

# Sur la limite adiabatique des fonctions êta et zêta

Sergiu Moroianu

Institutul de Matematică al Academiei Române, PO Box 1-764, RO-70700 Bucarest, Roumanie

Reçu le 22 novembre 2001 ; accepté le 30 novembre 2001

Note présentée par Jean-Michel Bismut.

---

## Résumé

Dans cette Note, on démontre l'existence de la limite adiabatique de la fonction  $\eta(s)$  d'un opérateur sur l'espace total d'une fibration au dessus de  $S^1$ , construit à partir d'une famille d'opérateurs différentiels inversibles d'ordre 1. Nous identifions cette limite à l'holonomie d'une famille méromorphe de connexions dans le fibré trivial. Dans le même contexte, la fonction  $\zeta$  diverge. On donne une formule pour les deux premiers coefficients du développement asymptotique. Le premier résultat reste vrai pour une famille non-inversible si on se restreint à  $s = 0$ . Dans le cas d'une famille d'opérateurs de Dirac, on retrouve la formule d'holonomie de Bismut–Freed. Pour citer cet article : S. Moroianu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 131–134. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## On the adiabatic limit of the eta and zeta functions

## Abstract

In this Note we prove the existence of the adiabatic limit of the  $\eta(s)$  function of an operator on the total space of a fibration over  $S^1$ , constructed from an invertible family of first-order differential operators. We identify this limit as the holonomy of a meromorphic family of connections in the trivial bundle. In the same context, the  $\zeta$  function diverges. We give a formula for the first two terms of the asymptotic expansion. The first result remains true for a non-invertible family if we restrict ourselves to  $s = 0$ . For a family of Dirac operators, we retrieve the holonomy formula of Bismut–Freed. To cite this article: S. Moroianu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 131–134. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

Soit  $N$  une variété compacte sans bord,  $E$  un fibré Hermitien sur  $N$  et  $\delta$  un opérateur différentiel elliptique d'ordre 1 agissant sur les sections de  $E$ . Nous définissons la fonction zêta normalisée de  $\delta$  par la formule

$$\bar{\zeta}(\delta, s) := \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{0 \neq \lambda \in \text{Spec}(\delta^* \delta)} |\lambda|^{-s/2} + \dim \ker(\delta).$$

Si  $\delta$  est un opérateur auto-adjoint, on définit également

$$\eta(\delta, s) := \frac{\Gamma((1+s)/2)}{\sqrt{\pi}} \sum_{0 \neq \lambda \in \text{Spec}(\delta)} \text{sgn}(\lambda) |\lambda|^{-s} + \dim \ker(\delta).$$

---

Adresse e-mail : moroianu@alum.mit.edu (S. Moroianu).

Ces deux fonctions sont holomorphes dans le demi-plan  $\{\text{Re}(s) > \dim N\}$ , et se prolongent analytiquement à  $\mathbf{C}$  avec des pôles simples aux entiers  $k \leq \dim N$ . Nos définitions diffèrent des définitions usuelles par des facteurs  $\Gamma$  qui seront essentiels pour assurer la validité de nos résultats en dehors de  $s = 0$ . Par Atiyah, Patodi et Singer [1], la fonction  $\eta(\delta, \cdot)$  est holomorphe en  $s = 0$ , et sa valeur en 0 coïncide avec l'invariant  $\eta$ . Soulignons que nos résultats ne dépendent pas de la régularité de la fonction  $\eta(\delta, \cdot)$  en  $s = 0$ , sauf dans le cas élémentaire où  $N = S^1$ .

