SOUS-GROUPES CANONIQUES ET CYCLES ÉVANESCENTS p-ADIQUES POUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

par Ahmed ABBES *et* Abdellah MOKRANE

1. Introduction

1.1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, $\mathrm{W} = \mathrm{W}(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et σ l'endomorphisme de Frobenius de k et de W. Soient A une k-variété abélienne ordinaire de dimension g et $\mathfrak{M}$ l'espace de modules formel des déformations de A sur les W-algèbres artiniennes locales de corps résiduel k. Par le théorème de Serre-Tate [25], il existe un isomorphisme canonique de W-schémas formels

$$\mathfrak{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{T}_p\mathrm{A}(k) \otimes \mathrm{T}_p\hat{\mathrm{A}}(k), \hat{\mathbf{G}}_m),$$

où $\hat{\mathrm{A}}$ est la variété abélienne duale de A et T_p est le module de Tate. Dwork ([13] Appendice) a montré qu'une structure de groupe formel torique sur $\mathfrak{M}$ est imposée par la donnée d'un W-morphisme $\Phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^{(\sigma)}$ qui relève le Frobenius. En particulier, la structure de groupe formel de Serre-Tate est complètement déterminée par le relèvement canonique du Frobenius $\Phi_{\mathrm{can}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^{(\sigma)}$ défini de la façon suivante. Soient $\mathbf{A}/\mathfrak{M}$ le schéma abélien formel universel, ${}_p\mathbf{A}$ le noyau de la multiplication par p et ${}_p\mathbf{A}^\circ \subset {}_p\mathbf{A}$ sa composante connexe neutre. Alors ${}_p\mathbf{A}^\circ$ est l'unique sous-schéma en groupes fermé de ${}_p\mathbf{A}$, fini et plat sur $\mathfrak{M}$ de rang p^g qui relève le noyau de l'isogénie de Frobenius $\mathrm{A} \to \mathrm{A}^{(\sigma)}$. Le morphisme Φ_{can} est défini par l'isomorphisme de schémas abéliens formels $\Phi^*_{\mathrm{can}}(\mathbf{A}^{(\sigma)}) \simeq \mathbf{A}/{}_p\mathbf{A}^\circ$.

Dans un cadre global, Dwork a conjecturé que le relèvement canonique du Frobenius est *surconvergent* (problème du relèvement excellent). Soient $\mathfrak{X}$ un W-schéma formel topologiquement de type fini et $\mathscr{A} \to \mathfrak{X}$ un schéma abélien formel tel que $\mathscr{A}_k \to \mathfrak{X}_k$ soit une famille de variétés abéliennes ordinaires. Soient ${}_p\mathscr{A}$ le noyau de la multiplication par p, ${}_p\mathscr{A}^{\mathrm{et}}$ son plus grand quotient étale et ${}_p\mathscr{A}^\circ$ le noyau du morphisme naturel ${}_p\mathscr{A} \to {}_p\mathscr{A}^{\mathrm{et}}$. On désigne par Φ_k l'endomorphisme de Frobenius absolu de $\mathfrak{X}_k$. On suppose donné un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}/{}_p\mathscr{A}^\circ \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d] & \mathscr{A} \arrow[d] \\
\mathfrak{X} \arrow[r, "\Phi"] & \mathfrak{X}
\end{tikzcd}$$

tel que Φ relève Φ_k et Θ relève le morphisme naturel $(\mathscr{A}/{}_p\mathscr{A}^\circ)_k = \mathscr{A}_k^{(\Phi_k)} \to \mathscr{A}_k$ (noter que ${}_p\mathscr{A}^\circ$ relève le noyau de l'isogénie de Frobenius $\mathscr{A}_k \to \mathscr{A}_k^{(\Phi_k)}$). Un tel

DOI 10.1007/s10240-004-0022-x

diagramme existe pour certains espaces de modules de variétés abéliennes. Dans ce cas, Dwork a conjecturé que Φ est surconvergent (voir Définition 7.1.1). Deligne, Dwork [15] et Lubin-Tate [24] ont démontré cette conjecture pour les familles de courbes elliptiques. Ensuite Dwork [16] l'a utilisé pour montrer que la fonction L unité de la famille universelle de Legendre des courbes elliptiques ordinaires admet un prolongement méromorphe à tout $\mathbf{C}_p$. Dans cet article, on démontre la surconvergence en dimension arbitraire sous l'hypothèse $p \geq 3$ et on en déduit une application à l'étude de certaines fonctions L unités.

1.2. On commence par reformuler le problème de surconvergence en termes modulaires. Soient K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$, $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$ son anneau d'entiers et v_p sa valuation normalisée par $v_p(p) = 1$. On pose $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}})$ et $\mathrm{S}_1 = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}}/p\mathscr{O}_{\mathrm{K}})$. On appelle valuation p-adique tronquée l'application $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}/p\mathscr{O}_{\mathrm{K}} \to \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ induite par v_p. Soit M un φ-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}_1}$-module, c'est à dire un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_1}$-module libre de type fini muni d'un endomorphisme semi-linéaire $\varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$. On définit la hauteur de Hodge de M comme la valuation p-adique tronquée du déterminant d'une matrice de φ. Soient A un S-schéma abélien de dimension relative g, $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$ et ${}_p\mathrm{A}$ le noyau de la multiplication par p. Le Frobenius de A_1 fait de $\mathrm{H}^1(\mathrm{A}_1, \mathscr{O}_{\mathrm{A}_1})$ un φ-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}_1}$-module. Il s'agit de construire, sous l'hypothèse que la hauteur de Hodge de $\mathrm{H}^1(\mathrm{A}_1, \mathscr{O}_{\mathrm{A}_1})$ est plus petite qu'un nombre rationnel $b(g) > 0$, un sous-schéma en groupes fermé *canonique* $\mathrm{H}_{\mathrm{can}} \subset {}_p\mathrm{A}$ fini et plat sur S de rang p^g. Si A_k est ordinaire, on demande que $\mathrm{H}_{\mathrm{can}}$ soit la composante connexe neutre de ${}_p\mathrm{A}$. Pour ce faire, on étudie la ramification des schémas en groupes finis et plats sur S, en utilisant la théorie de ramification de Abbes-Saito [1,2]. Soit G un S-schéma en groupes fini et plat. On définit sur G une filtration décroissante exhaustive canonique $(\mathrm{G}^a, a \in \mathbf{Q}_{\geq 0})$ par des sous-schémas en groupes fermés finis et plats sur S. Pour tout nombre réel $a \geq 0$, on pose $\mathrm{G}^{a+} = \cup_{b>a}\mathrm{G}^b$ (où $b \in \mathbf{Q}$).

1.2.1. *Théorème. — Supposons* $p \geq 3$ *et notons e l'indice de ramification absolu de* K *et* $j = e/(p-1)$. *Soit* A *un* S*-schéma abélien de dimension relative g tel que la hauteur de Hodge de* $\mathrm{H}^1(\mathrm{A}_1, \mathscr{O}_{\mathrm{A}_1})$ *est strictement plus petite que* $\inf\left(\frac{1}{p(p-1)}, \frac{p-2}{(p-1)(2g(p-1)-p)}\right)$. *Alors le cran* ${}_p\mathrm{A}^{j+}$ *de la filtration canonique de* ${}_p\mathrm{A}$ *est fini et plat sur* S *de rang* p^g. *De plus, si* A_k *est ordinaire, alors* ${}_p\mathrm{A}^{j+}$ *est la composante connexe neutre de* ${}_p\mathrm{A}$.

Soient $\overline{\mathrm{K}}$ une clôture algébrique de K et $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}$ la clôture intégrale de $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$ dans $\overline{\mathrm{K}}$. Pour démontrer le théorème, on est amené à donner une description différentielle de la filtration canonique de ${}_p\mathrm{A}$. On procède en deux étapes. D'abord, on décrit la filtration duale sur $\mathrm{H}^1(\mathrm{A}_{\overline{\mathrm{K}}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ via la suite spectrale des cycles évanescents p-adiques, en termes de filtration par les symboles ([5] Section I). Ensuite, on en déduit des descriptions différentielles du cran ${}_p\mathrm{A}^{j+}(\overline{\mathrm{K}})^{\perp}$ grâce à un calcul syntomique. On démontre en particulier que ${}_p\mathrm{A}^{j+}(\overline{\mathrm{K}})^{\perp} = \ker(\theta(-1))$, où

$$\theta : \mathrm{H}^1(\mathrm{A}_{\overline{\mathrm{K}}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^0\big(\mathrm{A}, \Omega^1_{\mathrm{A/S}}\big) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}} \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}/p\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}$$

est un homomorphisme classique en théorie de Kummer. Il faut noter que cette description simple ne permet pas de calculer le rang de ${}_p\mathrm{A}^{j+}$. Pour démontrer le théorème, on a besoin de toute la puissance du calcul syntomique.

Le théorème 1.2.1 se généralise facilement aux S-schémas semi-abéliens de fibres génériques des variétés abéliennes (Corollaire 6.1.2). En dimension relative 1, la filtration canonique de ${}_p\mathrm{A}$ se résume au sous-groupe canonique de Lubin et Tate [24] (Proposition 2.4.1). Dans ce cas, le théorème 1.2.1 ne donne pas la meilleure estimation sur la hauteur de Hodge de $\mathrm{H}^1(\mathrm{A}_1, \mathscr{O}_{\mathrm{A}_1})$ pour l'existence du sous-groupe canonique.

1.3. Le théorème 1.2.1 implique la conjecture du relèvement excellent de Dwork pour des espaces de modules de variétés abéliennes. On traite dans cet article l'exemple du problème de module $\mathfrak{A}_{g,\mathrm{N}}$ paramétrisant les schémas abéliens de dimension relative g, principalement polarisés, avec structure de niveau N. D'après [29], ce module est représentable par un W-schéma quasi-projectif connexe et lisse. Sa complétion formelle le long de sa fibre spéciale contient un ouvert formel canonique $\mathcal{Q}$ qui ind-représente les variétés abéliennes ordinaires. Par propriété universelle, $\mathcal{Q}$ est muni d'un relèvement canonique du Frobenius de $\mathcal{Q}_k$. On démontre dans le théorème 8.1.1 qu'il est surconvergent. Soit H le premier groupe de cohomologie de de Rham relative de la famille universelle sur $\mathcal{Q}$. Grâce à la formule des traces de Dwork-Monsky, on en déduit une formule qui exprime le produit infini des fonctions L des puissances symétriques paires du dual de la partie unité de H, en termes de déterminants de Fredholm d'opérateurs de Dwork (Proposition 8.3.2). Les opérateurs en question sont induits par la trace du relèvement canonique du Frobenius. Ils généralisent l'opérateur d'Atkin U des formes modulaires p-adiques défini pour $g = 1$ (voir [24] 3.11). Dans ce cas (i.e. $g = 1$) la formule est due à Dwork ([16] et [24] A3.1.5). La construction de ces opérateurs est la première étape d'un projet qui a pour but le développement d'une théorie des formes modulaires p-adiques de Siegel (et pour d'autres variétés de Shimura) sur le modèle de la théorie elliptique développée par Dwork [16], Katz [24], Coleman [10,11], ...

1.4. La section 2 de cet article est consacrée à des rappels et compléments sur la filtration de ramification. Dans la section 3, on démontre le théorème 3.1.2 qui relie la filtration de ramification sur la p-torsion d'un S-schéma abélien à la filtration par les symboles sur les cycles-évanescents p-adiques. Le calcul syntomique est développé dans la section 4. Le théorème 1.2.1 est démontré dans la section 6.

La section 7 contient des rappels et compléments sur la formule des traces de Dwork-Monsky. La dernière section contient l'application à $\mathfrak{A}_{g,\mathrm{N}}$ décrite plus haut. L'article se termine avec un appendice qui contient en particulier deux applications du théorème de la fibre réduite de Bosch-Lütkebohmert-Raynaud [9]. La première application est une généralisation en géométrie rigide de la notion de composante connexe neutre d'un schéma en groupe sur une base. La seconde application est un énoncé de spécialisation du conducteur qui n'est pas utilisé dans l'article.

1.5. *Notations.* — Dans cet article, K est un corps complet pour une valuation discrète. On note $\mathscr{O}_\mathrm{K}$ son anneau de valuation, k son corps résiduel qu'on suppose de caractéristique $p > 0$, π une uniformisante et v la valuation normalisée par $v(\pi) = 1$. Soient $\overline{\mathrm{K}}$ une clôture séparable de K, $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}$ la clôture intégrale de $\mathscr{O}_\mathrm{K}$ dans $\overline{\mathrm{K}}$, $\overline{k}$ son corps résiduel, et $\mathscr{G}_\mathrm{K}$ le groupe de Galois de $\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K}$. On désigne aussi par v la valuation de $\overline{\mathrm{K}}$ qui prolonge v. Pour tout $a \in \mathbf{Q}$, on pose $\mathfrak{m}_a = \{x \in \overline{\mathrm{K}}; v(x) \geq a\}$.

À partir de la section 3 (à l'exception de l'appendice) on suppose K de caractéristique 0 à corps résiduel k parfait. On note v_p la valuation de $\overline{\mathrm{K}}$ normalisée par $v_p(p) = 1$. Pour tout $a \in \mathbf{Q}$, on pose $\mathfrak{n}_a = \{x \in \overline{\mathrm{K}}; v_p(x) \geq a\}$.

On pose $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathrm{K})$ et $\overline{\mathrm{S}} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}})$. On désigne par s et η (resp. $\overline{s}$ et $\overline{\eta}$) les points fermé et générique de S (resp. de $\overline{\mathrm{S}}$).

On note $\mathrm{SFA}_{\mathscr{O}_\mathrm{K}}$ la catégorie des schémas formels adiques noetheriens affines $\mathfrak{X}$ sur $\mathscr{O}_\mathrm{K}$ tels que le sous-schéma fermé $\mathfrak{X}_{\mathrm{red}}$, défini par le plus grand idéal de définition, est un schéma de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$.

Pour une K-variété affinoïde X, on note $\pi_0(\mathrm{X}_{\overline{\mathrm{K}}})$ l'ensemble de ses composantes connexes géométriques.

Pour un schéma X, on note $\mathrm{D}(\mathrm{X}_{\mathrm{et}})$ la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux abéliens sur le petit site étale de X.

2. La filtration de ramification

2.1. Soient A une $\mathscr{O}_\mathrm{K}$-algèbre finie et plate et $i : \mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \to \mathfrak{X}$ une $\mathscr{O}_\mathrm{K}$-immersion fermée dans un objet $\mathfrak{X}$ de $\mathrm{SFA}_{\mathscr{O}_\mathrm{K}}$. Soit $a > 0$ un nombre rationnel. Dans [1,2] et [12] Chapitre 7, on associe à i une K-variété affinoïde X^a, appelée voisinage tubulaire d'épaisseur a de i. Rappelons brièvement sa construction. Soient $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathscr{A})$, $\mathrm{I} \subset \mathscr{A}$ l'idéal qui définit l'immersion fermée i, et $m, n > 0$ deux entiers tels que $a = m/n$. Soient $\mathscr{A}\langle \mathrm{I}^n/\pi^m\rangle$ la complétion π-adique du sous-anneau de $\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{K}} \mathrm{K}$ engendré par $\mathscr{A}$ et les éléments f/π^m pour $f \in \mathrm{I}^n$. Alors $\mathrm{C}_{m,n} = \mathscr{A}\langle \mathrm{I}^n/\pi^m\rangle \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{K}} \mathrm{K}$ est une K-algèbre affinoïde qui ne dépend que de a et $\mathrm{X}^a = \mathrm{Sp}(\mathrm{C}_{m,n})$. De plus, pour tout nombre rationnel $b \geq a$, il existe un morphisme canonique $\mathrm{X}^a \to \mathrm{X}^b$ qui fait de X^a un sous-domaine rationnel de X^b.

Soient $\mathscr{E}(\mathrm{A}/\mathscr{O}_{\mathrm{K}})$ l'ensemble des $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$-immersions fermées $i : \mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \to \mathfrak{X}$ dans un objet $\mathfrak{X}$ de $\mathrm{SFA}_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}}$ qui est formellement lisse sur $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$, et $\mathscr{E}_{\circ}(\mathrm{A}/\mathscr{O}_{\mathrm{K}}) \subset \mathscr{E}(\mathrm{A}/\mathscr{O}_{\mathrm{K}})$ le sous-ensemble formé par les i tels que $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})_{\mathrm{red}} \simeq \mathfrak{X}_{\mathrm{red}}$. Ces deux ensembles forment naturellement des catégories cofiltrantes. Par un théorème de fibration ([2] Lemme 1.8), le système projectif $(\pi_0(\mathrm{X}^{a}_{\overline{\mathrm{K}}}))_{\mathscr{E}(\mathrm{A}/\mathscr{O}_k)}$ est constant. On pose

$$\mathscr{F}^a(\mathrm{A}) = \varprojlim_{\mathscr{E}(\mathrm{A}/\mathscr{O}_{\mathrm{K}})} \pi_0\big(\mathrm{X}^{a}_{\overline{\mathrm{K}}}\big).$$

Soient $\mathrm{AFP}_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}}$ la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$-algèbres finies et plates et $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}-\mathrm{Ens}$ la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$. On désigne par

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : \mathrm{AFP}^{\circ}_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}} &\longrightarrow \mathscr{G}_{\mathrm{K}}-\mathrm{Ens} \\ \mathrm{A} &\longmapsto \mathrm{Spec}(\mathrm{A})(\overline{\mathrm{K}}) \end{aligned}$$

le foncteur des points géométriques. On vérifie facilement que la construction rappelée ci-dessus fournit pour tout $a \in \mathbf{Q}_{>0}$, un foncteur

$$\mathscr{F}^a : \mathrm{AFP}^{\circ}_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}} \longrightarrow \mathscr{G}_{\mathrm{K}}-\mathrm{Ens},$$

et des morphismes de foncteurs $\varphi^a : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^a$ et $\varphi^b_a : \mathscr{F}^a \to \mathscr{F}^b$ pour $a \geq b > 0$, vérifiant les relations $\varphi^b = \varphi^a \circ \varphi^b_a$ et $\varphi^c_a = \varphi^b_a \circ \varphi^c_b$ pour $a \geq b \geq c > 0$. La propriété suivante est immédiate.

2.1.1. *Lemme.* — *Soient* A *et* B *deux objets de* $\mathrm{AFP}_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}}$ *et* $a \in \mathbf{Q}_{>0}$. *Il existe un isomorphisme canonique et bifonctoriel*

$$\mathscr{F}^a(\mathrm{A} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}} \mathrm{B}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^a(\mathrm{A}) \times \mathscr{F}^a(\mathrm{B}).$$

De plus, cet isomorphisme est associatif et compatible au morphisme de foncteurs φ^a.

Pour $a > 0$ un nombre réel, on pose

$$\mathscr{F}^{a-}(\mathrm{A}) = \varprojlim_{0<b<a} \mathscr{F}^b(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{F}^{a+}(\mathrm{A}) = \varinjlim_{b>a} \mathscr{F}^b(\mathrm{A}),$$

où b est un nombre rationnel.

2.1.2. *Proposition ([1] Propositions 6.2 et 6.4).* — *Soit* A *une* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$*-algèbre finie plate et intersection complète relative sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$ *(voir EGA IV 19.3.6).*

(i) *Pour tout* $a \in \mathbf{Q}_{>0}$, *le morphisme naturel* $\mathscr{F}(\mathrm{A}) \to \mathscr{F}^a(\mathrm{A})$ *est surjectif.*

(ii) *L'application naturelle* $\mathscr{F}(\mathrm{A}) \to \varprojlim_{a \in \mathbf{Q}_{>0}} \mathscr{F}^a(\mathrm{A})$ *est une bijection.*

(iii) *La fonction* $a \mapsto \mathscr{F}^a(\mathrm{A})$ *est continue à gauche et ses sauts sont rationnels, i.e.,* $\mathscr{F}^{a-}(\mathrm{A}) = \mathscr{F}^a(\mathrm{A})$ *si* a *est rationnel et* $\mathscr{F}^{a-}(\mathrm{A}) = \mathscr{F}^{a+}(\mathrm{A})$ *si* a *est irrationnel.*

2.1.3. *Remarque.* — Soit A une $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$-algèbre finie plate. Par EGA IV 19.2.4, 19.3.2 et 19.3.7, A est une intersection complète relative sur $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$ si et seulement si A est localement un anneau d'intersection complète.

2.1.4. *Définition.* — *Soit* A *une* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$*-algèbre finie et plate et intersection complète relative sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$*, telle que* $\mathrm{A}_{\mathrm{K}} = \mathrm{A} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}} \mathrm{K}$ *soit étale sur* K*. On définit le conducteur de* $\mathrm{A}/\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$ *ou de* $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})/\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$ *par*

$$c(\mathrm{A}/\mathscr{O}_{\mathrm{K}}) = c(\mathrm{Spec}(\mathrm{A})/\mathscr{O}_{\mathrm{K}}) = \inf\{a \in \mathbf{Q}_{>0} | \mathscr{F}(\mathrm{A}) \overset{\sim}{\to} \mathscr{F}^a(\mathrm{A})\}.$$

C'est un nombre rationnel par la proposition 2.1.2.

2.1.5. *Lemme.* — *Soit* K'/K *une extension de corps de valuation discrète complets (pas nécessairement finie) d'indice de ramification* e*. Soit* A *une* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$*-algèbre finie et intersection complète relative sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$*, telle que* $\mathrm{A}_{\mathrm{K}} = \mathrm{A} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}} \mathrm{K}$ *soit étale sur* K*. Alors* $\mathrm{A}' = \mathrm{A} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}} \mathscr{O}_{\mathrm{K}'}$ *est une intersection complète relative sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}$ *et on a* $c(\mathrm{A}'/\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}) = ec(\mathrm{A}/\mathscr{O}_{\mathrm{K}})$*.*

Preuve. — Si B est une $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$-algèbre topologique π-adique, on pose

$$\mathrm{B}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}}\mathscr{O}_{\mathrm{K}'} = \varprojlim_{n} \mathrm{B}/\pi^n\mathrm{B} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}} \mathscr{O}_{\mathrm{K}'}/\pi^n\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}.$$

Soit $i : \mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \to \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathscr{A})$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$-immersion fermée d'idéal I, où $\mathscr{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{K}}\langle \mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n\rangle$ est la complétion π-adique de l'anneau des polynômes $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$. Alors $\mathscr{A}' := \mathscr{A}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}}\mathscr{O}_{\mathrm{K}'} \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{K}'}\langle \mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n\rangle$, $\mathrm{A}\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}}\mathscr{O}_{\mathrm{K}'} = \mathrm{A} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}} \mathscr{O}_{\mathrm{K}'} = \mathrm{A}'$ car A est fini sur $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$, et i induit une $\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}$-immersion fermée $i' : \mathrm{Spf}(\mathrm{A}') \to \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathscr{A}')$ d'idéal $\mathrm{I}\mathscr{A}'$. Soient $a \in \mathbf{Q}_{>0}$, X^a le a-ème voisinage tubulaire de i (défini sur K) et X'^a le a-ème voisinage tubulaire de i (défini sur K′). Par [6] 9.3.6/1 (i), on a $\mathrm{X}^a\hat{\otimes}_{\mathrm{K}}\mathrm{K}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}'^{ea}$. On fixe $\overline{\mathrm{K}}'$ une clôture séparable de K′ contenant $\overline{\mathrm{K}}$. Soient $\mathfrak{X}^a$ (resp. $\mathfrak{X}'^{ea}$) le modèle entier normalisé de X^a sur $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}$ (resp. X'^{ea} sur $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}'}$), qu'on suppose défini sur une extension séparable finie K_1 de K (resp. K'_1 de K′ contenant K_1) (voir [1] Section 4). On en déduit un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{K}'_1}$-schémas formels $\mathfrak{X}^a\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}_1}}\mathscr{O}_{\mathrm{K}'_1} \simeq \mathfrak{X}'^{ea}$. D'où par [1] Corollaire 4.4, on a $\pi_0(\mathrm{X}^a_{\overline{\mathrm{K}}}) \simeq \pi_0(\mathrm{X}'^{ea}_{\overline{\mathrm{K}}'})$. Le lemme s'ensuit. □

2.1.6. *Lemme.* — *Soient* A *et* B *deux* S*-schémas abéliens,* $f : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *une isogénie (i.e. un morphisme de schémas en groupes qui est fini et plat) génériquement étale et* G *le noyau de* f*. Soient* α *et* β *les points génériques des fibres spéciales de* A *et* B *respectivement et* $\hat{\mathscr{O}}_\alpha$ *et* $\hat{\mathscr{O}}_\beta$ *les complétions de leurs anneaux locaux. Alors* $c(\hat{\mathscr{O}}_\beta/\hat{\mathscr{O}}_\alpha) = c(\mathrm{G}/\mathscr{O}_{\mathrm{K}})$*.*

Preuve. — Comme $\operatorname{Spec}(\hat{\mathscr{O}}_\beta)$ est un torseur sur $\operatorname{Spec}(\hat{\mathscr{O}}_\alpha)$ sous G, il existe un isomorphisme de $\hat{\mathscr{O}}_\beta$-schémas

$$\operatorname{Spec}(\hat{\mathscr{O}}_\beta \otimes_{\hat{\mathscr{O}}_\alpha} \hat{\mathscr{O}}_\beta) \simeq \mathrm{G} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{K}} \hat{\mathscr{O}}_\beta.$$

L'indice de ramification de $\hat{\mathscr{O}}_\beta/\mathscr{O}_\mathrm{K}$ vaut 1. Donc par le lemme 2.1.5, on a $c(\mathrm{G}\otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{K}} \hat{\mathscr{O}}_\beta/\hat{\mathscr{O}}_\beta) = c(\mathrm{G}/\mathscr{O}_\mathrm{K})$ et $c(\hat{\mathscr{O}}_\beta \otimes_{\hat{\mathscr{O}}_\alpha} \hat{\mathscr{O}}_\beta/\hat{\mathscr{O}}_\beta) = c(\hat{\mathscr{O}}_\beta/\hat{\mathscr{O}}_\alpha)$. Le lemme s'ensuit. □

2.1.7. *Remarque.* — Le lemme 2.1.6 est un énoncé facile de spécialisation du conducteur. On démontre dans l'appendice (Proposition A.1.3) un énoncé plus général qui n'est pas utilisé dans cet article.

