LE GROUPE FONDAMENTAL UNIPOTENT MOTIVIQUE DE $\mathbf{G}_m - \mu_N$, POUR N = 2, 3, 4, 6 OU 8

par PIERRE DELIGNE

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction . . . 101
1. Rappels sur les schémas en groupe pro-unipotents . . . 103
2. Rappels sur les mots de Lyndon . . . 108
3. Rappels de [1] . . . 110
4. Fidélité . . . 116
5. Application aux valeurs de multizêtas : outils . . . 124
6. N = 3, 4, 8 . . . 129
7. N = 2 . . . 131
8. N = 6 . . . 134
Appendice A : Comparaison Betti/ω . . . 137
Index des notations . . . 140
Bibliographie . . . 140

0. Introduction

Soit X_N le complément dans le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ du groupe μ_N des racines $N^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Dans [1], A. B. Goncharov et moi-même avons étudié divers groupoïdes fondamentaux pro-unipotents de X_N, vus comme des objets motiviques. Par la suite, nous sous-entendrons "pro-unipotent" et parlerons simplement de groupoïdes fondamentaux. Le présent article est consacré aux cas exceptionnels où $N = 2, 3, 4$ ou 8, et à une variante pour $N = 6$.

Soient $N \geq 1$, k_N un corps engendré sur $\mathbf{Q}$ par une racine primitive $N^{\text{ième}}$ de l'unité ζ, $\mathcal{O}_N$ l'anneau de ses entiers, $\mathbf{A}^1$ la droite affine sur k_N, de coordonnée u, et $X_N := \mathbf{G}_m - \mu_N \subset \mathbf{A}^1 \subset \mathbf{P}^1$. Si ce n'est pas ambigu, nous omettrons l'indice N. En chaque $a \in \{0, \infty\} \cup \mu_N$, on choisit un vecteur tangent t_a dont les coordonnées $du(t_a)$, pour $a \neq \infty$, et $du^{-1}(t_a)$, pour $a \neq 0$, sont des racines de l'unité dans k. Lesquelles ne nous importe pas : si t'_a et t''_a correspondent à deux choix de racines de l'unité, on dispose d'un chemin motivique canonique entre les points-base tangentiels t'_a et t''_a (cf [1] 5.4), qui permet de les identifier : l'espace motivique $P(X)_{t_b,t_a}$ des classes d'homotopie de chemins de t_a à t_b dans X ([1] 4.4) ne dépend pas, à isomorphisme unique près, des choix faits. Nous noterons simplement a le point base tangentiel t_a, écrirons $P_{b,a}(X)$ ou simplement $P_{b,a}$ pour $P(X)_{t_b,t_a}$ et appellerons $P_{b,a}$ l'espace motivique des chemins de a à b. Pour $a = b$, nous l'appellerons aussi le groupe fondamental motivique $\pi_1(X, a)$ de X en a. Les $P_{b,a}$, munis de la composition des chemins, forment le *groupoïde fondamental motivique* $P(X, \{0, \infty\} \cup \mu_N)$.

Ce groupoïde fondamental motivique est de Tate mixte sur k, et a bonne réduction en dehors de N. Pour $N = 2, 3, 4$ ou 8, nous prouverons qu'il engendre la catégorie

DOI 10.1007/s10240-010-0027-6

tannakienne $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$ des motifs de Tate mixte sur k à bonne réduction en dehors de N. Soit Y le k-schéma $\mathbf{G}_m - \{1\}$ (resp. $\mathbf{G}_m - \mu_2$ si $\mathrm{N} = 8$). Puisque $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$, le $\pi_1(\mathrm{Y}, 0)$-torseur $\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{Y})$ est un quotient du $\pi_1(\mathrm{X}, 0)$-torseur $\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{X})$. Nous prouverons qu'il suffit déjà à engendrer $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$. Si A est l'algèbre affine de $\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{Y})$ (l'anneau commutatif dans la catégorie des Ind-objets de $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$ tel que $\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$) ceci signifie que les sous-motifs du Ind-motif A engendrent par $\otimes$, $\oplus$, duaux et sous-quotients la catégorie $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$. Pour $\mathrm{N} = 6$ et $\mathrm{Y} = \mathbf{G}_m - \{1\}$, $\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{Y})$ a partout bonne réduction et engendre $\mathrm{MT}(\mathcal{O})$.

Notre preuve utilise une structure entière sur un gradué de l'algèbre de Lie d'un groupe de Galois motivique, et sa réduction modulo 2 si $\mathrm{N} = 2, 4, 8$, modulo 3 si $\mathrm{N} = 3, 6$. Cette structure entière me laisse d'autant plus perplexe qu'elle ne correspond pas à un schéma en groupe pro-lisse sur $\mathbf{Z}$: l'ensemble des dérivations intérieures de sa réduction modulo un nombre premier p n'est pas stable par élévation à la puissance p.

Les cas $\mathrm{N} = 2, 3, 4, 6, 8$ que nous considérons sont exceptionnels. Ce sont les seuls auxquels je sache appliquer la technique de réduction modulo l indiquée ci-dessus, et pour beaucoup d'autre valeurs de N, on sait que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_\mathrm{N}, \{0, \infty\} \cup \mu_\mathrm{N})$ n'engendre pas la catégorie tannakienne $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$, i.e. que $\mathbf{u}_\omega$ (3.1) n'agit pas fidèlement sur ce groupoïde. Tel est le cas pour N premier ≥ 5 : pour un tel N, notant $\mathbf{u}_\omega^1$ la partie de degré un de $\mathbf{u}_\omega$, Goncharov a montré dans [2] (2.16 ou 7.10) que déjà sur $\overset{2}{\wedge}\mathbf{u}_\omega^1 \subset \mathbf{u}_\omega$ l'action n'est pas fidèle. Pour N admettant un facteur premier qui n'est pas inerte dans le corps N-cyclotomique, la catégorie $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$ de [1] 5.1 est une sous-catégorie tannakienne propre de $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$, et $\mathrm{P}(\mathrm{X}_\mathrm{N}, \{0, \infty\} \cup \mu_\mathrm{N})$, étant dans cette sous-catégorie ([1] 5.11), n'engendre pas $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$. Quand elles s'appliquent, nos méthodes prouvent en même temps que la série centrale descendante de $\mathbf{u}_\omega$ coïncide avec une filtration de profondeur. Ainsi que l'a observé Ihara [3] §5, tel n'est pas le cas pour $\mathrm{N} = 1$.

Considérons les nombres complexes

$$(\mathbf{0.1}) \qquad \zeta(s_1, \ldots, s_k; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) := \sum_{n_1 > \cdots > n_k > 0} \frac{\varepsilon_1^{n_1} \cdots \varepsilon_k^{n_k}}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}},$$

où $k \geq 0$, où les s_i sont des entiers ≥ 1, où les ε_i sont des racines $\mathrm{N}^{\text{ièmes}}$ de l'unité et où $(s_1, \varepsilon_1) \neq (1, 1)$. Nous les appellerons *valeurs de multizêtas* rel. μ_N. L'hypothèse $(s_1, \varepsilon_1) \neq (1, 1)$ assure la convergence de (0.1).

Pour w un entier ≥ 0, soit W_w l'espace des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des $\zeta(s_1, \ldots, s_k; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ de *poids* $\sum s_i = w$. Soit $\mathrm{D}_d\mathrm{W}_w$ le sous-espace engendré par ceux qui sont de *profondeur* $k \leq d$. Le produit induit sur la somme directe des W_w une structure d'algèbre graduée filtrée.

Fixons w et d. Pour $\mathrm{N} = 2, 3, 4$ ou 8, nous définirons aux paragraphes 6 et 7 une famille explicite $\mathbf{L}$ d'éléments de $\mathrm{D}_d\mathrm{W}_w$ et prouverons, comme corollaire de nos résultats motiviques, qu'elle engendre $\mathrm{D}_d\mathrm{W}_w$ sur $\mathbf{Q}$. La conjecture 5.6, conséquence de la conjecture A.2 qui est une variante d'une conjecture de Grothendieck, implique que $\mathbf{L}$ est même une base de $D_d W_w$.

Pour $N = 6$, nous prouverons au paragraphe 8 des résultats parallèles, où n'apparaissent que des périodes de motifs de Tate mixte sur k, à bonne réduction partout.

Pour $N = 2$, D. Broadhurst a défini $\mathbf{L}$ en 1997. Il conjecturait que $\mathbf{L}$ était une base, et avait obtenu pour cette conjecture une évidence numérique écrasante. C'est sa conjecture qui m'a fait espérer que pour $N = 2$, $P_{-1,0}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ engendre $MT(\mathbf{Z}[1/2])$.

Nos méthodes ne fournissent pas d'expression explicite d'un $\zeta(\underline{s}, \underline{\varepsilon})$ rel. μ_N ($N = 2, 3, 4, 8$), de poids w et de profondeur $\leq d$, comme combinaison linéaire à coefficients rationnels d'éléments de $\mathbf{L}$, ni même de borne pour la hauteur des coefficients.

1. Rappels sur les schémas en groupe pro-unipotents

On se place sur un corps K de caractéristique 0. Dans les applications, K sera $\mathbf{Q}$.

1.1. Un *schéma en groupe pro-unipotent* est une limite projective filtrante de groupes algébriques unipotents. Nous en rencontrerons et comme groupes fondamentaux, et comme "groupes de Galois motiviques". Leur étude se ramène souvent à celle de leur algèbre de Lie. L'*algèbre de* Lie de $H = \lim H_i$ est par définition la limite projective $\operatorname{Lie} H = \lim \operatorname{Lie} H_i$, munie de sa topologie de limite projective, et le foncteur Lie est une équivalence de catégories, des schémas en groupe pro-unipotents vers les limites projectives filtrantes d'algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie. On note exp le foncteur inverse.

1.2. (cf [1] A.1 à A.9) Soient $H = \lim H_i$ pro-unipotent, $\mathfrak{h} = \lim \mathfrak{h}_i$ son algèbre de Lie, et $\mathcal{U}^\wedge \mathfrak{h}$ la limite projective des complétés $\mathcal{U}^\wedge \mathfrak{h}_i$ des algèbres enveloppantes $\mathcal{U}\mathfrak{h}_i$, pour leur filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation (*algèbre enveloppante complétée*). On a entre H, $\mathfrak{h}$ et $\mathcal{U}^\wedge \mathfrak{h}$ les relations (A)(B)(C)(D) suivantes.

(A) Soit $\Delta : \mathcal{U}^\wedge \mathfrak{h} \to \mathcal{U}^\wedge \mathfrak{h} \widehat{\otimes} \mathcal{U}^\wedge \mathfrak{h}$ le coproduit. Le sous-espace $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{U}^\wedge \mathfrak{h}$ est l'ensemble des éléments primitifs.

Un espace vectoriel V de dimension finie peut être vu comme un schéma : c'est l'ensemble des points sur K du schéma affine $\underline{V}$, spectre de l'algèbre symétrique $\operatorname{Sym}(V^\vee)$ des fonctions polynômes sur V, et, plus généralement, pour toute K-algèbre A, $V \otimes A$ est l'ensemble des points de $\underline{V}$ à valeurs dans A. De même pour une limite projective filtrante $V = \lim V_j$ d'espaces vectoriels de dimension finie : si $V^\vee$ est le dual topologique $\operatorname{colim} V_j^\vee$ de V, on identifie V au schéma $\lim \underline{V}_j = \operatorname{Spec} \operatorname{Sym}(V^\vee)$ qui représente le foncteur $A \mapsto V \widehat{\otimes} A = \lim V_j \otimes A$. Nous appliquerons ceci à $\mathfrak{h}$ et à $\mathcal{U}^\wedge \mathfrak{h}$.

(B) On dispose d'un isomorphisme de schémas $\exp : \mathfrak{h} \to H$, caractérisé par la propriété que pour toute représentation linéaire de dimension finie ρ de H, correspondant à une représentation nilpotente $d\rho$ de $\mathfrak{h}$, on a $\rho(\exp(x)) = \exp(d\rho(x))$ pour x dans $\mathfrak{h}$. Cet isomorphisme transforme la loi de Campbell-Hausdorff de $\mathfrak{h}$ en la loi de groupe de H.

(C) H s'identifie au sous-schéma en groupe du groupe multiplicatif de $\mathcal{U}^\wedge\mathfrak{h}$ formé des éléments groupaux, i.e. tels que $\Delta g = g \otimes g$, l'exponentielle $\exp\colon\ \mathfrak{h} \to \mathrm{H}$ devenant l'exponentielle $\sum x^n/n!$.

(D) L'inclusion de H dans $\mathcal{U}^\wedge\mathfrak{h}$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels du dual topologique de $\mathcal{U}^\wedge\mathfrak{h}$ avec l'algèbre affine $\mathcal{O}(\mathrm{H})$ de H : à une forme linéaire f sur $\mathcal{U}^\wedge\mathfrak{h}$ correspond la restriction de f à H. La forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ différentielle en 0 de cette restriction est la restriction de f à $\mathfrak{h}$. Le transposé du coproduit Δ donne le produit dans $\mathcal{O}(\mathrm{H})$.

1.3. Nos objets seront le plus souvent gradués, et nous utiliserons le dictionnaire entre graduations et actions du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$, pour lequel λ dans $\mathbf{G}_m$ agit par multiplication par λ^n en degré n. Ce dictionnaire montre qu'une graduation se propage par transport de structures d'objets à ceux qui en dérivent. Par abus de langage, nous dirons parfois qu'un *schéma affine* est *gradué* s'il est muni d'une action de $\mathbf{G}_m$, i.e. si son algèbre affine est graduée. La *filtration associée* à une graduation $\mathrm{V} = \bigoplus \mathrm{V}^n$ est la filtration par les $\mathrm{V}^{\geq p} := \bigoplus_{n\geq p} \mathrm{V}^n$. Si V est à degrés bornés inférieurement, le complété $\mathrm{V}^\wedge = \lim \mathrm{V}/\mathrm{V}^{\geq p}$ de V pour cette filtration est le produit des V^n.

Si $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie graduée à degrés > 0 et que chaque composante $\mathcal{L}^n$ de $\mathcal{L}$ est de dimension finie, les $\mathcal{L}/\mathcal{L}^{\geq p}$ sont des algèbres de Lie nilpotentes et 1.1, 1.2 s'appliquent à $\mathcal{L}^\wedge$. L'action de $\mathbf{G}_m$ sur $\mathcal{L}$ induit une action de $\mathbf{G}_m$ sur $\exp(\mathcal{L}^\wedge)$: ce schéma en groupe est gradué. Soit $\mathcal{L}^\vee$ le dual gradué de $\mathcal{L}$. L'application exponentielle 1.2 (B) identifie l'algèbre affine $\mathcal{O}(\exp(\mathcal{L}^\wedge))$ de $\exp(\mathcal{L}^\wedge)$ à $\mathcal{O}(\mathcal{L}^\wedge) = \mathrm{Sym}(\mathcal{L}^\vee)$. Cette algèbre est graduée à degrés ≤ 0 et il sera commode de remplacer le degré par son opposé, le *codegré*. On notera par un exposant (resp. indice) n une composante de degré (resp. codegré) n.

Le foncteur $\mathcal{L} \mapsto \exp(\mathcal{L}^\wedge)$ est une équivalence de la catégorie des $\mathcal{L}$ comme ci-dessus avec la catégorie des schémas en groupe pro-unipotents munis d'une action de $\mathbf{G}_m$ et limites de quotients $\mathbf{G}_m$-équivariants H_i tels que (a) chaque $\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}_i$ est à degrés > 0, et (b) en chaque degré, le système projectif des $\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}_i$ est stationnaire. Le foncteur inverse est le foncteur *algèbre de Lie graduée*

$$\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{H}) := \bigoplus \lim(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}_i)^n.$$

1.4. Les constructions de 1.2 et 1.3 deviennent plus concrètes pour $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie graduée librement engendrée par une famille finie $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de générateurs de degrés > 0. L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}\mathcal{L}$ est l'algèbre associative $\mathrm{Ass} := \mathrm{K}\langle(e_i)\rangle$ librement engendrée par les e_i, son complété $\mathcal{U}^\wedge\mathcal{L}^\wedge$ est l'algèbre $\mathrm{Ass}^\wedge := \mathrm{K}\langle\langle(e_i)\rangle\rangle$ des séries formelles associatives, et le coproduit est caractérisé par $\Delta e_i = e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i$.

Notons c l'isomorphisme d'espaces vectoriels de Ass avec le dual topologique de $\mathrm{Ass}^{\wedge}$ donné par

$$(\mathbf{1.4.1}) \qquad c: \ \text{monôme } m \text{ en les } e_i \mapsto (x \mapsto \text{coefficient de } m \text{ dans } x).$$

Via c, le produit dans l'algèbre affine $(\mathrm{Ass}^{\wedge})^{\vee}$ de $\exp(\mathcal{L}^{\wedge})$ devient le produit de mélange de Ass.

Pour m parcourant les monômes, les fonctions

$$(\mathbf{1.4.2}) \qquad c(m): \ x \in \exp(\mathcal{L}^{\wedge}) \subset \mathrm{Ass}^{\wedge} \longmapsto \text{ coefficient du monôme } m \text{ dans } x$$

forment une base de l'algèbre affine de $\exp(\mathcal{L}^{\wedge})$, et $c(m)$ a pour codegré le degré de m.

1.5. (Cf [1] A1 à A3) Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie. Une filtration (décroissante) F de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$, telle que $\mathrm{F}^0\mathcal{L} = \mathcal{L}$, se propage de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{U}\mathcal{L}$, à $\mathcal{U}^{\wedge}\mathcal{L}$ et à l'algèbre affine $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L})$ du groupe algébrique unipotent $\exp(\mathcal{L})$. D'après loc. cit., on a

Proposition **1.6.**

(i) *La filtration de* $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L})$ *se déduit par dualité de celle de* $\mathcal{U}^{\wedge}\mathcal{L}$ *(cf 1.2 (D)).*

(ii) *L'exponentielle 1.2 (B) identifie* $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L})$ *à l'algèbre* $\mathrm{Sym}(\mathcal{L}^{\vee})$ *des polynômes sur* $\mathcal{L}$, *et la filtration de* $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L})$ *se déduit de celle du dual* $\mathcal{L}^{\vee}$ *de* $\mathcal{L}$.

(iii) *Si la filtration de* $\mathcal{L}$ *est associée (1.3) à une graduation, la filtration de* $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L})$ *est associée à la graduation correspondante.*

(iv) *La filtration de* $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L})$ *est compatible à sa structure de bigèbre, et en particulier à la décomposition*

$$\mathcal{O}(\exp \mathcal{L}) = \mathrm{K} \oplus \textit{ idéal d'augmentation } \mathfrak{m}.$$

Par passage à la limite, tout ceci, et ce qui suit, s'étend au cas pro-unipotent.

La filtration décroissante F de l'algèbre affine de $\exp(\mathcal{L})$ vérifie $\mathrm{F}^1 = 0$. Il nous sera commode d'utiliser plutôt la filtration croissante F_* définie par $\mathrm{F}_p = \mathrm{F}^{-p}$. On a $\mathrm{F}_{-1} = 0$. Si $\mathrm{F}^1\mathcal{L} = \mathcal{L}$, F_0 est réduit à K et $\mathrm{F}_{p-1}(\mathfrak{m}^p) = 0$ (appliquer 1.6 (ii)).

A la sous-algèbre de Lie $\mathrm{F}^p\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}$ correspond un sous-groupe distingué $\exp(\mathrm{F}^p\mathcal{L})$ du groupe algébrique $\exp(\mathcal{L})$.

Corollaire **1.7.** — *Soit* $\mathfrak{m}$ *l'idéal d'augmentation. L'idéal engendré par* $\mathrm{F}_{p-1}(\mathfrak{m})$ *définit le sous-schéma* $\exp(\mathrm{F}^p\mathcal{L})$ *de* $\exp(\mathcal{L})$.

Preuve. — L'exponentielle identifie $\mathrm{F}^p\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ à $\exp(\mathrm{F}^p\mathcal{L}) \subset \exp(\mathcal{L})$ et on applique 1.6 (ii).

