HENRI ROURE

Recherches sur le calcul des perturbations générales des petites planètes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1939
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1939__223__1_0>

Série A, N° 1880
N° d'Ordre.
2747

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Henri ROURE

1re THÈSE. — Recherches sur le calcul des perturbations générales des petites planètes

2e THÈSE. — Propositions données par la faculté.

Soutenues le devant la Commission d'Examen

MM. ESCLANGON, *Président*

CHAZY } *Examinateurs*
LAMBERT }

MARSEILLE
Imprimerie Nouvelle (association ouvrière)
118-120, rue Sainte

1939

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire.......... M. Molliard.

Doyen .... C. Maurain, *Professeur,* Physique du Globe.

Professeurs honoraires

H. Lebesgue.	Blaise.	G. Bertrand.
Emile Picard.	Dangeard.	Abraham.
Léon Brillouin.	Lespiau.	Ch. Fabry.
Guillet.	Marchis.	Léon Bertrand.
Péchard.	Vessiot.	Wintrebert.
Freundler.	Portier.	Duboscq.
Auger.	Molliard.	Bohn.
	Lapicque.	Rabaud.

PROFESSEURS :

M. Caullery........	T	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
Emile Borel.......	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean Perrin........	T	Chimie physique.
E. Cartan..........	T	Géométrie supérieure.
A. Cotton..........	T	Recherches physiques.
J. Drach...........	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles Pérez......	T	Zoologie.
M. Guichard.......	T	Analyse et mesures chimiques.
Paul Montel.......	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
L. Blaringhem......	T	Botanique.
G. Julia...........	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. Mauguin.........	T	Minéralogie.
A. Michel-Lévy....	T	Pétrographie.
A. Denjoy.........	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. Lutaud..........	T	Géographique physique et géologie dynamique.
Eugène Bloch......	T	Physique.
G. Bruhat...........	T	Physique théorique et physique céleste.
E. Darmois.........	T	Enseignement de Physique.
A. Debierne........	T	Physique Générale et Radioactivité.
A. Dufour.........	T	Physique (P. C. B.).
L. Dunoyer........		Optique appliquée.
A. Guilliermond....	T	Botanique.
M. Javillier.......	T	Chimie biologique.
Robert-Lévy	T	Physiologie comparée.
F. Picard..........		Zoologie (Evolution des êtres organisés).
Henri Villat.......	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. Jacob..........	T	Géologie.
P. Pascal..........	T	Chimie générale.
M. Fréchet........	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. Esclangon.......	T	Astronomie.
Mme Ramart-Lucas..	T	Chimie organique.
H. Béghin..........	T	Mécanique physique et expérimentale.
Foch		Mécanique expérimentale des fluides.
Fauthenier		Physique (P. C. B.).
De Broglie........	T	Théories physiques.
Chrétien		Optique appliquée.
P. Job.............		Chimie générale.
Labrouste		Physique du Globe.
Frenant	T	Anatomie et Histologie comparées.
Villey		Mécanique physique et expérimentale.
Combes	T	Physiologie végétale.
Garnier	T	Mathématiques générales.
Pérès		Mécanique théorique des fluides
Hackspill	T	Chimie minérale.
Laugier	T	Physiologie générale.
Toussaint		Technique Aéronautique.
M Curie...........		Physique (P. C. B.).
G. Ribaud..........	T	Hautes températures.
Chazy	T	Mécanique rationnelle.
Gault		Chimie (P. C. B.).
Croze		Recherches physiques.
Dupont	T	Théories chimiques.
Lanquine	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
Valiron		Mathématiques générales.
Barrabé		Géologie structurale et Géologie appliquée.
Millot		Biologie animale (P. C. B.).
F. Perrin.........		Théories physiques.
Vavon		Chimie organique.
C. Darmois.........		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
Chatton	T	Biologie maritime.
Aubel		Chimie biologique.
Jacques Bourcart...		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme Joliot-Curie...		Physique générale et Radioactivité.
Plantefol		Biologie végétale (P. C. B.).
Cabannes		Enseignement de Physique.
Grassé		Biologie animale (P. C. B.).
Prévost		Chimie (P. C. B.).
Bouligand		Mathématiques.

Secrétaire .... A. Pacaud.

Secrétaire honoraire...... D. Tombeck.

A LA MÉMOIRE DE MES PARENTS

A MONSIEUR JEAN BOSLER

Directeur de l'Observatoire de Marseille
Correspondant de l'Institut
et du Bureau des Longitudes

Hommage respectueux et reconnaissant.

PREMIÈRE THÈSE

Recherches sur le calcul des perturbations générales des petites Planètes

AVANT-PROPOS

1. — Dès la découverte des premiers astéroïdes, le problème du calcul de leurs trajectoires s'est posé.

On ne connaissait alors que la méthode de calcul utilisée par Laplace pour les grosses planètes, méthode qui permettait de former des tables du mouvement de chaque astéroïde. Malheureusement, les calculs étaient longs et onéreux car il fallait, pour chaque cas particulier, calculer le développement en série de la fonction perturbatrice, travail fort long.

Cela n'avait pas une importance très grande tant que le nombre des astéroïdes découverts était restreint ; mais, à partir du moment où leur recherche systématique fut entreprise et que les découvertes se multiplièrent, il devint impossible de faire de chacun d'eux une théorie complète. Il était néanmoins nécessaire de calculer des éphémérides de recherche pour les retrouver aux oppositions suivantes, et ce résultat fut obtenu en utilisant la méthode remarquable que Gauss avait imaginé pour le calcul d'une orbite elliptique au moyen de trois observations complètes, ou de quatre observations pour le cas où l'orbite est presque confondue avec le plan de l'Ecliptique. A vrai dire, Laplace avait, lui aussi, donné une méthode pour le même objet, méthode qui permet l'emploi d'un nombre quelconque d'observations, mais elle est restée longtemps dans l'oubli et c'est la méthode de Gauss qui a été utilisée plus souvent.

On pouvait alors calculer rapidement une orbite approchée et former ainsi des éphémérides de recherche pour retrouver les astéroïdes aux oppositions suivantes. Malheureusement, on s'est aperçu bientôt de l'insuffisance du procédé car, après un nombre d'oppositions souvent très restreint, les différences O-C devenaient trop fortes et il fallait songer à corriger les éléments elliptiques trouvés. Cette correction ne pouvait s'opérer qu'après le calcul des perturbations causées par l'attractian des planètes principales, en particulier de Jupiter. On retombait donc sur la difficulté initiale.

2. – Plusieurs chercheurs parmis lesquels nous pouvons citer : Gauss, Encke, Hansen, Tietjen, Oppolzer, Louis Fabry, M. Renaux et nous-mêmes, ont proposé alors des méthodes différentielles de correction portant, les unes sur les éléments elliptiques eux-mêmes ; d'autres sur les coordonnées rectangulaires de l'astéroïde ; ou enfin, pour une troisième catégorie, sur des éléments judicieusement choisis de manière à simplifier le plus possible les calculs nécessaires à la correction.

Un progres serieux avait ete réalisé, mais ces méthodes permettaient seulement d obtenir des elements représentant les observations pendant un nombre d oppositions assez grand et il n etait pas possible de prévoir a longue échéance

3 — Avec l espoir de resoudre le probleme definitivement, Hansen publia une methode dérivee de celle qu il avait appliquée a la theorie de la Lune avec succès Son principe reposait toujours sur le développement des inegalites suivant les puissances des masses, mais il reduisait le nombre des élements dont il fallait calculer les perturbations a trois, d ou progres sur la methode de Laplace Malheureusement, cet avantage est compense en partie par la longueur et la complication des calculs numeriques,

Leverrier, lui aussi, s etait occupé de la question et les formules qu il avait publiées dans les Annales de l Observatoire de Paris en vue de la théorie des grosses planetes, pouvaient s appliquer aux asteroides d inclinaison faible Il avait prévu le cas des inclinaisons fortes, et avait indique comment devait s operer alors le developpement de la fonction perturbatrice Il avait ensuite imagine une methode numérique pour le calcul separé des grandes inégalites periodiques, methode appliquée par lui a Pallas et c est au sujet de ce mémoire que Cauchy inventa la methode remarquable qui porte son nom

Plus tard, et toujours pour rendre possible l application des formules de Leverrier, Tisserand, reprenant les indications donnees ou tome I des Annales de l Observatoire, a effectué complètement le developpement de la fonction perturbatrice dans le cas de fortes inclinaisons et a étudie le cas de Pallas troublee par Jupiter

Gylden est entre en lice, lui aussi, et a propose une methode tres originale qui peut s'appliquer tout aussi bien aux grosses planetes Alors que jusqu a ce moment, tous les auteurs avaient pris le temps comme variable indépendante, Gylden prit la longitude vraie comme avait fait Laplace dans sa théorie de la Lune, et il chercha les développements en series d éléments judicieusement choisis et du temps en fonction de la longitude vraie De plus, il chercha a tenir compte dès la premiere approximation des perturbations seculaires et des inegalités a tres longue periode de manière a obtenir des orbites utilisables pendant très longtemps sans correction Sa méthode permet d obtenir des developpements d ou les termes seculaires sont exclus

Malheureusement, si les developpements de Laplace Leverrier, et Hansen etaient convergents, il n en était pas de même pour ceux de Gylden car Henri Poincare a demontre que ces séries ne son pas absolument convergentes

Quoiqu il en soit, theoriquement, le probleme posé au debut de la decouverte des asteroides etait résolu, mais pratiquement le nombre toujours croissant d'astres découverts chaque année empêchait d'aborder même pour un petit nombre d entre eux une etude complete et l etablissement de tables (Leveau, qui a fait la théorie de Vesta par la methode de Hansen, n a pas mis moins de vingt ans pour la terminer)

4 — C est alors que M Karl Bohlin eut l idée de traiter les asteroides par groupes Son idee est la suivante si nous appelons μ le rapport des moyens mouvements de la planete troublante et de l asteroide, et que nous désignions par μ_0 un nombre rationnel voisin de μ, nous pouvons poser

$$\mu = \mu_0 (1 - w)$$

w étant une petite quantité Si maintenant, nous introduisons cette valeur de μ dans les formules, nous pourrons developper les inégalités par rapport aux puissances de w, les coefficients de celles ci étant des fonctions de μ_0 seul, par consequent de nombres absolus Le probleme sera donc ramené, pour tous les astéroides pour lesquels le nombre μ_0 pourra être utilisé, a l étude d une planete ideale correspondant a μ_0 Les calculs fondamentaux ne devront donc être effectués qu une fois pour tout un groupe d astéroides, et, pour chacun d eux en particulier, les perturbations générales s obtiendront par l adjonction de termes complementaires ayant pour facteurs les differentes puissances de w

M Bohlin a utilise les formules de Hansen, mais il a effectue le developpement de la fonction perturbatrice en suivant les idées de Gylden

On voit facilement que, pour appliquer sa methode, il faut dresser des tables pour chaque nombre μ_0 utilise, tables qui donneront les valeurs numériques des coefficients pour la fonction perturbatrice et ses derivees Une fois ces tables dressées, pour chaque astéroide rentrant dans le groupe etudie, le tableau des perturbations génerales s obtiendra avec des calculs reduits au minimun

Cette méthode réalise un progrès très sérieux et des tables ont été dressées pour plusieurs groupes d'astéroïdes.

5. — Nous nous sommes occupé nous mêmes de ce problème et, comme conséquence ne nos recherches sur le mouvement de Pluton, nous avons été amené à penser que l'idée fondamentale de Bohlin pour l'étude des astéroïdes par groupes pourrait être appliquée à la méthode employée par nous pour Pluton, méthode qui est une adaptation de celle que Hill et Brown ont utilisée pour édifier la théorie de la Lune.

L'idée directrice de nos recherches était qu'il importait de simplifier autant que faire se peut le calcul des éphémérides des petites planètes et que pour cela, la méthode de Hill-Brown devait conduire à un résultat intéressant puisqu'elle permet d'obtenir les coordonnées rectangulaires ou polaires de l'astre étudié sans être obligé de calculer tout d'abord les perturbations des éléments. Connaissant pour chaque astéroïde l'expression générale de ses coordonnées perturbées, il est ensuite aisé de calculer une éphéméride en donnant au temps des valeurs équidistantes, et le seul problème à résoudre est alors la détermination des constantes d'intégration qui correspondent à cet astéroïde, détermination qui se fera au moyen des observations qu'on possède déja.

Nous avons ainsi été conduit à reprendre la méthode de Hill-Brown et à l'adapter à l'étude du mouvement d'un astéroïde. Nous avons fait cette exposition en deux temps.

Nous nous sommes inspiré, pour la première partie, du mémoire de Hill : "Researches on the Lunar Theory," (*Amer. Jour. Mat.* Vol. I) et aussi des mémoires de Brown : "Theory of the Motion of the Moon", publiés dans les "Memoirs of the Royal Astronomical Society. Vol. IV". Nous avons aussi utilisé l'idée exprimée par Poincaré dans ses leçons de Mécanique Céleste, Théorie de la Lune, page 32, d'après laquelle les coefficients des séries qui représentent la solution périodique sont solutions d'un système d'équations différentielles linéaires du second ordre à une variable indépendante et deux fonctions inconnues. La méthode des coefficients indéterminés nous a ensuite permis de réduire le problème à la résolution d'un système d'équations algébriques du premier degré à deux inconnues pour chaque groupe de coefficients, les seconds membres dans chaque système d'équations, dépendant des coefficients déjà calculés.

Pour la seconde partie de l'exposition, nous nous sommes inspiré des mémoires de Brown et aussi des mémoires d'Andoyer sur la théorie de la Lune (*Mémoires de l'Institut*, Tome 58, 1er Mémoire, page 4, 2e Mémoire, page 3) mémoires auxquels nous avons emprunté les notations principales.

Nous avons ensuite étudié la convergence des séries qui représentent la solution périodique trouvée

Il fallait introduire maintenant la conception fondamentale de Bohlin en supposant que le rapport des moyens mouvements n' de la planète troublante et n de l'astéroïde pouvait être mis sous la forme :

$$\frac{n'}{n} = \mu_0 (1 - w)$$

où μ_0 représente un nombre rationnel simple, et fixe pour tout le groupe d'astéroïde et w un nombre, en général petit, qui, dans le groupe, caractérise l'astéroïde. En fait, il fallait opérer les développements en séries suivant les puissances de w, les coefficients des différentes puissances de w étant des séries trigonométriques procédant suivant les sinus ou cosinus de certaines combinaisons des arguments fondamentaux dont le principal est la différence entre la longitude moyenne de l'astéroïde et la longitude moyenne de la planète troublante, différence qui est multipliée par une fonction des paramétres.

Pour mener à bien cette tâche, nous avons dû reprendre les développements trouvés précédemment. Les coefficients de ces développements sont des fonctions de certaines quantités fondamentales qui ont été déterminées dans la recherche de la solution périodique et l'étude de ces développements nous a amené a cette conclusion que tout problème se ramène à développer selon les puissances de w ces quatités fondamentales. Or, celles-ci sont des fonctions d'un paramétre que nous avons appelé m et dont la valeur est :

$$m = \frac{n'}{n - n'}$$

(n et n' représentent les moyens mouvements de l'asteroide et de la planete troublante) et elles sont developpees en séries procédant suivant les puissances de m. Or, m peut être ecrit en fonction de w sous la forme

$$m = \frac{m_0 (1 - w)}{1 \, m + m_0 w}$$

ou :

$$m_0 = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0}$$

et le probleme est ramené pour une part, au développement des diverses puissances de m suivant les puissances de w, et pour l'autre, a des multiplications algébriques pour le développement de chaque coefficient dans les differentes séries qui interviennent dans la solution.

Nous avons ainsi obtenu pour représenter les coordonnees rectangulaires ou polaires de l'asteroïde, des séries ou les coefficients des puissances de w sont des fonctions de μ_0 *qui est un nombre absolu. Les coefficients seront donc des nombres absolus valables pour tous les asteroïdes du même groupe* et, pour les appliquer a l'un deux il suffira de calculer la valeur de w correspondante et les angles dont la combinaison formera les arguments qui entrent sous les signes sinus ou cosinus. On formera ainsi les series qui representeront les coordonnees, soit rectangulaires, soit polaires, de l'asteroide sous forme generale et, pour les rendre propres au calcul d'une ephemeride, il n'y aura plus qu'a les comparer a quelques observations pour determiner les constantes d'integration.

Tel est, dans son ensemble, le probleme que nous nous etions proposé et que nous avons resolu.

La suite de notre travail comporte un retour a l'exposition de la methode de Hill-Brown faite au commencement. En effet, nous avons bien integre les équations différentielles obtenues en deuxieme approximation, en tenant compte de la solution périodique trouvee et nous avons trouvé la forme génerale des coefficients, mais nous n'avons pas mis ceux-ci sous une forme appropriee au calcul effectif. C'est pour combler cette lacune que nous avons entrepris la troisieme partie de notre travail dans laquelle nous donnons, non seulement les developpements effectifs des coefficients en question, mais les développements de toutes les fonctions auxiliaires que l'on rencontre au cours des calculs et dans le developpement de la fonction perturbatrice. Nous donnons aussi le developpement de cette derniere jusques et y compris les termes du cinquième ordre.

En résumé, notre travail se divise de la façon suivante

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER. — Exposition de la methode de Hill-Brown adaptee aux asteroides et recherche de la solution periodique.

CHAPITRE II. — Convergence des séries qui représentent la solution periodique.

CHAPITRE III. — Extension de la solution au cas ou l'on considère la premiere puissance de l'excentricite ou de l'inclinaison et methode génerale de resolution pour les approximations suivantes.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER. — Introduction de la conception fondamentale de Bohlin et son extension aux series qui représentent la solution periodique.

CHAPITRE II. — Extention aux series qui se rapportent a la deuxieme approximation et aux approximations suivantes.

TROISIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER. — Developpement de la fonction perturbatrice et des fonctions auxiliaires.

CHAPITRE II. — Expression en vue des calculs des coefficients des series qui representent la deuxième approximation.

Pendant tout le temps qu'a duré ce travail M. Jean Bosler, directeur de l'Observatoire de Marseille, n'a cesse de nous prodiguer ses encouragements nous lui en exprimons ici toute notre reconnaissance.

PREMIÈRE PARTIE

MÉTHODE DE HILL-BROWN

CHAPITRE PREMIER

Adaptation de la méthode au cas des petites Planètes

6. — Prenons comme plan fondamental le plan de l'écliptique à une époque donnée. Soient trois axes de coordonnées rectangulaires fixes SXYZ ayant pour origine le centre du Soleil et disposés comme il suit : l'axe SX et l'axe SY sont dans l'écliptique et SX passe par le point vernal, SY faisant avec lui l'angle $+\frac{\pi}{2}$; SZ est perpendiculaire au plan de l'écliptique et il est dirigé vers le pole boréal. Nous désignerons par : X', Y', Z', r', M', les coordonnées rectangulaires, le rayon vecteur et la masse de la planète troublante ; par X, Y, Z, r, M, les coordonnées rectangulaires, le rayon vecteur et la masse de la petite planète étudiée ; par M_0 la masse du Soleil. Si nous désignons par Δ la distance de la planète troublante à la petite planète et par f la constante de l'attractiou, nous savons que le mouvement relatif par rapport au centre du Soleil de la petite planète est le même que celui d'un point de masse égale à l'unité soumise à l'action da la fonction de forces :

$$U = f\frac{M_0 + M}{r} + fM'\left[\frac{1}{\Delta} - \frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3}\right] \tag{1}$$

où l'on a comme on sait :

$$\Delta^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + Z - Z')^2$$

$$r'^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2$$

La force vive de la petite planète aura donc pour expression :

$$2T = \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2 \tag{2}$$

Considérons maintenant su système d'axes tournants définis de la façon suivante : l'axe SZ_1 coincide avec SZ ; SX_1 et SY_1 sont dans le plan de l'écliptique et sont orientés de la même manière que SX et SY, et SX_1 fera avec SX un angle que nous appellerons N' et qui sera égal à la longitude moyenne de la planète troublante. Nous savons que, n' étant le moyen mouvement de la planète troublante, N' aura, en fonction du temps, pour expression :

$$N' = n't + \lambda'_0$$

Nous avons, d'autre part, entre les coordonnées X, Y, Z et X_1, Y_1, Z_1, les relations :

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_1 \cos N' - Y_1 \sin N' \\ Y &= X_1 \sin N' + Y_1 \cos N' \\ Z &= Z_1 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

En tenant compte de ce que l'on a :

$$\frac{dN'}{dt} = n'$$

et des relations (3), l'expression de la force vive prend la forme :

$$(4) \qquad 2T = \left(\frac{dX_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ_1}{dt}\right)^2 + 2n'X_1\frac{dY_1}{dt} - 2n'Y_1\frac{dX_1}{dt} + n'^2(X_1^2 + Y_1^2)$$

Quant à la fonction des forces, nous savons que son expression en fonction des variables nouvelles sera la même qu'en fonction des anciennes.

Si nous formons maintenant les équations de Lagrange, nous obtiendrons, pour définir le mouvement relatif de la petite planète par rapport au système d'axes tournants, le système d'équations :

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2X_1}{dt^2} - 2n'\dfrac{dY_1}{dt} - n'^2 X_1 = \dfrac{\partial U}{\partial X_1} \\ \dfrac{d^2Y_1}{dt^2} + 2n'\dfrac{dX_1}{dt} - n'^2 Y_1 = \dfrac{\partial U}{\partial Y_1} \\ \dfrac{d^2Z_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial Z_1} \end{cases}$$

Nous allons introduire maintenant, d'après Hill-Brown, des quantités complexes et transformer le système que nous venons d'obtenir. Nous poserons pour cela :

$$(6) \qquad ax = X_1 + iY_1 \qquad ay = X_1 - iY_1 \qquad az = iZ$$

a étant une constante qui sera définie plus loin.

L'introduction des variables x, y, z dans les relations (3) nous donnera X, Y, Z, en fonction de x, y, z et N' sous la forme :

$$(7) \qquad X = \frac{a}{2}(xe^{iN'} + ye^{-iN'}) \quad , \quad Y = \frac{a}{2i}(xe^{iN'} - ye^{-iN'}) \quad , \quad Z = \frac{az}{i}$$

Désignons maintenant par N la longitude moyenne de la petite planète et par n son moyen mouvement ; nous aurons, comme on le sait :

$$N = nt + \lambda$$

Prenons comme variable indépendante au lieu du temps la quantité :

$$T = i(N - N'),$$

et désignons par D la caractéristique de la dérivation par rapport à T, puis posons :

$$m = \frac{n}{n - n'}$$

nous verrons facilement que, dans ces conditions, le système (5) s'écrira :

$$(8) \qquad \begin{cases} D^2X_1 + 2imDY_1 + m^2X_1 + \dfrac{1}{(n-n')^2}\dfrac{\partial U}{\partial X_1} = 0 \\ D^2Y_1 - 2imDX_1 + m^2Y_1 + \dfrac{1}{(n-n')^2}\dfrac{\partial U}{\partial Y_1} = 0 \\ D^2Z_1 - \dfrac{1}{(n-n')^2}\dfrac{\partial U}{\partial Z_1} = 0 \end{cases}$$

Multiplions les deux premières équations (8) respectivement par $(1, +i)$ et $(1, -i)$ et ajoutons-les membre à membre, nous obtiendrons facilement, en tenant compte des relations (6), le système :

$$(9)\quad \begin{cases} D^2x + 2mDx + m^2x + \dfrac{2}{(n-n')^2 a^2}\dfrac{\partial U}{\partial y} = O \\ D^2y - 2mDy + m^3y + \dfrac{2}{(n-n')^2 a^2}\dfrac{\partial U}{\partial x} = O \\ D^2y \qquad\qquad - \dfrac{1}{(n-n')^2 a^2}\dfrac{\partial U}{\partial z} = O \end{cases}$$

Revenons à la fonction des forces. Nous savons qu'elle peut s'écrire, en fonction des rayons vecteurs et en desigant par H leur angle sous la forme :

$$U = f\frac{M_0 + M}{r} + fM'\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H}} - \frac{r \cos H}{r'^2}\right]$$

Si nous développons maintenant l'inverse du radical snivant les puissances du rapport $\frac{r}{r'}$, nous obtiendrons, comme nous le savons, le développement :

$$(10)\qquad U = f\frac{M_0 + M}{r} + fM'\frac{r^2}{r'^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2 H - \frac{1}{2}\right) \quad \ldots\ldots$$

Partant de ce résultat et introduisant les variables x, y, z, nous allons transformer ce développement de manière à le rendre plus commode.

Pour cela, nous poserons d'abord :

$$(11)\qquad f(M_0 + M) = K(n - n')^2 a^3$$

introduisant ainsi la quantité K au lieu de a ; puis :

$$v' = N' + \frac{l'}{i} \qquad\qquad s' = \frac{\sigma'}{i}$$

v' et s' étant la longitude et la latitude de la planète troublante. Nous aurons d'abord, d'après les formules (6) ;

$$(12)\qquad r^2 = a^2(xy - z^2)$$

puis comme

$$rr' \cos H = XX' + YY' + ZZ'$$

et que

$$X' = r' \cos s' \cos v' \qquad Y' = r' \cos s' \sin v' \qquad Z' = r' \sin s'$$

nous obtiendrons facilement :

$$\frac{r}{a}\cos H = \left[\frac{X}{a}\cos v' + \frac{Y}{a}\sin v'\right]\cos s' + \frac{Z}{a}\sin s'$$

Les puissances successives de cette quantité s'obtiendrons aisément en ayant égard aux formules qui lient les cos et sin des multiples d'un arc aux puissances des cos et sin de l'arc.

