = \delta_1 - \delta_2\ ;\\
&\Delta_i = (t_i - \beta, t_i + \beta) \subset \Delta_i' \subset U_i^\varepsilon.
\end{aligned}$$

On associe à ces quantités un ouvert $V(x)$ et on introduit la famille de transformations $\{G_c\}_{c \in (\mathbb{R}^+)^p}$ qui permet de mettre en place la méthode de stratification : on considère p champs locaux $l^1, \ldots, l^p$ définis comme dans [5], § 21, avec pour l^i, les paramètres $\varepsilon_i > 0$, les entiers b_i, les intervalles $\Delta_j^i = \Delta_{b_1 + \cdots + b_{i-1} + j}$ pour $j = 1, \ldots, b_i$ et τ_j^i du signe de $\delta_x(t_i)$ de module constant $\tau > 0$. On définit alors la famille donnée par

$$G_c x = x + c_1\, l_x^1 + \cdots + c_p\, l_x^p, \quad c = (c_1, \ldots, c_p).$$

On vérifie facilement que ce semi-groupe est admissible au sens de [5], § 4 (i.e. $\forall c\ PG_c^{-1} \ll P$). On définit alors une relation d'équivalence $\sim$ sur $V(x)$ par $x_1 \sim x_2$ si et seulement s'il existe $c_1,\ c_2 \in (\mathbb{R}^+)^p$ avec $G_{c_1} x_1 = G_{c_2} x_2$. Soit Γ la partition en strates $\gamma = \{x + \sum_{i=1}^p c_i\, l_x^i,\ (c_1, \ldots, c_p) \in (\mathbb{R}^+)^p\}$, associée. On montre que le théorème 4.1 de [5] s'applique, on a donc l'existence pour P_Γ-presque chaque γ d'une mesure conditionnelle P_γ, concentrée sur la strate γ et admettant une densité. On a alors la formule :

$$P_{V(x)} F^{-1} = \int_{V(x)/\Gamma} P_\gamma F^{-1}\ P_\Gamma(\mathrm{d}\gamma).$$

Pour montrer $P_{V(x)} F^{-1} \ll \lambda^p$, il suffit maintenant de voir que pour P_Γ-presque chaque γ avec une trace sur le voisinage $V(x)$, on a $P_\gamma F^{-1} \ll \lambda^p$. Comme P_γ est concentrée sur la strate γ et est absolument continue par rapport à λ, on se ramène à l'étude des restrictions F_γ de F sur les traces de strates γ. $F_\gamma : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est donnée par

$$F_\gamma(c) = \big(F_{1,\gamma}(c), \ldots, F_{p,\gamma}(c)\big) = F\big(x + c_1\, l_x^1 + \cdots + c_p\, l_x^p\big), \quad c = (c_1, \ldots, c_p).$$

On montre que F_γ est non dégénérée en calculant son jacobien $J_\gamma(c)$. C'est un polynôme à plusieurs indéterminées dont on montre la non nullité en en étudiant le coefficient $A_{\gamma,b}$ associé à b donné par la condition (H). On a

$$A_{\gamma,b} = \sum_{a\in E(b)} \left(\prod_{i=1}^{p} \frac{d_i!}{a_0^i! \cdots a_p^i!}\right) \det M_a \prod_{i=1}^{p} \sum_{t_{N_{i-1}+1},\dots,t_{N_i}} \prod_{j=k_p^{i-1}+1}^{k_0^i} \delta_x(t_j)$$
$$\times \prod_{j=k_0^i+1}^{k_1^i} \omega_x^1(t_j) \cdots \prod_{j=k_{p-1}^i+1}^{k_p^i} \omega_x^p(t_j)\ f_i(t_{N_{i-1}+1}, \dots, t_{N_i}),$$

où ω^i est associé à l^i par $\omega_x^i(t) = \tau_j^i$ si $t \in \Delta_j^i$, $|\delta_x(t)| > \varepsilon_i$, et $\delta_x(t)\,\tau_j^i > 0$, $\omega_x^i(t) = 0$ sinon. On montre finalement $A_{\gamma,b} \neq 0$, pour γ avec une trace sur $V(x)$, en étudiant les sauts d'un représentant de la classe d'équivalence γ. Le choix du voisinage $V(x)$ garantit effectivement $A_{\gamma,b} \neq 0$. On en déduit la non-dégénérescence de F_γ et donc $P_\gamma F^{-1} \ll \lambda^p$ puis $P_{V(x)} F^{-1} \ll \lambda^p$. Finalement les procédures de localisation, approximation et représentation mènent à l'absolue continuité de $\mathcal{L}(I_{d_1}(f_{d_1}), \dots, I_{d_p}(f_{d_p}))$.