Ce corollaire montre que le sous-schéma $\exp(\mathrm{F}^p\mathcal{L})$ de $\exp(\mathcal{L})$ ne dépend que de la filtration de $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L})$ et de l'élément neutre, pas de la structure de groupe de $\exp(\mathcal{L})$.

Supposons que $F^1\mathcal{L} = \mathcal{L}$. L'algèbre de Lie $\mathcal{L}/F^2\mathcal{L}$ est alors abélienne, et $\exp(\mathcal{L}/F^2\mathcal{L}) = \exp(\mathcal{L})/\exp(F^2\mathcal{L})$ est un schéma vectoriel. □

Proposition **1.8.** — *Si* $F^1\mathcal{L} = \mathcal{L}$, *l'espace des fonctions linéaires sur le schéma vectoriel* $\exp(\mathcal{L})/\exp(F^2\mathcal{L})$ *est* $F_1(m)$, *pour m l'idéal d'augmentation.*

Preuve. — L'hypothèse que $F^1\mathcal{L} = \mathcal{L}$ assure que $F_0 m = 0$. Soit Δ le coproduit de $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L})$. Les éléments de $F_1 m$ sont primitifs, car $f \mapsto \Delta f - f \otimes 1 - 1 \otimes f$ envoie $F_1 m$ dans $F_1(m \otimes m) = 0$. D'après 1.7, ils s'annulent sur $\exp F^2\mathcal{L}$. Ce sont donc des fonctions linéaires sur $\exp \mathcal{L}/\exp F^2\mathcal{L}$. On les obtient toutes ainsi car, $F_1(m^2)$ étant nul, $F_1(m)$ s'envoie isomorphiquement sur $F_1(m/m^2)$ le dual de l'algèbre affine $\mathcal{L}/F^2\mathcal{L}$ de $\exp(\mathcal{L})/\exp(F^2\mathcal{L})$. □

Proposition **1.9.**

(i) *La filtration* F *de l'algèbre affine de* $\exp(\mathcal{L})$ *est stable par les translations à gauche et à droite.*

(ii) *Si* $F^1\mathcal{L} = \mathcal{L}$, *les translations à gauche et à droite agissent trivialement sur le gradué associé.*

Preuve. — (i) Puisqne $F_{-1} = 0$, le coproduit envoie F_p dans la somme, sur $r \leq p$, des $F_{p-r} \otimes F_r$, et donc dans $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L}) \otimes F_p$. En d'autres termes, le sous-espace F_p de l'algèbre affine est un sous-comodule, i.e. est stable par translations à gauche. Le cas des translations à droite est similaire, ou peut se déduire de ce que F_p est stable par $g \mapsto g^{-1}$ (cf 1.6 (ii)).

(ii) Puisque $F_0(m) = 0$, $f \mapsto \Delta f - 1 \otimes f$ envoie F_p dans la somme sur $r < p$ des $F_{p-r}(m) \otimes F_r$, et donc dans $m \otimes F_{p-1}$: la structure de comodule de F_p/F_{p-1} est triviale. Même argument pour les translations à droite. □

Remarque **1.10.** — Si T est un torseur sous $\exp(\mathcal{L})$, 1.9 (i) fournit une filtration F de l'algèbre affine $\mathcal{O}(T)$ de T : le choix d'une trivialisation $\exp(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} T$ de T identifie $\mathcal{O}(T)$ à $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L})$, et la filtration sur $\mathcal{O}(T)$ déduite de celle de $\mathcal{O}(\exp \mathcal{L})$ ne dépend pas du choix fait.

1.11. Soient $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie graduée à degrés > 0, chaque $\mathcal{L}^n$ étant de dimension finie, et $\mathcal{L}^\wedge$ le complété de $\mathcal{L}$ pour la filtration associée au degré (1.3). Soit F une filtration de $\mathcal{L}$, telle que $F^0\mathcal{L} = \mathcal{L}$, et compatible à la graduation : c'est la somme directe de filtrations des $\mathcal{L}^n$. Tant 1.3 que 1.5 s'appliquent, l'algèbre affine B de $\exp(\mathcal{L}^\wedge)$ est graduée et filtrée, et l'exponentielle 1.2 (B) l'identifie à l'algèbre affine du schéma $\mathcal{L}^\wedge$ (1.3). Le choix d'une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ adaptée à la graduation et à la filtration fournit donc un isomorphisme de B avec une algèbre graduée filtrée du type suivant :

$(*)$ on part d'une algèbre bigraduée de polynômes, de générateurs de bidegrés (n, d) avec $n < 0$, $d \leq 0$, avec pour chaque n seulement un nombre fini de générateurs de premier degré n. On la munit de la graduation par le premier degré, et de la filtration associée à la graduation par le second.

Dans une algèbre B de type $(*)$, l'idéal m_B engendré par les générateurs est l'unique idéal maximal gradué. Le quotient m_B/m_B^2 hérite de B d'une graduation et d'une filtration.

Proposition **1.12.** — *Soient* B *et* C *des algèbres graduées et filtrées de type* $(*)$, *et* $u\colon\ B \to C$ *un morphisme gradué et compatible aux filtrations. Il induit* $\bar{u}\colon\ m_B/m_B^2 \to m_C/m_C^2$. *Si* $\bar{u}$ *est injectif et strict (resp. surjectif et strict) alors* u *l'est aussi.*

Rappelons que "injectif et strict" signifie injectif et tel que la filtration de la source soit induite par celle du but. Dualement, "surjectif et strict" signifie surjectif et tel que la filtration du but soit quotient de celle de la source.

Preuve. — Filtrons B et C par leur filtration m-adique, et passons au gradué associé. Le gradué de B, muni de la graduation et de la filtration dont il hérite de B, s'identifie à l'algèbre symétrique de m_B/m_B^2. De même pour C. Si $\bar{u}$ est injectif (resp. surjectif, resp. strict), $\mathrm{Gr}(u)$ l'est donc aussi. La filtration m-adique de B est compatible à sa graduation, et induit sur chaque composante homogène B^n une filtration finie. De même pour C. La proposition résulte donc du lemme suivant, appliqué à chaque $u^n\colon\ B^n \to C^n$. ☐

Lemme **1.13.** — *Soit* $u\colon\ (V, F', F) \to (W, F', F)$ *un morphisme d'espaces vectoriels bifiltrés. On suppose les filtrations* F' *finies :* F'^p *égal à l'espace entier si* $p \ll 0$, *à* 0 *si* $p \gg 0$. *Si* $\mathrm{Gr}_{F'}(u)$ *est injectif et strict (resp. surjectif et strict) pour* F, *alors* u *l'est aussi.*

C'est un cas particulier de ce que dans toute catégorie exacte, ici celle des espaces vectoriels filtrés, la classe des épimorphismes admissibles (resp. monomorphismes admissibles) est stable par extensions.

Remarque **1.14.** — (i) Pour B de type $(*)$, la graduation définit une action de $\mathbf{G}_m$ sur Spec(B), et m_B est l'idéal de l'unique point fixe 0 pour l'action, dilatante, de $\mathbf{G}_m$. Le dual gradué de m_B/m_B^2 est l'*espace tangent gradué* T_0^{gr} de Spec(B) en 0. L'hypothèse de 1.12 est que $\mathrm{Spec}(u)\colon\ \mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(B)$ induit un isomorphisme gradué filtré entre les espaces tangents gradués en 0. Une intuition est que l'action dilatante de $\mathbf{G}_m$ propage cette information infinitésimale en une information globale.

(ii) Si dans $(*)$ on prend les générateurs de second degré 0, on obtient une filtration triviale et une variante sans filtration de 1.12.

2. Rappels sur les mots de Lyndon

2.1. Pour A un ensemble, notons A^* le monoïde à unité librement engendré par A. C'est l'ensemble des mots écrits dans l'alphabet A. Supposons A muni d'un ordre total $\preccurlyeq$. Reutenauer [6] 5.1 définit les *mots de Lyndon* comme étant les mots non vides $w \in A^*$ plus petits, dans l'ordre lexicographique, que tous leurs facteurs à droite propres. Nous préférons la définition inductive (a) (b) (c) suivante (cf Radford [5] §2).

(a) Le mot vide n'est pas de Lyndon.

Soient w un mot non vide, $\mathrm{Supp}(w)$ l'ensemble des lettres qui figurent dans w, z le plus grand élément de $\mathrm{Supp}(w)$ et A' l'ensemble des mots az^p (a dans A, $a \prec z$, $p \geq 0$), ordonné lexicographiquement.

(b) Si w commence par z, w n'est de Lyndon que s'il est réduit à z.

Si w ne commence pas par z, w s'écrit de façon unique comme un mot w' de l'alphabet A', i.e. il existe un unique mot $w' \in A'^*$ d'image w dans A^*. La longueur de w' est le nombre d'occurences dans w de lettres autres que z.

(c) Le mot w est de Lyndon si est seulement si le mot w' est de Lyndon.

Cette définition n'est pas un cercle vicieux car dans (c), la longueur de $w' \in A'^*$ est strictement plus petite que celle de $w \in A^*$. On peut la voir comme un algorithme qui, après un nombre d'itérations au plus égal à la longueur de w, détermine si le mot w est de Lyndon.

Moultes propriétés des mots de Lyndon, par exemple la caractérisation que Reutenauer prend pour définition, ou (2.2.1) ci-dessous, se vérifient facilement en suivant cette induction, et en utilisant que le morphisme $A'^* \to A^*$ respecte l'ordre lexicographique.

2.2. Soit $\mathrm{Lib}(A)$ l'algèbre de Lie sur $\mathbf{Z}$ librement engendrée par A. Nous la regarderons comme contenue dans l'algèbre associative librement engendrée par A (l'algèbre du monoïde A^*). Suivons l'induction 2.1 pour attacher à chaque mot de Lyndon w un élément P_w de $\mathrm{Lib}(A)$:

(b′) si w est réduit à une lettre z, $P_w := z$;
(c′) si w est l'image de w' dans l'alphabet A', P_w est le polynôme de Lie $P_{w'}$ en l'alphabet A' appliqué aux $(-\mathrm{ad}\, z)^p(a) = [\cdots[a, z], \ldots, z]$.

Le théorème d'élimination de Lazard (Bourbaki Lie II §2, cor. à la prop. 10) montre que les P_w forment une base de $\mathrm{Lib}(A)$ sur $\mathbf{Z}$. Une propriété cruciale de cette base est que

(**2.2.1**) $$P_w = w + \text{ reste},$$

où le reste est une combinaison linéaire de monômes strictement plus grands que w dans l'ordre lexicographique.

2.3. Soit $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie librement engendrée sur $\mathbf{Z}$ par deux éléments e et f. On la regarde comme plongée dans l'algèbre associative Ass librement engendrée par e et f. La sous-algèbre $\mathcal{L}$ noyau de

$$\mathcal{L} \to \mathbf{Z}\cdot e:\ e \longmapsto e,\ f \longmapsto 0 \tag{2.3.1}$$

est librement engendrée par les $(\mathrm{ad}\, e)^{n-1}(f)$ pour $n \geq 1$ (Bourbaki loc. cit.).

Soit A l'ensemble des entiers ≥ 1. Il y a parfois intérêt à regarder A comme étant l'ensemble des $(\mathrm{ad}\, e)^{n-1}(f)$. On ordonne A par $\geq$, noté $\preccurlyeq$:

$$\cdots \prec 3 \prec 2 \prec 1.$$

Un monôme en e et f de degré m et de degré d en f s'écrit

$$e^{n_1-1}f\ e^{n_2-1}f\ \cdots\ e^{n_d-1}f\ e^{n_{d+1}}$$

avec $n_i \geq 1$ pour $1 \leq i \leq d$ et $\Sigma n_i = m$. Nous ordonnerons l'ensemble de ces monômes à m et d fixés par l'ordre lexicographique de $(n_1, \ldots, n_d)$, les entiers étant cette fois ordonnés par $\leq$.

Proposition **2.4.** — *Pour chaque mot de Lyndon $w = (n_1, \ldots, n_d)$ de A^*, le polynôme de* Lie P_w *appliqué aux* $(\mathrm{ad}\, e)^{n-1}(f)$ *vérifie*

$$\mathrm{P}_w = e^{n_1-1}f\ e^{n_2-1}f\ \cdots\ e^{n_d-1}f + \textit{reste},$$

où le reste est combinaison linéaire de monômes de mêmes degrés en e et f, et strictement plus petits dans l'ordre 2.3.

Preuve. — On a

$$(\mathrm{ad}\, e)^{n-1}(f) = \sum (-1)^p \binom{n-1}{p} e^{n-1-p} f e^p = e^{n-1}f + \text{reste}, \tag{2.4.1}$$

où le reste est combinaison linéaire de $e^q f e^r$ avec $q + r = n - 1$ et $q < n - 1$. On a donc

$$(\mathrm{ad}\, e)^{n_1-1}(f) \cdots (\mathrm{ad}\, e)^{n_d-1}(f) = e^{n_1-1}f \cdots e^{n_d-1}f + \text{reste}$$

où le reste est combinaison linéaire de monômes strictement plus petits dans l'ordre 2.3. Appliquant (2.2.1), on en déduit 2.4. □

2.5. Nous aurons à utiliser des alphabets A_1 contenus dans l'alphabet A des entiers ≥ 1, et munis de l'ordre induit. Les mots de Lyndon de A_1 sont simplement les mots de Lyndon $w = (n_1, \ldots, n_d)$ de A tels que chaque n_i soit dans A_1 et P_w reste le même. La proposition 2.4 reste donc valable pour l'alphabet A_1.

3. Rappels de [1]

3.1. Soient comme dans l'introduction $\mathrm{N} \geq 1$, $k = \mathbf{Q}(\zeta)$, $\mathcal{O}$, le k-schéma $\mathrm{X} = \mathbf{G}_m - \mu_\mathrm{N}$, son système de points-base tangentiels indexé par $\{0, \infty\} \cup \mu_\mathrm{N}$ et la catégorie $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$. Comme expliqué par exemple dans [1] 1.1, cette catégorie est tannakienne et admet le foncteur fibre

$$(\mathbf{3.1.1}) \qquad \omega(\mathrm{M}) := \bigoplus_n \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}(n), \mathrm{Gr}^\mathrm{W}_{-2n}(\mathrm{M})).$$

Nous appellerons $\omega(\mathrm{M})$ la ω-réalisation de M.

Rappelons ([1] 2.1 à 2.3) que le schéma en groupe G_ω des automorphismes du foncteur fibre ω est un produit semi-direct $\mathbf{G}_m \ltimes \mathrm{U}_\omega$ avec U_ω pro-unipotent. Le sous-groupe $\mathbf{G}_m$ provient de la graduation (3.1.1) de ω (cf 1.3). L'action de $\mathbf{G}_m$ sur U_ω permet de définir l'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{u}_\omega$ de U_ω (1.3). C'est une algèbre de Lie graduée libre à degrés > 0 et ω induit une équivalence de $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$ avec la catégorie des représentations graduées de dimension finie de $\mathfrak{u}_\omega$. La proposition [1] 2.3 et [1] (2.3.1), (2.1.3) donnent le nombre de générateurs en chaque degré de $\mathfrak{u}_\omega$. Nous utiliserons les cas suivants :

$\mathrm{N} = 1$: un générateur en chaque degré impair ≥ 3 ;
$\mathrm{N} = 2$: un générateur en chaque degré impair ≥ 1 ;
$\mathrm{N} = 3, 4$: un générateur en chaque degré ≥ 1 ;
$\mathrm{N} = 6$: deux générateurs en degré un et un générateur en chaque degré ≥ 2 ;
$\mathrm{N} = 8$: deux générateurs en chaque degré ≥ 1.

Pour $\mathrm{N} = 6$, le groupe $\overline{\mathrm{G}}_\omega$ des automorphismes de la restriction de ω à $\mathrm{MT}(\mathcal{O})$ est un quotient $\mathbf{G}_m \ltimes \overline{\mathrm{U}}_\omega$ de $\mathrm{G}_\omega = \mathbf{G}_m \ltimes \mathrm{U}_\omega$. L'algèbre de Lie graduée $\bar{\mathfrak{u}}_\omega$ de $\overline{\mathrm{U}}_\omega$ est le quotient de $\bar{\mathfrak{u}}_\omega$ par l'idéal engendré par les générateurs de degré un : elle a un générateur en chaque degré ≥ 2.

3.2. Soit L l'algèbre de Lie sur $\mathbf{Q}$ engendrée par des éléments e_a ($a \in \{0, \infty\} \cup \mu_\mathrm{N}$) soumis à la seule relation $\Sigma e_a = 0$. Elle est librement engendrée par e_0 et les e_η ($\eta \in \mu_\mathrm{N}$), et on la gradue en donnant aux e_a le degré un. Avec les notations de 1.3, on pose

$$\Pi := \exp(\mathrm{L}^\wedge).$$

La ω-réalisation du groupoïde fondamental motivique P de $(\mathrm{X}, \{0, \infty\} \cup \mu_\mathrm{N})$ est le groupoïde constant Π : chaque $\omega(\mathrm{P}_{b,a})$ est Π, et chaque loi de composition $\omega(\mathrm{P}_{c,b}) \times \omega(\mathrm{P}_{b,a}) \to \omega(\mathrm{P}_{c,a})$ est la loi de groupe de Π. On notera $\Pi_{b,a}$ la copie $\omega(\mathrm{P}_{b,a})$ de Π et $x_{b,a}$ la copie dans $\Pi_{b,a}$ de $x \in \Pi$. Le groupe G_ω agit sur le groupoïde $\omega(\mathrm{P})$. L'action de $\mathbf{G}_m$ se déduit de la graduation de L, tandis que celle de U_ω sur la copie $\Pi_{b,a}$ de Π dépend de a et b.

Que le groupoïde fondamental motivique engendre la catégorie $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$ équivaut à ce que l'action de G_ω soit fidèle. Nous montrerons qu'elle l'est pour $\mathrm{N} = 2, 3, 4$ ou 8 mais nos méthodes ne s'appliquent pas au cas qu'on aurait espéré être le plus simple, $\mathrm{N} = 1$. Pour $\mathrm{N} = 1$, l'évidence numérique est compatible avec une action fidèle, mais n'est pas concluante.

3.3. Soit $\mathrm{D}i_{\mathrm{N}}$ le groupe diédral de projectivités de $\mathbf{P}^1$ produit semi-direct du groupe à deux éléments de générateur $u \mapsto u^{-1}$, par le groupe cyclique des $[\eta]: u \mapsto \eta u$ ($\eta \in \mu_{\mathrm{N}}$). Ce groupe agit sur $\mathrm{X} \subset \mathbf{P}^1$ et stabilise son système de points-base. Il agit donc sur le groupoïde fondamental motivique. La ω-réalisation de l'action de $\sigma \in \mathrm{D}i_{\mathrm{N}}$ permute les points-base par $a \mapsto \sigma a$ et $\sigma: \Pi_{b,a} \to \Pi_{\sigma b, \sigma a}$ est l'automorphisme de Π déduit de l'action $e_c \mapsto e_{\sigma c}$ de σ sur L. Cette action, étant la ω-réalisation d'une action motivique, est respectée par G_ω.

Pour chaque a, l'action de U_ω sur la copie Lie $\Pi_{a,a}$ de $\mathrm{L}^\wedge$ fixe e_a.

3.4. Restreignons le groupoïde fondamental motivique de X au système de points-base $\{0\} \cup \mu_{\mathrm{N}}$. Ce système est stable sous μ_{N}. Soit V_ω le schéma en groupe des automorphismes μ_{N}-équivariants de la ω-réalisation de cette restriction qui fixent les points-base, et qui fixent les $e_a \in \operatorname{Lie} \Pi_{a,a}$ pour $a \in \{0\} \cup \mu_{\mathrm{N}}$. C'est un schéma en groupe pro-unipotent. D'après 3.3, l'action de U_ω se factorise par

$$(\mathbf{3.4.1}) \qquad \mathrm{U}_\omega \longrightarrow \mathrm{V}_\omega.$$

La notation V_ω, avec ω en indice, a pour source le fait (que nous n'utiliserons pas) que V_ω est la ω-réalisation d'un schéma en groupe motivique V agissent sur le groupoïde fondamental motivique de $(\mathrm{X}, \{0\} \cup \mu_{\mathrm{N}})$. La définition de V est parallèle à celle de V_ω.