Si nous remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs en fonction de x, y, z, s' et l', nous obtiendrons enfin :

$$(12\ bis)\qquad \frac{r}{a}\cos H = \frac{1}{2}\left(xe^{-l'} + ye^{l'}\right)\cos s' + \frac{z}{i}\sin s'$$

Dans l'expression (10) de la fonction des forces, nous poserons :

$$\rho = \frac{a}{r} \qquad \rho' = \frac{a'}{r'} \qquad \alpha = \frac{a}{a'}$$

ce qui permettra d'écrire :

$$(13)\qquad U = f\frac{M_0 + M}{r} + fM'\frac{a^2}{a'^3}\rho'^3\left[\frac{3}{2}\left(\frac{r}{a}\cos H\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\ldots\ldots$$

Nous remplacerons maintenant $\frac{r}{a}\cos \mathrm{H}$ et $\frac{r}{a}$ ainsi que leurs puissances par leurs expressions en fonction de x, y, z, s' et l', puis nous éliminerons f du premier terme au moyen de l'équation (11) et des autres termes au moyen de l'équation :

$$f(\mathrm{M}_\circ + \mathrm{M}') = n'^2 a'^3$$

où a' représente le demi grand axe de l'orbite de la planète troublante. Nous poserons ensuite dans le résultat ;

$$2\nu = \frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}_\circ + \mathrm{M}'}$$

et nous savons que cette quantité est au plus de l'ordre de 10^{-3}.

Nous voyons que tous les termes, à partir du deuxième, contiennent en facteur une puissance de ρ'. En remplaçant dans chacun $\rho'^m e^{nl'}$ par $(\rho'^m e^{nl'} - 1 + 1)$, groupant les termes indépendants de $\rho'^m e^{l'}$ et groupant, sous la dénomination de F tous les termes qui dépendent de $\rho'^m e^{l'}$, termes auxquels nous ajouterons le terme :

$$2\nu m^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{i}(x+y)\sin 2s'$$

(ce terme est très petit car, pour Jupiter et Saturne s' est toujours très petit et de plus le premier facteur $2\nu m^2$ est au plus de l'ordre de 10^{-3}), nous pourrons mettre la fonction des forces sous la forme :

$$\frac{\mathrm{U}}{(n-n')^2 a^2} = \mathrm{K}\rho + 2\nu m^2\left[-\frac{1}{8}(xy+2z^2) + \frac{3}{16}(x^2+y^2)\right] + 2\nu m^2\left[\frac{3}{8}(xy+2z^2) + \frac{3}{16}(x^2+y^2)\right]\cos 2s' + \mathrm{F} \tag{14}$$

F représente la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{F} = {} & 2\nu m^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{i}(x+y)\sin 2s' - 2\nu m^2 \cdot \frac{1}{8}(xy+2z^2)(\rho'^3 - 1) + 2\nu m^2 \cdot \frac{3}{16}(\rho'^3 e^{-2l'} - 1)\,x^2 + \\ & + 2\nu m^2 \cdot \frac{3}{16}(\rho'^3 e^{2l'} - 1)\,y^2 + 2\nu m^2\left[\frac{3}{8}(xy+2z^2)(\rho'^3 - 1) + \frac{3}{16}(\rho'^3 e^{-2l'} - 1)\,x^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{16}(\rho'^3 e^{2l'} - 1)\,y^2\right]\cos 2s' + 2\nu m^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{i} \cdot x(\rho'^3 e^{-l'} - 1)\sin 2s' + \\ & + 2\nu m^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{i} \cdot y(\rho'^3 e^{l'} - 1)\sin 2s' \;\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{15}$$

Revenons maintenant au système (9) et remplaçons les dérivées partielles du U par leurs valeurs tirées de (14), en tenant compte de ce que l'on a :

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{1}{2}\rho^3 y \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y} = -\frac{1}{2}\rho^3 x \qquad \frac{\partial\rho}{\partial z} = \rho^3 z$$

nous obtiendrons facilement le système :

$$\left\{\begin{aligned} & \mathrm{D}^2x + 2m\mathrm{D}x + (1-2\nu)\,m^2x + 3\nu m^2(x+y) - \mathrm{K}\rho^3 x + 2\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y} = 0 \\ & \mathrm{D}^2y - 2m\mathrm{D}y + (1-2\nu)\,m^2y + 3\nu m^2(x+y) - \mathrm{K}\rho^3 y + 2\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x} = 0 \\ & \mathrm{D}^2z - 2\nu m^2 z - \mathrm{K}\rho^3 z - \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right. \tag{16}$$

C'est ce système qui servira de point de départ. Nous remarquerons que U a été divisée en deux parties et que, dans la deuxième, les facteurs de $(xy+2z^2)$, x^2, y^2, ... sont de l'ordre de l'excentricité de la planète troublante et de plus, il sont multipliés par le facteur $2\nu m^2$ qui est très petit ou par le rapport des demi grand axes et le facteur $2\nu m^2$. La deuxième partie F sera donc, en général, très petite.

Nous pouvons obtenir du système (16) une intégrale analogue à celle de Jacobi. Il suffit pour cela, d'ajouter membre à membre les équations après les avoir multipliées respectivement par Dy , Dx , $-2Dz$. De plus, si nous remarquons que l'on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x} Dx + \frac{\partial F}{\partial y} Dy + \frac{\partial F}{\partial z} Dz = DF - \frac{\partial F}{\partial T}$$

la fonction F étant considérée comme dépendante de x , y , z , et T , et que, d'autre part, T n'y figure que par l'intermédiaire de ρ' et l' qui sont fonctions de N' , on pourra écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial (iN')} D(iN') = m \frac{\partial F}{\partial (iN')}$$

Si maintenant nous intégrons, nous obtiendrons, en désignant par $D^{-1}F$ l'intégrale $\int F dT$:

$$(17) \qquad Dx\, Dy - (Dz)^2 + (1-2\nu)\, m^2 (xy) + 2\nu m^2 z^2 + \frac{3}{2} \nu m^2 (x+y)^2 + 2K\rho + 2F - 2mD^{-1}\left[\frac{\partial F}{\partial (iN')}\right] = 2C$$

Tout ce que nous venons de dire s'applique à une planète quelconque. Dans le cas spécial des petites planètes, la masse étant négligeable vis-à-vis de celle du Soleil, on fera $M = O$ et l'équation (11) deviendra dans ce cas :

$$(11\ ter) \qquad f M_0 = K (n - n')^2 a^3$$

Comme on le verra plus loin, la constante a sera choisie très voisine de la distance moyenne de la petite planète au Soleil. Si la petite planète décrivait autour du Soleil un cercle de centre S , de rayon a situé dans le plan SXY , sa longitude étant N , on aurait simplement, en posant :

$$\theta = e^{i(N-N')} = \epsilon^T$$

$$x = \theta \qquad\qquad y = \theta^{-1} \qquad\qquad z = 0$$

Nous sommes donc conduits à admettre pour x et y la forme :

$$x = p\theta \qquad\qquad y = q\theta^{-1}$$

et à étudier les variables p et q . Nous conserverons cependant les variables x et y écrites sous la farme $x\theta^{-1}$ et $y\theta$.

7. — Nous allons aborder maintenant l'intégration du système (16), et nous allons opérer par approximations successives.

Nous savons en premier lieu que F est toujours fort petite ; donc, en première approximation nous pourrons la négliger. Nous négligerons de plus la troisième coordonnée z et la première approximation nous donnera ainsi une trajectoire située dans le plan de l'écliptique. Le système (16) se trouvera donc réduit aux deux équations :

$$(18) \quad \begin{cases} D^2x + 2mDx + (1-2\nu)m^2 x + 3\nu m^2 (x+y) - K\rho^3 x = 0 \\ D^2y - 2mDy + (1-2\nu)m^2 y + 3\nu m^2 (x+y) - K\rho^3 y = 0 \end{cases}$$

auxquelles nous ajouterons l'intégrale (17) dans laquelle nous aurons fait :

$$F = 0 \qquad\qquad z = 0$$

et qui s'écrit alors :

$$(19) \qquad DxDy + (1-2\nu)\, m^2 (xy) + \frac{3}{2} \nu m^2 (x+y)^2 + 2K\rho = 2C$$

Pour transformer les équations (18) et (19) et les rendre plus propre au but poursuivi, nous éliminerons K et ρ. Pour cela, il nous suffira de les ajouter membre à membre après les avoir multipliées respectivement par $(y, x, 1)$ puis par $(y, -x, 0)$, nous obtiendrons ainsi, après quelques réductions, les deux équations :

$$(20)\quad \begin{cases} yD^2x + xD^2y + 2m\,(yDx - xDy) + Dx\,Dy + 3\,(1+\nu)\,m^2\,(xy) + \dfrac{9}{2}\,\nu m^2\,(x^2+y^2) = 2C \\ yD^2x - xD^2y + 2m\,(yDx + xDy) + 3\nu m^2\,(y^2 - x^2) = 0 \end{cases}$$

Additionnons maintenant et soustrayons les équations (20) membre à membre, nous obtiendrons les deux équations :

$$(21)\quad \begin{cases} xD^2y - 2mxDy + \dfrac{1}{2}\,DxDy + \dfrac{3}{2}\,(1+\nu)\,m^2\,(xy) + \dfrac{\nu m^2}{4}\,(15\,x^2 + 3\,y^2) = C \\ yD^2x + 2myDx + \dfrac{1}{2}\,DxDy + \dfrac{3}{2}\,(1+\nu)\,m^2\,(xy) + \dfrac{\nu m^2}{4}\,(3\,x^2 + 15\,y^2) = C \end{cases}$$

Dans ces dernières équations, faisons passer au second membre :

$$\frac{\nu m^2}{4}\,(15x^2 + 3y^2) \qquad\qquad \frac{\nu m^2}{4}\,(3x^2 + 15y^2)$$

et remplaçons νm^2 par m'^2 qui sera un nouveau paramètre provisoire, nous pourrons écrire définitivement :

$$(22)\quad \begin{cases} xD^2y - 2mxDy + \dfrac{1}{2}\,DxDy + \dfrac{3}{2}\,(1+\nu)\,m^2\,(xy) = -\dfrac{m'^2}{4}\,(15x^2 + 3y^2) + C \\ yD^2x + 2myDx + \dfrac{1}{2}\,DxDy + \dfrac{3}{2}\,(1+\nu)\,m^2\,(xy) = -\dfrac{m'^2}{4}\,(3x^2 + 15y^2) + C \end{cases}$$

Le système (22) servira de base à nos calculs par la suite.

8. — Nous allons maintenant chercher pour les variables mises sous la forme $x\theta^{-1}$ et $y\theta$ des développements en séries procédant suivant les puissances de m'^2 et, une fois la solution obtenue, nous ferons :

$$m'^2 = \nu m^2$$

Nous supposerons la constante C développée, elle aussi suivant les puissances de m'^2, de sorte que nous allons chercher à satisfaire aux équations (22) par les séries suivantes :

$$(23)\quad \begin{cases} x\theta^{-1} = x_0 + m'^2\,x_1 + \dots\dots + m'^{2q}\,x_q \dots\dots \\ y\theta \;\;= y_0 + m'^2\,y_1 + \dots\dots + m'^{2q}\,y_q \dots\dots \\ C \;\;\;= C_0 + m'^2\,C_1 + \dots\dots + m'^{2q}\,C_q \dots\dots \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer par approximations successives d'abord x_0, y_0, C_0, puis x_1, y_1, C_1, et, ainsi de suite.

Observons d'abord que si l'on fait :

$$x_0 = y_0 = 1$$

et qu'on essaye de satisfaire aux équations (22) où l'on aura fait :

$$m' = 0$$

au second membre, on sera conduit à prendre :

$$C_0 = \frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}\,(1+\nu)\,m^2$$

Quand nous aurons remplacé dans les équations (22) $(x\theta^{-1})$, $(y\theta)$ et C par les séries (23), nous trouverons dans le premier membre des termes de la forme :

$$m'^{2a+2b}\, x_a\, y_b$$

et d'autre d'une forme analogue où un des x_a ou y_b ou tous les deux ont été remplacés par l'une de leurs deux premières dérivées. Dans le deuxième membre nous trouverons des termes de la forme :

$$m'^{2a+2b+2}\, \theta^2\, x_a\, y_b$$

ou de la forme :

$$m'^{2a+2b+2}\, \theta^{-2}\, x_a\, y_b$$

ou encore de la forme :

$$m'^{2a}\, C_a$$

Supposons que, par approximations successives, nous ayons déterminé les x_α, y_α, C_α jusqu'à l'indice $q - l$ inclusivement et que nous voulions déterminer x_q, y_q, C_q.

Dans le premier membre nous devons retenir les termes qui contiennent m'^{2q} en facteur, c'est-à-dire ceux pour lesquels on a :

$$a + b = q$$

Parmi ces termes, ceux pour lesquels on aura $a = q$, $b = 0$, ou encore $a = 0$, $b = q$, nous donneront les inconnues et les autres termes seront tels que les indices seront inférieurs à q ; ce seront donc des termes connus et nous les ferons passer au second membre.

Dans le second membre, nous devrons retenir les termes pour lesquels :

$$a + b = q - l$$

en vertu de la présence du facteur m'^2 ; ce seront donc des termes connus. Nous auront de plus le terme inconnu $m'^{2q}\, C_q$.

Les termes encore inconnus des premiers membres des équations (22) s'obtiendront de la façon suivante : soit, par exemple, le terme xD^2y. Nous pouvons écrire :

$$xD^2\,[y\theta . \theta^{-1}] = (x\theta^{-1})\,[D^2\,(y\theta) - 2D\,(y\theta) + (y\theta)]$$

car les série (23) représentent, rappelons-le, $x\theta^{-1}$ et $y\theta$ et non pas x et y. Si nous opérons la même transformation sur les différents termes des équations (22), nous aurons les formules :

$$yD^2x = (y\theta)\,[\,D^2(x\theta^{-1}) + 2D(x\theta^{-1}) + (x\theta^{-1})\,]$$

$$xDy = (x\theta^{-1})\,[\,D(y\theta) - (y\theta)\,] \qquad yDx = (y\theta)\,[\,D(x\theta^{-1}) + (x\theta^{-1})\,]$$

$$DxDy = [\,D(x\theta^{-1}) + (x\theta^{-1})\,]\,[\,D(y\theta) - (y\theta)\,]$$

$$xy = (x\theta^{-1})\,(y\theta)$$

Remplaçons dans les équations (22) tous les termes par les expressions que nous venons d'obtenir, retenons dans les premiers membres les termes en x_q, y_q, et leurs dérivées, faisons passer aux seconds membres tous les autres termes, puis égalons aux deux membres les coefficients de m'^{2q}, nous obtiendrons, pour déterminer x_q et y_q, les deux équations linéaires :

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &D^2x_q + \left(\frac{3}{2} + 2m\right) Dx_q + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2\right] x_q + \frac{1}{2} Dy_q + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2\right] y_q = \Phi_q + C_q \\ &D^2y_q + \left(\frac{3}{2} + 2m\right) Dy_q + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2\right] y_q - \frac{1}{2} Dx_q + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2\right] x_q = \Phi'_q + C_q \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles Φ_q et Φ'_q représentent l'ensemble des termes connus.

Nous admettrons que x_a et y_a peuvent être représentées par une séries procédant suivant les puissances positives et négatives de θ, sous la forme :

$$x_a = \Sigma\, x_{a,k}\, \theta^k \qquad\qquad y_a = \Sigma\, y_{a,k}\, \theta^k$$

et cela nous permet de voir, par induction, que Φ_q et Φ'_q seront périodiques en T, ce que nous démontrerons plus loin.

Cherchons maintenant la forme générale des coefficients x_q et y_q. En admettant la forme donnée plus haut x_a et y_a, nous substituerons ces séries dans les équations (24) et nous égalerons aux deux membrea les coefficients des mêmes puissances de θ. Si k désigne l'ordre de la puissance de θ, et si nous appelons A, B, $x_{q,k}$, $y_{q,k}$, les coefficients θ dans Φ_q, Φ'_q, x_q, y_q, cette identification nous donnera le système d'équations algébriquea linéaires :

$$(25)\quad \begin{cases} \left[-\frac{k}{2} + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\right] x_{q,k} + \left[k^2 - k\,(\frac{3}{2} + 2m) + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\right] y_{q,k} = A \\ \left[k^2 + k\,(\frac{3}{2} + 2m) + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\right] x_{q,k} + \left[\frac{k}{2} + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\right] y_{q,k} = B \end{cases}$$

Ce système aura, en général, une solution car son déterminant a pour expression :

$$D = k^2\,[\,(1 - 3\,\nu)\, m^2 + 2m - (k^2 - 1)\,]$$

et il ne sera pas nul en général car cela impliquerait entre les moyens mouvements n et n' une relation qui dépendrait de k.

Quant au coefficient C_q, il sera donné pour chaque valeur q par $k = 0$. En effet, remontant aux équations (24) au moment de l'identification et cherchant aux deux membres les termes indépendants de θ, nous trouverons les deux équations :

$$(x_{q,0} + y_{q,0})\left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2\right] = A_0 + C_q$$

$$(x_{q,0} + y_{q,0})\left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2\right] = B_0 + C_q$$

Ces deux équations ne peuvent être satisfaites par les mêmes valeurs de $x_{q,0}$ et $y_{q,0}$ que si $A_0 = B_0$, et nous verrons que cela a toujours lieu.

Nous devons chercher maintenant à déterminer la forme générale des coefficients $x_{q,k}$, $y_{q,k}$ et pour cela, nous allons d'abord calculer leurs valeurs effectives pour les premières valeurs de k. Nous remonterons pour cela aux équations (22) et nous remarquerons que, dans le second membre de chacune d'elles, la substitution des séries (23) fera apparaître les facteurs θ^2 et θ^{-2}. Cela nous induit à penser, ce que nous avons admis plus haut, que les coefficients de x_q et y_q seront développables suivant les puissances de θ. Cela nous induit également à penser que Φ_q et Φ'_q sont des fonctions de θ et, par suite, des fonctions périodiques de T.

Si nous faisons $k = 2$, et que nous désignions les coefficients de θ^k et θ^{-k} respectivement par $x_{1,k}$, $y_{1,k}$, $x_{1,-k}$, $y_{1,-k}$, nous devrons, pour les obtenir, remplacer $x\theta^{-1}$, $y\theta$ et C respectivement par $1 + m'^2 x_1$, $1 + m'^2 y_1$, $C_0 + m'^2 C_1$ et, ceci fait, remplacer x_1 et y_1 respectivement par :

$$x_1 = x_{1,0} + x_{1,2}\,\theta^2 + x_{1,-2}\,\theta^{-2} + \ldots\ldots + x_{1,k}\,\theta^k \ \ldots$$
$$y_1 = y_{1,0} + y_{1,2}\,\theta^2 + y_{1,-2}\,\theta^{-2} + \ldots\ldots + y_{1,k}\,\theta^k \ \ldots$$

en tenant compte de ce que l'on a :

$$D\theta = \theta \qquad D^2\theta = \theta \qquad D\theta^{-1} = -\theta^{-1} \qquad D^2\theta^{-1} = \theta^{-1}$$

Nous devrons identifier aux deux membres les coefficients de m'^2 et, dans les équations obtenues, faire passer au second membre les termes indépendant des inconnues. Ceci fait, l'identification des coefficients respectifs de θ^k et θ^{-k} nous donnera les systèmes cherchés. En remarquant que la présence du facteur m'^2 au second membre nous impose d'y réduire x_1 et y_1 à leur premier terme, nous obtiendrons les deux systèmes d'équations algébriques linéaires :

$$\begin{cases} \left[-\frac{k}{2} + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]x_{1,k} + \left[k^2 - k(\frac{3}{2} + 2m) + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]y_{1,k} = A \\ \left[k^2 + k(\frac{3}{2} + 2m) + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]x_{1,k} + \left[\frac{k}{2} + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]y_{1,k} = B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\frac{k}{2} + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]x_{1,-k} + \left[k^2 + k(\frac{3}{2} + 2m) + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]y_{1,-k} = B \\ \left[k^2 - k(\frac{3}{2} + 2m) + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{3}(1+\nu)m^2]\right]x_{1,-k} + \left[-\frac{k}{2} + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]y_{1,-k} = A \end{cases}$$

L'examen de ces systèmes nous montre tout d'abord que l'on a :

$$x_{1,-k} = y_{1,k} \qquad\qquad y_{1,-k} = x_{1,k}$$

puis, comme l'on a :

pour $k = 2$ $\qquad A = -\frac{15}{4} \qquad B = -\frac{3}{4}$

pour $k > 2$ $\qquad A = B = O$

il en résulte que $x_{1,k}$ et $y_{1,k}$ sont nuls pour $k > 2$ et x_1 et y_1 auront la forme :

$$x_1 = x_{1,0} + x_{1,2}\,\theta^2 + y_{1,2}\,\theta^{-2} \quad , \quad y_1 = y_{1,0} + y_{1,2}\,\theta^2 + x_{1,2}\,\theta^{-2}$$

L'identification des termes indépendants de θ nous donnera la valeur de C_1 :

$$C_1 = (x_{1,0} + y_{1,0})\left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)m^2\right].$$

Comme $x_{1,0}$ et $y_{1,0}$ sont arbitraires, nous prendrons :

$$x_{1,0} = y_{1,0} = O$$

ce qui nous donnera :

$$C_1 = O$$

et x_1 et y_1 auront la forme :

$$x_1 = x_{1,2}\,\theta^2 + y_{1,2}\,\theta^{-2} \qquad\qquad y_1 = y_{1,2}\,\theta^2 + x_{1,2}\,\theta^{-2}$$

Si nous effectuons la résolution du premier des deux systèmes linéaires précédents, nous obtiendrons pour les inconnues les valeurs :

$$\begin{cases} x_{1,2} = -\frac{18}{4}\frac{(1+\nu)m^2 + 2m + 1}{D_2} \\ y_{1,2} = \frac{1}{4}\frac{18(1+\nu)m^2 + 84m + 114}{D_2} \end{cases}$$

avec : $\qquad D_2 = 4[(1-3\nu)m^2 + 2m - 3]$

Poursuivons notre étude et passons aux coefficients x_2, y_2 et C_2. Pour les obtenir, nous devons remplacer dans les équations (22) au premier membre, $x\theta^{-1}$ et $y\theta$ respectivement par :

$$x\theta^{-1} = 1 + m'^2 x_1 + m'^4 x_2 \qquad\qquad y\theta = 1 + m'^2 y_1 + m'^4 y_2$$

et au second membre, $x\theta^{-1}$, $y\theta$ et C respectivement par :

$$x\theta^{-1} = 1 + m'^2\, x_1 \qquad , \qquad y\theta = 1 + m^2\, y_1 \qquad , \qquad C = C_0 + m'^2\, C_1 + m'^4\, C^2$$

puis identifier les coefficients de m'^4 . En suivant la même marche que précédemment, désignant les coefficients de θ^k et θ^{-k} respectivement par $x_{2,k}$, $y_{2,k}$, $x_{2,-k}$, $y_{2,-k}$, puis, remarquant que, d'après la constitution des équations linéaires, on doit avoir :

$$x_{2,-k} = y_{2,k} \qquad\qquad y_{2,-k} = x_{2,k}$$

nous obtiendrons le système :

$$\left\{\begin{aligned} &\left[-\frac{k}{2} + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\right] x_{2,k} + \left[k^2 - k\,(\frac{3}{2} + 2m) + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\right] y_{2,k} = A \\ &\left[k^2 + k\,(\frac{3}{2} + 2m) + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\right] x_{2,k} + \left[\frac{k}{2} + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\right] y_{2,k} = B \end{aligned}\right.$$

dans lequel on a : $A = B = 0$ pour $k = 2$ et $k > 4$, ce qui montre que pour ces valeurs de k on a : $x_{2,k} = y_{2,k} = 0$, de sorte que x_2 et y_2 ont la forme :

$$x_2 = x_{2,0} + x_{2,4}\,\theta^4 + y_{2,4}\,\theta^{-4} \qquad\qquad y_2 = y_{2,0} + y_{2,4}\,\theta^4 + x_{2,4}\,\theta^{-4}$$

Pour $k = 4$, et en tenant compte des valeurs trouvées pour x_1 et y_1 , nous avons :

$$A = -\frac{30}{4}\, x_{1,2} - \left[5 - 2\,(\frac{3}{2} + 2m) + [\,\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\right] x_{1,2}\, y_{1,2}$$

$$B = -\frac{6}{4}\, x_{1,2} - \left[7 + 2\,(\frac{3}{2} + 2m) + [\,\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\right] x_{1,2}\, y_{1,2}$$

Enfin, si nous prenons :

$$x_{2,0} = y_{2,0} = O$$

nous obtiendrons x_2 , y_2 sous la forme :

$$x_2 = x_{2,4}\,\theta^4 + y_{2,4}\,\theta^{-4} \qquad\qquad y_3 = y_{2,4}\,\theta^4 + x_{2,4}\,\theta^{-4}$$

et pour C_2 la valeur :

$$C_2 = \frac{36}{4}\, y_{1,2} + x^2_{1,2} + 3y^2_{1,2} + (3 + 4m)\,[x^2_{1,2} - y^2_{1,2}] + [\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1+\nu)\, m^2]\,[x^2_{1,2} + y^2_{1,2}]$$

Passons maintenant au calcul de x_3 , y_3 et C_3 . Nous devons substituer pour cela dans les équations (22) à $x\theta^{-1}$ et $y\theta$ respectivement, au premier membre :

$$x\theta^{-1} = 1 + m'^2\, x_1 + m'^4\, x_2 + m'^6\, x_3$$

$$y\theta = 1 + m'^2\, y_1 + m'^4\, y_2 + m'^6\, y_3$$

et au second membre :

$$x\theta^{-1} = 1 + m'^2\, x_1 + m'^4\, x_2$$

$$y\theta = 1 + m'^2\, y_1 + m'^4\, y_2$$

et prendre pour C la valeur :

$$C = C_0 + m'^2\, C_1 + m'^4\, C_2 + m'^6\, C_3$$

puis, identifier les coefficients de m'^6. Désignant ensuite les coefficients de θ^k et θ^{-k} dans x_3 et y_3 respectivement par $x_{3,k}$, $y_{3,k}$, $x_{3,-k}$, $y_{3,-k}$, et remarquant que, d'après la composition des équations, nous devons avoir :

$$x_{3,-k} = y_{3,k} \qquad\qquad y_{3,-k} = x_{3,k}$$

nous obtiendrons le système :

$$\begin{cases} \left[-\frac{k}{2}+[\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]x_{3,k}+\left[k^2-k(\frac{3}{2}+2m)+[\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]y_{3,k}=A \\ \left[k^2+k(\frac{3}{2}+2m)+[\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]x_{3,k}+\left[\frac{k}{2}+[\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]y_{3,k}=B \end{cases}$$

dans lequel nous avons $A = B = O$ pour $k = 4$ et $k > 6$, valeur de k auxquelles correspondent :

$$x_{3,k} = y_{3,k} = O$$

Pour $k = 2$, nous avons :

$$\begin{cases} A = -\frac{30}{4}x_{1,2}\,y_{1,2}-\frac{3}{4}[y^2_{1,2}+2y_{2,4}]+6x_{1,2}\,x_{2,4}+3y_{1,2}\,y_{2,4}-\left[16-4(\frac{3}{2}+2m)+[\frac{1}{2}+2m+\right. \\ \left.+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]y_{1,2}\,y_{2,4}-\left[4+2(\frac{3}{2}+2m)+[\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]x_{1,2}\,x_{2,4} \\ B = -\frac{6}{4}x_{1,2}\,y_{1,2}-\frac{15}{4}[y^2_{1,2}+2y_{2,4}]+5x_{1,2}\,x_{2,4}+2y_{1,2}\,y_{2,4}-\left[16+4(\frac{3}{2}+2m)+[\frac{1}{2}+2m+\right. \\ \left.+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]x_{1,2}\,x_{2,4}-\left[4-2(\frac{3}{2}+2m)+[\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]y_{1,2}\,y_{2,4} \end{cases}$$

et pour $k = 6$, nous avons :

$$\begin{cases} A = -3x_{1,2}\,y_{2,4}-2y_{1,2}\,x_{2,4}-\frac{15}{4}[x^2_{1,2}+2x_{2,4}]-\left[16-4(\frac{3}{2}+2m)+[\frac{1}{2}+2m+\right. \\ \left.+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]x_{1,2}\,y_{2,4}-\left[4-2(\frac{3}{2}+2m)+[\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]y_{1,2}\,x_{2,4} \\ B = -6x_{1,2}\,y_{2,4}-5y_{1,2}\,x_{2,4}-\frac{3}{4}[x^2_{1,2}+2x_{2,4}]-\left[16+4(\frac{3}{2}+2m)+[\frac{1}{2}+2m+\right. \\ \left.+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]y_{1,2}\,x_{2,4}-\left[4+2(\frac{3}{2}+2m)+[\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2]\right]x_{1,2}\,y_{2,4} \end{cases}$$

L'identification des termes indépendants des θ donne pour C_3 la valeur :

$$C_3 = (x_{3,0}+y_{3,0})\left[\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)m^2\right]$$

valeur qui sera nulle si nous prenons $x_{3,0} = y_{3,0} = O$.