2.2. *Cohomologie galoisienne des corps locaux.* — La construction rappelée au début de la section a été introduite dans [1] pour définir deux filtrations décroissantes $\mathscr{G}_\mathrm{K}^a$ et $\mathscr{G}_{\mathrm{K},\log}^a$ ($a \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$) de $\mathscr{G}_\mathrm{K} = \operatorname{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ par des sous-groupes fermés distingués, dites respectivement filtration de ramification et filtration de ramification logarithmique. On considère sur $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \operatorname{Hom}_{cont}(\mathscr{G}_\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ la filtration duale de la filtration logarithmique, définie pour $a \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ par

$$\operatorname{fil}_a \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \big\{\rho \in \operatorname{Hom}_{cont}(\mathscr{G}_\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \ \mid \ \rho\big(\mathscr{G}_{\mathrm{K},\log}^{a+}\big) = 0\big\}.$$

2.2.1. *Proposition.* — i) *Soient* L *une extension galoisienne finie de* K *contenue dans* $\overline{\mathrm{K}}$, G *son groupe de Galois et* G^a *et* $\mathrm{G}_{\log}^a$ ($a \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$) *les filtrations de* G *quotients des filtrations de ramification de* $\mathscr{G}_\mathrm{K}$. *Si l'indice de ramification de* L/K *vaut* 1 *et si* G *est un* $\mathbf{F}_p$*-espace vectoriel, alors* $\mathrm{G}^a = \mathrm{G}_{\log}^a$ *pour tout* $a \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$.

ii) *Pour tout* $a \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$, *on a* $\operatorname{fil}_a \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \operatorname{fil}_{[a]} \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, *où* $[a]$ *est la partie entière de* a.

iii) *La filtration* $\operatorname{fil}_\bullet \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ *coïncide avec la filtration définie par Kato dans [22].*

iv) *On suppose que* K *est de caractéristique* 0 *et contient* ζ *une racine primitive* p*-ème de l'unité. Soient* $e = v(p)$ *l'indice de ramification absolu de* K, $e' = ep/(p-1)$ *et* $h : \mathrm{K}^\times \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ *l'application symbole obtenu à partir de la suite exacte de Kummer et de l'isomorphisme* $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \simeq \mu_p$ *défini par* ζ. *On a alors :*

$$\operatorname{fil}_n \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \begin{cases} h(1 + \pi^{e'-n}\mathscr{O}_\mathrm{K}) & \text{si } 0 \leq n < e', \\ \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) & \text{si } n \geq e'. \end{cases}$$

Preuve. — i) Comme G est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel, on peut le supposer isomorphe à $\mathbf{F}_p$. Dans ce cas, l'extension $\mathscr{O}_\mathrm{L}/\mathscr{O}_\mathrm{K}$ est monogène et l'assertion découle directement de [1] Lemme 3.9. ii) Un élément non nul $\rho \in \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ détermine une extension galoisienne L/K d'ordre p. On a $\rho \in \operatorname{fil}_a \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ si et seulement si $c(\mathscr{O}_\mathrm{L}/\mathscr{O}_\mathrm{K}) \leq a$. Or le conducteur d'une telle extension est clairement un entier. iii) découle de [22] Proposition 6.8. iv) découle de iii) et [22] Proposition 4.1. □

2.3. *Schémas en groupes.* — Soit $\mathrm{Gr}_{\mathscr{O}_K}$ la catégorie des $\mathscr{O}_K$-schémas en groupes commutatifs finis et plats. Soient $G = \mathrm{Spec}(A)$ un objet de $\mathrm{Gr}_{\mathscr{O}_K}$ et $a \in \mathbf{Q}_{>0}$. Par fonctorialité et le lemme 2.1.1, la structure de schéma en groupes commutatifs de G induit une structure canonique de groupe commutatif sur $\mathscr{F}^a(A)$. De plus, le morphisme $G(\overline{K}) = \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}^a(A)$ est un homomorphisme de groupes. Comme A est une intersection complète relative sur $\mathscr{O}_K$, cet homomorphisme est surjectif. On en déduit que $\mathscr{G}_K$ agit sur $\mathscr{F}^a(A)$ par des homomorphismes de groupes. En particulier, le noyau $G^a(\overline{K}) = \ker(G(\overline{K}) \to \mathscr{F}^a(A))$ est un groupe commutatif muni d'une action continue de $\mathscr{G}_K$. Donc il définit un faisceau abélien fini pour la topologie étale sur η. De façon équivalente, $G^a(\overline{K})$ définit un K-schéma en groupes fini étale G^a_η, qui est canoniquement un sous-schéma en groupes fermé de G_η. L'adhérence schématique G^a de G^a_η dans G est un sous-schéma en groupes fermé de G, fini et plat sur $\mathscr{O}_K$ ([30] 2.1).

2.3.1. *Définition.* — *La filtration décroissante* $(G^a, a \in \mathbf{Q}_{\geq 0})$*, définie ci-dessus pour* $a > 0$ *et prolongée par* $G^0 = G$*, est appelée filtration canonique de* G.

Par fonctorialité, un morphisme $u : H \to G$ de $\mathrm{Gr}_{\mathscr{O}_K}$ induit, pour tout $a \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$, un morphisme canonique $u^a : H^a \to G^a$ de $\mathrm{Gr}_{\mathscr{O}_K}$.

2.3.2. *Lemme.* — *Soit* $u : H \to G$ *un morphisme fini plat et surjectif de* $\mathrm{Gr}_{\mathscr{O}_K}$. *Pour tout* $a \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$*, le morphisme* $u^a(\overline{K}) : H^a(\overline{K}) \to G^a(\overline{K})$ *est surjectif.*

Preuve. — Le morphisme u est d'intersection complète. Donc par [2] Lemme 2.1 (3), on peut trouver un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\
G \arrow[r, "j"] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

avec $i \in \mathscr{E}_\circ(H/\mathscr{O}_K)$, $j \in \mathscr{E}_\circ(G/\mathscr{O}_K)$ et f est fini et plat. D'où pour tout $a \in \mathbf{Q}_{>0}$, le morphisme $f^a : X^a \to Y^a$, induit par f sur les voisinages tubulaires, est fini et plat. Soient $X^a_\circ$ et $Y^a_\circ$ les composantes connexes géométriques de X^a et Y^a contenant les éléments neutres de H et G respectivement. Le morphisme $X^a_\circ \to Y^a_\circ$ induit par f^a est fini et plat, donc surjectif. Le lemme s'ensuit car $H^a(\overline{K}) = i^{-1}(X^a_\circ(\overline{K}))$ et $G^a(\overline{K}) = j^{-1}(Y^a_\circ(\overline{K}))$. □

Soient G un objet de $\mathrm{Gr}_{\mathscr{O}_K}$ et $N \subset G(\overline{K})$ un sous-groupe stable sous l'action de $\mathscr{G}_K$. Soient N_η le sous-K-schéma en groupes fermé de G_η associé à N, et N_S son adhérence schématique dans G. Alors N_S est un sous-schéma en groupes fermé de G, fini et plat sur $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$, et le quotient $\mathrm{G}/\mathrm{N}_{\mathrm{S}}$ est un objet de $\mathrm{Gr}_{\mathcal{O}_{\mathrm{K}}}$. Pour tout $a \in \mathbf{Q}_{>0}$, on pose

$$\begin{aligned}\mathrm{S}^a(\mathrm{G}) = \{\mathrm{N} \subset \mathrm{G}(\overline{\mathrm{K}}) \ \text{sous groupe } \mathscr{G}_{\mathrm{K}} - \text{stable}\\ \text{tel que } c((\mathrm{G}/\mathrm{N}_{\mathrm{S}})/\mathcal{O}_{\mathrm{K}}) < a\}.\end{aligned}$$

2.3.3. *Corollaire.* — *Pour tout* $a \in \mathbf{Q}_{>0}$, *on a* $\mathrm{G}^a(\overline{\mathrm{K}}) = \cap_{\mathrm{N}\in \mathrm{S}^a(\mathrm{G})}\mathrm{N}$.

Preuve. — Par construction, on a $\mathrm{G}^a = \mathrm{G}^a(\overline{\mathrm{K}})_{\mathrm{S}}$. Par le lemme 2.3.2, le morphisme $\mathrm{G}^a(\overline{\mathrm{K}}) \to (\mathrm{G}/\mathrm{G}^a)^a(\overline{\mathrm{K}})$ est surjectif. On en déduit que $(\mathrm{G}/\mathrm{G}^a)^a(\overline{\mathrm{K}}) = 0$, $c((\mathrm{G}/\mathrm{G}^a)/\mathcal{O}_{\mathrm{K}}) < a$ et $\mathrm{G}^a(\overline{\mathrm{K}}) \in \mathrm{S}^a(\mathrm{G})$. Inversement, si $\mathrm{N} \in \mathrm{S}^a(\mathrm{G})$, alors il existe un morphisme $\mathrm{G}^a \to (\mathrm{G}/\mathrm{N})^a = 0$ qui montre que $\mathrm{G}^a(\overline{\mathrm{K}}) \subset \mathrm{N}$. □

2.3.4. *Remarque.* — Pour des applications ultérieures, rappelons l'analogue du corollaire 2.3.3 pour les extensions finies galoisiennes de K. Soit L/K une extension finie galoisienne de groupe de Galois Δ et soit $(\Delta^a, a \in \mathbf{Q}_{\geq 0})$ la filtration de ramification supérieure de Δ ([1] Remark 3.5). Pour tout nombre rationnel $a > 0$, on pose

$$\mathrm{S}^a(\Delta) = \{\mathrm{H} \lhd \Delta \ \text{tel que } c(\mathrm{L}^{\mathrm{H}}/\mathrm{K}) < a\}.$$

Alors $\Delta^a = \cap_{\mathrm{H}\in \mathrm{S}^a(\Delta)}\mathrm{H}$.

Soit G un objet de $\mathrm{Gr}_{\mathcal{O}_{\mathrm{K}}}$. Pour $a \geq 0$ un nombre réel, on pose $\mathrm{G}^{a+} = \cup_{b>a}\mathrm{G}^b$ et si $a > 0$, $\mathrm{G}^{a-} = \cap_{0<b<a}\mathrm{G}^b$, où b désigne un nombre rationnel. La proposition 2.1.2 implique que la filtration canonique est semi-continue à gauche avec un nombre fini de sauts qui se produisent en des nombres rationnels.

2.3.5. *Lemme.* — *Le sous-groupe* G^{0+} *est la composante connexe neutre de* G.

Preuve. — On considère la suite exacte canonique $0 \to \mathrm{G}^{\circ} \to \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{\mathrm{et}} \to 0$. [1] Proposition 6.3 (iii) montre que $c(\mathrm{G}^{\mathrm{et}}) = 0$. Soit $a \in \mathbf{Q}_{>0}$. L'existence du morphisme $\mathrm{G}^a \to (\mathrm{G}^{\mathrm{et}})^a = 0$ montre que $\mathrm{G}^a \subset \mathrm{G}^{\circ}$. D'où $\mathrm{G}^{0+} \subset \mathrm{G}^{\circ}$. Inversement, le morphisme $\mathrm{G}^a(\overline{\mathrm{K}}) \to (\mathrm{G}/\mathrm{G}^{0+})^a(\overline{\mathrm{K}})$ est surjectif. Donc $(\mathrm{G}/\mathrm{G}^{0+})^a = 0$ et $c(\mathrm{G}/\mathrm{G}^{0+}) = 0$. On en déduit par [1] Proposition 6.3 (iii) que $\mathrm{G}/\mathrm{G}^{0+}$ est étale. Donc $\mathrm{G}^{\circ} \subset \mathrm{G}^{0+}$. □

2.4. *Application aux variétés abéliennes.* — On suppose que K est de caractéristique 0 et on note e l'indice de ramification absolu de K. Soient A un S-schéma abélien, ${}_p\mathrm{A}$ le noyau de la multiplication par p et $({}_p\mathrm{A}^a, a \in \mathbf{Q}_{\geq 0})$ sa filtration canonique.

2.4.1. *Proposition. — Supposons $p \geq 5$. Soient* A *un schéma elliptique sur* S, ω *une* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$*-base de* $\Gamma(\mathrm{A}, \Omega^1_{\mathrm{A/S}})$ *et* E_{p-1} *la série d'Eisenstein de poids* $(p-1)$ *([24] 2.1).*

(a) *Si* $v = v(\mathrm{E}_{p-1}(\mathrm{A}, \omega)) \geq ep/(p+1)$, *alors*

$$ {}_p\mathrm{A}^a = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > ep^2/(p^2-1), \\ {}_p\mathrm{A} & \text{si} \quad 0 \leq a \leq ep^2/(p^2-1). \end{cases} $$

(b) *Si* $v = v(\mathrm{E}_{p-1}(\mathrm{A}, \omega)) < ep/(p+1)$, *alors*

$$ {}_p\mathrm{A}^a = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > (ep-v)/(p-1), \\ \mathscr{K} & \text{si} \quad pv/(p-1) < a \leq (ep-v)/(p-1), \\ {}_p\mathrm{A} & \text{si} \quad 0 \leq a \leq pv/(p-1). \end{cases} $$

où $\mathscr{K}$ *est le sous-groupe canonique de Lubin-Tate ([24] Section 3).*

Preuve. — D'après [24] Section 3.6, il existe un paramètre X du groupe formel G de A/S normalisé par la condition $[\xi](\mathrm{X}) = \xi\mathrm{X}$ pour toute $\xi \in \mathbf{Z}_p$ racine $(p-1)$-ème de l'unité. Pour un tel paramètre, on a

$$ [p](\mathrm{X}) = p\mathrm{X} + \alpha\mathrm{X}^p + \sum_{m=2}^{p} c_m \mathrm{X}^{m(p-1)+1} + c_{p+1}\mathrm{X}^{p^2} + \sum_{m \geq p+2} c_m \mathrm{X}^{m(p-1)+1}, $$

où $\alpha \equiv \mathrm{E}_{p-1}(\mathrm{A}, \omega) \mod p$ et $v_p(c_m) \geq 1$ si $m \not\equiv 1 \mod p$. Ceci permet de construire le polygone de Newton de la série $[p](\mathrm{X})$, qui est un générateur de l'idéal qui définit l'immersion fermée ${}_p\mathrm{A}^\circ \to \mathrm{G} = \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[[\mathrm{X}]])$. La proposition découle directement de la description du polygone de Newton (voir [24] page 127). ☐

Soient A un schéma abélien sur S, A_s sa fibre spéciale et ν le point générique de A_s. Soient $\widehat{\mathscr{O}}_\nu$ la complétion de l'anneau local de A en ν et L son corps de fractions. Soient $[p] : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ la multiplication par p, ${}_p\mathrm{A}$ son noyau et $\widehat{\mathscr{O}}_\nu \to \widehat{\mathscr{O}}_\nu^{[p]}$ et $\mathrm{L} \to \mathrm{L}^{[p]}$ les extensions qu'elle induit en ν. On fixe une clôture séparable $\overline{\mathrm{L}}$ de L contenant $\overline{\mathrm{K}}$. Dans la suite, on note avec un indice $_{\mathrm{L}}$ les foncteurs sur $\mathrm{AFP}_{\widehat{\mathscr{O}}_\nu}$ (i.e. $\mathscr{F}_{\mathrm{L}}$, $\mathscr{F}^a_{\mathrm{L}}$, ...) et avec un indice $_{\mathrm{K}}$ les foncteurs sur $\mathrm{AFP}_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}}$ (i.e. $\mathscr{F}_{\mathrm{K}}$, $\mathscr{F}^a_{\mathrm{K}}$, ...). Comme $[p] : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ est un ${}_p\mathrm{A}$-torseur, alors on a un isomorphisme canonique

$$ {}_p\mathrm{A}(\overline{\mathrm{K}}) = \mathscr{F}_{\mathrm{K}}({}_p\mathrm{A}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_{\mathrm{L}}\big(\widehat{\mathscr{O}}_\nu^{[p]}\big) = \mathrm{Spec}\big(\widehat{\mathscr{O}}_\nu^{[p]}\big)(\overline{\mathrm{L}}). \tag{\textbf{1}} $$

2.4.2. *Proposition. — L'isomorphisme (1) induit pour tout nombre rationnel $a > 0$ un isomorphisme*

$$ \mathscr{F}^a_{\mathrm{K}}({}_p\mathrm{A}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^a_{\mathrm{L}}\big(\widehat{\mathscr{O}}_\nu^{[p]}\big). $$

Preuve. — Il suffit de démontrer la proposition après un changement de base fini $\mathscr{O}_{\mathrm{K}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{K}'}$. On suppose donc que ${}_p\mathrm{A}(\mathrm{K}) = {}_p\mathrm{A}(\overline{\mathrm{K}})$. L'extension $\mathrm{L}^{[p]}/\mathrm{L}$ est galoisienne de groupe $\Delta = {}_p\mathrm{A}(\mathrm{K})$. Soient $\mathrm{H} \subset {}_p\mathrm{A}(\mathrm{K})$ un sous-groupe, $\mathrm{H}_\eta \subset {}_p\mathrm{A}_\eta$ le K-schéma en groupes qui lui est associé et $\mathrm{H}_{\mathrm{S}} \subset {}_p\mathrm{A}$ l'adhérence schématique de H_η dans ${}_p\mathrm{A}$. Soient $\mathrm{B} = \mathrm{A}/\mathrm{H}_{\mathrm{S}}$, qui est un S-schéma abélien, et $f : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ l'isogénie induite par l'isogénie $[p] : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$. Soient β le point générique de la fibre spéciale de B et $\hat{\mathscr{O}}_\beta$ la complétion de l'anneau local de B en β. Par le lemme 2.1.6, on a

$$c((\mathrm{L}^{[p]})^{\mathrm{H}}/\mathrm{L}) = c(\hat{\mathscr{O}}_\beta/\hat{\mathscr{O}}_v) = c(({}_p\mathrm{A}/\mathrm{H}_{\mathrm{S}})/\mathscr{O}_{\mathrm{K}}).$$

On en déduit que $\mathrm{S}^a({}_p\mathrm{A}) = \mathrm{S}^a(\Delta)$, où ces ensembles sont définis dans la sous-section 2.3. Donc ${}_p\mathrm{A}^a(\overline{\mathrm{K}}) = \Delta^a$, ce qui est équivalent à l'énoncé de la proposition. □

3. Cycles évanescents p-adiques

Dans la suite de l'article, on suppose K de caractéristique 0 à corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$.

3.1. Soit X un S-schéma lisse et $\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \overline{\mathrm{S}}$. On considère le diagramme cartésien

(**2**)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_{\bar{s}} \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d] & \overline{\mathrm{X}} \arrow[d] & \mathrm{X}_{\bar{\eta}} \arrow[l, "\bar{j}"'] \arrow[d] \\
\bar{s} \arrow[r] & \overline{\mathrm{S}} & \bar{\eta} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

et les faisceaux étales sur $\mathrm{X}_{\bar{s}}$

$$\Psi^q = \bar{i}^* \mathrm{R}^q \bar{j}_*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(q)).$$

La suite exacte de Kummer $0 \to \mu_p \to \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m \to 0$ sur $\mathrm{X}_{\bar{\eta}}$ induit l'application symbole

$$h_{\overline{\mathrm{X}}} : \bar{i}^* \bar{j}_* \mathscr{O}^{\times}_{\mathrm{X}_{\bar{\eta}}} \longrightarrow \Psi^1.$$

On pose $\mathrm{U}^0\Psi^1 = \Psi^1$ et pour $a \in \mathbf{Q}_{>0}$, $\mathrm{U}^a\Psi^1 = h_{\overline{\mathrm{X}}}(1 + \mathfrak{m}_a \bar{i}^*(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}}))$.

3.1.1. *Lemme.* — *Soient* $e = v(p)$ *l'indice de ramification absolue de* K *et* $e' = ep/(p-1)$. *Pour tout nombre rationnel* $a \geq e'$, *on a* $\mathrm{U}^a\Psi^1 = 0$.

Preuve. — Soient K' une extension finie de K contenue dans $\overline{\mathrm{K}}$, $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}'})$ $s' = \mathrm{Spec}(k')$ son point fermé et $\eta' = \mathrm{Spec}(\mathrm{K}')$ son point générique. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_{s'} \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & \mathrm{X}_{\mathrm{S}'} \arrow[d] & \mathrm{X}_{\eta'} \arrow[l, "j'"'] \arrow[d] \\
s' \arrow[r] & \mathrm{S}' & \eta' \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

et les faisceaux étales sur $\mathrm{X}_{s'}$

$$\Psi^q_{\mathrm{K}'} = i'^* \mathrm{R}^q j'_* (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(q)).$$

On a aussi une application symbole $h_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}} : i'^* j'_* \mathscr{O}^\times_{\mathrm{X}_{\eta'}} \to \Psi^1_{\mathrm{K}'}$. On pose $\mathrm{U}^0\Psi^1_{\mathrm{K}'} = \Psi^1_{\mathrm{K}'}$ et $\mathrm{U}^n\Psi^1_{\mathrm{K}'} = h_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}}(1 + \pi^n_{\mathrm{K}'} i'^*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}}))$ pour $n > 0$ un entier, où $\pi_{\mathrm{K}'}$ est une uniformisante de K'. On prolonge cette définition aux nombres rationnels $a \geq 0$ par $\mathrm{U}^a\Psi^1_{\mathrm{K}'} = \mathrm{U}^{[a]}\Psi^1_{\mathrm{K}'}$. Alors, il existe un isomorphisme canonique $\Psi^1 \simeq \varinjlim_{\mathrm{K}'} \Psi^1_{\mathrm{K}'}$. Pour tout nombre rationnel $a \geq 0$, on a $\mathrm{U}^a\Psi^1 = \varinjlim_{\mathrm{K}'} \mathrm{U}^{ae_{\mathrm{K}'/\mathrm{K}}}\Psi^1_{\mathrm{K}'}$, où $e_{\mathrm{K}'/\mathrm{K}}$ est l'indice de ramification de K'/K. Par [5] Corollaire 1.4.1, on a $\mathrm{U}^a\Psi^1_{\mathrm{K}'} = 0$ pour tout $a \geq e' e_{\mathrm{K}'/\mathrm{K}}$. Le lemme s'ensuit. □

On a $\Psi^0 \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Si X est propre et lisse sur S, alors il existe une suite spectrale

$$\mathrm{E}_2^{\ell,t} = \mathrm{H}^\ell\big(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \Psi^t\big)(-t) \Rightarrow \mathrm{H}^{\ell+t}(\mathrm{X}_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}).$$

Elle induit la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \xrightarrow{u} \mathrm{H}^0\big(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \Psi^1\big)(-1) \\ \to \mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \end{aligned} \tag{\textbf{3}}$$

3.1.2. *Théorème.* — *Soient* A *un* S*-schéma abélien,* ${}_p\mathrm{A}$ *le noyau de la multiplication par* p*, et* u *le morphisme défini dans la suite exacte* (3). *Sous l'accouplement parfait canonique*

$$ {}_p\mathrm{A}(\overline{\mathrm{K}}) \times \mathrm{H}^1(\mathrm{A}_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \tag{\textbf{4}}$$

on a pour tout $a \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$,

$$ {}_p\mathrm{A}^{a+}(\overline{\mathrm{K}})^\perp = \begin{cases} u^{-1}\big(\mathrm{H}^0\big(\mathrm{A}_{\bar{s}}, \mathrm{U}^{e'-a}\Psi^1\big)(-1)\big) & \text{si} \quad 0 \leq a < e', \\ \mathrm{H}^1(\mathrm{A}_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) & \text{si} \quad a \geq e'. \end{cases}$$

