THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

JACQUES LÉVY

Les approches dans le problème des trois corps

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1943

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1943__252__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

N° D'ORDRE :
2888
Série A.
N° de Série 2021

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR JACQUES LÉVY

1re THÈSE. — LES APPROCHES DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

2e THÈSE. — LA DÉTERMINATION DES ORBITES DES ÉTOILES DOUBLES.

Soutenues le 20 février 1943 devant la Commission d'examen.

MM. ESCLANGON, *Président.*

CHAZY, TREMBLOT, } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55
1943

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyens honoraires..... M. MOLLIARD. C. MAURAIN.

Doyen..... PAUL MONTEL, *Professeur*, Théorie des fonctions.

Professeurs honoraires

LÉON BRILLOUIN.	LAPICQUE.	BOHN.	J. DRACH.
AUGER.	G. BERTRAND.	RABAUD.	M. GUICHARD.
DANGEARD.	CH. FABRY.	CAULLERY.	LABROUSTE.
LESPIEAU.	LÉON BERTRAND.	CARTAN.	
VESSIOT.	WINTREBERT.	É. BOREL.	
PORTIER.	DUBOSCQ.	A. COTTON.	

PROFESSEURS

CHARLES PÉREZ.....	T	Zoologie.
L. BLARINGHEM ...	T	Botanique.
G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN.....	T	Minéralogie.
A. DENJOY.....	T	Géométrie supérieure.
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
G. BRUHAT.....	T	Physique.
E. DARMOIS.....	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE.....	T	Physique générale et Radioactivité.
L. DUNOYER.....	T	Chimie physique.
M. JAVILLIER.....	T	Chimie biologique.
HENRI VILLAT.....	T	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB.....	T	Géologie.
P. PASCAL.....	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET.....	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON.....	T	Astronomie.
H. BÉGHIN.....	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER.....	T	Électrotechnique générale.
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN.....		Optique appliquée.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY.....		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES.....	T	Physiologie végétale.
GARNIER.....	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.
PÉRÈS.....	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL.....	T	Chimie minérale.
TOUSSAINT.....		Technique aéronautique.
M. CURIE.....		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD.....	T	Hautes températures.
CHAZY.....	T	Mécanique rationnelle.
GAULT.....	T	Chimie (P. C. B.).
CROZE.....		Physique théorique et Physique céleste.
DUPONT.....	T	Théories chimiques.
VALIRON.....	T	Calcul différentiel et intégral.
BARRABÉ.....		Géologie structurale et Géologie appliquée.
MILLOT.....		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN.....		Théories physiques.
VAVON.....	T	Analyses et mesures chimiques.
G. DARMOIS.....	T	Mathématiques générales.
CHATTON.....	T	Biologie maritime.
AUBEL.....		Chimie biologique.
JACQUES BOURCART.		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL.....		Biologie végétale (P.C.B.).
CABANNES.....	T	Recherches physiques.
GRASSÉ.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
PRÉVOST.....		Chimie organique.
BOULIGAND.....		Mathématiques.
CHAUDRON.....		Chimie (P. C. B.).
WYART.....		Minéralogie.
TEISSIER.....		Zoologie.
MANGENOT.....		Biologie végétale (P. C. B.).
P. AUGER.....		Physique.
MONNIER.....		Physiologie générale.
PIVETEAU.....		Géologie.
ROCARD.....		Physique.
H. CARTAN.....		Calcul différentiel.
SCHAEFFER.....	T	Physiologie générale.
LAFFITTE.....		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.

A MONSIEUR JEAN CHAZY

MEMBRE DE L'INSTITUT

Hommage de respectueuse gratitude.

PREMIÈRE THÈSE.

LES APPROCHES

DANS

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

INTRODUCTION.

1. *Stabilité du système solaire et problème des trois corps.* — L'une des questions fondamentales qui se posèrent aux fondateurs de la Mécanique céleste concerne la stabilité du système solaire. Laplace ouvrit la voie des recherches et démontra que les grands axes des orbites des planètes ne présentent pas de variation séculaire, à l'approximation du premier ordre par rapport aux masses et du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Lagrange obtint le même résultat, mais sans restriction relative aux excentricités ou aux inclinaisons. Poisson constata qu'en considérant l'approximation du second ordre par rapport aux masses, on n'introduit pas davantage de termes séculaires; mais, cette fois, apparaissent des termes mixtes, produits de termes séculaires par des termes périodiques.

Ces démonstrations se trouvaient en défaut pour des planètes ayant des moyens mouvements commensurables; ce cas fut l'objet des recherches de Delaunay, Tisserand, Gylden, qui aboutirent à des résultats voisins de ceux obtenus dans le cas général.

C'est improprement que ces divers résultats furent chacun à leur tour considérés comme la démonstration de la stabilité du système solaire; il en ressort néanmoins la certitude que, sous l'action de l'attraction newtonienne, le système solaire ne risque pas de se désagréger, du moins d'ici une époque extrêmement éloignée. Or d'autres actions interviennent dans l'évolution du système solaire, dont l'énergie se dissipe dans différents phénomènes irréversibles : frottements dus aux marées, frottements internes, phénomènes

magnétiques. Cette dissipation, très lente, offre cependant des manifestations qui nous sont perceptibles, par exemple l'égalité des vitesses de rotation et de révolution pour la Lune. Il est certain que les termes négligés dans la démonstration mathématique de la stabilité du système solaire sont aussi négligeables devant ceux, d'ailleurs inconnus, dus à l'aspect physique de la question.

Est-ce à dire que le mathématicien doive abandonner ce sujet ? Nous ne le croyons pas. En premier lieu, des résultats, qui ne sont pas utilisables aujourd'hui, peuvent pourtant l'être, directement, lorsque, [pour reprendre les paroles de Poincaré (1)], dans quelques siècles, l'accumulation et l'accroissement de précision des observations exigeront un instrument de calcul infiniment plus précis que celui dont nous disposons actuellement. Mais surtout, sans ouvrir de débat sur la science pure, — et pourtant, c'est bien auprès des astronomes que la cause devrait être gagnée, — il faut reconnaître que la Mécanique céleste offre un choix d'exemples, d'une rare richesse, quant à l'utilisation pratique des résultats théoriques qui y semblaient le moins destinés. Rappelons seulement les premières recherches sur les mouvements périodiques dans le problème des trois corps; ces mouvements, si différents des mouvements réels, servirent cependant de base à la belle théorie de la Lune de Hill. Dans un autre ordre d'idées, la convergence des séries du mouvement elliptique est limitée par la valeur 0,6627 de l'excentricité; cette valeur résulte de l'existence de points critiques correspondant à certaines valeurs imaginaires de l'anomalie excentrique.

C'est donc sans scrupules que nous aborderons l'examen de certains phénomènes qu'on rencontre dans l'étude rigoureuse de la stabilité, mais qui ne se présentent pas dans la réalité.

Un mouvement est stable, au sens de Lagrange, si les éléments ne s'écartent jamais beaucoup de leurs valeurs initiales; il présente la stabilité à la Poisson si ses éléments redeviennent une infinité de fois très voisins des éléments initiaux. Les mouvements des planètes font très probablement partie des mouvements possédant la stabilité à la Poisson; Poincaré le pressentait, et, depuis un important résultat qu'a obtenu M. Chazy (2), il ne reste qu'une lacune à combler pour en achever la démonstration. Mais la stabilité au sens de Lagrange est loin d'être établie pour eux, et il est possible qu'ils ne la présentent pas. Il aurait suffi, pour éclaircir ce point, de déterminer l'*allure finale* des mouvements. Or l'*étude locale* des trajectoires fut longtemps le seul moyen d'aborder le difficile problème des trois corps (3), en dehors cependant

(1) *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Introduction.

(2) *Journ. de Math.*, t. VIII, 1929, p. 353-380.

(3) C'est à ce problème que se limite en principe tout ce qui suit, quoique certains résultats aient une portée plus étendue, qui se trouve alors précisée.

de cas très particuliers où les rapports des distances mutuelles restent constants ([1]). C'est Poincaré qui, le premier, envisagea certains mouvements plus généraux pour toutes les valeurs du temps, en établissant l'existence de solutions périodiques ([2]). D'autres résultats concernant l'allure finale des mouvements ont été obtenus depuis; on a même pu étudier complètement de ce point de vue toute une classe de mouvements, celle des mouvements rectilignes pour lesquels la constante des forces vives est nulle ([3]); mais il s'agit là d'un domaine trop restreint pour être utilisable dans le problème qui nous occupe. Sans qu'une détermination complète de l'allure finale des mouvements soit nécessaire pour décider de la stabilité (au sens de Lagrange), il faut tout au moins savoir *si les distances mutuelles sont bornées* (inférieurement et supérieurement) lorsque le temps prend des valeurs infiniment grandes.

De nombreux résultats concernant les maxima des distances mutuelles sont actuellement acquis. Ils sont dus pour la plupart aux travaux de M. Chazy ([4]), qui établit en outre, au sujet des minima de ces distances, que deux corps ne peuvent tendre l'un vers l'autre lorsque le temps croît indéfiniment, du moins si le vecteur des aires est différent de zéro. Cette dernière condition est supposée vérifiée dans tout ce qui suit. C'est l'ensemble des mouvements donnant lieu à des minima nuls que nous allons considérer plus particulièrement, en vue de l'étude de leur stabilité.

2. *Chocs et approches.* — Nous envisageons ici le cas où l'un des minima des distances mutuelles est nul.

Il peut arriver que la distance correspondante s'annule effectivement au bout d'un temps fini; on se trouve en présence d'un *choc*.

Dans le cas contraire, la distance, qui ne peut tendre vers zéro, s'en rapproche de façon arbitraire à certains instants, reprenant toujours par la suite des valeurs supérieures à un nombre positif fixe. Nous dirons alors qu'il y a *approche*.

Les mouvements avec choc binaire et les mouvements avec approche sont des mouvements, sinon voisins, du moins complémentaires. Deux corps ne tendant pas l'un vers l'autre lorsque le temps croît indéfiniment, un choc dont l'époque serait rejetée à l'infini prendrait la forme d'une approche. Nous verrons

---

([1]) Ces mouvements se divisent en deux catégories : mouvements d'Euler, au cours desquels les trois corps restent alignés; mouvements de Lagrange, au cours desquels ils forment un triangle équilatéral.

([2]) *Bull. astron.*, t. I, p. 65. Antérieurement, mais dans un cas où les masses ont des valeurs relatives très particulières. Hill (*Amer. J. of Math.*, t. I) avait déjà signalé une catégorie de solutions périodiques.

([3]) J. Chazy, *Bull. Soc. math. de France*, t. 55, 1927, p. 222-268.

([4]) Outre l'article du *Journal de Mathématiques* mentionné plus haut, *voir* notamment : *Ann. Éc. Norm.*, t. 39, 1922, p. 29-130; *Bull. astron.*, t. 8, 1934, p. 403-436. Le premier de ces deux Mémoires, dans les références qui y seront faites désormais, sera désigné par (A).

aussi que, dans une certaine classe de mouvements, les mouvements avec choc présentent en général des approches. Cette parenté entre ces deux sortes de mouvements nous obligera souvent, pour l'étude des mouvements avec approche, à envisager ceux avec choc. C'est pourquoi nous consacrons un premier chapitre aux chocs. Nous démontrons ensuite l'existence effective des mouvements avec approche parmi les mouvements correspondant aux deux principales classes de conditions initiales.

Cette existence demande en effet à être établie. Il est vrai que des approches ont été obtenues dans un problème voisin du problème des trois corps, celui d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance [1]; elles se présentent alors, dans le cas des trajectoires planes. Mais on n'a pas encore signalé d'exemple de tels mouvements dans le problème des trois corps. En voici un :

Supposons que deux des trois corps aient des masses nulles; ils décrivent chacun, par rapport au troisième, une orbite plane du second degré; supposons que ces orbites soient elliptiques, se coupent en un point A (sans être nécessairement dans un même plan), et de plus soient décrites en des périodes T et T′ non commensurables. Le mouvement relatif des deux masses nulles n'est alors pas périodique; les deux masses se choquent une fois au plus; supposons, pour simplifier le raisonnement, qu'elles se choquent effectivement. L'intervalle de temps, qui sépare les passages de l'une et de l'autre au point A, est de la forme $nT - n'T'$, n et n' étant deux entiers. On sait que, T et T′ étant incommensurables, on peut trouver deux entiers n et n' tels que la différence $nT - n'T'$ soit arbitrairement petite. Le mouvement relatif des deux masses présente donc le phénomène d'approche.

Cet exemple isolé ne permet pas de conclure quant à l'existence d'approche lorsque les masses des trois corps sont quelconques. Nous traiterons le cas général, sous la réserve, toutefois, que nous supposons le vecteur des aires différent de zéro.

3. *Résultats obtenus.* — Le Chapitre I est consacré aux chocs binaires dans le problème des trois corps. La trajectoire relative des corps entrant en collision possède un point de rebroussement de seconde espece en général; son plan osculateur passe par la position du troisième corps à l'instant du choc. Les éléments osculateurs relatifs à cette trajectoire présentent certaines discontinuités, mais leurs valeurs absolues sont stationnaires, à un degré assez élevé par rapport au temps.

Envisageant ensuite les trajectoires avec choc dans leur ensemble, nous précisons la signification et la portée des conditions de choc qu'a obtenues M. Kiveliovitch; nous montrons que, de même que les trajectoires avec choc

---

(1) ANDRADE, *J. Éc. Polytech.*, 60e cahier, p. 55.

satisfont à deux conditions, les trajectoires présentant plus d'un choc satisfont à quatre conditions, et existent effectivement.

Les mouvements du problème des trois corps, ainsi que nous le rappelons à la fin du paragraphe 5, se divisent en deux grandes catégories : ceux pour lesquels une distance mutuelle au moins tend vers l'infini avec le temps (mouvements à allure binaire), et ceux pour lesquels les distances mutuelles restent finies, ou reprennent des valeurs finies après tout laps de temps (mouvements bornés et oscillants).

Dans le Chapitre II, nous recherchons ceux des mouvements à allure binaire qui présentent une approche. Parmi les mouvements plans, nous montrons d'abord comment on peut choisir des conditions initiales conduisant de façon certaine à une approche. Les mouvements avec approche non plans sont ensuite mis en évidence; ils doivent satisfaire à trois conditions, les mouvements plans à une seule.

L'allure finale des mouvements à allure binaire offre une certaine continuité, et est beaucoup plus facile à étudier que celle des mouvements bornés ou oscillants sur lesquels on sait très peu de choses. C'est pourtant parmi ceux-ci que se classent vraisemblablement les mouvements des planètes. Tout progrès à ce sujet serait souhaitable. D'après le principal des rares résultats acquis dans ce domaine, les trajectoires possèdent la stabilité à la Poisson, sauf certaines d'entre elles, dites *exceptionnelles*. Ces dernières, dans l'espace où l'on représente habituellement les solutions des équations différentielles, — les coordonnées y sont les conditions initiales relatives à chaque solution, — ne peuvent remplir un volume de mesure non nulle. Nous démontrons, dans le Chapitre III, qu'elles ne peuvent remplir aucun continuum fini et fermé, quel que soit le nombre de ses dimensions.

Pour étudier les mouvements avec approche, nous sommes ici obligés d'envisager deux cas, selon que les trajectoires avec choc sont en général des trajectoires non exceptionnelles, ou selon qu'elles sont toutes exceptionnelles. Il est extrêmement probable que cette seconde hypothèse n'est pas réalisée, mais, en toute rigueur, il nous la faut formuler. Dans le premier cas, nous voyons que toutes les trajectoires avec choc présentent des approches. Peut-être y a-t-il d'autres trajectoires avec approche; peut-être même, dans certaines conditions, toutes les trajectoires en présentent. Il ne semble pas qu'on puisse actuellement répondre à ces questions.

Si le second cas se produisait, il y aurait aussi des trajectoires avec approche; nous en mettons en effet encore en évidence, mais si peu nombreuses qu'elles ne présentent guère d'intérêt; ce résultat pourra toutefois être considéré comme satisfaisant, puisqu'il s'agit d'une hypothèse qui n'est faite que pour le principe, et dont il ne semble pas qu'il y ait lieu d'approfondir les conséquences.

Nous sommes amenés, au cours du raisonnement, à étudier la disposition des trajectoires au voisinage d'une trajectoire périodique. Une classification sommaire des différents cas possibles montre que ce problème n'est pas sans analogie avec celui de la distribution des solutions d'une équation différentielle du premier ordre au voisinage d'un point singulier (nœud, col, foyer ou centre). Entre autres, nous envisageons une trajectoire périodique de laquelle toutes les trajectoires voisines se tiennent à distance bornée inférieurement; les trajectoires voisines ont une disposition assez caractéristique, et en particulier restent bornées. Si une telle trajectoire existe parmi les trajectoires du problème des trois corps, il y a stabilité, au sens de Lagrange, pour toute trajectoire correspondant à des conditions initiales convenablement choisies entre certaines limites.

Les mouvements bornés et oscillants, qui sont les plus intéressants du fait de leur existence réelle, se prêtent mal aux calculs; leur étude nécessite la formation d'hypothèses mal contrôlables; il serait cependant désirable qu'elle soit poursuivie, et que les mouvements oscillants, qui présentent une certaine analogie avec les mouvements avec approche, soient d'abord décelés. Mais le problème de la stabilité n'aura fait un progrès important que lorsqu'on saura comment se classent, au moins de façon statistique, les trajectoires avec approche et les trajectoires oscillantes parmi l'ensemble des trajectoires envisagées.

Je tiens à exprimer ici ma respectueuse gratitude à M. Jean Chazy, qui m'a suggéré d'entreprendre ce travail, et qui n'a cessé de me prodiguer conseils et encouragements pendant sa préparation. Je dois aussi remercier M. Ernest Esclangon qui, m'ayant introduit dans le domaine de l'Astronomie, y a guidé mes premiers pas avec une bienveillante sollicitude.

CHAPITRE I.

LES CHOCS.

4. *Considérations générales.* — Les trajectoires correspondant aux solutions du problème des trois corps n'ont été primitivement considérées que dans la mesure où elles contribuaient directement à l'étude des mouvements des corps célestes. Les orbites de forte excentricité n'étaient pas envisagées; et le mouvement newtonien rectiligne n'était qu'une curiosité mathématique. Au cours de ce mouvement rectiligne, les deux corps, s'ils ne s'écartent pas l'un de l'autre avec une vitesse excessive à l'instant initial, se rapprochent tôt ou tard, puis se rencontrent (collision ou *choc*). Le mouvement semble alors terminé; et il fut longtemps regardé comme tel.

