C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 293–298

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Physique mathématique/*Mathematical Physics*)

Régularité spatio-temporelle de la solution des équations de Maxwell dans des domaines non convexes

Emmanuelle Garcia [a], Simon Labrunie [b]

[a] CEA/DAMIle-de France, BP 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France

[b] Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré, Nancy I, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France

Reçu le 15 octobre 2001 ; accepté le 26 novembre 2001

Note présentée par Roland Glowinski.

Résumé La méthode du complément singulier, développée afin de résoudre les équations de Maxwell dans des domaines non convexes (cf. [5,2] pour des domaines bidimensionnels en absence et en présence de charges, [3] pour des domaines axisymétriques), est basée sur une décomposition orthogonale de l'espace des solutions. Après avoir rappelé les résultats classiques de régularité dans des domaines lipschitziens, nous donnons plusieurs résultats de régularité en espace et en temps de la solution et de ses composantes, qui sont valables dans plusieurs géométries effectivement utilisées en calcul numérique. ***Pour citer cet article : E. Garcia, S. Labrunie, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 293–298.***

Space-time regularity of the solution to Maxwell's equations in non-convex domains

Abstract The Singular Complement Method, developed in order to solve Maxwell's equations in non-convex domains (cf. [5,2] for two-dimensional domains in absence and in presence of charges, [3] for axisymmetric domains), is based on an orthogonal decomposition of the space of solutions. After recalling the classical regularity results in Lipschitz domains, we give several results of space and time regularity of the solution and of its components, which are valid for several geometries effectively used for numerical computations. ***To cite this article: E. Garcia, S. Labrunie, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 293–298.***

Abridged English version

The resolution of Maxwell's equations (1), (2) for industrial applications demands the development of numerical methods taking into account the complex geometry of the domain Ω and/or the lack of space regularity of the solution, due to the presence of geometrical singularities (reentrant corners, edges, polyhedral or conical vertices) on its boundary Γ. The Singular Complement Method (SCM) [2,3,5] addresses the issue by an orthogonal splitting (see also the orthogonal singular field method [8]) of

Adresses e-mail : garciaem@webmails.com (E. Garcia); labrunie@iecn.u-nancy.fr (S. Labrunie).

S1631-073X(02)02221-5/FLA

the spaces of electric and magnetic fields $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathrm{div}; \Omega),\ \mathbf{x} \times \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ on } \Gamma\}$ and $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathrm{div}; \Omega),\ \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ on } \Gamma\}$, into $\mathbf{X} = \mathbf{X}_R \overset{\perp_{\mathbf{X}}}{\oplus} \mathbf{X}_S$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_R \overset{\perp_{\mathbf{Y}}}{\oplus} \mathbf{Y}_S$. The regular parts $\mathbf{X}_R = \mathbf{X} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{Y}_R = \mathbf{Y} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$ have the regularity expected for a convex or a C^1 domain; they are approximated by nodal finite elements. The singular parts $\mathbf{X}_S$, $\mathbf{Y}_S$ need some special representation.

Using the SCM for solving time-dependent problems requires that we know the time regularity of the solution and of its regular and singular parts. Indeed, the SCM actually solves a second-order variational problem, partly decoupled between the electric and magnetic fields, instead of the coupled, first-order system (1), (2). It is thus necessary that the two formulations be equivalent, which is true for "sufficiently regular" solutions—typically $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega))$. This kind of regularity can be proven—for any Lipschitz domain, under quite reasonable assumptions on the data—by the semi-group theory (Theorem 2.1) or by the Lions–Magenes variational theory (Theorem 3.1).

Hence, one can split the solution into regular and singular parts: $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_R(t) + \mathbf{E}_S(t)$, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_R(t) + \mathbf{B}_S(t)$; and there holds: $(\mathbf{E}_R, \mathbf{B}_R) \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathbf{X}_R \times \mathbf{Y}_R)$ and $(\mathbf{E}_S, \mathbf{B}_S) \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathbf{X}_S \times \mathbf{Y}_S)$.