Nous obtiendrons donc x_3 et y_3 sous la forme :

$$x_3 = x_{3,2}\,\theta^2 + y_{3,2}\,\theta^{-2} + x_{3,6}\,\theta^6 + y_{3,6}\,\theta^{-6}$$
$$y_3 = y_{3,2}\,\theta^2 + x_{3,2}\,\theta^{-2} + y_{3,6}\,\theta^6 + x_{3,6}\,\theta^{-6}$$

9. — En examinant les valeurs trouvées pour x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, nous voyons immédiatement que ce sont des polynomes homogénes en θ^2 et θ^{-2}, et dont le degré est égal à l'indice de x et de y. Nous sommes donc induits à penser que la loi est générale et que les coefficients x_q et y_q sont des polynomes homogènes de degré q en θ^2 et θ^{-2}. Nous voyons que cela est vrai pour les premiers coefficients et nous supposerons qu'il en est ainsi jusqu'à x_{q-1} et y_{q-1}. Si $a < q - 1$, x_a et y_a seront des polynomes homogènes de degré a en θ^2 et θ^{-2} et il en sera de même de leurs dérivées.

Considérons les différents termes de Φ_q et Φ'_q ; nous avons d'abord les termes du premier membre de (22) que nous avons fait passer au second parce qu'ils ne contenaient pas d'inconnues. A un facteur numérique près, ils sont égaux à :

$$x_a \; y_b \qquad (a < q \;,\; b < q \; a, \; + b = q)$$

où x_a ou y_b peuvent être remplacés par une de leurs dérivées. Ce sont donc des polynomes homogènes de degré q en θ^2 et θ^{-2}.

Les autres termes des Φ_q et Φ'_q proviennent des termes du second membre.

$$-\frac{15}{4} m'^2 \, x^2 \qquad\qquad -\frac{3}{4} m'^2 \, y^2$$

pour Φ_q et

$$-\frac{3}{4} m'^2 \, x^2 \qquad\qquad -\frac{15}{4} m'^2 \, y^2$$

pour Φ'_q. Ils sont de l'une des deux formes :

$$\theta^2 \, x_a \, y_b \;\;,\;\; \theta^{\,2} \, x_a \, y_b \qquad\qquad (a + b = q - 1)$$

et, par conséquent, ils sont homogènes et de degré q en θ^2 et $\theta^{\,2}$.

Donc Φ_q et Φ'_q, sont des polynomes homogènes de degré q en θ^2 et θ^{-2}. Mais x_q et y_q se déduisent de Φ_q et Φ'_q par les équations (25), les termes de x_q et y_q correspondent à ceux de Φ_q et Φ'_q et contiennent les mêmes puissances de θ^2 et θ^{-2}. Donc x_q et y_q sont des polynomes homogènes de degré q en θ^2 et θ^{-2}.

Il résulte de cela que si l'on ordonne $x\theta^{-1}$, $y\theta$ suivant les puissances de θ, et le coefficient de chaque puissance de θ suivant les puissances de m', le coefficient de θ^{2k} contiendra seulement des termes pour lesquels l'exposant de m' prendra la succession de valeurs :

$$2k \quad , \quad 2k + 4 \quad , \quad 2k + 8 \quad , \quad 2k + 12 \;\ldots\ldots$$

et ceci induit à penser que les séries convergeront avec rapidité.

10. — Nous avons vu au paragraphe précédent que Φ_q et Φ'_q sont des polynomes homogènes de degré q en θ^2 et θ^{-2}. Nous allons chercher maintenant leur forme générale et la loi de leur formation. Pour cela, nous substituerons dans les équations (22) à $x\theta^{-1}$ et $y\theta$

$$x\theta^{-1} = 1 + m'^2 \, x_1 + \;\ldots\ldots\; + m'^{2q} \, x_q$$
$$y\theta = 1 + m'^2 \, y_1 + \;\ldots\ldots\; + m'^{2q} \, y_q$$

au premier membre et :

$$x\theta^{-1} = 1 + m'^2 \, x_1 + \;\ldots\ldots\; + m'^{2(q-1)} \, x_{q-1}$$
$$y\theta = 1 + m'^2 \, y_1 + \;\ldots\ldots\; + m'^{2(q-1)} \, y_{q-1}$$

au second membre et nous chercherons, dans le coefficient de m'^{2q} l'ensemble des termes qui ne contiennent pas les inconnues. Nous trouverons ainsi pour Φ_q l'expression :

$$\Phi_q = -\frac{6}{4} \theta^2 \left[x_{q-1} + x_{q-2} \, x_1 + x_{q-3} \, x_2 + \ldots\ldots\right] - \frac{30}{4} \theta^{-2} \left[y_{q-1} + y_{q-2} \, y_1 + y_{q-3} \, y_2 + \ldots\ldots\right] -$$
$$- \sum_1^{q-1} y_i \left[D^2 x_{q-i} + \left(\frac{3}{2} + 2m\right) D x_{q-i} + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1 + \nu) \, m^2\right] x_{q-i}\right] - \frac{1}{2} \sum_1^{q-i} D y_i \left[D x_{q-i} + x_{q-i}\right]$$

et pour Φ'_q :

$$\Phi'_q = -\frac{30}{4} \theta^2 \left[x_{q-1} + x_{q-2} \, x_1 + x_{q-3} \, x_2 + \ldots\ldots\right] - \frac{6}{4} \theta^2 \left[y_{q-1} + y_{q-2} \, y_1 + y_{q-3} \, y_2 + \ldots\ldots\right] -$$
$$- \sum_1^{q-1} x_i \left[D^2 y_{q-i} - \left(\frac{3}{2} + 2m\right) D y_{q-i} + \left[\frac{1}{2} + 2m + \frac{3}{2}(1 + \nu) \, m^2\right] y_{q-i}\right] - \frac{1}{2} \sum_1^{q-i} D x_i \left[D y_{q-i} - y_{q \; i}\right]$$

Pour arriver à obtenir ces expressions en fonction des $x_{q,k}$ et $y_{q,k}$, nous ferons une remarque inportante : Si nous écrivons les valeurs de x_1 et de y_1 sous la forme :

$$x_1 = x_{1,2}\,\theta^2 + x_{1,-2}\,\theta^{-2} \qquad\qquad y_1 = y_{1,2}\,\theta^2 + y_{1,-2}\,\theta^{-2}$$

nous pouvons remplacer x_q et y_q respectivement par les puissances q ième des valeurs de x_1 et de y_1 avec les conventions suivantes :

1) Les coefficients numériques des différents termes du développement de la puissance sont tous égaux à l'unité.

2) Nous traiterons les indices comme des exposants, en les additionnant algébriquement, les indices de droite avec ceux de droite et les indices de gauche avec ceux de gauche. Nous poserons aussi $x_{q,o} = y_{q,o} = o$

L'application de ces conventions aux premières valeurs de q nous permettra de retrouver les valeurs calculées plus haut pour les x_q et y_q correspondants, ce qui montre la légitimité de nos conventions.

Si donc, dans les expressions données plus haut pour Φ_q et Φ'_q, nous remplaçons les x_i et y_i ainsi que leurs dérivées par leurs expressions en fonction de θ calculées en faisant usage des conventions ci-dessus, et si nous effectuons les réductions nécessaires, nous obtiendrons finalement les expressions :

$$\Phi_q = -\frac{3}{4}\sum_{\substack{o\\i}}^{q-1}\sum_{\substack{o\\p'}}^{i}\sum_{\substack{o\\p''}}^{q-i} x_{i,2i-4p'}\, x_{q-1-i,\,2q-2-2i-4p''}\, \theta^{2q-4(p'+p'')}$$

$$-\frac{15}{4}\sum_{\substack{o\\i}}^{q-1}\sum_{\substack{o\\p'}}^{i}\sum_{\substack{o\\p''}}^{q-i} \cdot y_{i,2i-4p'}\, y_{q-1-i,\,2q-2-2i-4(p''-1)}\, \theta^{2q-4(p'+p'')}$$

$$-\sum_{\substack{1\\i}}^{q-1}\sum_{\substack{o\\p'}}^{i}\sum_{\substack{o\\p''}}^{q-i} \frac{1}{2}(2i-4p')\,[\,2q-2i-4p''+1\,]\, y_{i,2i-4p'}\, x_{q-i,2q-2i-4p''}\, \theta^{2q-4(p'+p'')} -$$

$$-\sum_{\substack{1\\i}}^{q-1}\sum_{\substack{o\\p'}}^{i}\sum_{\substack{o\\p''}}^{q-i} \Big[[\,2q-2i-4p''\,]^2 + (\frac{3}{2}+2m)\,[\,2q-2i-4p''\,] +$$

$$+[\,\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)\,m^2\,]\Big]\, y_{i,2i-4p'}\, x_{q-i,\,2q-2i-4p''}\, \theta^{2q-4(p'+p'')}$$

$$\Phi'_q = -\frac{15}{4}\sum_{\substack{o\\1}}^{q-1}\sum_{\substack{o\\p'}}^{i}\sum_{\substack{o\\p''}}^{q-i} x_{i,2i-4p'}\, x_{q-1-i,\,2q-2-2i-4p''}\, \theta^{2q-4(p'+p'')}$$

$$-\frac{3}{4}\sum_{\substack{o\\i}}^{q-1}\sum_{\substack{o\\p'}}^{1}\sum_{\substack{o\\p''}}^{q-i} y_{i,2i-4p'}\, y_{q-1-i,\,2q-2-2i-4(p''-1)}\, \theta_{2q-4(p'+p'')}$$

$$-\sum_{\substack{1\\i}}^{q-1}\sum_{\substack{o\\p'}}^{i}\sum_{\substack{o\\p''}}^{q-1} \frac{1}{2}(2i-4p')\,[\,2q-2i-4p''-1\,]\, x_{i,2i-4p'}\, y_{q-i,\,2q-2i-4p''}\, \theta^{2q-4(p'+p'')} -$$

$$-\sum_{\substack{1\\i}}^{q-1}\sum_{\substack{o\\p'}}^{i}\sum_{\substack{o\\p''}}^{q-i} \Big[[\,2q-2i-4p''\,]^2 - (\frac{3}{2}+2m)\,[\,2q-2i-4p''\,] +$$

$$+[\,\frac{1}{2}+2m+\frac{3}{2}(1+\nu)\,m^2\,]\Big]\, x_{i,2i-4p'}\, y_{q-i,\,2q-2i-4p''}\, \theta^{2q-4(p'+p'')}$$

L'examen de ces expressions montre d'abord que Φ_q et Φ'_q sont des fonctions périodiques de T. Quant à leur forme, on voit que ce sont des fonctions bilinéaires des $x_{q,k}$ et des $y_{q,k}$ et que dans chacun des produits $x_{q,k}\,y_{q',k'}$ ou $x_{q,k}\,x_{q',k'}$ ou encore $y_{q,k}\,y_{q',k'}$ les indices de gauche sont complémentaires, leur somme étant égale à q, mais chacun de ces indices étant inférieur à q. Quant aux indices de droite, leur somme est égale à l'exposant de la puissance de θ correspondante.

Cherchons les conditions pour lesquelles il existera des termes indépendants des θ, c'est-à-dire, pour lesquelles le coefficient C_q ne sera pas nul. il suffit pour cela que l'on ait :

$$2q - 4\,(p' + p'') = 0$$

ce qui donne :

$$p' + p'' = \frac{q}{2}$$

Comme p' et p'' sont des nombres entiers, cette équation ne peut exister que si q est pair, et c'est bien ce que nous avons trouvé en calculant les premiers coefficients x_q et y_q.

11. — Revenons aux coefficiens $x_{q,k}$ et $y_{q,k}$. Nous disons que ce sont des fonctions rationnelles de m. Cela est vrai pour $x_{1,2}$ et $y_{1,2}$; admettons que cela soit vrai jusqu'à $x_{q-1,k}$ et $y_{q-1,k}$ inclusivement et démontrons qu'il en est de même pour $x_{q,k}$ et $y_{q,k}$. En effet, cela est vrai pour tous les termes de Φ_q et Φ'_q qui sont formés par multiplication en partant des coefficients $x_{a,h}$, et $y_{b,h}$ $(a + b < q)$: cela est donc vrai des coefficients A et B qui figurent aux seconds membres des équations (25). Les coefficients de ces équations étant rationnels en m. il en sera de même des inconnues, c'est-à-dire des coefficients $x_{q,k}$ et $y_{q,k}$.

Cherchons quels seront les facteurs des dénominateurs de ces fonctions rationnelles. Ils sont faciles a déterminer. En effet, la résolution des équations (25) introduit au dénominateur un facteur qui est le déterminant de de ces équations, et donc la valeur est :

$$D = k^2\,[\,(1 - 3\nu)\,m^2 + 2m - (k^2 - 1)\,]$$

expression dans laquelle on devra faire successives :

$$k = 2\,,\,4\,,\,6\,,\,8\,,\quad \ldots\ldots$$

ce qui donnera les trinomes :

$$(25\ \text{bis})\qquad \left\{\begin{array}{l} 4\,[\,(1-3\nu)\,m^2 + 2m - 3\,] \\ 16\,[\,(1-3\nu)\,m^2 + 2m - 15\,] \\ 36\,[\,(1-3\nu)\,m^2 + 2m - 35\,] \\ 64\,[\,(1-3\nu)\,m^2 + 2m - 63\,] \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si donc on développe dans x le coefficient de θ^{2k+1} suivant les puissances de m', le coefficient de chaque puissance est une fonction rationnelle de m dont le dénominateur est un produit de facteurs de la forme (25 bis), chaque facteur pouvant être élevé à une puissance supérieure à 1.

Nous remarquerons que la composition du dénominateur nous montre que le degré en m du dénominateur est une puissance de 2. Pour le numérateur, nous voyons facilement que le degré en m est d'ordre pair. En effet, la résolution des équations (25) donne pour les inconnues des fonctions linéaires des coefficients A et B, chacun d'eux étant multiplié par une fonction de m qui est au plus du second degré. Mais, A et B sont extraits de Φ_q et Φ'_q ; ce sont donc des sommes de termes qui sont chacun produit d'un facteur $x_{q,k}$ et d'un facteur $y_{q,k}$ ou de deux facteurs $x_{q,k}$ ou encore de deux facteurs $y_{q,k}$, chaque produit étant multiplié par un coefficient de degré 0, 1 ou 2 en m, au plus. Comme pour $x_{1,2}$ et $y_{1,2}$ le numérateur est de degré pair, on voit de proche en proche qu'il en est de même de chaque coefficient $x_{q,k}$ ou $y_{q,k}$ et par suite des coefficients A et B relatifs aux $x_{q,k}$ et $y_{q,k}$ suivants

12. — Ayant calculé les coefficients $x_{q,k}$ et $y_{q,k}$ nous devons maintenant, pour compléter la solution, calculer K et a. Mais auparavant nous devons effectuer quelques transformations.

Reprenons les équations (18) et remplaçons x et y par $x\theta^{-1}$ et $y\theta$; nous voyons facilement qu'en posant comme auparavant :

$$m'^2 = \nu m^2$$

elles peuvent s'écrire :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} & D^2(x\theta^{-1}) + 2(1+m)D(x\theta^{-1}) + [1 + 2m + (1+\nu)m^2](x\theta^{-1}) \\ & \qquad - K\rho^3(x\theta^{-1}) = -3\nu m^2\theta^{-2}(y\theta) \\ & D^2(y\theta) - 2(1+m)D(y\theta) + [1 + 2m + (1+\nu)m^2](y\theta) \\ & \qquad - K\rho^3(y\theta) = -3\nu m^2\theta^2(x\theta^{-1}) \end{aligned}\right.$$

Nous savons que les valeurs :

$$x\theta^{-1} = 1 \qquad y\theta = 1 \qquad m' = 0$$

satisfont aux équations (22) déduites par combinaison des équations (18) et (19). Nous voyons facilement qu'elles satisferont aux équations (18) à la condition de prendre pour K la valeur :

$$K = 1 + 2m + (1+\nu)m^2$$

ce qui constitue une valeur approchée de K.

Reportons-nous maintenant aux valeurs trouvées pour les développements de $x\theta^{-1}$ et de $y\theta$ suivant les puissances de m'^2. Nous voyons que nous pouvons les écrire sous la forme suivante :

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} x\theta^{-1} = 1 & + \theta^2(m'^2 x_{1,2} + m'^6 x_{3,2} + \ldots\ldots) + \\ & + \theta^{-2}(m'^2 y_{1,2} + m'^6 y_{3,2} + \ldots\ldots) + \\ & + \theta^4(m'^4 x_{2,4} + \ldots) + \theta^{-4}(m'^4 y_{2,4} + \ldots\ldots) + \\ & + \theta^6(m'^6 x_{3,6} + \ldots) + \theta^{-6}(m'^6 y_{3,6} + \ldots\ldots) + \ldots \\ y\theta = 1 & + \theta^2(m'^2 y_{1,2} + m'^6 y_{3,2} + \ldots\ldots) + \\ & + \theta^{-2}(m'^2 x_{1,2} + m'^6 x_{3,2} + \ldots\ldots) + \\ & + \theta^4(m'^4 y_{2,4} + \ldots) + \theta^{-4}(m'^4 x_{2,4} + \ldots\ldots) + \\ & + \theta^6(m'^6 y_{3,6} + \ldots) + \theta^{-6}(m'^6 x_{3,6} + \ldots\ldots) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Nous sommes donc conduits à les écrire sous la forme :

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} x\theta^{-1} &= 1 + \theta^2(x\theta^{-1})_{0,2} + \theta^{-2}(x\theta^{-1})_{0,-2} + \theta^4(x\theta^{-1})_{0,4} + \theta^{-4}(x\theta^{-1})_{0,-4} + \theta^6(x\theta^{-1})_{0,6} + \theta^{-6}(x\theta^{-1})_{0,-6} + \ldots\ldots \\ y\theta &= 1 + \theta^2(y\theta)_{0,2} + \theta^{-2}(y\theta)_{0,-2} + \theta^4(y\theta)_{0,4} + \theta^{-4}(y\theta)_{0,-4} + \theta^6(y\theta)_{0,6} + \theta^{-6}(y\theta)_{0,-6} + \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

avec

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} (x\theta^{-1})_{0,2} &= m'^2 x_{1,2} + m'^6 x_{3,2} + \ldots\ldots \\ (x\theta^{-1})_{0,4} &= m'^4 x_{2,4} + \ldots\ldots \\ (x\theta^{-1})_{0,6} &= m'^6 x_{3,6} + \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots \\ (y\theta)_{0,2} &= m'^2 y_{1,2} + m'^6 y_{3,2} + \ldots\ldots \\ (y\theta)_{0,4} &= m'^4 y_{2,4} + \ldots\ldots \\ (y\theta)_{0,6} &= m'^6 y_{3,6} + \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Quant aux coefficients $(x\theta^{-1})_{0,-2h}$ et $(y\theta)_{0,-2h}$ nous voyons facilement, à l'inspection des relations (29) que l'on a :

$$(30) \qquad (x\theta^{-1})_{0,-2h} = (y\theta)_{0,2h} \qquad\qquad (y\theta)_{0,-2h} = (x\theta^{-1})_{0,2h}$$

Ceci fait, posons :

$$(x\theta^{-1})_{0,2h} = \xi_{0,2h} + \eta_{0,2h} \qquad\qquad (y\theta)_{0,2h} = \xi_{0,2h} - \eta_{0,2h}$$

$$x\theta^{-1} = \xi + \eta \qquad\qquad y\theta = \xi - \eta$$

les relations (30) nous donneront de suite :

$$(30^{\text{bis}}) \qquad \xi_{0,-2h} = \xi_{0,2h} \qquad\qquad \eta_{0,-2h} = -\eta_{0,2h}$$

Remplaçons maintenant dans les équations (26) $x\theta^{-1}$ et $y\theta$ par ξ et η et additionnons les résultats membre à membre, nous obtiendrons l'équation :

$$(31) \qquad D^2\xi + 2(1+m)D\eta + [1 + 2m + (1+\nu)m^2]\xi - K\rho^3\xi = -\frac{3}{2}\nu m^2 [\theta^2(x\theta^{-1}) + \theta^{-2}(y\theta)]$$

qui va nous servir à calculer la valeur exacte de K. Remarquons pour cela que, d'après les relations (28), ξ et η peuvent s'écrire :

$$(32) \qquad \begin{aligned} \xi &= 1 + \xi_{0,2}\theta^2 + \xi_{0,-2}\theta^{-2} + \xi_{0,4}\theta^4 + \xi_{0,-4}\theta^{-4} + \ldots\ldots \\ \eta &= \eta_{0,2}\theta^2 + \eta_{0,-2}\theta^{-2} + \eta_{0,4}\theta_4 + \eta_{0,-4}\theta^{-4} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Désignons maintenant par c la partie constante de $\rho^3\xi$ et égalons les parties constantes des deux membres de (31), en nous rappelant que :

$$(y\theta)_{0,2} = (x\theta^{-1})_{0,-2}$$

nous obtiendrons pour K la valeur complétée :

$$(33) \qquad cK = 1 + 2m + (1+\nu)m^2 + 3\nu m^2 (x\theta^{-1})_{0,-2}$$

et le calcul est ramené à celui de c.

Il est facile à effectuer car, en négligeant, comme nous l'avons fait, la troisième coordonnée, nous avons :

$$\rho = (xy)^{-\frac{1}{2}} = [(x\theta^{-1})(y\theta)]^{-\frac{1}{2}} = [\xi^2 - \eta^2]^{-\frac{1}{2}},$$

nons pouvons donc écrire :

$$\rho^3\xi = \xi[\xi^2 - \eta^2]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\xi^2} + \frac{3}{2}\frac{\eta^2}{\xi^4} + \frac{3\cdot5}{2\cdot4}\frac{\eta^4}{\xi^6} + \ldots$$

et posant

$$\xi = 1 + \xi'$$

nous obtiendrons :

$$\rho^3\xi = 1 - 2\xi' + 3\xi'^2 - 4\xi'^3 + 5\xi'^4 \ldots + \frac{3}{2}\eta^2[1 - 4\xi' + 10\xi'^2 - \ldots] + \frac{15}{8}\eta^4[1 - 6\xi' + \ldots\ldots]\ldots$$

La recherche de la partie constante nous donnera enfin c, en tenant compte des relations (30^{bis}) appliquées à ξ' et η. Nous obtiendrons ainsi :

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} c = {} & 1 + 6\xi^2_{0,2} - 3\eta^2_{0,2} + 6\xi^2_{0,4} - 3\eta^2_{0,4} - 24\xi^2_{0,2}\xi_{0,4} + 24\xi_{0,2}\eta_{0,2}\eta_{0,4} - \\ & - 12\eta^2_{0,2}\eta_{0,4} + 30\xi^4_{0,2} - 30\xi^2_{0,2}\eta^2_{0,2} + \frac{45}{8}\eta^4_{0,2} + \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

les quantités négligées étant du douxième ordre par rapport à m'. On en conclut K.

Il nous reste à calculer a. Or, rappelons nous que :

$$f(M_0 + M) = K(n - n')^2 a^3$$

et que, d'autre part, si nous appelons a_0 la valeur du demi grand axe qui correspond à la valeur n du moyen mouvement, valeur donnée par les observations, nous avons :

$$fM_0 = n^2 a_0^3$$

Le rapprochement de ces deux formules, après avoir fait dans la première M = O, et après une transformation facile, nous donnera :

$$(35) \qquad \frac{a_0}{a} = \left[\frac{K}{(1+m)^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

d'où a. D'après la forme de la valeur de K, on voit que a diffère peu de a_0 comme nous l'avons dit.