A la fin du XIXe siècle, l'étude *locale* des trajectoires du problème des trois corps paraissant épuisée, on en vint à considérer les trajectoires dans leur totalité et dans leur ensemble. Dans cet ensemble, on rencontra les trajectoires avec choc; il fallut examiner dans quelle mesure elles se distinguaient des autres trajectoires. La question, posée par Painlevé [1], fut abordée avec succès par Levi-Civita, puis tranchée par M. Sundman. Ce dernier démontra que, dans un mouvement ne comportant pas de choc triple, circonstance qui n'est à craindre que dans un mouvement plan pour lequel la constante des aires est nulle, les équations différentielles du problème des trois corps définissent, quel que soit le temps, un système de valeurs réelles et continues pour les coordonnées.

Du point de vue analytique, il n'y a donc pas lieu de considérer le mouvement comme étant interrompu par un choc binaire. C'est un résultat qui se conçoit aisément : considérons, deux corps A et B seulement étant en présence, le mouvement du point matériel B par rapport au point A; à l'instant initial $t = 0$, nous supposons fixés la position du point B, en B_0, ainsi que le support de la vitesse de B, qui sera quelconque, mais distinct de la droite AB; faisons varier la mesure V de cette vitesse sur son support orienté arbitrairement. Dans ces différents mouvements, les trajectoires relatives de B sont des coniques [2] (ou des portions de coniques); ce sont des ellipses si V est, en valeur absolue,

---

[1] *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, 1897, p. 582.

[2] Faisant partie d'un faisceau linéaire tangentiel.

inférieur à la valeur conduisant à un mouvement parabolique. $V = 0$ donne un mouvement rectiligne. Pour $V > 0$, les trajectoires sont les mêmes que pour $V < 0$, mais le sens de parcours est inversé. La projection P du point B sur la droite AB_0 est animée d'un mouvement oscillatoire, dont les éléments varient de façon continue lorsque V passe des valeurs négatives aux valeurs positives; ce mouvement se confond avec celui de B lorsque V est nul. Les équations différentielles définissant le mouvement de B admettent ainsi une solution périodique pour le mouvement rectiligne, qui, du point de vue analytique, se prolonge au delà des rencontres de B avec A. Ces rencontres ont l'allure de véritables chocs entre corps parfaitement élastiques.

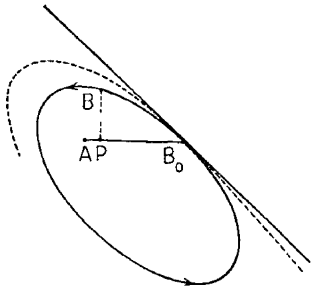


Fig. 1.

Si un choc a lieu en présence d'un troisième corps C n'y participant pas, l'action de ce dernier sur les deux autres, qui est infiniment petite devant les forces mises en jeu par A et B, peut être considérée comme constante pendant un court instant au moment du choc, et n'ayant d'influence que sur le mouvement du centre de gravité de A et B, non sur leur mouvement relatif. La rencontre conserve son allure de choc élastique, et le mouvement se poursuit.

Il n'en est pas de même si le choc est triplé, les forces perturbatrices dues à C sont de l'ordre de grandeur de celles développées entre A et B; en fait, le prolongement analytique du mouvement n'est, en général, pas possible dans ce cas.

Ainsi, les chocs binaires ne conduisent pas à un arrêt du mouvement. Cependant, les trajectoires présentent au voisinage de l'instant du choc certaines particularités que nous allons tout d'abord mettre en évidence.

Nous dirons ensuite quelques mots des trajectoires comportant un ou plusieurs chocs, trajectoires que nous serons par la suite amenés à envisager parmi les trajectoires avec approche. La marche suivie ici sera celle que M. Kiveliovitch introduit dans son Mémoire ([1]) sur les points singuliers du

([1]) *Bull. astron.*, t. 7, 1931, p. 75-127. L'introduction de ce Mémoire contient une bibliographie assez complète de la question des chocs.

problème des trois corps. Nous aurons l'occasion d'utiliser certains de ses résultats, et d'en discuter d'autres.

5. *Notations. Représentation des mouvements du problème des trois corps.* — Pour définir le mouvement des trois corps P_0, P et P′, nous utiliserons les deux mouvements relatifs habituellement considérés, et les mouvements osculateurs qui leur correspondent :

1° Le mouvement du point matériel P (de masse m_2) par rapport au point P_0 (de masse m_1), que nous désignerons dans la suite sous la forme : mouvement P/P_0. x, y et z sont les coordonnées de P par rapport à P_0, r désigne la longueur P_0P. Le mouvement osculateur correspondant est le mouvement d'un point matériel soumis seulement, de la part d'une masse de valeur $m_1 + m_2$ placée en P, à une attraction en raison inverse du carré de la distance. A l'instant t, ce point aurait pour coordonnées x, y, z, et pour vitesse, par rapport à P_0, un vecteur de composantes $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$.

2° Le mouvement du point matériel P′ (de masse m_3) par rapport au centre de gravité G des deux autres masses, que nous désignerons sous la forme : mouvement P′/G. ξ, η et ζ sont les coordonnées de P′ par rapport à G, ρ désigne la longueur GP′. Le mouvement osculateur correspondant est le mouvement d'un point matériel soumis seulement, de la part d'une masse de valeur $m_1 + m_2 + m_3$ placée en G, à une attraction en raison inverse du carré de la distance. A l'instant t, ce point aurait pour coordonnées ξ, η, ζ, et pour vitesse, par rapport à G, un vecteur de composantes

$$\xi' = \frac{d\xi}{dt}, \qquad \eta' = \frac{d\eta}{dt}, \qquad \zeta' = \frac{d\zeta}{dt}.$$

Si l'on pose

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \qquad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \qquad M = m_1 + m_2 + m_3,$$

les équations différentielles classiques du mouvement peuvent s'écrire :

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^2\overrightarrow{P_0P}}{dt^2} = -\frac{m_1 + m_2}{r^3}\overrightarrow{P_0P} - m_3\left(\frac{a_1}{\overline{P_0P'}^3} + \frac{a_2}{\overline{PP'}^3}\right)\overrightarrow{P_0P'} + m_3\left(\frac{1}{\overline{PP'}^3} - \frac{1}{\overline{P_0P'}^3}\right)\overrightarrow{GP'},$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2\overrightarrow{GP'}}{dt^2} = -M\left(\frac{a_1}{\overline{PP'}^3} + \frac{a_2}{\overline{P_0P'}^3}\right)\overrightarrow{GP'} + a_1a_2M\left(\frac{1}{\overline{PP'}^3} - \frac{1}{\overline{P_0P'}^3}\right)\overrightarrow{P_0P}.$$

Trois des quatre intégrales premières du système expriment que le vecteur des aires,

$$\frac{(m_1 + m_2)m_3}{M}\left(\overrightarrow{GP'} \times \frac{d\overrightarrow{GP'}}{dt}\right) - \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\left(\overrightarrow{P_0P} \times \frac{d\overrightarrow{P_0P}}{dt}\right),$$

est un vecteur constant.

Enfin, par la suite, nous serons amenés à désigner les longueurs P_0P' et PP' par l et l'.

Le mouvement est déterminé par six équations différentielles du second ordre. Les trajectoires correspondantes sont définies par les 12 valeurs initiales des variables, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, ξ_0, η_0, ζ_0, ξ'_0, η'_0, ζ'_0. Il est commode d'associer à ces 12 valeurs le point de l'espace à 12 dimensions les admettant comme coordonnées. A un mouvement du problème des trois corps correspond ainsi une *trajectoire* (multiplicité à une dimension) dans l'espace à 12 dimensions. M. Chazy a obtenu d'importants résultats [1] dans l'étude qualitative de ces trajectoires. Rappelons-en quelques-uns :

Les trajectoires du problème des trois corps divisent l'espace à 12 dimensions en 5 régions, représentées symboliquement sur le schéma ci-dessous :

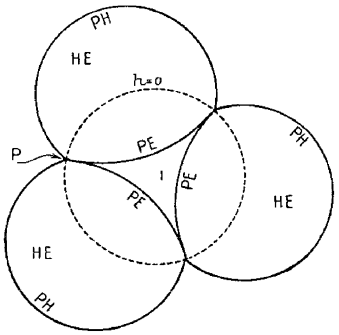


Fig. 2.

1° Dans la région intérieure I, sur chaque trajectoire, les trois distances mutuelles sont soit bornées (*trajectoires bornées*), soit tantôt bornées et tantôt (pour deux d'entre elles) infiniment grandes (*trajectoires oscillantes*).

2° Dans les autres régions, deux au moins des distances mutuelles augmentent indéfiniment avec le temps, cependant que les éléments osculateurs relatifs aux mouvements P/P_0 et P'/G ont des limites. Nous dirons que les mouvements correspondants sont *à allure binaire*. Pour ces mouvements, l'allure finale est fonction continue des conditions initiales. Selon la nature des mouvements osculateurs limites, les trajectoires sont :

hyperboliques-elliptiques (dans les régions HE);
paraboliques-elliptiques (PE) ou *paraboliques-hyperboliques* (PH) sur les surfaces qui bornent les régions HE;

---

(1) *Voir* par exemple : *Bull. astron.*, t. 8, 1934, p. 409.

paraboliques sur la multiplicité à 10 dimensions selon laquelle se rejoignent les surfaces PE et PH; cette multiplicité est située sur la surface correspondant aux trajectoires pour lesquelles la constante des forces vives h est nulle;
hyperboliques à l'extérieur de la région PH.

Précisons que sont exclus de ces résultats les mouvements pour lesquels le vecteur des aires est nul.

Étude qualitative des chocs binaires.

Une telle étude ne semble avoir d'application pratique que dans le cas où l'un des deux corps entrant en contact a une masse négligeable par rapport à l'autre. Aussi est-ce dans cette hypothèse seulement, et plus particulièrement dans celle du « problème restreint », que la question a été traitée jusqu'ici ([1]). Malheureusement, le problème restreint suggère l'utilisation d'axes de coordonnées qui masquent les propriétés intrinsèques du choc; ces propriétés sont au contraire décelées sans difficulté dans le problème général.

Nous étudierons ici la trajectoire relative de deux corps au voisinage d'un choc, et les perturbations que ce choc introduit dans la variation des éléments osculateurs relatifs à cette trajectoire.

6. *Conditions initiales à l'instant du choc.* — Les 12 conditions initiales à fournir, à un instant donné, pour déterminer le mouvement, sont 12 éléments quelconques permettant de calculer les 6 éléments de chacun des deux mouvements osculateurs considérés habituellement : mouvement osculateur au mouvement P/P_0, mouvement osculateur au mouvement P'/G. Il suffit en général de se donner les rayons vecteurs et les vecteurs vitesse relative des deux mouvements relatifs P/P_0, P'/G.

Il y a exception si, à l'instant initial, il se produit un choc entre deux corps, P et P_0 par exemple; le second mouvement osculateur reste déterminé par les valeurs initiales ξ_0, η_0, ζ_0, ξ'_0, η'_0, ζ'_0; mais les valeurs initiales des 6 autres coordonnées ne suffisent pas à définir le premier. Celui-ci (mouvement avec

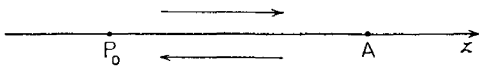


Fig. 3.

choc dans le problème des deux corps) est rectiligne. Si nous le supposons elliptique, il est déterminé par la direction P_0z de son support, et la longueur $2a$ du segment de droite P_0A décrit périodiquement, correspondant au grand axe

([1]) Levi-Civita, *Ann. di Matematica*, série III, t. 9, pp. 1-32; Belorizky, *J. Observateurs*, t. 16, 1933, p. 109-211.

de l'ellipse du mouvement elliptique dont il est une dégénérescence. Pour ce mouvement, nous avons les formules classiques [1] (formules du mouvement elliptique écrites pour la valeur $e = 1$ de l'excentricité);

$$n'^2 a^3 = m_1 + m_2,$$
$$u' - \sin u' = n' t,$$
$$z = a(1 - \cos u').$$

Au voisinage de $t = 0$, z se développe en série entière convergente par rapport à $t^{\frac{1}{3}}$, le début de ce développement étant :

$$\text{(III)} \qquad z = \gamma'(3t)^{\frac{2}{3}} + \lambda'(3t)^{\frac{4}{3}} + \ldots, \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma'^3 = \dfrac{m_1 + m_2}{2}, \\ \lambda' = -\dfrac{\gamma'^2}{10a}. \end{cases}$$

γ' est ainsi un nombre positif indépendant des conditions initiales, λ' au contraire un nombre dont le choix équivaut à celui de $2a$.

λ' est ici négatif. Si le mouvement rectiligne est supposé hyperbolique, on retrouve encore les équations (III), mais le nombre a qui figure dans l'expression de λ' est, cette fois, négatif, c'est-à-dire que λ' est positif. Si λ' est nul (donc a infini), le mouvement osculateur correspondant est parabolique.

(Le nombre λ' est en fait, à un coefficient positif près, la constante des forces vives relative au mouvement osculateur rectiligne envisagé.)

Ainsi, pour définir le mouvement des trois corps par ses conditions initiales à l'instant $t = 0$ du choc, il faut fixer arbitrairement pour le mouvement osculateur rectiligne :

1° Le support (et la direction) de ce mouvement ;
2° Le nombre λ' qui figure dans les équations (III).

7. *Étude géométrique de la trajectoire au voisinage du choc.* — Nous allons démontrer que *la trajectoire* P/P_0 *présente en général un rebroussement de seconde espèce en* P, et que *son plan osculateur en* P *passe par le point* P'_0 *où se trouve le troisième corps* P′ *à l'instant du choc.*

1° Plan osculateur en P_0 : Ce plan est la limite, lorsque P tend vers P_0, du plan $\left(P_0, P, \frac{d^2P}{dt^2}\right)$, qui, d'après les équations (I), est le même que le plan (P_0, P, P').

A l'instant du choc, le plan osculateur est donc défini par la tangente P_0T à la trajectoire de P, et le point P'_0.

---

[1] n' étant le moyen mouvement et u' l'anomalie excentrique.

2° Rebroussement : Le trièdre de référence issu de P_0 sera choisi de telle sorte que la tangente P_0T soit l'axe des z, et que le plan osculateur (P_0T, P'_0) contienne l'axe des x.

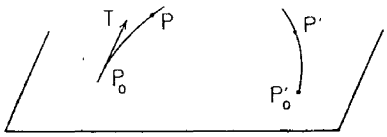


Fig. 4.

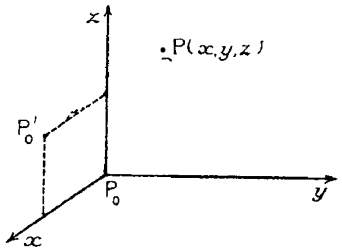


Fig. 5.

Projetons la trajectoire de P sur son plan osculateur en P_0, le plan xP_0z. Selon que la projection présente un rebroussement de première ou de seconde espèce, la quantité $xz' - zx'$ garde un signe constant ou au contraire change de signe au voisinage du choc.

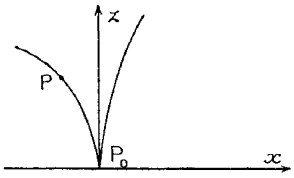


Fig. 6. — $xz' - zx'$ ne change pas de signe (rebroussement de première espèce).

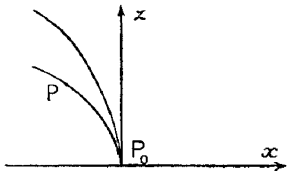


Fig. 7. — $xz' - zx'$ change de signe (rebroussement de seconde espèce).

Calculons, à l'aide des équations (I), la dérivée de $xz' - zx'$:

$$xz'' - zx'' = m_3(x\zeta - z\xi)\left(\frac{1}{\overline{PP'}^3} - \frac{1}{\overline{P_0P'}^3}\right).$$

Soient P_1 et P'_1 les projections de P et P' sur le plan xP_0z, et A l'angle de leurs rayons vecteurs P_0P_1 et $P_0P'_1$,

$$x\zeta - z\xi = P_0P_1 . P_0P'_1 . \sin . A ;$$

cette quantité conserve un signe constant au moment du choc, sauf peut-être si A s'annule, auquel cas P'_0 est sur P_0z (ce qui conduit à un mouvement plan). $\frac{1}{\overline{PP'}^3} - \frac{1}{\overline{P_0P'}^3}$ est du signe de $\overline{P_0P'}^2 - \overline{PP'}^2$. Soit Θ l'angle des vecteurs

$$\overrightarrow{P_0P} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P_0P'};$$

$$\overline{P_0P'}^2 - \overline{PP'}^2 = r(2\rho\cos\theta - r).$$

Comme ρ n'est pas nul à l'instant du choc, cette quantité garde un signe constant, sauf peut-être si $\cos\theta = 0$, c'est-à-dire si P_0P' est perpendiculaire à la tangente de rebroussement.

Ainsi, en général, la dérivée de $xz' - zx'$ a un signe constant au voisinage du choc; donc $xz' - zx'$, nul à l'instant du choc, traverse la valeur zéro et change de signe. *Le rebroussement est de seconde espèce.*

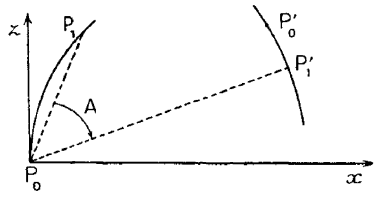


Fig. 8.

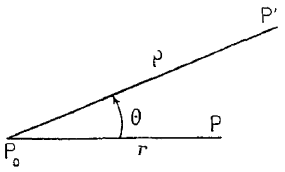


Fig. 9.

Il ne peut y avoir exception que si, à l'instant du choc, le troisième corps est sur la tangente de rebroussement ou dans une direction perpendiculaire à celle-ci. On pourrait voir, en poursuivant le raisonnement, que le premier seulement de ces deux cas conduit à un rebroussement de première espèce; ce résultat sera obtenu plus simplement par la voie analytique.

Au moment du choc, la trajectoire P'/G possède la propriété suivante [1] : son plan osculateur est le plan des aires (plan perpendiculaire au vecteur des aires) issu de G.