Preuve. — On peut supposer k algébriquement clos. Soit K' une extension finie de K d'indice de ramification $e_{K'/K}$. Le changement de base $\mathscr{O}_K \to \mathscr{O}_{K'}$ a pour seul effet sur l'énoncé du théorème de multiplier les indices des filtrations par $e_{K'/K}$. Donc quitte à effectuer un tel changement de base, on peut supposer que K contient une racine primitive p-ème de l'unité, ${}_pA(K) = {}_pA(\overline{K})$, les sauts de la filtration canonique de ${}_pA(\overline{K})$ sont entiers et on a $H^0(A_{\bar{s}}, \Psi^1) = H^0(A_s, \Psi^1_K)$. Par le lemme 3.1.1, le théorème 3.1.2 pour $a = 0$ se réduit à la relation

$$ {}_pA^{0+}(\overline{K})^{\perp} = H^1(A_{\bar{s}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}), \tag{\textbf{5}} $$

qui découle directement du lemme 2.3.5. L'accouplement (4) induit grâce à (5) un accouplement parfait

$$ {}_pA(\overline{K})^{0+} \times \operatorname{im}(u) \longrightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}. \tag{\textbf{6}} $$

Soient ν le point générique de $A_s = A_{\bar{s}}$ et $\bar{\nu}$ un point géométrique au dessus de ν. Soient $\mathscr{O}_\nu$ l'anneau local de A en ν, $\hat{\mathscr{O}}_\nu$ sa complétion, $\mathscr{O}_{\bar{\nu}}$ la henselisation de $\mathscr{O}_\nu$ en $\bar{\nu}$ et $\hat{\mathscr{O}}_{\bar{\nu}}$ la henselisation de $\hat{\mathscr{O}}_\nu$ en $\bar{\nu}$. Soient L_0 le corps de fractions de $\mathscr{O}_\nu$, L_0^{nr} le corps de fractions de $\mathscr{O}_{\bar{\nu}}$, L le corps de fractions de $\hat{\mathscr{O}}_\nu$ et L^{nr} le corps de fractions de $\hat{\mathscr{O}}_{\bar{\nu}}$:

$$\begin{tikzcd}
L_0^{\mathrm{nr}} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L^{\mathrm{nr}} \arrow[d, dash] \\
L_0 \arrow[r, dash] & L
\end{tikzcd}$$

On fixe $\overline{L}$ une clôture séparable de L^{nr} contenant $\overline{K}$. L'isogénie $[p] : A \to A$ définit une extension finie galoisienne $L^{[p]}/L$ de groupe de Galois isomorphe à ${}_pA(K) = {}_pA(\overline{K})$. On fixe un plongement $L^{[p]} \to \overline{L}$, ce qui induit un morphisme surjectif $\theta : \mathrm{Gal}(\overline{L}/L) \to {}_pA(\overline{K})$. Soient $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)^a$ et $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)^a_{\log}$ ($a \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$) les filtrations de ramification de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$. Comme $\mathrm{Gal}(L^{[p]}/L)$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel et l'indice de ramification de $L^{[p]}/L$ vaut 1, les propositions 2.2.1 (i) et 2.4.2 impliquent que pour tout rationnel $a > 0$, on a

$$ \theta\big(\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)^a_{\log}\big) = \theta(\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)^a) = {}_pA^a(\overline{K}). \tag{\textbf{7}} $$

En particulier, on a $\theta(\mathrm{Gal}(\overline{L}/L^{\mathrm{nr}})) = {}_pA^{0+}(\overline{K})$. Par ailleurs, [5] Proposition 6.1 implique que le morphisme naturel

$$ H^0\big(A_s, \Psi^1_K\big) \to \Psi^1_{K,\bar{\nu}} = H^1\big(\mathrm{Spec}\big(L_0^{\mathrm{nr}}\big), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1)\big) $$

est injectif. On désigne par ρ le composé des deux injections

$$ \rho : H^0\big(A_s, \Psi^1_K\big) \to H^1\big(\mathrm{Spec}\big(L_0^{\mathrm{nr}}\big), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1)\big) \to H^1(\mathrm{Spec}(L^{\mathrm{nr}}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1)). $$

On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
{}_p\mathrm{A}^{0+}(\overline{\mathrm{K}}) & \times & \mathrm{im}(u) \arrow[r, "(6)"] \arrow[d, hook] & \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \arrow[dd, equal] \\
& & \mathrm{H}^0\big(\mathrm{A}_s, \Psi^1_{\mathrm{K}}\big)(-1) \arrow[d, hook, "\rho(-1)"] & \\
\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{L}}/\mathrm{L}^{\mathrm{nr}}) \arrow[uu, two heads, "\theta"] & \times & \mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}(\mathrm{L}^{\mathrm{nr}}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \arrow[r, "(\star)"] & \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}
\end{tikzcd} \tag{8}$$

où $(\star)$ est l'accouplement canonique. L'isogénie $[p] : \mathrm{A}_{\overline{\eta}} \to \mathrm{A}_{\overline{\eta}}$ induit une surjection $\pi_1(\mathrm{A}_{\overline{\eta}}, 0) \to {}_p\mathrm{A}(\overline{\mathrm{K}})$, qui définit l'accouplement (4). On en déduit que $\ker(\theta) \perp \mathrm{im}(u)$ et l'accouplement $(\star)$ induit l'accouplement parfait (6).

Soit $h : (\mathrm{L}^{\mathrm{nr}})^\times \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}(\mathrm{L}^{\mathrm{nr}}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1))$ l'application symbole. Pour tout entier $m > 0$, soit $\mathrm{U}^m\mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}(\mathrm{L}^{\mathrm{nr}}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1)) = h(1 + \pi^m_{\mathrm{L}^{\mathrm{nr}}}\mathscr{O}_{\mathrm{L}^{\mathrm{nr}}})$.

3.1.3. *Lemme. — Pour tout entier* $m > 0$*, on a*

$$\mathrm{H}^0\big(\mathrm{A}_s, \mathrm{U}^m\Psi^1_{\mathrm{K}}\big) = \rho^{-1}(\mathrm{U}^m\mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}(\mathrm{L}^{\mathrm{nr}}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1))).$$

Preuve. — Soit $h_0 : (\mathrm{L}_0^{\mathrm{nr}})^\times \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}(\mathrm{L}_0^{\mathrm{nr}}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1))$ l'application symbole. Par [5] Théorème 5.12, h et h_0 sont surjectifs. On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{U}^m\mathrm{H}^1\big(\mathrm{Spec}\big(\mathrm{L}_0^{\mathrm{nr}}\big), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1)\big) = \\
&\mathrm{H}^1\big(\mathrm{Spec}\big(\mathrm{L}_0^{\mathrm{nr}}\big), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1)\big) \cap \mathrm{U}^m\mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}(\mathrm{L}^{\mathrm{nr}}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1)).
\end{aligned}$$

Le lemme découle alors de [5] Proposition 6.1 (ii). □

Le théorème 3.1.2 pour $a > 0$, découle de (7), du lemme 3.1.3 et de la proposition 2.2.1 (iv), par chasse au diagramme (8). □

4. Faisceaux syntomiques

4.1. Avec les notations de 3.1, pour un S-schéma abélien A, le théorème 3.1.2 ramène l'étude de la filtration canonique de ${}_p\mathrm{A}$ à celle du faisceau Ψ^1 par les symboles. Les travaux de Bloch et Kato [5] montrent que cette dernière est de nature différentielle, mais ils ne permettent pas d'en déduire une description différentielle de la filtration induite sur H^0. Pour ce faire, on remplace le faisceau Ψ^1 par un complexe quasi-isomorphe, le complexe syntomique, et on décrit explicitement un cran de sa filtration par les symboles en suivant les résultats de [23] Chapitre I.

Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $\mathrm{W}_n = \mathrm{W}_n(k)$, $\mathrm{W} = \mathrm{W}(k)$ et K_0 le corps des fractions de W. On désigne par σ l'endomorphisme de Frobenius agissant sur k, W_n, W et K_0. Pour tout W-schéma X et tout entier $n \geq 1$, on pose $\mathrm{X}_n = \mathrm{X} \otimes_{\mathrm{W}} \mathrm{W}_n$.

4.1.1. *Définition. — Soit* X *un* W*-schéma syntomique. Une présentation syntomique de* X *sur* W *est la donnée d'une* W*-immersion* $i : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *dans un schéma lisse sur* W. *La présentation syntomique est dite admissible si* Z *est muni d'un endomorphisme, dit de Frobenius,* $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ *qui relève le Frobenius de* Z_1 *et qui rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{Z} \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(\mathrm{W}) \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{Spec}(\mathrm{W})
\end{tikzcd}$$

Soient X un W-schéma syntomique, $\mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ une présentation syntomique de X sur W, et $n \geq 1$ un entier. Soient $\mathrm{D}_n = \mathrm{D}_{\mathrm{X}_n}(\mathrm{Z}_n)$ l'enveloppe à puissances divisées de X_n dans Z_n compatibles aux puissances divisées de $p\mathrm{W}_n \subset \mathrm{W}_n$, $\mathrm{J}_{\mathrm{D}_n}$ l'idéal qui définit X_n comme sous-schéma fermé de D_n et $\mathrm{J}_{\mathrm{D}_n}^{[r]}$ ses puissances divisées (avec $\mathrm{J}_{\mathrm{D}_n}^{[r]} = \mathscr{O}_{\mathrm{D}_n}$ si $r \leq 0$). On identifie les sites $(\mathrm{X}_1)_{\mathrm{et}}$ et $(\mathrm{D}_n)_{\mathrm{et}}$ grâce à l'immersion nilpotente $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{D}_n$. Pour tout entier $r \geq 0$, on définit le complexe de faisceaux de W_n-modules sur $(\mathrm{X}_1)_{\mathrm{et}}$

$$\mathfrak{J}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}}^{[r]} := \mathrm{J}_{\mathrm{D}_n}^{[r-\bullet]} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Z}_n}} \Omega^{\bullet}_{\mathrm{Z}_n/\mathrm{W}_n}.$$

Supposons de plus que la présentation syntomique $\mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ soit admissible (e.g. si X est quasi-projectif sur W alors il admet des présentations syntomiques admissibles). Alors son Frobenius $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ induit un endomorphisme de Frobenius de D_n, noté aussi f et qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}_n \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{D}_n \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(\mathrm{W}_n) \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{Spec}(\mathrm{W}_n)
\end{tikzcd}$$

Soit $\varphi : \mathfrak{J}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}}^{[0]} \to \mathfrak{J}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}}^{[0]}$ le morphisme semi-linéaire induit par les Frobenius de Z_n et D_n.

4.1.2. *Proposition ([23] Section I.1). — Soient* X *un* W*-schéma syntomique et* i : $\mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *une présentation syntomique de* X *sur* W.

(i) *Pour tout entiers* $r \geq 0$ *et* $n \geq 1$, *la classe* $\mathscr{J}_{n,\mathrm{X}}^{[r]}$ *de* $\mathfrak{J}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}}^{[r]}$ *dans* $\mathrm{D}((\mathrm{X}_1)_{\mathrm{et}})$ *ne dépend pas de la présentation syntomique de* X *sur* W.

(ii) *Pour tout entiers* $r \geq 0$ *et* $n, m \geq 1$, *on a une suite exacte*

$$\mathfrak{J}^{[r]}_{n+m,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \xrightarrow{\cdot p^m} \mathfrak{J}^{[r]}_{n+m,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \xrightarrow{\cdot p^n} \mathfrak{J}^{[r]}_{n+m,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathfrak{J}^{[r]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \longrightarrow 0.$$

(iii) *Supposons de plus que la présentation syntomique i soit admissible et notons comme plus haut* $\varphi : \mathfrak{J}^{[0]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \to \mathfrak{J}^{[0]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}}$ *le morphisme semi-linéaire de Frobenius. Soient* $0 \leq r \leq p-1$ *et* $n \geq 1$ *deux entiers. Alors* $\varphi(\mathfrak{J}^{[r]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}}) \subset p^r \mathfrak{J}^{[0]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}}$.

(iv) *Sous les hypothèses de* (iii), *il existe un unique morphisme semi-linéaire de complexes de faisceaux sur* $(\mathrm{X}_1)_{\mathrm{et}}$

$$\varphi_r : \mathfrak{J}^{[r]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \longrightarrow \mathfrak{J}^{[0]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}},$$

tel que le composé

$$\mathfrak{J}^{[r]}_{n+r,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathfrak{J}^{[r]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \xrightarrow{\varphi_r} \mathfrak{J}^{[0]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \xrightarrow{\cdot p^r} \mathfrak{J}^{[0]}_{n+r,\mathrm{X},\mathrm{Z}},$$

soit induit par $\varphi : \mathfrak{J}^{[0]}_{n+r,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \to \mathfrak{J}^{[0]}_{n+r,\mathrm{X},\mathrm{Z}}$. *De plus, le morphisme induit* $\varphi_r : \mathscr{J}^{[r]}_{n,\mathrm{X}} \to \mathscr{J}^{[0]}_{n,\mathrm{X}}$ *dans* $\mathrm{D}((\mathrm{X}_1)_{\mathrm{et}})$ *ne dépend pas de la présentation syntomique.*

(v) *Sous les hypothèses de* (iv), *soit* $\mathscr{S}_n(r)_{\mathrm{X},\mathrm{Z}}$ *la fibre du morphisme* $\varphi_r - 1 : \mathfrak{J}^{[r]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}} \longrightarrow \mathfrak{J}^{[0]}_{n,\mathrm{X},\mathrm{Z}}$. *Alors la classe* $\mathscr{S}_n(r)_{\mathrm{X}}$ *de* $\mathscr{S}_n(r)_{\mathrm{X},\mathrm{Z}}$ *dans* $\mathrm{D}((\mathrm{X}_1)_{\mathrm{et}})$ *ne dépend pas de la présentation syntomique admissible et on a un triangle distingué*

$$\mathscr{S}_n(r)_{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathscr{J}^{[r]}_{n,\mathrm{X}} \xrightarrow{\varphi_r - 1} \mathscr{J}^{[0]}_{n,\mathrm{X}} \xrightarrow{+1} .$$

Soient X un W-schéma syntomique et quasi-projectif[1] et $n \geq 1$ un entier. On définit ([23] Section I.2) pour tout entiers $r, r' \geq 0$ tels que $r + r' \leq p-1$ un produit dans $\mathrm{D}((\mathrm{X}_1)_{\mathrm{et}})$

$$(\mathbf{9}) \qquad \mathscr{S}_n(r)_{\mathrm{X}} \otimes^{\mathrm{L}} \mathscr{S}_n(r')_{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathscr{S}_n(r+r')_{\mathrm{X}}.$$

On définit ([23] Section I.3) pour tout entier $0 \leq r \leq p-1$ une application symbole

$$(\mathbf{10}) \qquad \mathscr{O}^{\times}_{\mathrm{X}_{n+1}} \times \ldots \times \mathscr{O}^{\times}_{\mathrm{X}_{n+1}} \longrightarrow \mathscr{H}^r(\mathscr{S}_n(r)_{\mathrm{X}}).$$

4.1.3. *Proposition ([23] I.3.6).* — (1) *Pour tout entiers* $0 \leq r \leq p-1$ *et* $q > r$, *on a* $\mathscr{H}^q(\mathscr{S}_n(r)_{\mathrm{X}}) = 0$.

(2) *Si* $0 \leq r < p-1$ *alors l'application symbole* (10) *est surjective.*

---

[1] La quasi-projectivité n'est pas nécessaire dans la suite, mais elle est suffisante pour l'application de cet article.

Soit K une extension finie totalement ramifiée de K_0 de degré e. Pour toute extension finie L de K, on note $\mathscr{O}_L$ son anneau d'entiers, $S_L = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_L)$ et $S = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$. Pour tout S-schéma X, soient $\overline{X} = X \times_S \overline{S}$ et $X_L = X \times_S S_L$. Pour tout $a \in \mathbf{Q}_{>0}$, on pose $\mathfrak{n}_a = \{x \in \mathscr{O}_{\overline{K}} ; v_p(x) \geq a\}$, $\overline{S}_a = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{n}_a)$ et $\overline{X}_a = X \times_S \overline{S}_a$. Ces notations sont compatibles avec celles fixées au debut de la section si $a = n$ est entier.

4.1.4. *Définition.* — *Soit* X *un* S*-schéma syntomique. Une pro-présentation syntomique de* $\overline{X}$ *sur* W *est la donnée*

(i) *pour toute extension finie* L *de* K *contenue dans* $\overline{K}$, *d'une* W*-immersion* $i_L : X_L \to Z_L$ *dans un schéma* Z_L *lisse sur* W

(ii) *pour toutes* $L' \subset L$ *extensions finies de* K *contenues dans* $\overline{K}$, *d'un* W*-morphisme affine* $\tau_{L,L'} : Z_L \to Z_{L'}$ *compatible à* i_L *et* $i_{L'}$.

La pro-présentation syntomique est dite admissible si

(iii) *pour chaque* L, Z_L *est muni d'un endomorphisme de Frobenius* $f_L : Z_L \to Z_L$ *(voir Définition 4.1.1) compatible aux morphismes* $\tau_{L,L'}$.

4.1.5. *Remarque.* — Les pro-présentations syntomiques existent toujours. Les pro-présentations syntomiques admissibles existent si X est quasi-projectif sur S.

4.1.6. *Proposition ([23] Section I.2).* — *Soit* X *un* S*-schéma syntomique. On fixe une pro-présentation syntomique de* $\overline{X}$ *sur* W *et deux entiers* $r \geq 0$ *et* $n \geq 1$.

(i) *Les images inverses des complexes* $\big(\mathfrak{J}^{[r]}_{n,X_L,Z_L}\big)_L$ *par les morphismes* $(\overline{X}_1 \to X_{L,1})_L$, *quand* L *décrit l'ensemble des extensions finies de* K *contenues dans* $\overline{K}$, *forment un système inductif. La classe* $\mathscr{J}^{[r]}_{n,\overline{X}}$ *de* $\varinjlim_{L} \mathfrak{J}^{[r]}_{n,X_L,Z_L}$ *dans* $D((\overline{X}_1)_{\mathrm{et}})$ *ne dépend pas de la pro-présentation syntomique.*

(ii) *Supposons de plus que la pro-présentation syntomique soit admissible et que* $0 \leq r \leq p-1$. *Alors, la limite des morphismes* $\varphi_r : \mathfrak{J}^{[r]}_{n,X_L,Z_L} \to \mathfrak{J}^{[0]}_{n,X_L,Z_L}$ *définit un morphisme* $\varphi_r : \mathscr{J}^{[r]}_{n,\overline{X}} \to \mathscr{J}^{[0]}_{n,\overline{X}}$ *dans* $D((\overline{X}_1)_{\mathrm{et}})$ *qui ne dépend pas de la pro-présentation syntomique admissible.*

(iii) *Sous les hypothèses* (ii), *les images inverses des complexes* $\big(\mathscr{S}_n(r)_{X_L,Z_L}\big)_L$ *par les morphismes* $\big(\overline{X}_1 \to X_{L,1}\big)_L$, *forment un système inductif. La classe* $\mathscr{S}_n(r)_{\overline{X}}$ *de* $\varinjlim_{L} \mathscr{S}_n(r)_{X_L,Z_L}$ *dans* $D((\overline{X}_1)_{\mathrm{et}})$ *ne dépend pas de la pro-présentation syntomique admissible. On a un triangle distingué*

$$\mathscr{S}_n(r)_{\overline{X}} \longrightarrow \mathscr{J}^{[r]}_{n,\overline{X}} \xrightarrow{\varphi_r - 1} \mathscr{J}^{[0]}_{n,\overline{X}} \xrightarrow{+1} \quad . \tag{\mathbf{11}}$$

Soient X un S-schéma syntomique et quasi-projectif et $0 \leq r \leq p-1$ et $n \geq 1$ deux entiers. La limite inductive des applications symbole pour X_{L} quand L décrit l'ensemble des extensions finies de K contenues dans $\overline{\mathrm{K}}$ définit une application symbole

$$\mathscr{O}^{\times}_{\overline{\mathrm{X}}_{n+1}} \times \dots \times \mathscr{O}^{\times}_{\overline{\mathrm{X}}_{n+1}} \longrightarrow \mathscr{H}^{r}(\mathscr{S}_{n}(r)_{\overline{\mathrm{X}}}).$$

On reprend le diagramme (2) et on considère le complexe $\mathscr{S}_{n}(r)_{\overline{\mathrm{X}}}$ dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}((\mathrm{X}_{\bar{s}})_{\mathrm{et}})$. Pour tout point géométrique $\bar{x}$ de $\mathrm{X}_{\bar{s}}$, on pose

$$\mathfrak{S}^{1}_{\bar{x}} = \left(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}},\bar{x}}\left[\frac{1}{p}\right]\right)^{\times} = \left(\bar{i}^{*}\bar{j}_{*}\mathscr{O}^{\times}_{\mathrm{X}_{\bar{\eta}}}\right)_{\bar{x}}.$$

Par [23] I.4.2, l'application symbole $\mathscr{O}^{\times}_{\overline{\mathrm{X}},\bar{x}} \to \mathscr{H}^{1}(\mathscr{S}_{n}(1)_{\overline{\mathrm{X}}})_{\bar{x}}$ se factorise à travers la surjection

$$\mathscr{O}^{\times}_{\overline{\mathrm{X}},\bar{x}} \twoheadrightarrow \mathfrak{S}^{1}_{\bar{x}}/p^{n}\mathfrak{S}^{1}_{\bar{x}}.$$

4.1.7. *Théorème ([23] I.4.3). — Supposons $p \geq 3$. Soit* X *un* S*-schéma lisse et quasi-projectif. Il existe un isomorphisme canonique $\mathscr{H}^{1}(\mathscr{S}_{1}(1)_{\overline{\mathrm{X}}}) \xrightarrow{\sim} \Psi^{1}$ qui est compatible aux applications symbole $\mathfrak{S}^{1}_{\bar{x}} \to \mathscr{H}^{1}(\mathscr{S}_{1}(1)_{\overline{\mathrm{X}}})_{\bar{x}}$ et $\mathfrak{S}^{1}_{\bar{x}} \to \Psi^{1}_{\bar{x}}$.*

Soit X un S-schéma lisse et quasi-projectif. Soient $\phi_{\overline{\mathrm{X}}_1}$ et $\phi_{\overline{\mathrm{S}}_1}$ les morphismes de Frobenius absolus de $\overline{\mathrm{X}}_1$ et $\overline{\mathrm{S}}_1$, et $\overline{\mathrm{X}}_1^{(p)}$ le schéma défini par le diagramme cartésien:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{X}}_1^{(p)} \arrow[r, "w"] \arrow[d] & \overline{\mathrm{X}}_1 \arrow[d] \\
\overline{\mathrm{S}}_1 \arrow[r, "\phi_{\overline{\mathrm{S}}_1}"'] & \overline{\mathrm{S}}_1
\end{tikzcd}$$

Pour tout entier $q \geq 0$, on désigne par F le morphisme composé

$$\Omega^{q}_{\overline{\mathrm{X}}_1/\overline{\mathrm{S}}_1} \xrightarrow{w^{*}} \Omega^{q}_{\overline{\mathrm{X}}_1^{(p)}/\overline{\mathrm{S}}_1} \longrightarrow \left(\Omega^{q}_{\overline{\mathrm{X}}_1/\overline{\mathrm{S}}_1}\right)/d\left(\Omega^{q-1}_{\overline{\mathrm{X}}_1/\overline{\mathrm{S}}_1}\right)$$

où le second morphisme est induit par l'isomorphisme de Cartier

$$\mathrm{C}^{-1}_{\overline{\mathrm{X}}_1/\overline{\mathrm{S}}_1} : \Omega^{q}_{\overline{\mathrm{X}}_1^{(p)}/\overline{\mathrm{S}}_1} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^{q}\left(\Omega^{\bullet}_{\overline{\mathrm{X}}_1/\overline{\mathrm{S}}_1}\right).$$

Soit c la classe dans $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1} = \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}/p\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}$ d'une racine p-ème de $(-p)$. On pose

$$\mathscr{P} = \operatorname{coker}\left(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1} \xrightarrow{\mathrm{F}-c} \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1}\right),$$

$$\mathscr{Q} = \ker\left(\Omega^{1}_{\overline{\mathrm{X}}_1/\overline{\mathrm{S}}_1} \xrightarrow{\mathrm{F}-1} \left(\Omega^{1}_{\overline{\mathrm{X}}_1/\overline{\mathrm{S}}_1}\right)/d(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1})\right).$$

On note $e(\mathrm{T}) = \sum_{i=0}^{p-1} \mathrm{T}^{i}/i! \in \mathbf{Z}_{p}[\mathrm{T}]$.

4.1.8. *Proposition. — Supposons* $p \geq 3$. *Il existe une suite exacte canonique*

$$(\mathbf{12}) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{P} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{X}}) \xrightarrow{\beta} \mathscr{Q} \longrightarrow 0,$$

telle que pour tout point géométrique $\overline{x}$ *de* $X_{\overline{s}}$, *on ait*

(i) *la fibre* $\alpha_{\overline{x}}$ *se factorise en*

$$\mathscr{P}_{\overline{x}} \xrightarrow{\ \gamma\ } \mathfrak{S}^1_{\overline{x}}/p\mathfrak{S}^1_{\overline{x}} \xrightarrow{\text{symbole}} \mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{X}})_{\overline{x}}$$

et γ *est induit par le morphisme* $\mathscr{O}_{\overline{X}_1,\overline{x}} \to \mathfrak{S}^1_{\overline{x}}/p\mathfrak{S}^1_{\overline{x}}$; $a \mapsto e(-\widetilde{a}(\zeta - 1)^{p-1})$, *où* $\widetilde{a} \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ *est un relèvement de* $a \in \mathscr{O}_{\overline{X}_1,\overline{x}}$ *et* $\zeta \in \overline{K}$ *est une racine primitive p-ème de l'unité.*

(ii) *le composé*

$$\mathfrak{S}^1_{\overline{x}}/p\mathfrak{S}^1_{\overline{x}} \xrightarrow{\text{symbole}} \mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{X}})_{\overline{x}} \longrightarrow \mathscr{Q}_{\overline{x}}$$

est l'unique morphisme qui envoie $a \in \mathscr{O}^{\times}_{\overline{X},\overline{x}}$ *sur* $a^{-1}da \in \mathscr{Q}_{\overline{x}}$.