The implementation of the SCM is most convenient when the Maxwell problem can be reduced to a two-dimensional situation, i.e., when there is a symmetry of translation or revolution. In this case, the knowledge of the singular part of the solution is equivalent to that of a finite number of singularity coefficients (*cf.* [2,3] and equation (9)). Besides, the SCM allows one to prove more precise space and time regularity results: the singularity coefficients have a $\mathrm{C}^{0,\alpha-\varepsilon}$ time regularity, and the whole of the solution is shown to belong to $\mathrm{C}^{0,\alpha-\varepsilon}(0, T; \mathbf{H}^{s-\varepsilon'}(\Omega))$, $\forall \varepsilon, \varepsilon' > 0$, where the limiting exponents α and s depend only on the aperture angles at the geometrical singularities (see Theorems 5.1 and 5.2). These results stem from similar features of the solution to the wave equation (or to similar hyperbolic equations) in a two-dimensional domain [7].

0. Introduction

La résolution des équations de Maxwell nécessite le développement, pour certaines applications industrielles (*cf.* [5]), de méthodes numériques originales, prenant en compte de manière précise la complexité de la géométrie du domaine d'étude et/ou le manque de régularité en espace de la solution, dû à la présence de singularités géométriques (coins, arêtes, sommets polyédriques ou coniques rentrants). Dans cette problématique, la méthode du complement singulier (MCS) repose sur une décomposition orthogonale (voir également la méthode orthogonale des champs singuliers [8]) de la solution en deux parties : l'une, régulière en espace (i.e. $\mathbf{H}^1$, qui est la régularité attendue dans le cas d'ouverts convexes ou à frontière C^1), est approchée par éléments finis nodaux ; l'autre, singulière, nécessite un traitement particulier. Si l'on désire utiliser la MCS pour résoudre des problèmes instationnaires, on doit également étudier l'effet de la décomposition en espace sur la régularité en temps des parties régulière et singulière de la solution. En effet, les équations de Maxwell classiques (du premier ordre en temps) couplent les champs électrique et magnétique, tandis que la méthode numérique repose sur une formulation variationnelle, partiellement découplée, du second ordre en temps. On cherche alors la régularité des champs nécessaire pour qu'une telle formulation soit bien posée. On donnera donc des résultats de régularité sur la solution totale ainsi que sur ses parties régulières et singulières.

1. Problème modèle, potentiels et choix de la jauge

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ simplement connexe et non convexe, de frontière lipschitzienne Γ. On appelle $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur sortant normal unitaire à Γ. On introduit les espaces de Hilbert suivants :

$$\mathbf{X} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathrm{div}; \Omega),\ \mathbf{x} \times \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}, \qquad \mathbf{Y} = \left\{\mathbf{y} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathrm{div}; \Omega),\ \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma\right\},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathrm{div}\,0; \Omega), \qquad \mathbf{W} = \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,0; \Omega).$$

Les équations de Maxwell du premier ordre en temps s'écrivent alors, pour tout $T > 0$:
Trouver $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ *tels que* :

$$\frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} - c^2\, \mathbf{rot}\, \mathbf{B}(t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{J}(t), \quad \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} + \mathbf{rot}\, \mathbf{E}(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega\times]0, T[, \tag{1}$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{E}, \operatorname{div} \mathbf{B}) = \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}, 0\right) \quad \text{dans } \Omega\times]0, T[, \qquad (\mathbf{E}, \mathbf{B})(0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0) \quad \text{dans } \Omega. \tag{2}$$

Pour que ce problème soit bien posé, il faut que l'équation de conservation soit vérifiée :

$$\operatorname{div} \mathbf{J}(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0, T[. \tag{3}$$

De $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ et $\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$, on déduit l'existence de $V \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et $\mathbf{A} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ tels que :

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{rot}\, \mathbf{A}(t), \qquad \mathbf{E}(t) = -\,\mathbf{grad}\, V(t) - \frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t}. \tag{4}$$