Noter que tous les objets introduits sont munis d'une action de $\mathbf{G}_m$, comme il se doit en réalisation ω. Les graduations correspondantes (1.3) proviennent de celle de L. On notera $\mathfrak{v}_\omega$ l'algèbre de Lie graduée de V_ω.

D'après [1] 5.9, le morphisme de schémas

$$(\mathbf{3.4.2}) \qquad \mathrm{V}_\omega \to \Pi_{1,0} = \Pi: \ g \longmapsto g(1_{1,0})$$

est un isomorphisme. Il transforme élément neutre en élément neutre et est compatible aux actions de $\mathbf{G}_m$. Par passage aux espaces tangents aux éléments neutres, il fournit un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$(\mathbf{3.4.3}) \qquad \mathfrak{v}_\omega \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}.$$

Transportons par (3.4.2) et (3.4.3) les structures dont nous disposons sur V_ω et $\mathfrak{v}_\omega$. On obtient une nouvelle loi de groupe, notée $\circ$, sur Π, un nouveau crochet de Lie, noté $\{\ ,\ \}$, sur L, une nouvelle application exponentielle $\exp^\circ: \mathrm{L}^\wedge \to \Pi$, et une action μ_{N}-équivariante du groupe $(\Pi, \circ)$ et de son algèbre de Lie graduée $(\mathrm{L}, \{\ ,\ \})$ sur le groupoïde des $\Pi_{b,a}$ $(a, b \in \{0\} \cup \mu_{\mathrm{N}})$. En particulier, $(\Pi, \circ)$ et $(\mathrm{L}, \{\ ,\ \})$ agissent sur la copie $\Pi_{0,0}$ de Π et sur son algèbre de Lie $\mathrm{L}^{\wedge}$, et ces actions commutent à l'action, notée $[\eta]$, de $\eta \in \mu_{\mathrm{N}}$ sur Π et L. On appelle $\{\ ,\ \}$ le *crochet de Ihara*.

D'après [1] (5.13.4), (5.13.6), l'action, notée ∂, de $(\mathrm{L}, \{\ ,\ \})$ sur L et le crochet de Ihara sont donnés par

$$\partial_x : \ e_0 \longmapsto 0, \ e_\eta \longmapsto [-[\eta](x), e_\eta], \tag{3.4.4}$$

$$\{x, y\} = [x, y] + \partial_x(y) - \partial_y(x). \tag{3.4.5}$$

Le morphisme (3.4.1), composé avec (3.4.2), est un morphisme

$$\mathrm{U}_\omega \longrightarrow (\Pi, \circ). \tag{3.4.6}$$

3.5. L'inclusion de X dans $\mathbf{G}_m$ envoie le système de points-base $\{0, \infty\} \cup \mu_{\mathrm{N}}$ de X sur un système de points-base de $\mathbf{G}_m$: les points-base tangentiels en 0 et ∞ s'envoient sur des points-base tangentiels, et le point-base tangentiel en $\eta \in \mu_{\mathrm{N}}$ s'envoie sur le point η. Le groupoïde fondamental motivique de $\mathbf{G}_m$, pour ces points-base, est un quotient de celui de X. C'est par ailleurs le groupoïde constant défini par le groupe motivique additif $\mathbf{Q}(1)$. Ceci exprime que le groupe fondamental (unipotent) motivique de $\mathbf{G}_m$ est $\mathbf{Q}(1)$, indépendamment du point-base, et que les $\mathbf{Q}(1)$-torseurs de chemins $\mathrm{P}_{ba}(\mathbf{G}_m)$ sont triviaux, une conséquence de ce que les η sont des racines de l'unité (cf [1] 5.4). Ceci permet de définir un sous-groupoïde $\mathrm{D}^1\mathrm{P}$ du groupoïde fondamental motivique de X :

$$\mathrm{D}^1\mathrm{P}_{b,a} = \mathrm{Ker}(\mathrm{P}_{b,a} \to \mathrm{P}_{b,a}(\mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}(1)), \tag{3.5.1}$$

le groupoïde des chemins d'image “triviale” dans $\mathbf{G}_m$.

La ω-réalisation du groupe motivique additif $\mathbf{Q}(1)$ est le groupe additif $\mathbf{G}_a$, et celle des morphismes $\mathrm{P}_{b,a} \to \mathbf{Q}(1)$ est

$$\Pi \to \mathbf{G}_a \quad \text{induit par,} \tag{3.5.2}$$

$$\mathrm{L} \to \mathbf{Q} \cdot e_0 : \ e_0 \longmapsto e_0, \ e_\eta \longmapsto 0 \quad \text{pour } \eta \in \mu_{\mathrm{N}}. \tag{3.5.3}$$

On notera $\mathrm{D}^1\Pi$ le noyau de (3.5.2), et $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$ son algèbre de Lie graduée, noyau de (3.5.3).

En ω-réalisation, le groupoïde fondamental de $(\mathbf{G}_m, \{0\} \cup \mu_{\mathrm{N}})$ est le plus grand quotient de celui de $(\mathrm{X}, \{0\} \cup \mu_{\mathrm{N}})$ dans lequel s'annulent les $e_\eta \in \mathrm{Lie}\, \Pi_{\eta,\eta}$ $(\eta \in \mu_{\mathrm{N}})$. Puisque V_ω fixe ces e_η, son action passe au quotient. On notera $\mathrm{D}^1\mathrm{V}_\omega$ le sous-groupe de V_ω qui agit trivialement sur le quotient, et $\mathrm{D}^1\mathfrak{v}_\omega$ son algèbre de Lie graduée.

Lemme **3.6.**

(i) *L'isomorphisme de schémas (3.4.2) :* $g \mapsto g(1_{1,0})$ *de* V_ω *avec* $\Pi_{1,0}$ *envoie* $\mathrm{D}^1\mathrm{V}_\omega$ *sur* $\mathrm{D}^1\Pi_{1,0}$*, et donc* $\mathrm{D}^1\mathfrak{v}_\omega$ *sur* $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$ *;* $\mathrm{D}^1\Pi$ *est donc un sous-groupe de* $(\Pi, \circ)$*, et* $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $(\mathrm{L}, \{\ ,\ \})$.

(ii) *Le morphisme (3.4.1) de* U_ω *dans* V_ω *se factorise par* D^1V_ω.

Preuve. — La vérification de (i) est laissée au lecteur. L'action de U_ω sur $\omega(\mathbf{Q}(1))$, et donc sur la ω-réalisation du groupoïde fondamental de $(\mathbf{G}_m, \{0\} \cup \mu_N)$, est triviale. Ceci prouve (ii). □

3.7. Définissons la filtration de profondeur D de L par $D^0L := L$ et

$$D^pL := \mathfrak{Z}^pD^1L \quad \text{pour } p \geq 1, \tag{3.7.1}$$

$\mathfrak{Z}$ étant la série centrale descendante. La sous-algèbre D^1L de L est librement engendrée par les $(\mathrm{ad}\, e_0)^n(e_\eta)$ pour $\eta \in \mu_N$ et $n \geq 0$. La filtration de profondeur de L est donc associée (1.3) à la *graduation par le* D*-degré* de L, pour laquelle e_0 est de degré 0 et les e_η de degré un. On notera avec un exposant $\langle d\rangle$ la composante de D-degré d d'un espace vectoriel gradué par le D-degré.

Les graduations par le degré et par le D-degré sont compatibles, i.e. proviennent d'une bigraduation. La filtration D est donc la somme de filtrations des composantes homogènes de L, et les $\mathrm{Gr}^p_D L$ héritent d'une graduation par le degré.

La filtration de profondeur de L est respectée par le groupe diédral Di_N. On prendra garde à ce que la graduation par le D-degré, respectée par le sous-groupe μ_N, ne l'est pas par l'involution $u \mapsto u^{-1}$, qui envoie e_0 sur $e_\infty = -e_0 - \Sigma e_\eta$.

3.8. L'action "D-degré" de $\mathbf{G}_m$ sur L (cf 1.3) induit une action sur Π, puis sur la ω-réalisation du groupoïde fondamental motivique de $(X, \{0\} \cup \mu_N)$. Cette action respecte la μ_N-équivariance et les $\mathbf{Q}e_a \subset \mathrm{Lie}\, \Pi_{a,a}$, donc envoie sur lui-même le groupe d'automorphismes V_ω. On appelle *action par le* D*-degré* l'action de $\mathbf{G}_m$ sur V_ω ainsi obtenue. Elle induit une graduation $\mathfrak{v}_\omega = \bigoplus \mathfrak{v}_\omega^{\langle d\rangle}$ de $\mathfrak{v}_\omega$ et, comme pour toute graduation par le D-degré, on définit la *filtration de profondeur* comme étant la filtration associée (1.3).

Le point $1_{1,0}$ de $\Pi_{1,0}$ étant fixe sous l'action "D-degré", l'isomorphisme de schémas (3.4.2) de V_ω avec $\Pi_{1,0}$ est compatible aux actions D-degré, et l'isomorphisme (3.4.3) : $\mathfrak{v}_\omega \to L$ envoie $\mathfrak{v}_\omega^{\langle d\rangle}$ sur $L^{\langle d\rangle}$. D'après 3.6, la sous-algèbre de Lie $D^1\mathfrak{v}_\omega$ de $\mathfrak{v}_\omega$ définie en 3.5 coïncide donc avec $D^1\mathfrak{v}_\omega$, au sens de la filtration de profondeur. Autre conséquence : le crochet de Ihara fait de L une algèbre de Lie graduée par le D-degré. C'est d'ailleurs facile à vérifier sur (3.4.5). Cette homogénéité fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Gr}_D(L, \{\ ,\ \}) = (L, \{\ ,\ \}). \tag{3.8.1}$$

D'après 1.7, les sous-groupes $D^p\Pi$ de Π définis par la filtration de profondeur de L sont aussi des sous-groupes pour la loi de groupe ∘. Ils ont pour algèbres de Lie graduées les sous-algèbres de Lie D^pL de $(L, \{\ ,\ \})$.

Remarque **3.9.** — Nous avons défini la filtration de profondeur de $\mathfrak{v}_\omega$ à partir de sa graduation par le D-degré. C'est artificiel, en ce que la filtration est plus fondamentale que la graduation. Elle est motivique (provient d'une filtration de V), donc a par exemple un analogue ℓ-adique, la graduation non. Voici une autre description de la filtration de profondeur de $\mathfrak{v}_\omega$, dont on peut déduire son caractère motivique.

On part de la filtration de profondeur 3.7 de L. Par 1.5 et la remarque 1.10, on en déduit une filtration sur l'algèbre affine A du $\Pi_{0,0}$-torseur $\Pi_{1,0}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{v}_\omega$ agit sur $\Pi_{1,0}$, donc sur A, et l'action est fidèle. Un élément v de $\mathfrak{v}_\omega$ est donc de D-degré p si et seulement si, A étant gradué par le D-degré, il envoie pour tout n $\mathrm{A}^{\langle n\rangle}$ dans $\mathrm{A}^{\langle n+p\rangle}$. Il est donc dans $\mathrm{D}^p\mathfrak{v}_\omega$ si et seulement il envoie pour tout n $\mathrm{D}^n(\mathrm{A})$ dans $\mathrm{D}^{n+p}(\mathrm{A})$.

3.10. Munissons $\mathfrak{u}_\omega$ de la filtration par la série centrale descendante $\mathfrak{Z}$ et L de la filtration de profondeur. D'après 3.6 (ii) et 3.8, le morphisme

$$(\mathbf{3.10.1})\qquad \mathfrak{u}_\omega \longrightarrow (\mathrm{L}, \{\ ,\ \})$$

déduit de (3.4.6) : $\mathrm{U}_\omega \to \mathrm{V}_\omega = (\Pi, \circ)$ envoie $\mathfrak{u}_\omega$ dans $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$. Il est donc compatible aux filtrations. Il induit par passage aux gradués

$$(\mathbf{3.10.2})\qquad \mathrm{Gr}_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{u}_\omega) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{D}}(\mathrm{L}, \{\ ,\ \}) =_{(3.8.1)} (\mathrm{L}, \{\ ,\ \}),$$

et en particulier

$$(\mathbf{3.10.3})\qquad \mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gr}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{u}_\omega) \longrightarrow \mathrm{L}^{\langle 1\rangle}.$$

Les résultats de cet article sont conséquence de ce que le morphisme (3.10.3) est injectif ([1] 6.8 (i)) et de la détermination [1] 6.8 (ii) de son image. La composante $\mathrm{L}^{n\langle 1\rangle}$ de degré n de $\mathrm{L}^{\langle 1\rangle}$ a pour base les

$$(\mathbf{3.10.4})\qquad \mathrm{E}^n_\eta := (\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_\eta) \quad (\eta \in \mu_\mathrm{N})$$

et [1] 6.8 (ii), une fois corrigée la "faute d'impression" qui défigure (6.8.2), dit que l'image en degré n de (3.10.3) est l'espace des $\Sigma x_\eta\, \mathrm{E}^n_\eta$ tels que (x_η) vérifie la relation de distribution suivante. Si $n \geq 2$, on demande que pour tout diviseur d de N, y compris -1, et toute racine de l'unité ε d'ordre divisant $|\mathrm{N}/d|$, on ait

$$(\mathbf{3.10.5})\qquad x_\varepsilon = d^{n-1} \sum_{\eta^d = \varepsilon} x_\eta.$$

Pour $n = 1$, on impose $x_1 = 0$ et (3.10.5) n'est requis que pour $\varepsilon \neq 1$.

Dans la définition (3.10.4) de E^n_η, $\mathrm{ad}\, e_0$ est pris au sens du crochet [ ]. En l'absence d'ambiguïté, sur n, on écrira E_η pour E^n_η.

3.11. On laisse au lecteur le soin de déduire de (3.10.5) que pour $\mathrm{N} = 1, 2, 3, 4, 6$ ou 8, lorsque la partie de degré n de $\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{ab}}$ est non nulle, son image admet la base suivante (réduite à un élément sauf pour $\mathrm{N} = 6$, $n = 1$ ou pour $\mathrm{N} = 8$). Deux compatibilités : (a) l'image est stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(k/\mathbf{Q}) = (\mathbf{Z}/\mathrm{N})^*$ sur μ_{N}, et par là sur les E_η, (b) si $\mathrm{N}_1|\mathrm{N}_2$, l'image pour N_1 se déduit de l'image pour N_2 en annulant les E_η pour $\eta \in \mu_{\mathrm{N}_2} - \mu_{\mathrm{N}_1}$.

Cas $\mathrm{N} = 1$.

n impair ≥ 3 : E_1.

Cas $\mathrm{N} = 2$.

$n = 1$: E_{-1},
n impair ≥ 3 : $(1 - 2^{n-1})\mathrm{E}_{-1} + 2^{n-1}\mathrm{E}_1$.

Cas $\mathrm{N} = 3$.

$n = 1$: $\mathrm{E}_\zeta + \mathrm{E}_{\zeta^{-1}}$,
n pair ≥ 2 : $\mathrm{E}_\zeta - \mathrm{E}_{\zeta^{-1}}$,
n impair ≥ 3 : $(1 - 3^{n-1})(\mathrm{E}_\zeta + \mathrm{E}_{\zeta^{-1}}) + 2.3^{n-1}\mathrm{E}_1$.

Cas $\mathrm{N} = 4$.

$n = 1$: $\mathrm{E}_\zeta + \mathrm{E}_{\zeta^{-1}} + 2\mathrm{E}_{-1}$,
n pair ≥ 2 : $\mathrm{E}_\zeta - \mathrm{E}_{\zeta^{-1}}$,
n impair ≥ 3 : $(1 - 2^{n-1})(\mathrm{E}_\zeta + \mathrm{E}_{\zeta^{-1}}) + 2.2^{n-1}(1 - 2^{n-1})\mathrm{E}_{-1} + 2.2^{2n-2}\mathrm{E}_1$.

Cas $\mathrm{N} = 6$.

$n = 1$: E_{-1}, $\mathrm{E}_{\zeta^2} + \mathrm{E}_{\zeta^{-2}}$,
n pair ≥ 2 : $(1 + 2^{n-1})(\mathrm{E}_\zeta - \mathrm{E}_{\zeta^{-1}}) + 2^{n-1}(\mathrm{E}_{\zeta^2} - \mathrm{E}_{\zeta^{-2}})$,
n impair ≥ 3 : $(1 - 2^{n-1})(1 - 3^{n-1})(\mathrm{E}_\zeta + \mathrm{E}_{\zeta^{-1}}) + 2^{n-1}(1 - 3^{n-1})(\mathrm{E}_{\zeta^2} + \mathrm{E}_{\zeta^{-2}}) + 2(1 - 2^{n-1})3^{n-1}\mathrm{E}_{-1} + 2.2^{n-1}.3^{n-1}\mathrm{E}_1$.

Cas $\mathrm{N} = 8$.

$n = 1$: $\mathrm{E}_\zeta + \mathrm{E}_{\zeta^{-1}} + \mathrm{E}_{\zeta^2} + \mathrm{E}_{\zeta^{-2}} + 2\mathrm{E}_{-1}$,
$\mathrm{E}_{\zeta^3} + \mathrm{E}_{\zeta^{-3}} + \mathrm{E}_{\zeta^2} + \mathrm{E}_{\zeta^{-2}} + 2\mathrm{E}_{-1}$.
n pair ≥ 2 : $\mathrm{E}_\zeta - \mathrm{E}_{\zeta^{-1}} + 2^{n-1}(\mathrm{E}_{\zeta^2} - \mathrm{E}_{\zeta^{-2}})$,
$\mathrm{E}_{\zeta^3} - \mathrm{E}_{\zeta^{-3}} - 2^{n-1}(\mathrm{E}_{\zeta^2} - \mathrm{E}_{\zeta^{-2}})$,
n impair ≥ 3 : $(1 - 2^{n-1})(\mathrm{E}_\zeta + \mathrm{E}_{\zeta^{-1}} + 2^{n-1}(\mathrm{E}_{\zeta^2} + \mathrm{E}_{\zeta^{-2}}) + 2.2^{2n-2}\mathrm{E}_{-1}) + 2.2^{3n-3}\mathrm{E}_1$,
$(1 - 2^{n-1})(\mathrm{E}_{\zeta^3} + \mathrm{E}_{\zeta^{-3}} + 2^{n-1}(\mathrm{E}_{\zeta^2} + \mathrm{E}_{\zeta^{-2}}) + 2.2^{n-2}\mathrm{E}_{-1}) + 2.2^{3n-3}\mathrm{E}_1$.

4. Fidélité

On suppose que $\mathrm{N} > 1$ et on choisit un diviseur propre M de N. Dans nos applications, on aura $\mathrm{N} = 2, 3, 4$ ou 6 et $\mathrm{M} = 1$, ou $\mathrm{N} = 8$ et $\mathrm{M} = 2$.

4.1. Pour $\mathrm{S} \subset \mu_{\mathrm{N}}$, on note L_{S} l'algèbre de Lie librement engendrée par des éléments e_0 et e_η ($\eta \in \mathrm{S}$), et $\Pi_{\mathrm{S}} := \exp(\hat{\mathrm{L}}_{\mathrm{S}})$ le schéma en groupe correspondant. On regardera L_{S} comme étant le *quotient* de L dans lequel s'annulent les e_η pour $\eta \in \mu_{\mathrm{N}} - \mathrm{S}$, et Π_{S} comme un quotient de Π. Ces quotients héritent de L d'une graduation par le D-degré et de la filtration de profondeur associée.