De plus, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathscr{P} \simeq \operatorname{coker}\Big(\mathscr{H}^0\big(\mathscr{J}^{[1]}_{1,\overline{X}}\big) \xrightarrow{\varphi_1 - 1} \mathscr{H}^0\big(\mathscr{J}^{[0]}_{1,\overline{X}}\big)\Big)$$
$$\mathscr{Q} \simeq \ker\Big(\mathscr{H}^1\big(\mathscr{J}^{[1]}_{1,\overline{X}}\big) \xrightarrow{\varphi_1 - 1} \mathscr{H}^1\big(\mathscr{J}^{[0]}_{1,\overline{X}}\big)\Big)$$

et la suite exacte (12) *s'obtient naturellement à partir du triangle distingué* (11).

Preuve. — Cet énoncé est essentiellement contenu dans [23] Section I.4 bien qu'il ne figure pas sous la forme générale ci-dessus. On explique comment s'y ramener. Il existe au plus une suite exacte (12) vérifiant (i) et (ii). Par conséquent il suffit de la construire étale localement et de recoller. Donc on peut supposer $X = \mathbf{A}^n_{\mathscr{O}_K}$ et même que $\mathscr{O}_K = W$. Dans ce cas, la suite (12) a été construite dans [23] I.4.8 et I.4.10. On pose

$$\mathscr{P}' = \operatorname{coker}\Big(\mathscr{H}^0\big(\mathscr{J}^{[1]}_{1,\overline{X}}\big) \xrightarrow{\varphi_1 - 1} \mathscr{H}^0\big(\mathscr{J}^{[0]}_{1,\overline{X}}\big)\Big)$$
$$\mathscr{Q}' = \ker\Big(\mathscr{H}^1\big(\mathscr{J}^{[1]}_{1,\overline{X}}\big) \xrightarrow{\varphi_1 - 1} \mathscr{H}^1\big(\mathscr{J}^{[0]}_{1,\overline{X}}\big)\Big)$$

et on considère la suite exacte induite par le triangle (11)

$$(\mathbf{13}) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{P}' \xrightarrow{\alpha'} \mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{X}}) \xrightarrow{\beta'} \mathscr{Q}' \longrightarrow 0.$$

Pour montrer que les suites exactes (12) et (13) coïncident, il suffit de le faire étale localement. Donc on peut supposer que $X = \mathbf{A}^n_{\mathscr{O}_K}$ et $\mathscr{O}_K = W$. Dans ce cas, le résultat a été démontré dans [23] I.4.8 et I.4.10. □

4.1.9. *Proposition. — Supposons* $p \geq 3$. *Soient* X *un* S*-schéma lisse et projectif et* $t = (p-1)/p$.

(i) *Le morphisme* $\mathrm{F} - c : \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1} \to \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1}$ *se factorise en un morphisme* $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_t} \to \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1}$ *et on a une suite exacte*

$$(\mathrm{E}) : \qquad 0 \longrightarrow \mathbf{F}_p \longrightarrow \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_t} \xrightarrow{\mathrm{F}-c} \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1} \longrightarrow \mathscr{P} \longrightarrow 0.$$

De plus, il existe un diagramme commutatif

$$(\mathbf{14}) \qquad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}}) \arrow[r] & \mathscr{H}^0\big(\mathscr{J}^{[1]}_{1,\overline{\mathrm{X}}}\big) \arrow[r, "\varphi_1 - 1"] & \mathscr{H}^0\big(\mathscr{J}^{[0]}_{1,\overline{\mathrm{X}}}\big) \arrow[r] & \mathscr{P} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{F}_p \arrow[r] \arrow[u, "\rho_3"] & \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_t} \arrow[r, "\mathrm{F}-c"] \arrow[u, "\rho_2"] & \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1} \arrow[r] \arrow[u, "\rho_1"] & \mathscr{P} \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

où ρ_3 *est un isomorphisme.*

(ii) *Soient* $\delta_{\mathrm{E}} : \mathrm{H}^0(\overline{\mathrm{X}}_1, \mathscr{P}) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathbf{F}_p)$ *le cup-produit avec la classe de* (E) *dans* $\mathrm{Ext}^2(\mathscr{P}, \mathbf{F}_p)$, *et* $d_2^{0,1} : \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \Psi^1)(-1) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathbf{F}_p)$ *le morphisme donné par la suite spectrale des cycles evanescents*

$$\mathrm{E}_2^{\ell,t} = \mathrm{H}^\ell\big(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \Psi^t\big)(-t) \Rightarrow \mathrm{H}^{\ell+t}(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}).$$

Alors, il existe $\zeta \in \overline{\mathrm{K}}$ *une racine primitive* p*-ème de l'unité telle que le composé*

$$\mathrm{H}^0(\overline{\mathrm{X}}_1, \mathscr{P}) \longrightarrow \mathrm{H}^0\big(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}})\big) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{H}^0\big(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \Psi^1\big)$$

$$\xrightarrow{d_2^{0,1}(1)} \mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathbf{F}_p)(1)$$

coïncide avec $\zeta\delta_{\mathrm{E}}$, *où l'isomorphisme central est donné par le théorème* 4.1.7.

(iii) *Supposons* $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, *alors on a l'égalité*

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbf{F}_p} \mathrm{H}^1(\overline{\mathrm{X}}_1, \mathbf{F}_p) + \dim_{\mathbf{F}_p} \ker\Big(\mathrm{H}^0(\overline{\mathrm{X}}_1, \mathscr{P}) \xrightarrow{\delta_{\mathrm{E}}} \mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{X}}_1, \mathbf{F}_p)\Big) \\
= \dim_{\mathbf{F}_p} \ker\Big(\mathrm{H}^1(\overline{\mathrm{X}}_1, \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_t}) \xrightarrow{\mathrm{F}-c} \mathrm{H}^1(\overline{\mathrm{X}}_1, \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1})\Big).
\end{aligned}$$

Preuve. — (i) Soient $b \in \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1}$ la classe d'une racine $p(p-1)$-ème de $(-p)$ dans $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}$, et $\mathbf{F}_p \to \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1}$ le morphisme défini par $x \mapsto xb$. On en déduit un morphisme $\mathbf{F}_p \to \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_t}$ et on vérifie facilemment que la suite (E) est exacte.

Pour construire (14), on commence par construire un diagramme commutatif

$$(\mathbf{15}) \qquad \begin{tikzcd}
\mathscr{H}^0\big(\mathscr{J}^{[1]}_{1,\overline{\mathrm{X}}}\big) \arrow[r, "\varphi_1 - 1"] & \mathscr{H}^0\big(\mathscr{J}^{[0]}_{1,\overline{\mathrm{X}}}\big) \arrow[r] & \mathscr{P} \arrow[r] & 0 \\
\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1} \arrow[r, "\mathrm{F}-c"] \arrow[u, "\tilde{\rho}_2"] & \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1} \arrow[r] \arrow[u, "\rho_1"] & \mathscr{P} \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

On fixe une pro-présentation syntomique admissible de $\overline{\mathrm{X}}$ sur W, de sorte que $\mathscr{J}^{[0]}_{1,\overline{\mathrm{X}}}$ soit la classe du complexe $\varinjlim \mathfrak{J}^{[0]}_{1,\mathrm{X}_\mathrm{L},\mathrm{Z}_\mathrm{L}}$ dans $\mathrm{D}((\overline{\mathrm{X}}_1)_{\mathrm{et}})$. Pour chaque L, on désigne par $\mathrm{D}_{\mathrm{L},1}$ l'enveloppe à puissances divisées de $\mathrm{X}_{\mathrm{L},1}$ dans $\mathrm{Z}_{\mathrm{L},1}$ et par $\mathrm{J}_{\mathrm{D}_{\mathrm{L},1}}$ l'idéal qui définit $\mathrm{X}_{\mathrm{L},1}$ comme fermé de $\mathrm{D}_{\mathrm{L},1}$. Le Frobenius absolu de $\mathrm{D}_{\mathrm{L},1}$ induit un morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{D}_{\mathrm{L},1}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{D}_{\mathrm{L},1}}$, qui s'annule sur l'idéal à puissances divisées $\mathrm{J}_{\mathrm{D}_{\mathrm{L},1}}$. On en déduit facilement un morphisme de complexes $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathrm{L},1}}[0] \to \mathfrak{J}^{[0]}_{1,\mathrm{X}_\mathrm{L},\mathrm{Z}_\mathrm{L}}$. En passant à la limite, on obtient un morphisme $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1}[0] \to \mathscr{J}^{[0]}_{1,\overline{\mathrm{X}}}$ dans $\mathrm{D}((\overline{\mathrm{X}}_1)_{\mathrm{et}})$, et on définit ρ_1 comme le $\mathscr{H}^0$ de ce dernier.

On observe qu'on a un morphisme naturel de faisceaux étales sur $\overline{\mathrm{X}}_1$

$$h : \mathrm{H}^0\big(\overline{\mathrm{S}}_1, \mathscr{J}^{[1]}_{1,\overline{\mathrm{S}}}\big) \otimes_k \mathscr{H}^0\big(\mathscr{J}^{[0]}_{1,\overline{\mathrm{X}}}\big) \to \mathscr{H}^0\big(\mathscr{J}^{[1]}_{1,\overline{\mathrm{X}}}\big).$$

Par ailleurs, il existe un morphisme canonique ([23] I.4.5)

$$\theta : \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1} = \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}/p\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}} \to \mathrm{H}^0\big(\overline{\mathrm{S}}_1, \mathscr{J}^{[0]}_{1,\overline{\mathrm{S}}}\big).$$

et $\theta(c) \in \mathrm{H}^0(\overline{\mathrm{S}}_1, \mathscr{J}^{[1]}_{1,\overline{\mathrm{X}}})$. On prend $\widetilde{\rho}_2 = h \circ (\theta(c).\rho_1)$. La commutativité de (15) se vérifie étale localement. Donc on peut supposer $\mathrm{X} = \mathbf{A}^n_{\mathscr{O}_\mathrm{K}}$ et $\mathscr{O}_\mathrm{K} = \mathrm{W}$. Dans ce cas, la commutativité de (15) a été démontrée dans [23] I.4.8. Par le même argment, on montre que $\widetilde{\rho}_2$ se factorise par le morphisme naturel $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1} \to \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_t}$. On en déduit alors le diagramme commutatif (14). Le composé des isomorphismes $\mathscr{H}^0(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}}) \simeq \mathscr{H}^0(\mathscr{S}_1(0)_{\overline{\mathrm{X}}})(1)$ ([23] I.4.3 (2)) et $\mathscr{H}^0(\mathscr{S}_1(0)_{\overline{\mathrm{X}}}) \simeq \Psi^0 = \mathbf{F}_p$ ([23] I.4.3 (1)) est un isomorphisme $\mathscr{H}^0(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}}) \simeq \mathbf{F}_p(1)$. On vérifie étale localement que ρ_3 n'est pas nul. Donc ρ_3 est un isomorphisme.

(ii) Il existe un isomorphisme dans $\mathrm{D}((\mathrm{X}_{\bar{s}})_{\mathrm{et}})$

$$\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}} \longrightarrow \tau_{\leq 1}\bar{i}^*\mathrm{R}\bar{j}_*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1))$$

qui induit l'isomorphisme $\mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}}) \xrightarrow{\sim} \Psi^1$ du théorème 4.1.7. On en déduit un isomorphisme des suites spectrales

$$\begin{aligned} {}'\mathrm{E}_2^{\ell,t} &= \mathrm{H}^\ell\big(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathscr{H}^t(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}})\big) \Rightarrow \mathrm{H}^{\ell+t}(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}}) \\ {}''\mathrm{E}_2^{\ell,t} &= \mathrm{H}^\ell\big(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathscr{H}^t\big(\tau_{\leq 1}\bar{i}^*\mathrm{R}\bar{j}_*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1))\big)\big) \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \mathrm{H}^{\ell+t}\big(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \tau_{\leq 1}\bar{i}^*\mathrm{R}\bar{j}_*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(1))\big). \end{aligned}$$

Or $\mathrm{E}_2^{\ell,t} = {}''\mathrm{E}_2^{\ell,t}(-1)$ pour $0 \leq t \leq 1$. Donc il suffit de montrer que δ_E coïncide avec le composé

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^0(\overline{\mathrm{X}}_1, \mathscr{P}) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}})) \arrow[r, "{}'d_2^{0,1}"] & \mathrm{H}^2\big(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathscr{H}^0(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}})\big) \\ & & \arrow[r, "\rho_3^{-1}"] & \mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \mathbf{F}_p). \end{tikzcd}$$

Par le lemme 4.1.10, on associe à $\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}}$ une classe canonique

$$\mathrm{cl}(\mathrm{F}) \in \mathrm{Ext}^2(\mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}}), \mathscr{H}^0(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{X}}})),$$

et $'d_2^{0,1}$ est le cup-produit avec cette classe. L'assertion recherchée découle alors du lemme 4.1.10 et de (14).

(iii) Soit $\mathscr{K}$ le faisceau défini par les suites exactes $0 \to \mathbf{F}_p \to \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_t} \to \mathscr{K} \to 0$ et $0 \to \mathscr{K} \to \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1} \to \mathscr{P} \to 0$. L'égalité s'obtient facilement à partir des suites exactes longues de cohomologies associées a ces suites exactes courtes.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_p \arrow[r, hook] & \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_t} \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "\mathrm{F}-c"'] & \mathrm{H}^0(\mathscr{K}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{H}^1(\mathbf{F}_p) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_t}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathscr{K}) \\
 & & \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1} \arrow[d] & & & \\
 & & \mathrm{H}^0(\mathscr{P}) \arrow[d] & & & \\
 & & \mathrm{H}^1(\mathscr{K}) \arrow[d] & & & \\
 & & \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{X}}_1}) & & &
\end{tikzcd}$$

□

4.1.10. *Lemme. — Soit* $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B} \xrightarrow{u} \mathrm{C} \xrightarrow{+1}$ *un triangle distingué dans la catégorie dérivée* $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ *d'une catégorie abélienne* $\mathscr{C}$. *On suppose* $\mathscr{H}^i(\mathrm{A}) = \mathscr{H}^i(\mathrm{B}) = \mathscr{H}^i(\mathrm{C}) = 0$ *pour* $i < 0$. *On définit* P *par la suite exacte*

$$(\mathrm{E}) : 0 \longrightarrow \mathscr{H}^0(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathscr{H}^0(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathscr{H}^0(\mathrm{C}) \longrightarrow \mathrm{P} \longrightarrow 0,$$

et on note $j : \mathrm{P} \to \mathscr{H}^1(\mathrm{A})$ *l'injection canonique. Soient* $(\mathrm{I}^i)_{i\geq 0}$ *un complexe de* $\mathscr{C}$ *et* $\mathrm{A} \simeq \mathrm{I}^\bullet$ *un isomorphisme dans* $\mathrm{D}(\mathscr{C})$. *Alors, la suite exacte*

$$(\mathrm{F}) : 0 \longrightarrow \mathscr{H}^0(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{I}^0 \longrightarrow \mathrm{I}^1_{d=0} \longrightarrow \mathscr{H}^1(\mathrm{A}) \longrightarrow 0$$

définit une classe $\mathrm{cl}(\mathrm{F}) \in \mathrm{Ext}^2(\mathscr{H}^1(\mathrm{A}), \mathscr{H}^0(\mathrm{A}))$ *qui ne dépend que de* A, *et on a* $j^*\mathrm{cl}(\mathrm{F}) = \mathrm{cl}(\mathrm{E})$ *dans* $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{P}, \mathscr{H}^0(\mathrm{A}))$.

Preuve. — Le fait que $\mathrm{cl}(\mathrm{F}) \in \mathrm{Ext}^2(\mathscr{H}^1(\mathrm{A}), \mathscr{H}^0(\mathrm{A}))$ ne dépend que de A est évident. Soient $(\mathrm{J}^i)_{i\geq 0}$ et $(\mathrm{K}^i)_{i\geq 0}$ des complexes de $\mathscr{C}$, $\mathrm{B} \simeq \mathrm{J}^\bullet$ et $\mathrm{C} \simeq \mathrm{K}^\bullet$ des isomorhismes dans $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ et $v : \mathrm{J}^\bullet \to \mathrm{K}^\bullet$ un morphisme de complexes qui relève u. On peut supposer que $\mathrm{I}^\bullet$ est la fibre de v. On a $\mathrm{I}^0 = \mathrm{J}^0$, $\mathrm{I}^1 = \mathrm{J}^1 \oplus \mathrm{K}^0$ et $\mathrm{I}^1_{d=0} = \{(x, y) \in \mathrm{J}^1 \oplus \mathrm{K}^0 | dx = 0 \text{ et } u(x) = dy\}$. Le lemme découle alors du diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0(\mathrm{A}) \arrow[r] & \mathrm{I}^0 \arrow[r] & \mathrm{I}^1_{d=0} \arrow[r] & \mathscr{H}^1(\mathrm{A}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0(\mathrm{A}) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathrm{J}^0_{d=0} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{K}^0_{d=0} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{P} \arrow[r] \arrow[u, "j"'] & 0
\end{tikzcd}$$

□

5. Invariant de Hasse

5.1. On suppose K de caractéristique 0. Pour tout nombre rationnel $t > 0$, on pose $\overline{\mathrm{S}}_t = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}/\mathfrak{n}_t)$ où $\mathfrak{n}_t = \{x \in \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}; v_p(x) \geq t\}$. Soient M un $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1}$-module libre de rang d et $\varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ un endomorphisme semi-linéaire par-rapport au Frobenius absolu de $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1}$. On dit que M est un φ-$\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1}$-module de rang d. L'ensemble $\varphi(\mathrm{M})$ est un sous-$\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1}$-module de M et il existe des nombres rationnels $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_d \leq 1$, appelés pentes de Hodge de M, tels que

$$\mathrm{M}/\varphi(\mathrm{M}) \simeq \oplus_{i=1}^d \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}/\mathfrak{n}_{a_i}.$$

On définit la hauteur de Hodge de M comme la somme de ses pentes de Hodge. Pour tout nombre rationnel $0 \leq t \leq 1$, on pose $\mathrm{M}_t = \mathrm{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1}} \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_t}$.

5.1.1. *Proposition. — Soit* $\lambda \in \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}$ *de valuation* $v = v_p(\lambda) < (p-1)/p$, *et* $\overline{\lambda} \in \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1}$ *sa classe. Pour tout entier* $d \geq 1$, *il existe un nombre rationnel* $b(d, v) > 0$ *vérifiant la propriété suivante:*

(P) *pour tout* φ-$\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_1}$*-module* M *de rang* d *dont la hauteur de Hodge est plus petite que* $b(d, v)$, *le morphisme* $\varphi - \overline{\lambda} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ *se factorise à travers le morphisme canonique* $\mathrm{M} \to \mathrm{M}_{1-v}$ *et le noyau*

$$(\mathrm{M}_{1-v})^{\varphi - \overline{\lambda}} = \ker\left(\varphi - \overline{\lambda} : \mathrm{M}_{1-v} \longrightarrow \mathrm{M}\right)$$

est un $\mathbf{F}_p$*-espace vectoriel de dimension* d.

Preuve. — Soient $\underline{\mathrm{X}} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d)$ une multivariable et $\underline{\mathrm{X}}^p = (\mathrm{X}_1^p, \ldots, \mathrm{X}_d^p)$. Si $t > 0$ est un nombre rationnel et $\mathrm{E} \subset \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}{}^d$, on désigne par $\mathrm{cl}_t(\mathrm{E})$ l'image de E par le morphisme naturel $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}{}^d \to \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_t}{}^d = (\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}/\mathfrak{n}_t)^d$. Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{d \times d}(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}})$ une matrice de taille $d \times d$ à coefficients dans $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}$. On note

$$\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}} \bmod p^t) := \left\{\underline{x} \in \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}{}^d \mid \mathrm{U}\underline{x}^p - \lambda\underline{x} \in \mathfrak{n}_t\right\},$$

$$\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}}) := \left\{\underline{x} \in \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}{}^d \mid \mathrm{U}\underline{x}^p = \lambda\underline{x}\right\}.$$

On a $1 - v > 1/p$. Donc le morphisme naturel $(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_{1-v}})^d \to (\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{S}}_{1/p}})^d$ induit une bijection

$$\mathrm{cl}_{1-v}\big(\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}} \mod p)\big) \overset{\sim}{\to} \mathrm{cl}_{1/p}\big(\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}} \mod p)\big).$$

En effet, ces ensembles sont des $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel. Donc il suffit d'observer que si $\underline{x} \in \mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}} \mod p) \cap (\mathfrak{n}_{1/p})^d$, alors $\underline{x} \in (\mathfrak{n}_{1-v})^d$. On en déduit que la proposition est équivalente à l'existence d'un nombre rationnel $b(d,v) > 0$ vérifiant la propriété suivante:

(P') Pour toute matrice $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{d\times d}(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}})$ telle que $v_p(\det(\mathrm{U})) \leq b(d,v)$, l'ensemble $\mathrm{cl}_{1/p}(\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}} \mod p))$ est fini de cardinal p^d.

5.1.2. *Lemme. — Soient* $0 < \varepsilon \leq v/(p-1)$ *un nombre rationnel,* $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{d\times d}(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}})$ *et* $\underline{x} \in \mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}} \mod p)$. *Si* $v_p(\det(\mathrm{U})) \leq \varepsilon(p-1)$, *alors*

$$v_p(\underline{x}) := \inf_j v_p(x_j) \geq v(\varepsilon) := v/(p-1) - \varepsilon.$$

Preuve. — Soient $\mathrm{V} \in \mathrm{M}_{d\times d}(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}})$ telle que $\mathrm{VU} = \mathrm{UV} = \det(\mathrm{U})\mathrm{I}$ et $\underline{y} \in (\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}})^d$ tel que $\mathrm{U}\underline{x}^p = \lambda\underline{x} + p\underline{y}$. Si $v_p(x_i) = v_p(\underline{x})$, alors la relation

$$\underline{x}^p = \frac{\lambda}{\det(\mathrm{U})}\mathrm{V}\underline{x} + \frac{p}{\det(\mathrm{U})}\mathrm{V}\underline{y}$$

implique que $pv_p(x_i) \geq \inf(v - \varepsilon(p-1) + v_p(x_i), 1 - \varepsilon(p-1))$. Par hypothèse, on a $1 - \varepsilon(p-1) \geq pv(\varepsilon)$, et si $pv_p(x_i) \geq v - \varepsilon(p-1) + v_p(x_i)$, alors $v_p(x_i) \geq v(\varepsilon)$. □

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre rationnel tel que

$$(\mathbf{16}) \qquad \left\{\begin{array}{ccc} \varepsilon & \leq & v/(p-1) \\ \varepsilon(d-1)(p-1) & \leq & 1 - v - 1/p \\ \varepsilon(2d(p-1) - p) & < & 1 - pv/(p-1) \end{array}\right.$$

Soient $\alpha \in \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}$ de valuation $v_p(\alpha) = v(\varepsilon)$, et $\lambda' = \lambda/\alpha^{p-1}$ qui est donc de valuation $v_p(\lambda') = \varepsilon(p-1)$. Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{d\times d}(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}})$ telle que $v_p(\det(\mathrm{U})) \leq \varepsilon(p-1)$. Par le lemme 5.1.2, le morphisme $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}^d \to \mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}}^d$, $\underline{x} \mapsto \alpha\underline{x}$ induit une bijection

$$\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda'\underline{\mathrm{X}} \mod p^{1-pv(\varepsilon)}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}} \mod p).$$

Soit $\delta = 1 - v - v(\varepsilon) - [1 - pv(\varepsilon) - d(p-1)\varepsilon] = (d-1)(p-1)\varepsilon$. Noter que (16) implique que $1 - pv(\varepsilon) - d(p-1)\varepsilon > 0$. On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{cl}_{1-v-v(\varepsilon)}(\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda'\underline{\mathrm{X}} \mod p^{1-pv(\varepsilon)})) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(*)"'] & \mathrm{cl}_{1-v}(\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}} \mod p)) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{cl}_{1-v-v(\varepsilon)-\delta}(\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda'\underline{\mathrm{X}} \mod p^{1-pv(\varepsilon)})) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{cl}_{1-v-\delta}(\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}} \mod p)) \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \mathrm{cl}_{1/p}(\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda\underline{\mathrm{X}} \mod p))
\end{tikzcd}$$

Par conséquent $(*)$ est une bijection. Le lemme suivant montre que (P') est vérifiée pour $b(d, v) = (p-1)\varepsilon$.