13. — Pour achever le calcul de la première approximation, il faut chercher les valeurs correspondantes de r, v, s, X, Y, Z. Nous savons déjà que :

$$Z = O \qquad s = 0$$

Calcul de r. — Nous avons par définition :

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{\rho} = (xy)^{\frac{1}{2}} = [(x\theta^{-1})(y\theta)]^{\frac{1}{2}} = [\xi^2 - \eta^2]^{\frac{1}{2}}$$

ce qui s'écrit, après avoir développé le radical par la formule du binome :

$$\frac{r}{a} = \xi - \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{\xi} - \frac{1}{8}\frac{\eta^4}{\xi^3} - \frac{1}{16}\frac{\eta^6}{\xi^5} - \ldots\ldots ,$$

comme nous avons posé : $\xi = 1 + \xi'$, nous obtiendrons aisément :

$$\frac{r}{a} = 1 + \xi' - \frac{1}{2}\eta^2(1 - \xi' + \xi'^2 - \xi'^3 + \xi'^4 - \ldots\ldots) -$$

$$- \frac{1}{8}\eta^4(1 - 3\xi' + 6\xi'^2 - 10\xi'^3 + \ldots) - \frac{1}{16}\eta^6(1 - 5\xi' + \ldots) \ldots$$

Nous devons substituer à ξ' et η leurs valeurs données plus haut en fonction des θ. Nous calculerons donc les puissances successives de ξ' et de η et les porterons dans la valeur trouvée pour $\frac{r}{a}$. Nous poserons de plus :

$$V = N - N'$$

Nous rappelant alors que nous avons :

$$\theta = e^{i(N-N')} \qquad 2\cos V = \epsilon^{iV} + \epsilon^{-iV}$$

nous obtiendrons pour r le développement trigonométrique suivant :

$$(35^{\text{bis}}) \qquad r = r_{0,0} + r_{0,2}\cos 2V + r_{0,4}\cos 4V + \ldots\ldots$$

avec :

$$(35^{\text{ter}}) \quad \left\{ \begin{aligned} r_{0,0} &= a\,[\,1 + \eta^2_{0,2} + \eta^2_{0,4} - 2\xi_{0,2}\,\eta_{0,2}\,\eta_{0,4} + \xi^2_{0,2}\,\eta^2_{0,2} - \frac{3}{4}\eta^4_{0,2} \ldots\,] \\ r_{0,2} &= a\,[\,2\xi_{0,2} - \xi_{0,2}\,\eta^2_{0,2} + 2\eta_{0,2}\,\eta_{0,4} + \xi^2_{0,2}\,\eta^2_{0,2} \ \ldots\ldots\,] \\ r_{0,4} &= a\,[\,2\xi_{0,4} - \eta^2_{0,2} - 2\xi_{0,4}\,\eta^2_{0,2} + 2\eta_{0,2}\,\eta_{0,6} \ \ldots\ldots\,] \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Calcul de v. — Comme nous avons posé :

$$v = \mathrm{N} + \frac{l}{i}$$

il se ramène à celui de l.

Nous devons, pour cela, retourner en arrière. Nous avons, en effet :

$$\mathrm{X} = r \cos s \cos v \qquad \mathrm{Y} = r \cos s \sin v \qquad \mathrm{Z} = r \sin s \ ,$$

puis :

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}\cos\mathrm{N}' + \mathrm{Y}\sin\mathrm{N}' \qquad \mathrm{Y}_1 = -\mathrm{X}\sin\mathrm{N}' + \mathrm{Y}\cos\mathrm{N}'$$

Les équations (6) nous donnent alors pour x et y :

$$ax = \mathrm{X}_1 + i\mathrm{Y}_1 = (\mathrm{X} + i\mathrm{Y})\, e^{-i\mathrm{N}'}$$
$$ay = \mathrm{X}_1 - i\mathrm{Y}_1 = (\mathrm{X} - i\mathrm{Y})\, e^{i\mathrm{N}'}$$

mais d'après les formules rappelées plus haut, nous aurons :

$$\mathrm{X} + i\mathrm{Y} = r\cos s\, e^{iv} \qquad \mathrm{X} - i\mathrm{Y} - r\cos s\, e^{-iv}$$

de sorte que les valeurs trouvées pour x et y deviendront, en se rappelant que $\theta = e^{i\mathrm{V}}$:

$$ax = r\cos s\, e^{i\mathrm{V}+l} \qquad ax = r\cos s\, e^{-i\mathrm{V}-l}$$

et, finalement, puisque $s = \frac{\sigma}{i}$, nous pourrons écrire :

$$(x\theta^{-1}) = \frac{r}{a}\, e^{l} \operatorname{Ch} \sigma \qquad (y\theta) = \frac{r}{a}\, e^{-l} \operatorname{Ch} \sigma \ .$$

Revenant à ξ et η, nous trouverons facilement, en appliquant leur définition, que l'on a :

$$(36) \qquad \xi = \frac{r}{a} \operatorname{Ch} \sigma \operatorname{Ch} l \qquad \eta = \frac{r}{a} \operatorname{Ch} \sigma \operatorname{Sh} l \qquad z = \frac{r}{a} \operatorname{Sh} \sigma$$

Ceci posé, les deux premières formules (36) donnent par division :

$$\operatorname{Th} \lambda = \frac{\eta}{\xi}$$

formule qui, par inversion, fournit le développement :

$$l = \frac{\eta}{\xi} + \frac{1}{3}\frac{\eta^3}{\xi^3} + \frac{1}{5}\frac{\eta^5}{\xi^5} \quad \ldots\ldots$$

Dans ce développement nous remplacerons, comme plus haut, ξ par $1 + \xi'$ et il deviendra :

$$l = \eta\,(1 - \xi' + \xi'^2 - \xi'^3 + \ldots\,) + \frac{1}{3}\eta^3\,(1 - 3\xi' + \ldots\,) + \frac{1}{5}\eta^5\,(1 - 5\xi' \ \ldots\,)\ .$$

Calculons les puissances successives de ξ' et η, transportons-les dans ce développement, groupons les puissances semblables de θ. En nous rappelant que :

$$\mathrm{V} = \mathrm{N} - \mathrm{N}' \qquad \mathrm{V} = \mathrm{N} + \frac{l}{i}$$
$$2i\sin\mathrm{V} = e^{i\mathrm{V}} - e^{-i\mathrm{V}}$$

nous obtiendrons le développement trigonométrique de v sous la forme :

$$(36^{\text{bis}}) \qquad v = \mathrm{N} + l_{0,2}\sin 2\mathrm{V} + l_{0,4}\sin 4\mathrm{V} + l_{0,6}\sin 6\mathrm{V} \ \ldots$$

avec :

$$(36^{\text{ter}}) \quad \begin{cases} l_{0,2} = 2\eta_{0,2} - 2\xi_{0,2}\,\eta_{0,4} + 2\eta_{0,2}\,\xi_{0,4} + 2\xi^2_{0,2}\,\eta_{0,2} - 8\eta^3_{0,2} + 12\xi_{0,2}\,\eta^2_{0,2}\,\eta_{0,4} \ \ldots\ldots \\ l_{0,4} = 2\eta_{0,4} - 2\xi_{0,2}\,\eta_{0,2} - 2\xi_{0,2}\,\eta_{0,6} + 2\eta_{0,2}\,\xi_{0,6} + 4\xi^2_{0,2}\,\eta_{0,4} - 4\eta^2_{0,2}\,\eta_{0,4} + 4\xi_{0,2}\,\eta^3_{0,2} - 4\xi^3_{0,2}\,\eta_{0,2} \ \ldots\ldots \\ l_{0,6} = 2\eta_{0,6} - 2\xi_{0,2}\,\eta_{0,4} - 4\xi_{0,4}\,\eta_{0,2} + 2\xi^2_{0,2}\,\eta_{0,2} + \frac{8}{3}\eta^3_{0,2} + 12\xi_{0,2}\,\eta^2_{0,2}\,\eta_{0,4} - 6\xi_{0,2}\,\eta_{0,2}\,\eta_{0,4} \ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il nous reste à calculer les coordonnées rectangulaires X, Y, Z (on sait que $Z = O$) et la solution périodique annoncée.

Calcul de X et Y. — Revenons aux formules (7) qui donnent X et Y en fonction de x, y et N'. En nous rappelant la définition de θ, nous voyons que ces formules peuvent être écrites sous la forme :

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{a}{2} [(x\theta^{-1}) e^{iN} + (y\theta) e^{-iN}] \\ Y &= \frac{a}{2i} [(x\theta^{-1}) e^{iN} - (y\theta) e^{-iN}] \end{aligned} \right.$$

Si nous remplaçons dans ces dernières formules $x\theta^{-1}$ et $y\theta$ par leurs développements (formules 28), nous obtiendrons pour X et Y les développements simples :

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= a \sum (x\theta^{-1})_{0,2h} \cos(N + 2hV) \\ Y &= a \sum (x\theta^{-1})_{0,2h} \sin(N + 2hV) \end{aligned} \right.$$

Calcul de la solution périodique. — Nous l'obtiendrons en calculant X_1 et Y_1. Les équations de définition (6) donnent pour X_1 et Y_1.

$$X_1 = \frac{a}{2}(x + y) \qquad\qquad Y_1 = \frac{a}{2i}(x - y)$$

ce que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{a}{2} [(x\theta^{-1}) \theta + (y\theta) \theta^{-1}] \\ Y_1 &= \frac{a}{2i} [(x\theta^{-1}) \theta - (y\theta) \theta^{-1}] \end{aligned} \right.$$

Remplaçant $(x\theta^{-1})$ et $(y\theta)$ par leurs développements (28) et effectuant la transformation des exponentielles en lignes trigonométriques, nous obtiendrons pour X_1 et Y_1 les développements :

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= A_1 \cos V + A_3 \cos 3V + A_5 \cos 5V + \ldots\ldots \\ Y_1 &= B_1 \sin V + B_3 \sin 3V + B_5 \sin 5V + \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

les coefficients A_i et B_i ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 &= a [1 + (y\theta)_{0,2}] & B_1 &= a [1 - (y\theta)_{0,2}] \\ A_3 &= a [(x\theta^{-1})_{0,2} + (y\theta)_{0,4}] & B_3 &= a [(x\theta^{-1})_{0,2} - (y\theta)_{0,4}] \\ A_5 &= a [(x\theta^{-1})_{0,4} + (y\theta)_{0,6}] & B_5 &= a [(x\theta^{-1})_{0,4} - (y\theta)_{0,6}] \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Remarquons que les séries (39) constituent une solution périodique des équations du mouvement réduites aux deux premières en faisant $z = 0$. La période a pour valeur.

$$\frac{2\pi}{n - n'}$$

C'est la solution périodique annoncée.

Avant de passer à l'étude de la seconde approximation, nous allons nous occuper de la convergence des séries formées dans ce chapitre.

CHAPITRE II

14. — Toutes les séries qni ont été formées jusqu'ici dépendent des coefficients $(x\theta^{-1})_{0,h}$ et $(y\theta)_{0,h}$ qui sont eux-mêmes des séries procédant suivant les puissances de m'^2. Avant d'étudier la convergence des séries qui donnent X, Y, X_0, Y_0, nous devons donc chercher si les séries $(x\theta^{-1})_{0,h}$ et $(y\theta)_{0,h}$ sont convergentes.

Si nous nous reportons aux formules (29), nous voyons que nous pouvons écrire, en général :

$$(x\theta^{-1})_{0,2p} = m'^{2p}\, x_{p,2p} + m'^{2p+4}\, x_{p+2,2p} + \dots + m'^{2p+4(q-1)}\, x_{p+2(q-1),2p} \dots$$

$$(y\theta)_{0,2p} = m'^{2p}\, y_{p,2p} + m'^{2p+4}\, y_{q+2,2p} + \dots + m'^{2p+4(q-1)}\, y_{p+2(q-1),2p} \dots$$

et nous voyons qu'il nous suffira d'étudier une de ces séries, la première, par exemple.

Nous voyons que le terme général de cette série a pour valeur :

$$U_q = m'^{2p+4(q-1)}\, x_{p+2(q-1),2p} \ .$$

Nous avons démontré plus haut (Num. 11) que les $x_{i,j}$ sont des fractions rationnelles en m et que les degrés des numérateurs et des dénominateurs sont d'ordre pair. Nous pouvons donc écrire $x_{p+2(q-1),2p}$ sous la forme :

$$x_{p+2(q-1),2p} = \frac{Am^{2h} + Bm^{2h-2} + \dots}{A'm^{2h'} + B'm^{2h'-2'} + \dots}$$

Pour étudier la convergence de la série de terme général U_q nous allons appliquer la règle de Gauchy, car c'est une série numérique, et chercher la limite de $\sqrt[q]{|U_q|}$ lorsque q augmente indéfiniment. Or, on a :

$$|U_q| = m'^{2p+4(q-1)} \left| \frac{Am^{2h} + Bm^{2h-2} + \dots}{A'm^{2h'} + B'm^{2h'-2'} + \dots} \right| \qquad m' > 0$$

Nous pouvons écrire la fraction entre parenthèses sous la forme :

$$|m|^{2h-2h'} \left| \frac{Am^{2h'} + Bm^{2h'-2} + \dots}{A'm^{2h'} + B'm^{2h'-2'} + \dots} \right|$$

de sorte que l'on aura :

$$\sqrt[q]{|U_q|} = m'^{\frac{2p}{q}+4(1-\frac{1}{q})}\, |m|^{\frac{2h-2h'}{q}} \left| \frac{Am^{2h'} + Bm^{2h'-2} + \dots\dots}{A'm^{2h'} + B'm^{2h'-2'} + \dots\dots} \right|^{\frac{1}{q}}$$

Effectuons la division indiquee pour la quantité entre parenthèse, et nous pourrons écrire $\sqrt[q]{|U_q|}$ sous la forme :

$$\sqrt[q]{|U_q|} = m'^{\frac{2p}{q}+4(1-\frac{1}{q})}\, |m|^{\frac{2h-2h'}{q}} \left| \frac{A}{A'} + \varphi(m) \right|^{\frac{1}{q}}$$

$\varphi(m)$ étant une fraction rationnelle en m dont le numérateur a un degré inférieur à celui du dénominateur. Si, maintenant, nous développons la parenthèse par la formule du binome, nous obtiendrons finalement pour $\sqrt[q]{|U_q|}$:

$$\sqrt[q]{|U_q|} = m'^{\frac{2p}{q}+4(1-\frac{1}{q})}\, |m|^{\frac{2h-2h'}{q}} \left| \left(\frac{A}{A'}\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{q}\left(\frac{A}{A'}\right)^{\frac{1}{q}-1} \varphi(m) \dots \right|$$

Faisons croître q indéfiniment, les deux premiers facteurs tendent respectivement vers m'^4 et 1 car $2h - 2h'$ est un nombre fini. Dans la parenthèse, le premier terme tend vers 1 et tous les autres termes tendent vers zéro car ils sont formés d'une partie numérique finie, multipliée par une puissance de $\frac{1}{q}$ qui tend vers zéro. La parenthèse tend donc vers 1 et l'on a, lorsque q augmente indéfiniment :

$$\lim. \sqrt[q]{|U_q|} = m'^4$$

Evaluons m'^4. A l'exception des planètes Troyennes avec Jupiter, pour toutes les autres petites planètes, le paramètre m a une valeur numérique inférieure à 10, de sorte que son carré est inférieur à 100. Comme, d'autre part, la quantité que nous avons appelé ν est donnés par l'égalité :

$$2\nu = \frac{M'}{M_0 + M'}$$

M_0 étant la masse du Soleil et M' celle de la planète troublante, il en résulte que dans le cas le plus défavorable qui est celui de Jupiter, 2ν est au maximum de l'ordre de 10^{-3} et ν de l'ordre de 0,0005, Le produit $\nu m^2 = m'^2$ est donc, au plus, si on prend pour m le nombre 10 et pour ν le nombre 0,00045 qui correspond à Jupiter, égal à :

$$0{,}00045 \times 10^2 = 0{,}045$$

de sorte que la limite de $\sqrt[q]{|U_q|}$ est au plus égale à 0,002025

Il en résulte que la série de terme général $|U_q|$ est convergente de sorte que la série de terme général U_q qui représente le coefficient $(x\theta^{-1})_{0,2p}$ est absolument convergente.

De la même manière on verrait que la série qui représente le coefficient $(x\theta)_{0,2p}$ est absolument convergente, la limite de $\sqrt[q]{|V_q|}$ étant égale elle aussi à m'^4.

Passons aux séries qui représentent X et Y. Nous savons que pour les deux séries, le coefficient de la ligne trigonométrique est $(x\theta^{-1})_{0,2h}$. Or, on peut écrire :

$$(x\theta^{-1})_{0,2h} = m'^{2p}\,[\,x_{p,2h} + m'^4\,x_{p+2,2h} + \dots + m'^{4(q-1)}\,x_{2(q-1),2h} \dots\,]$$

et nous venons de prouver que la série entre parenthèses est absolument convergente Elle a donc une limite finie et on pourra écrire :

$$(x\theta^{-1})_{0,2h} = m'^{2p}\,H$$

de sorte que le terme général de la série qui représente X pourra s'écrire, en valeur absolue :

$$|U_p| = m'^{2p}\,|H|\,|\cos(N + 2hV)| \qquad m' > 0$$

Comme le cos est inférieur à l'unité, il nous suffira d'étudier la série de terme général :

$$|U'_p| = m'^{2p}\,|H|$$

et chercher la limite de $\sqrt[p]{|U'_p|}$ quand p augmente indéfiniment. On voit facilement que l'on a encore :

$$\lim. \sqrt[p]{|U'_p|} = m'^2 \qquad < 1$$

de sorte que la série de terme général U_p est absolument convergente et, comme la série qui représente X est obtenue en multipliant chaque terme de la série U par un cosinus, et que celui ci est, en valeur absolue, inférieur à l'unité, il en résulte que les termes de la série qui représente X sont respectivement inférieurs en valeur absolue aux termes correspondants d'une série numérique absolument convergente. La série qui représente X est donc uniformément convergente. On démontrerait de même la convergence uniforme de la série qui représente Y.

Passons à la solution périodique. Les termes généraux des séries qui représentent X_0 et Y_0 ont respectivement pour expression :

$$U_p = a \left[(x\theta^{-1})_{0,2p} + (y\theta)_{0,2p+2} \right] \cos (2p + 1) V$$
$$V_p = a \left[(x\theta^{-1})_{0,2h} - (y\theta)_{0,2p+2} \right] \sin (2p + 1) V$$

et nous devons étudier la convergence des séries dont les termes généraux sont :

$$U'_p = a \left[(x\theta^{-1})_{0,2p} + (y\theta)_{0,2p+2} \right]$$
$$V'_p = a \left[(x\theta^{-1})_{0,2p} - (y\theta)_{0,2p+2} \right]$$

et nous pouvons étudier une seule série de terme général :

$$W_p = a \left[(x\theta^{-1})_{0,2p} + \varepsilon\, (y\theta)_{0,2p+2} \right]$$

ε étant égal à $+ 1$ pour obtenir U'_p et à $- 1$ pour obtenir V'_p.

Les séries qui représentent les coefficients $(x\theta^{-1})_{0,2h}$ et $(y\theta)_{0,2h}$ étant absolument convergentes, nous pouvons écrire ces coefficients sous la forme :

$$(x\theta^{-1})_{0,2h} = m'^{2h}\, H \qquad\qquad (y\theta)_{0,2h} = m'^{2h}\, H'$$

où H et H′ sont des quantités finies. Le terme général W_p pourra donc être écrit sous la forme :

$$W_p = a m'^{2p} \left[H + \varepsilon m'^2 H' \right]$$

et nous allons chercher la limite de $\sqrt[p]{| W_p |}$ quand p augmente indéfiniment.

Nous pouvons écrire :

$$W_p = a m'^{2p} H \left[1 + \varepsilon m'^2 \frac{H'}{H} \right]$$

et, par suite, nous aurons :

$$\sqrt[p]{| W_p |} = m'^2 \,| aH |^{\frac{1}{p}} \left| 1 + \varepsilon m'^2 \frac{H'}{H} \right|^{\frac{1}{p}}$$

ce qui s'écrit, après avoir développé le dernier facteur par la formule du binome :

$$\sqrt[p]{| W_p |} = m'^2 \,| aH |^{\frac{1}{p}} \left| 1 + \frac{1}{p} \varepsilon m'^2 \frac{H'}{H} + \ldots\ldots \right|$$

Lorsque p augmente indéfiniment, le premier facteur tend vers l'unité. Dans le dernier facteur, tous les termes, à partir du deuxième, sont formés d'un facteur numérique fini multiplié par une puissance de $\frac{1}{p}$ qui tend vers zéro quand p augmente indéfiniment. Tous ces termes tendent donc vers zéro et le dernier facteur tend vers l'unité. On a donc :

$$\lim.\ \sqrt[p]{| W_p |} = m'^2 < 1$$

et la série de terme général W_p est absolument convergente. Il en est de même, par suite des séries de termes généraux U'_p et V'_p. Mais les séries qui représentent X_0 et Y_0 sont obtenues en multipliant U'_p et V'_p respectivement par $\cos (2p + 1)V$ et $\sin (2p + 1)V$ quantités inférieures à l'unité en valeur absolue. Ces séries ont donc leurs termes respectivement inférieurs en valeur absolue aux termes correspondants d'une série numérique absolument convergente. Les séries qui représentent X_0 et Y_0 sons donc uniformément convergentes.

Il nous reste à étudier les séries qui représentent r et v. Prenons r. En examinant les formules (35 ter), nous voyons que la forme générale des coefficients $r_{0,2h}$ est :

$$r_{0,2h} = a\,[\,2\xi_{0,2h} - \,.\,.\,.\,.\,.\,]$$

les termes, à partir du deuxième étant de degré supérieur en m' par rapport au degré du premier terme. Or si nous retournons en arrière, nous voyons que nous avons :

$$2\xi_{0,h} = (x\theta^{-1})_{0,2h} + (y\theta)_{0,2h} \qquad\qquad 2\eta_{0,2h} = (x\theta^{-1})_{0,2h} - (y\theta)_{0,2h}$$

et, comme les séries qui représentent $(x\theta^{-1})_{0,2h}$ et $(y\theta)_{0,2h}$ sont absolument convergentes, nous pouvons écrire, les H et H′ étant des quantités finies :

$$2\,\xi_{0,2h} = m'^{2h}\,(\mathrm{H} + \mathrm{H}')$$
$$2\eta_{0,2h} = m'^{2h}\,(\mathrm{H} - \mathrm{H}')$$

Le coefficient $r_{0,2h}$ pourra donc être écrit sous la forme :

$$r_{0,2h} = a\,[\,m'^{2h}\,(\mathrm{H} - \mathrm{H}') - \,.\,.\,.\,.\,.\,]$$

ou encore sous la forme :

$$r_{0,2h} = am'^{2h}\,(\mathrm{H} - \mathrm{H}')\,[\,1 - \,.\,.\,.\,.\,.\,]$$

Nous allons étudier la limite de $\sqrt[h]{|r_{0,2h}|}$ quand h croît indéfiniment. Nous pouvons écrire :

$$\sqrt[h]{|r_{0,2h}|} = m'^2\,|\,a\,(\,\mathrm{H} + \mathrm{H}'\,)\,|^{\frac{1}{h}}\,|\,1 - \,.\,.\,.\,.\,.\,|^{\frac{1}{h}}$$

ou, après avoir développé le dernier facteur par la formule du binome :

$$\sqrt[h]{|r_{0,2h}|} = m'^2\,|\,a\,(\mathrm{H} + \mathrm{H}')\,|^{\frac{1}{h}}\,|\,1 - \,.\,.\,.\,.\,.\,|$$

tous les termes, dans le dernier facteur, à partir du deuxième, étant le produit d'un facteur numérique fini et d'une puissance de $\frac{1}{h}$. Ces termes tendent donc vers zéro avec $\frac{1}{h}$ et le dernier facteur tend vers 1 quand h augmente indéfiniment. Les deux premiers facteurs tendent vers 1 dans les mêmes conditions et l'on a :

$$\lim.\ \sqrt[h]{|r_{0,2h}|} = m'^2 < 1$$

La série formée par les coefficients des cosinus dans le développement de r est donc absolument convergente. Mais le développement de r est obtenu en multipliant chaque terme de la série précédente par un cosinus, quantité, en valeur absolue, inférieure à 1. La série qui représente r est donc uniformément convergente.

On démontrerait de même la convergence uniforme de la série qui représente v. Le raisonnement est le même que pour r et il suffit de prendre $\eta_{0,2h}$ au lieu de $\xi_{0,2h}$. Les $l_{0,2h}$ ont la même forme générale que les $r_{0,2h}$ $\xi_{0,2h}$ étant remplacé par $\eta_{0,2h}$. On trouve :

$$\lim.\ \sqrt[h]{|l_{0,2h}|} = m'^2 < 1$$

CHAPITRE III

15. — Nous nous sommes occupés seulement jusqu'ici de la première approximation, c'est-à-dire de calculer une solution dans laquelle nous avons négligé la fonction F et la troisième coordonnée. Nous allons nous occuper maintenant des approximations suivantes. Nous ne nous occuperons plus des coordonnées X_1, Y_1, et nous partirons de la solution périodique obtenue que nous affecterons de l'indice zéro, tant pour les coordonnées rectangulaires que pour les coordonnées polaires et les variables complexes x et y.

Nous appellerons δx et δy les acroissements que subissent x_0 et y_0 quand on rétablit la troisième coordonnée z dans les équations.