Ces équations ne suffisant pas à déterminer les potentiels scalaire V et vecteur $\mathbf{A}$, il existe deux choix de jauge classiques. La *jauge de Coulomb* consiste à imposer $\operatorname{div} \mathbf{A}(t) = 0$, la *jauge de Lorentz* impose

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V(t)}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

2. Application de la théorie des semi-groupes aux équations de Maxwell du premier ordre en temps

THÉORÈME 2.1. – *Sous les hypothèses* $\mathbf{J} \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathbf{H}(\mathrm{div}; \Omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{L}^2(\Omega))$ *et* $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, *les équations* (1), (2) *admettent une unique solution* $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathbf{H}(\mathrm{div}; \Omega) \times \mathbf{H}_0(\mathrm{div}; \Omega))$. *De plus, si* $\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \rho(0)/\varepsilon_0$, $\operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0$ *et* (3) *est vérifiée, alors la solution vérifie* $\operatorname{div} \mathbf{E} \in \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{L}^2(\Omega))$. *Sous les hypothèses* $\mathbf{J} \in \mathrm{C}^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ *et* $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, *les équations* (1), (2) *admettent une unique solution* $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega))$. *De plus, si* $\rho \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathrm{L}^2(\Omega))$ *est tel que* (3) *est vérifiée au sens de* $\mathcal{D}'(0, T)$, *et si* $\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \rho(0)/\varepsilon_0$, $\operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0$ *dans* Ω, *alors* $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in \mathbf{C}^0(0, T; \mathbf{H}(\mathrm{div}; \Omega)) \times \mathrm{C}^1(0, T; \mathbf{H}_0(\mathrm{div}; \Omega))$.

Remarque 1. – Dans [1], les auteurs ont montré que si $\rho \equiv 0$, $\mathbf{J} \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathbf{H}(\mathrm{div}\,0; \Omega))$ et $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0) \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}$, alors $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathbf{V} \times \mathbf{W}) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathbf{H}(\mathrm{div}; \Omega) \times \mathbf{H}_0(\mathrm{div}; \Omega))$.

La démonstration des trois résultats précédents est basée sur l'existence d'un semi-groupe (de contraction ou unitaire C^0) engendré par l'opérateur de Maxwell suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c\, \mathbf{rot} \\ c\, \mathbf{rot} & 0 \end{pmatrix}.$$

La principale difficulté de la démonstration réside à montrer la densité du domaine de A (c'est-à-dire $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ et $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$) dans l'espace fonctionnel du second membre $(\mathbf{J}, 0)$ (c'est-à-dire respectivement dans $\mathbf{H}(\mathrm{div}; \Omega) \times \mathbf{H}_0(\mathrm{div}; \Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,0; \Omega) \times \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,0; \Omega)$). On utilise ensuite le théorème de Hille-Phillips ou la réciproque du théorème de Stone (*voir* Dautray et Lions [6]).

Parallèlement, on considère (4),(5) comme un problème d'évolution en $(\mathbf{A}, V)$ associé à l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c\, \mathbf{grad} \\ c\, \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dès que l'une des hypothèses sur les données du théorème 2.1 est vérifiée et que $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ est effectivement la solution de (1), (2), un raisonnement très semblable montre la consistance de la *jauge de Lorentz*.

En effet, en définissant l'espace $\mathsf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{rot}\, \mathbf{x} \in \mathbf{Y}\}$, on a $(\mathbf{A}, V) \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathsf{A} \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega))$. La *jauge de Lorentz* est souvent utilisée en physique théorique ; pour ce travail, on utilise *la jauge de Coulomb,* elle est plus adaptée car la décomposition de $\mathbf{E}$ dans (4) s'identifie alors à une décomposition de Hodge (ou de Helmholtz), ainsi $\mathbf{E} = \nabla\phi + \mathbf{E_V}$ où $\phi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et $\mathbf{E_V} \in \mathbf{V}$.