Dans ce paragraphe, nous utiliserons seulement les cas $\mathrm{S} = \mu_{\mathrm{M}}$ et $\mathrm{S} = \zeta^{-1}\mu_{\mathrm{M}}$, et nous écrirons L_{M}, Π_{M}, $\mathrm{L}''_{\mathrm{M}}$ et Π''_{M} pour $\mathrm{L}_{\mu_{\mathrm{M}}}$, $\Pi_{\mu_{\mathrm{M}}}$, $\mathrm{L}_{\zeta^{-1}\mu_{\mathrm{M}}}$ et $\Pi_{\zeta^{-1}\mu_{\mathrm{M}}}$. Nous utiliserons les quotients suivants de $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$:

L' : l'algèbre de Lie graduée $\mathrm{D}^1\mathrm{L}_{\mathrm{M}}$ de $\mathrm{D}^1\Pi_{\mathrm{M}}$,
L'' : l'algèbre de Lie graduée $\mathrm{D}^1\mathrm{L}''_{\mathrm{M}}$ de $\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}}$.

Le produit de L' et L'' est encore un quotient de $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$, car μ_{M} est disjoint de $\zeta^{-1}\mu_{\mathrm{M}}$ et que

(**4.1.1**) $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$ est librement engendrée par les $(\mathrm{ad}\, e_0)^n(e_\eta)$ ($n \geq 0$, $\eta \in \mu_{\mathrm{N}}$), et L' (resp. L'') s'en déduit en annulant les générateurs $(ad\, e_0)^n(e_\eta)$ pour $\eta \notin \mu_{\mathrm{M}}$ (resp. $\eta \notin \zeta^{-1}\mu_{\mathrm{M}}$).

Les diagrammes suivants reprennent les groupes introduits et, en dessous, leurs algèbres de Lie graduées. Les flèches horizontales sont les isomorphismes déduits de l'automorphisme $[\zeta]$ de L (3.3), et les flèches verticales sont surjectives.

(**4.1.2**)
$$\begin{array}{ccccccc} \Pi & \longrightarrow & \Pi & \qquad & \mathrm{D}^1\Pi & \longrightarrow & \mathrm{D}^1\Pi \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Pi''_{\mathrm{M}} & \longrightarrow & \Pi_{\mathrm{M}} & & \mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}} & \longrightarrow & \mathrm{D}^1\Pi_{\mathrm{M}} \end{array}$$

(**4.1.3**)
$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{L} & \longrightarrow & \mathrm{L} & \qquad & \mathrm{D}^1\mathrm{L} & \longrightarrow & \mathrm{D}^1\mathrm{L} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{L}''_{\mathrm{M}} & \longrightarrow & \mathrm{L}_{\mathrm{M}} & & \mathrm{L}'' & \longrightarrow & \mathrm{L}' \end{array}$$

Nous noterons $\mathrm{L}_{\mathbf{Z}}$ la $\mathbf{Z}$-forme de L librement engendrée sur $\mathbf{Z}$ par e_0 et les e_η, et $\mathrm{D}^1\mathrm{L}_{\mathbf{Z}}$, $\mathrm{L}'_{\mathbf{Z}}$, $\mathrm{L}''_{\mathbf{Z}}$ les $\mathbf{Z}$-formes de $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$, L' et L'' qui s'en déduisent. L'algèbre de Lie $\mathrm{L}'_{\mathbf{Z}}$ (resp. $\mathrm{L}''_{\mathbf{Z}}$) est librement engendrée sur $\mathbf{Z}$ par les images des $(ad\, e_0)^n(e_\eta)$ pour $\eta \in \mu_{\mathrm{M}}$ (resp. $\eta \in \zeta^{-1}\mu_{\mathrm{N}}$).

4.2. Notons Y le k-schéma $\mathbf{G}_m - \mu_M$. L'inclusion de X dans Y envoie le système de points-base $\{0\} \cup \mu_N$ de X sur un système de points-base $\{0\} \cup \mu_N$ de Y. Le groupoïde fondamental motivique de $(Y, \{0\} \cup \mu_N)$ est un quotient de celui de $(X, \{0\} \cup \mu_N)$. Il est muni d'une action de μ_M, déduite de l'action de μ_M sur Y. Sa ω-réalisation est le groupoïde constant Π_M et notera $(\Pi_M)_{b,a}$ la copie $\omega(P_{b,a}(Y))$ de Π_M. Ce groupoïde constant Π_M sur $\{0\} \cup \mu_N$ est le plus grand quotient du groupoïde constant Π dans lequel s'annulent les $e_\eta \in \operatorname{Lie} \Pi_{\eta,\eta}$ pour $\eta \in \mu_N - \mu_M$. L'action de $(\Pi, \circ)$ sur le groupoïde constant Π fixe ces e_η, donc passe au quotient. L'action sur le quotient est encore μ_M-équivariante.

Nous nous proposons de définir des groupes d'automorphismes du système des $(\Pi_M)_{b,a}$, pour (b, a) dans $(\{0\} \cup \mu_M) \times (\{0\} \cup \mu_M)$, ou pour (b, a) dans $(\{0\} \cup \mu_M) \times (\{0\} \cup \mu_M) \cup \{(\zeta, 0)\}$. Nous le ferons en disant de quelles structures ce sont les groupes d'automorphismes. Quand on prend a et b dans $\{0\} \cup \mu_M$, nous prenons pour structure, notée (a_M), celle que nous avons considérée en 3.4 pour la valeur M de N : la structure de groupoïde (les $(\Pi_M)_{b,a}$ sont la restriction à $\{0\}\mu_M$ du groupoïde constant Π_M), plus l'action 3.3 de μ_M et la donnée des $e_a \in \operatorname{Lie}(\Pi_M)_{a,a}$. Son groupe d'automorphismes est Π_M, muni d'une nouvelle loi de groupe $\circ$ (3.4). Si on permet en outre $(b, a) = (\zeta, 0)$, on adjoint à (a_M) la structure (b_M) suivante : la structure de $(\Pi_M)_{0,0}$-torseur de $(\Pi_M)_{\zeta,0}$. Le groupe des automorphismes de $(a_M)(b_M)$ est le produit semi-direct $\Pi_M \rtimes (\Pi_M, \circ)$, où $(\Pi_M, \circ)$ agit sur le sous-groupe Π_M par son action 3.4 sur $(\Pi_M)_{0,0} = \Pi_M$. Dans ce produit semi-direct,

- (a'_M) le groupe $(\Pi_M, \circ)$ des automorphismes de (a_M) agit sur la copie $(\Pi_M)_{\zeta,0}$ de Π_M comme il agit sur la copie $(\Pi_M)_{0,0}$;
- (b'_M) le groupe Π_M agit trivialement sur (a_M), et sur la copie $(\Pi_M)_{\zeta,0}$ de Π_M par translations à gauche.

Restreignons l'action de $(\Pi, \circ)$ sur le groupoïde constant Π_M aux $(\Pi_M)_{b,a}$ pour $a, b \in \{0\} \cup \mu_M$ ou $(b, a) = (\zeta, 0)$. On obtient une action de $(\Pi, \circ)$ sur $(a_M)(b_M)$, soit

$$(\Pi, \circ) \to \Pi_M \rtimes (\Pi_M, \circ). \tag{4.2.1}$$

Lemme **4.3.** — *L'application (4.2.1) de* Π *dans* $\Pi_M \times \Pi_M$ *est*

$$\Pi \to \Pi''_M \times \Pi_M \xrightarrow{([\zeta],\mathrm{Id})} \Pi_M \times \Pi_M. \tag{4.3.1}$$

L'application (4.3.1) est donc un morphisme de groupes de $(\Pi, \circ)$ dans $\Pi_M \rtimes (\Pi_M, \circ)$.

Preuve. — Soit x dans $(\Pi, \circ)$. Il agit sur $(\Pi_M)_{1,0}$ et sur $(\Pi_M)_{\zeta,0}$, et l'image (x_1, x_2) de x par (4.2.1) est donnée par $(x_1)_{\zeta,0} = x\langle 1_{\zeta,0}\rangle$, $(x_2)_{1,0} = x\langle 1_{1,0}\rangle$. L'action de x sur $(\Pi_M)_{1,0}$ et $(\Pi_M)_{\zeta,0}$ se déduit par passage au quotient de son action sur $\Pi_{1,0}$ et $\Pi_{\zeta,0}$. Dans $\Pi_{1,0}$, on a $x\langle 1_{1,0}\rangle = x_{1,0}$. Dans $\Pi_{\zeta,0}$, par μ_N-équivariance, on a $x\langle 1_{\zeta,0}\rangle = x\langle[\zeta]1_{1,0}\rangle = [\zeta](x\langle 1_{1,0}\rangle) =$

$[\zeta](x_{1,0}) = ([\zeta]x)_{\zeta,0}$. Les éléments x_1 et x_2 de Π_{M} sont donc les $\mathrm{pr}([\zeta]x) = [\zeta]\mathrm{pr}''(x)$ et $\mathrm{pr}(x)$, pour pr et pr″ les projections de Π sur Π_{M} et Π''_{M}. □

Remarques **4.4.** — (i) L'action de $(\Pi_{\mathrm{M}}, \circ)$ sur la copie $(\Pi_{\mathrm{M}})_{0,0}$ de Π_{M} est déduite par passage au quotient de celle de $(\Pi, \circ)$ sur Π. Cette dernière commute à l'action de μ_{N} sur Π. Par passage au quotient, elle induit donc aussi une action de Π_{M} sur Π''_{M}, et (4.3.1) devient un composé d'homomorphismes

$$(\mathbf{4.4.1}) \qquad (\Pi, \circ) \xrightarrow{\Theta} \Pi''_{\mathrm{M}} \rtimes (\Pi_{\mathrm{M}}, \circ) \xrightarrow{([\zeta],\mathrm{Id})} \Pi_{\mathrm{M}} \rtimes (\Pi_{\mathrm{M}}, \circ).$$

(ii) Que la flèche Θ de (4.4.1) soit un homomorphisme se comprend mieux en reprenant 4.2 pour "$\mathrm{M} = \mathrm{N}$ et $\zeta = 1$". Il s'agit de considérer (a_{N}) et une copie $\Pi''_{1,0}$ du $\Pi_{0,0}$-torseur $\Pi_{1,0}$. Comme en 4.2, le groupe des automorphismes de ce système est $\Pi \rtimes (\Pi, \circ)$. L'action de $(\Pi, \circ)$, où Π agit sur la copie $\Pi''_{1,0}$ de Π comme sur la copie $\Pi_{1,0}$, est donnée par

$$(\mathbf{4.4.2}) \qquad x \longmapsto (x, x) : \ (\Pi, \circ) \to \Pi \rtimes (\Pi, \circ).$$

L'application (4.4.2) est donc un morphisme de groupes. Passant aux algèbres de Lie, on voit que

$$(\mathbf{4.4.3}) \qquad x \longmapsto (x, x) : \ (\mathrm{L}, \{\ ,\ \}) \to \mathrm{L} \rtimes (\mathrm{L}, \{\ ,\ \})$$

est un morphisme d'algèbres de Lie. Ce n'est pas difficile à vérifier directement sur (3.4.4) (3.4.5).

4.5. La projection de $\mathrm{D}^1\Pi$ sur $\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}} \times \mathrm{D}^1\Pi_{\mathrm{M}}$, comme celle de $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$ sur $\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}'$, est un épimorphisme. D'après (4.4.1), la loi de groupe $\circ$ passe au quotient et le quotient $(\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}} \times \mathrm{D}^1\Pi_{\mathrm{M}}, \circ)$ est $\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}} \rtimes (\mathrm{D}^1\Pi_{\mathrm{M}}, \circ)$. Le produit semi-direct est défini par l'action de $(\mathrm{D}^1\Pi_{\mathrm{M}}, \circ)$ sur $\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}}$ déduite par restriction à $\mathrm{D}^1\Pi$ et par passage au quotient de l'action de $(\Pi, \circ)$ sur Π.

Passons aux algèbres de Lie graduées. Le quotient $\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}'$ de $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$ est non seulement un quotient de $(\mathrm{D}^1\mathrm{L}, [\ \ ])$, mais encore de $(\mathrm{D}^1\mathrm{L}, \{\ ,\ \})$: le crochet $\{\ ,\ \}$ passe au quotient, et fournit sur $\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}'$ un crochet $\{\ ,\ \}$ qui fait de $\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}'$ un produit semi-direct :

$$(\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}', \{\ ,\ \}) = (\mathrm{L}'', [\ ,\ ]) \rtimes (\mathrm{L}', \{\ ,\ \}).$$

Le produit semi-direct est défini par l'action de $(\mathrm{L}', \{\ ,\ \})$ sur $(\mathrm{L}'', [\ \ ])$ déduite par restriction à $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$ et passage au quotient de l'action 3.4 de $(\mathrm{L}, \{\ ,\ \})$ sur $(\mathrm{L}, [\ \ ])$. Tout ceci est facile à vérifier sur (3.4.4), (3.4.5), et c'est d'ailleurs ce que j'avais fait avant de comprendre 4.2.

4.6. Jusqu'à la fin du paragraphe, sauf en 4.13, on suppose que $N = 2, 3, 4, 6$ et $M = 1$, ou que $N = 8$ et $M = 2$. Pour $N = 2, 3, 4$, ou 8, considérons le morphisme composé

$$(\mathbf{4.6.1}) \qquad \mathfrak{u}_\omega \xrightarrow{(3.10.1)} (D^1L, \{\ ,\ \}) \longrightarrow (L'' \times L', \{\ ,\ \}).$$

Nous utiliserons la graduation par le D-degré de $L'' \times L'$, de filtration associée la filtration de profondeur, pour identifier $\mathrm{Gr}_D(L'' \times L')$ à $L'' \times L'$ et en particulier $\mathrm{Gr}^1_D(L'' \times L')$ à la composante de D-degré un $(L'' \times L')^{\langle 1 \rangle}$ de $L'' \times L'$.

D'après (4.1.1), la composante de degré n et D-degré un $L^{n,\langle 1 \rangle}$ de L a pour base les $(\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_\eta)$ $(\eta \in \mu_N)$, et $(L'' \times L')^{n,\langle 1 \rangle}$ s'en déduit en annulant les $(\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_\eta)$ pour η ni dans μ_M, ni dans $\zeta^{-1}.\mu_M$. On vérifie dès lors par inspection sur 3.11 que le morphisme

$$(\mathbf{4.6.2}) \qquad \mathfrak{u}^{ab}_\omega \to \mathrm{Gr}^1_D(L'' \times L') = (L'' \times L')^{\langle 1 \rangle}$$

déduit de (4.6.1) par passage au quotient est injectif. On notera J l'image de (4.6.2).

Puisque $L'' \times L' = D^1(L'' \times L')$, le morphisme (4.6.1) est compatible à la série centrale descendante de $\mathfrak{u}_\omega$ et à la filtration de profondeur de $L'' \times L'$. Considérons

$$(\mathbf{4.6.3}) \qquad \mathrm{Lib}(J) \xrightarrow{①} \mathrm{Gr}_3(\mathfrak{u}_\omega) \xrightarrow{②} (L'' \times L', \{\ ,\ \}),$$

où Lib(J) est l'algèbre de Lie librement engendrée par l'espace vectoriel J (gradué par le degré), où ① est déduit de $J \xrightarrow{\sim} \mathfrak{u}^{ab}_\omega$ inverse à (4.6.2), et où ② est le gradué de (4.6.1). Le morphisme ① est surjectif. Que $\mathfrak{u}_\omega$ soit une algèbre de Lie libre assure qu'il est bijectif ; nos arguments le reprouveront (pour $N = 2, 3, 4, 8$).

4.7. Si $N = 6$, $\zeta - 1 = \zeta^2$ est une unité et le $P_{00}(Y)$-torseur $P_{\zeta,0}(Y)$ est à bonne réduction partout. Si $\overline{G}_\omega = \mathbf{G}_m \ltimes \overline{U}_\omega$ est le quotient de G_ω correspondant à $\mathrm{MT}(\mathcal{O})$, l'action de G_ω se factorise donc par $\overline{G}_\omega$, et (4.6.1) par l'algèbre de Lie graduée $\bar{\mathfrak{u}}_\omega$ de $\overline{U}_\omega$. Cette dernière factorisation est claire sur 3.11 : $\bar{\mathfrak{u}}_\omega$ est le quotient de $\mathfrak{u}_\omega$ par l'idéal engendré par sa composante de degré un, d'après 3.11 et parce que D^2L est nul en degré un, l'image dans L de cette composante est engendrée par e_{-1} et $e_{\zeta^2} + e_{\zeta^{-2}}$, et l'image de ces éléments dans $L'' \times L'$ est nulle. Pour $N = 6$, plutôt que (4.6.1), on utilisera

$$(\mathbf{4.7.1}) \qquad \bar{\mathfrak{u}}_\omega \to (L'' \times L', \{\ ,\ \})$$

par lequel (4.6.1) se factorise. Si J est l'image de

$$(\mathbf{4.7.2}) \qquad \bar{\mathfrak{u}}^{ab}_\omega \to \mathrm{Gr}^1_D(L'' \times L') = (L'' \times L')^{\langle 1 \rangle}$$

qui s'en déduit, on définit à l'imitation de (4.6.3)

$$(\mathbf{4.7.3}) \qquad \mathrm{Lib}(J) \xrightarrow{①} \mathrm{Gr}_3(\bar{\mathfrak{u}}_\omega) \xrightarrow{②} (L'' \times L', \{\ ,\ \}).$$

4.8. Pour chaque n tel que la composante de degré n J^n de J soit non nulle, la table basée sur 3.11 qui suit donne une base de J^n. Elle est réduite à un élément sauf pour $\mathrm{N}=8$. Elle est formée d'éléments notés (x,y) de $(\mathrm{L}''\times\mathrm{L}')_{\mathbf{Z}}^{n,\langle 1\rangle}$, nous noterons $\mathrm{J}^n_{\mathbf{Z}}$ la $\mathbf{Z}$-forme de J^n qu'elle engendre, et poserons $\mathrm{J}_{\mathbf{Z}} := \bigoplus \mathrm{J}^n_{\mathbf{Z}}$. Comme en 3.11, nous écrirons en degré n E_η pour $(\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_\eta)$.

Cas $\mathrm{N}=2$, $\mathrm{M}=1$.

$n=1$: $(\mathrm{E}_{-1},0)$;
n impair ≥ 3 : $((1-2^{n-1})\mathrm{E}_{-1},\, 2^{n-1}\mathrm{E}_1)$.

Cas $\mathrm{N}=3$, $\mathrm{M}=1$.

$n=1$: $(\mathrm{E}_\zeta,0)$;
n pair ≥ 2 : $(\mathrm{E}_\zeta,0)$;
n impair ≥ 3 : $((1-3^{n-1})\mathrm{E}_\zeta,\, 2.3^{n-1}\mathrm{E}_1)$.

Cas $\mathrm{N}=4$, $\mathrm{M}=1$.

$n=1$: $(\mathrm{E}_\zeta,0)$;
n pair ≥ 2 : $(\mathrm{E}_\zeta,0)$;
n impair ≥ 3 : $((1-2^{n-1})\mathrm{E}_\zeta,\, 2.2^{n-2}\mathrm{E}_1)$.

Cas $\mathrm{N}=6$, $\mathrm{M}=1$.

n pair ≥ 2 : $(\mathrm{E}_\zeta,0)$;
n impair ≥ 3 : le quotient de $((1-2^{n-1})(1-3^{n-1})\mathrm{E}_\zeta,\, 2.2^{n-1}.3^{n-1}\mathrm{E}_1)$ par la plus grande puissance de 3 qui divise les coefficients.

Cas $\mathrm{N}=8$, $\mathrm{M}=2$.

$n=1$: $(\mathrm{E}_\zeta,2\mathrm{E}_{-1})$, $(\mathrm{E}_{-\zeta},2\mathrm{E}_{-1})$;
n pair ≥ 2 : $(\mathrm{E}_\zeta,0)$, $(\mathrm{E}_{-\zeta},0)$;
n impair ≥ 3 : $((1-2^{n-1})\mathrm{E}_\zeta,\, 2.(1-2^{n-1}).2^{2n-2}\mathrm{E}_{-1}+2.2^{3n-3}\mathrm{E}_1)$,
$((1-2^{n-1})\mathrm{E}_{-\zeta},\, 2.(1-2^{n-1}).2^{2n-2}\mathrm{E}_{-1}+2.2^{3n-3}\mathrm{E}_1)$.