Son plan osculateur est en effet déterminé par les vecteurs $\frac{d\overrightarrow{GP'}}{dt}$ et $\frac{d^2\overrightarrow{GP'}}{dt^2}$; les équations (II) montrent qu'à l'instant du choc ($P_0P = 0$), ce dernier vecteur se réduit au produit d'un scalaire par $\overrightarrow{GP'}$. D'autre part, le vecteur des aires est une combinaison linéaire des vecteurs des aires relatifs aux deux mouvements osculateurs; le premier de ceux-ci, mouvement P/P_0, est rectiligne, son vecteur des aires est nul; le vecteur des aires a donc le même support que le vecteur des aires du second mouvement osculateur, mouvement P'/G; et le plan des aires est le plan de ce mouvement, c'est-à-dire le plan $\left(\overrightarrow{GP'}, \frac{d\overrightarrow{GP'}}{dt}\right)$. Nous avons vu que ces deux vecteurs déterminent le plan osculateur à la trajectoire P'/G, confondu par suite avec le plan des aires issu de G.

Cette propriété n'est malheureusement pas caractéristique du choc P_0P. On démontre facilement que, si elle se trouve réalisée, au cours d'un mouvement non plan, à un instant où il ne se produit pas de choc, c'est qu'à cet instant le premier mouvement osculateur est rectiligne $\left(\frac{d\overrightarrow{P_0P}}{dt}\right.$ a même support que $\left.\overrightarrow{P_0P}\right)$,

[1] (A), p. 127.

et que de plus $P_0P' = PP'$. Les mouvements présentant cette dernière circonstance sont d'ailleurs aussi nombreux que ceux avec choc, dépendant comme eux de dix paramètres.

8. *Étude analytique de la trajectoire au voisinage du choc.* — Rappelons les équations différentielles du mouvement :

$$(1)\quad \begin{cases} x'' = -(m_1 + m_2)\dfrac{x}{r} - m_3 x\left(\dfrac{a_1}{\overline{P_0P'}^3} + \dfrac{a_2}{\overline{PP'}^3}\right) + m_3\xi\left(\dfrac{1}{\overline{PP'}^3} - \dfrac{1}{\overline{P_0P'}^3}\right), \\ \textit{et deux autres équations analogues en } y'' \textit{ et } z''. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \xi'' = -M\xi\left(\dfrac{a_1}{\overline{PP'}^3} + \dfrac{a_2}{\overline{P_0P'}^3}\right) + a_1 a_2 M x\left(\dfrac{1}{\overline{PP'}^3} - \dfrac{1}{\overline{P_0P'}^3}\right), \\ \textit{et deux équations analogues en } \eta'' \textit{ et } \zeta''. \end{cases}$$

Nous avons posé dans ces équations

$$r = P_0P, \qquad \rho = P_0P',$$
$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \qquad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$
$$M = m_1 + m_2 + m_3.$$

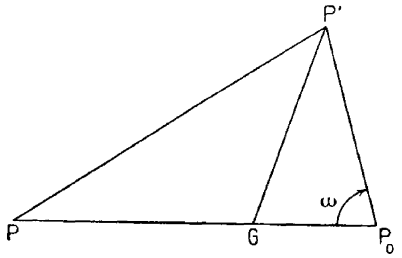


Fig. 10.

G est le centre de gravité des masses m_1 et m_2 des points matériels P_0 et P. x, y, z, ξ, η, ζ sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{P_0P}$ et $\overrightarrow{GP'}$. Nous appellerons ω l'angle des vecteurs $\overrightarrow{P_0P}$ et $\overrightarrow{P_0P'}$.

M. Sundman (¹) a démontré qu'au voisinage du choc, les six coordonnées x, y, z, ξ, η, ζ sont développables en série entière convergente par rapport à la variable $t^{\frac{1}{3}}$ Le début des développements de ξ, η, ζ a été donné par M. Chazy (²) :

$$\xi = \xi_0 + \xi_0' t + \frac{\xi_0''}{2} t^2 + \alpha t^3 + \left[t^{\frac{10}{3}}\right],$$

(¹) *Acta mathematica*, t. 36, p. 140.
(²) (A), p. 127.

α étant un nombre dépendant des conditions initiales, et $\left[t^{\frac{10}{3}}\right]$ représentant une série entière, convergente en $t^{\frac{1}{3}}$, dont le prenier terme est au moins de degré $\frac{10}{3}$ par rapport à t.

Régularisons le mouvement, au voisinage du choc, à l'aide du changement de variable défini par

$$t = \frac{u^3}{3},$$

d'où

$$dt = u^2 du.$$

On sait que $r = P_0P$ est un infiniment petit de l'ordre u^2 et que la trajectoire P/P_0 possède une tangente en P. Choisissons cette tangente comme axe des z, le plan xP_0z passant par la position P'_0 de P' à l'instant du choc; donc $\eta_0 = 0$. Dans ces conditions

$$x = [u^3], \qquad y = [u^3], \qquad z = \gamma u^2 + [u^3],$$

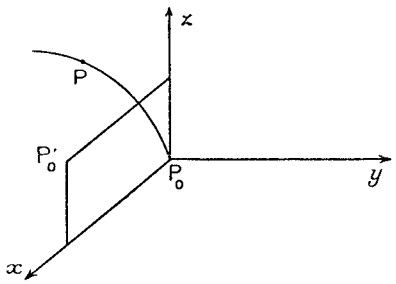


Fig. 11.

γ étant positif, (ce qui conduit à une orientation convenable de l'axe P_0z).

$$\xi = \xi_0 + \xi'_0 \frac{u^3}{3} + \xi''_0 \frac{u^6}{18} + [u^9],$$

et deux développements analogues pour η et ζ.

Ces relations entraînent pour

$$r = z\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}}$$

l'expression

$$r = z\left(1 + [u^2]\right).$$

Développements de x et y :

Dans les équations (1)

$$x'' = -(m_1 + m_2)\frac{x}{r^2} - m_3 x\left(\frac{a_1}{\overline{P_0P'}^3} + \frac{a_2}{\overline{PP'}^3}\right) + m_3\xi\left(\frac{1}{\overline{PP'}^3} - \frac{1}{\overline{P_0P'}^3}\right),$$

le terme $-m_3 x\left(\frac{a_1}{\overline{P_0P'}^3} + \frac{a_2}{\overline{PP'}^3}\right)$ est un infiniment petit équivalent à $-m_3\frac{x}{\rho^3}$, et le terme $m_3\xi\left(\frac{1}{\overline{PP'}^3} - \frac{1}{\overline{P_0P'}^3}\right)$ est un infiniment petit équivalent à $3m_3\xi_0\frac{r\cos\omega_0}{\rho_0^4}$, du moins si ω_0, valeur de ω à l'instant du choc, est différent de $\frac{\pi}{2}$, et ξ_0 non nul.

1° Supposons $\omega_0 \neq \frac{\pi}{2}$.

Développement de x. — *a.* $\xi_0 \neq 0$. Comme x est infiniment petit devant r, $x'' + (m_1 + m_2)\frac{x}{r^2}$ est équivalent à $3m_3\frac{r\xi_0\cos\omega_0}{\rho_0^4}$, d'ordre 2 en u.

Substituant à x le développement à coefficients indéterminés $\alpha u^n + \ldots$, on trouve :

$$x = \alpha u^8 + \ldots \qquad \text{avec } \alpha = \frac{m_3\gamma}{14\rho_0^4}\xi_0\cos\omega_0.$$

b. $\xi_0 = 0$. P'_0 est alors sur P_0z. Le mouvement est plan, et son plan est défini par P_0z et le vecteur vitesse de P' à l'instant initial. Ce plan sera aussi celui des yz, ($\xi'_0 = 0$); ξ et x sont alors constamment nuls.

Développement de y. — Le calcul fait pour x montre que, pour y, l'ordre ne peut être inférieur à 8. Par suite :

a. $\eta'_0 \neq 0$. Dans ce cas, l'expression $y'' + (m_1 + m_2)\frac{y}{r_2}$ est un infiniment petit équivalent à $m_3\eta'_0\frac{r\cos\omega_0}{\rho_0^4}u^3$, d'ordre 5 en u. Substituant à y le développement à coefficients indéterminés $\beta u^n + \ldots$, on trouve

$$y = \beta u^{11} + \ldots \qquad \text{avec } \beta = \frac{m_3}{90}\gamma\frac{\eta'_0}{\rho_0^4}\cos\omega_0.$$

b. $\eta'_0 = 0$. Le mouvement a lieu entièrement dans le plan xP_0z. y et η sont constamment nuls.

Un dernier cas reste à examiner pour x et y, celui où ξ_0, ξ'_0, et η'_0 sont nuls. Le mouvement est alors rectiligne, ξ, η, x, y sont identiquement nuls.

2° Supposons $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

Reprenons alors le calcul de l'infiniment petit $\frac{1}{\overline{PP'}^3} - \frac{1}{\overline{P_0P'}^3}$. Comme, ici, ζ_0 est nul, x et y sont d'ordres supérieurs aux ordres trouvés précédemment. Donc

$$P \begin{cases} x = [u^9], \\ y = [u^{12}], \\ z = \gamma u^2 + [u^3]; \end{cases} \qquad P' \begin{cases} \xi = \xi_0 + \xi'_0 \frac{u^3}{3} + [u^6], \\ \eta = \eta'_0 \frac{u^3}{3} + [u^6], \\ \zeta = \zeta'_0 \frac{u^3}{3} + [u^6]. \end{cases}$$

$$\overline{PP'}^2 = \xi_0^2 + 2\xi_0\zeta'_0 \frac{u^3}{3} + \gamma^2 u^4 + [u^5],$$

$$\overline{P_0P'}^2 = \xi_0^2 + 2\xi_0\zeta'_0 \frac{u^3}{3} + [u^6].$$

$P_0P' - PP'$, équivalent à $\frac{\overline{P_0P'}^2 - \overline{PP'}^2}{2P_0P'}$, est donc égal à $\frac{-\gamma^2 u^4}{2|\xi_0|} + [u^5]$.

Ainsi, $\frac{1}{\overline{PP'}^3} - \frac{1}{\overline{P_0P'}^3} = -3\frac{\gamma^2 u^4}{2|\xi_0|^5} + [u^5]$. Devant cette expression, les termes des seconds membres des équations (1) qui contiennent x ou y sont négligeables, d'où

$$x'' + (m_1 + m_2)\frac{x}{r^3} = -\frac{3}{2} m_3 \xi_0 \frac{\gamma^2 u^4}{|\xi_0|^5} + [u^5],$$

$$y'' + (m_1 + m_2)\frac{y}{r^3} = -\frac{1}{2} m_3 \eta'_0 \frac{\gamma^2 u^7}{|\xi_0|^5} + [u^8].$$

Comme précédemment, on substitue à x et à y des développements à coefficients indéterminés et l'on trouve

$$x = \alpha u^{10} + \ldots \qquad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{m_3}{48}\gamma^2 \frac{\xi_0}{|\xi_0|^5};$$

$$y = \beta u^{13} + \ldots \qquad \text{avec} \quad \beta = -\frac{m_3}{264}\gamma^2 \frac{\eta'_0}{|\xi_0|^5}.$$

Ces développements ne sont pas valables : soit si $\xi_0 = 0$ (mais ce cas, qui correspond au choc triple, ne se présente pas ici); soit si $\eta'_0 = 0$, le mouvement est alors situé dans le plan xP_0z, et y et η sont constamment nuls.

Développement de z.

Nous avons vu que $z = \gamma u^2 + \ldots$. Par suite, d'après les équations (1), $z'' + (m_1 + m_2)\frac{z}{r^3}$ est un infiniment petit d'ordre au moins égal à 2.

Or

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{donc} \qquad r^2 - z^2 = |u^{16}| \quad \text{et} \quad \frac{r}{z} = 1 + [u^{12}].$$

Par suite,

$$\frac{z}{r^3} = \frac{1}{z^2} + [u^5].$$

Ainsi

$$z'' + (m_1 + m_2)\frac{z}{r^3} = z'' + \frac{m_1 + m_2}{z^2} + [u^8].$$

L'équation différentielle déterminant z et l'équation $z'' + \frac{m_1 + m_2}{z^2} = 0$ ont en conséquence des solutions dont les développements coïncident jusqu'aux termes en u^{12}. Nous avons déjà développé la seconde de ces solutions au paragraphe 6; donc, ici encore,

$$z = \gamma u^2 + \lambda u^4 + \ldots \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma^3 = \dfrac{m_1 + m_2}{3}, \\ \lambda = \dfrac{-\gamma^2}{10a}, \end{cases}$$

a ayant la même interprétation qu'au paragraphe 6.

Ces résultats (¹) sont groupés dans le tableau figurant au paragraphe 10.

9. *Éléments osculateurs.* — Nous n'envisageons que le cas du mouvement dans l'espace, ζ_0 étant différent de zéro. Les différents cas particuliers (cas $\zeta_0 = 0$, cas du mouvement plan), donnant lieu à des formules analogues.

(¹) Dans le cas particulier du problème restreint (le mouvement P'/P_0 est circulaire uniforme, P a une masse nulle), M. Belorizky (*J. des Observateurs*, t. 16, 1933, p. 196) avait obtenu, au voisinage d'un choc P_0P, les résultats suivants :

(la trajectoire de P étant rapportée à des axes mobiles, d'origine P_0, P_0X passant par P', P_0Z étant perpendiculaire au plan fixe où se meuvent P_0 et P'; d'autre part, u étant un infiniment petit du même ordre que celui que nous utilisons),

à u^{10} près, le moment de la vitesse de P par rapport à P_0X est égal à ZX;

à u^7 près, la distance de P_0Y au vecteur vitesse de P est nulle;

à u^5 près, la trajectoire est rectiligne.

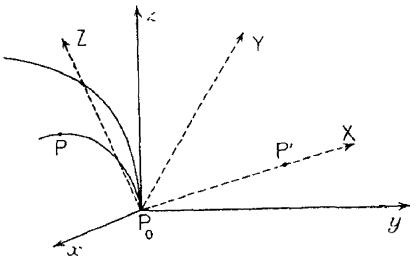


Fig. a.

Ces résultats peuvent se retrouver aisément en écrivant, par un changement de coordonnées, les développements en u de X, Y, Z, à l'aide des valeurs que nous avons obtenues pour x, y et z. Mais le choc binaire ne présente absolument aucune particularité dans le cas du problème restreint.

En fonction de la variable $u = (3t)^{\frac{1}{3}}$, les développements sont alors les suivants :

$$x = \alpha u^8 + \ldots, \qquad \alpha = \frac{m_3}{14}\gamma\frac{\xi_0\zeta_0}{\rho_0^5};$$

$$y = \beta u^{11} + \ldots, \qquad \beta = \frac{m_3}{90}\gamma\frac{\eta_0'\zeta_0}{\rho_0^5};$$

$$z = \gamma u^2 + \lambda u^4 + \ldots, \qquad \gamma^3 = \frac{m_1 + m_2}{2}, \qquad \lambda = -\frac{\gamma^2}{10a}.$$

Le calcul classique ([1]) des six éléments osculateurs a, e, i, θ, ϖ, l_0 relatifs au mouvement P/P_0 conduit aux résultats suivants :

$$1 - e^2 = \frac{6\alpha\gamma}{a(m_1 + m_2)} u^{14} + \ldots$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{2}\frac{\beta}{\alpha} u^3 + \ldots,$$

$$\cos i = \frac{\beta}{2\gamma}\frac{\alpha}{|\alpha|}|u^9| + \ldots,$$

$$\sin(\varpi - \theta) = -1 + \ldots,$$

$$\cos(\varpi - \theta) = 7\frac{|\alpha|}{\gamma}\frac{u}{|u|} u^6 + \ldots,$$

$\sin i \sin\theta$ est du signe de $-\beta\gamma$,

$\sin i \cos\theta$ est du signe de $-\alpha\gamma\dfrac{u}{|u|}$.

Il en résulte que l'on a

$$i = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2\gamma}\frac{\alpha}{|\alpha|}|u^9| + \ldots;$$

$$\theta = \frac{3}{2}\frac{\beta}{\alpha} u^3 + \ldots \qquad \text{si } u \text{ est de signe contraire à } \alpha,$$

$$\theta = \pi + \frac{3}{2}\frac{\beta}{\alpha} u^3 + \ldots \qquad \text{si } u \text{ est du signe de } \alpha;$$

$$\varpi - \theta = -\frac{\pi}{2} + 7\frac{|\alpha|}{\gamma}\frac{u}{|u|} u^6 + \ldots.$$

Il reste à étudier les éléments a et l_0. Les formules classiques de Lagrange, modifiées et mises sous forme vectorielle ([2]), nous donnent ici les équations

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n^2 a}\vec{F}.\vec{V},$$

$$\frac{dl_0 - d\varpi}{dt} = -\frac{2}{na^2}\vec{F}.\left(\overrightarrow{P_0P} - \frac{3}{2}t.\vec{V}\right) - \sqrt{1 - e^2}\frac{d\varpi}{dt} + 2\sqrt{1 - e^2}\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\theta}{dt},$$

([1]) Voir par exemple Tisserand, *Mécanique céleste*, t. I, p. 119.

([2]) J. Chazy, *Bull. astron.*, 2e série, t. 11, p. 371.

dans lesquelles on a posé

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)\left[-\frac{\overrightarrow{P_0P}}{\overline{PP'}^3} + \overrightarrow{P_0P'}\left(\frac{1}{\overline{PP'}^3} - \frac{1}{\overline{P_0P'}^3}\right)\right],$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{P_0P}}{dt}.$$

1° D'après les développements formés pour ϖ et θ, on voit que les deux derniers termes de l'expression de $\frac{dl_0 - d\varpi}{dt}$ sont d'ordre 8 en u. Le troisième, au contraire, est d'ordre 7, car les composantes de $\vec{F}$ et de $\left(\overrightarrow{P_0P} - t.\vec{V}\right)$ sont respectivement

$$[u^2], \quad [u^2], \quad \frac{m_1 + m_2}{\rho_0^5}\gamma u^2(2\zeta_0^2 - \xi_0^2) \qquad \text{et} \qquad [u^8], \quad [u^{11}], \quad -5\lambda u^4 + \ldots.$$

d'où

$$\frac{dl_0 - d\varpi}{dt} = \frac{(m_1 + m_2)^2}{2na^3}\,\frac{2\zeta_0^2 - \xi_0^2}{\rho_0^5}\,u^6 + \ldots.$$

$$l_0 - \varpi = \frac{n^2a^3}{2\rho_0^5}(\xi_0^2 - 2\zeta_0^2)\,\frac{u^9}{9} + \ldots$$

2°

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n^2a}\,\frac{4\gamma^4}{\rho_0^5}(2\zeta_0^2 - \xi_0^2)\,u + \ldots \qquad \text{d'où} \qquad a = (a)_0 + 4\gamma^2a^2\,\frac{2\zeta_0^2 - \xi_0^2}{\rho_0^5}\,\frac{u^4}{4} + \ldots.$$

10. *Résultats.* — Les données sont les conditions initiales ξ_0, $\eta_0 = 0$, ζ_0, ξ'_0, η'_0, ζ'_0; la direction de l'axe des z et la valeur de a. Elles permettent de calculer $\rho_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$, α, β, γ, λ, ainsi que n (car $n^2a^3 = m_1 + m_2$).