Soit  $N$  une variété compacte, qui est l'espace total d'une fibration de base compacte  $M$ . Dans la suite, nous considérons seulement la restriction de cette fibration à un cercle plongé dans  $M$ . On pourra donc supposer que  $M = S^1$ . Soit  $E = E^+ \oplus E^-$  un fibré Hermitien  $\mathbf{Z}_2$ -gradué sur  $N$ , soit  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$  le fibré  $\mathbf{Z}_2$ -gradué sur  $S^1$ , dont les fibres sont les sections dans la fibre de  $E = E^+ \oplus E^-$ . Soit  $D$  une famille  $C^\infty$  d'opérateurs elliptiques d'ordre 1 paramétrée par  $S^1$ , qui envoie  $\mathcal{E}^+$  dans  $\mathcal{E}^-$ . Supposons fixée une connexion sur la fibration  $N \rightarrow S^1$ , une métrique  $g$  sur les fibres, et des connexions Hermitiennes  $\nabla$  sur  $E^\pm$ . Pour  $Y \in T_x S^1$ , soit  $\tilde{Y}$  le relèvement horizontal de  $Y$ . On considère l'opérateur différentiel  $\tilde{\nabla}_Y := \nabla_{\tilde{Y}} + \frac{1}{4} \text{Tr}(L_{\tilde{Y}}g)$ , qui agit sur les sections de  $E$  sur  $N$ . Ici  $\text{Tr}$  est la trace, et  $L_{\tilde{Y}}g$  est la dérivée de Lie du tenseur vertical  $g$ , qui est tensorielle en  $Y$ . Notons que  $\tilde{\nabla}_Y$  préserve le produit Hermitien  $L^2$  sur les fibres.

Soit  $d\sigma^2$  la métrique canonique de volume  $2\pi$  sur  $S^1$  et soit  $\partial_\sigma$  le champ de vecteurs unitaires sur  $S^1$  positivement orienté. Pour  $t > 0$ , soit  $\delta_t$  l'opérateur autoadjoint agissant sur les sections de  $E$  sur  $N$

$$\delta_t := \begin{bmatrix} -ti\tilde{\nabla}_{\partial_\sigma} & D^* \\ D & ti\tilde{\nabla}_{\partial_\sigma} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Un tel opérateur apparaît par exemple dans [2], où les fibres de  $N \rightarrow S^1$  sont de dimension paire, orientées et admettent une structure spin, où  $E$  est le fibré  $\mathbf{Z}_2$ -gradué des spineurs de la fibre, et où la connexion  $\nabla$  vient de la connexion de Levi-Civita. Dans ce cas,  $\delta_t$  est l'opérateur de Dirac sur  $N$  associé à la métrique  $g_t^N := g + \frac{d\sigma^2}{t^2}$ .

Nous souhaitons calculer la limite quand  $t \rightarrow 0$  des invariants spectraux définis précédemment. On dit aussi qu'on prend la limite adiabatique de ces invariants.

Soit  $f(t, s)$  une famille de fonctions méromorphes en  $s \in \mathbf{C}$ , qui est indexée par  $t \in [0, \infty)$ . Nous dirons que  $f(t, \cdot)$  converge vers  $f(0, \cdot)$  quand  $t \rightarrow 0$  si pour tout  $s \in \mathbf{C}$  et tout  $k \in \mathbf{Z}$ , le coefficient de Laurent  $c_k(t, s)$  de  $f(t, \cdot)$  en  $s$  converge vers  $c_k(0, s)$ .

Notre premier résultat concerne la limite adiabatique de la fonction  $\overline{\zeta}(\delta_t, s)$ .

**THÉORÈME 1.** – *Supposons que la famille  $\{D_x\}_{x \in S^1}$  est inversible. Alors la famille de fonctions méromorphes  $t\overline{\zeta}(\delta_t, s)$  converge vers  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{S^1} \overline{\zeta}(D, s - 1) d\sigma$ . De plus, la famille  $\overline{\zeta}(\delta_t, s)$  admet un développement asymptotique en puissances de  $t$  quand  $t \rightarrow 0$ , dont le terme constant s'annule.*

Soit maintenant  $\det D$  le fibré déterminant de la famille  $D$ . C'est un fibré en droites complexes sur  $S^1$ , qui est donc trivial. Nous pouvons trouver une trivialisations de  $\det D$  de la manière suivante (voir [2]) : il existe des fibrés triviaux de dimension finie  $U^+, U^-$  sur  $S^1$  et des morphismes de fibrés  $A_{12} : U^+ \rightarrow \mathcal{E}^-, A_{21} : \mathcal{E}^+ \rightarrow U^-, A_{22} : U^+ \rightarrow U^-$ , tels que la famille d'opérateurs

$$D_U := \begin{bmatrix} D & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

soit inversible. Nous munissons  $U^\pm$  des connexions triviales.