3. Application de la théorie de Lions–Magenes aux équations de Maxwell du second ordre en temps

THÉORÈME 3.1. – *Sous les hypothèses* : $\mathbf{J} \in \mathrm{H}^1(0,T;\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega))$, $\mathrm{div}\,\mathbf{E}_0 = \rho(0)/\varepsilon_0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{B}_0 = 0$ *dans* Ω *et* (3) *est vérifiée, le problème de Maxwell du second ordre en temps suivant* :
Trouver $(\mathbf{E},\mathbf{B}) \in \mathrm{C}^0(0,T;\mathbf{X}\times\mathbf{Y}) \cap \mathrm{C}^1(0,T;\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)\times\mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega))$ *telles que* :

$$\textit{Eq. de Maxwell}: \quad \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + c^2\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} \quad \textit{dans } \mathrm{L}^2\big(0,T;\mathbf{X}'\big), \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} + c^2\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{J} \quad \textit{dans } \mathrm{L}^2\big(0,T,\mathbf{Y}'\big). \tag{7}$$

$$\textit{Contraintes}: \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \textit{dans } \mathbf{H}^2\big(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\big) \quad \textit{et} \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \quad \textit{dans } \mathrm{C}^1\big(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\big).$$

$$\textit{C. initiales}: \quad \mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, \qquad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0,$$

$$\left.\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{E}_1 = c^2\,\mathbf{rot}\,\mathbf{B}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{J}(0), \qquad \left.\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{B}_1 = -\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E}_0,$$

est bien posé. De plus, ce système est équivalent au système de Maxwell du premier ordre en temps.

Pour démontrer ce théorème, on fait les hypothèses minimales de régularité $\partial_t\mathbf{E} \in \mathcal{D}'(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $\mathbf{E} \in \mathcal{D}'(0,T;\mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega))$ et $\mathbf{J} \in \mathcal{D}'(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, afin d'obtenir les équations de Maxwell *faibles* du second ordre dans : $\mathcal{D}'(0,T;\mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega))$ pour (6) et dans $\mathcal{D}'(0,T;\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega))$ pour (7). Certaines hypothèses supplémentaires sur les données permettent ensuite de mettre la formulation faible du second ordre sous une forme variationnelle équivalente. La théorie de Lions–Magenes [9] permet alors d'établir l'existence et l'unicité du problème du second ordre en temps. On en conclut l'équivalence entre le système du premier ordre en temps et celui du deuxième ordre en temps. Le point clé de la démonstration est encore le choix des espaces $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ qui est dense dans $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)\times\mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega)$, il est ainsi possible de choisir ce dernier espace comme espace pivot, de l'identifier à son dual et de le plonger dans le dual de $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$.

4. Décomposition en parties régulière et singulière et régularité C^0 en temps

On définit les espaces *régularisés* $\mathbf{X}_R$, $\mathbf{Y}_R$ comme l'intersection avec $\mathbf{H}^1(\Omega)$ des espaces naturels $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$. Dans la plupart des géométries (polygones et polyèdres courbes, domaines axisymétriques [4]) $\mathbf{X}_R$ et $\mathbf{Y}_R$ sont fermés dans les espaces naturels. On considère donc les décompositions orthogonales suivantes :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_R \overset{\perp_{\mathbf{X}}}{\oplus} \mathbf{X}_S, \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_R \overset{\perp_{\mathbf{Y}}}{\oplus} \mathbf{Y}_S.$$

En appliquant respectivement à $(\mathbf{E},\mathbf{B})(t)$ ces décompositions en espace, on a :

$$(\mathbf{E},\mathbf{B})(t) = (\mathbf{E}_R,\mathbf{B}_R)(t) + (\mathbf{E}_S,\mathbf{B}_S)(t) \quad \text{où } (\mathbf{E}_R,\mathbf{B}_R)(t) \in \mathbf{X}_R\times\mathbf{Y}_R,\ (\mathbf{E}_S,\mathbf{B}_S)(t) \in \mathbf{X}_S\times\mathbf{Y}_S. \tag{8}$$