5.1.3. *Lemme.* — *Soient* $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{d\times d}(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}})$ *et* $\varepsilon > 0$ *un nombre rationnel vérifiant les hypothèses* (16). *Si* $v_p(\det(\mathrm{U})) \leq \varepsilon(p-1)$, *alors l'ensemble* $\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda'\underline{\mathrm{X}})$ *est fini de cardinal* p^d *et l'application*

$$\mathrm{cl}_{1-pv(\varepsilon)-d(p-1)\varepsilon}(\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda'\underline{\mathrm{X}})) \\ \to \mathrm{cl}_{1-pv(\varepsilon)-d(p-1)\varepsilon}(\mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda'\underline{\mathrm{X}} \mod p^{1-pv(\varepsilon)}))$$

est une bijection d'ensembles finis de cardinal p^d.

Preuve. — Soit $\mathrm{V} \in \mathrm{M}_{d\times d}(\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{K}}})$ telle que $\mathrm{UV} = \mathrm{VU} = \det(\mathrm{U})\mathrm{I}$. Résoudre le système $\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p = \lambda'\underline{\mathrm{X}}$ revient à résoudre $\underline{\mathrm{X}}^p = (\lambda'/\det(\mathrm{U}))\mathrm{V}\underline{\mathrm{X}}$. Ces dernières équations définissent une algèbre finie étale sur $\overline{\mathrm{K}}$ de degré p^d. Dons il suffit de voir que toutes ses solutions sont entières. Si $\underline{x}$ est une solution et $v_p(x_i) = v_p(\underline{x}) < 0$, alors

$$pv_p(x_i) < v_p(x_i) \leq v_p\left(\frac{\lambda'}{\det(\mathrm{U})}\sum_j v_{i,j}x_j\right),$$

ce qui est absurde. On a $2d(p-1)\varepsilon < 1 - pv(\varepsilon)$. Donc l'application de l'énoncé est bijective par [17] Lemme 2 (en remplaçant $\overline{\mathrm{K}}$ par une extension finie de K suffisament grande). Reste à voir que la source a pour cardinal p^d. Soient $\underline{x} \neq \underline{y} \in \mathrm{Sol}(\mathrm{U}\underline{\mathrm{X}}^p - \lambda'\underline{\mathrm{X}})$ et $1 \leq i \leq d$ tels que $v_p(x_i - y_i) = v_p(\underline{x} - \underline{y})$. En écrivant un développement de Taylor, on voit que la relation $\mathrm{U}(\underline{x}^p - \underline{y}^p) = \lambda'(\underline{x} - \underline{y})$ implique que

$$\varepsilon(p-1) + v_p(x_i - y_i) \geq \inf(1 + v_p(x_i - y_i), 2v_p(x_i - y_i)).$$

Or $\varepsilon(p-1) < 1$, donc $v_p(x_i - y_i) \leq \varepsilon(p-1)$. Par ailleurs, par (16) on a $\varepsilon(p-1) < 1 - pv(\varepsilon) - d(p-1)\varepsilon$. D'où $\mathrm{cl}_{1-pv(\varepsilon)-d(p-1)\varepsilon}(\underline{x}) \neq \mathrm{cl}_{1-pv(\varepsilon)-d(p-1)\varepsilon}(\underline{y})$. □

6. Sous-groupe canonique

6.1. On suppose K de caractéristique 0 à corps résiduel k parfait de caractéristique $p \geq 3$. On note $e = v(p)$ l'indice de ramification absolu de K et $j = e/(p-1)$. Soient A un S-schéma abélien et ${}_p\mathrm{A}$ le noyau de la multiplication par p. Les résultats des sections 3 et 4 nous permettent de décrire le cran ${}_p\mathrm{A}^{j+}$ de la filtration canonique de ${}_p\mathrm{A}$. Plus précisement, on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{H}^0(\overline{\mathrm{A}}_1, \mathscr{P})(-1) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{H}^1(\mathrm{A}_{\overline{\eta}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \arrow[r, "u"] \arrow[drr, "\theta(-1)"'] & \mathrm{H}^0\big(\mathrm{A}_{\overline{s}}, \Psi^1\big)(-1) \arrow[r, "v", "\sim"'] & \mathrm{H}^0\big(\mathrm{A}_{\overline{s}}, \mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{A}}})\big)(-1) \arrow[d] \\
 & & \mathrm{H}^0(\overline{\mathrm{A}}_1, \mathscr{Q})(-1)
\end{tikzcd}$$

où u est défini par la suite exacte (3), v est induit par l'isomorphisme $\mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{A}}}) \simeq \Psi^1$ du théorème 4.1.7 et $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont définis dans la proposition 4.1.8. On a $\mathscr{P} \simeq \mathrm{U}^e\Psi^1$ sous l'isomorphisme $\mathscr{H}^1(\mathscr{S}_1(1)_{\overline{\mathrm{A}}}) \simeq \Psi^1$. Par le théorème 3.1.2 on a

$$({\bf 17}) \qquad {}_p\mathrm{A}^{j+}(\overline{\mathrm{K}})^{\perp} = (v \circ u)^{-1}\left(\mathrm{H}^0(\overline{\mathrm{A}}_1, \mathscr{P})(-1)\right) = \ker(\theta(-1)).$$

Preuve du théorème 1.2.1. — Grâce à (17) et à la proposition 4.1.9 (ii), il suffit de prouver l'égalité

$$\dim_{\mathbf{F}_p} \mathrm{H}^1(\mathrm{A}_{\overline{s}}, \mathbf{F}_p) + \dim_{\mathbf{F}_p} \ker\left(\mathrm{H}^0(\overline{\mathrm{A}}_1, \mathscr{P}) \xrightarrow{\delta_{\mathrm{E}}} \mathrm{H}^2(\mathrm{A}_{\overline{s}}, \mathbf{F}_p)\right) = g.$$

Le théorème découle alors des propositions 4.1.9 (iii) et 5.1.1. La borne explicite se déduit de (16). □

6.1.1. *Remarque.* — Soient $\hat{\mathrm{A}}$ le S-schéma abélien dual de A et ${}_p\hat{\mathrm{A}}$ le noyau de la multiplication par p, qui est canoniquement isomorphe au dual de Cartier de ${}_p\mathrm{A}$. On définit classiquement l'homomorphisme ([19] Section 4)

$$d\log_{\overline{\mathrm{A}}_1} : {}_p\hat{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{S}}_1) \longrightarrow \mathrm{H}^0\big(\overline{\mathrm{A}}_1, \Omega^1_{\overline{\mathrm{A}}_1/\overline{\mathrm{S}}_1}\big).$$

Une section $\rho \in {}_p\hat{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{S}}_1)$ est un homomorphisme $\rho : {}_p\overline{\mathrm{A}}_1 \to \mathbf{G}_{m,\overline{\mathrm{S}}_1}$. On lui associe $d\log_{\overline{\mathrm{A}}_1}(\rho) = \rho^*(dt/t) \in \mathrm{H}^0({}_p\overline{\mathrm{A}}_1, \Omega^1_{{}_p\overline{\mathrm{A}}_1/\overline{\mathrm{S}}_1})$, où dt/t est la différentielle logarithmique canonique de $\mathbf{G}_{m,\overline{\mathrm{S}}_1}$. On note que l'inclusion ${}_p\overline{\mathrm{A}}_1 \subset \overline{\mathrm{A}}_1$ induit un isomorphisme

$H^0({}_p\overline{A}_1, \Omega^1_{{}_p\overline{A}_1/\overline{S}_1}) \simeq H^0(\overline{A}_1, \Omega^1_{\overline{A}_1/\overline{S}_1})$. Les auteurs de cet article se demandent si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
{}_p\hat{A}(\overline{K}) \arrow[r, "c", "\sim"'] \arrow[d, equal] & H^1(A_{\overline{\eta}}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})(1) \arrow[r, "\theta"] & H^0(\overline{A}_1, \mathscr{Q}) \arrow[d, hook, "\iota"] \\
{}_p\hat{A}(\mathscr{O}_{\overline{K}}) \arrow[r, "r"] & {}_p\hat{A}(\overline{S}_1) \arrow[r, "d\log_{\overline{A}_1}"] & H^0\big(\overline{A}_1, \Omega^1_{\overline{A}_1/\overline{S}_1}\big)
\end{tikzcd}$$

où c est l'isomorphisme canonique, r est la reduction modulo p et ι est l'inclusion induite par la définition de $\mathscr{Q}$. Si c'est le cas, alors ${}_pA^{j+}(\overline{K})^{\perp} = \ker(d\log_{\overline{A}_1} \circ r)$ et on pourrait dire que le sous-groupe ${}_pA^{j+}$ fournit une sorte de décomposition de Hodge-Tate de ${}_pA$ dans l'esprit de [19] Section 4.

Soit G un S-schéma semi-abélien (i.e. un S-schéma en groupes séparé commutatif lisse à fibres géométriquement connexes tel que chaque fibre est une extension d'une variété abélienne par un tore), de fibre générique G_η une K-variété abélienne de dimension g. On désigne par $0 \to T \to \widetilde{G} \to A \to 0$ l'extension de Raynaud de G ([28] IV.2). Soient ${}_pG$ et ${}_p\widetilde{G}$ les noyaux de la multiplication par p respectivement sur G et sur $\widetilde{G}$. Comme tout schéma quasi-fini et plat sur S, ${}_pG$ se décompose en ${}_pG = {}_pG^f \amalg {}_pG'$ où ${}_pG^f$ est fini et plat sur S et ${}_pG'$ est quasi-fini de fibre spéciale vide ([28] IV.1). De plus ${}_pG^f$ est un S-schéma en groupes et on a un isomorphisme canonique ${}_pG^f \simeq {}_p\widetilde{G}$. Soit $({}_p\widetilde{G}^a, a \in \mathbf{Q}_{\geq 0})$ la filtration canonique de ${}_p\widetilde{G}$.

6.1.2. *Corollaire. — On suppose* $p \geq 3$ *et on fixe les notations comme ci-dessus. Soient* $e = v(p)$ *l'indice de ramification absolu de* K *et* $j = e/(p-1)$. *Si la hauteur de Hodge de* $H^1(A_1, \mathscr{O}_{A_1})$ *est strictement plus petite que*

$$\inf\left(\frac{1}{p(p-1)}, \frac{p-2}{(p-1)(2g(p-1)-p)}\right),$$

alors le cran ${}_p\widetilde{G}^{j+}$ *est fini et plat sur* S *de rang* p^g.

Preuve. — On a une suite exacte $0 \to {}_pT \to {}_p\widetilde{G} \to {}_pA \to 0$ des noyaux des multiplications par p. Elle induit la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_pT^{j+}(\overline{K}) \longrightarrow {}_p\widetilde{G}^{j+}(\overline{K}) \longrightarrow {}_pA^{j+}(\overline{K}) \longrightarrow 0.$$

En effet, l'exactitude au centre découle de l'égalité ${}_pT^{j+} = {}_pT$ (noter que $c(\mu_p/\mathscr{O}_K) = ep/(p-1)$), et la surjectivité est une conséquence du lemme 2.3.2. Le corollaire découle alors du théorème 1.2.1. □

7. Formule des traces de Dwork-Monsky

7.1. Soient $q = p^s$, $k = \mathbf{F}_q$, $\mathrm{W} = \mathrm{W}(k)$ et K_0 le corps de fractions de W. On désigne par σ l'endomorphisme de Frobenius agissant sur k, W et K_0. Soient P un W-schéma formel quasi-compact et admissible (i.e. topologiquement de type fini et plat sur W) et $\mathrm{Y} = \mathrm{P} \otimes_{\mathrm{W}} k$. Soient $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ un sous-schéma ouvert et Q le sous-schéma formel ouvert de P de fibre spéciale X. On note $j : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ l'immersion ouverte, $\mathrm{Z} = (\mathrm{Y} - \mathrm{X})_{\mathrm{red}}$ le fermé complémentaire et F_{X} le q-Frobenius de X (i.e. la puissance s-ème de son Frobenius absolu). On considère le faisceau $j^\dagger \mathscr{O}_{]\mathrm{Y}[}$ de germes de sections de $\mathscr{O}_{]\mathrm{Y}[}$ surconvergentes le long de Z ([3] 2.1).

7.1.1. *Définition.* — *Un relèvement de* F_{X} *surconvergent le long de* Z *est donné par*

(i) *un* W-*endomorphisme* $\phi : \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}$ *qui relève* F_{X};

(ii) *un voisinage strict* V *de*]X[*dans*]Y[*et un* K_0-*morphisme rigide* $\varphi : \mathrm{V} \to]\mathrm{Y}[$ *tels que* $\varphi(]\mathrm{X}[) \subset]\mathrm{X}[$ *et* $\varphi|_{]\mathrm{X}[} = \phi \otimes_{\mathrm{W}} \mathrm{K}_0$.

7.1.2. *Lemme.* — *Soient* $(\phi, \mathrm{V}, \varphi : \mathrm{V} \to]\mathrm{Y}[)$ *un relèvement de* F_{X} *surconvergent le long de* Z *et* $\mathrm{Q}' \subset \mathrm{Q}$ *un ouvert formel de fibre spéciale* $\mathrm{X}' = \mathrm{Q}' \otimes_{\mathrm{W}} k$. *Alors* $\phi(\mathrm{Q}') \subset \mathrm{Q}'$ *et* $(\phi|_{\mathrm{Q}'}, \mathrm{V}, \varphi : \mathrm{V} \to]\mathrm{Y}[)$ *est un relèvement du q-Frobenius de* X′ *surconvergent le long de* $(\mathrm{Y} - \mathrm{X}')_{\mathrm{red}}$.

Preuve. — L'inclusion $\phi(\mathrm{Q}') \subset \mathrm{Q}'$ découle de $\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}') \subset \mathrm{X}'$ et le reste du lemme du fait que V est un voisinage strict de]X′[dans]Y[. □

Soit $(\phi, \mathrm{V}, \varphi : \mathrm{V} \to]\mathrm{Y}[)$ un relèvement de F_{X} surconvergent le long de Z, qu'on suppose fixé dans la suite de cette section. De plus, on suppose que X est un schéma lisse sur k et Y est un schéma projectif sur k. Par EGA III_1 5.4.5, il existe un W-schéma C projectif et plat sur W dont la complétion p-adique est isomorphe à P. Soient E un W-module libre de type fini, $\mathbf{P}(\mathrm{E}) = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}_{\mathrm{W}}(\mathrm{E}))$ et $\iota : \mathrm{C} \to \mathbf{P}(\mathrm{E})$ une W-immersion fermée. On dit qu'un ouvert affine $\mathrm{U} \subset \mathrm{C}$ est en bonne position pour ι s'il existe $s \in \mathrm{E}$ qui fait partie d'une W-base de E tel que $\mathrm{U} = \iota^{-1}(\mathrm{D}_+(s))$.

7.1.3. *Lemme.* — (i) *Il existe* E *un* W-*module libre de type fini,* $\iota : \mathrm{C} \to \mathbf{P}(\mathrm{E})$ *une* W-*immersion fermée et* $\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n$ *des ouverts affines de* C, *connexes et lisses sur* W, *qui sont en bonne position pour* ι *et tels que les fibres spéciales* $\mathrm{U}_1 \otimes_{\mathrm{W}} k, \dots, \mathrm{U}_n \otimes_{\mathrm{W}} k$ *forment un recouvrement affine de* X.

(ii) *Soient* E *un* W-*module libre de type fini,* $\iota : \mathrm{C} \to \mathbf{P}(\mathrm{E})$ *une* W-*immersion fermée et* $\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n$ *des ouverts affines de* C *qui sont en bonne position pour* ι. *On désigne par* $\iota^{\otimes n} : \mathrm{C} \to \mathbf{P}(\mathrm{E}^{\otimes n})$ *le composé du plongement diagonal* $\mathrm{C} \to \mathbf{P}(\mathrm{E}) \times_{\mathrm{W}} \dots \times_{\mathrm{W}} \mathbf{P}(\mathrm{E})$ *et du plongement de Segre* $\mathbf{P}(\mathrm{E}) \times_{\mathrm{W}} \dots \times_{\mathrm{W}} \mathbf{P}(\mathrm{E}) \to \mathbf{P}(\mathrm{E}^{\otimes n})$. *Alors pour tout* $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, *l'ouvert affine* $\mathrm{U}_{i_1} \cap \dots \cap \mathrm{U}_{i_k}$ *de* C *est en bonne position pour* $\iota^{\otimes n}$.

Preuve. — (i) On explique comment adapter la preuve de [21] II 7.6. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible ample sur C. Pour tout $x \in \mathrm{C}$, soit V un voisinage ouvert affine connexe de x dans C tel que $\mathscr{L}|_{\mathrm{V}} \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{V}}$. Si $x \in \mathrm{X}$, on suppose que $\mathrm{V} \otimes_{\mathrm{W}} k \subset \mathrm{X}$ et V est lisse sur W, ce qui est possible car X est lisse sur k et C est plat sur W. Soit $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_{\mathrm{C}}$ le faisceau d'idéaux du fermé $(\mathrm{C} - \mathrm{V})_{\mathrm{red}} \subset \mathrm{C}$. Il existe un entier $m > 0$ tel que $\mathscr{I} \otimes \mathscr{L}^m$ soit engendré par ses sections. Donc il existe $s \in \mathrm{H}^0(\mathrm{C}, \mathscr{I} \otimes \mathscr{L}^m)$ qui engendre $\mathscr{I} \otimes \mathscr{L}^m$ en x. On considère $s \in \mathrm{H}^0(\mathrm{C}, \mathscr{L}^m)$ via l'inclusion $\mathscr{I} \otimes \mathscr{L}^m \subset \mathscr{L}^m$ et on pose $\mathrm{C}_s = \{y \in \mathrm{C} | s_y \notin \mathfrak{m}_y \mathscr{L}^m_y\}$. Comme V est affine et $\mathscr{L}|_{\mathrm{V}} \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{V}}$, s définit une fonction $f \in \Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{O}_{\mathrm{V}})$ et on a $\mathrm{C}_s = \mathrm{D}(f) \subset \mathrm{V}$. Par quasi-compacité, on peut recouvrir C par de tels ouverts affines $\mathrm{U}_1 = \mathrm{C}_{s_1}, \ldots, \mathrm{U}_{n+r} = \mathrm{C}_{s_{n+r}}$ correspondant à des sections $s_i \in \mathrm{H}^0(\mathrm{C}, \mathscr{L}^{m_i})$, tels que $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n$ soient lisses et leurs fibres spéciales couvrent X. La preuve continue comme dans [21] II 7.6. Pour finir, il suffit d'observer que si $\mathrm{U} = \iota^{-1}(\mathrm{D}_+(s))$ a une fibre spéciale non vide, alors $s \not\equiv 0 \mod p$. Donc s fait partie d'une W-base de E. (ii) est trivial. □

7.1.4. *Proposition.* — *Soient* E *un* W*-module libre de type fini,* $\iota : \mathrm{C} \to \mathbf{P}(\mathrm{E})$ *une* W*-immersion fermée et* U *un ouvert affine de* C*, connexe et lisse sur* W*, qui est en bonne position pour* ι*. On suppose que* $\mathrm{U}_k = \mathrm{U} \otimes_{\mathrm{W}} k \subset \mathrm{X}$*, de sorte que la la complétion* p*-adique* $\hat{\mathrm{U}} = \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ *de* U *soit un ouvert affine formel de* $\mathcal{Q}$*. Par le lemme* 7.1.2*,* $\phi(\hat{\mathrm{U}}) \subset \hat{\mathrm{U}}$ *et* $(\phi|_{\hat{\mathrm{U}}}, \mathrm{V}, \varphi : \mathrm{V} \to]\mathrm{Y}[)$ *est un relèvement du* q*-Frobenius de* U_k *surconvergent le long de* $(\mathrm{Y} - \mathrm{U}_k)_{\mathrm{red}}$*. On note* $h : \mathrm{U}_k \to \mathrm{Y}$ *l'immersion naturelle et* $\phi^* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ *le morphisme induit par* $\phi|_{\hat{\mathrm{U}}}$*. Alors*

(a) $\mathrm{A} = \Gamma(]\mathrm{Y}[, h^\dagger \mathscr{O}_{]\mathrm{Y}[}) \cap \mathscr{A} \subset \Gamma(]\mathrm{U}_k[, h^\dagger \mathscr{O}_{]\mathrm{Y}[}) = \mathscr{A} \otimes_{\mathrm{W}} \mathrm{K}_0$ *est une* W*-algèbre faiblement complète de type fini (fctf) qui relève* $\Gamma(\mathrm{U}_k, \mathscr{O}_{\mathrm{U}_k})$ *([27] I.2.1).*

(b) $\phi^*(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$ *et* ϕ^* *induit un morphisme injectif fini* $\varphi^* : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ *qui relève le* q*-Frobenius de* A/pA*. On note* $\mathrm{A}^{(\varphi^*)}$ *le* A*-module* A *induit par* φ^**. On peut définir un morphisme trace* $\psi : \mathrm{A}^{(\varphi^*)} \to \mathrm{A}$*,* A*-linéaire, qui se prolonge en un morphisme de complexes de de Rham*

$$\psi : \Omega^\bullet_{\mathrm{A}/\mathrm{W}} = \Omega^\bullet_{\mathrm{A}^{(\varphi^*)}/\mathrm{W}} \longrightarrow \Omega^\bullet_{\mathrm{A}/\mathrm{W}}.$$

(c) *pour tout entier* $m \geq 0$*, on a*

$$\mathrm{H}^i\big(]\mathrm{Y}[, h^\dagger \Omega^m_{]\mathrm{Y}[}\big) = \begin{cases} \Omega^m_{\mathrm{A}/\mathrm{W}} \otimes_{\mathrm{W}} \mathrm{K}_0 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

Preuve. — (a) Soit $t_0, t_1, \ldots, t_{\mathrm{N}}$ une W-base de E telle que $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) = \iota^{-1}(\mathrm{D}_+(t_0))$. On en déduit une présentation de type fini $\mathrm{B} = \mathrm{W}[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_{\mathrm{N}}]/\mathrm{I}$. Par [3] (2.1.2.4), on a $\Gamma(]\mathrm{Y}[, h^\dagger \mathscr{O}_{]\mathrm{Y}[}) \simeq \mathrm{B}^\dagger \otimes_{\mathrm{W}} \mathrm{K}_0$, où $\mathrm{B}^\dagger$ est la complétion faible de B. Comme $\mathscr{A}$ est la complétion p-adique de $\mathrm{B}^\dagger$ et le morphisme $\mathrm{B}^\dagger \to \mathscr{A}$

est fidèlement plat, on a $B^\dagger = B^\dagger \otimes_W K_0 \cap \mathscr{A} \subset \mathscr{A} \otimes_W K_0$. Ceci achève la preuve de (a).

(b) Soit V' un voisinage strict de $]U_k[$ dans $]Y[$. Il est évident que $\varphi^{-1}(V')$ est un voisinage strict de $]U_k[$ dans $]Y[$. Par conséquent $\varphi : V \to]Y[$ induit un morphisme $\Gamma(]Y[, h^\dagger \mathscr{O}_{]Y[}) \to \Gamma(]Y[, h^\dagger \mathscr{O}_{]Y[})$, qui est par hypothèse induit par $\phi^* \otimes_W K_0 : \mathscr{A} \otimes_W K_0 \to \mathscr{A} \otimes_W K_0$. On en déduit que $\phi^*(A) \subset A$. Le reste de l'assertion découle de [27] I 8.5.