La variable u est définie par la relation $t = \frac{u^3}{3}$, l'origine des temps étant l'instant du choc [1]

$$z = \gamma u^2 + \lambda u^4 + \ldots, \qquad \text{ou} \qquad \gamma = \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \lambda = -\frac{\gamma^2}{10a}.$$

---

[1] Au voisinage du choc, u est un infiniment petit du même ordre que l'anomalie excentrique u' (relative au mouvement P/P_0), et que la variable u'' de Sundman (définie par $dt = r\,du''$); de façon plus précise, u' et u'' sont respectivement équivalents à $\sqrt{\frac{2\gamma}{a}}\,u$ et $\frac{1}{\gamma}u$.

	$\xi_0 \neq 0$			$\xi_0 \neq 0$ (le plan yP_0z étant choisi de façon que ξ'_0 soit nul)	
	$\eta'_0 \neq 0$		$\eta'_0 = 0$	$\eta'_0 \neq 0$	$\eta'_0 = 0$
	$\zeta_0 \neq 0$	$\zeta_0 = 0$	$\zeta_0 \neq 0$ et $\zeta_0 = 0$	$\zeta_0 \neq 0$	
x	$\alpha u^8 + \ldots$ avec $\alpha = \frac{m_3}{14}\gamma\frac{\xi_0\zeta_0}{\rho_0^5}$	$\alpha u^{10} + \ldots$ avec $\alpha = -\frac{m_3}{48}\gamma^2\frac{\xi_0}{(\xi_0)^5}$	Mêmes valeurs que pour $\eta'_0 \neq 0$	$\equiv 0$	$\equiv 0$
y	$\beta u^{11} + \ldots$ avec $\beta = \frac{m_3}{90}\gamma\frac{\eta'_0\zeta_0}{\rho_0^5}$	$\beta u^{13} + \ldots$ avec $\beta = -\frac{m_3}{264}\gamma^2\frac{\eta'_0}{(\xi_0)^3}$	$\equiv 0$	$\beta u^{11} + \ldots$ avec $\beta = \frac{m_3}{90}\gamma\frac{\eta'_0\zeta_0}{\zeta_0}$	$\equiv 0$

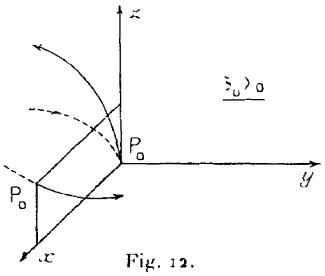
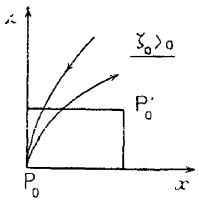
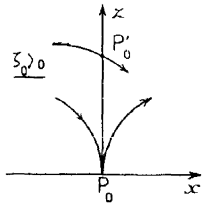
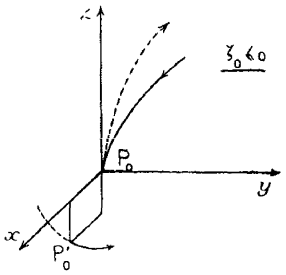
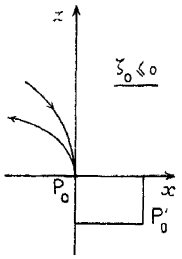
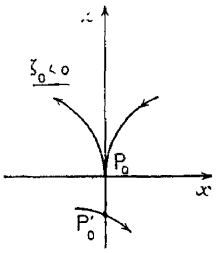
MOUVEMENT DANS L'ESPACE	MOUVEMENT PLAN		
 Fig. 12.	 Fig. 13.	 Fig. 14.	MOUVEMENT RECTILIGNE
 Fig. 15.	 Fig. 16.	 Fig. 17.	

Fig. 12 à 17.

Nous avons retrouvé les résultats énoncés précédemment : le plan osculateur, à l'instant du choc, à la trajectoire P/P_0, passe par P'_0; cette trajectoire présente un point de rebroussement de seconde espèce, à l'exception du cas où P'_0 est placé sur la tangente de rebroussement, et alors ce dernier est de première espèce.

Dans le cas général (le mouvement ayant lieu dans l'espace et ζ_0 n'etant pas nul), les éléments osculateurs ont les développements suivants, les valeurs des coefficients α et β étant $\frac{m_3}{14}\gamma\frac{\xi_0\zeta_0}{\rho_0^3}$ et $\frac{m_3}{90}\gamma\frac{\eta'_0\zeta_0}{\rho_0^3}$:

$$1-e^2=\frac{18\alpha^2}{a\gamma^2}u^{14}+\ldots;$$

$$i=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2\gamma}\frac{\alpha}{|\alpha|}u^9+\ldots;$$

$$\theta=\frac{3}{2}\frac{\beta}{\alpha}u^3+\ldots \quad \text{si } \alpha u<0, \qquad \theta=\pi+\frac{3}{2}\frac{\beta}{\alpha}u^3+\ldots \quad \text{si } \alpha u>0;$$

$$\varpi=\theta-\frac{\pi}{2}+7\frac{|\alpha|}{\gamma}\frac{u}{|u|}u^6+\ldots;$$

$$l_0=\varpi+n\frac{m_1+m_2}{2\rho_0^5}(\xi_0^2-2\zeta_0^2)\frac{u^9}{9}+\ldots;$$

$$a=(a)_0+\frac{\gamma^2a^2}{\rho_0^5}(2\zeta_0^2-\xi_0^2)u^4+\ldots.$$

Tous ces résultats sont valables pour un choc elliptique, hyperbolique, ou parabolique, selon que l'on donne à a une valeur positive, négative, ou infinie (ou à λ une valeur négative, positive, ou nulle). Il y a toutefois une exception, c'est évident, pour la valeur de a, dans le cas du choc parabolique.

Sur les formules donnant les développements des éléments osculateurs, on voit que $1-e^2$ est un infiniment petit d'ordre très élevé en u, que i, $|\varpi|$ et $|l_0|$ passent par la valeur $\frac{\pi}{2}$, ces quatre quantités ayant effectivement un maximum ou un minimum au moment du choc, en même temps d'ailleurs que change le sens de l'orientation dans le plan osculateur (le demi-axe P_0z change de côté par rapport au plan xP_0y).

D'autre part, $1-e^2$, $\frac{\pi}{2}-i$, $a-(a)_0$ sont des infiniment petits d'ordre supérieur à 1; θ, ω et l_0 sont au contraire d'ordre 1, mais les différences $\varpi-\theta$ et $l_0-\varpi$ sont d'ordre 2 et 3 au minimum.

Disposition de l'ellipse osculatrice au mouvement P/P_0.
(Cas $\alpha > 0$, c'est-à-dire $\xi_0 \zeta_0 > 0$.)

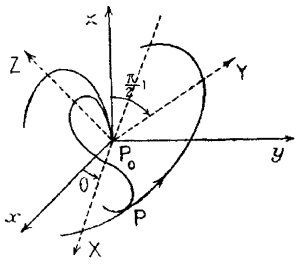


Fig. 18.

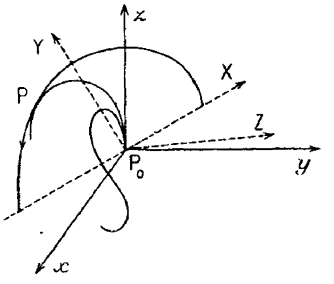


Fig. 19.

(Le trièdre P_0XYZ est le trièdre auquel est habituellement rapporté le mouvement osculateur au mouvement P/P_0.)

Trajectoires avec choc.

11. *Régularisation du mouvement.* — Nous avons vu qu'au voisinage d'un choc binaire, les éléments osculateurs correspondant à la trajectoire relative des deux corps entrant en collision ne cessent d'être définis. Il est vrai qu'ils ne sont pas tous continus à l'instant du choc, mais il serait aisé de substituer à ceux qui ne le sont pas des éléments continus $\left(\text{par exemple, } \left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|, |\varpi - \theta|, |l_0 - \varpi|\right)$, liés comme eux de façon intrinsèque à la trajectoire.

Cependant, le choix de ces quantités comme nouvelles variables n'empêcherait pas le choc d'être une circonstance remarquable dans la solution du nouveau système différentiel. Pour s'en rendre compte, il suffit d'examiner le tableau des développements des éléments osculateurs en fonction de la variable u.

Il y aurait un grand intérêt à définir, si la chose est possible, des variables que le choc n'affecterait d'aucune perturbation. On pourrait alors, du point de vue analytique, considérer les chocs binaires comme des singularités artificielles, introduites par un choix malheureux des coordonnées. Bien des raisonnements seraient simplifiés; en particulier, nous ne serions pas obligés d'envisager un moment, comme nous le ferons au Chapitre III, que toutes les trajectoires avec choc sont *exceptionnelles* (au sens auquel on entend ce terme dans l'énoncé du principe ergodique).

Cependant, un tel choix de variables n'a pu être réalisé jusqu'ici. On s'est borné à régulariser le système des équations différentielles. M. Levi-Civita [1],

---

[1] *Acta mathematica*, t. 42, 1918, p. 99-143.

partant du système canonique [1] considéré habituellement, substitue au vecteur (p_i), correspondant à la vitesse de P/P_0, le vecteur $\left(\frac{1}{p_i} = \omega_i\right)$; il détermine alors les variables ξ_i à substituer aux coordonnées x, y, z, de telle façon que le système conserve sa forme canonique. Il suffit pour cela que

$$\text{(A)} \qquad \Sigma x_i\, dp_i - \Sigma \xi_i\, d\omega_i = 0.$$

Comme, au voisinage du choc ($u = 0$), p_i est un infiniment grand de l'ordre de $\frac{1}{u}$, ω_i est de l'ordre de u; d'autre part, x_i est de l'ordre de u^2. Ainsi, $d\omega_i$ et $x_i\, dp_i$ sont de l'ordre de du. De l'égalité (A), il ressort que les trois variables ξ_i sont finies et non nulles simultanément.

Un choc se traduit donc, avec les nouvelles coordonnées, par la condition

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.$$

12. *Conditions de choc.* — C'est cette propriété qui est utilisée par M. Kiveliovitch [2] lorsqu'il forme les conditions de choc : les variables prenant les valeurs $\xi_i^0, \omega_i^0, x_i'^0, p_i'^0$ à l'instant du choc et $\xi_i, \omega_i, x_i', p_i'$ à un instant voisin u, le système étant régulier, on a

$$\omega_i^0 = \omega_i + u\,\Omega_i(\xi_i, \omega_i, x_i', p_i', u),$$

Ω_i étant une fonction régulière de ses 13 variables.

Du fait que ω_i^0 est nul, on obtient les trois relations

$$\text{(B)} \qquad \omega_i = u\,\Omega_i'(\xi_i, x_i', p_i', u),$$

les trois fonctions Ω_i' étant régulières.

« En éliminant u entre ces trois relations, dit M. Kiveliovitch [3], on trouve les deux conditions cherchées entre les valeurs initiales pour l'existence d'un choc binaire, si l'on pose que les ξ_i, ω_i, x_i' et p_i' sont les valeurs initiales quelconques pour l'instant u quelconque. »

Ajoutons que, ces deux conditions étant réalisées, les trois relations ci-dessus admettent, en u, une solution commune u_1 et que le choc se produit

---

(1) Ce système, considéré depuis Jacobi, comprend comme variables les coordonnées relatives x_i et x_i' de P par rapport à P_0, et de P′ par rapport à G, ainsi que les composantes p_i et p_i' des vecteurs obtenus en faisant le produit des vecteurs vitesse relative correspondant à ces deux mouvements, par les scalaires $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ et $\frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

(2) *Sur les points singuliers du problème des trois corps* (*Bull. astron.*, t. 7, 1931, p. 82). Nous avons conservé les notations de ce Mémoire. La variable u qui y figure n'est pas identique à la nôtre; c'est celle employée par M. Sundman et définie par la relation $dt = r\,du$; mais les deux variables (voir plus haut, § 10, en note) sont deux infiniment petits du même ordre au voisinage du choc.

(3) *Loc. cit.*, p. 83.

à l'instant $u = 0$ à la condition seulement qu'à l'instant où les variables ont les valeurs initiales envisagées ω_i, ξ_i, x'_i, p'_i, on donne à u la valeur u_1.

Les relations (B) peuvent encore s'écrire [1] :

$$\omega_i = A\xi_i + Bx'_i + Cp'_i. \tag{C}$$

A, B, C représentant des séries entières en u, convergentes si u est assez petit, et dont les coefficients sont des fonctions de ξ_i, x'_i, p'_i, symétriques par rapport aux indices 1, 2 et 3.

Ce résultat n'est pas une propriété particulière à nos équations et rencontrée par hasard au cours du calcul; elle est très générale et tient uniquement au fait que le problème dont nous nous occupons peut se traduire géométriquement, abstraction faite d'axes de coordonnées. En démontrant cela, nous constaterons que les relations (C) ne sont pas toujours vérifiées, ce qui n'apparaissait pas sur la démonstration originale.

Considérons quatre vecteurs variables, d'origine commune, $\vec{T}$, $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$. Supposons que l'on ait à envisager une relation entre ces vecteurs et un paramètre scalaire v telle que $\vec{T}$ soit déterminé par le choix de $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$, v. Cette relation, $f(\vec{T}, \vec{U}, \vec{V}, \vec{W}, v) = 0$, peut aussi s'écrire :

$$\vec{T} = \vec{\varphi}(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}, v).$$

Si les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ forment un trièdre, on peut décomposer $\vec{\varphi}$ sur leurs supports; la relation devient

$$\vec{T} = \beta\vec{U} + \gamma\vec{V} + \delta\vec{W},$$

les scalaires β, γ, δ étant fonctions de $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ et de v.

Choisissons alors des axes de référence, sur lesquels $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ ont respectivement pour composantes b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3. Les scalaires β, γ, δ sont fonctions : de v; de b_3, b_1, b_2 de façon symétrique par rapport aux indices; dans les mêmes conditions, de c_1, c_2, c_3, et de d_1, d_2, d_3.

Appliquons cela au problème des trois corps.

Premier cas. — Les variables sont les coordonnées relatives au système de référence de Jacobi. $\vec{T}$, $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ et v deviennent respectivement les vecteurs de composantes x, y, z; x', y', z'; ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; et le temps.

Le système des équations différentielles définissant le mouvement peut s'écrire sous forme vectorielle (sans axes de coordonnées); par suite, si t est

---

[1] *Loc. cit.*, p. 85.

l'instant initial et τ un instant quelconque, on a

$$\vec{T}(\tau) = \vec{f}(\vec{T}, \vec{U}, \vec{V}, \vec{W}, t - \tau).$$

$\vec{T}$, $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ étant les quatre vecteurs correspondant à l'instant initial t.

Écrivons qu'il y a choc à l'instant $\tau = 0$, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{T}(0)$ est nul :

$$\vec{f}(\vec{T}, \vec{U}, \vec{V}, \vec{W}, t) = 0.$$

En vertu de ce qui précède, cette relation, si les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ forment un vrai trièdre, peut s'écrire

$$\vec{T} = \beta\vec{U} + \gamma\vec{V} + \delta\vec{W};$$

ou encore

$$\begin{aligned} x &= \beta x' + \gamma\xi + \delta\xi', \\ y &= \beta y' + \gamma\eta + \delta\eta', \\ z &= \beta z' + \gamma\zeta + \delta\zeta', \end{aligned}$$

β, γ, δ étant fonctions :

de t,
de x', y', z' sous forme symétrique,
de ξ, η, ζ »
de ξ', η', ζ' »

a. L'expression des fonctions β, γ, δ étant supposée connue, si, à l'instant t fixé, on se donne trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ formant un vrai trièdre, les valeurs de x, y, z conduisant à un choc sont connues.

b. Si l'on envisage un mouvement donnant un choc à l'instant $t = 0$, où l'on connaisse les valeurs, à l'instant t, de x, y, ..., on peut calculer les valeurs de β, γ, δ à l'instant t (pourvu que $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ forment un vrai trièdre). Mais les 12 coordonnées n'étant pas développables en série entière par rapport à t (ni d'ailleurs par rapport à $t^{\frac{1}{3}}$), les fonctions β, γ, δ ne sont pas non plus développables.

Deuxième cas. — Utilisons les variables de Levi-Civita; le système est régularisé au voisinage du choc. On a, comme dans le premier cas,

$$\omega_i = \beta\xi_i + \gamma x'_i + \delta p'_i,$$

β, γ, δ étant fonctions

de u,
de ξ_i avec symétrie par rapport aux indices,
de x'_i » »
de p'_i » »

Mais, ici, les 12 coordonnées ω_i, ξ_i, x'_i, p'_i sont développables en série entière par rapport à u, les fonctions β, γ, δ le sont aussi.

Nous avons retrouvé les relations (C) et leurs propriétés, sans écrire les équations différentielles du mouvement. Nous voyons de plus que ces résultats subissent un cas d'exception, celui où $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ ne forment pas un vrai trièdre; c'est qu'alors, à l'instant t, la vitesse de P/P_0 est dans le plan $\left(\overrightarrow{GP'}, \overrightarrow{\text{vitesse de } P'}\right)$. La décomposition du vecteur $\vec{T}$ n'est plus possible. D'ailleurs le calcul donnerait ici pour β, γ, δ des valeurs infinies. Les développements, par rapport à u, de β, γ, δ ne sont pas convergents. Or ce cas n'est pas exceptionnel; il se produit, sur chaque mouvement, pour certaines valeurs de t.

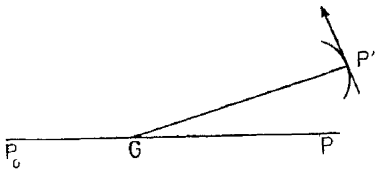


Fig. 20

Ajoutons qu'il est indispensable d'adjoindre cette précision aux relations (C); ces dernières seraient autrement la source d'un certain nombre de résultats faux dont voici le plus simple : si les trois vecteurs $\overrightarrow{GP'}$, $\overrightarrow{\text{vitesse } P'/G}$, $\overrightarrow{\text{vitesse } P/P_0}$ sont coplanaires, les relations (C) expriment que le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ l'est avec eux, et que par suite le mouvement est plan. Or, en fait, trois de ces quatre vecteurs deviennent coplanaires au cours des mouvements non plans avec choc aussi bien qu'au cours des mouvements quelconques; la circonstance se présente en particulier de façon certaine au cours des mouvements périodiques non plans avec choc.