En identifiant la somme directe orthogonale d'espaces et le produit d'espaces, grâce à la bicontinuité des applications qui respectivement à $\mathbf{E}(t)$ associe $(\mathbf{E}_R,\mathbf{E}_S)(t)$ et à $\mathbf{B}(t)$ associe $(\mathbf{B}_R,\mathbf{B}_S)(t)$, on en déduit :

PROPOSITION 4.1. – *Sous les hypothèses du théorème* 3.1*, on a* :

$$(\mathbf{E}_R,\mathbf{B}_R) \in \mathrm{C}^0(0,T;\mathbf{X}_R\times\mathbf{Y}_R) \quad \textit{et} \quad (\mathbf{E}_S,\mathbf{B}_S) \in \mathrm{C}^0(0,T;\mathbf{X}_S\times\mathbf{Y}_S).$$

To cite this article: E. Garcia, S. Labrunie, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 293–298

5. Précisions des résultats de régularité selon le domaine considéré

5.1. Cas d'un domaine cylindrique

On suppose ici que le domaine $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$, où ω est un polygone plan (éventuellement curviligne), les sources $(\rho, \mathbf{J})$ et les conditions initiales $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ sont invariants par translation selon la direction z. D'après le principe de Curie, il en est de même pour la solution $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Ainsi, sous les hypothèses du théorème 3.1, on vérifie que le système (1), (2) se réécrit sous la forme de deux systèmes du premier ordre en temps : les modes **TE** d'inconnue $(\mathbf{E}_\perp, B_z)$ et **TM** d'inconnue $(\mathbf{B}_\perp, E_z)$, où l'on note par $(\mathbf{E}_\perp, \mathbf{B}_\perp)$ les deux premières composantes du champ électromagnétique tridimensionnel. En notant $\Gamma = \gamma \times \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}$ la normale et tangente à γ :

le mode **TE** s'écrit
$$\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t} - c^2\,\mathbf{rot}\,B_z = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{J}_\perp, \qquad \frac{\partial B_z}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_\perp = 0 \quad \text{dans } \omega,$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}_\perp = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{dans } \omega, \qquad \mathbf{E}_\perp \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{sur } \gamma.$$
Et le mode **TM** s'écrit
$$\frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial t} + \mathbf{rot}\,E_z = 0, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial t} - c^2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon_0}J_z \quad \text{dans } \omega,$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{B}_\perp = 0 \quad \text{dans } \omega, \qquad \mathbf{B}_\perp \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sur } \gamma.$$

Des résultats de régularité analogues à ceux du théorème 2.1 et 3.1 sont encore vérifiés par $(\mathbf{E}_\perp, \mathbf{B}_\perp)$. De plus, les modes **TE** et **TM** se réécrivent sous la forme de systèmes du second ordre en temps ; (E_z, B_z) est alors solution d'une équation des ondes et donc, sous les hypotèses du théorème 3.1 et si les données initiales $(E_{z0}, B_{z0}) \in \mathrm{H}^1_0(\omega) \times (\mathrm{H}^1_0(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega))$, alors $(E_z, B_z) \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathrm{H}^1_0(\omega) \times (\mathrm{H}^1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega)) \cap C^1(0, T; \mathrm{L}^2(\omega) \times \mathrm{L}^2_0(\omega))$. En ce sens, cette composante du champ est *régulière*.

Dans ce cadre, $\mathbf{X}_S$ et $\mathbf{Y}_S$ sont de dimension finie (égale à n_C, le nombre de coins rentrants de ω, cf. [2]) ; si l'on note $\mathbf{x}^k_{S*}$ (resp. $\mathbf{y}^k_{S*}$) la k-ième fonction de base de $\mathbf{X}_S$ (resp. $\mathbf{Y}_S$) associée au k-ième coin rentrant, alors la décomposition (8) s'écrit, avec $\mathbf{r} = (x, y)$ les deux premières composants d'espace :

$$\mathbf{E}_\perp(t; \mathbf{r}) = \mathbf{E}_R(t; \mathbf{r}) + \sum_{k=1}^{\dim \mathbf{X}_S} \kappa_k(t)\mathbf{x}^k_{S*}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{B}_\perp(t; \mathbf{r}) = \mathbf{B}_R(t, \mathbf{r}) + \sum_{k=1}^{\dim \mathbf{Y}_S} \xi_k(t)\mathbf{y}^k_{S*}(\mathbf{r}). \tag{9}$$