(c) L'assertion découle de la présentation de B du (a) (voir [4] preuve de 1.10). □

Soient $\iota : C \to \mathbf{P}(E)$ et $U_1, \ldots, U_n$ comme dans le lemme 7.1.3 (i). On remplace ι par $\iota^{\otimes n}$ de sorte que la conclusion du lemme 7.1.3 (ii) soit vérifiée. On en déduit un recouvrement affine de Q par les complétions p-adiques $\hat{U}_i = \mathrm{Spf}(\mathscr{A}_i)$ des U_i. Pour $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$, on pose $\hat{U}_{i_1} \cap \ldots \cap \hat{U}_{i_k} = \mathrm{Spf}(\mathscr{A}_{i_1 \ldots i_k})$ et on désigne par $X_{i_1 \ldots i_k}$ sa fibre spéciale et $j_{i_1 \ldots i_k} : X_{i_1 \ldots i_k} \to Y$ l'immersion correspondante. Par le lemme 7.1.3 (ii) et la proposition 7.1.4, on a $\phi(\hat{U}_{i_1} \cap \ldots \cap \hat{U}_{i_k}) \subset \hat{U}_{i_1} \cap \ldots \cap \hat{U}_{i_k}$ et il existe $A_{i_1 \ldots i_k} \subset \mathscr{A}_{i_1 \ldots i_k}$ une W-algèbre fctf, stable par ϕ^*, qui relève $\Gamma(X_{i_1 \ldots i_k}, \mathscr{O}_X)$. Soient $\varphi^*_{i_1 \ldots i_k} : A_{i_1 \ldots i_k} \to A_{i_1 \ldots i_k}$ la restriction de ϕ^* et $\psi_{i_1 \ldots i_k} : \Omega^\bullet_{A_{i_1 \ldots i_k}/W} \to \Omega^\bullet_{A_{i_1 \ldots i_k}/W}$ la trace. Soit $m \geq 0$ un entier. Par [3] 2.1.8, on a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow j^\dagger \Omega^m_{]Y[} \longrightarrow \prod_i j_i^\dagger \Omega^m_{]Y[} \longrightarrow \prod_{i_1 < i_2} j_{i_1 i_2}^\dagger \Omega^m_{]Y[} \longrightarrow \ldots \longrightarrow j_{1 \ldots n}^\dagger \Omega^m_{]Y[} \longrightarrow 0. \tag{\textbf{18}}$$

On vérifie, grâce à la proposition 7.1.4, que la suite (18) induit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}^\dagger \arrow[r, phantom, ":="] \arrow[d, "\psi"'] & \prod_i \Omega^m_{A_i/W} \otimes_W K_0 \arrow[r] \arrow[d, "\prod_i \psi_i"'] & \prod_{i_1 < i_2} \Omega^m_{A_{i_1 i_2}/W} \otimes_W K_0 \arrow[r] \arrow[d, "\prod_{i_1 < i_2} \psi_{i_1 i_2}"'] & \cdots \arrow[r] & \Omega^m_{A_{1 \ldots n}/W} \otimes_W K_0 \arrow[d, "\psi_{1 \ldots n}"'] \\
\mathfrak{C}^\dagger \arrow[r, phantom, ":="] & \prod_i \Omega^m_{A_i/W} \otimes_W K_0 \arrow[r] & \prod_{i_1 < i_2} \Omega^m_{A_{i_1 i_2}/W} \otimes_W K_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Omega^m_{A_{1 \ldots n}/W} \otimes_W K_0
\end{tikzcd}$$

Par la proposition 7.1.4 (c), on a pour tout entier $\ell \geq 0$, un isomorphisme canonique $H^\ell(]Y[, j^\dagger \Omega^m_{]Y[}) \xrightarrow{\sim} H^\ell(\mathfrak{C}^\dagger)$. On en déduit un morphisme trace, appelé opérateur de Dwork,

$$\psi^\ell : H^\ell\big(]Y[, j^\dagger \Omega^m_{]Y[}\big) \longrightarrow H^\ell\big(]Y[, j^\dagger \Omega^m_{]Y[}\big). \tag{\textbf{19}}$$

On vérifie facilement que ces opérateurs ne dépendent pas du choix des $(U_i)_i$.

Soit $T = \{\tau : \mathrm{Spf}(W) \to Q \; ; \; \phi \circ \tau = \tau\}$, qu'on considère aussi comme un sous-ensemble de $]X[$. Pour chaque $\tau \in T$, ϕ induit un endomorphisme K_0-linéaire de $\tau^* \Omega^i_{]X[}$.

7.1.5. *Proposition (Monsky [26]). — On suppose comme plus haut que* X *est un schéma lisse sur k, de dimension d, et* Y *est un schéma projectif sur k. Alors, les morphismes* (19) *sont nucléaires et on a pour tout entier* $0 \leq m \leq d$

$$\sum_{\ell \geq 0} (-1)^{\ell} \operatorname{tr}\bigl(\psi^{\ell} | \mathrm{H}^{\ell}\bigl(]\mathrm{Y}[, j^{\dagger}\Omega^{m}_{]\mathrm{Y}[}\bigr)\bigr) = \sum_{\tau \in \mathrm{T}} \frac{\operatorname{tr}\bigl(\phi | \tau^{*}\Omega^{d-m}_{]\mathrm{X}[}\bigr)}{\det\bigl(\phi - \mathrm{I} | \tau^{*}\Omega^{1}_{]\mathrm{X}[}\bigr)}.$$

Preuve. — Elle découle directement de [26] Théorème 5.3 appliqué à chaque terme du complexe de Cech $\mathfrak{C}^{\dagger}$. □

8. Application aux espaces de modules de variétés abéliennes

8.1. Soient $q = p^{s}$, $k = \mathbf{F}_{q}$, $\mathrm{W} = \mathrm{W}(k)$ et K_0 le corps de fractions de W. On désigne par σ l'endomorphisme de Frobenius agissant sur k, W et K_0. On fixe $\overline{\mathrm{K}}_0$ une clôture séparable de K_0. Soient $g \geq 1$ et $\mathrm{N} \geq 3$ deux entiers tel que $p \nmid \mathrm{N}$. On suppose que W contient ζ_{N} une racine primitive N-ème de l'unité. On munit le W-schéma en groupes $(\mathbf{Z}/\mathrm{N}\mathbf{Z})^{2g}$ de la structure symplectique induite par ζ_{N}. On considère le problème de modules $\mathfrak{A}_{g,\mathrm{N}}$ qui associe à tout W-schéma localement noethérien S, l'ensemble des classes d'isomorphismes

$$\mathfrak{A}_{g,\mathrm{N}}(\mathrm{S}) = \{(\mathrm{B}, \lambda, \delta_{\mathrm{N}})\}/_{\simeq},$$

où B est un S-schéma abélien de dimension relative g, $\lambda : \mathrm{B} \to \hat{\mathrm{B}}$ est une polarisation principale, B[N] est le noyau de la multiplication par N et $\delta_{\mathrm{N}} : (\mathbf{Z}/\mathrm{N}\mathbf{Z})^{2g} \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}[\mathrm{N}]$ est un isomorphisme symplectique de S-schémas en groupes. Par [29] Théorème 7.9, $\mathfrak{A}_{g,\mathrm{N}}$ est représentable par un W-schéma quasi-projectif connexe et lisse M. On note $\mathrm{A} \to \mathrm{M}$ le schéma abélien universel. Soient M_k la fibre spéciale de M, $\mathrm{X} \subset \mathrm{M}_k$ l'ouvert qui paramétrise les variétés abéliennes ordinaires et $\mathrm{U} \subset \mathrm{M}$ un sous-schéma ouvert de fibre spéciale X. On désigne par Q la complétion formelle de U le long de X; c'est un W-schéma formel qui ne dépend pas du choix de U. On considère le problème de module $\mathfrak{A}^{\mathrm{ord}}_{g,\mathrm{N}}$ qui associe à tout W-schéma localement noethérien S dans lequel p est localement nilpotent, l'ensemble des classes d'isomorphismes

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{ord}}_{g,\mathrm{N}}(\mathrm{S}) = \{(\mathrm{B}, \lambda, \delta_{\mathrm{N}})\}/_{\simeq},$$

où $(\mathrm{B}, \lambda, \delta_{\mathrm{N}}) \in \mathfrak{A}_{g,\mathrm{N}}(\mathrm{S})$ telle que toutes les fibres géométriques de $\mathrm{B} \to \mathrm{S}$ sont des variétés abéliennes ordinaires. Alors $\mathfrak{A}^{\mathrm{ord}}_{g,\mathrm{N}}$ est ind-représentable par Q. Soient $f : \mathscr{A} \to \mathrm{Q}$ le schéma abélien formel universel, $\lambda : \mathscr{A} \to \hat{\mathscr{A}}$ sa polarisation principale et δ sa structure de niveau N. Soient ${}_{p}\mathscr{A}$ le noyau de la multiplication par p, ${}_p\mathscr{A}^{\mathrm{et}}$ son plus grand quotient étale et ${}_p\mathscr{A}^{\circ}$ le noyau du morphisme naturel ${}_p\mathscr{A} \to {}_p\mathscr{A}^{\mathrm{et}}$. Le quotient $\mathscr{B} = \mathscr{A}/{}_p\mathscr{A}^{\circ}$ est un Q-schéma abélien formel dont toutes les fibres géométriques sont ordinaires. La polarisation principale de $\mathscr{A}$ et la dualité de Cartier entre ${}_p\mathscr{A}$ et ${}_p\hat{\mathscr{A}}$ induisent un accouplement parfait ${}_p\mathscr{A} \times_{\mathrm{Q}} {}_p\mathscr{A} \to \mu_p \times_{\mathrm{Spf(W)}} \mathrm{Q}$, pour lequel ${}_p\mathscr{A}^{\circ}$ est totalement isotrope. Par conséquent λ induit une polarisation $\lambda' : \mathscr{B} \to \hat{\mathscr{B}}$.

Soient ϕ_{X} le Frobenius absolu de X et $\mathscr{A}_k^{(\phi_{\mathrm{X}})} \to \mathrm{X}$ le changement de base de $\mathscr{A}_k \to \mathrm{X}$ par ϕ_{X}. Les Q-schémas en groupes formels ${}_p\mathscr{A}^{\circ}$ et ${}_p\hat{\mathscr{A}}^{\circ}$ relèvent les noyaux des isogénies de Frobenius $\mathscr{A}_k \to \mathscr{A}_k^{(\phi_{\mathrm{X}})}$ et $\hat{\mathscr{A}}_k \to \hat{\mathscr{A}}_k^{(\phi_{\mathrm{X}})}$ respectivement. Donc on a des isomorphismes canoniques $\mathscr{B}_k \simeq \mathscr{A}_k^{(\phi_{\mathrm{X}})}$ et $\hat{\mathscr{B}}_k \simeq \hat{\mathscr{A}}_k^{(\phi_{\mathrm{X}})}$ de X-schémas abéliens. Sous ces identifications, la polarisation $\lambda' \otimes_{\mathrm{W}} k$ de $\mathscr{B}_k$ est l'image inverse par ϕ_{X} de la polarisation $\lambda \otimes_{\mathrm{W}} k$ de $\mathscr{A}_k$.

Le morphisme canonique $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ induit un isomorphisme $\mathscr{A}[\mathrm{N}] \simeq \mathscr{B}[\mathrm{N}]$, donc une structure de niveau δ' sur $\mathscr{B}$. Il est facile de voir que l'isomorphisme $\mathscr{B}_k \simeq \mathscr{A}_k^{(\phi_{\mathrm{X}})}$ transforme $\delta' \otimes_{\mathrm{W}} k$ en $\phi_{\mathrm{X}}^*(\delta \otimes_{\mathrm{W}} k)$. Le triplet $(\mathscr{B}, \lambda', \delta')$ définit un diagramme cartésien de W-schémas formels

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{A} \arrow[d] \\
\mathrm{Q} \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{Q}
\end{tikzcd}$$

Par propriété universelle, on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{A} \arrow[d] \\
\mathrm{Q} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & \mathrm{Q} \arrow[d] \\
\mathrm{Spf(W)} \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{Spf(W)}
\end{tikzcd}$$

et ι est un isomorphisme. L'universalité de X et l'isomorphisme $\mathscr{B}_k \simeq \mathscr{A}_k^{(\phi_{\mathrm{X}})}$ (compatible aux polarisations et structures de niveau) montrent que $\iota \circ \phi$ relève ϕ_{X}. Donc ϕ^s relève $\mathrm{F}_{\mathrm{X}} = \phi_{\mathrm{X}}^s$, le q-Frobenius de X.

8.1.1. *Théorème. — Il existe* P *un* W*-schéma formel topologiquement de type fini et plat sur* W*, de fibre spéciale* Y *projective, une immersion ouverte* $\mathrm{Q} \subset \mathrm{P}$ *et un relèvement surconvergent* $(\phi^s, \mathrm{V}, \varphi : \mathrm{V} \to]\mathrm{Y}[)$ *de* F_{X} *le long de* $(\mathrm{Y} - \mathrm{X})_{\mathrm{red}}$*, qui prolonge* ϕ^s*.*

8.2. *Preuve du théorème 8.1.1.* — Par [18] Théorèmes IV.6.7, V.5.8, il existe

(i) un W-schéma projectif $\overline{\mathrm{M}}$ et une W-immersion ouverte $\mathrm{M} \subset \overline{\mathrm{M}}$ complémentaire de $\mathrm{D} = \overline{\mathrm{M}} - \mathrm{M}$ un diviseur relatif à croisements normaux stricts sur W;

(ii) un schéma semi-abélien $\mathrm{G} \to \overline{\mathrm{M}}$ dont la restriction à M est canoniquement isomorphe à A.

On pose $\mathrm{E} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}/\overline{\mathrm{M}})$, qui est un $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{M}}}$-module localement libre de rang g. Soient $\mathrm{Y} = \overline{\mathrm{M}}_k$ et ϕ_{Y} son Frobenius absolu. Le Frobenius absolu de G_k induit le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-linéaire $u : \phi_{\mathrm{Y}}^*(\mathrm{E}_k) \to \mathrm{E}_k$. Grâce aux isomorphismes canoniques $\det(\phi_{\mathrm{Y}}^*\mathrm{E}_k) = \phi_{\mathrm{Y}}^*(\det \mathrm{E}_k) = (\det \mathrm{E}_k)^{\otimes p}$, on peut considérer $\det u : \det(\phi_{\mathrm{Y}}^*\mathrm{E}_k) \to \det \mathrm{E}_k$ comme une section $h = \det u \in \Gamma(\mathrm{Y}, (\det \mathrm{E}_k)^{1-p})$, appelée invariant de Hasse. Par définition, $\mathrm{X} = \mathrm{M}_k \cap \{x \in \mathrm{Y} | h(x) \neq 0\}$.

Soient P la complétion formelle de $\overline{\mathrm{M}}$ le long de Y et $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}} =]\mathrm{Y}[= \mathrm{P}_{\mathrm{K}_0}$ sa fibre rigide. Soient L une extension finie de K_0, $x \in \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}(\mathrm{L})$ et $\tau : \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{L}}) \to \mathrm{P}$ le morhisme qui lui est associé par adhérence schématique et normalisation (appelé dans la suite prolongement de x). On désigne par $\tau_1 : \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{L}}/p\mathscr{O}_{\mathrm{L}}) \to \mathrm{Y}$ la réduction de τ modulo p. Le choix d'une trivialisation $\tau_1^*(\det \mathrm{E}_k)^{1-p} \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{L}}/p\mathscr{O}_{\mathrm{L}}$ permet de définir la valuation p-adique $v_p(\tau_1^*(h))$. C'est un nombre rationnel compris entre 0 et 1 qui ne dépend pas du choix de la trivialisation; on le note $v_p(\widetilde{h}(x))$. On choisit $\mathrm{P} = \cup_i \mathrm{U}_i$ un recouvrement fini de P par des ouverts formels affines et des sections $\widetilde{h}_i \in \Gamma(\mathrm{U}_i, (\det \mathrm{E})^{1-p})$ qui relèvent h. Si τ se factorise à travers U_i alors $v_p(\widetilde{h}(x)) = \inf(1, v_p(\tau^*\widetilde{h}_i))$. On en déduit que pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, il existe un sous-espace rigide quasi-compact $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq r} \subset \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}$ tel que

$$\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq r}(\overline{\mathrm{K}}_0) = \left\{x \in \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}(\overline{\mathrm{K}}_0) \;\middle|\; v_p(\widetilde{h}(x)) \leq r\right\}.$$

On considère aussi le sous-espace rigide (non quasi-compact) $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{<r} \subset \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}$ défini par la condition $v_p(\widetilde{h}(x)) < r$. Noter que $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq r} = \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}$ si $r \geq 1$ et $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{<r} = \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}$ si $r > 1$. Soit $\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}$ l'espace rigide analytique associé au K_0-schéma $\mathrm{M}_{\mathrm{K}_0}$. On observe que $\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}$ contient strictement le tube $]\mathrm{M}_k[$ (qui s'identifie à la fibre rigide de la complétion formelle de M le long de M_k). On pose $\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}_{\leq r} = \mathrm{M}^{\mathrm{rig}} \cap \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq r}$ et $\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}_{<r} = \mathrm{M}^{\mathrm{rig}} \cap \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{<r}$. On a une immersion formelle ouverte $\mathrm{Q} \subset \mathrm{P}$. Le tube $]\mathrm{X}[$ coïncide avec la fibre rigide de Q et $]\mathrm{X}[=]\mathrm{M}_k[\cap \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq 0}$.

8.2.1. *Lemme.* — *Pour tout nombre rationnel* $r > 0$, $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq r}$ *et* $\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}_{\leq r}$ *sont des voisinages stricts de* $]\mathrm{X}[$ *dans* $]\mathrm{Y}[$.

Preuve. — Par construction $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq r}$ est un voisinage strict de $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq 0}$ dans $]\mathrm{Y}[$. Comme $]\mathrm{X}[\subset \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq 0}$, on en déduit que $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq r}$ est un voisinage strict de $]\mathrm{X}[$ dans $]\mathrm{Y}[$.

Par ailleurs, le diviseur effectif D définit un $\mathscr{O}_{\overline{\mathrm{M}}}$-faisceau inversible $\mathscr{O}(\mathrm{D})$ et une section $t \in \Gamma(\overline{\mathrm{M}}, \mathscr{O}(\mathrm{D}))$. On considère l'ouvert admissible U de $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}$ vérifiant

$$\mathrm{U}(\overline{\mathrm{K}}_0) = \left\{x \in \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}(\overline{\mathrm{K}}_0) \ \middle|\ v_p(t(x)) \leq 1\right\}.$$

Alors $(\mathrm{U},]\mathrm{D}_s[)$ est un recouvrement admissible de $]\mathrm{Y}[$ et son intersection avec le recouvrement admissible $(\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq r},]\mathrm{Y}[-]\mathrm{X}[)$ est aussi admissible. Or $\mathrm{U}\cap\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}_{\leq r} \subset \mathrm{M}^{\mathrm{rig}}_{\leq r}$ et $]\mathrm{D}_s[\subset]\mathrm{Y}[-]\mathrm{X}[$. On en déduit que $(\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}_{\leq r},]\mathrm{Y}[-]\mathrm{X}[)$ est un recouvrement admissible de $]\mathrm{Y}[$. □

Soient $\widetilde{\mathrm{G}}$ la complétion formelle de G le long de sa fibre spéciale (qui est un P-schéma en groupes formel lisse) et ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}$ le noyau de la multplication par p. On désigne par $\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}}$ et ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}}$ les fibres rigides de $\widetilde{\mathrm{G}}$ et ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}$ respectivement. Les morphismes naturels $\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}} \to \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}$ et ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}} \to \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}$ sont des espaces rigides en groupes respectivement lisse et étale. Soient $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux de l'immersion fermée ${}_p\widetilde{\mathrm{G}} \to \widetilde{\mathrm{G}}$ et $m, n > 0$ deux entiers. Soient $\mathscr{B}$ l'éclatement admissible de $\widetilde{\mathrm{G}}$ le long de l'idéal $\mathscr{J} = \mathscr{I}^n + p^m\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{G}}}$ et $\mathscr{Z}^{m,n} \subset \mathscr{B}$ l'ouvert formel où p^m engendre $\mathscr{J}.\mathscr{O}_{\mathscr{B}}$.

8.2.2. *Proposition.* — (i) *La fibre rigide de* $\mathscr{Z}^{m,n}$ *est un ouvert admissible de* $\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}}$ *qui est un sous-*$\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}$*-groupe. Elle dépend du nombre rationnel* $a = m/n$ *mais pas de la paire* (m, n)*; on la note* Z^a*.*

(ii) *Il existe un ouvert admissible* $(\mathrm{Z}^a)^\circ \subset \mathrm{Z}^a$ *qui est un sous-*$\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}$*-groupe tel que pour tout* $x \in \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}(\overline{\mathrm{K}}_0)$*,* $(\mathrm{Z}^a)^\circ_x$ *est la composante connexe neutre de* Z^a_x*.*

(iii) *Soient* L *une extension finie de* K_0 *d'indice de ramification* e*,* $x \in \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}(\mathrm{L})$ *et* $\tau : \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{L}}) \to \mathrm{P}$ *son prolongement. Soient* ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}_\tau = {}_p\widetilde{\mathrm{G}} \times_{\mathrm{P}} \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{L}})$ *et* $({}_p\widetilde{\mathrm{G}}^b_\tau, b \in \mathbf{Q}_{>0})$ *sa filtration canonique. Alors* ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}^{ea}_\tau \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{L}}} \mathrm{L} = {}_p\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}}_x \cap (\mathrm{Z}^a)^\circ_x$ *dans* $\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}}_x$*.*

Preuve. — (i) Soient L une extension finie de K_0, $z \in \widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}}(\mathrm{L})$, $\tau_z : \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{L}}) \to \widetilde{\mathrm{G}}$ son prolongement et $\mathscr{I}(z)$ l'image du morphisme naturel $\tau_z^*\mathscr{I} \to \mathscr{O}_{\mathrm{L}}$. On a

$$\mathrm{Z}^a(\overline{\mathrm{K}}_0) = \left\{z \in \widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}}(\overline{\mathrm{K}}_0) \ \middle|\ v_p(\mathscr{I}(z)) \geq a\right\}, \tag{\textbf{20}}$$

ce qui montre que Z^a dépend de a mais pas de la paire (m, n). Pour montrer que Z^a est un sous- $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}$-groupe de $\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}}$, on commence par rappeler la notion de dilatation ([7] Chapitre 3). Soient R un anneau de valuation discrète, π une uniformisante, $\mathrm{S} = \mathrm{Spf}(\mathrm{R})$ et s son point fermé. Soient $\mathfrak{X}$ un S-schéma formel quasi-compact admissible, V un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}_s$ et $\mathfrak{I}$ le faisceau d'idéaux de l'immersion fermée $\mathrm{V} \to \mathfrak{X}$. Soient $\mathfrak{X}'$ l'éclatement admissible de $\mathfrak{X}$ le long de V, $\mathfrak{X}'_\pi$ le sous-schéma formel ouvert de $\mathfrak{X}'$ où π engendre $\mathfrak{I}.\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ et $u : \mathfrak{X}'_\pi \to \mathfrak{X}$ le morphisme naturel. On vérifie facilement les propriétés suivantes ([7] 3.2/1) :

(a) $\mathfrak{X}'_\pi$ est un S-schéma formel quasi-compact admissible et $u_s : (\mathfrak{X}'_\pi)_s \to \mathfrak{X}_s$ se factorise à travers V;

(b) pour tout S-schéma formel admissible $\mathfrak{Y}$ et tout S-morphisme $v : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ tel que $v_s : \mathfrak{Y}_s \to \mathfrak{X}_s$ se factorise à travers V, il existe un unique S-morphisme $v' : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}'_\pi$ tel que $v = u \circ v'$.

Grâce à la propriété universelle (b), le couple $(\mathfrak{X}'_\pi, u)$ est unique à isomorphisme unique près. On appelle $\mathfrak{X}'_\pi$ la dilatation de V dans $\mathfrak{X}$. Soient $\mathscr{T}, \mathfrak{X}^1$ et $\mathfrak{X}^2$ des S-schémas formels quasi-compacts admissibles, $\mathfrak{X}^1 \to \mathscr{T}$ et $\mathfrak{X}^2 \to \mathscr{T}$ deux S-morphismes et $V^1 \subset \mathfrak{X}^1_s$ et $V^2 \subset \mathfrak{X}^2_s$ deux sous-schémas fermés. On désigne par $(\mathfrak{X}^1)'_\pi$, $(\mathfrak{X}^2)'_\pi$ et $(\mathfrak{X}^1 \times_{\mathscr{T}} \mathfrak{X}^2)'_\pi$ les dilatations de respectivement V^1 dans $\mathfrak{X}^1$, V^2 dans $\mathfrak{X}^2$ et $V^1 \times_{\mathscr{T}_s} V^2$ dans $\mathfrak{X}^1 \times_{\mathscr{T}} \mathfrak{X}^2$. Alors on a un isomorphisme canonique $(\mathfrak{X}^1 \times_{\mathscr{T}} \mathfrak{X}^2)'_\pi \simeq (\mathfrak{X}^1)'_\pi \times_{\mathscr{T}} (\mathfrak{X}^2)'_\pi$. En particulier, si $\mathfrak{X}$ est $\mathscr{T}$-schéma en groupes formel et V est un sous-$\mathscr{T}_s$-schéma en groupes de $\mathfrak{X}_s$, alors la dilatation $\mathfrak{X}'_\pi$ de V dans $\mathfrak{X}$ est un $\mathscr{T}$-schéma en groupes formel et $u : \mathfrak{X}'_\pi \to \mathfrak{X}$ est un homomorphisme de groupes.