Pour chaque  $\alpha > 0$ , soit  $V_\alpha := \{x \in S^1; \alpha \notin \text{Spec}(D^*D)\}$ . Au dessus de  $V_\alpha$  soit  $\mathcal{E}_x^\pm = \mathcal{E}_{x, < \alpha}^\pm \oplus \mathcal{E}_{x, > \alpha}^\pm$  la décomposition de  $\mathcal{E}_x^\pm$  dans les sous-espaces engendrés par les sections propres de  $D^*D$  et de  $DD^*$ , de valeur propre inférieure, respectivement supérieure à  $\alpha$ . On peut alors demander qu'il existe un recouvrement  $\mathcal{V}$  de  $S^1$  par des ensembles  $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_k}$  tels que pour  $x \in V_\alpha \in \mathcal{V}$ ,  $D_U$  soit égal à  $D$  sur  $\mathcal{E}_{x, > \alpha}^+$ , et que  $D_U(\mathcal{E}_{x, < \alpha}^+ \oplus U^+) = \mathcal{E}_{x, < \alpha}^- \oplus U^-$ .

Le fibré déterminant muni de la connexion de Bismut–Freed [2] est alors isomorphe au fibré trivial en droites complexes, muni de la connexion  $d + A(0)$ , où  $A(0)$  est la régularisation en  $s = 0$  de la famille méromorphe de 1-formes

$$A(D_U, s) := \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \text{Tr}\left((D_U^* D_U)^{-s/2} D_U^{-1} \tilde{\nabla}(D_U)\right). \quad (2)$$

Dans le cas où  $D$  est inversible, nous obtenons une famille canonique  $A(D, s)$  en prenant  $U^\pm = 0$ .

**THÉORÈME 2.** – *Si  $D$  est inversible, alors la famille de fonctions méromorphes  $i\pi\eta(\delta_t, s)$  admet un développement de Taylor en  $t$  autour de  $t = 0$ , dont le premier terme est  $\int_{S^1} A(D, s)$ .*

Un calcul simple montre que le théorème précédent appliqué au coefficient  $c_0(\cdot, 0)$  généralise pour toute famille d’opérateurs différentiels elliptiques inversibles d’ordre 1 le théorème d’holonomie conjecturé en [8] et prouvé dans [2] pour une famille d’opérateurs de Dirac. En effet, l’holonomie de  $d + A(0)$  n’est autre que  $\exp(-\int_{S^1} A(0))$ .

L’idée de la preuve des théorèmes 1 et 2 est d’utiliser l’algèbre d’opérateurs pseudo-différentiels adiabatiques  $\Psi_a(N)$  [4,7]. Dans le cas non inversible, l’opérateur  $\delta_t^U$ , construit en remplaçant  $D$  par  $D_U$  dans (1), n’appartient pas à cette algèbre. On peut néanmoins trouver une perturbation  $\delta_t^U$  dans  $\Psi_a(N)$ , et montrer que le théorème reste vrai pour le coefficient constant autour de  $s = 0$ . En effet,  $\int_{S^1} c_0(A(D_U), 0)$  est bien défini modulo  $2\pi i\mathbf{Z}$ .