13. *Mouvements avec plusieurs chocs.* — Les relations (C)

$$\omega_i = A\xi_i + Bx'_i + Cp'_i$$

permettent de former, de façon aussi théorique que dans le cas d'un choc unique, les conditions pour que le mouvement admette deux chocs : il suffit que les trois équations admettent deux solutions communes en u, de valeurs u_1 et u_2; supposons que ce soit le cas.

Si les trois vecteurs (ξ_i), (x'_i), (p'_i) ne sont pas coplanaires, les nombres A, B, C sont déterminés, et de façon unique, dès que le sont les conditions initiales. Il est par suite nécessaire qu'un seul système de valeurs pour A, B, C corresponde aux racines u_1 et u_2 dont nous avons supposé l'existence; cette condition est évidemment suffisante pour qu'il y ait deux chocs.

$$(D) \qquad \begin{cases} A(u_1) = A(u_2), \\ B(u_1) = B(u_2), \\ C(u_1) = C(u_2). \end{cases}$$

Éliminons u_1 et u_2 entre ces 3 relations, nous obtenons une seule condition :

$$\psi(\xi_i, x'_i, p'_i) = 0.$$

Choisissons des nombres ξ_i, x'_i, p'_i satisfaisant à cette dernière relation. Les equations (D) déterminent deux nombres distincts, u_1 et u_2, et un système unique de valeurs pour A, B, C. Par les équations (C), on calcule les valeurs initiales qu'on devra donner aux ω_i pour que le mouvement correspondant présente deux chocs.

A la façon dont ils ont été obtenus, on voit que *les mouvements comportant deux chocs dépendent de* 8 *paramètres*.

Les mouvements plans comportant deux chocs doivent satisfaire à 2 conditions, qu'on obtiendrait en éliminant u_1 et u_2 entre les quatre équations que constituent les relations (C) écrites pour les valeurs u_1 et u_2 de la variable. Comme ci-dessus, on reconstitue aisément la marche à suivre pour calculer, à partir du choix arbitraire de 6 des 8 conditions initiales, les valeurs des 2 autres conduisant à deux chocs au cours du mouvement.

Pour qu'un mouvement dans l'espace présente n chocs, il faut et il suffit que, α, β, γ désignant trois nombres fixes, les équations

$$(E) \qquad \begin{cases} A(u) = \alpha, \\ B(u) = \beta, \\ C(u) = \gamma \end{cases}$$

aient n racines communes en u; les conditions sont des relations entre les variables figurant dans A, B, C (c'est-à-dire ξ_i, x'_i, p'_i), et les paramètres arbitraires α, β, γ.

Ces conditions disparaissent si B et C sont identiquement nuls, ce qui caractérise les mouvements isocèles avec plan de symétrie (P_0 et P ayant des masses égales et P′ se déplaçant dans leur plan médiateur), qui peuvent effectivement présenter une infinité de chocs. Ont aussi une infinité de chocs les trajectoires périodiques qui en ont un; pour celles-ci, la présence d'une solution commune aux équations (E) en entraîne une infinité. S'il n'est pas certain que n est infini dans d'autres mouvements, l'existence de mouvements pour lesquels n est supérieur à 1 a par contre été établie plus haut [1].

---

[1] Ce résultat est en désaccord avec celui qu'avait obtenu M. Kiveliovitch (*loc. cit.*, p. 89).

CHAPITRE II.

APPROCHES DANS LES MOUVEMENTS A ALLURE BINAIRE.

Nous allons déterminer par ses conditions initiales un mouvement plan, de la région hyperbolique-elliptique, donnant lieu à une approche. Nous examinerons ensuite l'ensemble des mouvements avec approche de cette région (les régions hyperbolique et parabolique-hyperbolique ne peuvent visiblement pas conduire à des approches).

14. *Équations relatives au mouvement envisagé.* — Dans ce paragraphe comme dans les trois suivants, nous nous limitons au cas des trajectoires planes pour lesquelles la constante des forces vives (énergie cinétique moins énergie potentielle) est positive et qui sont hyperboliques-elliptiques.

Avec les notations définies au paragraphe 5, les équations différentielles du mouvement plan s'écrivent, en posant $l = P_0P$, $l' = P_0P'$:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{(m_1+m_2)x}{r^3} - m_3x\left(\dfrac{a_1}{l^3}+\dfrac{a_2}{l'^3}\right) + m_3\xi\left(\dfrac{1}{l'^3}-\dfrac{1}{l^3}\right), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{(m_1+m_2)y}{r^3} - m_3y\left(\dfrac{a_1}{l^3}+\dfrac{a_2}{l'^3}\right) + m_3\eta\left(\dfrac{1}{l'^3}-\dfrac{1}{l^3}\right); \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -M\xi\left(\dfrac{a_1}{l'^3}+\dfrac{a_2}{l^3}\right) + a_1a_2Mx\left(\dfrac{1}{l'^3}-\dfrac{1}{l^3}\right), \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -M\eta\left(\dfrac{a_1}{l'^3}+\dfrac{a_2}{l^3}\right) + a_1a_2My\left(\dfrac{1}{l'^3}-\dfrac{1}{l^3}\right). \end{cases}$$

D'autre part, si l'on pose

$$A = x'^2 + y'^2 - 2\frac{m_1+m_2}{r}, \qquad p = xy' - yx',$$

$$B = \xi'^2 + \eta'^2 - 2M\left(\frac{a_1}{l'} + \frac{a_2}{l}\right), \qquad q = \xi\eta' - \eta\xi',$$

les intégrales des forces vives et des aires s'écrivent :

$$(3)\qquad \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}A + \frac{(m_1+m_2)m_3}{M}B = 2h \qquad (h \text{ constante des forces vives}),$$

$$(4)\qquad \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}p + \frac{(m_1+m_2)m_3}{M}q = \gamma \qquad (\gamma \text{ constante des aires}).$$

Enfin, nous utilisons le moment d'inertie I des trois corps par rapport au centre de gravité commun

$$(5) \qquad I = \frac{(m_1 + m_2)m_3}{M}\rho^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2,$$

et nous considérons, avec M. Chazy, la plus grande des trois distances mutuelles, R; h étant positif, ces deux quantités sont liées (¹), pour t positif, par l'inégalité

$$(6) \qquad R^2 > \frac{M}{\Sigma m_1 m_2}(I_0 + 2ht^2),$$

sous la condition :

$$(7) \qquad I'_0 > 0$$

$\left(I_0, I'_0\right.$ désignant les valeurs des quantités I et $\left.\frac{dI}{dt}\right.$ à l'instant initial $t = 0\Big)$.

15. *Conditions caractéristiques du mouvement avec approche.* — Nous allons chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que, dans le plan, la constante des forces vives étant positive, il y ait approche entre les points P et P_0.

1° Conditions nécessaires : On sait (²) que, h étant positif, les douze éléments des deux mouvements osculateurs ont chacun, en général, une limite, lorsque le temps croît indéfiniment. En particulier, pour le mouvement osculateur correspondant au mouvement P/P_0, le demi-grand axe a et l'excentricité e ont certainement une limite; en effet (³)

$$(8) \qquad \frac{m_1 + m_2}{a} = \left| x'^2 + y'^2 - 2\frac{m_1 + m_2}{r} \right| = |A|,$$

$$(9) \qquad 1 - e^2 = -\frac{(xy' - yx')^2 A}{(m_1 + m_2)^2} = -\frac{p^2 A}{(m_1 + m_2)^2},$$

ces formules étant valables dans tous les cas (que le mouvement osculateur soit elliptique, parabolique ou hyperbolique).

(¹) C'est là un résultat obtenu par M. Chazy et légèrement modifié : dans (A), p. 40, l'équation (14) $I > 2ht^2$ peut être remplacée par $I > I_0 + 2ht^2$, ainsi que cela se voit en considérant l'équation (13). Il en résulte que, à l'inégalité

$$(15) \qquad R^2 > \frac{M}{\Sigma m_1 m_2} 2ht^2,$$

se substitue l'inégalité :

$$R^2 > \frac{M}{\Sigma m_1 m_2}(I_0 + 2ht^2).$$

(²) (A), p. 30.

(³) *Cf.* Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, pp. 116 et suiv.

Les quantités A et p tendent vers des limites finies [1] A_1 et p_1. Donc a et e ont des limites, a_1 et e_1.

Pour qu'il y ait possibilité d'approche, il faut d'abord que la distance P_0P n'augmente pas indéfiniment avec le temps, ce qui serait le cas si le mouvement osculateur limite était hyperbolique ou parabolique, c'est-à-dire si A_1 était positif ou nul. D'où une première condition

$$A_1 < 0. \tag{I}$$

Cette condition étant supposée réalisée, l'équation (9) montre que $1 - e_1$ est positif ou nul. Si $1 - e_1$ est positif, la longueur P_0P, à la limite, peut être considérée comme le rayon vecteur d'une ellipse ayant a_1 pour demi-grand axe et e_1 pour excentricité, et ainsi cette longueur oscille entre les valeurs extrêmes positives $a_1(1 - e_1)$ et $a_1(1 + e_1)$. Il ne peut donc y avoir d'approche dans ce cas.

Par suite, il est nécessaire que $1 - e_1$ soit nul; ou, en vertu de l'équation (9),

$$p_1 = 0. \tag{II}$$

2° Les conditions (I) et (II) sont-elles suffisantes?

a. Si elles sont vérifiées, la distance périhélie, de valeur $a(1 - e)$, tend vers zéro lorsque le temps croît indéfiniment; en effet, a_1 n'est pas infini, et $1 - e_1$ est nul.

b. D'autre part, il y a, pour P, une infinité de passages au périhélie : avec les notations habituelles, l'anomalie excentrique u est reliée aux autres éléments osculateurs [2] par l'équation

$$u - e \sin u = nt + l_0 - \varpi.$$

a ayant une limite finie non nulle, il en est de même du moyen mouvement n. l_0 et ϖ ont chacun une limite [3]. Donc

$$\frac{u}{nt} \to 1.$$

L'anomalie u augmente indéfiniment, et prend une infinité de fois la valeur $2k\pi$ (k étant un entier quelconque), époque de passage au périhélie pour l'ellipse osculatrice correspondante.

c. Ainsi, la distance P_0P a une infinité de minima, et la valeur de ces minima tend vers zéro. Il y a approche, à moins que chaque minimum ne corresponde à un choc des masses m_1 et m_2. Or nous avons vu au paragraphe 13 que les mouvements présentant au moins deux chocs dépendent, dans le plan,

---

(1) (A), p. 63.
(2) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. I, p. 107.
(3) (A), p. 82.

de 6 paramètres, et, dans l'espace, de 8 paramètres. D'autre part, les mouvements avec approche que nous mettons en évidence (§ 18), dépendent de 7 paramètres dans le plan et de 9 dans l'espace. De la sorte, la circonstance restrictive envisagée, — que chaque minimum de P_0P corresponde à un choc —, ne saurait se produire dans la généralité des cas.

16. *Relations à imposer aux conditions initiales.* — Il s'agit de réaliser les conditions (I) et (II), à l'aide de conditions initiales convenablement choisies.

$$\text{(I)} \qquad A_1 < 0,$$

$$\text{(II)} \qquad p_1 = 0.$$

Par la réalisation de la première condition, le mouvement est de nature hyperbolique elliptique; par celle de la seconde se trouve introduit le phénomène d'approche.

1° Condition (I). — La valeur initiale A_0 de A étant négative, A conservera son signe au cours du mouvement pourvu que, relativement aux corps P_0 et P, le corps P′ reste à une distance assez grande. Il suffira, ainsi que nous le verrons, de s'assurer que $r = P_0P$ est la plus petite des trois distances mutuelles, ou, ce qui revient au même ([1]), que l'on a

$$\text{(11)} \qquad R > 2r,$$

R étant la plus grande des distances mutuelles.

Or, si I_0' est positif, l'équation (6) fournit une borne inférieure pour R. D'autre part, tant que A est négatif, et de plus borné supérieurement par un nombre négatif fixe, il est facile de trouver une limite supérieure pour r [l'équation (9) fournit, par exemple, une limite supérieure du grand axe $2a$ de l'ellipse osculatrice dont P_0P est un rayon vecteur; ce n'est d'ailleurs pas cette limite qui nous servira].

([1]) Supposons $R > 2r$. R est PP′ par exemple. Le troisième côté du triangle, P_0P', est également supérieur à r :

$$P_0P' > PP' - P_0P > R - r > R - \frac{R}{2}, \qquad \text{donc } P_0P' > \frac{R}{2}, \qquad \text{et } a\ fortiori \qquad P_0P' > r.$$

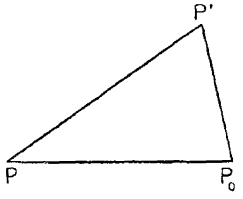


Fig. *b*.

L'inégalité (12) $P_0P' > \frac{R}{2}$ nous servira par la suite.

Connaissant ces deux bornes, inférieure pour R, supérieure pour r, nous pourrons réaliser l'inégalité (11).

Nous sommes ainsi amenés à établir, pour les conditions initiales :

a. conditions pour que I'_0 soit positif;

b. conditions pour que, tant que A reste négatif, R soit supérieur à $2r$;

c. conditions pour que, tant que l'inégalité (11) est vérifiée, A soit inférieur à un nombre négatif fixe, $\frac{A_0}{2}$ par exemple.

Nous démontrons ensuite que, si l'ensemble de ces conditions est réalisé, la condition (I) est satisfaite,

a. Conditions pour que I'_0 *soit positif.* — En vertu de l'équation (5), on a

$$I'_0 = \frac{(m_1 + m_2)m_3}{M}\rho_0\rho'_0 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0 r'_0.$$

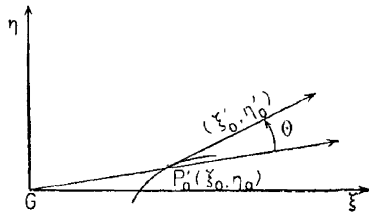


Fig. 21.

Soit θ l'angle de la direction (ξ'_0, η'_0) avec la direction (ξ_0, η_0),

$$\rho'_0 = \sqrt{\xi'^2_0 + \eta'^2_0}\cos\theta.$$

D'autre part

$$r'^2 \leqq x'^2 + y'^2. \tag{13}$$

Ceci étant, I'_0 est la somme de deux termes. Le second est, en valeur absolue, borné inférieurement par $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0 \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}$. Le premier, si θ est très petit, sera voisin de $\frac{(m_1 + m_2)m_3}{M}\rho_0\sqrt{\xi'^2_0 + \eta'^2_0}$. Supposons d'abord $\theta = 0$, et soit α un nombre positif fixe, quelconque. I'_0 sera certainement positif si

$$\frac{m_1 + m_2}{M} m_3 \rho_0 \sqrt{\xi'^2_0 + \eta'^2_0} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0 \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0} > \alpha. \tag{14}$$

Supposons que (14) soit vérifiée; I'_0, qui est positif lorsque θ prend la valeur zéro, l'est encore au voisinage de $\theta = 0$, dans un intervalle que nous allons délimiter. Nous avons

$$I'_0 > \frac{(m_1 + m_2)m_3}{M}\rho_0\sqrt{\xi'^2_0 + \eta'^2_0}\cos\theta - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0 \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}. \tag{15}$$

Les inégalités (14) et (15) entraînent

$$I'_0 > \alpha - (1 - \cos\theta)\frac{(m_1 + m_2)m_3}{M}\rho_0\sqrt{\xi_0'^2 + \eta_0'^2}.$$

I'_0 sera positif pourvu que

$$(16) \qquad (1 - \cos\theta)\frac{(m_1 + m_2)m_3}{M}\rho_0\sqrt{\xi_0'^2 + \eta_0'^2} < \alpha.$$

Ainsi, nous sommes amenés à réaliser simultanément les conditions (14) et (16), qui peuvent s'écrire

$$(A) \qquad \rho_0 > \frac{\alpha + \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}}{\dfrac{(m_1 + m_2)m_3}{M}\sqrt{\xi_0'^2 + \eta_0'^2}},$$

$$(B) \qquad \cos\theta > 1 - \frac{\alpha M}{(m_1 + m_2)m_3\sqrt{\xi_0'^2 + \eta_0'^2}}$$

(α étant un nombre positif fixe, quelconque).

b. Conditions pour que, tant que A *est négatif,* R *reste supérieur à* $2r$. — Supposons les conditions précédentes vérifiées. I'_0 est positif, donc, d'après l'équation (6),

$$R^2 > \frac{M}{\Sigma m_1 m_2}(2ht^2 + I_0).$$

Lorsque A est négatif, on a

$$x'^2 + y'^2 < 2\frac{m_1 + m_2}{r},$$

d'où, en vertu de (13),

$$r'^2 < 2\frac{m_1 + m_2}{r}.$$

Lorsque t est positif, une limite supérieure de r s'obtient en supposant

$$r' = +\sqrt{2\frac{m_1 + m_2}{r}}$$

et *a fortiori* en supposant

$$r' = +\sqrt{2\frac{m_1 + m_2}{r_0}}.$$

Donc, en intégrant,

$$(17) \qquad r < r_0 + t\sqrt{2\frac{m_1 + m_2}{r_0}}.$$

L'inégalité (11) sera donc, en vertu de (6) et de (17), vérifiée si

$$(18) \qquad \sqrt{\frac{M}{\Sigma m_1 m_2}(2ht^2 + I_0)} > 2\left(r_0 + \sqrt{2\frac{m_1 + m_2}{r_0}}\,t\right).$$

Pour réaliser l'inégalité (18), il suffit [1] que l'équation

$$(19)\qquad \sqrt{\frac{M}{\Sigma m_1 m_2}(2ht^2+I_0)} = 2\left(r_0+\sqrt{2\frac{m_1+m_2}{r_0}t}\right)$$

n'ait pas de racines en t.