Nous partirons du système d'équations (16) et nous substituerons à x et y les quantités :

$$x = x_0 + \delta x \qquad y = y_0 + \delta y$$

Nous remarquerons d'abord que $\rho^3 x$, $\rho^3 y$, $\rho^3 z$, dépendent de z par la fonction ρ. Nous ne connaissons que la valeur particulière ρ_0 de ρ trouvée au chapitre premier. Nous tournerons la difficulté en développant les trois fonctions $\rho^3 x$, $\rho^3 y$, $\rho^3 z$, suivant les puissances de δx, δy, z, en nous rappelant que :

$$\rho_0 = (x_0 y_0)^{-\frac{1}{2}}$$

Nous conserverons dans le premier membre de chacune des équations (16) les termes du premier degré en δx, δy, z, et nous ferons passer au second membre les autres termes. Nous désignerons par U, V, Z les deuxièmes membres formés et, après avoir tenu compte des équations (18), nous obtiendrons pour déterminer δx, δy, z le système d'équations.

$$(40)\quad \left\{ \begin{aligned} & D^2\delta x + 2mD\delta x + (1-2\nu)\, m^2 x + \left[\frac{1}{2} K\rho^3_0 + 3\nu m^2 \right] \delta x + \left[\frac{3}{2} K\rho^5_0\, x^2_0 + 3\nu m^2 \right] \delta y = U \\ & D^2\delta y - 2mD\delta y + (1-2\nu)\, m^2 y + \left[\frac{1}{2} K\rho^3_0 + 3\nu m^2 \right] \delta y + \left[\frac{3}{2} K\rho^5_0\, y^2_0 + 3\nu m^2 \right] \delta x = V \end{aligned} \right.$$

$$(41)\qquad D^2 z - \left[K\rho^3_0 + 2\nu m^2 \right] z = Z$$

où U, V, Z, ont les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} & U = -2\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{3}{2} K\rho^5_0 \left[x_0\, \delta x \delta y + y_0\, \delta x^2 \right] + \frac{3}{2} K\rho^5_0 \left[x_0\, \delta x \delta y - x_0\, z^2 \right] \quad \ldots\ldots \\ & V = -2\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{3}{2} K\rho^5_0 \left[y_0\, \delta x \delta y + x_0\, \delta y^2 \right] + \frac{3}{2} K\rho^5_0 \left[y_0\, \delta x \delta y + y_0\, z^2 \right] \quad \ldots\ldots \\ & Z = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{3}{2} K\rho^5_0 \left[y_0\, z\delta x + x_0\, z\delta y \right] \quad \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Si, maintenant, nous ajoutons membre à membre les équations (40) après les avoir multipliées respectivement par Dy_0 et Dx_0, et si nous tenons compte des équations (18) dont les premiers membres auront été préalablement différentiés, puis, si nous intégrons les deux membres de la combinaison trouvée, nous obtiendrons ce que devient l'intégrale (19) quand on introduit δx et δy. Nous aurons ainsi :

$$(42)\qquad Dy_0\, D\delta x + Dx_0\, D\delta y - \left[D^2 y_0 - 2mDy_0 \right] \delta x - \left[D^2 x_0 + 2mDx_0 \right] \delta y = J$$

avec :

$$DJ = UDy_0 + VDx_0$$

L'expression précédente peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} & Dy_0\, D\delta x + Dx_0\, D\delta y - [\, K\rho^3{}_0\, y_0 - (1 - 2\nu)\, m^2 y_0 - 3\nu m^2\, (x_0 + y_0)\,]\, \delta x \\ & \qquad - [\, K\rho^3{}_0\, x_0 - (1 - 2\nu)\, m^2 x_0 - 3\nu m^2\, (x_0 + y_0)\,]\, \delta y = J \end{aligned} \right.$$

16. — Remarquons que les équations (40), si l'on y néglige les seconds membres, sont les équations aux variations des deux premières équations (16) et, de même, si l'on néglige J , l'équation (42) est l'équation aux variations de l'intégrale (19).

Nous savons que ces équations aux variations sont satisfaites si l'on prend pour δx et δy les valeurs :

$$\delta x = Dx_0 \qquad \delta y = Dy_0$$

et nous allons essayer d'obtenir la solution des équations (40) et (41), auxquelles nous ajouterons l'équation (42), en prenant pour δx et δy des valeurs de la forme ;

$$\delta x = x_1\, Dx_0 \qquad \delta y = -\, y_1\, Dy_0$$

x_1 et y_1 étant deux nouvelles variables conjuguées comme δx et δy .

Effectuant la substitution indiquée dans les premiers membres des équations (40) et (42), et tenant compte des équations (18) dont les premiers membres auront été différentiés préalablement, nous obtiendrons les équations suivantes dans lesquelles nous voyons apparaître les combinaisons $x_1 + y_1$ et $x_1 - y_1$:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} & Dx_0\, D^2 x_1 + 2\,[\, D^2 x_0 + m Dx_0\,]\, Dx_1 + (x_1 + y_1)\,[\, D^3 x_0 + 2m D^2\, x_0 + (1 - 2\nu)\, m^2 Dx_0 + [\, \tfrac{1}{2}\, K\rho^3{}_0 + 3\nu m^2\,]\, Dx_0\,] = U \\ & Dy_0\, D^2 y_1 + 2\,[\, D^2 y_0 - m Dy_0\,]\, Dy_1 + (x_1 + y_1)\,[\, D^3 y_0 - 2m D^2\, y_0 + (1 - 2\nu)\, m^2 Dy_0 + [\, \tfrac{1}{2}\, K\rho^3{}_0 + 3\nu m^2\,]\, Dy_0\,] = -\, V \end{aligned} \right.$$

$$(45) \qquad Dx_0\, Dy_0\, D\,(x_1 - y_1) + (x_1 + y_1)\,[\, Dy_0\, D^2\, x_0 - Dx_0\, D^2\, y_0 + 2m Dx_0\, Dy_0\,] = J$$

Les combinaisons $x_1 + y_1$, $x_1 - y_1$, qui apparaissent mêlées aux dérivées de x_1 et de y_1 , nous induisent à transformer les équations (44) de telle sorte quelles ne contiennent plus que ces combinaisons. Pour obtenir ce résultat, nous les ajouterons membre à membre après les avoir multipliées respectivement par Dy_0 et Dx_0 . Nous obtiendrons ainsi l'équation :

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} & Dx_0\, Dy_0\, D^2\,(x_1 + y_1) + [\, Dy_0\, D^2 x_0 + Dx_0\, D^2\, y_0\,]\, D\,(x_1 + y_1) + [\, Dy_0\, D^2\, x_0 - Dx_0\, D^2\, y_0 + 2m\, Dx_0\, Dy_0\,]\, D\,(x_1 - y_1) + \\ & \quad (x_1 + y_1)\,[\, Dy_0\, D^3 x_0 + Dx_0\, D^3\, y_0 + 2m\,[\, Dy_0\, D^2 x_0 - Dx_0\, D^2 y_0\,] + Dx_0\, Dy_0\,[\, K\rho^3{}_0 + 2m^2 + 2\nu m^2\,]\,] = U Dy_0 - V Dx_0 \end{aligned} \right.$$

que nous conserverons avec l'équation (45).

Il s'agit de transformer à nouveau les équations (45) et (46) pour les simplifier le plus possible. Nous poserons pour cela :

$$(47) \qquad x_1 = a' + b \qquad y_1 = a' - b$$

a' et b étant deux nouvelles variables conjuguées comme x_1 et y_1 .

L'examen des équations (45) et (46) nous conduit à poser :

$$P = \frac{1}{2} \left[\frac{D^2 x_0}{Dx_0} - \frac{D^2 y_0}{Dy_0} \right] + m \qquad Q = \frac{1}{2} \left[\frac{D^2 x_0}{Dx} - \frac{D^2 y_0}{Dy} \right]$$

Nous tirerons facilement de là :

$$\frac{D^3 x_0}{Dx_0} + \frac{D^3 y_0}{Dy_0} = 2DQ + 2Q^2 + 2(P - m)^2$$

Après avoir divisé les deux membres des équations (45) et (46) par $Dx_0\, Dy_0$ et si nous tenons compte des valeurs de P et Q, elles deviennent, après avoir opéré la substitution (47) :

$$D^2 a' + 2QDa' + 2PDb + a' [\, 2DQ + 2Q^2 + 2P^2 + K\rho_0{}^3 + 2m^2 + 2\nu m^2 \,] = \frac{1}{2}\left[\frac{U}{Dx_0} - \frac{V}{Dy_0}\right]$$

$$Db + 2Pa' = \frac{J}{2Dx_0\, Dy_0}$$

Eliminons b de la première équation au moyen de la seconde et posons :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{-\,2Dx_0\, Dy_0}}$$

égalité qui nous donne par dérivation :

$$Q = -\frac{D\Delta}{\Delta} \qquad\qquad DQ = -\frac{D^2\Delta}{\Delta} + \frac{(D\Delta)^2}{\Delta^2}$$

nous pourrons écrire les équations sous la forme :

$$D^2 a' + 2QDa' + a' [\, 2DQ + 2Q^2 - 2P^2 + K\rho_0{}^3 + 2m^2 + 2\nu m^2 \,] = \frac{1}{2}\left[\frac{U}{Dx_0} - \frac{V}{Dy_0}\right] + JP\Delta^2 \tag{48}$$

$$Db + 2Pa' = -\frac{1}{2}J\Delta^2 \tag{49}$$

Si, maintenant, nous remarquons que l'on a :

$$\Delta . D\frac{a'}{\Delta} = D^2 a' + 2QDa' + a'DQ + a'Q^2$$

et si nous posons :

$$a' = a''\Delta$$

nous voyons que l'équation dont dépend a' peut s'écrire sous la forme :

$$D^2 a'' + a'' [\, DQ + Q^2 - 2P^2 + K\rho_0{}^3 + 2m^2 + 2\nu m^2 \,] = \frac{1}{2}\left[U\sqrt{\frac{-\,Dy_0}{Dx_0}} - V\sqrt{\frac{-\,Dx_0}{Dy_0}}\right] + JP\Delta$$

et l'équation dont dépend b devient, dans les mêmes conditions :

$$Db = -\,2P\Delta a'' - \frac{1}{2}J\Delta^2$$

Enfin, si nous posons :

$$\left\{\begin{aligned} W &= 2P^2 - Q^2 - DQ - (K\rho_0{}^3 + 2m^2 + 2\nu m^2) \\ B &= -\,2P\Delta a'' - \frac{1}{2}J\Delta^2 \\ \Xi &= \frac{1}{2}\left[U\sqrt{\frac{-\,Dy_0}{Dx_0}} - V\sqrt{\frac{-\,Dx_0}{Dy_0}}\right] + JP\Delta \end{aligned}\right.$$

nous voyons que les équations (40) ont été transformées en les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} D^2 a'' - Wa'' &= \Xi \\ Db &= B \end{aligned}\right.$$

de sorte que la solution du système formé par les équations (40) et (41) est ramenée à la solution du système :

$$\left\{\begin{aligned} D^2 a'' - Wa'' &= \Xi \\ Db &= B \\ D^2 z - [\, K\rho_0{}^3 + 2\nu m^2 \,]\, z &= Z \end{aligned}\right. \tag{50}$$

On voit que la première et la troisième équation sont du même type, linéaires du second ordre, et qu'elles ne contiennent chacune, au premier membre, qu'une seule fonction inconnue. La deuxième est linéaire et du premier ordre, mais son second membre dépend de a''. On ne pourra donc l'intégrer qu'après la première.

Supposons intégré le système (50). Connaissant a'' et b, nous aurons pour x_1 et y_1 :

$$(51) \qquad x_1 = a' + b = a''\Delta + b \qquad\qquad y_1 = a' - b = a''\Delta - b \quad ,$$

Or, nous avons écrit :

$$x\theta^{-1} = \xi + \eta \qquad\qquad y\theta = \xi - \eta$$

et nous savons que :

$$x = x_0 + \delta x \qquad\qquad y = y_0 + \delta y$$

nous voyons donc facilement que nous pouvons écrire aussi :

$$\theta^{-1}\delta x = \delta\xi + \delta\eta \qquad\qquad \theta\delta y = \delta\xi - \delta\eta$$

équations qui nous donneront :

$$2\delta\xi = \theta^{-1}\delta x + \theta\delta y \qquad\qquad 2\delta\eta = \theta^{-1}\delta x - \theta\delta y$$

Mais

$$\delta x = x_1 \, Dx_0 \qquad\qquad \delta y = y_1 \, Dy_0 \quad ,$$

par suite, les équations (51) peuvent être écrites sous la forme :

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= (a''\Delta + b)\, Dx_0 = a'' \sqrt{\frac{-Dx_0}{Dy_0}} + bDx_0 \\ \delta y &= -(a''\Delta - b)\, Dy_0 = a'' \sqrt{\frac{-Dy_0}{Dx_0}} + bDy_0 \end{aligned} \right.$$

Nous obtiendrons enfin $\delta\xi$ et $\delta\eta$ sous la forme :

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\delta\xi &= a'' \left[\theta^{-1} \sqrt{\frac{-Dx_0}{Dy_0}} + \theta \sqrt{\frac{-Dy_0}{Dx_0}} \right] + b\,[\theta^{-1}Dx_0 + \theta Dy_0] \\ 2\delta\eta &= a'' \left[\theta^{-1} \sqrt{-\frac{Dx_0}{Dy_0}} - \theta \sqrt{\frac{-Dy_0}{Dx_0}} \right] + b\,[\theta^{-1}Dx_0 - \theta Dy_0] \end{aligned} \right.$$

L'inspection de ces formules nous conduit à poser

$$\theta^{-1}Dx_0 = u + v \qquad\qquad \theta Dy_0 = u - v$$

et remarquant que :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{-2\, Dx_0\, Dy_0}}$$

nous obtiendrons enfin pour $\delta\xi$ et $\delta\eta$ les formules très simples :

$$(54) \qquad \delta\xi = (a''\Delta)\, u + bv \qquad\qquad \delta\eta = (a''\Delta)\, v + bu$$

17. — Nous allons passer maintenant à l'intégration du système (50).

Comme la première et la troisième des équations (50) sont du même type, nous ferons l'intégration pour une équation générale de ce type :

$$(55) \qquad D^2\sigma - \varphi(T)\,\sigma = \Phi$$

et l'intégrale générale obtenue, nous passerons à celles des équations données en faisant successivement :

$$\varphi(T) = W \qquad \Phi = \Xi$$

$$\varphi(T) = K\rho^3_0 + 2\nu m^2 \qquad \Phi = Z$$

Dans les deux cas, la fonction φ est périodique et peut être développée en série trigonométrique procédant suivant les cosinus des multiples pairs de V .

L'équation sans second membre est donc une équation linéaire à coefficients périodiques. On sait que son intégrale générale une fois obtenue, l'intégrale générale de l'équation avec second membre pourra se calculer facilement par quadratures. D'autre part, la théorie des équations linéaires à coefficients périodiques nous montre que, si l'on désigne une solution particulière de l'équation par :

$$\sigma_1 = \theta^{a_0} \Sigma m_{1,k} \theta^k \qquad (\theta = e^{i(N-N')})$$

on obtiendra une autre solution particulière en prenant :

$$\sigma_2 = \theta^{-a_0} \Sigma m_{2,k} \theta^k$$

la série étant conjuguée de la première, c'est-à-dire que l'on a :

$$m_{2,k} = m_{1,-k}$$

Les solutions particulières σ_1 et σ_2 étant formées, la solution générale aura pour expression :

$$\sigma = C_1\sigma_1 + C_2\sigma_2$$

Nous obtiendrons alors la solution générale de l'équation avec second membre en appliquant la méthode de Lagrange, c'est-à-dire en résolvant le système :

$$\sigma_1 DC_1 + \sigma_2 DC_2 = 0$$

$$D\sigma_1 DC_1 + D\sigma_2 DC_2 = \Phi$$

Or, si on se rappelle que le déterminant du système :

$$c = \sigma_2 D \sigma_1 - \sigma_1 D \sigma_2$$

est constant, on obtiendra :

$$cDC_1 = \sigma_2\Phi \qquad cDC_2 = -\sigma_1\Phi$$

Intégrant et remplaçant C_1 et C_2 par les valeurs trouvées dans l'expression donnée plus haut de l'intégrale générale, nous obtiendrons, pour l'équation complète, l'intégrale générale :

$$(56) \qquad \sigma = \frac{\sigma_1}{c} D^{-1} (\sigma_2\Phi) - \frac{\sigma_2}{c} D^{-1} (\sigma_1\Phi)$$

le symbole D^{-1} représentant l'intégration. Nous utiliserons plus tard cette formule.

Pour intégrer l'équation (55) nous utiliserons la méthode des coefficients indéterminés. Soit :

$$\sigma = \theta^{a_0} \Sigma m_{1,k} \theta^k$$

une solution. Comme φ (T) est périodique, cette fonction peut être représentée par le développement :

$$\varphi(T) = \Sigma \varphi_k \theta^k$$

Substituons ces deux séries dans l'équation (55) sans second membre et annulons les coefficients des diverses puissances de θ . Si nous posons :

$$n_k = (a_0 + k)^2 - \varphi_0$$

en sorte que :

$$n_0 = a_0^2 - \varphi_0 \qquad n_k = k^2 + 2ka_0 + n_0$$

les relations obtenues prendrons la forme :

$$(57) \qquad n_k m_{1,k} = \Sigma m_{1,j} \varphi_i \qquad i + j = k , i \neq 0$$

D'après la définition des n_k, on voit que tout revient à calculer n_0, ce qui permettra aussi le calcul de a_0.

Remarquons que si l'on fait $k = 0$, les séries se réduisent chacune à son premier terme et que l'on obtient ainsi :

$$n_0 = 0$$

Ceci fait la relation

$$n_0 = a^2_0 - \varphi_0$$

donne une première valeur approchée de a_0 :

$$a_0 = \sqrt{\varphi_0}$$

et l'on se rappelle que φ_0 est développé suivant les puissances de νm^2. En transportant cette série dans l'équation de définition des n_k, on verra aisément que ces quantités se présentent sous forme de séries procédant suivant les puissances de νm^2 et dont le terme indépendant de νm^2 n'est pas nul.

Remarquons maintenant que pour $\nu m^2 = 0$, les solutions σ_1 et σ_2 de l'équation sans second membre doivent se réduire respectivement à θ et θ^{-1}. Cela indique que l'on devra trouver pour a_0 une valeur voisine de l'unité, mais il faudra pour cela que les rapports :

$$\frac{m_{1,k}}{m_{1,0}}$$

s'annulent avec νm^2. Comme le coefficient $m_{1,0}$ est arbitraire, nous prendrons :

$$m_{1,0} = 1$$

Faisons maintenant $k = 0$ dans la formule (57), nous obtiendrons : (car $\varphi_{-j} = \varphi_j$)

$$n_0 = \Sigma\, m_{1,j}\, \varphi_j\,,$$

remplaçons $m_{1,j}$ par sa valeur tirée de la même formule (57) :

$$m_{1,j} = \frac{1}{n_j} \sum m_{1,j-j'}\, \varphi_{j'}\,,$$

nous obtiendrons pour n_0 :

$$n_0 = \sum \frac{\varphi_j\ \varphi_{j'}}{n_j}\, m_{1,j-j'}\,.$$

Remplaçons dans cetre dernière formule, dans tous les termes dont l'indice $j - j'$ n'est pas nul, $m_{1,j-j'}$ par sa valeur tirée de la formule (57) :

$$m_{1,j-j'} = \frac{1}{n_{j-j'}} \sum m_{1,j-j'-j''}\, \varphi_{j''}$$

et ainsi de suite, nous obtiendrons enfin pour déterminer n_0 l'équation :

$$n_0 = \sum \frac{\varphi_j\ \varphi_j}{n_j} + \sum \frac{\varphi_j\ \varphi_{j'}\ \varphi_{j''}}{n_j\ n_{j-j'}} + \ldots\ldots \tag{58}$$

dans laquelle, pour chaque groupe, la somme $j - j' - j'' - \ldots$ sera nulle sans qu'aucune des précédentes le soit, le nombre des facteurs de chaque dénominateur étant inférieur d'une unité au nombre des facteurs du numérateur correspondant.

Le calcul de n_0 montre qu'il suffit d'obtenir le premier terme de cette formule, et nous l'écrirons sous la forme :

$$n_0 = \varphi^2_2 \left[\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_{-2}}\right] + \varphi'_2 \tag{59}$$

qui nous permettra de passer au calcul effectif de n_0.

La formule (59) peut être écrite sous la forme :

$$(60) \qquad n_0 = \varphi^2_2 \frac{n_{-2} + n_2}{n_2\, n_{-2}} + \varphi'_2 \quad ,$$

or on a :

$$n_2 = 4 + 4a_0 + n_0 \qquad\qquad n_{-2} = 4 - 4a_0 + n_0$$

et ceci permet d'obtenir :

$$n_2 + n_{-2} = 8 + 2n_0$$

$$n_2 n_{-2} = (4 + n_0)^2 - 16a_0{}^2 = (4 + n_0)^2 - 16\,(n_0 + \varphi_0)^2$$

Si nous portons ces expressions dans la formule (60), nous obtiendrons, pour déterminer n_0, l'équation :

$$(61) \qquad 8n^2_0 + 2n_0\,(8\varphi_0 - 8 + \varphi^2_2) + 8\varphi^2_2 + n_2 n_{-2}\,\varphi'_2 - n^3_0 = 0$$

En posant :

$$A = \varphi_0 - 1 + \frac{\varphi^2_2}{8} \qquad\qquad B = \sqrt{A - \varphi^2_2} \qquad\qquad C = \frac{1}{16}\,(n_2 n_{-2}\,\varphi'_2 - n^3_0)$$

nous obtiendrons enfin pour n_0 la valeur :

$$n_0 = -A + \sqrt{B^2 - 2C}$$

Enfin, si nous développons le radical suivant les puissances de $\frac{C}{B}$ et si nous remplaçons $B - A$ par :

$$\frac{B^2 - A^2}{B + A} = -\frac{\varphi^2_2}{B+A} \quad ,$$

nous obtiendrons pour n_0 la série :

$$(62) \qquad n_0 = -\frac{\varphi^2_2}{B+A} - \frac{C}{B^2} - \frac{1}{2}\frac{C^2}{B^3} \quad \cdots\cdots$$

Connaissant n_0 nous obtiendrons a_0 au moyen de la relation :

$$n_0 = a^2_0 - \varphi_0$$

Le calcul de n_0 s'effectuera de la façon suivante : on connaît les φ_i, on pourra donc calculer A et B et une première valeur approchée de n_0 par la formule :

$$n = -\frac{\varphi^2_2}{A+B}$$

On calculera ensuite les n_k d'une façon approchée en prenant :

$$n_2 = 4 + 4a_0 \qquad\qquad n_{-2} = 4 - 4a_0$$

et la formule (60) donnera une première valeur approchée de φ'_2 qui, jointe aux valeurs approchées de n_2, n_{-2}, n_0, permettra de calculer une valeur approchée de C avec laquelle on calculera une valeur meilleure de n_0, On recommencera, avec cette nouvelle valeur de n_0 le calcul des n_k, de φ'_2, de C et on obtiendra une deuxième valeur approchée de n_0, et ainsi de suite. Dans la pratique, il suffira presque toujours de prendre pour n_0 la valeur :

$$n_0 = -\frac{\varphi^2_2}{A+B}$$

Revenons aux définitions de P, Q, Δ, u, v, nous obtiendrons de suite les formules commodes :

$$(63) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P = 1 + m + \frac{1}{2}\,\mathrm{DLog}\,\frac{u+v}{u-v} \\ Q = \frac{1}{2}\,\mathrm{DLog}\,(u^2 - v^2) \\ \Delta^2 = (u^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Pour calculer effectivement ces fonctions, nous nous reporterons aux équations de définition et aux séries trouvées aux chapitres précédents pour $x_0\theta^{-1}$ et $y_0\theta$. Comme on a

$$x_0\theta^{-1} = \xi_0 + \eta_0 \qquad\qquad y_0\theta = \xi_0 - \eta_0$$

il en résultera :

$$\theta\,(u + v) = \theta\,(\xi_0 + \eta_0 + D\xi_0 + D\eta_0)$$

$$\theta^{-1}\,(u - v) = \theta^{-1}\,(\xi_0 - \eta_0 + D\xi_0 - D\eta_0)$$

et on déduira de là u et v sous la forme :

$$u = \xi_0 + D\eta_0 \qquad\qquad v = \eta_0 + D\xi_0$$

Si l'on se rappelle que :

$$\xi_0 = \Sigma\xi_{0,k}\,\theta^k \qquad \eta_0 = \Sigma\eta_{0,k}\,\theta^k \qquad \xi_{0,0} = 1 \qquad \eta_{0,0} = 0$$

et si l'on pose :

$$u = \Sigma\, u_k\,\theta^k \qquad\qquad v = \Sigma\, v_k\,\theta^k$$

on obtiendra :

$$u_k = \xi_{0,k} + k\eta_{0,k} \qquad\qquad v_k = \eta_{0,k} + k\xi_{0,k} \tag{64}$$

et, comme on sait que :

$$\xi_{0,-k} = \xi_{0,k} \qquad\qquad \eta_{0,-k} = -\eta_{0,k}$$

on aura :

$$u_{-k} = u_k \qquad\qquad v_{-k} = -v_k$$

avec :

$$u_0 = 1 \qquad\qquad v_0 = 0$$

et ceci montre que u est réel et v imaginaire pur.

Les formules (63) nous permettront de former les développements de P , Q , Δ ; il suffira pour cela de former les combinaisons $u + v$, $u - v$, $u^2 - v^2$. Comme les deux premières ont un terme égal à l'unité, il sera possible de développer les log en série au moyen des formules connues, puis d'utiliser la formule du binome. On aura ainsi P,Q,Δ . Il sera ensuite aisé d'obtenir P^2 , Q^2 , Δ^2 , DQ , $K\rho_0^3 + 2\nu m^2$, $P\Delta$, $u\Delta$, $v\Delta$, W . Nous donnerons ces développements plus loin.

Pour intégrer la première et la troisième des équations (50) sans second membre, nous ferons successivement dans les formules obtenues :

$$a_0 = g_0 \qquad \varphi = W \qquad m_{1,k} = a''_{1,k} \qquad m_{1,0} = a''_{1,0} = 1$$

$$a_0 = h_0 \qquad \varphi = K\rho_0^3 + 2\nu m^2 \qquad m_{1,k} = c_{1,k} \qquad m_{1,0} = c_{1,0} = 1$$

et les $a''_{1,k}$ et $c_{1,k}$ s'obtiendront facilement. Nous calculerons ensuite les constantes :

$$c = \sigma_1 D\sigma_2 - \sigma_2 - D\sigma_1$$

en faisant successivement dans cette formule :

$$\sigma_1 = \theta^{g_0}\Sigma a''_{1,k}\theta_k \qquad\qquad \sigma_1 = \theta^{h_0}\Sigma c_{1,k}\theta_k$$

et nous obtiendrons :

$$a' = 2\Sigma\,(g_0 + k)^2\, a''^2_{1,k} \qquad\qquad c = 2\Sigma\,(h_0 + k)^2\, c^2_{1,k}$$

Passons à l'équation $\qquad Db = B$

et cherchons-en une solution particulière. Comme, pour les autres équations, les seconds membres ont été négligés, nous laisserons de côté ici le deuxième terme du second membre qui contient J , et conserverons seulement le terme $-2P\Delta a''$.