Posons $\ell := 2$ si $\mathrm{N}=2$, 4 ou 8 et $\ell := 3$ si $\mathrm{N}=3$ ou 6. Remplacer un indice $\mathbf{Z}$ par un indice $\mathbf{Z}/\ell$ indiquera une réduction modulo ℓ.

Théorème **4.9.** — *Avec les notations de 4.3, 4.6 et 4.7,*

(i) *Pour* $N = 2, 3, 4, 6$ *ou* 8, *la réduction* $\bmod \ell$ *de l'inclusion de* $J_{\mathbf{Z}}$ *dans* $(L''_{\mathbf{Z}} \times L'_{\mathbf{Z}})^{\langle 1\rangle}$ *se factorise par une injection de* $J_{\mathbf{Z}/\ell}$ *dans* ${L''_{\mathbf{Z}/\ell}}^{\langle 1\rangle}$ *:*

$$\begin{array}{ccc} J_{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & (L''_{\mathbf{Z}} \times L'_{\mathbf{Z}})^{\langle 1\rangle} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_{\mathbf{Z}/\ell} \hookrightarrow {L''_{\mathbf{Z}/\ell}}^{\langle 1\rangle} & \longrightarrow & (L''_{\mathbf{Z}/\ell} \times L'_{\mathbf{Z}/\ell})^{\langle 1\rangle}. \end{array} \tag{4.9.1}$$

(ii) *Pour* $N = 3, 4$ *ou* 8, $J_{\mathbf{Z}/\ell} \to {L''_{\mathbf{Z}/\ell}}^{\langle 1\rangle}$ *est un isomorphisme.*

Preuve. — Pour $N = 6$, il s'agit de vérifier pour n impair ≥ 3 l'inégalité de valuations 3-adiques

$$v_3((1 - 2^{n-1})(1 - 3^{n-1})) < v_3(2.2^{n-1}.3^{n-1}).$$

Le membre de droite vaut $n - 1$. Le membre de gauche est égal à $v_3(1 - 2^{n-1}) = v_3(1 - (1 + 3)^{(n-1)/2}) = 1 + v_3((n - 1)/2)$. Pour une valeur donné v de $v_3((n - 1)/2)$, la plus petite valeur possible de n est $2.3^v + 1$, et on laisse au lecteur le soin de vérifier que pour $v \geq 0$, on a bien

$$1 + v < 2.3^v.$$

Les autres cas sont clairs par inspection de la table 4.8. □

4.10. Le morphisme (4.6.3) ou (4.7.3) : $\mathrm{Lib}(J) \to (L'' \times L', \{\ ,\ \})$ se déduit de l'inclusion de J dans $(L'' \times L')^{\langle 1\rangle}$. Il induit

$$\mathrm{Lib}(J_{\mathbf{Z}}) \to (L''_{\mathbf{Z}} \times L'_{\mathbf{Z}}, \{\ ,\ \}). \tag{4.10.1}$$

Sur $L''_{\mathbf{Z}}$, le crochet $\{\ ,\ \}$ induit le crochet $[\quad]$, pour lequel $L''_{\mathbf{Z}}$ est librement engendrée par le sous-module gradué ${L''_{\mathbf{Z}}}^{\langle 1\rangle}$. La réduction $\bmod \ell$ de $L''_{\mathbf{Z}}$ est donc librement engendrée par ${L''_{\mathbf{Z}/\ell}}^{\langle 1\rangle}$, et pour tout sous-espace vectoriel M de ${L''_{\mathbf{Z}/\ell}}^{\langle 1\rangle}$, la sous-algèbre de Lie de $L''_{\mathbf{Z}/\ell}$ engendrée par M est librement engendrée par M. D'après 4.9, la réduction $\bmod \ell$ de (4.10.1)

$$\mathrm{Lib}(J_{\mathbf{Z}/\ell}) \hookrightarrow L''_{\mathbf{Z}/\ell} \longrightarrow (L''_{\mathbf{Z}/\ell} \times L'_{\mathbf{Z}/\ell}, \{\ ,\ \}) \tag{4.10.2}$$

est donc injective ($N = 2, 3, 4, 6$ ou 8). De plus, on a

$$\mathrm{Lib}(J_{\mathbf{Z}/\ell}) \xrightarrow{\sim} L''_{\mathbf{Z}/\ell} \quad \text{pour } N = 3, 4 \text{ ou } 8. \tag{4.10.3}$$

Si un morphisme de $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini a une réduction $\bmod \ell$ qui est un isomorphisme, son tensorisé avec $\mathbf{Q}$ est un isomorphisme : les modules sont de même rang, et considérer le déterminant. Le même énoncé vaut pour “monomorphisme” et pour “épimorphisme” : se ramener au cas précédent par addition d'un facteur direct à la source ou au but.

Si on applique, degré par degré, cette remarque à (4.10.1), (4.10.2) montre que (4.6.3) (resp. (4.7.3) si $\mathrm{N} = 6$) est injectif : ① est un isomorphisme, i.e. $\mathfrak{u}_\omega$ (resp. $\bar{\mathfrak{u}}_\omega$) est une algèbre de Lie libre, et ② est injectif. Plus précisément,

$$\text{(4.10.4)} \qquad \mathrm{Gr}_3(\mathfrak{u}_\omega) \to (\mathrm{L}, \{\ ,\ \}) \to (\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}', \{\ ,\ \}) \to \mathrm{L}''$$

est injectif (resp. $\mathrm{Gr}_3(\bar{\mathfrak{u}}_\omega) \to \mathrm{L}'' \times \mathrm{L}' \to \mathrm{L}''$ l'est), et même bijectif pour $\mathrm{N} = 3, 4$ ou 8.

La filtration centrale descendante de $\mathfrak{u}_\omega$ (resp. $\bar{\mathfrak{u}}_\omega$), ainsi que la filtration de profondeur de $\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}'$, étant en chaque degré une filtration finie, il en résulte pour (4.6.1) et (4.7.1) que :

Corollaire **4.11.**

(i) *Pour* $\mathrm{N} = 2, 3, 4$ *ou* 8, *tant le morphisme*

$$\text{(4.11.1)} \qquad \mathfrak{u}_\omega \to (\mathrm{D}^1\mathrm{L}, \{\ ,\ \}) \to (\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}', \{\ ,\ \})$$

que son composé avec la projection sur L'' *(qui n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie)*

$$\text{(4.11.2)} \qquad \mathfrak{u}_\omega \to \mathrm{L}'' \times \mathrm{L}' \to \mathrm{L}'',$$

sont injectifs, et la filtration par la série centrale descendante de $\mathfrak{u}_\omega$ *est induite par la filtration de profondeur tant de* L *que de* $\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}'$ *ou* L''.

(ii) *Pour* $\mathrm{N} = 3, 4$ *ou* 8, *(4.11.2) est bijectif.*

(iii) *Pour* $\mathrm{N} = 6$,

$$\text{(4.11.3)} \qquad \bar{\mathfrak{u}}_\omega \to (\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}', \{\ ,\ \})$$

ainsi que son composé avec la projection sur L''

$$\text{(4.11.4)} \qquad \bar{\mathfrak{u}}_\omega \to \mathrm{L}'' \times \mathrm{L}' \to \mathrm{L}''$$

sont injectifs, et la filtration par la série centrale descendante de $\bar{\mathfrak{u}}_\omega$ *est induite par la filtration de profondeur tant de* $\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}'$ *que de* L''.

Le noyau de l'action de $(\mathrm{L}' \times \mathrm{L}'', \{\ ,\ \})$ sur $(\Pi_\mathrm{M})_{\zeta,0}$ est réduit aux multiples de $e_1 \in \mathrm{L}''$. En effet, L' agit par translations à gauche tandis que L'' fixe $1_{\zeta,0}$ et que la composante dans L'' de $x \in \mathrm{L}' \times \mathrm{L}''$ fournit son action sur le groupe $(\Pi_\mathrm{M})_{0,0}$ des translations à droite. Cette action est induite par celle de $(\mathrm{L}_\mathrm{M}, \{\ ,\ \})$ sur Π_M, dont (3.4.4) montre que le noyau est réduit aux multiples de e_1, le centralisateur de e_1 dans l'algèbre de Lie libre $(\mathrm{L}_\mathrm{M}, [\ ,\ ])$.

L'élément e_1 de L'' n'est pas dans l'image de (4.11.1) ou (4.11.3). Cela résulte de l'injectivité de (4.11.2) ou (4.11.4), ou plus simplement de la détermination 3.10 de l'image de (3.10.3). L'injectivité de (4.11.1) (resp. (4.11.3) si $\mathrm{N}=6$) assure donc que l'action de U_ω (resp. $\overline{\mathrm{U}}_\omega$) sur $\omega(\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{Y}))$ est fidèle. Celle de $\bar{\mathrm{G}}_\omega$ (resp. G_ω) l'est aussi, car l'algèbre affine de Π_M a des éléments de tous les degrés ≤ 0. On a donc (voir 3.2).

Corollaire **4.12.** — *Si* $\mathrm{N}=2,3,4$ *ou* 8, $\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{Y})$ *engendre la catégorie tannakienne* $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$. *Si* $\mathrm{N}=6$, $\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{Y})$ *engendre* $\mathrm{MT}(\mathcal{O})$.

Remarque **4.13.** — Quel que soit N, notons I l'image du morphisme injectif (3.10.3) : $\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{L}^{\langle 1\rangle}$, et Lib(I) l'algèbre de Lie librement engendrée par l'espace vectoriel I. Le morphisme (3.10.2) de $\mathrm{Gr}_\mathfrak{Z}(\mathfrak{u}_\omega)$ dans $(\mathrm{L}, \{\ ,\ \})$ s'identifie à

$$\mathrm{Lib}(\mathrm{I}) \to (\mathrm{L}, \{\ ,\ \}). \tag{4.13.1}$$

Pour $\mathrm{N}=2,3,4$ ou 8, 4.11 assure que (4.13.1) est injectif. Ainsi que Ihara [3] §5 l'a remarqué le premier, (4.13.1) n'est pas injectif pour $\mathrm{N}=1$. Dans ce cas, I a en effet pour base les $\mathrm{E}^n := (\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_1)$ pour n impair ≥ 3, et

$$\{\mathrm{E}^3, \mathrm{E}^9\} = 3\{\mathrm{E}^5, \mathrm{E}^7\}.$$

Corollaire **4.14.** — *Pour* $\mathrm{N}=3,4$ *ou* 8, *l'action de* U_ω *sur* $(\mathrm{D}^1\Pi_\mathrm{M})_{\zeta,0} = \omega(\mathrm{D}^1\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{Y}))$ *fait de* $(\mathrm{D}^1\Pi_\mathrm{M})_{\zeta,0}$ *un espace principal homogène de* U_ω.

Preuve. — Il s'agit de montrer que le morphisme de schémas

$$\mathrm{U}_\omega \to (\mathrm{D}^1\Pi_\mathrm{M})_{\zeta,0} : g \longmapsto g(1_{\zeta,0}) \tag{4.14.1}$$

est un isomorphisme. Ce morphisme envoie élément neutre sur élément neutre, est compatible au graduations, i.e. aux actions de $\mathbf{G}_m$ par le degré, et par 4.11 (ii), sa différentielle aux éléments neutres induit un isomorphisme entre espaces vectoriels gradués

$$\mathfrak{u}_\omega \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^1\mathrm{L}_\mathrm{M}. \tag{4.14.2}$$

Il ne reste qu'à appliquer 1.12 et 1.14. □

4.15. La filtration de $\mathfrak{u}_\omega$ par la série centrale descendante $\mathfrak{Z}$ définit une filtration, encore notée $\mathfrak{Z}$, de l'algèbre affine $\mathcal{O}(\mathrm{U}_\omega)$ de U_ω (1.5). Pour $\mathrm{N}=2,3,4$ ou 8, les morphismes

$$\mathrm{U}_\omega \to (\mathrm{D}^1\Pi, \circ) \to \mathrm{D}^1\Pi''_\mathrm{M} \rtimes (\mathrm{D}^1\Pi_\mathrm{M}, \circ) \tag{4.15.1}$$

induisant (4.11.1) sur les algèbres de Lie identifient $\mathcal{O}(\mathrm{U}_\omega)$ à un quotient tant de $\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi)$ que de $\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi''_\mathrm{M} \times \mathrm{D}^1\Pi_\mathrm{M})$. Ces algèbres affines sont munies de leur filtration de profondeur, associées (1.3) à leur graduation par le D-degré. Les compatibilités 1.6 (iii) et [1] A, déduit de 1.6 (ii), jointes à 4.11 (i), assurent que la filtration $\mathfrak{Z}$ de $\mathcal{O}(\mathrm{U}_\omega)$ se déduit par passage au quotient de l'une et l'autre de ces filtrations de profondeur.

Considérons les morphismes de schémas

$$(\mathbf{4.15.2})\qquad \mathrm{U}_\omega \to \mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}} \rtimes \mathrm{D}^1\Pi_{\mathrm{M}} \to \mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}}.$$

Le second est compatible aux actions de $\mathbf{G}_m$ par le D-degré. Le morphisme

$$(\mathbf{4.15.3})\qquad \mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}}) \to \mathcal{O}(\mathrm{U}_\omega)$$

déduit de (4.15.2) est donc compatible aux filtrations de profondeur et $\mathfrak{Z}$. D'après 4.11 (i) et 1.12, 1.14, on a :

Corollaire **4.16.** — *Pour* $\mathrm{N}=2,3,4$ *ou* 8, *(4.15.3) est surjectif et la filtration* $\mathfrak{Z}$ *de* $\mathcal{O}(\mathrm{U}_\omega)$ *se déduit de la filtration de profondeur de* $\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}})$ *par passage au quotient.*

Pour $\mathrm{N}=3,4$ ou 8, l'action de U_ω sur $\Pi''_{\mathrm{M}} = \omega(\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{Y}))$ fait de Π''_{M} un espace principal homogène. Par 1.10, la filtration $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{u}_\omega$ fournit une filtration, encore notée $\mathfrak{Z}$, sur $\mathcal{O}(\Pi''_{\mathrm{M}})$, et 4.16 peut se reformuler comme suit

Corollaire **4.17.** — *Pour* $\mathrm{N}=3,4$ *ou* 8, *la filtration* $\mathfrak{Z}$ *de l'algèbre affine du* U_ω*-espace principal homogène* $\Pi''_{\mathrm{M}} = \omega(\mathrm{P}_{\zeta,0}(\mathrm{Y}))$ *coïncide avec la filtration de profondeur.*

4.18. Pour $\mathrm{N}=6$, les mêmes arguments et 4.11 (iii) montrent que la filtration $\mathfrak{Z}$ de $\mathcal{O}(\overline{\mathrm{U}}_\omega)$ est quotient de la filtration de profondeur tant de $\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}} \rtimes \mathrm{D}^1\Pi_{\mathrm{M}})$ que de $\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}})$.

5. Application aux valeurs de multizêtas : outils

On fixe N ainsi qu'un plongement σ de k dans $\mathbf{C}$ et, pour $\eta \in \mu_{\mathrm{N}}$, on notera encore η le nombre complexe $\sigma(\eta)$. On note τ l'action de $\mathbf{G}_m$ pour laquelle $\tau(\lambda)$ est la multiplication par λ^d en degré d.

5.1. Nous utiliserons les résultats de [1] 5.17 à 5.20 rappelés ci-dessous. Rappelons que l'ensemble $\Pi(\mathbf{C})$ des points de Π à valeurs dans $\mathbf{C}$ est l'ensemble des éléments groupaux de $\mathbf{C}\langle\langle e_0, (e_\eta)_{\eta\in\mu_{\mathrm{N}}}\rangle\rangle$.

(A) Il existe un élément dch de $\Pi(\mathbf{C})$ tel que les coefficients de e_0 et e_1 dans dch soient nuls et que pour $(s_1,\eta_1) \neq (1,1)$, le coefficient de $e_0^{s_1-1}e_{\eta_1}\cdots e_0^{s_m-1}e_{\eta_m}$ soit

$$(-1)^m\zeta(s_1,\ldots,s_m;\eta_1^{-1},\eta_1\eta_2^{-1},\ldots,\eta_{m-1}\eta_m^{-1}).$$

Cet élément est unique ([1] 2.4.5).

(B) Notons IU_ω le sous-groupe de $(\Pi,\circ)$ image de U_ω par (3.4.6) : $\mathrm{U}_\omega \to (\Pi,\circ)$. Il existe v_σ dans $\Pi(\mathbf{Q})$ tel que

$$(\mathbf{5.1.1})\qquad \mathrm{dch} \in \mathrm{IU}_\omega(\mathbf{C}) \circ \tau(2\pi i)(v_\sigma).$$

L'élément v_σ de $\Pi(\mathbf{Q})$ n'est déterminé qu'à multiplication à gauche près, au sens de la loi $\circ$, par un élément de $\mathrm{IU}_\omega(\mathbf{Q})$. Nous montrerons en A.9 qu'on peut le choisir fixe par le composé de $\tau(-1)$ et de l'automorphisme de Π induit par l'automorphisme $e_0 \mapsto e_0$, $e_\eta \mapsto e_{\eta^{-1}}$ de L. Nous utiliserons seulement le fait, déjà prouvé dans [1], que si $\mathrm{N} = 1$ ou 2 on peut le choisir fixe par $\tau(-1)$. Nous le choisissons tel, et le fixons dans tout ce paragraphe.

5.2. Tant IU_ω que dch sont dans le sous-groupe de $(\Pi, \circ)$ défini par $c(e_0) = c(e_1) = 0$ (notation (1.4.2)), et en particulier dans le sous-groupe $\mathrm{D}^1\Pi$. L'idéal engendré par $c(e_0)$ définit $\mathrm{D}^1\Pi$ et a pour base sur $\mathbf{Q}$ les $c(me_0^k)\ c(e_0)$ pour m un monôme ne se terminant pas par e_0. On a $c(me_0^k)\ c(e_0) = (k+1)c(me_0^{k+1}) +$ reste, où le reste est une somme de $c(m'e_0^k)$, avec m' ne se terminant pas par e_0. Il en résulte que l'algèbre affine de $\mathrm{D}^1\Pi$ a pour base sur $\mathbf{Q}$ les restrictions à $\mathrm{D}^1\Pi$ des $c(m)$, m parcourant les monômes ne se terminant pas par e_0.

La filtration de profondeur de $\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi)$ est associée (1.3) à sa graduation par le D-degré. Appliquant 1.8 à $(\mathrm{D}^1\Pi, \circ)$, on en déduit que le schéma vectoriel $\mathrm{D}^1\Pi/\mathrm{D}^2\Pi$ admet pour système de coordonnées les $c(m)$ pour m un monôme de D-degré un ne se terminant pas par e_0. Plus précisément, $c(m)$ dans $\mathcal{O}(\Pi)$, restreint à $\mathrm{D}^1\Pi$, se factorise par une fonction linéaire sur $\mathrm{D}^1\Pi/\mathrm{D}^2\Pi$, et ces fonctions forment un système de coordonnées.