L'équation (19) est du second degré. Elle n'a pas de racine si

$$(20)\qquad \frac{2M}{\Sigma m_1 m_2}\left(-hI_0\frac{M}{\Sigma m_1 m_2}+4hI_0^2+4I_0\frac{m_1+m_2}{r_0}\right)<0.$$

Posons

$$h_1=\frac{4m_1m_2\Sigma m_1m_2}{Mr_0}.$$

L'inégalité (20) peut alors s'écrire

$$I_0(h-h_1)>4\frac{\Sigma m_1m_2}{M}r_0^2h,$$

condition certainement réalisée si l'on a simultanément

$$(21)\qquad h>h_1,$$

$$(22)\qquad I_0>\frac{\Sigma m_1m_2r_0^2}{M\left(1-\frac{h_1}{h}\right)}.$$

Modifions ces conditions; l'équation des forces vives (3) peut s'écrire, à l'instant $t=0$,

$$2h=\frac{m_1+m_2}{M}m_3(\xi_0'^2+\eta_0'^2)+\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}A_0-2(m_1+m_2)m_3\left(\frac{a_1}{l_0'}+\frac{a_2}{l_0}\right).$$

Limitons $\frac{a_1}{l_0'}+\frac{a_2}{l_0}$. Si l'on a

$$(C)\qquad \rho_0>2r_0$$

(condition qui entraîne évidemment $R_0>2r_0$), r_0 est la plus petite des distances mutuelles, ainsi que nous l'avons établi. D'où

$$\frac{a_1}{l_0'}+\frac{a_2}{l_0}<\frac{a_1}{r_0}+\frac{a_2}{r_0}<\frac{1}{r_0}.$$

Donc, si la condition (C) est remplie, on a

$$2h>\frac{m_1+m_2}{M}m_3(\xi_0'^2+\eta_0'^2)+\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}A_0-\frac{2(m_1+m_2)m_3}{r_0},$$

---

[1] L'inégalité a alors lieu dans le sens désiré; en effet, si les deux courbes représentées par les équations

$$y_1=\sqrt{at^2+b},\qquad y_2=c+dt\qquad (a,\ b,\ c,\ d \text{ tous positifs})$$

ne se coupent pas, on a, dans la région ($t>0$, $y>0$), l'inégalité

$$y_1>y_2.$$

qui s'écrit

$$h > h_2, \tag{23}$$

si l'on pose

$$h_2 = \frac{m_1 + m_2}{2M} m_3(\xi_0'^2 + \eta_0'^2) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{A_0}{2} - \frac{(m_1 + m_2) m_3}{r_0}.$$

La condition (21) sera certainement réalisée si est satisfaite l'inégalité

$$h_2 > h_1. \tag{D}$$

D'autre part, en vertu de (23), il suffit, pour que la condition (22) soit vérifiée, que

$$r_0 > \frac{\Sigma m_1 m_2}{M} \frac{r_0^2}{1 - \frac{h_1}{h_2}}. \tag{E}$$

Si les conditions (C), (D), (E), ainsi que les conditions (A) et (B), sont remplies, R reste supérieur à $2r$ tant que A reste négatif.

c. *Conditions pour que, tant que* R *est supérieur à* $2r$, A *reste inférieur à un nombre négatif fixe,* $\frac{A_0}{2}$ *par exemple.* — Il faut au préalable

$$A_0 < 0. \tag{F}$$

L'équation

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} A + \frac{(m_1 + m_2) m_3}{M} B = 2h \tag{3}$$

s'écrit à l'instant initial

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} A_0 + \frac{(m_1 + m_2) m_3}{M} B_0 = 2h.$$

Ces deux relations entraînent

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} A = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{M} (B_0 - B) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} A_0. \tag{24}$$

Il s'agit de réaliser

$$A < \frac{A_0}{2}.$$

Il suffit pour cela, d'après (24), que l'on ait

$$B_0 - B < \frac{m_1 m_2 M}{(m_1 + m_2)^2 m_3} \frac{-A_0}{2}. \tag{25}$$

Or

$$B_0 - B = (\xi_0'^2 + \eta_0'^2) - (\xi'^2 + \eta'^2) + 2M\left(\frac{a_1}{l'} + \frac{a_2}{l}\right) - 2M\left(\frac{a_1}{l_0'} + \frac{a_2}{l_0}\right),$$

$$B_0 - B < (\xi_0'^2 + \eta_0'^2) - (\xi'^2 + \eta'^2) + 2M\left(\frac{a_1}{l'} + \frac{a_2}{l}\right). \tag{26}$$

Limitons les deux expressions du deuxième membre de cette inégalité :

1° Nous supposons $R > 2r$.

R est l', par exemple. Nous avons vu, d'après l'inégalité (12), que l est supérieur à $\frac{R}{2}$, d'où

$$\frac{a_1}{l'} + \frac{a_2}{l} < \frac{a_1}{R} + \frac{2a_2}{R} < \frac{2}{R}.$$

Cette dernière inégalité, jointe à l'inégalité (6), donne

$$\frac{a_1}{l'} + \frac{a_2}{l} < 2\sqrt{\frac{\Sigma m_1 m_2}{MI_0}}. \tag{27}$$

2° D'après l'équation (2), nous avons

$$\xi'' = -M\xi\left(\frac{a_1}{l'^3} + \frac{a_2}{l^3}\right) + a_1 a_2 Mx\left(\frac{1}{l'^3} - \frac{1}{l^3}\right).$$

Comme ci-dessus, si l'on suppose $R > 2r$ et, par exemple, $l' = R$, on a aussi

$$l > \frac{R}{2}.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{l'^3} + \dfrac{a_2}{l^3} < \dfrac{8}{R^2} \\ \left|\dfrac{1}{l'^3} - \dfrac{1}{l^3}\right| < \dfrac{7}{R^2} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} |\xi| < R, \\ |x| < r < \dfrac{R}{2}. \end{array}\right. \tag{28}$$

Les inégalités (28), jointes à l'équation (2), entraînent

$$\xi'' < \frac{12M}{R^2},$$

$$< \frac{12\Sigma m_1 m_2}{I_0 + 2ht^2}.$$

Par suite

$$\xi' - \xi'_0 < \int_0^\infty 12\Sigma m_1 m_2 \frac{dt}{I_0 + 2ht^2},$$

$$< 12\frac{\Sigma m_1 m_2}{\sqrt{2hI_0}}\frac{\pi}{2}.$$

Posons

$$\gamma = 12\frac{\Sigma m_1 m_2}{\sqrt{2hI_0}}\frac{\pi}{2}.$$

On a

$$|\xi' - \xi'_0| < \gamma, \quad \text{d'où} \quad |\xi'^2_0 - \xi'^2| < \gamma[2|\xi'_0| + \gamma],$$
$$|\eta' - \eta'_0| < \gamma. \quad \text{»} \quad |\eta'^2_0 - \eta'^2| < \gamma[2|\eta'_0| + \gamma].$$

et par suite

$$|(\xi'^2_0 + \eta'^2_0) - (\xi'^2 + \eta'^2)| < 2\gamma|\gamma + |\xi'_0| + |\eta'_0||$$

ou

$$|(\xi'^2_0 + \eta'^2_0) - (\xi'^2 + \eta'^2)| < 2\gamma\left[\gamma + \sqrt{2(\xi'^2_0 + \eta'^2_0)}\right]. \tag{29}$$

Des inégalités (26), (27) et (29), on déduit

$$(30)\qquad B_0 - B < 2\gamma\left[\gamma + \sqrt{2(\xi_0'^2 + \eta_0'^2)}\right] + 4\sqrt{M\frac{\Sigma m_1 m_2}{I_0}}.$$

Modifions ce résultat en supposant l'inégalité (21) vérifiée [c'est-à-dire les conditions (A), (B), (C) et (D) réalisées]. Soit donc

$$(21)\qquad h > h_1.$$

où l'on a posé

$$h_1 = \frac{4}{r_0}(m_1 + m_2)\frac{\Sigma m_1 m_2}{M}.$$

D'où

$$\gamma < \gamma_1$$

avec

$$\gamma_1 = 6\pi\frac{\Sigma m_1 m}{\sqrt{2h_1 I_0}}.$$

L'inégalité (30) s'écrit alors :

$$(31)\qquad B_0 - B < 2\gamma_1\left[\gamma_1 + \sqrt{2(\xi_0'^2 + \eta_0'^2)}\right] + 4\sqrt{M\frac{\Sigma m_1 m_2}{I_0}}.$$

Le but que nous nous étions assigné ici était de réaliser l'inégalité (25). Il suffit pour cela, en vertu de l'inégalité (31), que l'on ait

$$2\gamma_1\left[\gamma_1 + \sqrt{2(\xi_0'^2 + \eta_0'^2)}\right] + 4\sqrt{M\frac{\Sigma m_1 m_2}{I_0}} < \frac{m_1 m_2 M}{m(m_1 + m_2)}\frac{-A_0}{2}.$$

Ainsi, en fin de compte, $R > 2r$ entraîne $A < \frac{A_0}{2}$, pourvu que, les conditions (A), (B), (C), (D), (E) étant vérifiées, on ait en outre

$$(G)\qquad 12\pi\frac{\Sigma m_1 m_2}{\sqrt{2h_1 I_0}}\left[6\pi\frac{\Sigma m_1 m_2}{\sqrt{2h_1 I_0}} + \sqrt{2(\xi_0'^2 + \eta_0'^2)}\right] + 4\sqrt{M\frac{\Sigma m_1 m_2}{I_0}} < \frac{m_1 m_2 M}{m(m_1 + m_2)}\frac{-A_0}{2}$$

$$\left(\text{avec } h_1 = \frac{4}{r_0}(m_1 + m_2)\frac{\Sigma m_1 m_2}{M}\right).$$

Il reste maintenant à montrer que, si les conditions (A), (B), (C), (D), (F), et (G) sont réalisées, il en est de même de la condition (I) :

Posons

$$R - 2r = X,$$

$$-A + \frac{A_0}{2} = Y.$$

Nous savons que : tant que A reste < 0, on a $R > 2r$; tant que $R > 2r$, A reste inférieur à $\frac{A_0}{2}$. Ces deux résultats peuvent s'énoncer de la façon suivante :

$$Y > \frac{A_0}{2} \quad \text{entraîne} \quad X > 0,$$

$$X > 0 \quad \text{entraîne} \quad Y > 0.$$

Le point représentatif, de coordonnées X et Y, se déplace dans son plan de façon continue au cours du mouvement : les longueurs sont en effet des fonctions continues du temps, et, même en cas de choc P_0P, A reste continu, puisque B le reste, et que ces deux quantités sont liées par l'équation des forces vives.

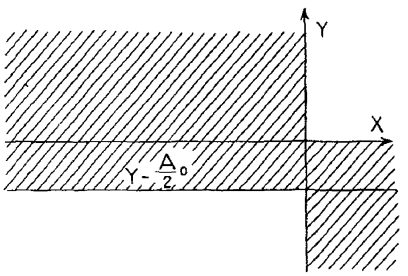


Fig. 22.

A l'instant initial, nous avons réalisé :

$$X > 0 \quad \text{par la condition (D)},$$
$$Y > 0 \quad \text{par la condition (F)}.$$

Le point représentatif, ne pouvant franchir la région hachurée, reste dans la région ($X > 0$, $Y > 0$).

Ainsi, A reste inférieur à $\frac{A_0}{2}$ au cours du mouvement. A_0 est négatif; la la limite A_1 de A ne peut être que négative.

La condition (I) est satisfaite si les conditions (A), (B), (C), (D), (E), (F) et (G) le sont.

2° Condition (II). — Nous supposons que les 7 conditions précédentes, qui entraînent l'inégalité (I), sont remplies.

Nous cherchons des conditions initiales telles que la limite p_1 de $p = xy' - xy'$ soit nulle. Il suffit pour cela de s'assurer que cette limite p_1 est fonction continue des conditions initiales, et d'autre part que, dans certains cas, cette limite est positive, et dans d'autres, négative.

a. Conditions pour que la limite p_1 soit tantôt > 0, *tantôt* < 0. — D'après les équations (1), on a

$$p = xy' - yx' = m_1 \int_0^t (x\eta - y\xi)\left(\frac{1}{l'^3} - \frac{1}{l^3}\right) dt. \tag{32}$$

Nous allons évaluer une limite supérieure de cette intégrale.

Le grand axe $2a$ de l'ellipse osculatrice correspondant au mouvement P_1P_0 a pour valeur, d'après l'équation (8),

$$2a = 2\frac{m_1 + m_2}{|A|}.$$

Puisque nous supposons remplies les conditions trouvées précédemment,

$$2a < 4\frac{m_1 + m_2}{|A_0|}.$$

Pour la même raison, R est supérieur à $2r$. Par suite,

$$|x\eta - y\xi| < r\rho < rR < 4\frac{m_1 + m_2}{|A_0|}R.$$

Or, d'après les inégalités (28),

$$\frac{1}{l'^3} - \frac{1}{\rho^3} < \frac{7}{R^3}.$$

De l'équation (32), nous déduisons ainsi

$$|p_1 - p_0| < m_3\frac{4(m_1 + m_2)}{|A_0|}\int_0^\infty \frac{7}{R^3}\,dt,$$

(33) $$|p_1 - p_0| < 28\,m_3\frac{m_1 + m_2}{|A_0|}\int_0^\infty \frac{\Sigma m_1 m_2}{M}\frac{dt}{I_0 + 2ht^2},$$

$$|p_1 - p_0| < \frac{28\,m_3(m_1 + m_2)\Sigma m_1 m_2}{M|A_0|}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{2hI_0}}.$$

Utilisons l'inégalité (21);

(34) $$|p_1 - p_0| < \frac{14\pi m_3(m_1 + m_2)\Sigma m_1 m_2}{M|A_0|\sqrt{2h_1}}\frac{1}{\sqrt{I_0}}.$$

Si nous posons

$$\beta = \frac{14\pi m_3(m_1 + m_2)\Sigma m_1 m_2}{M|A_0|\sqrt{2h_1}},$$

l'inégalité (34) devient

(35) $$|p_1 - p_0| < \frac{\beta}{\sqrt{I_0}}.$$

$p_0 = x_0 y'_0 - x'_0 y_0$ prend, lorsque varie la direction du vecteur de longueur $\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}$, les valeurs extrêmes

$$+\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)(x'_0 + y'^2_0)} \quad \text{et} \quad -\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)(x'^2_0 + y'^2_0)}.$$

Dans les deux cas extrêmes, p_1 est du signe de p_0, pourvu que, d'après l'inégalité (35),

$$\frac{\beta}{\sqrt{I_0}} < \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)(y'^2_0 + y'^2_0)},$$

ou

(H) $$\sqrt{I_0} > \frac{14\pi\dfrac{m_3(m_1 + m_2)\Sigma m_1 m_2}{|A_0|.M.2h_1}}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)(x'^2_0 + y'^2_0)}}.$$

Si cette condition est satisfaite, la limite de $xy' - yx'$ est positive ou négative selon la direction du vecteur (x'_0, y'_0). D'où une condition supplémentaire :

(K) *la direction du vecteur de composantes x'_0 et y'_0 est laissée libre.*

b. La limite p_1 est fonction continue des conditions initiales. — Les conditions trouvées précédemment lors de l'étude de la condition (I) sont supposées remplies, ce qui fixe aux conditions initiales un domaine restreint. Fixons un point de ce domaine, p prend les valeurs p_0 et p_1 aux instants $t = 0$ et $t = \infty$. Pour les points voisins, p prend aux mêmes instants les valeurs p'_0 et p'_1. Nous allons déterminer un domaine entourant le point choisi et appartenant entièrement au domaine restreint dont nous venons de parler, où l'on aura

$$|p'_1 - p_1| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitraire, mais fixé d'avance.

On a

$$p_1 = p_0 + \int_0^\tau \frac{dp}{dt}\,dt + \int_\tau^\infty \frac{dp}{dt}\,dt,$$

τ étant un instant quelconque ($\tau > 0$), et $\frac{dp}{dt}$ défini par l'équation :

$$\frac{dp}{dt} = m_3(x\eta - y\xi)\left(\frac{1}{l'^3} - \frac{1}{l^3}\right).$$

Par suite,

$$|p'_1 - p_1| < |p'_0 - p_0| + \left|\int_0^\tau \left(\frac{dp'}{dt} - \frac{dp}{dt}\right) dt\right| + \left|\int_\tau^\infty \frac{dp}{dt}\,dt\right| + \left|\int_\tau^\infty \frac{dp'}{dt}\,dt\right|.$$

Il nous suffit de rendre ces 4 termes inférieurs chacun à $\frac{\varepsilon}{4}$. C'est facile.

I. Des inégalités (21) et (23), nous déduisons :

$$\left|\int_\tau^\infty \frac{dp'}{dt}\,dt\right| < 28\,\frac{m_3(m_1 + m_2)}{A_0}\int_\tau^\infty \frac{\Sigma m_1 m_2}{M}\,\frac{dt}{I_0 + 2ht^2},$$
$$< \frac{14\,m_3(m_1 + m_2)\Sigma m_1 m_2}{M h_1 |A_0|}\,\frac{1}{\tau}.$$

Nous fixerons τ assez grand pour que cette expression soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{4}$.

II. τ étant fixé, nous trouverons pour les conditions initiales un domaine où

$$\left|\frac{dp'}{dt} - \frac{dp}{dt}\right| < \frac{\varepsilon}{4\tau},$$

car, dans l'intervalle de temps fini $(0, \tau)$, les quantités x, y, ξ, η, l, l', qui seules figurent dans l'expression de $\frac{dp}{dt}$, sont fonctions continues des conditions initiales.

Dans ce domaine,

$$\left|\int_0^\tau \left(\frac{dp'}{dt} - \frac{dp}{dt}\right) dt\right| < \frac{\varepsilon}{4\tau}\tau,$$
$$< \frac{\varepsilon}{4}.$$

III. Il suffit maintenant de choisir p'_0 tel que $|p'_0 - p_0| < \frac{\varepsilon}{4}$ pour que, dans la partie commune à tous ces domaines, $|p'_1 - p_1|$ soit inférieur à ε.

Ainsi, les 7 conditions entraînant l'inégalité (I) étant vérifiées, ainsi que les conditions (H) et (K), la condition (II) est satisfaite. En effet, lorsque nous faisons varier la direction du vecteur (x'_0, y'_0), direction qui est libre d'après la condition (K), la limite p_1 prend des valeurs tantôt positives, tantôt négatives. Cette limite, fonction continue des conditions initiales, prend à certains moments la valeur zéro.

17. *Choix des conditions initiales.* — Les différentes relations auxquelles doivent satisfaire les conditions initiales pour conduire à un mouvement avec approche sont-elles compatibles?