**THÉORÈME 3.** – *Dans le cas non-inversible, la limite  $\lim_{t \rightarrow 0}(\exp(-i\pi c_0(\eta(\delta_t), 0)))$  est égale à l’holonomie de la connexion de Bismut–Freed.*

*Esquisse de preuve.* – Pour simplifier, on considère seulement le cas où la famille  $D$  est inversible. Soit  $\Psi_a(N, E)$  l’algèbre des familles d’opérateurs indexés par  $t \in [0, \infty)$  de la forme  $P(t, x, y, tD_x, D_y)$ , où  $x, y$  sont des coordonnées locales sur  $S^1$ , respectivement sur les fibres. La construction rigoureuse de cette algèbre (voir [4]) est réalisée dans le cadre du programme de Melrose [5]. En l’occurrence,  $\delta_t$  appartient à cette algèbre *en tant qu’opérateur inversible*,  $y$  compris pour  $t = 0$ . Cette algèbre admet deux filtrations, l’une par l’ordre opératoire et l’autre par le négatif de l’ordre d’annulation en  $t = 0$ . Soit  $Q \in \Psi_a^{1,0}(N)$  un opérateur positif. Alors la famille des puissances complexes  $Q^s$  appartient à  $\Psi_a^{s,0}(N)$  pour tout  $s \in \mathbf{C}$  [3,7]. De plus, si  $A(s)$  est une famille entière d’opérateurs adiabatiques, alors  $\text{Tr}(Q^{-s} A(s)) \in t^{-1}C^\infty([0, \infty), \mathcal{M})$ , où par  $\mathcal{M}$  nous désignons l’espace des fonctions méromorphes avec des pôles simples en  $\dim(N)$ ,  $\dim(N) - 1, \dots$

Le quotient  $\Psi_a^{\mathbf{Z},0}(N)/\Psi_a^{\mathbf{Z},-\infty}(N)$  est isomorphe (non canoniquement) à l’espace des séries formelles  $A = \sum_{i=0}^\infty t^i A_i(x, y, \tau, D_y)$  de familles sur  $S^1$  d’opérateurs suspendus au sens de Melrose [6], munies d’une déformation du produit fibre à fibre :

$$A * B = AB + it \frac{\partial A}{\partial \tau} \tilde{\nabla}_{\partial_\sigma} B + O(t^2). \quad (3)$$

De plus, si  $P \in \Psi_a^{-\dim(N)-\epsilon,0}(N)$  admet le développement  $P \sim \sum_{i=0}^\infty t^i P_i$ , alors

$$\text{Tr}(P) \sim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^\infty \int_{T^*S^1} t^i \text{Tr}_v(P_i) \frac{d\tau \wedge d\sigma}{2\pi t},$$

où  $\text{Tr}_v$  désigne la trace sur les fibres, et  $d\tau \wedge d\sigma$  est la forme symplectique canonique sur  $T^*S^1$ . On écrit maintenant

$$\delta_t \sim_{t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} -\tau & D^* \\ D & \tau \end{bmatrix}, \quad \delta_t^2 \sim_{t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} D^* D + \tau^2 & -it \tilde{\nabla}_{\partial_\sigma}(D^*) \\ it \tilde{\nabla}_{\partial_\sigma}(D) & DD^* + \tau^2 \end{bmatrix}$$

et donc

$$\eta(\delta_t, s) = \frac{\Gamma((1+s)/2)}{\sqrt{\pi}} \text{Tr}((\delta_t^2)^{-(s+1)/2} \delta_t)$$

$$\sim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma((1+s)/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi t} \int_{T^*S^1} \text{Tr}_v \left( \begin{bmatrix} D^*D + \tau^2 & -it\tilde{\nabla}_{\partial_\sigma}(D^*) \\ it\tilde{\nabla}_{\partial_\sigma}(D) & DD^* + \tau^2 \end{bmatrix}^{- (s+1)/2} \begin{bmatrix} -\tau & D^* \\ D & \tau \end{bmatrix} \right) d\tau \wedge d\sigma,$$

tous les produits étant pris dans le sens de (3). De la même manière,

$$\bar{\zeta}(\delta_t, s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \text{Tr}((\delta^2)^{-s/2}) \sim_{t \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{2\pi t} \int_{T^*S^1} \text{Tr}_v \left[ \begin{bmatrix} D^*D + \tau^2 & -it\tilde{\nabla}_{\partial_\sigma}(D^*) \\ it\tilde{\nabla}_{\partial_\sigma}(D) & DD^* + \tau^2 \end{bmatrix}^{-s/2} \right] d\tau \wedge d\sigma.$$