Le monôme $e_0^{k-1}e_\eta$ a la coefficient 1 dans $(\mathrm{ad}\, e_0)^{k-1}(e_\eta)$ (2.4.1). Pour x dans IU_ω, (3.10.5) pour $d = -1$ donne donc

$$(\mathbf{5.2.1}) \qquad c(e_0^{k-1}e_\eta + (-1)^k e_0^{k-1}e_{\eta^{-1}})(x) = 0.$$

Projetant (5.1.1) sur $\mathrm{D}^1\Pi/\mathrm{D}^2\Pi$ (quotient pour la loi $\circ$), on déduit de (5.2.1) que pour x dans $\mathrm{IU}_\omega \circ \tau(t)(v_\sigma)$,

$$(\mathbf{5.2.2}) \qquad c(e_0^{k-1}e_\eta + (-1)^k e_0^{k-1}e_{\eta^{-1}})(x) = t^k c(e_0^{k-1}e_\eta + (-1)^k e_0^{k-1}e_{\eta^{-1}})(v_\sigma).$$

Prenant $x = \mathrm{dch}$ et $t = 2\pi i$, on obtient

$$(\mathbf{5.2.3}) \qquad c(e_0^{k-1}e_\eta + (-1)^k e_0^{k-1}e_{\eta^{-1}})(v_\sigma) = -(\zeta(k, \eta^{-1}) + (-1)^k\zeta(k, \eta))/(2\pi i)^n,$$

si $(k, \eta) \neq (1, 1)$. De plus, $c(e_1)(v_\sigma) = 0$. Le membre de droite de (5.2.3) est donc rationnel. On sait plus précisément que pour $z = \exp(2\pi i t)$, $0 \leq t \leq 1$ et $t \neq 0, 1$ si $k = 1$, on a (développement en série de Fourier des polynômes de Bernoulli, Bourbaki FVR VI §2 ex 12c))

$$(\mathbf{5.2.4}) \qquad \left(\sum \frac{z^n}{n^k} + (-1)^k \sum \frac{z^{-n}}{n^k}\right) \Big/ (2\pi i)^k = -\mathrm{B}_k(t)/k!.$$

Notons $c_{k,\eta}$ le nombre rationnel (5.2.3) tel que $c(e_0^{k-1}e_\eta + (-1)e_0^{k-1}e_{\eta^{-1}})$ vale $c_{k,\eta}t^k$ sur $\mathrm{IU}_\omega \circ \tau(t)(v_\sigma)$.

Corollaire **5.3.**

(i) *Si k est pair,* $c_{k,1} \neq 0$.
(ii) *Si k est impair, et que* $\eta \neq \pm 1$, $c_{k,\eta} \neq 0$.

Preuve. — (i) résulte de ce que $\zeta(k) \neq 0$, et (ii) résulte de ce que pour k impair, le polynôme de Bernoulli B_k ne s'annule dans l'intervalle $[0, 1]$ qu'en 0, $\frac{1}{2}$ et 1 (Bourbaki, FVR VI §2 exercice 4c). □

5.4. L'application $t \mapsto \tau(t)(v_\sigma)$ de $\mathbf{G}_m$ dans Π se prolonge en une application de $\mathbf{A}^1$ dans Π qu'on notera encore $t \mapsto \tau(t)(v_\sigma)$ ou, dans ce numéro,

$$d\colon\ \mathbf{A}^1 \longrightarrow \Pi. \tag{5.4.1}$$

Si $\mathrm{N} = 1, 2$, elle se factorise par

$$\bar{d}\colon\ \mathbf{A}^1/\mu_2 \longrightarrow \Pi. \tag{5.4.2}$$

L'algèbre affine de $\mathbf{A}^1$ est $\mathbf{Q}[t]$. Celle de $\mathbf{A}^1/\mu_2$ est la sous-algèbre $\mathbf{Q}[t^2]$: on regardera t^2 comme une coordonnée sur $\mathbf{A}^1/\mu_2$.

Si $\mathrm{N} \geq 3$ et que $c_{1,\eta} \neq 0$ (resp. $\mathrm{N} = 1, 2$), l'application (5.4.1) (resp. (5.4.2)) admet la rétraction

$$\begin{gathered} r\colon\ x \longmapsto t = c(e_\eta - e_{\bar\eta})(x)/c_{1,\eta} \\ (\text{resp. } \bar{r}\colon\ x \longmapsto t^2 = 2c(e_0 e_1)(x)/c_{2,1}) \end{gathered} \tag{5.4.3}$$

donc est un plongement fermé. On notera D son image, et t (resp. t^2) la coordonnée sur D donnée par (5.4.1) (resp. (5.4.2)).

Le produit pour la loi de groupe $\circ$ de Π induit un morphisme

$$\mathrm{IU}_\omega \times \mathrm{D} \longrightarrow \Pi\colon\ x, y \longmapsto x \circ y. \tag{5.4.4}$$

Ce morphisme induit un isomorphisme de $\mathrm{IU}_\omega \times \mathrm{D}$ avec le sous-schéma fermé, noté $\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}$, des x vérifiant

$$\begin{gathered} x \circ d(r(x))^{-1} \in \mathrm{IU}_\omega \\ (\text{resp. } x \circ \bar{d}(\bar{r}(x))^{-1} \in \mathrm{IU}_\omega). \end{gathered} \tag{5.4.5}$$

L'application inverse

$$\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{IU}_\omega \times \mathrm{D} \tag{5.4.6}$$

est $x \mapsto (x \circ d(r(x))^{-1}, d(r(x)))$ (resp. $x \mapsto (x \circ \bar{d}(\bar{r}(x))^{-1}, \bar{d}\bar{r}(x))$).

Notons Δ le coproduit de l'algèbre affine $\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi)$ défini par la loi de groupe $\circ$. Si F dans $\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi)$ a une restriction f à $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})$, l'image de f par (5.4.6) est $\Delta\mathrm{F}$ restreint à $\mathrm{IU}_\omega \times \mathrm{D}$:

(**5.4.7**)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi) & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi \times \mathrm{D}^1\Pi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \times \mathrm{D}). \end{array}$$

Nous noterons encore t (resp. t^2) l'image inverse dans $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})$, par (5.4.6), de la coordonnée t (resp. t^2) sur D. D'après 5.3, on a

Lemme **5.5.** — *Pour $n \geq 1$, pair si $\mathrm{N} = 1, 2$, t^n est la restriction à $\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}$ d'un élément de codegré n de $\mathrm{D}_1\mathcal{O}(\Pi)$.*

D'après A.3, la conjecture suivante est une conséquence de la conjecture A.2, qui est une variante de la conjecture des périodes de Grothendieck.

Conjecture **5.6.** — *Le point complexe* dch *de* $\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}$ *est un point générique, i.e.*

(**5.6.1**) $$f \longmapsto f(\mathrm{dch}) : \ \mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}) \longrightarrow \mathbf{C}$$

est injectif.

En d'autres termes, toute relation algébrique à coefficients rationnels entre les $\zeta(s_1, \ldots, s_m\,; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i \in \mu_{\mathrm{N}}$, $(s_1, \varepsilon_1) \neq (1, 1)$, est conséquence de ce que dch est dans $(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})(\mathbf{C})$.

5.7. Si T est un sous-schéma fermé de Π nous définissons la *filtration de profondeur* de son algèbre affine $\mathcal{O}(\mathrm{T})$ comme déduite par passage au quotient de la filtration de profondeur de $\mathcal{O}(\Pi)$. Si $\mathrm{T} \subset \mathrm{D}^1\Pi$, elle est déduite par passage au quotient de celle de $\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi)$, et vérifie $\mathrm{D}_0\mathcal{O}(\mathrm{T}) = \mathbf{Q}$.

Exemple. — D'après 5.5, la filtration de profondeur de $\mathcal{O}(\mathrm{D})$ est donnée par

(**5.7.1**) $$\mathrm{D}_0 = \mathbf{Q}, \ \mathrm{D}_1 = \mathcal{O}(\mathrm{D}).$$

Si $\mathfrak{t}$ est un sous-espace gradué de L, nous définissons sa *filtration de profondeur* comme étant la filtration induite par la filtration de profondeur de L. Si $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Lie de L (resp. de $(\mathrm{L}, \{\ ,\ \})$), et T le sous-groupe correspondant de Π (resp. $(\Pi, \circ)$), il résulte de 1.6 (ii) appliqué à T et Π (resp. $(\Pi, \circ)$) que la filtration de profondeur de $\mathcal{O}(\mathrm{T})$ se déduit par 1.5 de celle de $\mathfrak{t}$.

Proposition **5.8.** — *La filtration de profondeur de* $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})$, *identifié par* (5.4.6) *à* $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{D})$, *est le produit tensoriel des filtrations de profondeur de* $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega)$ *et de celle de* $\mathcal{O}(\mathrm{D})$ *(donnée par* (5.7.1)*).*

Preuve. — Nous ne donnerons la preuve que pour $\mathrm{N} \geq 3$. L'argument est le même pour $\mathrm{N} = 1$ ou 2, sauf que t est à remplacer par t^2. Nous commencerons par prouver que l'isomorphisme de $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})$ avec $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{D})$ envoie

$$\text{(\textbf{5.8.1})} \qquad \mathrm{D}_p\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}) \to \mathrm{D}_p\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega) \oplus \bigoplus_{n>0} \mathrm{D}_{p-1}\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega).t^n.$$

Soit f dans $\mathrm{D}_p\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})$. Par définition de la filtration D, f est la restriction à $\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}$ de F dans $\mathrm{D}_p\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi)$. Le coproduit pour la loi $\circ$

$$\Delta\colon\ \mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi) \to \mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi \times \mathrm{D}^1\Pi) = \mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi)\colon\ h \mapsto h(x \circ y)$$

est compatible aux graduations par le D-degré. Puisque $\mathrm{D}^1\mathrm{L}$ est à D-degré > 0, l'idéal d'augmentation est à D-codegrés > 0 et $\Delta\mathrm{F} - \mathrm{F} \otimes 1$, qui est dans $\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi) \otimes m$, est dans $\mathrm{D}_{p-1}\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi) \otimes m$: on a

$$\text{(\textbf{5.8.2})} \qquad \Delta\mathrm{F} = \mathrm{F} \otimes 1 + \text{reste dans } \mathrm{D}_{p-1}\mathcal{O}(\mathrm{D}^1\Pi) \otimes m.$$

Restreignons (5.8.2) à $\mathrm{IU}_\omega \times \mathrm{D} \subset \mathrm{D}^1\Pi_\omega \times \mathrm{D}^1\Pi_\omega$ et appliquons 5.4.7. On obtient (5.8.1).

Il reste à montrer que (5.8.1) est surjectif. D'après 5.5, les $\mathrm{D}_{p-1}\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}).t^n$ sont dans $\mathrm{D}_p\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})$. Filtrons $\mathrm{D}_p\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})$ par

$$\mathrm{D}_p\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}) \supset \mathrm{D}_{p-1}\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}).t \supset \mathrm{D}_{p-1}\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}).t^2 \supset \cdots .$$

D'après (5.8.1) pour p et $p-1$, (5.8.1) est compatible à cette filtration et à la filtration t-adique du membre de droite. Le gradué associé est surjectif, car donné par des morphismes de restriction de $\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}$ à IU_ω. Puisqu'il suffit de vérifier la surjectivité de (5.8.1) séparément en chaque degré, et qu'en chaque degré ces filtrations sont finies, la surjectivité de (5.8.1) résulte de celle de son gradué. $\square$

5.9. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ bigradué à degrés > 0. On suppose que les composantes homogènes pour le premier degré, simplement appelé degré, sont de dimension finie. Le second degré sera appelé D-degré, et la filtration correspondante filtration de profondeur.

Soit $\mathrm{E}^\wedge$ le schéma limite projective d'espaces affines

$$\mathrm{E}^\wedge := \lim(\mathrm{E}/\mathrm{E}^{\text{degré} \geq p}).$$

Son algèbre affine, munie de sa graduation par le degré, et de la filtration de profondeur associée à sa graduation par le D-degré, est du type $(*)$ de 1.11, et E est l'espace tangent gradué de $\mathrm{E}^\wedge$ en 0.

Soit $F\colon \mathrm{IU}_\omega \circ D \to E^\wedge$ un morphisme de schémas compatible aux graduations par le degré et aux filtrations de profondeur des algèbres affines. Par restriction à IU_ω et passage aux espaces tangents gradués à l'origine, il induit

$$(\mathbf{5.9.1}) \qquad dF|\mathfrak{iu}_\omega\colon \mathfrak{iu}_\omega \to E.$$

Nous utiliserons 5.8 sous la forme suivante.

Corollaire **5.10.** — *Supposons que (5.9.1) soit un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués filtrés, et soit* $F_1\colon \mathrm{IU}_\omega \circ D \to E^\wedge \times D$ *le morphisme de projections* F *et* $\mathrm{IU}_\omega \circ D \xrightarrow{5.4.6} \mathrm{IU}_\omega \times D \to D$. *Alors,* $F_1^*\colon \mathcal{O}(E^\wedge \times D) \to \mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ D)$ *est un isomorphisme d'algèbres graduées filtrées.*

Dans 5.10, la filtration de profondeur de $\mathcal{O}(E^\wedge \times D) = \mathcal{O}(E^\wedge) \otimes \mathcal{O}(D)$ est définie comme étant le produit tensoriel de celles de $\mathcal{O}(E^\wedge)$ et de $\mathcal{O}(D)$.

Preuve. — D'après 1.12 et 1.14, la restriction de F à IU_ω induit un isomorphisme d'algèbres graduées filtrées de $\mathcal{O}(E^\wedge)$ à $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega)$.

Le diagramme

$$(\mathbf{5.10.1}) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{IU}_\omega \circ D \arrow[rr, "F_1"] \arrow[dr] & & E^\wedge \times D \arrow[dl] \\ & D & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Le gradué de $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ D)$ pour la filtration t-adique est

$$\mathcal{O}((\text{fibre en } 0) \times D) = \mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \times D).$$

D'après 5.8, la filtration déduite par passage au gradué de la filtration de profondeur est simplement la filtration de profondeur de $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \times D) = \mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega) \otimes \mathcal{O}(D)$. De même pour $E^\wedge \times D$. Enfin, (5.10.1) assure que le gradué de F_1^* est l'image inverse par

$$(\text{fibre en } 0 \text{ de } \mathrm{IU}_\omega \circ D \to D) \times D \to E^\wedge \times D.$$

C'est donc un isomorphisme d'espaces filtrés. La filtration t-adique étant en chaque degré une filtration finie, 5.10 en résulte. □

6. $\mathbf{N = 3, 4, 8}$

Dans ce paragraphe, on suppose que $N = 3, 4$ et $M = 1$, ou que $N = 8$ et $M = 2$.

Théorème **6.1.** — *Fixons* $w, d \geq 0$. *Toute valeur de multizêtas rel* μ_{N}

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r; \eta_1, \ldots, \eta_r) \quad (\eta_i \in \mu_{\mathrm{N}}) \tag{6.1.1}$$

de poids $\Sigma s_i = w$ *et de profondeur* $r \leq d$, *avec* $(s_1, \eta_1) \neq (1, 1)$, *est combinaison linéaire à coefficients rationnels des*

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r; \eta_1, \ldots, \eta_r).(2\pi i)^p \tag{6.1.2}$$

pour $p + \Sigma s_i = w$, $r \leq d$ *si* $p = 0$ *et* $r \leq d - 1$ *si* $p > 0$, $\eta_1 \in \zeta\mu_{\mathrm{M}}$ *et* $\eta_2, \ldots, \eta_r \in \mu_{\mathrm{M}}$.

De plus, la conjecture 5.6 implique que les quantités (6.1.2) sont $\mathbf{Q}$*-linéairement indépendantes.*

Preuve. — D'après 4.11, on a $\mathrm{U}_\omega \xrightarrow{\sim} \mathrm{IU}_\omega$. L'application composée

$$\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D} \xrightarrow{①} \mathrm{D}^1\Pi \xrightarrow{②} \mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}} \tag{6.1.3}$$

induit sur les algèbres affines un morphisme compatible aux filtrations de profondeur : c'est le cas pour ① par définition, pour ② parce que ② est même compatible aux graduations par le D-degré. Le schéma $\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}}$ est du type $\mathrm{E}^\wedge$ considéré en 5.9, car l'exponentielle l'identifie à $\mathrm{L}''^\wedge$, et 4.11 (i), (ii) nous dit que l'hypothèse de 5.10 est vérifiée. Le morphisme

$$\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D} \to \mathrm{D}^1\Pi'' \times \mathrm{D} \tag{6.1.4}$$

induit donc sur les algèbres affines un isomorphisme d'algèbres graduées filtrées.

Le schéma $\mathrm{D}^1\Pi''_{\mathrm{M}}$ est le schéma des éléments groupaux de $\mathbf{Q}\langle\langle e_0, (e_\eta)_{\eta\in\zeta^{-1}\mu_{\mathrm{M}}}\rangle\rangle$, de coefficient de e_0 nul. Son algèbre affine admet pour base graduée et D-graduée les $c(m)$, pour m un monôme en e_0 et les e_η $(\eta \in \zeta^{-1}\mu_{\mathrm{M}})$ ne finissant pas par e_0 (cf 5.2). L'image inverse de $c(m)$ par (6.1.3) est simplement la restriction à $\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}$ de $c(m) \in \mathcal{O}(\Pi)$.

L'isomorphisme (6.1.4) signifie donc que $\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})$ admet pour base sur $\mathbf{Q}$ les $c(m)t^p$, pour m un monôme en e_0 et les e_η $(\eta \in \zeta\mu_{\mathrm{M}})$ ne se terminant pas par e_0, que

$$\text{codegré } (c(m)t^p) = \text{ degré } (m) + p$$

et que $\mathrm{D}_d\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})$ a pour base ceux des $c(m)t^p$ pour lesquels

$$p = 0 \text{ et } m \text{ est de D-degré} \leq d \quad \text{ou}$$

$$p > 0 \text{ et } m \text{ est de D-degré} \leq d - 1.$$

Il ne reste qu'à évaluer en $\mathrm{dch} \in (\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})(\mathbf{C})$. Les quantités (6.1.1) s'obtiennent (au signe près) en évaluant les $c(m)$, pour m un monôme en e_0 et les e_η $(\eta \in \mu_{\mathrm{N}})$ de degré w et de D-degré $\leq d$. Les quantités (6.1.2) s'obtiennent (au signe près) en évaluant les $c(m)t^p$ de la base ci-dessus de $\mathrm{D}_p(\mathcal{O}(\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D})_w$.

Enfin, l'indépendance linéaire des quantités (6.1.1) équivaut à l'injectivité de (5.6.1). □

7. N = 2

Dans ce paragraphe, $N = 2$, $M = 1$, $\ell = 2$, et on note A l'ensemble des entiers impairs ≥ 1, ordonné par l'ordre $\geqslant$, qu'on notera $\preccurlyeq$:

$$\cdots \prec 5 \prec 3 \prec 1.$$

7.1. Les mots de Lyndon dans l'alphabet A seront appelés *mots de Lyndon impairs*. A un mot de Lyndon impair $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ on attachera $\zeta(n_1, \dots, n_d; -1, 1, \dots, 1)$, noté simplement $\zeta(\mathbf{n}; -1, 1, \dots)$ et à une combinaison linéaire formelle à coefficients entiers ≥ 0 $\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]$ de mots de Lyndon impairs on attachera le produit $\Pi\zeta(\mathbf{n}, -1, 1, \dots)^{\lambda(\mathbf{n})}$. Le *poids* de $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ est la somme des n_i, la *profondeur* de $\mathbf{n}$ est sa longueur d, et on définit poids et profondeur de $\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]$ par additivité : ce sont $\Sigma\lambda(\mathbf{n})$. poids$(\mathbf{n})$ et $\Sigma\lambda(\mathbf{n})$. profondeur$(\mathbf{n})$.

Théorème **7.2.** — *Fixons $w, d \geq 0$. Toute valeur de multizêtas rel. μ_2*

$$(\mathbf{7.2.1}) \qquad \zeta(s_1, \dots, s_r; \eta_1, \dots, \eta_r) \quad (\eta_i \in \mu_2 = \{\pm 1\})$$

de poids $\Sigma s_i = w$ et de profondeur $r \leq d$ est combinaison linéaire à coefficients rationnels des

$$(\mathbf{7.2.2}) \qquad \Pi\zeta(\mathbf{n}; -1, 1, \dots)^{\lambda(\mathbf{n})}.(2\pi i)^{2p}$$

pour $\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]$ une combinaison linéaire formelle à coefficients ≥ 0 de mots de Lyndon impairs et $p \geq 0$ tels que $2p+$ poids$(\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]) = w$ et que si $p = 0$, profondeur$(\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]) \leq d$, tandis que si $p > 0$, profondeur$(\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]) \leq d - 1$.