Si nous posons : $\qquad a'' = a''_1 \qquad b = b_1 = D^{-1}\,(-2P\Delta a''_1)$

nous aurons une solution particulière et nous pourrons calculer une solution particulière des équations (40) et (42) privées de second membre : δx_1 , δy_1 , $\delta\xi_1$, $\delta\eta_1$; b_1 , $\delta\xi_1$, $\delta\eta_1$, étant de même forme que a''_1 . On aura une deuxième solution particulière en prenant :

$$a' = a''_2 \qquad\qquad b = b_2 = D^{-1}(-2P\Delta a''_2)$$

qui donnera δx_2 , δy_2 , $\delta\xi_2$, $\delta\eta_2$, où a''_2 , $\delta\xi_2$, seront conjugués de a''_1 , $\delta\xi_1$, et b_2 , $\delta\eta_2$, seront les conjugués changés de signe de b_1 , $\delta\eta_1$.

Pour calculer effectivement b_1 et b_2 , nous poserons :

$$b_1 = \theta^{g_0}\,\Sigma\, b_{1,k}\,\theta^k \qquad\qquad b_2 = \theta^{g_0}\,\Sigma b_{2,k}\,\theta^k$$

et, à l'aide des séries $P\Delta$ et a''_1 ou a''_2 , nous formerons la fonction $-2P\Delta a''$, puis, substituant dans l'équation $Db = B$ et égalant aux deux membres les coefficients de même puissances de θ , nous obtiendrons les coefficients $b_{1,k}$ ou $b_{2,k}$

Pour calculer $\delta\xi_1$ et $\delta\eta_1$ on se rappellera que :

$$(54) \qquad \delta\xi = (u\Delta)\,a'' + bv \qquad\qquad \delta\eta = (v\Delta)\,a'' + bu$$

et on posera :

$$\delta\xi_1 = \theta^{g_0}\,\Sigma\mu_{1,k}\,\theta^k \qquad\qquad \delta\eta_1 = \theta^{g_0}\,\Sigma\nu_{1,k}\,\theta_k$$

Transportant ces valeurs de $\delta\xi_1$ et $\delta\eta_1$ dans les équations (54) ainsi que les développements trouvés pour $(u\Delta)$, $(v\Delta)$, u , v , a''_1 , b_1 , et égalant aux deux membres les coefficients des mêmes puissances de θ , nous trouverons les coefficients $\mu_{1,k}$ et $\nu_{1,k}$ sous la forme :

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned}
\mu_{1,0} &= a''_{1,0}\,(u\Delta)_0 + [\,a''_{1,2} + a''_{1,-2}\,]\,(u\Delta)_2 + [\,a''_{1,4} + a''_{1,-4}\,]\,(u\Delta)_4 \;.\,.\,.\,.\,. \\
&\qquad + v_2\,[\,b_{1,-2} - b_{1,2}\,] + v_4\,[b_{1,-4} - b_{1,4}\,] \;.\,.\,.\,.\,. \\
\mu_{1,-k} &= a''_{1,0}\,(u\Delta)_k + a''_{1,2}\,(u\Delta)_{k-2} + \ldots\ldots\ldots + a''_{1,k}\,(u\Delta)_0 + \\
&\qquad + b_{1,0}\,v_k + b_{1,2}\,v_{k-2} + \ldots\ldots + b_{1,k-2}\,v_2 \\
\mu_{1,k} &= a''_{1,0}\,(u\Delta)_k + a''_{1,2}\,(u\Delta)_2 + \ldots\ldots\ldots + a''_{1,-k}\,(u\Delta_0) + \\
&\qquad - b_{1,0}\,v_k - b_{1,-2}\,v_{k-2} - \ldots\ldots - b_{1,-(k-2)}\,v_2 \\
\nu_{1,0} &= [\,a''_{1,-2} - a''_{1,2}\,]\,(v\Delta)_2 + [\,a''_{1,-4} - a''_{1,4}\,]\,(v\Delta)_4 \;.\,.\,.\,.\,. \\
&\qquad + b_{1,0} + [\,b_{1,2} + b_{1,-2}\,]\,u_2 + [\,b_{1,4} + b_{1,-4}\,]\,u_4 \;.\,.\,.\,.\,. \\
\nu_{1,-k} &= a''_{1,0}\,(v\Delta)_k + a''_{1,2}\,(v\Delta)_{k-2} + \ldots\ldots + a''_{1,k-2}\,(v\Delta)_2 \\
&\qquad + b_{1,k} + b_{1,k-2}\,u_2 + \ldots\ldots + b_{1,0}\,u_k \\
\nu_{1,k} &= -\,a''_{1,0}\,(v\Delta)_k - a''_{1,-2}\,(v\Delta)_{k-2} - \ldots\ldots - a''_{1,-(k-2)}\,(v\Delta)_2 \\
&\qquad + b_{1,-k} + b_{1,-(k-2)}\,u_2 + \ldots\ldots + b_{1,0}\,u_k
\end{aligned}\right.$$

Ayant obtenu a''_1 , b_1 , $\delta\xi_1$, $\delta\eta_1$, nous pourrons calculer a''_2 , b_2 , $\delta\xi_2$, $\delta\eta_2$; a''_2 , $\delta\eta_2$, étant, comme on sait, les conjugués de a''_1 , $\delta\xi_1$, et b_2 , $\delta\xi_2$, les conjugués changés de signe de b_1 , $\delta\eta_1$. Nous aurons donc :

$$a''_{2,k} = a''_{1,-k} \qquad\qquad \delta\xi_{2,k} = \delta\xi_{1,-k}$$
$$b_{2,k} = b_{1,-k} \qquad\qquad \delta\eta_{2,k} = -\,\delta\eta_{1,-k}$$

18. — Nous pouvons aborder la rechercher des intégrales générales des équations (50) avec seconds membres et, pour cela, il faut tenir compte des fonctions U , V , Z et J . Or, d'après la manière dont elles ont été formées, ces fonctions sont du second degré au moins par rapport à δx , δy , z ; δx , δy sont petits et z , dans la plupart des cas, est petit également, de sorte que dans la détermination de la partie principale des inconnues, les fonctions U , V , Z , J pourront êtres supposées nulles.

Prenons la première équation (50). Au lieu de chercher son intégrale générale, nous allons chercher directement les fonctions $\delta\xi$ et $\delta\eta$ qui lui correspondent.

Nous avons d'abord : $x\theta^{-1} = \xi + \eta$ $\qquad y\theta = \xi - \eta$

ce qui donne :
$$\delta(x\theta^{-1}) = \delta\xi + \delta\eta \qquad \delta(y\theta) = \delta\xi - \delta\eta$$

D'autre part, nous avons :
$$a'' = C_1 a''_1 + C_2 a''_2 \qquad b = C_1 b_1 + C_2 b_2$$

et les relatisns (54) :
$$\delta\xi = (u\Delta)\, a'' + bv \qquad \delta\eta = (v\Delta)\, a'' + bu$$

Transportant dans ces dernières formules les valeurs des intégrales a'' et b, nous pourrons écrire :
$$\delta\xi = C_1\, \delta\xi_1 + C_2\, \delta\xi_2 \qquad \delta\eta = C_1\, \delta\eta_1 + C_2\, \delta\eta_2$$

où C_1 et C_2 désignent deux constantes arbitraires et où on a posé :
$$\begin{cases} \delta\xi_1 = (u\Delta)\, a''_1 + b_1\, v \\ \delta\eta_1 = (v\Delta)\, a''_1 + b_1\, u \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta\xi_2 = (u\Delta)\, a''_2 + b_2\, v \\ \delta\eta_2 = (v\Delta)\, a''_2 + b_2\, b \end{cases}$$

Remplaçons alors C_1 et C_2 par deux nouvelles constantes ε et φ_0 liées à elles par les équations :
$$C_1 = \frac{\varepsilon\omega}{2}\, e^{-i\varphi_0} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon\omega}{2}\, e^{i\varphi_0}$$

et rappelons-nous que l'on a :
$$\begin{cases} \delta\xi_1 = \theta^{g_0}\, \Sigma\, \mu_{1,k}\, \theta^k \\ \delta\eta_1 = \theta^{g_0}\, \Sigma\, \nu_{1,k}\, \theta_k \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta\xi_2 = \theta^{-g_0}\, \Sigma\, \mu_{-1,k}\, \theta^k \\ \delta\eta_2 = \theta^{\,g_0}\, \Sigma\, \nu_{-1,k}\, \theta^k \end{cases}$$

Si nous faisons :
$$G_0 = g_0\, V - \varphi_0$$

puis :
$$(64^{\text{bis}}) \qquad \begin{matrix} \delta\xi_{1,k} = \omega\mu_{1,k} & \delta\xi_{-1,k} = \omega\mu_{-1,k} \\ \delta\eta_{1,k} = \omega\nu_{1,k} & \delta\eta_{-1,k} = \omega\nu_{-1,k} \end{matrix}$$

ce qui donne :
$$\delta\xi_{-1,k} = \delta\xi_{1,-k} \qquad \delta\eta_{-1,k} = -\, \delta\eta_{1,-k}$$

et enfin si nous posons :
$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}\, e^{iG_0} \qquad \varepsilon^{-1} = \frac{\varepsilon}{2}\, e^{-iG_0}$$

nous pourrons écrire les valeurs de $\delta\xi$ et $\delta\eta$ sous la forme :
$$(65) \qquad \delta\xi = \varepsilon_1\, \delta\xi_1 + \varepsilon_{-1}\, \delta\xi_{-1} \qquad \delta\eta = \varepsilon_1\, \delta\eta_1 + \varepsilon_{-1}\, \delta\eta_{-1}$$

avec :
$$(66) \qquad \begin{cases} \delta\xi_1 = \Sigma\, \delta\xi_{1,k}\, \theta^k \\ \delta\eta_1 = \Sigma\, \delta\eta_{1,k}\, \theta_k \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta\xi_{-1} = \Sigma\, \delta\xi_{-1,k}\, \theta^k \\ \delta\eta_{-1} = \Sigma\, \delta\eta_{-1,k}\, \theta^k \end{cases}$$

Ayant obtenu les fonctions $\delta\xi$ et $\delta\eta$, nous pouvons calculer les accroissement δx et δy correspondants. Les formules (36) nous permettent d'écrire :
$$\begin{cases} \delta X = \dfrac{a}{2} \left[\delta(x\theta^{-1})\, e^{iN} + \delta(y\theta)\, e^{-iN} \right] \\ \delta y = \dfrac{a}{2i} \left[\delta(x\theta^{-1})\, e^{iN} - \delta(y\theta)\, e^{-iN} \right] \end{cases}$$

ou bien, en remplaçant $\delta(x\theta^{-1})$ et $\delta(y\theta)$ en fonction de $\delta\xi$ et $\delta\eta$:
$$\begin{cases} \delta X = \dfrac{a}{2} \left[(\delta\xi + \delta\eta)\, e^{iN} + (\delta\xi - \delta\eta)\, e^{-iN} \right] \\ \delta Y = \dfrac{a}{2i} \left[(\delta\xi + \delta\eta)\, e^{iN} - (\delta\xi - \delta\eta)\, e^{-iN} \right] \end{cases}$$

Faisant usage des formules (65) et (66) et combinant les exposants k, d'une part, et $-k$ d'autre part, de manière à grouper les mêmes coefficients, nous obtiendrons, après avoir transformé les exponentielles en sinus et cosinus, les valeurs suivantes pour δX et δY :
$$(67) \qquad \begin{cases} \delta X = \dfrac{a\varepsilon}{2} \displaystyle\sum \left[(\delta\xi_{1,k} + \delta\eta_{1,k}) \cos(N + G_0 + kV) + (\delta\xi_{-1,-k} + \delta\eta_{-1,-k}) \cos(N - G_0 - kV) \right] \\ \delta Y = \dfrac{a\varepsilon}{2} \displaystyle\sum \left[(\delta\xi_{1,k} + \delta\eta_{1,k}) \sin(N + G_0 + kV) + (\delta\xi_{1,-k} + \delta\eta_{-1,-k}) \sin(N - G_0 - kV) \right] \end{cases}$$

19. — Passons aux coordonnées polaires r et v. Nous avons :

$$\frac{r}{a} = \left(\frac{r}{a}\right)_0 + \delta\left(\frac{r}{a}\right) = (xy - z^2)^{\frac{1}{2}} = [\,(x_0 + \delta x)\,(y_0 + \delta y) - z^2\,]^{\frac{1}{2}}$$

Développant le radical par la formule du binome et retenant seulement la partie principale du développement nous obtiendrons pour l'accroissement $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$:

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2}\rho_0\,(x_0\delta y + y_0\delta x)$$

Après quelques transformations simples et tenant compte de ce que l'on a :

$$\delta\,(x\theta^{-1}) = \theta^{-1}\delta x = \theta^{-1}\,(\delta\xi + \delta\eta) \qquad\qquad \delta\,(y\theta) = \theta\delta y = \theta\,(\delta\xi - \delta\eta)$$

nous obtiendrons finalement :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right) = \rho_0\,(\xi_0\delta\xi - \eta_0\delta\eta)$$

et ceci peut être écrit, d'après les formules (65) sous la forme suivante :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right) = \varepsilon_1\delta\left(\frac{r}{a}\right)_1 + \varepsilon_{-1}\delta\left(\frac{r}{a}\right)_{-1} \tag{68}$$

avec :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right)_1 = (\rho_0\xi_0)\,\delta\xi_1 - (\rho_0\eta_0)\,\delta\eta_1 \qquad\qquad \delta\left(\frac{r}{a}\right)_{-1} = (\rho_0\xi_0)\,\delta\xi_{-1} \quad (\rho_0\eta_0)\,\delta\eta_{-1}$$

En faisant enfin usage des formules (66), nous obtiendrons aisément le développement trigonométrique suivant :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right) = \varepsilon\sum\delta\left(\frac{r}{a}\right)_{1,k}\cos\,(G_0 + kV) \tag{69}$$

avec :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right)_{1,k} = (\rho_0\xi_0)\,\delta\xi_{1,k} - (\rho_0\eta_0)\,\delta\eta_{1,k}$$

Pour la longitude, nous avons :

$$v = v_0 + \delta v \qquad\quad l = l_0 + \delta l \qquad\quad v = \mathrm{N} + \frac{l}{i} \qquad\quad v_0 = \mathrm{N} + \frac{l_0}{i}$$

et nous déduisons de là :

$$\delta v = \frac{\delta l}{i}$$

Pour calculer δl, reportons-nous aux formules (36) qui donnent par division :

$$\mathrm{Th}\,(\lambda_0 + \delta l) = \mathrm{Th}\,l = \frac{\eta}{\xi}$$

D'après la formule d'addition de Th ceci peut s'écrire :

$$\mathrm{Th}\,(l_0 + \delta l) = \frac{\mathrm{Th}\,l_0 + \mathrm{Th}\,\delta l}{1 + \mathrm{Th}\,l_0\,\mathrm{Th}\,\delta l}$$

et nous tirons de là $\mathrm{Th}\,\delta l$ sous la forme :

$$\mathrm{Th}\,\delta l = \frac{\mathrm{Th}\,(l_0 + \delta l) - \mathrm{Th}\,l_0}{1 - \mathrm{Th}\,l_0\,\mathrm{Th}\,(l_0 + \delta l)}$$

Comme on a :

$$\mathrm{Th}\,(l_0 + \delta l) = \frac{\eta_0 + \delta\eta}{\xi_0 + \delta\xi} \qquad\qquad \mathrm{Th}\,l_0 = \frac{\eta_0}{\xi_0}$$

nous pourrons écrire, après quelques réductions :

$$\mathrm{Th}\,\delta l = \frac{\xi_0\delta\eta - \eta_0\delta\xi}{\xi^2_0 - \eta^2_0 + \xi_0\delta\xi - \eta_0\delta\eta} = \rho^2_0\,\frac{\xi_0\delta\eta - \eta_0\delta\xi}{1 + \rho_0^2\,(\xi_0\delta\xi - \eta_0\delta\eta)}$$

Développant l'inverse du dénominateur en série procédant suivant les puissances de ρ^2_0 et retenant seulement les termes du premier ordre en $\delta\xi$ et $\delta\eta$, nous obtiendrons :

$$\text{Th}\,\delta l = \rho^2_0 \, (\xi_0 \delta\eta - \eta_0 \delta\xi)$$

Faisons maintenant l'inversion de cette équation et ne conservons que les termes du premier ordre du développement, nous obtiendrons la valeur de δl sous la forme :

$$\delta l = \rho^2_0 \, (\xi_0 \delta\eta - \eta_0 \delta\xi)$$

et, faisant usage de la formule (65) et des relations entre les fonctions conjuguées, nous pourrons écrire δl sous la forme :

$$\delta l = \varepsilon_1 \delta l_1 + \varepsilon_{-1} \delta l_{-1}$$

formule où :

$$\delta l_1 = -\,(\rho^2_0 \eta_0)\,\delta\xi_1 + (\rho^2_0 \xi_0)\,\delta\eta_1$$

δl_{-1} étant le conjugué changé de signe de δl_1.

Si, maintenant, nous tenons compte des formules (66) et des valeurs de ε_1 et ε_{-1}, nous obtiendrons, après quelques transformations, le développement trigonométrique :

$$(70) \qquad v = \frac{\delta l}{i} = \varepsilon \, \Sigma \, \delta l_{1,k} \sin\,(G_0 + kV)$$

avec :

$$\delta l_{1,k} = -\,(\rho^2_0 \eta_0)\,\delta\xi_{1,k} + (\rho^2_0 \xi_0)\,\delta\eta_{1,k}$$

20. — Considérons maintenant la dernière équation (50). Si nous nous rappelons que nous avons fait $Z = O$, la formule (56) donnera pour l'intégrale générale :

$$z = C_1 z_1 - C_2 z_2$$

avec :

$$z_1 = \theta^{h_0} \Sigma c_{1,k} \theta^k \qquad\qquad z_2 = \theta^{-h_0} \Sigma c_{2,k} \theta^k$$

Par analogie avec ce que nous avons fait pour la première équation (50), nous poserons, γ et Ω_0 étant deux constantes nouvelles :

$$C_1 = \frac{\gamma\omega'}{2} e^{-i\Omega_0} \qquad\qquad C = \frac{\gamma\omega'}{2} e^{i\Omega_0},$$

si nous posons aussi :

$$H_0 = h_0 V - \Omega_0$$

puis :

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{2} e^{iH_0} \qquad\qquad \gamma_{-1} = \frac{\gamma}{2} e^{-iH_0}$$

et enfin :

$$z_{1,k} = \omega' c_{1,k} \qquad\qquad z_{-1,k} = -\,\omega' c_{1,k}$$

nous verrons aisément que nous pouvons écrire :

$$z = \gamma_1 z_1 + \gamma_{-1} z_{-1}$$

avec :

$$z_1 = \Sigma z_{1,k} \theta^k \qquad\qquad c_{-1,k} = c_{1,k}$$

$$z_{-1} = \Sigma z_{-1,k} \theta^k \qquad\qquad z_{-1,k} = -\,z_{1,-k}$$

Ceci fait, cherchons la valeur de Z. Nous savons que :

$$Z = \frac{az}{i}$$

Remplaçant z par la valeur trouvée plus haut, nous obtiendrons, après quelques transformations simples :

$$(71) \qquad Z = a\gamma \Sigma z_{1,k} \sin\,(H_0 + kV)$$

avec

$$z_{1,k} = \omega' c_{1,k}$$

Il nous reste à chercher la valeur de la latitude s. Or, nous avons posé :

$$s = \frac{\sigma}{i}$$

tout revient donc à calculer σ.

D'après la troisième formule (36), nous avons :

$$z = \frac{r}{a} \operatorname{Sh} \sigma$$

et nous savons que, l'indice zéro désignant la première partie de la solution, trouvée au chapitre I :

$$z_0 = 0 \qquad\qquad \sigma_0 = 0$$

Si nous posons : $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, nous pourrons écrire : $\operatorname{Sh} \sigma = z\,(\rho_0 + \delta\rho)$;

mais, $\delta\rho$ est l'accroissement de ρ_0 qui correspond à δx, δy, z, et il ne dépend que de δx et δy au premier degré. Comme il est petit, son produit par z sera petit aussi et nous pourrons le négliger en cherchant la valeur principale de σ. Nous aurons donc seulement :

$$\operatorname{Sh} \sigma = \rho_0\, z$$

Par inversion, et réduisant le développement à sa partie principale, nous trouverons pour σ la valeur :

$$\sigma = \rho_0\, z$$

ce qui pourra être écrit sous la forme :

$$\sigma = \gamma_1\, \sigma_1 + \gamma_{-1}\, \sigma_{-1}$$

avec $$\sigma_1 = \rho_0\, z_1 \qquad\qquad \sigma_{-1} = \rho_0\, z_{-1}$$

Revenant aux valeurs réelles, nous obtiendrons pour s le développement :

$$s = \gamma\, \Sigma\, \sigma_{1,k} \sin\,(\mathrm{H}_0 + k\mathrm{V}) \tag{72}$$

avec :

$$\sigma_{1,k} = \rho_0\, \omega'\, c_{1,k}$$

Dans les formules précédentes, tant pour la première équation (50) que pour la dernière, nous avons introduit deux quantités ω et ω^1 qui doivent être déterminées par une convention spéciale Nous sommes en mesure de le faire maintenant.

Pour déterminer ω nous poserons l'équation :

$$\delta l_{1,0} = 2$$

et pour déterminer ω' nous ferons :

$$\sigma_{1,0} = 1$$

Examinons maintenant les séries qui donnent la solution complète obtenue jusqu'à maintenant. C'est-à-dire les séries obtenues en ajoutant, pour chaque coordonnée tant rectangulaire que polaire, les solutions obtenues aux chapitres I et III, et supposons que l'on fasse $\nu m^2 = 0$. Il est aisé de voir que la petite planète pourra être considérée comme se mouvant approximativement sur une orbite klépérienne dont l'excentricité serait ε et la tangente de l'inclinaison γ, l'argument de la latitude étant H_0 et l'anomalie moyenne G_0. La longitude du nœud et celle du périhélie auront donc respectivement pour expressions :

$$\Omega = \mathrm{N} - \mathrm{H}_0 \qquad\qquad \varphi = \mathrm{N} - \mathrm{G}_0$$

Or, on peut écrire :

$$\Omega = \mathrm{N} - h_0\,(\mathrm{N} - \mathrm{N}') + \Omega_0$$

$$\varphi = \mathrm{N} - g_0\,(\mathrm{N} - \mathrm{N}') + \varphi_0$$

ce qui montre que les angles Ω et φ varieront proportionnellement au temps avec des moyens mouvements nh''_0 et ng''_0, et on aura :

$$h''_0 = 1 - \frac{h_0}{1 + m} \qquad\qquad g''_0 = 1 - \frac{g_0}{1 + m} \tag{73}$$

21. — Nous avons donc déterminé complètement les inégalités de la petite planète qui dépendent de la première puissance tant de son excentricité que de la tangente de son inclinaison.

Nous pouvons essayer de poursuivre la solution par approximations successives au moyen de séries ordonnées suivant les puissances des paramètres ε, γ, ε', γ', α, en désignant par ε' et γ' les constantes analogues à ε et γ relatives à la planète troublante.

Pour cela, nous prendrons d'abord les portions de U, V, Z, J qui dépendent de ε', γ', α, à la première puissance. On voit de suite que Z ne contient que des termes en γ. Appliquant la méthode exposée, nous déterminerons les inégalités correspondantes pour x, y; il n'y en a pas pour z. Nous prendrons ensuite les portions de U, V, Z, J qui sont du second degré par rapport aux paramètres et nous obtiendrons les inégalités correspondantes pour x, y, z et ainsi de suite.

Pour effectuer ces calculs, il faudra préalablement développer les fonctions :

$$\rho'^{m} e^{\pm n l'} \qquad , \qquad \rho'^{m}$$

en séries procédant suivant les puissances de ε'_1 et ε'_{-1}, et les fonctions sin ms' et cos ms' en séries procédant suivant les puissances de γ'_1, γ'_{-1}, ε'_1, ε'_{-1}; nous donnerons ces développements plus tard.

Si nous désignons par ε' et γ' l'excentricité et la tangente de l'inclinaison de l'orbite de la planète troublante, par φ' la longitude de son périhélie, et par Ω' celle de son nœud, nous poserons, par analogie avec ce qui a été fait pour la petite planète :

$$G' = N' - \varphi' \qquad\qquad H' = N' - \Omega'$$

$$\varepsilon'_1 = \frac{\varepsilon'}{2} e^{iG'} \qquad \varepsilon'_{-1} = \frac{\varepsilon'}{2} e^{-iG'} \qquad \gamma'_1 = \frac{\gamma'}{2} e^{iH'} \qquad \gamma'_{-1} = \frac{\gamma'}{2} e^{-iH'}$$

En appliquant la méthode exposée, nous pourrons donc obtenir la solution générale du problème sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances entières et positives des cinq paramètres ε, γ, ε', γ', α, les coefficients de ces séries étant des fonctions des θ.

Il est visible, néanmoins, que l'application des quadratures successives que l'on doit effectuer fera apparaître des terme séculaires, Pour les éviter, nous modifierons convenablement les arguments G_0 et H_0 de façon à permettre l'introduction de quantités indéterminées dont nous puissions disposer pour faire disparaître les termes séculaires.