La régularité en espace des champs ne dépend que de celle des $\mathbf{x}^k_{S*}$ et $\mathbf{y}^k_{S*}$; la régularité en temps dépend de celle de $(\mathbf{E}_R, \mathbf{B}_R)(t)$ et des coefficients $\kappa_k(t)$ et $\xi_k(t)$. On note π/α_k l'angle au k-ième coin rentrant avec $\frac{1}{2} < \alpha_k < 1$ et $\alpha_{\min}$ et $\alpha_{\max}$ le minimum et le maximum des α_k, $1 \leqslant k \leqslant n_C$.

THÉORÈME 5.1. – *Sous les hypothèses du théorème* 3.1, *pour tout* k, $1 \leqslant k \leqslant n_C$, *on a* :
$$\kappa_k \in \mathrm{C}^{0,1-\alpha_k-\varepsilon}(0, T; \mathbb{R}) \cap \mathrm{H}^{3/2-\alpha_k}(0, T; \mathbb{R}), \quad \forall \varepsilon > 0.$$
De plus, si $J_z \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{H}^1_0(\omega))$, *alors* :
$$\xi_k \in \mathrm{C}^{0,1-\alpha_k-\varepsilon}(0, T; \mathbb{R}) \cap \mathrm{H}^{3/2-\alpha_k}(0, T; \mathbb{R}), \quad \forall \varepsilon > 0.$$
Et :
$$(\mathbf{E}_\perp, \mathbf{B}_\perp) \in \mathrm{C}^{0,1-\alpha_{\max}-\varepsilon}\big(0, T; \mathbf{H}^{\alpha_{\min}-\varepsilon'}(\omega) \times \mathbf{H}^{\alpha_{\min}-\varepsilon'}(\omega)\big), \quad \forall \varepsilon, \varepsilon' > 0.$$

Pour démontrer ces résultats, on utilise la décomposition de Hodge appliquée à $\mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{B}_\perp$ afin de se ramener à l'étude d'une équation des ondes dans le domaine bidimensionnel singulier ω. Cette étude ayant été réalisée par Grisvard dans [7], la conclusion s'en déduit en utilisant des relations entre les fonctions de base des différents espaces singuliers mis en jeu (*cf.* [2]).

5.2. Cas d'un domaine axisymétrique

On suppose maintenant que le domaine Ω est axisymétrique et présente des arêtes circulaires (dont n_A sont rentrantes et les autres saillantes), et des points coniques, tel que l'intersection de Ω avec un demi-plan méridien est un polygone ω (comme dans [3,4]). On dit qu'un sommet conique est *pointu* si et seulement si son ouverture est supérieure à la valeur $\pi/\beta_* \simeq 130°43'$ définie par $P_{1/2}(\cos\pi/\beta_*) = 0$, où P_ν désigne la fonction de Legendre. Soit n_P le nombre de sommets pointus.

Si les sources et les conditions initiales sont axisymétriques, il en est de même de la solution $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$; on a une situation bidimensionnelle (découplage des composantes méridiennes $\mathbf{U}_m = U_r\vec{\mathbf{e}}_r + U_z\vec{\mathbf{e}}_z$ et azimutales $\mathbf{U}_\theta = U_\theta\vec{\mathbf{e}}_\theta$ cf. [3,4]) et les résultats du paragraphe précédent restent qualitativement valables.