Nous disposons de 8 éléments : $x_0, y_0, x'_0, y'_0, \xi_0, \eta_0, \xi'_0, \eta'_0$.

Nous devons réaliser les conditions suivantes :

(A) $$\rho_0 > \frac{\alpha + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0 \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}}{(m_1 + m_2)\frac{m_3}{M}\sqrt{\xi_0'^2 + \eta_0'^2}}.$$

(B) $$\cos.\theta > 1 - \frac{\alpha M}{(m_1 + m_2) m_3 \sqrt{\xi_0'^2 + \eta_0'^2}}.$$

(C) $$\rho_0 > 2 r_0.$$

(D) $$h_2 > h_1.$$

(E) $$I_0 > \frac{r_0^2 \Sigma m_1 m_2}{M\left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right)}.$$

(F) $$A_0 < 0.$$

(G) $$12\pi \frac{\Sigma m_1 m_2}{\sqrt{2 h_1 I_0}}\left[6\pi \frac{\Sigma m_1 m_2}{\sqrt{2 h_1 I_0}} + \sqrt{2(\xi_0'^2 + \eta_0'^2)}\right] + 4\sqrt{M\frac{\Sigma m_1 m_2}{I_0}} < \frac{m_1 m_2 M}{m_3 (m_1 + m_2)^2}\,\frac{-A_0}{2}.$$

(H) $$\sqrt{I_0} > \frac{14\pi m_3 (m_1 + m_2)\Sigma m_1 m_2}{M\,|A_0|\sqrt{2 h_1}\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)(x_0'^2 + y_0'^2)}}.$$

(K) la direction du vecteur (x'_0, y'_0) est laissée libre.

(α) étant un nombre positif fixé arbitrairement; θ étant l'angle des vecteurs (ξ'_0, η'_0) et (ξ_0, η_0); h_1 et h_2 étant respectivement égaux à

$$\frac{4}{r_0}\,\frac{m_1 + m_2}{M}\,\Sigma m_1 m_2 \quad \text{et} \quad \frac{(m_1 + m_2) m_3}{2M}(\xi_0'^2 + \eta_0'^2) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{A_2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) m_3}{r_0}.$$

a. Fixons $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, arbitrairement, puis $x_0'^2 + y_0'^2$ suffisamment grand pour vérifier (F). (A_0 est dès maintenant fixé, de même que h_1.)

b. Fixons $\xi_0'^2 + \eta_0'^2$ assez grand pour vérifier (D); (h_2 est dès lors fixé.)

c. Assignons ensuite à ρ_0, (ou à l_0, ce qui revient au même), une valeur suffisamment grande pour vérifier (A), (C), (E), (G), (H).

d. Il suffit alors de choisir la direction du vecteur (ξ_0', η_0'), de longueur déjà fixée, suffisamment voisine de celle du vecteur (ξ_0, η_0), pour que (B) soit vérifiée.

e. Nous disposons entièrement de la direction du vecteur (x_0', y_0'), comme le veut la condition (K). Deux positions aux moins de ce vecteur conduisent à une valeur nulle de p_1.

Toutes les conditions que doivent vérifier les conditions initiales sont ainsi satisfaites.

18. *Approches dans l'espace.* — Pour le choix des conditions initiales, nous avons eu seulement à réaliser des inégalités, exception faite pour la direction du vecteur (x_0', y_0') qui, elle, est déterminée, (avec peut-être une infinité de solutions), de façon que la limite de $xy' - yx'$ soit nulle.

Ainsi, les mouvements conduisant à une approche dépendent, dans le plan, de 7 paramètres.

Pour les mouvements dans l'espace, il y a trois conditions à réaliser : que les limites de $xy' - yx'$, $yz' - zy'$, $zx' - xz'$ soient nulles. Les mouvements conduisant dans l'espace à une approche dépendent de 9 paramètres [1].

(Il y a là une différence essentielle avec les mouvements donnant lieu à un choc binaire, qui dépendent de 7 paramètres dans le plan, mais de 10 dans l'espace).

Toutefois, les mouvements plans avec approche, considérés dans l'espace, dépendent également de 9 paramètres, et l'on pourrait supposer que ce sont eux qui constituent exclusivement les mouvements à 9 paramètres envisagés plus haut. Il faut donc s'assurer de l'existence d'approches hors plan ; voici comment on peut le faire par continuité, en envisageant seulement, comme dans le plan, les mouvements hyperboliques-elliptiques :

Lorsque le temps croît indéfiniment, le plan contenant le mouvement osculateur elliptique admet une position limite. Considérons l'ensemble (E),

---

[1] Parmi ces mouvements, nous devons éliminer (14, 2°, *c*) ceux qui présentent une infinité de chocs. Ces derniers comprennent en particulier (et peut-être uniquement) les mouvements pour lesquels les conditions de choc disparaissent, c'est-à-dire pour lesquels le premier mouvement osculateur est constamment rectiligne : ce sont les mouvements rectilignes, plans isocèles avec axe de symétrie et isocèles avec plan de symétrie, qui dépendent respectivement de 6, 7 et 8 paramètres.

à 9 paramètres, des mouvements hyperboliques-elliptiques pour lesquels ce plan limite est un même plan, celui des xy, par exemple. Pour tous ces mouvements, $yz' - zy'$ et $zx' - xz'$ ont des limites nulles; il reste à agir sur la limite p_1 de $xy' - yx'$.

Considérons encore un mouvement (A) plan avec approche, ayant lieu dans le plan des xy. Il appartient à l'ensemble (E). Au voisinage de ce mouvement, nous trouvons (16, 2°, a) des mouvements plans pour lesquelles les limites de p sont, les unes positives, les autres négatives. Soient deux de ces mouvements,

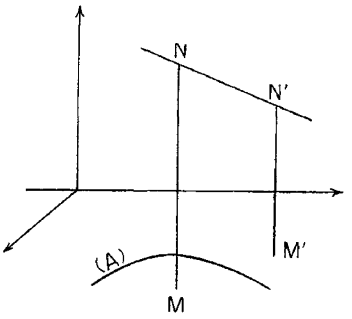


Fig. 23.

conduisant à des valeurs p_1 de signes contraires. Les points M et M' correspondant à leurs conditions initiales [dans l'espace à 10 dimensions où se représentent les trajectoires de l'ensemble (E) en fonction du temps], sont représentés ici schématiquement dans l'espace à 3 dimensions, ainsi que la trajectoire (A).

Dans l'ensemble (E), nous trouvons, en raison de la continuité de p par rapport aux conditions initiales, des mouvements ayant lieu hors du plan des xy, et admettant des limites p_1 de signes contraires. Les points représentatifs de leurs conditions initiales, N et N', sont ici figurés schématiquement, au voisinage des points M et M'. Entre N et N', nous trouvons, hors du plan des xy, un point P correspondant à un mouvement conduisant à une limite nulle pour p_1. Ce mouvement n'est pas plan, car la trajectoire, si elle était plane, ne pourrait se trouver que dans le plan des xy, plan limite de l'ellipse du mouvement osculateur elliptique. Or P n'est pas dans ce plan.

Ainsi, dans l'espace, nous avons mis en évidence deux catégories de mouvements avec approche, chacune dépendant de 9 paramètres, l'une étant formée seulement de mouvements plans.

19. *Surface des approches.* — Dans l'espace à 12 dimensions dans lequel on représente les conditions initiales relatives aux différents mouvements, les mouvements hyperboliques-elliptiques correspondent à trois régions limitées

par des multiplicités à 11 dimensions. Leur disposition peut être figurée symboliquement sur le chéma ci-dessous.

Ce schéma est valable aussi pour les mouvements plans, dépendant de 8 paramètres et représentés par suite dans l'espace à 8 dimensions.

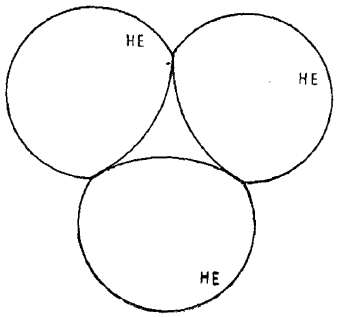


Fig. 24.

Pour les mouvements à allure binaire, la surface des approches dans l'espace se présente, dans l'espace à 12 dimensions, sous la forme de trois courbes continues, à 10 dimensions, situées chacune dans une région hyperbolique-elliptique. Nous ne pouvons guère fournir sur elles d'indications topologiques; il n'en est pas de même pour la surface des approches planes, surface à 7 dimensions dans un espace à 8 dimensions, dont nous pouvons préciser la représentation schématique.

Envisageons au préalable dans le général des mouvements à allure binaire. On sait [1] que les 12 éléments osculateurs qu'ils définissent à chaque instant ont une valeur limite lorsque le temps croît indéfiniment. Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème. — *Il y a au moins un mouvement à allure binaire qui admet comme éléments osculateurs limites, lorsque le temps croît indéfiniment, les éléments de deux mouvements binaires donnés, pourvu que cependant ces deux mouvements ne soient pas tous deux elliptiques.*

Envisageons le mouvement admettant comme éléments osculateurs à l'instant t_1 les 12 éléments limites donnés. Dans l'espace à 12 dimensions considéré précédemment, le point R, représentatif des conditions initiales ($t=0$) conduisant à ce mouvement, se déplace lorsque t_1 varie. Mais ce déplacement est limité, la force vive du système étant fixée par le choix des éléments osculateurs. Par suite, si l'on donne à t_1 des valeurs de plus en plus

[1] (A), p. 30.

grandes, l'ensemble des positions de R admet au moins un point d'accumulation R_0, évidemment [1] situé dans la région des mouvements à allure binaire (qui contient sa frontière). Dans cette région, les éléments limites sont fonctions continues de la position du point représentatif des conditions initiales qui y conduisent [2].

Donc les éléments limites correspondant à R_0, d'une part, et d'autre part les éléments à l'instant t_1 pour le mouvement correspondant à R, sont des quantités rendues arbitrairement voisines par un choix convenable de t_1 (suffisamment grand et tel que R soit suffisamment près de R_0). Les seconds de ces éléments sont fixes, les premiers leur sont par suite égaux, et le mouvement correspondant à R_0 est un des mouvements cherchés.

Revenant aux mouvements plans, nous envisageons, au lieu des éléments osculateurs a, a', e et e' les quantités A, B, p et q à l'aide desquelles on les calcule par les formules (8) et (9).

Considérons alors deux mouvements plans d'une même région hyperbolique-elliptique, les points R_1 et R_2 représentatifs de leurs conditions initiales dans l'espace à 8 dimensions, les éléments limites

$$A_1 (\text{au lieu de } a_1),\quad p_1 (\text{au lieu de } e_1),\quad \varpi_1,\quad (l_0)_1,\quad B_1,\quad q_1,\quad \varpi_1,\quad (l'_0)_1$$
$$A_2,\quad p_2,\quad \varpi_2,\quad (l_0)_2\quad B_2,\quad q_2,\quad \varpi'_2\quad (l'_0)_2.$$

Les mouvements étant hyperboliques-elliptiques, A_1 et A_4 sont négatifs, B_1 et B_2 positifs.

Passons de R_1 à R_2 par un chemin continu, ne quittant pas la région hyperbolique-elliptique, et suivons en même temps le trajet $S_1 S_2$ d'un point S, représentatif des éléments osculateurs limites, dans l'espace à 8 dimensions dont les coordonnées ont les valeurs de A, p, ϖ, l_0, B, q, ϖ', l'_0.

1° Si p_1 et p_2 sont de même signe, on peut passer de S_1 à S_2 par un chemin sur lequel p reste différent de zéro et A négatif. On peut passer de R_1 à R_2 sans quitter la région hyperbolique-elliptique, et sans rencontrer de mouvement avec approche.

2° Si p_1 et p_2 sont de signes contraires, le chemin $S_1 S_2$ rencontre le plan $p = 0$. En passant de R_1 à R_2 sans quitter la région hyperbolique-elliptique, on rencontre un mouvement pour lequel est vérifiée la double condition $p = 0$, $A < 0$, caractéristique d'une approche.

---

(1) Il ne peut y avoir doute que si le mouvement limite étudié est parabolique-elliptique; on le considère alors comme limite d'un certain ensemble de mouvements hyperboliques-elliptiques, dont l'existence effective est établie par le présent théorème. Nous n'insisterons pas sur ce point facile à établir.

(2) (A), p. 44 et 84.

Ainsi, *pour les mouvements plans, la surfaces des approches sépare chaque région hyperbolique-elliptique en deux régions simplement connexes.* Ces deux régions correspondent à des sens de rotation différents pour le mouvement P/P_0 sur l'ellipse osculatrice limite.

Examinons la section de la surface des approches et de la frontière de la région hyperbolique-elliptique : sur cette frontière, le premier mouvement osculateur limite (celui qui est elliptique à l'intérieur de cette frontière) est parabolique à l'extérieur de la surface $h = 0$, ainsi que sur cette surface, elliptique à l'intérieur de cette surface.

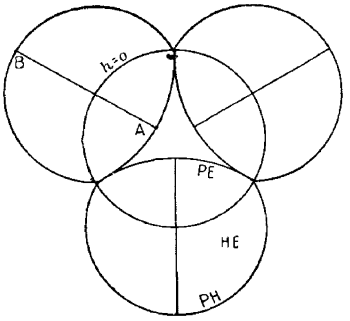


Fig. 25. — Représentation schématique AB de la surface des approches (cas des mouvements plans).

La surface des approches ne contient donc, de sa propre frontière, que la partie commune avec la surface parabolique-elliptique. Sur l'autre partie, le premier mouvement osculateur limite est un mouvement rectiligne parabolique, qui n'a rien de remarquable. Sur le schéma ci-dessus, le point A appartient à la surface des approches AB, mais non le point B.

CHAPITRE III.

APPROCHES DANS LES MOUVEMENTS BORNÉS ET OSCILLANTS.

20. *Les trajectoires avec choc non exceptionnelles présentent des approches.* — Les trajectoires à allure binaire englobent, dans l'espace à 12 dimensions, tous les points qui ne sont pas situés à l'intérieur de la surface parabolique-elliptique.

Dans la région *intérieure*, les trajectoires sont bornées ou oscillantes. Leur étude est très complexe; les seuls résultats précis que l'on possède à leur sujet sont de nature statistique. Ils furent obtenus par Poincaré ou à partir de ses travaux et concernent l'existence des solutions périodiques et la stabilité des mouvements.

1° Des trajectoires périodiques mises en évidence par Poincaré [1], M. Kiveliovitch a déduit l'existence de trajectoires périodiques avec choc [2]. Ce sont ces dernières que nous utiliserons. Elles sont situées dans la région intérieure, car les trajectoires à allure binaire ne peuvent être périodiques.

2° Poincaré a montré [3] que, si un ensemble de trajectoires possède un invariant intégral fini, ces trajectoires présentent la stabilité à la Poisson (c'est-à-dire que chacune passe une infinité de fois au voisinage de chacun de ses propres points, ou encore qu'elle admet chacun de ses points comme points limites lorsque le temps croît indéfiniment). Des trajectoires *exceptionnelles* peuvent exister dans l'ensemble, qui ne possèdent pas la stabilité à la Poisson (et alors elles ne s'approchent indéfiniment d'aucun de leurs propres points); mais, même si elles dépendent d'autant de paramètres que les trajectoires non exceptionnelles, dans l'espace qui admet ces paramètres comme coordonnées, les points qui conduisent aux trajectoires exceptionnelles ne peuvent remplir un volume de mesure non nulle.

---

(1) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Chap. III.
(2) *Bull. astron.*, 2e série, t. 7, p. 113-120.
(3) *Méthodes nouvelles*, t. III, p. 147-156.

M. Chazy [1], en définissant un invariant intégral commun à toutes les trajectoires de la région intérieure, a ainsi démontré que leur ensemble possède la stabilité à la Poisson.

La recherche des mouvements avec approche se confond avec celle des trajectoires (de l'espace à 12 dimensions) admettant un choc comme point limite lorsque le temps croît indéfiniment.

Supposons en effet le mouvement régularisé, par exemple par la méthode de Levi-Civita, que nous avons déjà employée au Chapitre I. Les 12 variables étant ω_i, ξ_i, x'_i, p'_i, dans l'espace à 12 dimensions où elles sont considérées comme coordonnées, un choc P_0P est représenté par un point à distance finie pour lequel on a

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.$$

S'il y a approche, envisageons les points de l'espace à 12 dimensions correspondant, pour la distance P_0P, à des minima décroissants et tendant vers zéro. Leur ensemble admet au moins un point d'accumulation, correspondant à une distance P_0P nulle, donc à un choc. Exceptionnellement, ce point pourrait ne pas définir 12 conditions initiales, si trois de ses coordonnées d'un même groupe, x'_i ou p'_i, étaient nulles ou infinies. Mais aucun de ces cas d'indétermination ne peut se présenter ici, ainsi qu'on le vérifie aisément en utilisant les résultats obtenus par M. Sundman sur la limitation des vitesses lorsque le vecteur des aires est différent de zéro.

Réciproquement, si une trajectoire admet un choc ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$), comme point limite, le minimum de la distance P_0P tend vers zéro lorsque le temps croît indéfiniment; le mouvement comporte une approche.

Les trajectoires avec choc qui ne sont pas exceptionnelles au sens de Poincaré possèdent la stabilité à la Poisson et admettent chacun de leurs points comme points limites. En particulier, elles passent une infinité de fois au voisinage du choc initial et présentent donc une approche.

Or le choc est un incident local, sans répercussion sur la suite du mouvement; il n'y a aucune raison de soupçonner toutes les trajectoires avec choc d'être exceptionnelles. Il semble donc que *les trajectoires avec approche comprennent au moins toutes les trajectoires avec choc*, qui dépendent de 10 paramètres dans l'espace et de 7 dans le plan.

Cependant, nous n'avons aucun renseignement sur les conditions générales auxquelles une trajectoire est exceptionnelle. Si improbable que soit le fait que leur ensemble contienne la surface des chocs (multiplicité analytique à

---

[1] *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps* (*J. de math.*, 9e série, t. 8, p. 353-380).

10 dimensions dans l'espace et 7 dans le plan), il nous faut l'envisager. Nous sommes donc amenés à supposer que *toutes les trajectoires avec choc sont instables*. Ici encore, nous mettrons en évidence des trajectoires avec approche. Nous avons besoin pour cela des résultats préliminaires [1] contenus dans les deux paragraphes suivants.