De plus, la conjecture 5.6 implique que les quantités (7.2.2) sont $\mathbf{Q}$-linéairement indépendantes.

Preuve. — Soit E l'espace vectoriel librement engendré par des vecteurs $e_{[\mathbf{n}]}$ indexés par les mots de Lyndon impair. On le bigradue en donnant à $e_{[\mathbf{n}]}$ un degré égal au poids de $\mathbf{n}$, et un D-degré égal à la profondeur de $\mathbf{n}$.

Le quotient $D^1\Pi''_M$ de $D^1\Pi$ est le schéma des éléments groupaux de $\mathbf{Q}\langle\langle e_0, e_{-1}\rangle\rangle$ dont le coefficient de e_0 est nul. A chaque mot de Lyndon impair $\mathbf{n} = (x_1, \dots, n_d)$ attachons le monôme $m(\mathbf{n}) := e_0^{n_1-1}e_{-1}e_0^{n_2-1}e_{-1}\dots e_0^{n_d-1}e_{-1}$. Son degré est le poids de $\mathbf{n}$, son D-degré sa profondeur. Les $c(m(\mathbf{n}))$ sont donc les coordonnées d'un morphisme de schémas

$$(\mathbf{7.2.3}) \qquad D^1\Pi'' \longrightarrow E^{\wedge},$$

compatible aux degré et D-degrés.

L'application composée

$$(\mathbf{7.2.4}) \qquad IU_\omega \circ D \overset{①}{\hookrightarrow} D^1\Pi \overset{②}{\longrightarrow} D^1\Pi'' \overset{③}{\longrightarrow} E^{\wedge}$$

induit sur les algèbres affines un morphisme compatible aux filtrations de profondeur : c'est le cas pour ① par définition, tandis que ② et ③ sont même compatibles aux graduations par le D-degré.

Par passage aux espaces tangents à l'origine, la restriction de (7.2.4) à IU_ω définit un morphisme gradué filtré

$$\mathfrak{iu}_\omega \longrightarrow \mathrm{E}. \tag{7.2.5}$$

Les mêmes arguments qu'en 6.1 ramènent 7.2 à l'énoncé suivant □

Proposition **7.3.** — *Le morphisme (7.2.5) est un isomorphisme d'espaces gradués filtrés.*

Pour prouver 7.3, il nous faudra revenir à 4.9. D'après 4.11, on a $\mathfrak{u}_\omega \xrightarrow{\sim} \mathfrak{iu}_\omega$, et la filtration de profondeur de $\mathfrak{iu}_\omega$ s'identifie à la série centrale descendante.

Soient comme en 4.6 J l'image de $\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{ab}}$ dans $(\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}')^{(1)}$ et les morphismes

$$\mathrm{Lib}(\mathrm{J}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_3(\mathfrak{u}_\omega) = \mathrm{Gr}_{\mathrm{D}}(\mathfrak{iu}_\omega) \longrightarrow (\mathrm{L}'' \times \mathrm{L}', \{\ ,\ \}). \tag{7.3.1}$$

Comme en 4.10, il suffit de montrer que

$$\mathrm{Lib}(\mathrm{J}) \xrightarrow{7.3.1} \mathrm{L}'' \times \mathrm{L}' \longrightarrow \mathrm{L}'' \longrightarrow \mathrm{E} \tag{7.3.2}$$

est un isomorphisme.

Les morphismes (7.3.2) se déduisent par tensorisation avec $\mathbf{Q}$ de

$$\mathrm{Lib}(\mathrm{J}_{\mathbf{Z}}) \longrightarrow \mathrm{L}''_{\mathbf{Z}} \times \mathrm{L}'_{\mathbf{Z}} \longrightarrow \mathrm{L}''_{\mathbf{Z}} \longrightarrow \mathrm{E}_{\mathbf{Z}} \tag{7.3.3}$$

où $\mathrm{J}_{\mathbf{Z}}$, $\mathrm{L}'_{\mathbf{Z}}$ et $\mathrm{L}''_{\mathbf{Z}}$ sont comme en 4.8 et 4.1 et où $\mathrm{E}_{\mathbf{Z}}$ est engendré sur $\mathbf{Z}$ par les $e_{[\mathbf{n}]}$, pour $\mathbf{n}$ un mot de Lyndon impair. Comme en 4.10, pour prouver que (7.3.2) est un isomorphisme, il suffit de prouver que la réduction modulo ℓ

$$\mathrm{Lib}(\mathrm{J}_{\mathbf{Z}/\ell}) \xrightarrow{①} \mathrm{L}''_{\mathbf{Z}/\ell} \xrightarrow{②} \mathrm{E}_{\mathbf{Z}/\ell} \tag{7.3.4}$$

de (7.3.3) est un isomorphisme.

L'algèbre de Lie $\mathrm{L}''_{\mathbf{Z}/\ell}$ est librement engendrée sur $\mathbf{Z}/\ell$ par les $\mathrm{ad}(e_0)^{n-1}(e_{-1})$ $(n \geq 1)$, et $\mathrm{Lib}(\mathrm{J}_{\mathbf{Z}/\ell})$ est la sous-algèbre librement engendrée par les $(\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_{-1})$ pour n impair. Le morphisme ② à pour coordonnées les

$$\mathrm{L}''_{\mathbf{Z}/\ell} \longrightarrow \mathbf{Z}/\ell\langle e_0, e_{-1}\rangle \xrightarrow{c(m(\mathbf{n}))} \mathbf{Z}/\ell$$

pour $\mathbf{n}$ de Lyndon impair.

Chaque mot de Lyndon impair w définit un polynôme de Lie en des variables x_n (n impair ≥ 1). Appliquant ce polynôme de Lie aux $(\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_{-1})$, on obtient P_w, et ces P_w forment une base de $\mathrm{Lib}(\mathrm{J}_{\mathbf{Z}/\ell})$. D'après 2.4, en chaque degré et D-degré, la matrice des $c(m(\mathbf{n}))(\mathrm{P}_w)$ ($\mathbf{n}$ et w de Lyndon impair et de degré et D-degré fixé) est triangulaire, avec des 1 sur la diagonale. Elle est donc inversible, et ceci conclut la preuve de 7.3.

7.4. Il ne faut pas prendre trop au sérieux le système générateur (7.2.2). D'autres sont possibles. Voici un exemple. On munit l'ensemble des entiers impairs ≥ 3 de son ordre $\leqslant$ usuel, et on remplace dans (7.2.2) les $\zeta(\mathbf{n}; -1, 1, \ldots)$ pour $\mathbf{n}$ un mot de Lyndon impair par les $\zeta(n_1, \ldots, n_d; -1, 1, \ldots, 1)$ pour $(n_d, \ldots, n_1)$ un mot de Lyndon dans cet alphabet. La preuve est la même, sauf que 2.4 est à remplacer par le lemme suivant, où les monômes

$$e^{m_1} f e^{m_2} f \cdots e^{m_d} f e^{m_{d+1}}$$

de degrés donnés en e et f sont ordonnés selon l'ordre lexicographique de

$$\left(\sum_1^d m_i, \sum_1^{d-1} m_i, \ldots, m_1\right).$$

Lemme **7.5.** — *Soient* $w = (n_1, \ldots, n_d)$ *un mot de Lyndon de l'alphabet des entiers* ≥ 0 *ordonné par* $\leqslant$, *et* P_w *le polynôme de Lie correspondant, appliqué aux* $(\operatorname{ad} e)^n(f)$. *Alors,*

(**7.5.1**) $$\mathrm{P}_w = \pm e^{n_d} f e^{n_{d-1}} f \cdots e^{n_1} f + \textit{ reste},$$

où le reste est combinaison linéaire de monômes de même degrés en e *et* f *et strictement plus petit dans l'ordre* 7.4.

Preuve. — Prenons pour alphabet $\{e, f\}$, avec $f < e$. Les mots de Lyndon sont e, et les mots de Lyndon en les fe^a, ordonnés lexicographiquement. Cet ordre est l'ordre $\leqslant$ de a, et on identifie les mots de Lyndon en les fe^a aux mots de Lyndon de l'alphabet $(\mathbf{N}, \leqslant)$. Si $w' = (a_1, \ldots, a_d)$ est un tel mot, d'image le mot w en e et f, le polynôme de Lie P_w en e et f coïncide avec le polynôme de Lie $\mathrm{P}_{w'}$ appliqué aux $(-\operatorname{ad} e)^a(f)$. D'après 2.4, on a

$$\mathrm{P}_w = fe^{a_1} \cdots fe^{a_d} + \text{reste},$$

où le reste est combinaison linéaire de monômes strictement plus grands dans l'ordre lexicographique (pour $f < e$), et de mêmes degrés en e et f. Quand on fixe ces degrés, cet ordre, sur les monômes

$$e^{b_0} fe^{b_1} \cdots fe^{b_d},$$

est l'opposé de l'ordre lexicographique des

$$\left(\sum_1^d b_i, \sum_2^d b_i, \ldots, b_d\right).$$

Appliquons $\mathrm{P}_{w'}$ plutôt aux $(\operatorname{ad} e)^a(f)$. On obtient

$$\mathrm{P}_{w'}[(\operatorname{ad} e)^a(f)] = \pm fe^{a_1} \cdots fe^{a_d} + \text{reste},$$

où le reste est somme de $e^{b_0}fe^{b_1}\cdots fe^{b_d}$ plus petit dans l'ordre lexicographique de $(\sum_1^d b_i, \sum_2^d b_i, \dots, b_d)$.

Dans un polynôme de Lie en e et f, un monôme et celui que s'en déduit en renversant l'ordre des lettres apparaissent avec des coefficients égaux ou opposés. Le lemme 7.5 se déduit de ce qui précède en renversant l'ordre des lettres. $\square$

8. N = 6

Dans ce paragraphe, $N = 6$, $M = 1$, $\ell = 3$ et on note A l'ensemble des entiers ≥ 2, ordonné par l'ordre $\geqslant$, qu'on note $\preccurlyeq$: $\cdots \prec 4 \prec 3 \prec 2$. Nous utiliserons les notations L_S, Π_S de 4.1.

Proposition **8.1.** — *Les morphismes de* L *dans* $L_{\{1,\zeta\}}$ *et* $L_{\{1,\zeta^{-1}\}}$ *induisent des morphismes surjectifs*

$$L \longrightarrow L_{\{1,\zeta\}} \times_{L_{\{1\}}} L_{\{1,\zeta^{-1}\}}, \tag{8.1.1}$$

$$\Pi \longrightarrow \Pi_{\{1,\zeta\}} \times_{\Pi_{\{1\}}} \Pi_{\{1,\zeta^{-1}\}}. \tag{8.1.2}$$

Preuve. — Pour tout ensemble E, notons Lib(E) l'algèbre de Lie librement engendrée par E. La surjectivité de (8.1.2) résulte de celle de (8.1.1), et celle de (8.1.1) est un cas particulier du lemme suivant. $\square$

Lemme **8.2.** — *Si* $E \supset A \cup B$,

$$\mathrm{Lib}(E) \longrightarrow \mathrm{Lib}(A) \times_{\mathrm{Lib}(A\cap B)} \mathrm{Lib}(B) \tag{8.2.1}$$

est surjectif.

Preuve. — On se ramène à supposer que $E = A \cup B$. La surjectivité de (8.2.1) équivaut à celle de

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\mathrm{Lib}(E) \to \mathrm{Lib}(A \cap B)) \to \mathrm{Ker}(&\mathrm{Lib}(A) \to \mathrm{Lib}(A \cap B)) \\ &\times \mathrm{Ker}(\mathrm{Lib}(B) \to \mathrm{Lib}(A \cap B)). \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

Pour $F \subset E$, si G est le Lib(F)-module librement engendré par $E - F$ (la somme de $E - F$ copies de l'algèbre enveloppante de Lib(F)), Lib(E) est le produit semi-direct de Lib(F) et de l'algèbre de Lie librement engendrée par l'espace vectoriel G (Bourbaki Lie II§2). Appliquons ceci à $A \cap B \subset E$, $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$. La surjectivité (8.2.2) se ramène, pour l'algèbre de Lie L(G) librement engendrée par un espace vectoriel G, à la surjectivité de

$$L(G_1 \oplus G_2) \longrightarrow L(G_1) \times L(G_2).$$

Le but est en effet le plus grand quotient de $L(G_1 \oplus G_2)$ dans lequel G_1 et G_2 commutent. $\square$

8.3. Posons $\overline{X} = \mathbf{G}_m - \{1, \zeta\}$. L'inclusion de X dans $\overline{X}$ envoie l'ensemble S de points-base tangentiels de X, identifié à $\{0\} \cup \mu_N$, sur un ensemble de points-base de $\overline{X}$ qu'on notera encore S. Cf 3.5 pour une construction analogue. On note $\overline{S}$ le sous-ensemble $\{0, 1, \zeta\}$ de S.

Le groupoïde fondamental motivique de $(\overline{X}, S)$ est un quotient de celui de (X, S). En réalisation ω, on obtient le groupoïde constant $\Pi_{\{1,\zeta\}}$, quotient du groupoïde constant Π. C'est le plus grand quotient dans lequel s'annulent les $e_\eta \in \mathrm{Lie}\,\Pi_{\eta,\eta}$ pour $\eta \in \mu_N - \{1, \zeta\}$. Puisque l'action de $(\Pi, \circ)$ sur le groupoïde Π respecte ces e_η, elle passe au quotient et $(\Pi, \circ)$ agit sur la ω-réalisation de $P(\overline{X}, S)$, donc aussi, par restriction, sur celle de $P(\overline{X}, \overline{S})$.

Notons $\overline{\Pi}$ le quotient $\Pi_{\{1,\zeta\}} \times_{\Pi_{\{1\}}} \Pi_{\{1,\zeta^{-1}\}}$ de Π (8.1)

Proposition **8.4.**

(i) *La loi de groupe* $\circ$ *de* Π *passe au quotient et définit une loi de groupe* $\circ$ *sur* $\overline{\Pi}$.

(ii) *Le quotient* $(\overline{\Pi}, \circ)$ *de* $(\Pi, \circ)$ *est le quotient qui agit fidèlement sur* $\omega(P(\overline{X}, \overline{S}))$.

Preuve. — Notons $\Pi^{\{1,\zeta\}}_{b,a}$ la copie $\omega(P_{b,a}(\overline{X}))$ de $\Pi_{\{1,\zeta\}}$, et $x_{b,a}$ la copie dans $\Pi^{\{1,\zeta\}}_{b,a}$ de x dans $\Pi_{\{1,\zeta\}}$. Soient x dans Π et x' et x'' ses images dans $\Pi_{\{1,\zeta\}}$ et $\Pi_{\{1,\zeta^{-1}\}}$. L'action de x envoie $1_{1,0}$ sur $x'_{1,0}$ et $1_{\zeta,0}$ sur $([\zeta]x'')_{\zeta,0}$. La donnée de ces images suffit à déterminer l'action : $e_0 \in \mathrm{Lie}\,\Pi^{\{1,\zeta\}}_{0,0}$ est fixe ; $e_1 \in \mathrm{Lie}\,\Pi^{\{1,\zeta\}}_{1,1}$ est fixe, $e_1 \in \mathrm{Lie}\,\Pi^{\{1,\zeta\}}_{0,0}$ s'en déduit par transport le long de $1_{1,0}$, i.e. par $y \mapsto 1^{-1}_{1,0}\, y\, 1_{1,0} \colon \Pi^{\{1,\zeta\}}_{1,1} \to \Pi^{\{1,\zeta\}}_{0,0}$, et est donc transformé en $(\mathrm{ad}\, x')^{-1}(e_1)$, et de même $e_\zeta \in \mathrm{Lie}\,\Pi^{\{1,\zeta\}}_{0,1}$ est transformé en $(\mathrm{ad}[\zeta](x''))^{-1}(e_\zeta)$. Ceci détermine l'action de x sur $\mathrm{Lie}\,\Pi^{\{1,\zeta\}}_{0,0}$, donc sur $\Pi^{\{1,\zeta\}}_{0,0}$ et sur le groupoïde.

Deux éléments de Π ont donc la même action si et seulement si ils ont même image dans le quotient $\overline{\Pi}$ de Π. Ceci prouve (i) et (ii). □

8.5. Le groupoïde fondamental motivique $P(\overline{X}, \overline{S})$ est de Tate mixte et a bonne réduction partout. L'action de U_ω sur sa ω-réalisation se factorise donc par $\overline{U}_\omega$. Le torseur $P_{\zeta,0}(Y)$ est un quotient de $P_{\zeta,0}(\overline{X}, \overline{S})$; l'action de $(\Pi.\circ)$ sur $(\Pi_M)_{\zeta,0}$ se factorise donc par $\overline{\Pi}$: on a un diagramme commutatif

(**8.5.1**)
$$\begin{tikzcd} U_\omega \arrow[r] \arrow[d] & (\Pi, \circ) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \overline{U}_\omega \arrow[r] & (\overline{\Pi}, \circ) \arrow[r] & \Pi''_M \ltimes \Pi_M. \end{tikzcd}$$

Le rôle joué aux paragraphes 6 et 7 par dch, v_σ, IU_ω, D, $IU_\omega \circ D$ sera joué ici par leurs images dch^-, v^-_σ, $\overline{IU}_\omega$, $\overline{D}$ et $\overline{IU}_\omega \circ \overline{D}$ dans $\overline{\Pi}$, et nous aurons besoin d'analogues dans $\overline{\Pi}$ des résultats du paragraphe 5.

L'action de $\overline{U}_\omega$ sur $(\Pi_M)_{\zeta,0}$ est fidèle (4.11 (ii)). La seconde ligne de (8.5.1) est donc injective et

(**8.5.2**)
$$\overline{U}_\omega \xrightarrow{\sim} \overline{IU}_\omega \subset (\overline{\Pi}, \circ).$$

Pour $\eta \in \{1, \zeta, \zeta^{-1}\}$, les fonctions $c(e_0^{n-1}e_\eta)$ sur Π se factorisent par $\overline{\Pi}$ (et même déjà par $\Pi^{\{1,\zeta\}}$ ou par $\Pi^{\{1,\zeta^{-1}\}}$). Comme en 5.4, le morphisme

$$\mathbf{A}^1 \longrightarrow \overline{\Pi}: \ t \longmapsto r(t)(\bar{v}_\sigma) \tag{8.5.3}$$

d'image $\overline{\mathrm{D}}$ admet la rétraction $n \mapsto c(e_\zeta - e_{\zeta^{-1}})(x)/c_{1,\zeta}$. En particulier, (8.5.3) est un plongement fermé et définit une coordonnée t sur $\overline{\mathrm{D}}$. Comme en 5.4, le produit $\circ$ de $\overline{\Pi}$ induit un plongement fermé

$$\overline{\mathrm{IU}}_\omega \times \overline{\mathrm{D}} \longrightarrow \overline{\Pi}, \tag{8.5.4}$$

d'image $\overline{\mathrm{IU}}_\omega \circ \overline{\mathrm{D}}$, et on définit $t \in \mathcal{O}(\overline{\mathrm{IU}}_\omega \circ \overline{\mathrm{D}})$ comme étant l'image inverse de la coordonnée t sur $\overline{\mathrm{D}}$ par

$$\overline{\mathrm{IU}}_\omega \circ \overline{\mathrm{D}} \longrightarrow \overline{\mathrm{IU}}_\omega \times \mathrm{D}, \tag{8.5.5}$$

inverse à (8.5.4).

Lemme **8.6** *(parallèle à 5.5). — Pour $n \geq 1$, t^n est la restriction à $\overline{\mathrm{IU}}_\omega \circ \overline{\mathrm{D}}$ d'un élément de codegré n de* $\mathrm{D}_1\mathcal{O}(\Pi)$.