La dimension de $\mathbf{Y}_S$ est égale à n_A ; la fonction de base $\mathbf{y}^k_{S*}$ est associée à la k-ième arête rentrante, d'ouverture π/α_k avec $\frac{1}{2} < \alpha_k < 1$. La dimension de $\mathbf{X}_S$ est égale à $n_A + n_P$; la fonction de base $\mathbf{x}^k_{S*}$ est associée à une arête rentrante d'ouverture π/α_k ou à un sommet pointu d'ouverture π/β_k, avec $1 < \beta_k < \beta_*$. La décomposition (9) reste valable, pour $\mathbf{U}_m$ qui joue le rôle de $\mathbf{U}_\perp$. Enfin, pour chaque sommet pointu on définit ν_k comme l'unique $\nu \in]0, 1/2[$ tel que $P_\nu(\cos\pi/\beta_k) = 0$. On note alors $\sigma_{\min}$ et $\sigma_{\max}$ le minimum et le maximum de l'ensemble $\{\alpha_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n_A;\ \nu_k + 1/2,\ 1 \leqslant k \leqslant n_P\}$.

THÉORÈME 5.2. – *Sous les hypothèses du théorème* 3.1, *pour l'arête rentrante* k, $1 \leqslant k \leqslant n_A$, *resp. pour le sommet pointu* k, $1 \leqslant k \leqslant n_P$, *on a* :

$$\kappa_k \in \mathrm{C}^{0,1-\alpha_k-\varepsilon}(0, T; \mathbb{R}), \quad \textit{resp.} \quad \kappa_k \in \mathrm{C}^{0,1/2-\nu_k-\varepsilon}(0, T; \mathbb{R}), \quad \forall\varepsilon > 0.$$

De plus, si $\mathbf{J}_\theta \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1_0(\Omega))$, *alors* :

$$\xi_k \in \mathrm{C}^{0,1-\alpha_k-\varepsilon}(0, T; \mathbb{R}), \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Et le champ électromagnétique axisymétrique, tridimensionnel, vérifie :

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \in \mathrm{C}^{0,1-\sigma_{\max}-\varepsilon}\big(0, T; \mathbf{H}^{\sigma_{\min}-\varepsilon'}(\Omega)\big) \times \mathrm{C}^{0,1-\alpha_{\max}-\varepsilon}\big(0, T; \mathbf{H}^{\alpha_{\min}-\varepsilon'}(\Omega)\big), \quad \forall\varepsilon, \varepsilon' > 0.$$

La démonstration de ces résultats est semblable à celle du théorème 5.1. L'équation des ondes standard est ici remplacée par une équation modifiée dans ω, à laquelle les résultats de Grisvard [7] se transposent moyennant le remplacement des espaces de Sobolev habituels par des espaces à poids.

Remerciements. Les auteurs remercient F. Assous et P. Ciarlet Jr. pour leurs remarques et corrections.

Références bibliographiques

[1] F. Assous, P. Ciarlet, Jr., Remarques sur la résolution des équations de Maxwell instationnaires dans un domaine polygonal, Rapport CEA, CEA-R-5845, 1999.

[2] F. Assous, P. Ciarlet, Jr., E. Garcia, Résolution des équations de Maxwell instationnaire avec charge dans un domaine singulier bidimensionnel, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 330 (2000) 391–396.

[3] F. Assous, P. Ciarlet, Jr., S. Labrunie, Caractérisation de la partie singulière et résolution des équations de Maxwell en géométrie singulière axisymétrique, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 328 (1999) 767–772.

[4] F. Assous, P. Ciarlet, Jr., S. Labrunie, Theoretical tools to solve the axisymmetric Maxwell equations, Prépublication ENSTA no. 343, Paris, Accepté dans Math. Meth. Appl. Sci. (2000).

[5] F. Assous, P. Ciarlet, Jr., J. Segré, Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains: the singular complement method, J. Comput. Phys. 161 (2000) 218–249.

[6] R. Dautray, J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Vol. 1–3, Masson, Paris, 1985.

[7] P. Grisvard, Singularities in Boundary Value Problems, RMA, Vol. 22, Masson, Paris, 1992.

[8] C. Hazard, S. Lohrengel, A singular field method for Maxwell's equations: numerical aspects in two dimensions, Préprint de l'université de Nice–Sophia Antipolis 595, soumis à SIAM J. Numer. Anal. (2000).

[9] J.-L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.