On fixe une extension finie L de K_0 et on prend $R = \mathscr{O}_L$. On pose $\mathfrak{X}_0 = \widetilde{G} \times_{\mathrm{Spf(W)}} S$, $\mathscr{V} = {}_p\widetilde{G} \times_{\mathrm{Spf(W)}} S$ et $\mathscr{T} = P \times_{\mathrm{Spf(W)}} S$. On définit par récurrence des S-schémas formels quasi-compacts admissibles $\ldots \to \mathfrak{X}_{i+1} \to \mathfrak{X}_i \to \ldots\ \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_0$ et un système compatible d'immersions fermées formelles $(\mathscr{V} \to \mathfrak{X}_i)_{i \geq 0}$, en notant $\mathfrak{X}_{i+1}$ la dilatation de $\mathscr{V}_s$ dans $\mathfrak{X}_i$. Par propriété (b), le morphisme $\mathscr{V} \to \mathfrak{X}_i$ se relève en un morphisme $\mathscr{V} \to \mathfrak{X}_{i+1}$ qui est clairement une immersion fermée formelle. Comme $\mathfrak{X}_i$ est un $\mathscr{T}$-schéma en groupes formel et $\mathscr{V} \to \mathfrak{X}_i$ est un homomorphisme de groupes pour $i = 0$, alors ces propriétés sont vérifiées pour tout $i \geq 0$ et les morphismes $\mathfrak{X}_{i+1} \to \mathfrak{X}_i$ sont des homomorphismes de groupes. On a $\mathfrak{X}_i \otimes_R L = Z^{i/e} \times_{K_0} L$, où e est l'indice de ramification absolu de L. Donc $Z^{i/e} \times_{K_0} L$ est un sous-$(\overline{M}^{\mathrm{rig}} \times_{K_0} L)$-groupe de $\widetilde{G}^{\mathrm{rig}} \times_{K_0} L$. On en déduit que $Z^{i/e}$ est stable par la loi de groupe et l'inverse de $\widetilde{G}^{\mathrm{rig}}$, ce qui termine la preuve de l'assertion (i). L'assertion (ii) découle de la proposition A.1.2. L'assertion (iii) découle de (20). ☐

On considère les ouverts admissibles suivants de $\widetilde{G}^{\mathrm{rig}}$ qui sont des sous-$\overline{M}^{\mathrm{rig}}$-groupes

$$Z^{a+} = \cup_{b \in \mathbf{Q}_{>a}} Z^b \ \text{ et } \ (Z^{a+})^\circ = \cup_{b \in \mathbf{Q}_{>a}} (Z^b)^\circ.$$

On définit les ouverts admissibles ${}_p\widetilde{G}^{\mathrm{rig},a} = {}_p\widetilde{G}^{\mathrm{rig}} \times_{\widetilde{G}^{\mathrm{rig}}} (Z^a)^\circ$ et ${}_p\widetilde{G}^{\mathrm{rig},a+} = {}_p\widetilde{G}^{\mathrm{rig}} \times_{\widetilde{G}^{\mathrm{rig}}} (Z^{a+})^\circ$ de ${}_p\widetilde{G}^{\mathrm{rig}}$ qui sont des sous-$\overline{M}^{\mathrm{rig}}$-groupes (étales). Soient A^{rig} et ${}_pA^{\mathrm{rig}}$ les espaces rigides-analytiques associés aux K_0-schémas A_{K_0}et ${}_pA_{K_0}$ (noyau de la multiplication par p), qui sont naturellement des M^{rig}-groupes. La polarisation principale de A et la dualité de Cartier induisent un accouplement parfait $({}_pA) \times_M ({}_pA) \to \mu_p \otimes_W M$. Par analytification, on obtient un accouplement parfait

$$(\mathbf{21})\qquad ({}_p\mathrm{A}^{\mathrm{rig}}) \times_{\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}} ({}_p\mathrm{A}^{\mathrm{rig}}) \to \mu_p^{\mathrm{rig}} \times_{\mathrm{K}_0} \mathrm{M}^{\mathrm{rig}}\,.$$

L'immersion naturelle $\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}}|_{\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}} \to \mathrm{A}^{\mathrm{rig}}$ permet d'identifier ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig}}|_{\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}}$ à un ouvert admissible de ${}_p\mathrm{A}^{\mathrm{rig}}$ qui est un sous-$\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}$-groupe.

On prend $a = 1/(p-1)$ et $r = \inf(p^{-1}(p-1)^{-1}, (p-2)(p-1)^{-1}(2g(p-1)-p)^{-1})$. Soient $\mathrm{V} = \mathrm{M}^{\mathrm{rig}}_{<r}$ et $\mathscr{K} := {}_p\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{rig},a+} \times_{\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}} \mathrm{V}$ qui est un ouvert admissible et un sous-V-groupe de ${}_p\mathrm{A}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{V}} := {}_p\mathrm{A}^{\mathrm{rig}} \times_{\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}} \mathrm{V}$.

8.2.3. *Proposition.* — i) *Le* V*-groupe* $\mathscr{K}$ *est fini localement libre de rang* p^g.

ii) *Soit* $\mathrm{V}_\circ \subset \mathrm{V}$ *la réunion des composantes connexes de* V *qui rencontrent* $]\mathrm{X}[$. *Alors* $\mathscr{K}|_{\mathrm{V}_\circ}$ *est totalement isotrope relativement à l'accouplement parfait* (21) *au dessus de* $\mathrm{V}_\circ$.

Preuve. — i) Comme $\mathscr{K} \to \mathrm{V}$ est étale, il suffit, par le lemme A.1.1, de montrer que $\mathscr{K}_x$ est de rang p^g pour tout $x \in \mathrm{V}(\overline{\mathrm{K}}_0)$. Soient L une extension finie de K_0 d'indice de ramification e, $x \in \overline{\mathrm{M}}(\mathrm{L})$, $\rho : \mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{L}}) \to \overline{\mathrm{M}}$ son prolongement (par le critère valuatif de propreté) et $\mathrm{G}_\rho = \mathrm{G} \times_{\overline{\mathrm{M}}} \mathrm{S}$. On suppose $x \in \mathrm{M}^{\mathrm{rig}}_{<r}(\mathrm{L})$ grâce à l'identification $\overline{\mathrm{M}}(\mathrm{L}) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{rig}}(\mathrm{L})$. Soit $0 \to \mathrm{T} \to \widetilde{\mathrm{G}}_\rho \to \mathrm{A} \to 0$ l'extension de Raynaud de G_ρ (noter que $\mathrm{G}_\rho \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{L}}} \mathrm{L}$ est une variété abélienne). On désigne par ${}_p\mathrm{G}_\rho$ et ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}_\rho$ les noyaux de la multiplication par p respectivement sur G_ρ et sur $\widetilde{\mathrm{G}}_\rho$. On rappelle que ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}_\rho \simeq ({}_p\mathrm{G}_\rho)^f$. Par la proposition 8.2.2 (iii), on est ramené à montrer que le cran ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}_\rho^{j+}$ de la filtration canonique de ${}_p\widetilde{\mathrm{G}}_\rho$ est fini et plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{L}}$ de rang p^g, où $j = e/(p-1)$. On pose $\mathrm{S}_1 = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{L}}/p\mathscr{O}_{\mathrm{L}})$, $\mathrm{G}_{\rho,1} = \mathrm{G}_\rho \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1 \simeq \widetilde{\mathrm{G}}_\rho \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$ et $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$. Par définition de $\mathrm{M}^{\mathrm{rig}}_{<r}$, la hauteur de Hodge de $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_{\rho,1})$ est strictement plus petite que r. On en déduit grâce à la surjection naturelle $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_{\rho,1}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{A}_1)$ que la hauteur de Hodge de $\mathrm{Lie}(\mathrm{A}_1)$ est strictement plus petite que r. Comme A admet une polarisation principale alors $\mathrm{H}^1(\mathrm{A}_1, \mathscr{O}_{\mathrm{A}_1}) \simeq \mathrm{Lie}(\mathrm{A}_1)$ et la proposition découle alors du corollaire 6.1.2 (on peut aussi argumenter en utilisant [28] II.1.1 et I.7.2.3 ou [18] II.2).

ii) On considère le diagramme commutatif de $\mathscr{O}_{\mathrm{V}}$-modules localement libres

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{I} \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathscr{O}_{\mu_p} \otimes_{\mathrm{K}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{V}} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathscr{K}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{V}}} \mathscr{O}_{\mathscr{K}} \\
\mathscr{O}_{\mathrm{V}} &
\end{tikzcd}$$

où $\mathscr{O}_{\mathscr{K}}$ est la $\mathscr{O}_{\mathrm{V}}$-algèbre de $\mathscr{K}$, $\mathscr{O}_{\mu_p}$ est la K_0-algèbre de μ_p, $\mathscr{I}$ est l'idéal d'augmentation et g est induit par l'accouplement (21) restreint à $\mathscr{K} \times_{\mathrm{V}} \mathscr{K}$. Il suffit de montrer que $f|_{\mathrm{V}_\circ} = 0$. Avec les notations du début de la section, $\mathscr{K}|_{]\mathrm{X}[}$

est la fibre générique de ${}_p\mathscr{A}^\circ$. Donc $\mathscr{K}|_{]\mathrm{X}[}$ est totalement isotrope relativement à l'accouplement (21) et $f|_{]\mathrm{X}[} = 0$. On en déduit par le principe de prolongement analytique suivant, que $f|_{\mathrm{V}_\circ} = 0$.

Soient W *un espace analytique rigide connexe, tel que l'anneau local* $\mathscr{O}_{\mathrm{W},x}$ *soit intègre pour tout* $x \in \mathrm{W}$, M *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{W}}$*-module localement libre de type fini et* $f \in \Gamma(\mathrm{W}, \mathrm{M})$. *S'il existe un ouvert non vide* U *de* W *tel que la restriction de* f *à* U *soit nulle, alors* $f = 0$. (voir [3] 0.1.13). □

Pour un K_0-schéma séparé de type fini T, on note $\mathrm{T}^{\mathrm{rig}}$ son analytification. Pour une variété affinoïde $\mathrm{U} = \mathrm{Sp(B)}$, on note $\mathrm{U}^{\mathrm{alg}} = \mathrm{Spec(B)}$.

8.2.4. *Lemme.* — (a) *Soit* U *une* K_0*-variété affinoïde. Il existe un morphisme canonique* $\mathrm{U} \to \mathrm{U}^{\mathrm{alg}}$ *de* K_0*-espaces annelés. Soient* T *un* K_0*-schéma séparé de type fini et* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{T}^{\mathrm{rig}}$ *un* K_0*-morphisme rigide vérifiant la condition suivante*

($\star$) *il existe* $\mathrm{W} \subset \mathrm{T}$ *un ouvert affine vérifiant* $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{W}^{\mathrm{rig}}$ *en tant qu'ensembles.*

Alors, il existe un diagramme commutatif canonique d'espaces annelés fonctoriel en f

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{T}^{\mathrm{rig}} \arrow[d] \\
\mathrm{U}^{\mathrm{alg}} \arrow[r, "f^{\mathrm{alg}}"] & \mathrm{T}
\end{tikzcd}$$

où f^{alg} *est un morphisme de* K_0*-schémas et les flèches verticales sont les morphismes canoniques.*

(b) *Soient* $\mathrm{N} \to \mathrm{T}$ *un morphisme fini de schémas et* $\mathrm{N}^{\mathrm{rig}} \to \mathrm{T}^{\mathrm{rig}}$ *son analytification. Alors* $\mathrm{U} \times_{\mathrm{T}^{\mathrm{rig}}} \mathrm{N}^{\mathrm{rig}} \to \mathrm{U}$ *est un morphisme fini de variétés affinoïdes et il existe un diagramme cartésien canonique*

$$\begin{tikzcd}
\left(\mathrm{U} \times_{\mathrm{T}^{\mathrm{rig}}} \mathrm{N}^{\mathrm{rig}}\right)^{\mathrm{alg}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{N} \arrow[d] \\
\mathrm{U}^{\mathrm{alg}} \arrow[r, "f^{\mathrm{alg}}"] & \mathrm{T}
\end{tikzcd}$$

Preuve. — a) Comme tout ouvert de Zariski de $\mathrm{U}^{\mathrm{alg}}$ est un ouvert admissible de U ([6] 9.1.4/7), alors l'application canonique $\mathrm{U} \to \mathrm{U}^{\mathrm{alg}}$ est continue. Elle est clairement un morphisme d'espaces annelés. Soit $\mathrm{W} \subset \mathrm{T}$ vérifiant la condition ($\star$). Le morphisme composé d'espaces annelés $\mathrm{U} \to \mathrm{T}^{\mathrm{rig}} \to \mathrm{T}$ induit un morphisme de K_0-algèbres $\Gamma(\mathrm{W}, \mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \to \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{U}}) = \mathrm{B}$, donc un morphisme de K_0-schémas $\mathrm{U}^{\mathrm{alg}} \to \mathrm{W}$. Le morphisme $\mathrm{U}^{\mathrm{alg}} \to \mathrm{T}$ ainsi obtenu est fonctoriel en la paire (W, T) dans le sens suivant: soient $\mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ un morphisme de K_0-schémas séparés de type fini et $W \subset T$ et $W' \subset T'$ des ouverts affines tels que W' contient l'image de W. Alors le morphisme composé de schémas $U^{alg} \to W \to W'$ est induit par le morphisme rigide composé $U \to T^{rig} \to T'^{rig}$ et l'ouvert affine $W' \subset T'$. En particulier $f^{alg} : U^{alg} \to T$ ne dépend pas du choix de W (car T est séparé sur K_0).

b) On peut supposer $T = \mathrm{Spec}(A)$ et $N = \mathrm{Spec}(A')$, où A' est une A-algèbre finie. On vérifie facilement que $\mathscr{O}_{N^{rig}} = \mathscr{O}_{T^{rig}} \otimes_A A'$, ce qui implique l'énoncé. $\square$

On remplace V par $V_\circ$ et $\mathscr{K}$ par $\mathscr{K}|_{V_\circ}$ (Proposition 8.2.3 ii)). Soit $U \subset V$ un ouvert affinoïde. On note $i : U \to M^{rig}$ l'immersion naturelle et on suppose qu'elle vérifie la condition $(\star)$ du lemme 8.2.4. Soit $i^{alg} : U^{alg} \to M_{K_0}$ le morphisme de K_0-schémas défini par loc. cit.. On pose $C = U^{alg} \times_{M_{K_0}} A_{K_0}$ qu'on munit de la polarisation principale et la structure de niveau N induites par celles de A_{K_0}. Par le lemme 8.2.4 b), le schéma affine associé à la variété affinoïde ${}_pA_U^{rig} = {}_pA^{rig}|_U$ est $({}_pA_U^{rig})^{alg} = {}_pC$. Par la proposition 8.2.3 i), l'immersion $\mathscr{K} \to {}_pA_V^{rig}$ est fermée. Donc $\mathbf{K} = (\mathscr{K}|_U)^{alg}$ est canoniquement un sous-U^{alg}-schéma en groupes fermé de ${}_pC$. On considère le U^{alg}-schéma abélien quotient $D = C/\mathbf{K}$. Par la proposition 8.2.3, $\mathbf{K}$ est totalement isotrope relativement à l'accouplement parfait sur ${}_pC$. Donc la polarisation principale de C induit une polarisation principale de D. La structure de niveau N sur C induit une structure de niveau N sur D. On obtient ainsi un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r] \arrow[d] & A_{K_0} \arrow[d] \\
U^{alg} \arrow[r, "\varphi_U^{alg}"] & M_{K_0}
\end{tikzcd}$$

Le morphisme d'espaces annelés $U \to M_{K_0}$, induit par φ_U^{alg} et le lemme 8.2.4, définit par propriété universelle du GAGA rigide un morphisme $\varphi_U : U \to M^{rig}$ de K_0-espaces rigides. On montre facilement le lemme suivant:

8.2.5. *Lemme. — Soit* $U' \subset U$ *une immersion d'ouverts affinoïdes de* V *tels que leurs immersions dans* M^{rig} *vérifient l'hypothèse* $(\star)$ *du lemme 8.2.4. Alors* $\varphi_{U'} = (\varphi_U)|_{U'}$.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement admissible de V par des ouverts affinoïdes tels que leurs immersions dans M^{rig} vérifient l'hypothèse $(\star)$ du lemme 8.2.4. Par [6] 9.3.3/1 et le lemme 8.2.5, les morphismes $\varphi_{U_i} : U_i \to M^{rig}$ se recollent en un K_0-morphisme rigide $\varphi : V \to M^{rig}$. Le lemme 8.2.5 implique que $\varphi|_{]X[} = \phi \otimes_W K_0$. On note que $\varphi^{-1}(V)$ est un voisinage strict de $]X[$ dans $]Y[$. On en déduit qu'il existe V' un voisinage strict de $]X[$ dans $]Y[$ et $(\phi^s, V', \varphi^s : V' \to M^{rig})$ un relèvement surconvergent de F_X le long de $(Y - X)_{red}$. $\square$

8.3. *Fonctions* L *unités.* — Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout point $x \in X(\mathbf{F}_{q^n})$, il existe un unique morphisme $\tau : \mathrm{Spf}(W(\mathbf{F}_{q^n})) \to Q$ qui relève x et qui vérifie

$\phi^{sn} \circ \tau = \tau$, appelé relèvement de Teichmüller de x. De plus $\phi \circ \tau = \tau \circ \sigma$, où σ est l'endomorphisme de Frobenius de $\mathrm{W}(\mathbf{F}_{q^n})$. On pose $\mathrm{T}_n = \{\tau : \mathrm{Spf}(\mathrm{W}(\mathbf{F}_{q^n})) \to \mathrm{Q} \mid \phi^{sn} \circ \tau = \tau\}$. Pour une variété abélienne A sur $k = \mathbf{F}_q$, on note $\mathrm{F}_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}^{(\sigma)}$ et $\mathrm{V}_{\mathrm{A}} : \mathrm{A}^{(\sigma)} \to \mathrm{A}$ les isogénies du Frobenius et du Verschiebung et $\mathrm{F}^s_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}^{(\sigma)} \to \ldots \to \mathrm{A}^{(\sigma^s)} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{V}^s_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} = \mathrm{A}^{(\sigma^s)} \to \ldots \to \mathrm{A}^{(\sigma)} \to \mathrm{A}$ leurs itérés d'ordres s.

8.3.1. *Proposition.* — *Soient* $x \in \mathrm{X}(k)$ *et* $\tau : \mathrm{Spf}(\mathrm{W}(k)) \to \mathrm{Q}$ *son relèvement de Teichmüller. Soient* A *la* k*-variété abélienne et* $\lambda : \mathrm{A} \to \mathrm{A}^t$ *la polarisation principale associées à* x*,* $\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k})$ *le module de Tate de* A *et* $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k}))$ *sa seconde puissance symétrique. Soient* $\overline{\mathrm{Q}} = \mathrm{Q} \otimes_{\mathrm{W}} \mathrm{W}(\overline{k})$ *et* $\overline{x} \in \overline{\mathrm{Q}}(\overline{k})$ *un point au dessus de* x*.*

(i) *Soit* $\hat{\mathscr{O}}_{\overline{x}}$ *la complétion de l'anneau local de* $\overline{\mathrm{Q}}$ *en* $\overline{x}$*. La théorie de Serre-Tate induit un isomorphisme canonique de* $\mathrm{W}(\overline{k})$*-schémas formels*

$$q(-, \bullet, \bullet) : \mathrm{Spf}\big(\hat{\mathscr{O}}_{\overline{x}}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}\big(\mathrm{Sym}^2(\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k})), \hat{\mathbf{G}}_m\big).$$

(ii) *L'endomorphisme* $\phi^s \otimes \mathrm{id}$ *de* $\overline{\mathrm{Q}}$ *fixe* $\overline{x}$ *et induit un endomorphisme* $\phi^s_{\overline{x}}$ *de* $\mathrm{Spf}(\hat{\mathscr{O}}_{\overline{x}})$*. Soient* R *un anneau local artinien de corps résiduel* $\overline{k}$ *et* $\rho : \mathrm{Spec}(\mathrm{R}) \to \mathrm{Spf}(\hat{\mathscr{O}}_{\overline{x}})$ *un morphisme. Alors on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k}) \otimes \mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k}) \arrow[r, "\mathrm{id}\times \mathrm{V}^s_{\mathrm{A}}"] \arrow[d, "\mathrm{F}^s_{\mathrm{A}}\times \mathrm{id}"'] & \mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k}) \otimes \mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k}) \arrow[d, "q(\rho,\bullet,\bullet)"] \\
\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k}) \otimes \mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k}) \arrow[r, "q(\phi^s_{\overline{x}}(\rho),\bullet,\bullet)"'] & \hat{\mathbf{G}}_m(\mathrm{R})
\end{tikzcd}$$

(iii) *L'isogénie* $\mathrm{F}^s_{\mathrm{A}}$ *induit un endomorphisme* $\mathbf{Z}_p$*-linéaire inversible de* $\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k})$ *et on a* $\mathrm{F}^s_{\mathrm{A}} \circ \mathrm{V}^s_{\mathrm{A}} = p^s$*.*

(iv) *On a un isomorphisme canonique*

$$\tau^*\Omega^1_{\mathrm{Q}/\mathrm{W}} \otimes_{\mathrm{W}} \mathrm{W}(\overline{k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^2(\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k})) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{W}(\overline{k}),$$

et ϕ^s *induit un endomorphisme* W*-linéaire de* $\tau^*\Omega^1_{\mathrm{Q}/\mathrm{W}}$*, qui correspond via l'isomorphisme ci-dessus à l'endomorphisme* $p^s\mathrm{Sym}^2(\mathrm{F}^s_{\mathrm{A}})^{-1}$ *de* $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k}))$*.*

Preuve. — (i) Soit A_g le champs algébrique sur W qui paramétrise les schémas abéliens principalement polarisés. Le morphisme naturel $\mathrm{M} \to \mathrm{A}_g$ est fini étale. Donc il suffit de montrer, pour tout anneau local artinien R de corps résiduel $\overline{k}$, que l'ensemble des classes d'isomorphismes des R-schémas abéliens principalement polarisés qui relèvent (A, λ), est en bijection avec l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{Sym}^2(\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k})), \hat{\mathbf{G}}_m(\mathrm{R}))$. C'est une conséquence de [25] Théorème 2.1. Soit $\mathbf{A}/\mathrm{R}$ un relèvement de A. Grâce à la polarisation principale de A, le paramètre de Serre-Tate $q(\mathbf{A}/\mathrm{R}, \bullet, \bullet)$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k}) \otimes \mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k}), \hat{\mathbf{G}}_m(\mathrm{R}))$. Par [25] Théorème 2.1 3), le dual $\hat{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{A}$, qui relève $\hat{\mathrm{A}}$, a pour paramètre de Serre-

Tate $q(\hat{\mathbf{A}}/\mathrm{R}, x, y) = q(\mathbf{A}/\mathrm{R}, y, x)$. Par loc. cit. Théorème 2.1 4), l'isomorphisme $\lambda : \mathrm{A} \to \hat{\mathrm{A}}$ se relève en un R-homomorphisme $\Lambda : \mathbf{A} \to \hat{\mathbf{A}}$ ssi $q(\mathbf{A}/\mathrm{R}, \bullet, \bullet)$ est symétrique. De plus, dans ce cas Λ est unique.

(ii) Soit $(\mathrm{A}^{(\sigma)}, \lambda^{(\sigma)})$ le twist de (A, λ) par le Frobenius σ de k. Soient R un anneau local artinien de corps résiduel $\overline{k}$ et $(\mathbf{A}/\mathrm{R}, \Lambda)$ un relèvement de (A, λ). Soient ${}_p\mathbf{A}$ le noyau de la multiplication par p et ${}_p\mathbf{A}^\circ$ sa composante connexe neutre. Comme ${}_p\mathbf{A}^\circ$ relève le noyau de l'isogénie de Frobenius $\mathrm{A} \to \mathrm{A}^{(\sigma)}$, alors le quotient $\mathbf{A}/{}_p\mathbf{A}^\circ$ est un R-schéma abélien qui relève $\mathrm{A}^{(\sigma)}$. Comme ${}_p\mathbf{A}^\circ$ est totalement isotrope relativement à l'accouplement parfait de ${}_p\mathbf{A}$ induit par Λ, alors Λ induit une polarisation principale Λ' de $\mathbf{A}/{}_p\mathbf{A}^\circ$ qui relève $\lambda^{(\sigma)}$. Le morphisme ainsi défini

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}\big(\mathrm{Sym}^2\big(\mathrm{T}_p\mathrm{A}(\overline{k})\big), \hat{\mathbf{G}}_m(\mathrm{R})\big) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}\big(\mathrm{Sym}^2\big(\mathrm{T}_p\mathrm{A}^{(\sigma)}(\overline{k})\big), \hat{\mathbf{G}}_m(\mathrm{R})\big) \\ (\mathbf{A}, \Lambda) & \longmapsto & (\mathbf{A}/{}_p\mathbf{A}^\circ, \Lambda') \end{array}$$

est induit par ϕ. (ii) en découle par [25] Théorème 2.1 4). (iii) est triviale et (iv) se déduit de (ii) et (iii). □

Soit H un F-cristal sur $\mathcal{Q}$. Pour $\tau \in \mathrm{T}_n$, $\mathrm{H}_\tau = \tau^*\mathrm{H}$ est un F-cristal sur $\mathbf{F}_{q^n}$. Soient ϕ_τ son endomorphisme de Frobenius et H^0_τ sa racine de l'unité. Pour tout entier $m \geq 0$ et $\varepsilon = \pm$, on considère la série formelle

$$\mathrm{L}^\varepsilon_0(\mathrm{Sym}^m\mathrm{H}, t) = \prod_{n\geq 1}\prod_{\tau\in\mathrm{T}_n}\Big(\det\big(1 - t^n\mathrm{Sym}^m\big(\phi_\tau^{\varepsilon s n}\big)\big|\mathrm{Sym}^m\mathrm{H}^0_\tau\big)\Big)^{-1/n}.$$

8.3.2. *Proposition.* — *Soient* ψ^* *les opérateurs de Dwork agissant sur* $\mathrm{H}^*(]\mathrm{Y}[, j^\dagger\Omega^{g(g+1)/2}_{]\mathrm{Y}[})$ *définis dans* (19) *par le relèvement surconvergent du Frobenius du théorème* 8.1.1. *Pour le* F*-cristal* $\mathrm{H} = \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{A}/\mathcal{Q})$ *sur* $\mathcal{Q}$, *on a*

$$\begin{aligned}&\prod_{\ell\geq 0}\Big(\det\Big(1 - t\psi^\ell\big|\mathrm{H}^\ell\big(]\mathrm{Y}[, j^\dagger\Omega^{g(g+1)/2}_{]\mathrm{Y}[}\big)\Big)\Big)^{(-1)^{\ell+1+g(g+1)/2}} \\ &\qquad = \prod_{m\geq 0}\mathrm{L}^-_0(\mathrm{Sym}^{2m}\mathrm{H}, p^{sm}t).\end{aligned}$$

Preuve. — Elle découle du théorème 8.1.1 et des propositions 7.1.5 et 8.3.1, grâce à la relation suivante valable pour toute matrice carrée M

$$\frac{1}{\det(1 - t\mathrm{M})} = \sum_{j\geq 0}\mathrm{tr}(\mathrm{Sym}^j\mathrm{M})t^j.$$

8.3.3. *Remarque.* — La fonction $\mathrm{L}^+_0(\mathrm{H}, t)$ est p-adiquement méromophe. C'est une conséquence d'une conjecture de Dwork démontrée par Wan [31,32]. La méromophie pour $g = 1$, due à Dwork [16], découle de la proposition 8.3.2.