Exemples. – On donne quelques exemples où la condition suffisante (H) du théorème 1 est satisfaite.

(1) Cas $p = 1$, $d_1 = 1$ avec $b = 1$: on a $E(b) = \{1\}$ et $\sigma_1 = \mathrm{id}$ et $\bar{\phi}(t) = \phi(t) = f(t)$. La condition (H) est vérifiée si $f \not\equiv 0$. Réciproquement, sinon, $I_d(f)$ est de loi dégénérée.

(2) Cas $p > 1$, $d_1 = \cdots = d_p = 1$ avec $b = (1, \dots, 1)$: on a $E(b) = \{a = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \mid \sum_{j=1}^p a_{i,j} = 1\ \forall i,\ \sum_{i=1}^p a_{i,j} = 1\ \forall j\}$. On montre que (H) est vérifiée si $\det\{f_i(t_j)\} \neq 0$. Réciproquement, pour le cas particulier $p = 3$ et $f_3 = f_1 + f_2$, on constate que $\det\{f_i(t_j)\} = 0$: (H) n'est pas vérifiée et la loi de $(I_1(f_1), I_1(f_2), I_1(f_3))$ est concentrée sur le plan d'équation $x + y - z = 0$, négligeable pour λ^3.

(3) Cas $p = 1$, $d_1 = d > 1$ avec $b = d$: on a facilement $E(b) = \{d\}$, $\sigma_d = \mathrm{id}$ et $\bar{\phi}(t) = \phi(t) = f(t)$ car f est symétrique. On retrouve le résultat de [1] : (H) est vérifiée si $f \not\equiv 0$. Sinon la loi est dégénérée.

(4) Cas $p = 2$, $d_1 = d_2 = 2$ avec $b = (2, 2)$: on montre que (H) est vérifiée s'il n'existe pas de réels c_1, c_2 tels que $c_1 f_1 = c_2 f_2$. Réciproquement, sinon la loi jointe est dégénérée.

(5) Cas $p = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = d$ avec $b = (1, d)$. La condition (H) s'écrit

$$f_1(t_1) f_2(t_2, t_3, \dots, t_{d+1}) \not\equiv \frac{1}{d} \sum_{i=2}^{d+1} f_1(t_i) \underbrace{f_2(t_2, \dots, t_{d+1})}_{\text{avec } t_1 \text{ en ième position}}.$$

(6) Cas $p = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$ avec $b = (1, 1, 2)$: la condition (H) s'écrit

$$S_b\phi_b(t) = \begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & f_3(t_1, t_4) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & f_3(t_2, t_4) \\ f_1(t_3) & f_2(t_3) & f_3(t_3, t_4) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & f_3(t_1, t_3) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & f_3(t_2, t_3) \\ f_1(t_4) & f_2(t_4) & f_3(t_4, t_3) \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Références bibliographiques

[1] Breton J.-C., Intégrales stables multiples : représentation, absolue continuité de leur loi, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 331 (2000) 717–720.
[2] Breton J.-C., Absolue continuité des lois jointes des intégrales stables multiples, Publ. IRMA Lille 55 (XIII) (2001).
[3] Davydov Y.A., Lifshits M.A., Stratification method in some probability problems, J. Soviet Math. 31 (2) (1985) 2796–2858.
[4] Davydov Y.A., On distributions of multiple Wiener–Itô integrals, Theory Probab. Appl. 35 (1) (1991) 27–37.
[5] Davydov Y.A., Lifshits M.A., Smorodina N.V., Local properties of distributions of stochastic functionals, J. Amer. Math. Soc. 173 (1998).
[6] Samorodnitsky G., Szulga J., An asymptotic evaluation of the tail of a multiple symmetric α-stable integral, Ann. Probab. 17 (1989) 1503–1520.
[7] Samorodnitsky G., Taqqu M.S., Stable Non-Gaussian Random Processes, Chapman and Hall, 1994.