Nous remplacerons g_0 et h_0 par deux nouvelles fonctions g et h que nous supposerons fonction des paramètres. Nous ferons :

$$G = gV - \varphi_0 \qquad\qquad H = hV - \Omega_0$$

de sorte que l'on aura :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{iG} \qquad \varepsilon_{-1} = \frac{\varepsilon}{2} e^{-iG} \qquad \gamma_1 = \frac{\gamma}{2} e^{iH} \qquad \gamma_{-1} = \frac{\gamma}{2} e^{-iH}$$

Nous supposerons g et h développés suivant les puissances de ε^2, γ^2, ε'^2, γ'^2, α^2, la partie indépendante de ces paramètres étant précisément égale à g_0 pour g et à h_0 pour h. Nous supposerons également que la partie constante de la fonction J, partie que nous appellerons (J), soit développée suivant les puissances de $\varepsilon^2, \gamma^2, \varepsilon'^2, \gamma'^2, \alpha^2$, mais sans qu'il y ait de terme indépendant de ces paramètres. Les fonctions g, h et (J) nous fourniront les coefficients arbitraires dont nous disposerons pour faire disparaître les termes séculaires.

Comme les fonctions :

$$\rho'^{m} e^{\pm n l'} \qquad , \qquad \rho'^{m} \qquad ,$$

sont développables suivant les puissances de ε'_1 et ε'_{-1} et que sin ms' et cos ms' le sont suivant les puissances de γ'_1, γ'_{-1}, ε'_1, ε'_{-1}, nous voyons que nous pouvons supposer que x, y, z, $x\theta^{-1}$, $y\theta$, ξ, η, $\frac{r}{a}$, l, σ, sont développables sous la forme suivante :

$$x = \Sigma x_n M_n \qquad\qquad y = \Sigma y_n M_n \ldots\ldots$$

séries dans lesquelles M_n représente le monome :

$$M_n = \varepsilon_1^{p_1} \varepsilon_{-1}^{p_{-1}} \gamma_1^{q_1} \gamma_{-1}^{q_{-1}} \varepsilon'^{p'_1}_1 \varepsilon'^{p'_{-1}}_{-1} \gamma'^{q'_1}_1 \gamma'^{q'_{-1}}_{-1} \alpha^s$$

les exposants étant des entiers non négatifs (s'ils étaient tous nuls on aurait $M_0 = 1$).

D'un autre côté, nous avons supposé g, h, (J) développables suivant les puissances de ε^2, γ^2, ε'^2, γ'^2, α^2 ; nous pourrons donc prendre pour ces développements la forme :

$$g = \Sigma g_{n'} M'_{n'} \qquad h = \Sigma h_{n'} M'_{n'} \qquad (J) = \Sigma J_{n'} M'_{n'}$$

en désignant par $M'_{n'}$ des monomes de la forme :

$$M'_{n'} = (\varepsilon_1 \varepsilon_{-1})^p (\gamma_1 \gamma_{-1})^q (\varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1})^{p'} (\gamma'_1 \gamma'_{-1})^{q'} \alpha^{2s}$$

Vérifions que ces hypothèses cadrent bien avec ce que nous avons trouvé plus haut.

En effet, si nous prenons $M_0 = 1$, les coefficients correspondants à x et y, x_0 et y_0 sont bien ceux que nous avons trouvés au Chapitre I. On a $z = 0$; et les coefficients g_0 et h_0 sont ceux qui ont été déterminés au Num. 17. On à $J_0 = 0$.

Si nous prenons M_n égal à ε_1 ou ε_{-1}, les fonctions ξ_1, ξ_{-1}, η_1, η_{-1}, sont précisément égales aux fonctions $\delta\xi_1$, $\delta\xi_{-1}$, $\delta\eta_1$, $\delta\eta_{-1}$, déterminées plus haut et l'on a $z = \sigma_1 = 0$. Si l'on prend M_n égal à γ_1 ou γ_{-1}, z_1, z_{-1}, σ_1, σ_{-1}, sont les fonctions déjà déterminées et l'on a δx, δy, ... $= 0$. Donc les hypothèses faites permettent de retrouver les expressions déjà calculées.

Il suffit d'examiner avec soin comment est composée la fonction des forces U, et les développements obtenus pour x ; y, ..., pour voir que dans les monomes M_n qui figurent dans $x\theta^{-1}$, $y\theta$, ξ, η, $\frac{r}{a}$, l, la somme $q_1 + q_{-1}$ est paire, et qu'elle est impaire pour ceux qui figurent dans z et σ.

On voit, d'après le mode de formation des coefficients, que $(x\theta^{-1})_n$, $(y\theta)_n$, ... z_n, σ_n, sont des séries en θ de la forme :

$$(x\theta^{-1})_n = \Sigma (x\theta^{-1})_{n,k} \theta_k \qquad , \qquad (y\theta)_n = \Sigma (y\theta)_{n,k} \theta_k \; .....$$

dans lesquelles les coefficients $(x\theta^{-1})_{n,k}$, $(y\theta)_{n,k}$ ..... sont des fonctions de νm^2 seul. Il en est de même des coefficients $g_{n'}$, $h_{n'}$, $J_{n'}$.

Si l'on continue l'examen des séries $(x\theta^{-1})$, $(y\theta)$, ..., on pourra voir aussi que dans les coefficients $(x\theta^{-1})_{n\,k}$ ..... les indices k sont de même parité que l'exposant de α dans le monome M_n.

En désignant par M_{-n} le monome conjugué de M_n, c'est-à-dire le monome obtenu en échangeant entre eux ε_1 et ε_{-1}, γ_1 et γ_{-1}, ε'_1 et ε'_{-1}, γ'_1 et γ'_{-1}, on voit aisément que l'on a, en se reportant aux propriétés des fonctions $(x\theta_{-1})$, ... :

$$(x\theta^{-1})_{-n\,k} = (y\theta)_{n\,-k} \qquad (y\theta)_{-n,k} = (x\theta^{-1})_{n,-k} \qquad \xi_{-n\,k} = \xi_{n,-k}$$

$$\eta_{-n,k} = -\eta_{n,-k} \qquad \left(\frac{r}{a}\right)_{-n,k} = \left(\frac{r}{a}\right)_{n,-k} \qquad l_{-n,k} = -l_{n,-k}$$

$$z_{-n,k} = -z_{n,-k} \qquad \sigma_{-n,k} = -\sigma_{n,-k}$$

Pour un monome de la forme M'_n, qui est à lui-même son propre conjugué, on a :

$$(x\theta^{-1})_{n',k} = (y\theta)_{n',k} \qquad (y\theta)_{n',k} = (x\theta^{-1})_{n',-k} \qquad \xi_{n',k} = \xi_{n',-k} \qquad \eta_{n',k} = -\eta_{n',-k}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)_{n',k} = \left(\frac{r}{a}\right)_{n',-k} \qquad l_{n',k} = -l_{n',-k} \qquad z_{n',k} = -z_{n',-k} \qquad \sigma_{n',k} = -\sigma_{n',-k}$$

Il va sans dire qu'il en est de même pour tous les monomes M_n qui sont constants.

Voyons maintenant comment se présenteront les développements des coordonnées sous forme réelle.

Le monome M_n pourra s'écrire sous la forme :

$$M_n = A_n e^{i[(p_1-p_{-1})G+(q_1-q_{-1})H+(p_1'-p_{-1}')G'+(q_1'-q_{-1}')H']}$$

avec :

$$A_n = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_{-1}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{q_1+q_{-1}} \left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{p'_1+p'_{-1}} \left(\frac{\gamma'}{2}\right)^{q'_1+q'_{-1}} \alpha^s$$

Si, maintenant, nous posons :

$$V_{n\,k} = kV + (p_1 - p_{-1})\,G + (q_1 - q_{-1})\,H + (p'_1 - p'_{-1})\,G' + (q'_1 - q'_{-1})\,H'$$

nous obtiendrons les développements :

$$\left\{\begin{aligned} X &= a\,\Sigma\,A_n\,(x\theta^{-1})_{n,k}\cos(V + V_{n,k}) \\ Y &= a\,\Sigma\,A_n\,(x\theta^{-1})_{n,k}\sin(V + V_{n,k}) \\ Z &= a\,\Sigma\,A_n\,z_{n,k}\sin V_{n\,k} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} r &= a\,\Sigma\,A_n \left(\frac{r}{a}\right)_{n\,k}\cos V_{n.k} \\ v &= N + \Sigma\,A_n\,\delta l_{n.k}\sin V_{n\,k} \\ s &= \Sigma\,A_n\,\sigma_{n,k}\sin V_{n,k} \end{aligned}\right.$$

les sommations s'étendant à toutes les valeurs possibles dans chaque cas pour n et k.

Pour g et h on aura des développements analogues, mais non trigonométriques :

$$g = \Sigma\,g_{n'}\,M'_{n'} \qquad\qquad h = \Sigma\,h_{n'}\,M'_{n'}$$

où $M'_{n'}$ représente le monome :

$$M'_{n'} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2p} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{2p'} \left(\frac{\gamma'}{2}\right)^{2q'} \alpha^{2s}$$

Si maintenant nous appelons ng'' et nh'' les moyens mouvements des arguments $N - G$ et $N - H$, on aura pour g'' et h'' des développements analogues

22. — Il reste à voir comment on pourra se débarrasser des termes séculaires. Pour cela, revenons aux équations fondamentales (16) et (17), substituons-y les valeurs supposées des inconnues et voyons ce qui arrive quand on effectue les différentiations indiquées.

Prenons pour cela un terme de $(x\theta^{-1})$, que nous appellerons A :

$$A = (x\theta^{-1})_{n,k}\,M_n\,\theta^k$$

et appliquons la différentiation par rapport à T. Cela nous donnera :

$$DA = A\,[\,k + (p_1 - p_{-1})\,g + (q_1 - q_{-1})\,h + (p'_1 - p'_{-1})\,m + (q'_1 - q'_{-1})\,m\,]$$

Supposons maintenant que l'on remplace g et h par leurs développements, que l'on sépare les termes qui, dans la formule précédente, dépendent de g_0 et h_0, et que l'on pose :

$$D_0A = A\,[\,k + (p_1 - p_{-1})\,g_0 + (q_1 - q_{-1})\,h_0 + (p'_1 - p'_{-1})\,m + (q'_1 - q'_{-1})\,m\,]$$

D_0 désignant l'opération qui consiste à prendre la dérivée par rapport à T d'un terme tel que A où G et H ont été remplacés par G_0 et H_0. On voit, d'après ce qui précède, que la différence $DA - D_0A$ se présentera sous la forme d'un développement suivant les produits du monome M_n par les différents monomes $M'_{n'}$, M_0 étant exclu.

Remplaçons alors dans les équations (40), (41) et (42) la caractéristique D par D_0. Les fonctions U, V, Z, J, seront modifiées car il faudra tenir compte pour leur formation des différences telles que $DA - D_0A$, mais la méthode d'approximations successives indiquée ne subira aucun changement car nous connaissons pour chaque différence son développement suivant les produits $M_n\,M'_{n'}$, de sorte que la partie des fonctions U, V, Z, J, qui correspond à un monome donné pourra toujours être calculée dès que l'on connaîtra les parties des inconnues qui correspondent aux monomes de degré inférieur, à quelques exceptions près.

L'opération D_0 est analogue à la dérivation ordinaire et elle est équivalente à l'opération D quand on l'applique aux fonctions a''_1, a''_2, z_1, z_2. Elle jouit des mêmes propriétés que l'opération D.

D'après les modifications qui ont été apportées aux fonctions U, V, Z, J, il est évident qu'il faudra, dans ces fonctions, remplacer D^{-1} par D_0^{-1}, en désignant par D_0^{-1} l'opération inverse de D_0, opération analogue à l'intégration, et qui appliquée au terme A, supposé non constant, le reproduira divisé par :

$$k + (p_1 - p_{-1})\, g_0 + (q_1 - q_{-1})\, h_0 + (p'_1 - p'_{-1})\, m + (q'_1 - q'_{-1})\, m$$

Si nous nous reportons à la formule (56), nous voyons que cette opération porte sur des quantités de l'une des cinq formes suivantes :

$$\theta^{-g_0+k}\, M_n \quad . \quad \theta^{g_0+k}\, M_n \quad , \quad \theta^{-h_0+k}\, M_n \quad , \quad \theta^{h_0+k}\, M_n \quad . \quad \theta^{k}\, M_n \quad ,$$

suivant qu'il s'agira des fonctions :

$$D_0^{-1}\,(a''_2\, \Xi) \quad , \quad D_0^{-1}\,(a''_1\, \Xi) \quad , \quad D_0^{-1}\,(z_2 Z) \quad , \quad D_0^{-1}\,(z_1 Z) \quad , \quad D_0^{-1}\, B$$

k désigne un entier quelconque, et il est à remarquer que les facteurs $\theta^{\pm g_0}$, $\theta^{\pm h_0}$, se trouvent détruits ultérieurement, puisque les quatre premières opérations D_0^{-1} doivent être multipliées ensuite respectivement par a''_1, a''_2, z_1, z_2.

On aura donc, par exemple :

$$D_0^{-1}\,(\theta^{g_0+k}\, M_n) = \frac{\theta^{g_0+k}\, M_n}{g_0 + k + (p_1 - p_{-1})\, g_0 + (q_1 - q_{-1})\, h_0 + (p'_1 - p'_{-1})\, m + (q'_1 - q'_{-1})\, m}$$

ce qui montre que le calcul est immédiat.

Il n'y a d'exception que si l'opération D_0^{-1} fait apparaître un diviseur nul. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut que les fonctions $(a''_2\, \Xi)$, $(a''_1 \Xi)$, $(z_2 Z)$, $(z_1 Z)$, B, ne contiennent respectivement aucun termes des formes :

$$\theta^{g_0}\, \varepsilon_1\, M'_{n'} \quad , \quad \theta^{g_0}\, \varepsilon_{-1}\, M'_{n'} \quad , \quad \theta^{-h_0}\, \gamma_1\, M'_{n'} \quad . \quad \theta^{h_0}\, \gamma_1\, M'_{n'} \quad , \quad M'_{n'}$$

Or, ceci peut être réalisé de la façon suivante : Considérons la fonction $(a''_2 \Xi)$, le coefficient de $\theta^{-g_0} \varepsilon_1\, M'_{n'}$ dépend de la constante $g_{n'}$ qui est encore indéterminée. Nous pouvons donc la choisir de façon à faire disparaître ce coefficient et, en même temps, disparaîtra le coefficient correspondant dans la fonction conjuguée. Considérons maintenant la fonction $(z_2 Z)$, le coefficient de $\theta^{-h_0}\, \gamma_1\, M'_{n'}$ dépend de $h_{n'}$ et nous pourrons disposer de cette quantité de façon à faire disparaître ce coefficient ainsi que celui de $\theta^{h_0}\, \gamma_1\, M'_{n'}$ dans la fonction conjuguée.

Il reste à faire disparaître le coefficient de $M'_{n'}$ dans B. Or, il dépend de $J_{n'}$ que nous déterminerons de façon à annuler ce coefficient.

La fonction J contient la quadrature $D^{-1} \left[\frac{\partial F}{\partial (\tau N')} \right]$ mais il est aisé de voir que la fonction soumise à cette quadrature ne peut contenir aucun terme constant et que, par suite, elle ne peut donner lieu à aucun terme séculaire.

Nous ferons en sorte que le coefficient complet de sinG dans le développement non symétrique de la longitude v ait pour expression :

$$2\varepsilon - \frac{1}{4}\, \varepsilon^3 + \frac{5}{96}\, \varepsilon^5 \quad .....$$

et que le coefficient complet de sinH dans le développement non symétrique de la latitude ait pour expressions :

$$\gamma - \gamma\varepsilon^2 - \frac{1}{128}\, \gamma^3 + \frac{7}{64}\, \gamma\varepsilon^4 \quad .....$$

comme s'il s'agissait d'un mouvement klépérien pour lequel l'excentricité de l'orbite serait ε et le double du sinus de la moitié de l'inclinaison serait égal à γ. Pour cela, nous ajouterons aux opérations $D_0^{-1}\,(a''_2\, \Xi)$, $D_0^{-1}\,(a''_1\, \Xi)$, $D_0^{-1}\,(z_2 Z)$, $D_0^{-1}\,(z_1 Z)$, des termes tels que $c'\theta^{-g_0}\, \varepsilon_1\, M'_{n'}$, $c'\theta^{g_0}\, \varepsilon_{-1}\, M'_{n'}$, $c'\theta^{-h_0}\, \gamma_1\, M'_{n'}$, $c'\theta^{h_0}\, \gamma^{-1}\, M'_{n'}$, et nous déterminerons la constante c' dans chacun d'eux pour que la condition posée plus haut soit remplie. C'est ce qui a été fait déjà pour les termes 2ε et γ quand nous avons posé :

$$\delta l_{1,0} = 2 \qquad\qquad \sigma_{1,0} = 1$$

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER

Etude des petites Planètes par groupes

23 — Tout ce que nous avons dit jusqu'ici se rapporte au calcul des perturbations générales d'une petite Planéte isolée. Nous allons maintenant introduire la conception fondamentale de M. Karl Bohlin afin de traiter les petites Planètes par groupes.

Pour cela, désignons par μ le rapport des moyens mouvements de la Planète troublante à la planète troublée, nous aurons :

$$(74) \qquad \mu = \frac{n'}{n}$$

puis, désignons par μ_0 un nombre rationnel voisin de μ qui sera généralement une fraction simple, et posons :

$$(75) \qquad \mu = \mu_0 (1 - \varpi)$$

ϖ étant une quantité petite.

En introduisant dans les formules μ à la place de m et remplaçant μ par sa valeur (75), nous obtiendrons pour la solution des fonctions de ϖ et de μ_0. Le problème reviendra alors à développer toutes les fonctions suivant les puissances de ϖ, les coefficients de ces développements seront alors des fonctions du nombre rationnel choisi μ_0, ce seront donc des nombres obsolus et *ils seront les mêmes pour toutes les petites Planètes pour lesquelles on pourra utiliser le nombre μ_0 choisi*.

Nous devons examiner la solution trouvée à la première partie, en vue d'introduire μ_0 et ϖ.

Si nous nous reportons aux formules trouvées, nous verrons aisément que le problème se simplifie. En effet, toutes les formules du chapitre premier reposent sur le calcul des séries $(x^{0\cdot 1})$, (y^0), dont les coefficients sont développés suivant les puissances de νm^2, (nous avons remis νm^2 au lieu de m'), la succession des exposants étant :

$$2h \quad , \quad 2h+4 \quad , \quad 2h+8 \quad , \quad \ldots\ldots$$

les coefficients de ces puissances de νm^2 étant les fonctions $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, dont le calcul a été expliqué au num. 8, et qui sont aussi des fonctions de m. Les formules du chapitre III reposent sur le calcul des fonctions u et v, calcul qui dépend lui aussi des fonctions dont nous venons de parler.

On voit donc qu'il suffira d'effectuer le développement des fonctions $(x^{0\cdot 1})_{0,2h}$, $(y^0)_{0,2h}$, et celui des coefficients $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, pour pouvoir calculer la solution complète du problème.

Nous allons nous en occuper et nous donnerons ensuite les développements des fonctions qui entrent dans la solution générale.

24. — Tout d'abord, nous devons exprimer m en fonction de μ_0 et w. Or, nous avons, d'après la définition de m :

$$m = \frac{n'}{n - n} = \frac{\mu}{1 - \mu}$$

ce qui s'écrit, en remplaçant μ par sa valeur (75) et apres avoir remarqué que l'on a :

$$m_0 = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0}$$

$$(76) \qquad m = \frac{m_0 (1 - w)}{1 + m_0 w}$$

Ceci fait, nous remarquerons que les coefficients sont fonctions de m directement et par l'intermédiaire des fonctions $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$, de sorte qu'en introduisant μ, nous devons effectuer séparément les développements des $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, suivant les puissances de w, puis, les multiplier par les développements des puissances correspondantes de m.

Si nous revenons à la formule (76), et si nous l'écrivons sous la forme :

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1 - w}{1 + m_0 w}$$

nous obtiendrons, en effectuant la division indiquée suivant les puissances croissantes de w :

$$\frac{m_0}{m} = 1 - (1 + m_0) w + m_0 (1 + m_0) w^2 - m_0^2 (1 + m_0) w^3 + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} m_0^{n-1} (1 + m_0) w^n \ldots\ldots$$

Ceci pourra être écrit sous la forme :

$$\frac{m_0}{m} = 1 - W$$

en posant :

$$(77) \qquad W = (1 + m_0) w - m_0 (1 + m_0) w^2 + m_0^2 (1 + m_0) w^3 \ldots$$

Si nous calculons les puissances successives de W, dont les premières sont :

$$W^2 = (1 + m_0)^2 w^2 - 2 m_0 (1 + m_0)^2 w^3 + 3 m_0^2 (1 + m_0)^2 w^4 \ldots$$
$$W^3 = (1 + m_0)^3 w^3 - 3 m_0 (1 + m_0)^3 w^4 + \ldots\ldots$$
$$W^4 = (1 + m_0)^4 w^4 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

nous obtiendrons pour la puissance $2h$ de m la formule :

$$(77^{\text{bis}}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{m^{2h}}{m_0^{2h}} = 1 - C^1_{2h} (1 + m_0) w + [C^1_{2h}\, m_0 (1 + m_0) + C^2_{2h} (1 + m_0)^2]\, w - \\ - [C^1_{2h}\, m^2_0 (1 + m_0) + C^2_{2h}\, C^1_2\, m_0 (1 + m_0)^2 + C^3_{2h} (1 + m_0)^3]\, w^3 \ldots \end{aligned} \right.$$

Ceci fait, occupons-nous des coefficients $(x\theta^{-1})_{0,2h}$ et $(y\theta)_{0,2h}$. Il suffira d'effectuer le développement pour l'un d'eux, les autres s'en déduiront par changement d'indices

En examinant les formules (29), nous voyons que la forme générale des coefficients est la suivante :

$$(x\theta^{-1})_{0,2h} = (\nu m^2)^h x_{h,2h} + (\nu m^2)^{h+2} x_{h+2,2h} \ldots\ldots$$
$$(y\theta)_{0,2h} = (\nu m^2)^h y_{h,2h} + (\nu m^2)^{h+2} y^{h+2,2h} \ldots \qquad (\nu m^2 = m'^2)$$

et ceci montre qu'il suffit d'effectuer le développement des $x_{i,j}$ et des $y_{i,j}$.

Lorsque nous remplaçons m en fonction de μ , puis μ en fonction de μ_0 et de w, nous pouvons appliquer la formule Taylor aux différents coefficients $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$. Pour $x_{i,j}$, cela nous donnera :

$$x_{i,j} = x_{i,j}(\mu_0) - w\mu_0 \left[\frac{dx_{i,j}}{d\mu}\right]_{\mu_0} + \frac{w^2\,\mu_0^2}{1.2}\left[\frac{d^2\,x_{i,j}}{d\mu^2}\right]_{\mu_0} \cdots\cdots$$

et il faut calculer les dérivés successives de $x_{i,j}$ par rapport à μ . Cela peut être évité par un artifice. En effet, nous avons :

$$m = \frac{\mu}{1-\mu}$$

d'où nous tirons, par différentiation :

$$dm = \frac{d\mu}{(1-\mu)^2} \tag{78}$$

Si nous remplaçons dans la série qui donne $x_{i,j}$, $d\mu$ par sa valeur en fonction de dm tirée de la formule (78), nous obtiendrons la série :

$$x_{i,j} = x_{i,j}(\mu_0) - w\,\frac{\mu_0}{(1-\mu_0)^2}\left[\frac{dx_{i,j}}{dm}\right]_{m_0} + \frac{w^2}{1\;2}\cdot\frac{\mu_0^2}{(1-\mu_0)^4}\left[\frac{dx_{i,j}}{dm^2}\right]_{m_0} \cdots\cdots \tag{79}$$

Faisant la même opération pour tous les termes de $(x\theta^{-1})_{0,2h}$, $(y\theta)_{0,2h}$, multipliant chacune des séries obtenues par le développement de la puissance correspondante de m , effectuant les réductions nécessaires et ordonnant enfin suivant les puissances de w , nous obtiendrons enfin pour $(x\theta^{-1})_{0,2h}$, $(y\theta)_{0,2h}$, les développements suivants

$$(x\theta^{-1})_{0,2h} = (x\theta^{-1})^{(0)}_{0,2h} + w\,(x\theta^{-1})^{(1)}_{0,2h} + w^2\,(x\theta^{-1})^{(2)}_{0,2h} + \cdots\cdots \tag{80}$$

avec :

$$(x\theta^{-1})^{(0)}_{0,2h} = (\nu m_0^2)^h\;x_{h\;2h}(\mu_0) + (\nu m_0^2)^{h+2}\;x_{h+2,2h}(\mu^0)\cdots\cdots$$

$$(x\theta^{-1})^{(0)}_{0,2h} = -(\nu m_0^2)^h\left[C^1_{2h}(1+m_0)\,x_{h\;2h}(\mu_0) + \frac{\mu_0}{(1-\mu_0)^2}\cdot\frac{dx_{h,2h}}{dm_0}\right] +$$

$$-(\nu m_0^2)^{h+2}\left[C_{2h+4}(1+m_0)\,x_{h+2,2h}(\mu_0) + \frac{\mu_0}{(1-\mu_0)^2}\,\frac{dx_{h+2,2h}}{dm_0}\right]\cdots\cdots$$

$$(x\theta^{-1})^{(2)}_{0,2h} = (\nu m_0^2)^h\left[\left[C^1_{2h}\,m_0(1+m_0) + C^2_{2h}(1+m_0)^2\right]x_{h,2h}(\mu_0) + C^1_{2h}(1+m_0)\,\frac{\mu_0}{(1-\mu_0)^2}\cdot\frac{dx_{h,2h}}{dm_0} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0^2}{(1-\mu_0)^4}\cdot\frac{d^2\,x_{h,2h}}{dm_0^2}\right] + (\nu m_0^2)^{h+2}\left[\left[C^1_{2h+4}\,m_0(1+m_0) + C^2_{2h+4}(1+m_0)^2\right]x_{h+2,2h}(\mu_0) +\right.$$

$$\left. + C^1_{2h+4}(1+m_0)\,\frac{\mu_0}{(1-\mu_0)^2}\cdot\frac{dx_{h+2,2h}}{dm_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0^2}{(1-\mu_0)^4}\cdot\frac{d^2x_{h+2,2h}}{dm_0^2}\right]\cdots\cdots$$

....

$$(y\theta)_{0,2h} = (y\theta)^{(0)}_{0,2h} + w\,(y\theta)^{(1)}_{0,2h} + w^2\,(y\theta)^{(2)}_{0,2h}\cdots\cdots \tag{81}$$

formules dérivées des précédentes en substituant $y_{h,k}$ à $x_{h,k}$.