A. Trois résultats auxiliaires

A.1. On reprend les notations du début de l'article et on ne suppose plus K de caractéristique 0.

A.1.1. *Lemme. — Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme quasi-fini et plat entre* K*-espaces rigides quasi-compacts et quasi-séparés. Si le rang des fibres rigides de* f *est constant, alors* f *est fini.*

Preuve. — Par le théorème de structure de Raynaud et [8] Théorème 5.2, il existe $g : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme quasi-fini et plat de $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$-schémas formels admissibles quasi-compacts tel que $g_{\mathrm{rig}} = f$. Le morphisme induit sur les fibres spéciales $g_s : \mathfrak{X}_s \to \mathfrak{Y}_s$ est plat et quasi-fini. Soient y un point fermé de $\mathfrak{Y}_s$ et $\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{Y},y}$ la complétion de l'anneaux local de $\mathfrak{Y}$ en y. Soient $x_1, \ldots, x_d$ les points de $\mathfrak{X}_s$ au dessus de y et pour $1 \leq i \leq d$, $\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x_i}$ la complétion de l'anneau local de $\mathfrak{X}$ en x_i. Le morphisme fini et plat $\hat{g}_{x_i} : \mathrm{Spf}(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x_i}) \to \mathrm{Spf}(\hat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{Y},y})$, induit par g, est un modèle du morphisme rigide $]x_i[\to]y[$, induit par f sur les tubes. On en déduit que le morphisme $\sqcup_{i=1}^{d}]x_i[\to]y[$ est fini et plat de rang r le rang constant des fibres rigides de f. Donc la somme des rangs des morphismes $\hat{g}_{x_i}$ vaut r. D'où le rang de la fibre $g_s^{-1}(y)$ est r. Comme $\mathfrak{Y}_s$ est de type fini sur k, alors le rang de toutes les fibres de $g_s : \mathfrak{X}_s \to \mathfrak{Y}_s$ est constant égal à r. On en déduit par [14] Lemme 1.19 que g_s est fini. Par conséquent g et donc f sont finis. □

A.1.2. *Proposition. — Soient* X *et* Y *deux* K*-espaces rigides quasi-compacts et quasi-séparés,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme plat à fibres rigides géométriquement réduites, et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *une section. Alors il existe un ouvert admissible* $\mathrm{X}^{\circ} \subset \mathrm{X}$ *tel que pour tout* $y \in \mathrm{Y}$, X°_y *est la composante connexe de* X_y *contenant* $g(y)$. *De plus, si* X *est un* Y*-groupe alors* X° *est un sous-*Y*-groupe de* X.

Preuve. — Par le théorème de structure de Raynaud, il existe $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$-schémas formels topologiquement de type fini de fibres rigides respectivement X et Y et $h : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$-schémas formels tel que $h_{\mathrm{rig}} = f$. Par le théorème principal de [9], il existe un diagramme commutatif de schémas formels

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{X} \arrow[d] & & \\
\mathfrak{X}'' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d, "h"'] \\
\mathfrak{Y}'' \arrow[r, "\theta"] & \mathfrak{Y}' \arrow[r, "\rho"] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

où

(i) ρ est un éclatement admissible;
(ii) θ est un morphisme quasi-fini, plat, surjectif et rig-étale (i.e. étale au dessus de Y);
(iii) les carrés sont cartésiens;
(iv) $\mathscr{Z} \to \mathfrak{X}''$ est un morphisme fini qui induit un isomorphisme des fibres rigides;
(v) $\mathscr{Z} \to \mathfrak{Y}''$ est plat à fibres géométriquement réduites.

Soit $g'' : \mathfrak{Y}''_{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{X}''_{\mathrm{rig}}$ la section induite par g. Il existe un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathscr{Z}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{Z} \arrow[d] \\
\widetilde{\mathfrak{X}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X}'' \arrow[d] \\
\widetilde{\mathfrak{Y}} \arrow[r] \arrow[uu, bend left=40, "\widetilde{g}"] & \mathfrak{Y}''
\end{tikzcd}$$

où $\widetilde{\mathfrak{Y}} \to \mathfrak{Y}''$ est un éclatement admissible et $\widetilde{g}$ est une section de $\widetilde{h} : \widetilde{\mathscr{Z}} \to \widetilde{\mathfrak{Y}}$ telle que la section rigide associée $\widetilde{g}_{\mathrm{rig}} : \widetilde{\mathfrak{Y}}_{\mathrm{rig}} \to \widetilde{\mathscr{Z}}_{\mathrm{rig}}$ coïncide avec g'' via les isomorphismes $\widetilde{\mathscr{Z}}_{\mathrm{rig}} = \mathscr{Z}_{\mathrm{rig}} \simeq \mathfrak{X}''_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathfrak{Y}}_{\mathrm{rig}} = \mathfrak{Y}''_{\mathrm{rig}}$. Par EGA IV_3 15.6.5, il existe $\widetilde{\mathscr{Z}}^{\circ} \subset \widetilde{\mathscr{Z}}$ un ouvert formel tel que pour tout point $y \in \widetilde{\mathfrak{Y}}_s$, $\widetilde{\mathscr{Z}}^{\circ}_y$ est la composante connexe de $\widetilde{\mathscr{Z}}_y$ qui contient $\widetilde{g}(y)$. Soient $\widetilde{\mathrm{Y}}$, $\widetilde{\mathrm{Z}}$ et $\widetilde{\mathrm{Z}}^{\circ}$ les fibres rigides de $\widetilde{\mathfrak{Y}}$, $\widetilde{\mathscr{Z}}$ et $\widetilde{\mathscr{Z}}^{\circ}$ respectivement. Par [1] Proposition 4.3, pour tout $\widetilde{y} \in \widetilde{\mathrm{Y}}$, $\widetilde{\mathrm{Z}}^{\circ}_{\widetilde{y}}$ est la composante connexe de $\widetilde{\mathrm{Z}}_{\widetilde{y}}$ qui contient $\widetilde{g}_{\mathrm{rig}}(\widetilde{y})$. On a un digramme cartésien de K-espaces rigides

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{Z}} \arrow[r] \arrow[d, shift left, "h_{\mathrm{rig}}"] & \mathrm{X} \arrow[d, shift right, "f"'] \\
\widetilde{\mathrm{Y}} \arrow[r, "\theta_{\mathrm{rig}}"'] \arrow[u, shift left, bend left, "\widetilde{g}_{\mathrm{rig}}"] & \mathrm{Y} \arrow[u, shift right, bend right, "g"']
\end{tikzcd}$$

Soient $\widetilde{y} \in \widetilde{\mathrm{Y}}$ et $y = \theta_{\mathrm{rig}}(\widetilde{y})$. Sous l'identification $\widetilde{\mathrm{Z}}_{\widetilde{y}} = \mathrm{X}_y \times_y \widetilde{y}$, on a $\widetilde{\mathrm{Z}}^{\circ}_{\widetilde{y}} = (\mathrm{X}_y)^{\circ} \times_y \widetilde{y}$ où $(\mathrm{X}_y)^{\circ}$ est la composante connexe de X_y qui contient $g(y)$ car f est plat à fibres rigides géométriquement réduites. Comme θ_{rig} est plat surjectif, alors l'image X° de $\widetilde{\mathrm{Z}}^{\circ}$ par le morphisme $\widetilde{\mathrm{Z}} \to \mathrm{X}$ est un ouvert admissible de X qui vérifie les propriétés requises. Si X est un Y-groupe, alors pour tout $y \in \mathrm{Y}$, X°_y est un sous-groupe de X_y. Donc X° est stable par la loi du groupe et l'inverse de X; c'est un sous-Y-groupe de X. □

A.1.3. *Proposition. — Soient* $\mathfrak{X}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$*-schéma formel normal plat et topologiquement de type fini sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$ *de fibre rigide* X *géométriquement réduite sur* K, $\mathfrak{Y}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$*-schéma formel plat et topologiquement de type fini et* $f : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *un morphisme fini d'intersection complète et rig-étale. Soient* ν *un point générique de* $\mathfrak{X}_s$, $\hat{\mathscr{O}}_\nu$ *le complété de l'anneau local de* $\mathfrak{X}$ *en* ν *et* $\widetilde{\nu} : \mathrm{Spf}(\hat{\mathscr{O}}_\nu) \to \mathfrak{X}$ *le morphisme canonique. Un point* $x \in \mathrm{X}(\mathrm{K}')$, *pour une extension finie* K' *de* K, *définit par adhérence schématique et normalisation un* $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$*-morphisme* $\sigma : \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}) \to \mathfrak{X}$, *appelé prolongement de x. On définit* $\mathfrak{Y}_{\widetilde{\nu}}$ *et* $\mathfrak{Y}_\sigma$ *par le diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Y}_{\widetilde{\nu}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{Y} \arrow[d, "f"] & \mathfrak{Y}_\sigma \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{Spf}(\hat{\mathscr{O}}_\nu) \arrow[r, "\widetilde{\nu}"] & \mathfrak{X} & \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}) \arrow[l, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Alors, il existe un ouvert admissible non-vide $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ *tel que pour toute extension finie* K' *de* K *d'indice de ramification e, et tout point* $x \in \mathrm{V}(\mathrm{K}')$ *de prolongement* $\sigma : \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}) \to \mathfrak{X}$, *on a*

$$c(\mathfrak{Y}_\sigma/\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}) \leq ec(\mathfrak{Y}_{\widetilde{\nu}}/\hat{\mathscr{O}}_\nu).$$

Preuve. — On peut supposer $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathrm{B})$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ affines. Le morphisme f se factorise en

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Spf}(\mathrm{B}\langle x_1, \dots, x_r\rangle) \arrow[dl, "g"] \\
\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathrm{B}) &
\end{tikzcd}$$

où g est la projection canonique et i est une immersion fermée formelle définie par un idéal $\mathrm{I} \subset \mathrm{B}\langle x_1, \dots, x_r\rangle$. En prenant le produit fibré avec $\widetilde{\nu}$, on obtient l'élément $i_{\widetilde{\nu}} : \mathfrak{Y}_{\widetilde{\nu}} \to \mathrm{Spf}(\hat{\mathscr{O}}_\nu\langle x_1, \dots, x_r\rangle)$ de $\mathscr{E}(\mathfrak{Y}_{\widetilde{\nu}}/\hat{\mathscr{O}}_\nu)$. Soient K' une extension finie de K d'indice de ramification e et $\sigma : \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}) \to \mathfrak{X}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$-morphisme. En prenant le produit fibré avec σ, on obtient l'élément $i_\sigma : \mathfrak{Y}_\sigma \to \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}\langle x_1, \dots, x_r\rangle)$ de $\mathscr{E}(\mathfrak{Y}_\sigma/\mathscr{O}_{\mathrm{K}'})$. On désigne par L le corps de fractions de $\hat{\mathscr{O}}_\nu$. Soient $n, m > 0$ des entiers, $a = n/m$, S_σ^a le voisinage tubulaire de i_σ d'épaisseur a (défini sur K') et T^a le voisinage tubulaire de $i_{\widetilde{\nu}}$ d'épaisseur a (défini sur L). Soient $f_1, \dots, f_s \in \mathrm{I}^m$ des générateurs de I^m. On considère le morphisme de schémas formels

$$\phi : \mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}\big(\mathrm{B}\langle x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\rangle/\big(\pi^n y_j - f_j, 1 \leq j \leq s\big)\big) \longrightarrow \mathfrak{X}$$

et les produits fibrés

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Z}_{\widetilde{\nu}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{Z} \arrow[d] & \mathfrak{Z}_\sigma \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{Spf}(\hat{\mathscr{O}}_\nu) \arrow[r, "\widetilde{\nu}"] & \mathfrak{X} & \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}) \arrow[l, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

On a

$$\mathfrak{Z}_{\sigma} = \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}\langle x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s\rangle/(\pi^n\sigma^* f_j - y_j)),$$
$$\mathfrak{Z}_{\widetilde{\nu}} = \mathrm{Spf}(\hat{\mathscr{O}}_{\nu}\langle x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s\rangle/(\pi^n\widetilde{\nu}^* f_j - y_j)).$$

Par conséquent $\mathfrak{Z}_{\sigma}$ est un modèle de S^{ea}_{σ} sur $\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}$ et $\mathfrak{Z}_{\widetilde{\nu}}$ est un modèle de T^{a} sur $\hat{\mathscr{O}}_{\nu}$.

Par le théorème principal de [9], il existe un diagramme commutatif de schémas formels

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{Y}'' \arrow[d] & & \\
\mathfrak{Z}'' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{Z}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{Z} \arrow[d] \\
\mathfrak{X}'' \arrow[r, "h"] & \mathfrak{X}' \arrow[r, "\rho"] & \mathfrak{X}
\end{tikzcd}$$

où

(i) ρ est un éclatement admissible;
(ii) h est un morphisme quasi-fini, plat, surjectif et il est étale au dessus de $\mathfrak{X}'_{\eta}$;
(iii) les carrés sont cartésiens;
(iv) $\mathscr{Y}'' \to \mathfrak{Z}''$ est un morphisme fini qui induit un isomorphisme des fibres génériques;
(v) $\mathscr{Y}'' \to \mathfrak{X}''$ est plat à fibres géométriquement réduites.

En appliquant le même théorème au morphisme $\mathfrak{X}'' \to \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}})$, on trouve une extension finie séparable M de K et un morphisme fini $\mathfrak{X}^{+} \to \mathfrak{X}'' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{K}}} \mathscr{O}_{\mathrm{M}}$ qui induit un isomorphisme sur les fibres génériques, tel que le morphisme $\mathfrak{X}^{+} \to \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{M}})$ soit plat à fibre spéciale géométriquement réduite. Comme l'espace rigide $\mathfrak{X}''_{\eta}$ est normal, [1] lemma 4.1 implique que pour toute extension finie séparable M′ de M, le schéma formel $\mathfrak{X}^{+} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{M}}} \mathscr{O}_{\mathrm{M}'}$ est normal. Comme $\mathfrak{X}$ est normal, il existe un sous-schéma formel ouvert $\mathfrak{X}'_{\circ} \subset \mathfrak{X}'$ tel que ρ induit un isomorphisme $\mathfrak{X}'_{\circ} \simeq \rho(\mathfrak{X}'_{\circ})$ et ν est l'unique point générique de la fibre spéciale de $\rho(\mathfrak{X}'_{\circ})$. En rétrécissant $\mathfrak{X}'_{\circ}$, on peut supposer que le morphisme $h^{+} : \mathfrak{X}^{+}_{\circ} = \mathfrak{X}^{+} \times_{\mathfrak{X}'} \mathfrak{X}'_{\circ} \to \mathfrak{X}'_{\circ}$ est plat. En effet, le morphisme $\mathfrak{X}^{+} \to \mathfrak{X}'$ est rig-plat et plat au dessus du point générique ν (car $\mathfrak{X}$ est normal). Quitte à remplacer M par une extension finie séparable, on peut trouver un ouvert formel $\mathscr{V} \subset \mathfrak{X}^{+}_{\circ}$ tel que la fibre spéciale $\overline{\mathscr{V}}$ de $\mathscr{V} \to \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{M}})$ soit géométriquement intègre et lisse sur le corps résiduel de $\mathscr{O}_{\mathrm{M}}$. Soient $\mathscr{U} = \mathscr{V} \times_{\mathfrak{X}''} \mathscr{Y}''$, $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\mathscr{V}} \times_{\mathfrak{X}''} \mathscr{Y}''$, β le point générique de $\overline{\mathscr{V}}$, $\hat{\mathscr{O}}_{\beta}$ la complétion de l'anneau local de $\mathscr{V}$ en β et $\widetilde{\beta} : \mathrm{Spec}(\hat{\mathscr{O}}_{\beta}) \to \mathscr{V}$ le morphisme canonique.

A.1.4. *Lemme. — Quitte à rétrécir $\mathscr{V}$, on peut supposer que pour tout point fermé t de $\overline{\mathscr{V}}$, on a $\#\pi_0(\overline{\mathscr{U}}_\beta) \leq \#\pi_0(\overline{\mathscr{U}}_t)$, où π_0 désigne l'ensemble des composantes connexes géométriques.*

Preuve. — Soit $\mathrm{H} \to \overline{\mathscr{V}}$ un morphisme étale avec H connexe, donc intègre de point générique γ, tel que les composantes connexes de $\overline{\mathscr{U}}_\gamma$ soient géométriquement connexes. On considère le morphisme $\overline{\mathscr{U}} \times_{\overline{\mathscr{V}}} \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ qui est plat à fibre géométriques réduites. Comme H est géométriquement unibranche, EGA IV 18.9.11 et la remarque après 18.9.7 montrent que les composantes connexes de $\overline{\mathscr{U}} \times_{\overline{\mathscr{V}}} \mathrm{H}$ sont en bijection avec ceux de $\overline{\mathscr{U}}_\gamma$. Le lemme s'ensuit. □

Par platitude, $h^+(\mathscr{V})$ est un ouvert de $\mathfrak{X}'_\circ \subset \mathfrak{X}$. Sa fibre générique définit un ouvert rigide $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$. Soient K′ une extension finie de K d'indice de ramification e, $x \in \mathrm{V}(\mathrm{K}')$ et $\sigma : \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}'}) \to h^+(\mathscr{V})$ son prolongement. Comme $h^+ : \mathfrak{X}^+_\circ \to \mathfrak{X}'_\circ$ est quasi-fini plat et surjectif, il existe une extension finie K″ de K′ et un morphisme $\alpha : \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}''}) \to \mathscr{V}$ qui relève σ. On considère le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U}_{\widetilde{\beta}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{U} \arrow[d] & \mathscr{U}_\alpha \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{Spf}(\hat{\mathscr{O}}_\beta) \arrow[r, "\widetilde{\beta}"] & \mathscr{V} & \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{K}''}) \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

qui définit $\mathscr{U}_{\widetilde{\beta}}$ et $\mathscr{U}_\alpha$. Alors $\mathscr{U}_\alpha$ est un modèle affine de S^{ea}_σ sur $\mathscr{O}_{\mathrm{K}''}$, de fibre spéciale $\overline{\mathscr{U}}_\alpha$ géométriquement réduite. On en déduit par [1] Proposition 4.3 que $\pi_0(\overline{\mathscr{U}}_\alpha) \simeq \pi_0(\mathrm{S}^{ea}_\sigma)$. Par ailleurs, $\hat{\mathscr{O}}_\beta$ est une extension finie de $\hat{\mathscr{O}}_\nu$, génériquement étale, et $\mathscr{U}_{\widetilde{\beta}}$ est un modèle affine de T^a sur $\hat{\mathscr{O}}_\beta$, de fibre spéciale $\overline{\mathscr{U}}_\beta$ géométriquement réduite. On en déduit par [1] Proposition 4.3 que $\pi_0(\overline{\mathscr{U}}_\beta) \simeq \pi_0(\mathrm{T}^a)$. Supposons $a > c(\mathscr{Y}_{\widetilde{\nu}}/\hat{\mathscr{O}}_\nu)$, alors $\#\pi_0(\mathrm{T}^a) = [\mathrm{Y} : \mathrm{X}]$. D'où par le lemme A.1.4, on a $\#\pi_0(\mathrm{S}^{ea}_\sigma) \geq [\mathrm{Y} : \mathrm{X}]$. Donc $\#\pi_0(\mathrm{S}^{ea}_\sigma) = [\mathrm{Y} : \mathrm{X}]$ par la proposition 2.1.2. On en déduit que $ea > c(\mathscr{Y}_\sigma/\mathscr{O}_{\mathrm{K}'})$. La proposition s'ensuit. □

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Abbes and T. Saito, Ramification of local fields with imperfect residue fields, *Am. J. Math.*, **124** (2002), 879–920.
2. A. Abbes and T. Saito, Ramification of local fields with imperfect residue fields II, *Documenta Math.*, volume en l'honneur de K. Kato (2003), 5–72.
3. P. Berthelot, Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, première partie, Prépublication **96–03** de Rennes (1996).
4. P. Berthelot, Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, *Invent. Math.*, **128** (1997), 329–377.
5. S. Bloch and K. Kato, *p*-adic étale cohomology, *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, **63** (1986), 107–152.
6. S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert, Non–Archimedean Analysis, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics **261**, Springer–Verlag (1984).
7. S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud, Néron models, Ergebnisse der Mathematik **21** (1990), Springer-Verlag.

8. S. Bosch and W. Lütkebohmert, Formal and rigid geometry, II. Flattening techniques, *Math. Ann.*, **296** (1993), 403–429.
9. S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud, Formal and rigid geometry, IV. The reduced fiber theorem, *Invent. Math.*, **119** (1995), 361–398.
10. R. Coleman, Classical and overconvergent modular forms, *Invent. Math.*, **124** (1996), 215–241.
11. R. Coleman, p-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.*, **127** (1997), 417–479.
12. A. J. de Jong, Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry, *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, **82** (1995), 5–96.
13. P. Deligne and L. Illusie, Cristaux ordinaires et coordonnées canoniques, avec Appendice de N. Katz, dans : *Surface algébriques*, éd. J. Giraud, L. Illusie, M. Raynaud, *Lect. Notes Math.*, **868** (1981), 80–137.
14. P. Deligne and M. Rapoport, Les schémas de modules de courbes elliptiques, *Lect. Notes Math.*, **349** (1973), 143–316.
15. B. Dwork, p-adic cycles, *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, **37** (1969), 27–115.
16. B. Dwork, On Hecke polynomials, *Invent. Math.*, **12** (1971), 249–256.
17. R. Elkik, Solution d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér.*, **6** (1973), 553–604.
18. G. Faltings and C.-L. Chai, Degeneration on abelian varieties, Ergebnisse der Mathematik **22** (1990), Springer-Verlag.
19. J.-M. Fontaine, Formes différentielles et Modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, *Invent. Math.*, **65** (1982), 379–409.
20. J.-M. Fontaine and W. Messing, p-adic periods and p-adic étale cohomology, *Cont. Math.*, **67** (1987), 179–207.
21. R. Hartshorne, Algebraic geometry, Springer-Verlag (1977).
22. K. Kato, Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case, *Cont. Math.*, **83** (1989), 101–131.
23. K. Kato, On p-adic vanishing cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing), *Adv. Stud. Pure Math.*, **10** (1987), 207–251.
24. N. Katz, p-adic properties of modular schemes and modular forms, dans : *Modular functions of one variable, III* (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), *Lect. Notes Math.*, **350** (1973), 69–190.
25. N. Katz, Serre-Tate local moduli, dans : *Surface algébriques*, éd. J. Giraud, L. Illusie, M. Raynaud, *Lect. Notes Math.*, **868** (1981), 138–202.
26. P. Monsky, Formal cohomology: III. Fixed point theorems, *Ann. Math.*, **93** (1971), 315–343.
27. P. Monsky and G. Washnitzer, Formal cohomology: I, *Ann. Math.*, **88** (1968), 181–217; Formal cohomology: II. The cohomology sequence of a pair, *Ann. Math.*, **88** (1968) 218–238.
28. L. Moret-Bailly, Pinceaux de variétés abéliennes, *Astérisque*, **129** (1985).
29. D. Mumford, Geometric invariant theory, Springer-Verlag (1965).
30. M. Raynaud, Schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **102** (1974), 241–280.
31. D. Wan, Higher rank case of Dwork's conjecture, *J. Am. Math. Soc.*, **13** (2000), 807–852.
32. D. Wan, Rank one case of Dwork's conjecture, *J. Am. Math. Soc.*, **13** (2000), 853–908.

A. A. & A. M.
CNRS UMR 7539,
LAGA, Institut Galilée,
Université Paris-Nord,
93430 Villetaneuse, France
abbes@math.univ-paris13.fr
mokrane@math.univ-paris13.fr

Manuscrit reçu le 2 mai 2003.