Ces formules montrent que les fonctions  $\eta$  et  $\bar{\zeta}$  admettent des développements asymptotiques vers  $t = 0$  avec un terme singulier  $t^{-1}$ . Notons l'identité

$$f(s) := \int_{\mathbb{R}} (1 + \tau^2)^{-s} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s - 1/2)}{\Gamma(s)}. \tag{4}$$

Le coefficient de  $t^{-1}$  dans  $\bar{\zeta}(\delta_t, s)$  est

$$\frac{\Gamma(s/2)}{\pi} f\left(\frac{s}{2}\right) \int_{S^1} \text{Tr}(D^*D)^{-(s-1)/2} d\sigma,$$

donc par (4) on obtient la formule du théorème 1. Passons maintenant à  $\eta(\delta_t, s)$ . Il est clair que  $\text{Tr}_v(D^*D + \tau^2)^{-(s+1)/2} \tau = \text{Tr}_v(DD^* + \tau^2)^{-(s+1)/2} \tau$ , donc le terme divergent s'annule. Le terme constant se réduit à

$$2 \frac{\Gamma((1+s)/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi t} \int_{T^*S^1} \text{Tr}_v \left( -\frac{s+1}{2} (DD^* + \tau^2)^{-(s+3)/2} it\tilde{\nabla}_{\partial_\sigma}(D) D^* \right) d\tau \wedge d\sigma$$

$$= \frac{i\Gamma((1+s)/2)(-s-1)f((s+3)/2)}{2\pi^{3/2}} \int_{S^1} \text{Tr}_v((D^*D)^{-s/2} D^{-1}\tilde{\nabla}_{\partial_\sigma}(D)) d\sigma.$$

En utilisant (4), la dernière expression donne le théorème 2.  $\square$

Les démonstrations complètes des résultats annoncés ci-dessus paraîtront ultérieurement.

**Remerciements.** Je remercie Richard Melrose de m'avoir proposé ce sujet, Jean-Michel Bismut de m'avoir indiqué comment démontrer le théorème 3, et Andrei Moroianu et Nicușor Dan pour des contributions concernant l'opérateur de Dirac et la fonction Gamma.

### Références bibliographiques

[1] Atiyah M.F., Patodi V.K., Singer I.M., Spectral asymmetry and riemannian geometry, iii, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. (1976).

[2] Bismut J.-M., Freed D.S., The analysis of elliptic families II: Dirac operators, eta invariants and the holonomy theorem of Witten, Comm. Math. Phys. 107 (1986) 103–163.

[3] Bucicovschi B., An extension of the work of V. Guillemin on complex powers and zeta functions of elliptic pseudodifferential operators, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (10) (1999) 3081–3090.

[4] Mazzeo R.R., Melrose R.B., The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence for a fibration, J. Differential Geom. 31 (1) (1990) 185–213.

[5] Melrose R.B., Pseudodifferential operators, corners and singular limits, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 1990), Mathematical Society Japan, Tokyo, 1991, pp. 217–234.

[6] Melrose R.B., The eta invariant and families of pseudodifferential operators, Math. Res. Lett. 2 (1995) 541–561.

[7] Moroianu S., Residue functionals on the algebra of adiabatic pseudo-differential operators, Ph.D. thesis, MIT, 1999.

[8] Witten E., Global gravitational anomalies, Comm. Math. Phys. 100 (1985) 197–229.