21. *Disposition des trajectoires au voisinage d'une trajectoire périodique isolée.* — Nous aurons souvent l'occasion de considérer des trajectoires admettant un point A comme point limite lorsque le temps croît indéfiniment, c'est-à-dire passant arbitrairement près de ce point pour des valeurs de t suffisamment grandes; il est entendu qu'après être passée au voisinage de A, la trajectoire peut s'en éloigner à distance finie ou même infinie, pour y revenir ensuite. Nous dirons alors que la trajectoire est *asymptote* au point A. Une telle trajectoire est par là même *asymptote* à tous les points de la trajectoire issue de A, car elle passe suffisamment près de A pour suivre, sur une longueur fixée à l'avance, la trajectoire qui en est issue. Nous dirons que la trajectoire *est asymptote à la trajectoire issue de* A.

Notre acception du mot *asymptote* diffère donc de la signification classique par le fait que, dans cette dernière, on entend qu'une distance tend vers zéro; et que nous demandons seulement à cette distance d'avoir un minimum qui tende vers zéro. Elle en diffère encore par le fait qu'une courbe que nous appelons *asymptote à une autre* s'approche arbitrairement de *tous* les points de cette dernière, propriété qui n'est d'ailleurs, en général, pas réciproque.

Considérons alors, dans le cas général, une trajectoire périodique. Les autres trajectoires peuvent être divisées en deux classes :

1° Celles qui sont asymptotes (au sens défini ci-dessus) à la trajectoire périodique;

2° Celles pour lesquelles les distances entre chacun de leurs points et chacun des points de la trajectoire périodique admettent une valeur minima δ non nulle.

Supposons qu'il n'y ait pas de trajectoire de la première classe. Nous dirons que la trajectoire périodique est *isolée*.

L'ensemble des points de l'espace pour lesquels la distance aux différents points d'une trajectoire périodique a un minimum de valeur donnée d forme, si d est assez petit, une surface fermée topologiquement assimilable à un tore,

---

[1] La portée des résultats contenus dans les paragraphes 21, 22 et 24 n'est pas limitée au problème des trois corps. Elle s'étend à toutes les solutions des systèmes différentiels du premier degré.

que nous appellerons le *tube d*. Si la trajectoire périodique est isolée, à chaque trajectoire issue d'un point du tube d correspond un nombre δ. L'ensemble de ces nombres admet l'un d'entre eux, δ', comme minimum, car l'ensemble des points du tube d est, de par la structure du tube, un ensemble fermé. Par suite, δ' n'est pas nul. Soit d' un nombre positif inférieur à δ'. Les trajectoires issues des points du tube d' restent enfermées à l'intérieur du tube d. De plus, de même que les trajectoires du tube d sont extérieures au tube d', les trajectoires du tube d' sont extérieures à un tube d'' ($d'' < d' < d$). Les trajectoires issues des différents points du tube d'' sont de même situées dans un espace compris entre deux tubes, d' et d''' ($d''' < d'' < d'$). Donc :

Au voisinage d'une trajectoire périodique isolée, les trajectoires se groupent sous la forme de nappes tubulaires fermées, incluses les unes dans les autres, et admettant la trajectoire périodique comme axe.

En particulier, si des trajectoires périodiques *isolées* existent parmi les solutions du problème des trois corps, leur voisinage ne contient que des trajectoires bornées, à l'exclusion des trajectoires oscillantes.

22. Théorème. — *Parmi un ensemble de trajectoires possédant la stabilité à la Poisson, des trajectoires exceptionnelles ne peuvent constituer un continuum fini et fermé.*

Supposons, en effet, qu'un continuum fermé (C) soit formé uniquement de trajectoires exceptionnelles (prises dans leur totalité), frontière comprise; c'est-à-dire que les trajectoires issues des différents points de (C) et de sa frontière appartiennent entièrement à (C). Nous allons montrer que ce continuum n'est pas fini.

a. Pour classer les trajectoires, attachons à chacune d'elles l'indice formé par les valeurs des n paramètres correspondant à l'instant initial. Soit p le symbole formé par l'ensemble de ces n valeurs, $x_1 x_2 \ldots x_n$.

A deux trajectoires, définies par les conditions initiales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, correspondent deux indices p et p' distincts; nous dirons que p est inférieur à p' si x_1 est inférieur à x'_1; ou si, les deux indices ayant leurs premiers éléments égaux jusqu'au $k^{\text{ième}}$, x_k est inférieur à x'_k.

b. (Rappelons que, conformément à la convention faite au paragraphe précédent, une trajectoire asymptote à une autre est une trajectoire qui se rapproche arbitrairement de tous les points de celle-ci.)

Chaque trajectoire (S) du continuum (C) est asymptote à au moins une des autres trajectoires de (C), du moins si le continuum est fini : elle admet, en effet, au moins un point limite lorsque le temps croît indéfiniment; ce point

limite ne lui appartient pas puisqu'elle est instable, mais appartient à (C) qui contient sa frontière; la trajectoire S étant asymptote à ce point, elle l'est aussi à la trajectoire qui en est issue.

c. L'ensemble des trajectoires, situées sur (C), auxquelles S est asymptote, constitue un lot L, *lot associé à* S. Les indices de ce lot forment un ensemble P fermé.

Soit, en effet, p' une valeur limite pour une suite d'entre eux, $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$. En premier lieu, la trajectoire S′ correspondant à p' fait partie de (C), puisque ce continuum contient sa frontière. D'autre part, S est asymptote à S′, car S est asymptote à une trajectoire aussi voisine qu'on le veut de S′, et passe donc à une distance inférieure à une valeur arbitrairement petite d'un point choisi à l'avance sur S′.

d. Chaque trajectoire du lot L est asymptote à un lot L′ de trajectoires qui font toutes partie du lot L, car une trajectoire qui est asymptote à une autre est aussi asymptote aux trajectoires auxquelles cette autre est asymptote.

En particulier, au plus grand p'_1 des indices du lot L correspond une trajectoire S_1 asymptote à un lot L_2. L'ensemble P_2 des indices de L_2 fait partie de l'ensemble P des indices du lot L; nous avons aussi démontré qu'il est fermé. Soit p'_2 le plus grand des indices de P_2; il lui correspond de même une trajectoire S_2, et son lot associé L_3, dont les indices forment un ensemble fermé P_3, faisant partie de P_2 et de P.

Il n'y a pas deux de ces ensembles $P_1, P_2, P_3, \ldots$, qui soient identiques, car, par exemple, P_3 ne contient pas p'_2, une trajectoire instable n'étant pas asymptote à elle-même.

e. Nous avons ainsi formé un ensemble infini de lots L_i, extraits du lot L, classés, ainsi que les ensembles P_i de leurs indices, dans l'ordre de leurs indices maxima. Chacun est contenu dans tous ceux dont l'indice maximum est supérieur au sien; chacun est associé à une trajectoire dont l'indice est supérieur au plus grand des siens.

Supposons qu'il existe une limite inférieure σ pour les indices maxima q'_i des ensembles Q_i possédant ces propriétés (les ensembles Q_i comprennent, en particulier, les ensembles P_i, et peut-être n'en comprennent-ils pas d'autres). P, ensemble fermé, contient $p'_1, p'_2, \ldots, p'_i, \ldots, q'_i, \ldots$, donc contient σ. Il en est de même des autres ensembles $P_2, \ldots, P_i, \ldots, Q_i, \ldots$. Le lot associé à la trajectoire T d'indice σ ne peut comprendre de trajectoire dont l'indice σ' soit supérieur à σ, car σ' appartient à tous les ensembles Q_i, dont les indices maxima sont arbitrairement voisins de σ. Ainsi, σ est supérieur aux indices du lot associé à T et, par suite, fait partie des indices q'_i. Le plus fort des indices du lot associé à T est aussi un indice q'_i, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d'après laquelle σ est la limite inférieure des indices q'_i.

L'ensemble des indices n'admettant pas de borne inférieure, le continuum (C) n'est pas fini.

23. *Approches dans l'hypothèse où toutes les trajectoires avec choc seraient exceptionnelles.* — Revenant aux trajectoires avec choc, nous allons supposer qu'elles sont toutes instables, en dehors cependant des trajectoires périodiques avec choc, dont nous avons mentionné l'existence.

A une trajectoire périodique avec choc non isolée, des trajectoires sont asymptotes (au sens défini antérieurement), donc présentent une approche, puisqu'elles admettent un choc comme point limite.

Or nous allons démontrer qu'une trajectoire périodique ne peut être isolée, si toutes les trajectoires avec choc sont instables.

Considérons une trajectoire périodique avec choc isolée; à proximité de cette trajectoire T, les trajectoires restent comprises entre des tubes d'axe T; reprenant les notations du paragraphe 21, nous appellerons d et d'' les tubes limitant les trajectoires issues des différents points d'un tube intermédiaire d'. Ces deux tubes rencontrent la surface des chocs, qui passe par leur axe T, et cela sur toute leur longueur pourvu que d soit suffisamment petit; soient en effet M et M' les points de la trajectoire périodique et d'une trajectoire avec choc qui correspondent à l'instant t; nous supposons que les chocs ont lieu à l'instant $t = 0$, les points correspondant des deux trajectoires étant alors A et A'. Sur la trajectoire périodique, le choc se reproduit à l'instant θ. Entre les instants zéro et θ, la distance MM' a un minimum non nul, de valeur D. Pourvu que d soit inférieur ou égal à D, le tube d, sur toute sa longueur, rencontre la surface des chocs.

Le tube d découpe sur la surface des chocs une bande l, et de même le tube d'' y découpe une bande l''. Les trajectoires qui recouvrent la bande l'' ne sortent pas de la bande l. Elles forment un continuum (C), qui est fini, car intérieur au tube d. Nous allons démontrer que, de plus, ce continuum contient sa frontière.

Faisons varier le point A'. S'il tend vers A, le point $M'(t)$ se déplace sur la surface des chocs, et tend vers $M(\Gamma)$. Soit B' sa position à l'instant θ; la courbe AM'B' tend vers la courbe AMA, chacun de ses points décrivant un arc de courbe tracé sur la surface des chocs; c'est l'ensemble de ces arcs qui forme le continuum (C).

Soit alors P un point de sa frontière; choisissons une suite de points P_1, P_2, ..., P_n, ... appartenant à (C), et admettant P comme point limite unique. P_i sera défini par l'origine A_i (située entre A et A') de la trajectoire sur laquelle il se trouve, et la valeur t_i du temps qui lui correspond ($0 \leqq t_i \leqq \theta$).

L'ensemble (A_i, t_i) admet au moins un point d'accumulation (α, τ). Le point correspondant à l'origine α et à l'instant τ est un point limite pour la suite P_i;

il se confond donc avec le point P; et, comme α est situé entre A et A', et τ compris entre zéro et θ, ce point fait partie du continunm (C).

Ainsi, au voisinage d'une trajectoire périodique avec choc isolée, on peut extraire de la surface des chocs un ensemble de trajectoires formant un continuum fini et qui contient sa frontière. Nous avons démontré au paragraphe précédent qu'un tel continuum ne peut être composé uniquement de trajectoires exceptionnelles. Il en résulte que l'hypothèse faite présentement, d'après laquelle toutes les trajectoires avec choc sont exceptionnelles, est incompatible avec l'existence de trajectoires périodiques avec choc isolées, seules trajectoires périodiques avec choc dont l'existence n'entraîne pas celle de trajectoires avec approche.

24. *Disposition des trajectoires au voisinage d'une trajectoire périodique non isolée.* — Nous avons considéré, au paragraphe 21, des trajectoires périodiques *isolées*, qui nous ont permis de mettre en évidence certains mouvements avec approche. Nous avons alors déterminé la disposition des trajectoires voisines de ces trajectoires isolées.

Les trajectoires voisines des trajectoires périodiques non isolées présentent aussi certaine particularité qui, bien que ne nous ayant été d'aucune utilité dans la question des approches, mérite d'être signalée.

Par définition d'une trajectoire périodique non isolée, il y a au moins une trajectoire qui lui est asymptote [1] au sens généralisé.

Nous allons montrer que, *s'il n'existe aucune trajectoire asymptotique* [1] *parmi les trajectoires asymptotes à une trajectoire périodique* T *non isolée, il y a une infinité de trajectoires très voisines de* T; de façon précise, *il y a des trajectoires contenues tout entières dans chacun des tubes d'axe* T, *si petit que soit son diamètre.*

Considérons donc une trajectoire périodique non isolée T. Nous supposons que le système différentiel dont elle est issue ne possède de point singulier : ni sur T, ni à l'intérieur des tubes d'axe T ayant des diamètres suffisamment petits.

T n'étant pas isolée, il y a des trajectoires qui lui sont asymptotes; mais, par hypothèse, aucune d'entre elles n'est asymptotique à T.

Soit donc U une trajectoire asymptote à T, M l'un de ses points correspondant à la valeur t de la variable, et N le point de T le plus voisin de M. Lorsqu'on parcourt S depuis l'instant $t = 0$ jusqu'à t infini, la distance MN prend, à certains instants, des valeurs arbitrairement petites, mais, à d'autres, des

---

[1] Rappelons (*cf.* § 21) que nous qualifions d'*asymptote* à une trajectoire périodique, une trajectoire qui s'approche d'elle, arbitrairement, sans toutefois être tenue de ne pas s'éloigner entre deux voisinages; au contraire, nous appelons *asymptotique* une trajectoire qui est, au sens ordinaire, asymptote à une trajectoire périodique, c'est-à-dire qui s'approche d'elle de façon constante.

valeurs supérieures à un nombre fixe a (sans cette dernière proposition, U serait asymptotique à T). On pénètre ainsi une infinité de fois dans le tube de diamètre a et d'axe T (tube a).

Considérons alors les arcs de U, en nombre infini, intérieurs au tube a. Soit P_1 l'origine, sur le tube a, du premier de ces arcs que l'on rencontre à partir de la valeur $t = 0$. Sur cet arc, la distance MN a un minimum m_1, différent de zéro. Soit m_2 le premier minimum inférieur à m_1 que l'on rencontre sur les arc suivants, et P_2 l'origine, sur le tube a, de l'arc correspondant. De même l'arc d'origine P_3 donne lieu au minimum m_3 inférieur à m_2, etc., la suite m_1, m_2, ..., m_n, ... étant décroissante et de limite zéro.

Les points P_1, P_2, ..., P_n, ... ont, sur le tube a, au moins un point d'accumulation P. *La demi-trajectoire issue du point* P *ne sort pas du tube a.*

Si elle en sortait, en Q, la distance MN aurait, sur l'arc PQ, un minimum m, différent de zéro. La suite des points P_i qui tendent vers P donnerait lieu à des arcs tendant vers PQ, et par suite à des minima m_i tendant vers m, et non vers zéro.

La demi-trajectoire issue de P, ne sortant pas du tube a, conduit à au moins un point limite R (qui éventuellement pourrait être un de ses propres points), intérieur à ce tube. *La trajectoire passant par* R *est entièrement intérieure au tube a.*

Si, en effet, elle possédait un point S extérieur au tube a, on pourrait trouver, pour t assez grand, un arc de la demi-trajectoire issue de P suffisamment voisin de SR pour sortir, lui aussi, du tube a.

Pour achever, remarquons qu'on trouve nécessairement un point R, au moins, non situé sur la trajectoire périodique T (s'il n'en était pas ainsi, la demi-trajectoire issue de P serait asymptotique à T, et nous avons écarté l'hypothèse de l'existence de telles trajectoires). La trajectoire intérieure au tube a est donc distincte de T. On trouve alors un tube de diamètre b, inférieur à a, qui la coupe; la trajectoire intérieure au tube b, qu'on pourra mettre en évidence, est ainsi distincte de celle intérieure au tube a. On peut poursuivre l'opération. *Il y a une infinité de trajectoires contenues tout entières dans chacun des tubes d'axe* T *et de diamètre inférieur ou égal à a.*

Rapprochant ce résultat de ceux obtenus au paragraphe 21, nous pouvons résumer ainsi les trois cas possibles pour les trajectoires voisines d'une trajectoire périodique T.

1° Il y a une *trajectoire asymptotique* à la trajectoire périodique.

2° Il n'y a pas de trajectoire asymptotique, mais il y a des trajectoires asymptotes. On peut alors trouver *une infinité de trajectoires qui ne s'éloignent pas de la trajectoire périodique de plus d'une longueur fixée à l'avance*, si petite que soit la valeur de cette longueur.

3° Il n'y a aucune trajectoire asymptote. *Toutes les trajectoires coupant un tube d'axe* T *et de diamètre a sont contenues dans l'espace compris entre deux tubes d'axe* T *et de diamètres b et c* ($b < a < c$), *b et c devenant infiniment petits si a prend des valeurs infiniment petites.*

La classification, amorcée ici, des trajectoires voisines d'une trajectoire périodique, ne peut vraisemblablement être poursuivie que par la voie analytique. Ce sujet peut être considéré comme une généralisation de l'étude, faite par Poincaré, des caractéristiques, au voisinage des points singuliers, des équations différentielles d'ordre 1 et 2.

Vu et approuvé :

Paris, le 23 décembre 1942.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 23 décembre 1942.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GILBERT GIDEL.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

Pages.

1. Stabilité du système solaire et problème des trois corps 1
2. Chocs et approches 3
3. Résultats obtenus 4

CHAPITRE I.

LES CHOCS.

4. Considérations générales 7
5. Notations. Représentation des mouvements du problème des trois corps 9

Étude qualitative des chocs binaires 11

6. Conditions initiales à l'instant du choc 11
7. Étude géométrique de la trajectoire au voisinage du choc 12
8. Étude analytique de la trajectoire au voisinage du choc 15
9. Éléments osculateurs 19
10. Résultats 21

Trajectoires avec choc 24

11. Régularisation du mouvement 24
12. Conditions de choc 25
13. Mouvements avec plusieurs chocs 28

CHAPITRE II.

APPROCHES DANS LES MOUVEMENTS A ALLURE BINAIRE.

14. Équations relatives au mouvement envisagé 30
15. Conditions caractéristiques du mouvement avec approches 31
16. Relations à imposer aux conditions initiales 33
17. Choix des conditions initiales 43
18. Approches dans l'espace 44
19. Surface des approches 45

CHAPITRE III.

APPROCHES DANS LES MOUVEMENTS BORNÉS ET OSCILLANTS.

20. Les trajectoires avec choc non exceptionnelles présentent des approches 49
21. Disposition des trajectoires au voisinage d'une trajectoire périodique isolée 51
22. Les trajectoires exceptionnelles ne peuvent former un continuum fini et fermé. 52
23. Approches dans l'hypothèse où toutes les trajectoires avec choc seraient exceptionnelles 54
24. Disposition des trajectoires au voisinage d'une trajectoire périodique non isolée 55