Preuve. — Pour n pair (resp. impair), $c(e_0^{n-1}e_1)$ (resp. $c(e_0^{n-1}e_\zeta - e_0^{n-1}e_{\zeta^{-1}})$) est un multiple non nul de t^n ((5.2.2) et 5.3). □

8.7. Si $\overline{\mathrm{T}}$ est un sous-schéma fermé de $\overline{\Pi}$, nous définissons la *filtration de profondeur* de son algèbre affine $\mathcal{O}(\overline{\mathrm{T}})$ comme déduite par passage au quotient de la filtration de profondeur de $\mathcal{O}(\overline{\Pi})$, associée à sa graduation par le D-degré. Les résultats 5.7 à 5.10 du paragraphe 5 restent valables, mutatis mutandis.

8.8. Les mots de Lyndon de l'alphabet A seront appelés mots de Lyndon en les entiers ≥ 2. A un tel mot de Lyndon $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ on attachera $\zeta(n_1, \ldots, n_d; \zeta, 1, \ldots, 1)$, noté simplement $\zeta(\mathbf{n}; \zeta, 1, \ldots)$ et à une combinaison linéaire formelle à coefficients entiers ≥ 0 de tels mots, $\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]$, le produit $\Pi\zeta(\mathbf{n}; \zeta, 1, \ldots)^{\lambda(\mathbf{n})}$. On définit poids et profondeur comme en 7.1.

Théorème **8.9.** — *Fixons $w, d \geq 0$. Tout produit*

$$\zeta(s'_1, \ldots, s'_{r'}; \eta'_1, \ldots, \eta'_{r'})\zeta(s''_1, \ldots, s''_{r''}; \eta''_1, \ldots, \eta''_{r''}) \tag{8.9.1}$$

de poids $\Sigma s'_i + \Sigma s''_i = w$ et de profondeur $r' + r'' \leq d$, tel que les produits $\eta'_1 \ldots \eta'_i$ soient tous dans $\{1, \zeta\}$, les produits $\eta''_1 \ldots \eta''_i$ tous dans $\{1, \zeta^{-1}\}$, et que (s'_1, η'_1), $(s''_1, \eta''_1) \neq (1, 1)$, est combinaison linéaire à coefficients rationnels des

$$\Pi\zeta(\mathbf{n}; \zeta, 1, \ldots)^{\lambda(\mathbf{n})}(2\pi i)^p \tag{8.9.2}$$

pour $\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]$ *une combinaison linéaire formelle à coefficients* ≥ 0 *de mots de Lyndon en les entiers* ≥ 2 *et* $p \geq 0$ *tels* $p +$ *poids* $(\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]) = w$ *et que si* $p = 0$, *profondeur* $(\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]) \leq d$ *tandis que si* $p > 0$, *profondeur* $(\Sigma\lambda(\mathbf{n})[\mathbf{n}]) \leq d - 1$.

De plus, la conjecture 5.6 implique que les quantités (8.9.2) sont $\mathbf{Q}$*-linéairement indépendantes.*

Les conditions imposées aux produits (8.9.1) s'expriment plus simplement dans le langage des coefficients de monômes. Au signe près, les produits (8.9.1) s'obtiennent en évaluant en dch un produit

$$(\mathbf{8.9.3}) \qquad c(e_0^{s'_1-1}e_{\varepsilon'_1}e_0^{s'_2-1}e_{\varepsilon'_2}\ldots)c(e_0^{s''_1-1}e_{\varepsilon''_1}e_0^{s''_2-1}e''_2\ldots).$$

La condition sur les η' et η'' équivaut à ce que les ε'_i soient dans $\{1, \zeta^{-1}\}$ et les ε''_i dans $\{1, \zeta\}$, de sorte que (8.9.3) se factorise par $\overline{\Pi}$ (le premier facteur par $\Pi_{\{1,\zeta-1\}}$, le second par $\Pi_{\{1,\zeta\}}$), et les autres conditions assurent que (8.9.3) est de codegré w et dans $D_d\mathcal{O}(\overline{\Pi})$.

Ceci observé, la preuve de 8.9 est identique à celle de 7.2, $D^1\Pi$ étant remplacé par $D^1\overline{\Pi}$.

Appendice A : Comparaison Betti/ω

A.1 Soient k un corps de nombres, S un ensemble fini de nombres premiers, $\mathrm{MT}(\mathcal{O}_S)$ la catégorie des motifs de Tate mixte sur k à bonne réduction en dehors de S, ω son foncteur fibre (3.1.1), $G_\omega = \mathbf{G}_m \ltimes U_\omega$ le schéma en groupe des automorphismes de ω, σ un plongement de k dans *une* clôture algébrique C de $\mathbf{R}$ et $M \mapsto M_\sigma$ le foncteur fibre "réalisation de Betti" correspondant.

La définition de $M \mapsto M_\sigma$ utilise la topologie de C, mais non le choix d'une racine carrée de -1. C'est pour pouvoir raisonner par transport de structures que nous préférons ne pas nous exprimer en terme de plongements complexes (i.e. dans *la* clôture algébrique $\mathbf{C}$ de $\mathbf{R}$).

La réalisation de de Rham M_{DR} de M est $M_\sigma \otimes k$, et l'isomorphisme de comparaison Betti/de Rham fournit

$$(\mathbf{A.1.1}) \qquad \omega(M) \otimes C \xrightarrow{\sim} M_\sigma \otimes C.$$

Par cet isomorphisme, nous regarderons M_σ comme une nouvelle $\mathbf{Q}$-structure sur $\omega(M) \otimes C$. On sait qu'il existe a_σ dans $G_\omega(C)$ tel que pour tout M on ait

$$(\mathbf{A.1.2}) \qquad a_\sigma\omega(M) = M_\sigma.$$

Les a_σ vérifiant (A.1.2) forment un $G_\omega(\mathbf{Q})$-torseur $T_{\sigma/\omega} \subset G_\omega(C)$. Testant (A.1.2) sur $\mathbf{Q}(1)$, on voit que la projection de $T_{\sigma/\omega}$ dans $\mathbf{G}_m(C) = C^*$ est $2\pi i\mathbf{Q}^*$.

Notons τ l'inclusion de $\mathbf{G}_m$ dans G_ω définie par la graduation de ω. Si G_ω agit sur un objet, par exemple sur U_ω par automorphismes intérieurs, nous noterons aussi $\tau(\lambda)$

l'action de $\tau(\lambda)$. Pour $\lambda \in 2\pi i\mathbf{Q}^*$, les $u \in \mathrm{U}_\omega(\mathrm{C})$ tels que $u\tau(\lambda)$ soit dans $\mathrm{T}_{\sigma/\omega}$ forment un $\mathrm{U}_\omega(\mathbf{Q})$-torseur, $x \in \mathrm{U}_\omega(\mathbf{Q})$ agissant par

(**A.1.3**) multiplication à droite par $\tau(\lambda)[x]$.

On a en effet $u\tau(\lambda)x = u\tau(\lambda)[x].\tau(\lambda)$.

La conjecture suivante est l'analogue pour les motifs de Tate mixte d'une conjecture de Grothendieck pour les motifs purs.

Conjecture **A.2.** — *a_σ est un point générique de G_ω.*

Proposition **A.3.** — *La conjecture A.2 implique la conjecture 5.6.*

Preuve. — Pour nous conformer aux notations du paragraphe 5, supposons que σ soit un plongement du corps cyclotomique k dans $\mathbf{C}$. L'élément dch (5.1 (A)) de $\Pi(\mathbf{C})$ dépend de σ. Nous le noterons ici dch_σ. Vu comme élément de $(\Pi, \circ)$, il agit sur la ω-réalisation du groupoïde fondamental motivique de $(\mathrm{X}, \{0\} \cup \mu_\mathrm{N})$.

Rappelons la preuve [1] 5.19 de 5.1 (B). Si on prend a_σ de A.1 de la forme $u_\sigma\tau(2\pi i)$, avec u_σ dans $\mathrm{U}_\omega(\mathbf{C})$, d'image (3.4.6) (u_σ) dans $\Pi(\mathbf{C})$, tant $(3.4.6)(u_\sigma)\tau(2\pi i)$ que $\mathrm{dch}_\sigma\tau(2\pi i)$ transforment la ω-réalisation du groupoïde fondamental en sa σ-réalisation (vue par (A.1.1) comme contenue dans le complexifié de la ω-réalisation). Si on définit v_σ par

$$\mathrm{dch}_\sigma\tau(2\pi i) = (3.4.6)(u_\sigma)\tau(2\pi i)v_\sigma$$

(égalité d'actions, ou dans $(\mathbf{G}_m \ltimes \Pi)(\mathbf{C})$), on a donc $v_\sigma \in \Pi(\mathbf{Q})$ et (5.1.1) sous la forme

(**A.3.1**) $$\mathrm{dch}_\sigma = (3.4.6)(u_\sigma) \circ \tau(2\pi i)(v_\sigma).$$

La conjecture A.2 affirme que $(u_\sigma, 2\pi i)$ est $\mathbf{Q}$-zariski-dense dans $\mathrm{U}_\omega \times \mathbf{A}^1$. Elle implique que l'image dch_σ de $(u_\sigma, 2\pi i)$ par le morphisme $(x, t) \mapsto (3.4.6)(x) \circ \tau(t)(v_\sigma)$ de $\mathrm{U}_\omega \times \mathbf{A}^1$ sur $\mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}$ est Zariski-dense. □

A.4 On ne dispose d'aucun outil pour attaquer ni la conjecture A.2, ni 5.6. Pour prouver qu'un sous-schéma en groupe de U_ω coïncide avec U_ω, la proposition suivante a parfois le même effet. Elle se déduit de la connaissance qu'on a de $\mathrm{U}_\omega^{\mathrm{ab}}$ ([1] (A.14.1) et [1] 2.1.3) et de l'injectivité du régulateur de Borel [1] 1.6.10.

Proposition **A.5.** — *Soit* H *un sous-schéma en groupe du schéma en groupe* $(\mathrm{U}_\omega)_\mathbf{C}$ *sur* $\mathbf{C}$. *Pour qu'il soit égal à* $(\mathrm{U}_\omega)_\mathbf{C}$, *il suffit que*

(a) *il soit gradué (i.e. stable sous l'action de $\mathbf{G}_m$) ;*
(b) *en degré un, son algèbre de Lie graduée coïncide avec celle de U_ω ; et*
(c) *pour tout plongement complexe σ, il contienne $a_\sigma\bar{a}_\sigma^{-1}\tau(-1)$.*

Noter que $a_\sigma \bar{a}_\sigma{}^{-1}\tau(-1)$ est dans $U_\omega(\mathbf{C})$ et est indépendant du choix de a_σ. Pour $a_\sigma = u_\sigma \tau(\lambda)$ avec u_σ dans $U_\omega(\mathbf{C})$ et $\lambda \in 2\pi i\mathbf{Q}^*$, c'est $u_\sigma \tau(-1)(\bar{u}_\sigma)$.

A.6 Revenons à nos hypothèses générales 3.1.

Dans [4], Racinet définit un sous-schéma gradué DMRD^σ de Π, contenant dch_σ. Il est défini par des relations “standard” entre les coefficients de dch_σ. Il prouve que son sous-schéma DMRD_0, obtenu en annulant (5.4.3), est un sous-schéma en groupe de $(\Pi, \circ)$, indépendant de σ, et que pour w_σ convenable dans $\Pi(\mathbf{Q})$, DMRD^σ est l'image de $\mathrm{DMRD}_0^\sigma \times \mathbf{A}^1$ par $(x, t) \mapsto x \circ \tau(t)(w_\sigma)$. L'élément dch_σ est dans l'image de $\mathrm{DMRD}_0^\sigma(\mathbf{C}) \times \{2\pi i\}$, et $\mathrm{dch}_\sigma \circ \tau(-1)(\overline{\mathrm{dch}_\sigma})^{-1}$ est donc dans DMRD_0. Ceci vaut pour chaque plongement complexe et A.4 s'applique à l'image inverse de DMRD_0 dans U_ω. On conclut que :

Corollaire **A.7.** — *Le sous-schéma en groupe* DMRD_0 *de Racinet contient* IU_ω.

A.8 Revenons aux hypothèses de A.1, et supposons que $\sigma(k) \subset \mathrm{C}$ soit stable par conjugaison complexe. Tel est le cas si σ est un plongement réel, si k est CM, par exemple cyclotomique, ou si k est galoisien sur $\mathbf{Q}$. Par hypothèse, on dispose d'un automorphisme de conjugaison complexe, qu'on notera c, du triple (k, σ, C). Par transport de structures, il agit sur G_ω et $T_{\sigma/\omega}$ est stable sous l'involution c de $G_\omega(\mathrm{C})$. Noter que c agit par son action sur G_ω **et** sur C.

Proposition **A.9.** — *Il existe* $a_\sigma \in T_{\sigma/\omega}$ *tel que*

$$c(a_\sigma) = a_\sigma \tau(-1). \tag{A.9.1}$$

Si $a_\sigma = u\tau(\lambda)$ avec $u \in U_\omega(\mathrm{C})$ et $\lambda \in 2\pi i\mathbf{Q}^*$, (A.9.1) équivaut à ce que c fixe u.

Preuve. — Fixons λ dans $2\pi i\mathbf{Q}^*$, et soit $T^\lambda_{\sigma/\omega}$ l'ensemble des $u \in U_\omega(\mathrm{C})$ tels que $u\tau(\lambda)$ soit dans $T_{\sigma/\omega}$. C'est un $U_\omega(\mathbf{Q})$-torseur pour l'action (A.1.3). L'involution c de $U_\omega(\mathrm{C})$ stabilise $T^\lambda_{\sigma/\omega}$: si $u\tau(\lambda)$ est dans $T_{\sigma/\omega}$, $c(u\tau(\lambda))$ et $c(u\tau(\lambda))\tau(-1)$ le sont aussi, et

$$c(u\tau(\lambda))\tau(-1) = c(u)\tau(-\lambda)\tau(-1) = c(u)\tau(\lambda).$$

L'involution c de $T^\lambda_{\sigma/\omega}$ fait de $T^\lambda_{\sigma/\omega}$ un $U_\omega(\mathbf{Q})$-torseur équivariant, rel. l'involution $\tau(-1)\circ c : x \mapsto \tau(-1)c(x)\tau(-1)^{-1}$ de $U_\omega(\mathbf{Q})$. En effet,

$$\begin{aligned} c(u.\tau(\lambda)x\tau(\lambda)^{-1}) = c(u).\tau(-\lambda)c(x)\tau(-\lambda)^{-1} \\ \times c(u).\tau(\lambda)\tau(-1)[c(x)]\tau(\lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

Tout $U_\omega(\mathbf{Q})$-torseur équivariant est trivial, ainsi qu'il résulte par dévissage de la nullité

$$H^1(\mathbf{Z}/2, V) = 0$$

pour V un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel muni d'une action de $\mathbf{Z}/2$. Il existe donc u dans $\mathrm{T}^{\lambda}_{\sigma/\omega}$ fixe sous c, et $u\tau(\lambda)$ vérifie (A.9.1). □

Corollaire **A.10.** — *L'élément* v_σ *de (5.1.1) peut être choisi fixe par le composé de* $\tau(-1)$ *et de l'automorphisme de* Π *induit par la conjugaison complexe de* k.

Preuve. — Choisissons $a_\sigma \in \mathrm{T}_{\sigma/\omega}$ de la forme $a_\sigma = u\tau(2\pi i)$ et vérifiant (A.9.1). Soit u_1 l'image de u dans $\mathrm{IU}_\omega(\mathbf{C})$ et définissons v_σ par (A.3.1) :

$$\mathrm{dch} = u_1.\tau(2\pi i)[v_\sigma].$$

La conjugaison complexe de k induit une involution de Π, déduit de $e_a \mapsto e_{\bar{a}}$ sur L. Cette involution, et la conjugaison complexe de $\mathbf{C}$, définissent l'involution c de $\Pi(\mathbf{C})$. Tant dch que u_1 sont fixes par cette involution ; $\tau(2\pi i)[v_\sigma]$ l'est donc aussi. Puisque $c(\tau(2\pi i)[v_\sigma]) = \tau(-2\pi i)[c(v_\sigma)] = \tau(2\pi i)[\tau(-1)[c(v_\sigma)]]$, v_σ est fixe par $\tau(-1)\circ c$. □

Index des notations

$\mathrm{N}, \mu_\mathrm{N}, k, \zeta, \mathcal{O}, \mathrm{X} := \mathbf{G}_m - \mu_\mathrm{N}, \mathrm{P}_{b,a}(\ \ ), \pi_1(\ ,\ )$:	introduction
$\zeta(s_1,\dots,s_k;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$:	(0.1)
$\mathrm{Y}, \mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/\mathrm{N}])$:	introduction
$\mathrm{Lie}, \mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}}, \mathcal{L}^\wedge$:	1.1, 1.3
$\mathcal{U}^\wedge, \exp(\mathfrak{h}), \exp, \mathcal{O}(\ \ )$:	1.2
$\mathrm{Ass}, \mathrm{Ass}^\wedge, c(\ \ )$:	1.4
$\omega, \mathrm{G}_\omega = \mathbf{G}_m \ltimes \mathrm{U}_\omega, \bar{\mathfrak{u}}_\omega, \overline{\mathrm{G}}_\omega = \mathbf{G}_m \times \overline{\mathrm{U}}_\omega$ (si $\mathrm{N}=6$), $\bar{\mathfrak{u}}_\omega$:	3.1
$\mathrm{L}, \Pi, \Pi_{b,a}, x_{b,a}, [\eta]$:	3.2, 3.3
$\mathrm{V}_\omega, (\Pi,\circ), (\mathrm{L},\{\ ,\ \})$:	3.4
filtration de profondeur D^p, $\mathrm{D}_p = \mathrm{D}^{-p}$, D-degré, ${}^{\langle d\rangle}$:	3.5, 3.7, 3.9
$\mathfrak{Z}$ (série centrale descendante), $\mathrm{E}^n_\eta = (\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_\eta)$:	3.10
$\mathrm{L_S}, \Pi_\mathrm{S}, \mathrm{L_M}, \mathrm{L}''_\mathrm{M}, \Pi''_\mathrm{M}, \mathrm{L}', \mathrm{L}'', \mathrm{L}_\mathbf{Z}, \mathrm{L}'_\mathbf{Z}, \mathrm{L}''_\mathbf{Z}, \mathrm{M}, \mathrm{Y}$:	4, 4.1, 4.2
$\mathrm{J}, \mathrm{J}_\mathbf{Z}, \ell(=2$ si $\mathrm{N}=2,4,8$, $=3$ si $\mathrm{N}=3,6)$:	4.6, 4.7, 4.8
σ, τ, dch, $\mathrm{IU}_\omega, v_\sigma$:	5, 5.1
$\mathrm{D}, \mathrm{IU}_\omega \circ \mathrm{D}$:	5.4
M_σ (réalisation de Betti), $a_\sigma, \mathrm{T}_{\sigma/\omega}, u_\sigma$:	A.1, A.3
$\mathrm{DMRD}^\sigma, \mathrm{DMRD}_0$:	A.6

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Deligne and A. B. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte. *Ann. Sci. ENS*, **38** (2005), 1–56.
2. A. B. Goncharov, The dihedral Lie algebra and Galois symmetries of $\pi_1^{(l)}(\mathbf{P}^1 - (\{0,\infty\}\cup\mu_\mathrm{N}))$, *Duke Math. J.*, **110** (2001), 397–487.
3. Y. Ihara, The Galois representations arising from $\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ and Tate twists of even degree, in : *Galois Groups over* $\mathbf{Q}$, MSRI Publ., vol. **16**, pp. 299–313.

4. G. Racinet, Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité, *Publ. Math. IHES*, **95** (2002), 185–231.
5. D. E. Radford, A natural ring basis for the shuffle algebra and an application to group schemes, *J. Algorithms*, **58** (1979), 432–454.
6. Chr. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford University Press, London, 1993.

P. D.
School of Mathematics,
Institute for Advanced Study,
Princeton, NJ 08540, USA
deligne@math.ias.edu

Manuscrit reçu le 14 décembre 2008
Manuscrit accepté le 14 juillet 2010
publié en ligne le 4 septembre 2010.