Reportons-nous maintenant au numéro 11. Nous voyons qu'il faut calculer les quantités K et a . Elles sont données par les formules : (33) pour K , (35) pour a et (34) pour la quantité auxiliaire c . Nous allons les adapter au cas actuel.

Prenons d'abord la formule (33) et remplaçons m et m^2 par leurs développements suivant les puissances de w (formules (77) et (77^{bis})). Si nous posons :

$$cK = (cK)^{(0)} + w\,(cK)^{(1)} + w^2\,(cK)^{(2)} \quad .....$$

nous aurons pour les coefficients $(cK)^{(i)}$ les valeurs suivantes :

$$(cK)^{(0)} = 1 + 2m_0 + (1+\nu)\,m_0^2 + 3\,(\nu m_0^2)\,(x\theta^{-1})^{(0)}{}_{0,-2}$$

$$(cK)^{(1)} = -\,2m_0\,(1+m_0) - 2\,(1+\nu)\,m_0^2\,(1+m_0) + 3\,(\nu m_0^2)\,[\,(x\theta^{-1})^{(1)}{}_{0,-2} - 2\,(1+m_0)\,(x\theta^{-1})^{(0)}{}_{0,-2}\,]$$

$$(cK)^{(2)} = 2m_0^2\,(1+m_0) + (1+\nu)\,m_0^2\,[\,2m_0\,(1+m_0) + (1+m_0)^2\,] + 3\,(\nu m_0^2)\Big[(x\theta^{-1})^{(2)}{}_{0,-2} - 2\,(1+m_0)\,(x\theta^{-1})^{(1)}{}_{0,-2} +$$
$$+\,[\,2m_0\,(1+m_0) + (1+m_0)^2\,]\,(x\theta^{-1})^{(0)}{}_{0,-2}\Big]$$

....

Pour avoir la valeur de K il faudra calculer à part la valeur de c. Celle-ci est donnée par la formule (34). Si, dans celle-ci, nous remplaçons les $\xi_{0,h}$ et $\eta_{0,h}$ et leurs puissances par leurs développements suivant les puissances de w et si nous ordonnons par rapport à w, nous obtiendrons pour c la formule :

$$(83) \qquad c = c^{(0)} + c^{(1)}\,w + c^{(2)}\,w^2 + \quad .....$$

avec

$$c^{(0)} = 1 + 6\,[\xi^{(0)}{}_{0,2}]^2 - 3\,[\eta^{(0)}{}_{0,2}]^2 + 6\,[\xi^{(0)}{}_{0,4}]^2 - 3\,[\eta^{(0)}{}_{0,4}]^2 - 24\,[\xi^{(0)}{}_{0,2}]^2\,\xi^{(0)}{}_{0,4} + \ldots$$

$$c^{(1)} = 12\,\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(1)}{}_{0,2} - 6\,\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(1)}{}_{0,2} + 12\,\xi^{(0)}{}_{0,4}\,\xi^{(1)}{}_{0,4} - 6\,\eta^{(0)}{}_{0,4}\,\eta^{(1)}{}_{0,4} - 24\,[\,2\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(1)}{}_{0,2}\,\xi^{(2)}{}_{0,4} + 2\,[\xi^{(0)}{}_{0,2}]^2\,\xi^{(1)}{}_{0,4}\,] + \ldots$$

$$c^{(2)} = 6\Big[[\xi^{(1)}{}_{0,2}]^2 + 2\,\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(2)}{}_{0,2}\Big] - 3\Big[[\eta^{(1)}{}_{0,2}]^2 + 2\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(2)}{}_{0,2}\Big] + 6\Big[[\xi^{(1)}{}_{0,4}]^2 + 2\xi^{(0)}{}_{0,4}\,\xi^{(2)}{}_{8,4}\Big] -$$
$$-\,3\Big[[\eta^{(1)}{}_{0,4}]^2 + 2\eta^{(0)}{}_{0,4}\,\eta^{(2)}{}_{0,4}\Big] - 24\Big[[\xi^{(0)}{}_{0,2}]^2\,\xi^{(2)}{}_{0,4} + 2\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(1)}{}_{0,2}\,\xi^{(1)}{}_{0,4} + \xi^{(0)}{}_{0,4}\,[\,[\xi^{(1)}{}_{0,2}]^2 + 2\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(2)}{}_{0,2}\,]\Big] + \ldots$$

....

Nous arrivons au calcul de a. La formule (35) donne pour a :

$$a = a_0\left[\frac{K}{(1+m)^2}\right]^{-\frac{1}{3}} \quad .$$

mais on peut écrire :

$$1 + m = \frac{1 + m_0}{1 + m_0\,w}$$

de sorte que la valeur de a prend la forme :

$$a = a_0\,K^{-\frac{1}{3}}\,(1 + m_0)^{\frac{2}{3}}\,(1 + m_0\,w)^{-\frac{2}{3}} \quad ;$$

dans cette formule il faudra employer la valeur de K calculée en fonction de w numériquement. En développant le dernier facteur suivant la formule du binome et ordonnant par rapport à w, nous obtenons pour a la formule :

$$(85) \qquad a = a_0\,K^{-\frac{1}{3}}\,(1+m_0)^{\frac{2}{3}}\,(1 - \frac{2}{3}\,m_0\,w + \frac{2.5}{3.6}\,m^2{}_0\,w^2 \quad ....)$$

Ces préliminaires posés, nous allons passer à l'adaptation des formules qui donnent $\left(\frac{r}{a}\right)_0$, v_0, X_0, Y_0, puis de celles qui donnent δX, δY, Z, $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$, δv . s et des formules auxiliaires.

CHAPITRE II

---

25. — Pour adapter les formules qui donnent $\left(\frac{1}{a}\right)_0$, v_0 , X_0 , Y_0 , au calcul des petites planètes par groupes, il nous suffit de remplacer dans les formules (35^{ter}) , (36^{ter}) , (38) , les $\xi_{0,h}$, $\eta_{0,h}$, $(x^{\theta-1})_{0,h}$, $(y^{\theta})_{0,h}$, par leurs développements suivants les puissances de w .

Nous remarquerons que nous n'avons pas donné encore les développements de $\xi_{0,h}$ et de $\eta_{0,h}$ suivant les puissances de w , mais, comme l'on a :

$$\left\{\begin{aligned} 2\,\xi_{0,h} &= (x^{\theta-1})_{0,h} + (y^{\theta})_{0,h} \\ 2\,\eta_{0,h} &= (x^{\theta-1})_{0,h} - (y^{\theta})_{0,h} \end{aligned}\right.$$

il suffit d'ajouter membre à membre ou de soustraire les formules de même rang (80) et (81) pour les obtenir.

Remarquons aussi que le calcul des développements de X_0 et Y_0 est immédiat car leurs coefficients ne sont autres que les coefficients (80).

Il nous reste à calculer les développements de $\left(\frac{r}{a}\right)_0$ et de v_0 .

Nous poserons pour cela, afin de simplifier les formules :

$$\xi_{0,h} = \xi^{(0)}_{0,h} + w\,\xi^{(1)}_{0,h} + w^2\,\xi^{(2)}_{0,h} \ldots\ldots \qquad \eta_{0,h} = \eta^{(0)}_{0,h} + w\,\eta^{(1)}_{0,h} + w^2\,\eta^{(2)}_{0,h} \ldots\ldots$$

Ceci dit, dans les formules (35^{ter}) et (36^{ter}), nous remplacerons les $\xi_{0,h}$ et les $\eta_{0,h}$ par leurs développements suivants les puissances de w et, effectuant les opérations, en nous bornant à conserver les termes en w et w^2 nous obtiendrons les développements :

$$r_{0,h} = r^{(0)}_{0,h} + w r^{(1)}_{0,h} + w^2 r^{(2)}_{0,h} \ldots\ldots$$
$$l_{0,h} = l^{(0)}_{0,h} + w l^{(1)}_{0,h} + w^2 l^{(2)}_{0,h} \ldots\ldots$$

avec :

$$(85)\quad \left\{\begin{aligned} r^{(0)}_{0,0} &= 1 + [\eta^{(0)}_{0,2}]^2 + [\eta^{(0)}_{0,4}]^2 - 2\,\xi^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4} + \ldots \\ r^{(1)}_{0,0} &= 2\,\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,2} + 2\,\eta^{(0)}_{0,4}\,\eta^{(1)}_{0,4} - 2\,\xi^{(1)}_{0,2}\,[\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4}] - \ldots\ldots \\ r^{(2)}_{0,0} &= \Big[[\eta^{(1)}_{0,2}]^2 + 2\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(2)}_{0,2}\Big] + \Big[[\eta^{(1)}_{0,4}]^2 + 2\,\eta^{(0)}_{0,4}\,\eta^{(1)}_{0,4}\Big] - 2\,\xi^{(0)}_{0,2}\,[\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(2)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,4} + \\ &\quad + \eta^{(2)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4}] - 2\,\xi^{(1)}_{0,2}\,[\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4}] - 2\,\xi^{(2)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4} + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$(86)\quad \left\{\begin{aligned} r^{(0)}_{0,2} &= 2\,\xi^{(0)}_{0,2} - \xi^{(0)}_{0,2}\,[\eta^{(0)}_{0,2}]^2 + 2\,\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4} + \ldots\ldots \\ r^{(1)}_{0,2} &= 2\,\xi^{(1)}_{0,2} - 2\,\xi^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,2} - \xi^{(1)}_{0,2}\,[\eta^{(0)}_{0,2}]^2 + 2\,[\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4}] + \ldots\ldots \\ r^{(2)}_{0,2} &= 2\,\xi^{(2)}_{0,2} - \xi^{(0)}_{0,2}\Big[[\eta^{(1)}_{0,2}]^2 + 2\,\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(2)}_{0,2}\Big] - 2\,\xi^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,2} - \xi^{(0)}_{0,2}\,[\eta^{(1)}_{0,2}]^2 + \\ &\quad + 2\,[\eta^{(2)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,4} + \eta^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(2)}_{0,4}] + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned} r^{(0)}_{0,4} &= 2\,\xi^{(0)}_{0,4} - [\eta^{(0)}_{0,4}]^2 - \ldots\ldots \\ r^{(1)}_{0,4} &= 2\,\xi^{(1)}_{0,4} - 2\,\eta^{(0)}_{0,4}\,\eta^{(1)}_{0,4} - \ldots\ldots \\ r^{(2)}_{0,4} &= 2\,\xi^{(2)}_{0,4} - \Big[[\eta^{(1)}_{0,4}]^2 + 2\,\eta^{(0)}_{0,4}\,\eta^{(2)}_{0,4}\Big] - \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$(88)\quad \left\{ \begin{aligned}
l^{(0)}_{0,2} &= 2\eta^{(0)}_{0,2} - 2\xi^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4} + 2\eta^{(0)}_{0,2}\,\xi^{(0)}_{0,4} \;\ldots \\
l^{(1)}_{0,2} &= 2\eta^{(1)}_{0,2} - 2\,[\,\xi^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,4} + \xi^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4}\,] + 2\,[\,\eta^{(0)}_{0,2}\,\xi^{(1)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2}\,\xi^{(0)}_{0,4}\,] \;\ldots \\
l^{(2)}_{0,2} &= 2\eta^{(2)}_{0,2} - 2\,[\xi^{(2)}_{0,2}\,\eta^{(2)}_{0,4} + \xi^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,4} + \xi^{(2)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4}] + 2\,[\eta^{(0)}_{0,2}\,\xi^{(2)}_{0,4} + \eta^{(1)}_{0,2}\,\xi^{(1)}_{0,4} + \eta^{(2)}_{0,2}\,\xi^{(0)}_{0,4}\,] \;\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.$$

$$(88^{\text{bis}})\quad \left\{ \begin{aligned}
l^{(0)}_{0,4} &= 2\eta^{(0)}_{0,4} - 2\xi^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,2} - 2\xi^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,6} + 2\eta^{(0)}_{0,2}\,\xi^{(0)}_{0,6} \\
l^{(1)}_{0,4} &= 2\eta^{(1)}_{0,4} - 2\,[\xi^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,2} + \xi^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,2}] - 2\,[\xi^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,6} + \xi^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,6}] + 2\,[\eta^{(0)}_{0,2}\,\xi^{(1)}_{0,6} + \eta^{(1)}_{0,2}\,\xi^{(0)}_{0,6}] \\
l^{(2)}_{0,4} &= 2\eta^{(2)}_{0,4} - 2\,[\xi^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(2)}_{0,2} + \xi^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,2} + \xi^{(2)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,2}] - 2\,[\xi^{(0)}_{0,2}\,\eta^{(2)}_{0,6} + \xi^{(1)}_{0,2}\,\eta^{(1)}_{0,6} + \xi^{(2)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,6}] + \\
&\quad + 2\,[\eta^{(0)}_{0,2}\,\xi^{(2)}_{0,6} + \eta^{(1)}_{0,2}\,\xi^{(1)}_{0,6} + \eta^{(2)}_{0,2}\,\xi^{(0)}_{0,6}] + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.$$

Avant de nous occuper des formules qui donnent les compléments δX , δY , $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$, δv , et les coordonnées z et s , nous devons calculer le développement trigonométrique de $\rho_0{}^n$ avec $n = 1$, 2 , 3 et son développement suivant les puissances de ϖ .

Rappelons-nous que :

$$\rho_0{}^n = (\xi^2{}_0 - \eta^2{}_0)^{-\frac{n}{2}}$$

En mettant ξ_0 en facteur, développant le radical par la formule du binome et mettant $1 + \xi'_0$ à la place de ξ_0 , nous pouvons écrire :

$$\rho_0{}^n = 1 - \frac{n}{1}\,\xi'_0 + \frac{n\,(n+1)}{1.2}\,\xi'_0{}^2 \;\ldots\; + \frac{n}{2}\,\eta^2{}_0 \left(1 - \frac{n+2}{1}\,\xi'_0 + \;\ldots\right) + \frac{n\,(n+2)}{2.4}\,\eta^4{}_0\,(1 \;\ldots\ldots) \;\ldots\ldots$$

Remplaçant maintenant ξ'_0 et η_0 par leurs développements en fonction de θ et transformant les exponentielles en lignes trigonométriuues, nous obtiendrons pour $\rho_0{}^n$ le développement suivant :

$$(89) \qquad \rho_0{}^n = (\rho^n{}_{0,0}) + (\rho^n{}_{0,2}) \cos 2V + (\rho^n{}_{0,4}) \cos 4V + \;\ldots\ldots$$

avec

$$(\rho^n{}_0)_0 = 1 + n\,(n+1)\,\xi^2{}_{0,2} + n\,(n+1)\,\xi^2{}_{0,4} - n\,\eta^2{}_{0,2} - n\,\eta^2{}_{0,4} - n\,(n+2)\,\xi_{0,4}\,\eta^2{}_{0,2} - \frac{1}{2}\,n\,(n+2)\,(n+3)\,\xi^2{}_{0,2}\,\eta^2{}_{0,2} + \;\ldots\ldots$$

$$(\rho^n{}_0)_2 = -\,2\,n\,\xi_{0,2} + 2n\,(n+1)\,\xi_{0,2}\,\xi_{0,4} - 2n\,\eta_{0,2}\,\eta_{0,4} + n\,(n+2)\,\xi_{0,2}\,\eta^2{}_{0,2} \;\ldots\ldots$$

$$(\rho^n{}_0)_4 = -\,2\,n\,\xi_{0,4} + n\,(n+1)\,\xi^2{}_{0,2} + n\,\eta^2{}_{0,2} + 2n\,(n+2)\,\eta_{0,2}\,\eta_{0,4} + 2n\,(n+1)\,\xi_{0,4}\,\eta^2{}_{0,2} \;\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ceci fait, remplaçons les $\xi_{0,h}$ et $\eta_{0,h}$ par leurs développements suivant les puissances de ϖ , ordonnons et arrêtons nous aux termes en ϖ^2 , nous obtiendrons pour les divers coefficients $(\rho^n{}_0)_h$ les développements :

$$(\rho^n{}_0)_h = (\rho^n{}_0)_h{}^{(0)}\;\varpi\,(\rho^n{}_0)_h{}^{(1)} + (\varpi^2\,(\rho^n{}_0)_h{}^{(2)} + \;\ldots\ldots$$

avec :

$$(90)\quad \left\{ \begin{aligned}
(\rho^n{}_0)_0{}^{(0)} &= 1 + n\,(n+1)\,[\xi^{(0)}{}_{0,2}]^2 + n\,(n+1)\,[\xi^{(0)}{}_{0,4}]^2 - n\,[\eta^{(0)}{}_{0,2}]^2 - n\,[\eta^{(0)}{}_{0,4}]^2 \;\ldots \\
(\rho^n{}_0)_0{}^{(1)} &= 2\,n\,(n+1)\,[\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(1)}{}_{0,2} + \xi^{(0)}{}_{0,4}\,\xi^{(1)}{}_{0,4}] - 2n\,[\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(1)}{}_{0,2} + \eta^{(0)}{}_{0,4}\,\eta^{(1)}{}_{0,4}] \;\ldots \\
(\rho^n{}_0)_0{}^{(2)} &= n\,(n+1)\,[2\,\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(2)}{}_{0,2} + (\xi^{(1)}{}_{0,2})^2 + 2\,\xi^{(0)}{}_{0,4}\,\xi^{(2)}{}_{0,4} + (\xi^{(1)}{}_{0,4})^2] - n\,[2\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(2)}{}_{0,2} + (\eta^{(1)}{}_{0,2})^2 + \\
&\quad + 2\eta^{(0)}{}_{0,4}\,\eta^{(2)}{}_{0,4} + (\eta^{(1)}{}_{0,4})^2\,] \;\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.$$

$$
(91) \quad \begin{cases}
(\rho^{n}{}_{0})_{2}{}^{(0)} = -\,2n\,\xi^{(0)}{}_{0,2} + 2n\,(n+1)\,\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(0)}{}_{0,4} - 2n\,\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(0)}{}_{0,4} \quad \ldots \\
(\rho^{n}{}_{0})_{2}{}^{(1)} = -\,2n\,\xi^{(1)}{}_{0,2} + 2n\,(n+1)\,[\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(1)}{}_{0,4} + \xi^{(1)}{}_{0,2}\,\xi^{(0)}{}_{0,4}] - 2n\,[\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(1)}{}_{0,4} + \eta^{(1)}{}_{0,2}\,\eta^{(0)}{}_{0,4}] \quad \ldots \\
(\rho^{n}{}_{0})_{2}{}^{(2)} = -\,2n\,\xi^{(2)}{}_{0,2} + 2n\,(n+1)\,[\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(2)}{}_{0,4}\,\xi^{(1)}{}_{0,2}\,\xi^{(1)}{}_{0,4} + \xi^{(2)}{}_{0,2}\,\xi^{(0)}{}_{0,4}] - 2n\,[\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(2)}{}_{0,4} + \\
\qquad\qquad + \eta^{(1)}{}_{0,2}\,\eta^{(1)}{}_{0,4} + \eta^{(2)}{}_{0,2}\,\eta^{(0)}{}_{0,4}] \quad \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

$$
(92) \quad \begin{cases}
(\rho^{n}{}_{0})_{4}{}^{(0)} = -\,2n\,\xi^{(0)}{}_{0,4} + n\,(n+1)\,[\xi^{(0)}{}_{0,2}]^{2} + n\,[\eta^{(0)}{}_{0,2}]^{2} + 2n\,(n+2)\,\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(0)}{}_{0,4} \quad \ldots \\
(\rho^{n}{}_{0})_{4}{}^{(1)} = -\,2n\,\xi^{(1)}{}_{0,4} + 2n\,(n+1)\,\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(1)}{}_{0,2} + 2n\,\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(1)}{}_{0,2} + 2n\,(n+2)\,[\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(1)}{}_{0,4} + \eta^{(1)}{}_{0,2}\,\eta^{(0)}{}_{0,4}] \quad \ldots \\
(\rho^{n}{}_{0})_{4}{}^{(2)} = -\,2n\,\xi^{(2)}{}_{0,4} + 2n\,(n+1)\,[\,2\xi^{(0)}{}_{0,2}\,\xi^{(2)}{}_{0,2} + (\xi^{(1)}{}_{0,2})^{2}\,] + n\,[\,2\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(2)}{}_{0,2} + (\eta^{(1)}{}_{0,2})^{2}\,] + \\
\qquad\qquad + 2n\,(n+2)\,[\,\eta^{(0)}{}_{0,2}\,\eta^{(2)}{}_{0,4} + \eta^{(1)}{}_{0,2}\,\eta^{(1)}{}_{0,4} + \eta^{(2)}{}_{0,2}\,\eta^{(0)}{}_{0,4}\,] \quad \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

26. — Nous pouvons aborder le calcul des autres séries. Nous remarquerons tout d'abord que toutes les séries qui entrent dans les formules donnant δX , δY , z , $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$, δv , s , sont des fonctions d'une ou de plusieurs des fonctions P , Q , Δ , P^2 , Q^2 , Δ^2 , DQ , $K\rho^3{}_0 + 2\nu m^2$, $P\Delta$, $u\Delta$, $v\Delta$, qui sont elles-mêmes des fonctions de u et de v d'après les formules (63) . Nous devons donc commencer par développer u et v suivant les puissances de w .

Nous reportant aux formules (64) qui donnent les coefficients u_k et v_k en fonction de $\xi_{0,k}$ et $\eta_{0,k}$, nous voyons que ces coefficients peuvent s'écrire en fonction de w sous la forme :

$$
(93) \quad \begin{cases}
u_k = (\xi^{(0)}{}_{0,k} + k\,\eta^{(0)}{}_{0,k}) + w\,(\xi^{(1)}{}_{0,k} + k\,\eta^{(1)}{}_{0,k}) + w^2\,(\xi^{(2)}{}_{0,k} + k\,\eta^{(2)}{}_{0,k}) + \ldots \\
v_k = (\eta^{(0)}{}_{0,k} + k\,\xi^{(0)}{}_{0,k}) + w\,(\eta^{(1)}{}_{0,k} + k\,\xi^{(1)}{}_{0,k}) + w^2\,(\eta^{(2)}{}_{0,k} + k\,\xi^{(2)}{}_{0,k}) + \ldots
\end{cases}
$$

ce qui donne les développements cherchés de u et de v .

Pour les développements des autres fonctions, nous nous reporterons à la troisième partie où sont données en fonction de u_k , v_k , des $\xi_{0,k}$. $\eta_{0,k}$, $\rho_{0,k}$, les développements de ces fonctions en séries dans le cas général. Nous remplacerons dans ces développements u_k , v_k , $\rho_{0,k}$, $\xi_{0,k}$, $\eta_{0,k}$, par leurs développements suivant les puissances de w , nous ordonnerons et nous arrêterons à w^2 car, dans la plupart des cas, w sera très petit. En donnant à chaque coefficient la forme générale :

$$
C = C^{(0)} + C^{(1)}\,w + C^{(2)}\,w^2 + \ldots\ldots
$$

nous obtiendrons les développements suivants :

$$
(93^{\text{bis}}) \qquad P_0{}^{(0)} = 2 \qquad P_0{}^{(1)} = -\,(1+m_0) \qquad P_0{}^{(2)} = m_0\,(1+m_0) \quad \ldots\ldots
$$

$$
(94) \qquad P_2{}^{(0)} = 2v_2{}^{(0)} - 2u_2{}^{(0)}\,v_4{}^{(0)} + \ \ldots\ .
$$

$$
(94) \quad \begin{cases}
P_2{}^{(1)} = 2v_2{}^{(1)} - 2\,[u_2{}^{(0)}\,v_4{}^{(1)} + u_2{}^{(1)}\,v_4{}^{(0)}] - 2\,[v_2{}^{(0)}\,u_4{}^{(1)} + v_2{}^{(1)}\,u_4{}^{(0)}] \quad \ldots \\
P_2{}^{(2)} = 2v_2{}^{(2)} - 2\,[u_2{}^{(0)}\,v_4{}^{(2)} + u_2{}^{(1)}\,v_4{}^{(1)} + u_2{}^{(2)}\,v_4{}^{(0)}] - 2\,[v_2{}^{(0)}\,u_4{}^{(2)} + v_2{}^{(1)}\,u_4{}^{(1)} + v_2{}^{(2)}\,u_4{}^{(0)}] \quad \ldots \\
\ldots\ldots\ \ldots\ \ldots
\end{cases}
$$

$$
(94) \quad \begin{cases}
P_4{}^{(0)} = 4v_4{}^{(0)} - 4u_2{}^{(0)} \quad \ldots \\
P_4{}^{(1)} = 4v_4{}^{(1)} - 4\,[u_2{}^{(0)}\,v_2{}^{(1)} + u_2{}^{(1)}\,v_2{}^{(0)}] \quad \ldots \\
P_4{}^{(2)} = 4v_4{}^{(2)} - 4\,[u_2{}^{(0)}\,v_2{}^{(2)} + u_2{}^{(1)}\,v_2{}^{(1)} + u_2{}^{(2)}\,v_2{}^{(0)}] \quad \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ \ldots
\end{cases}
$$

$$\tag{95}\left\{\begin{aligned}
Q_0 &= O\\
Q_2^{(0)} &= 2u_2^{(0)} - 2u_2^{(0)}\,v_4^{(0)} + 2v_2^{(0)}\,u_4^{(0)}\ \ldots\\
Q_2^{(1)} &= 2u_2^{(1)} - 2\left[u_2^{(0)}\,v_4^{(1)} + u_2^{(1)}\,v_4^{(0)}\right] + 2\left[v_2^{(0)}\,u_4^{(1)} + v_2^{(1)}\,u_4^{(0)}\right]\ \ldots\\
Q_2^{(2)} &= 2u_2^{(2)} - 2\left[u_2^{(0)}\,v_4^{(2)} + u_2^{(1)}\,v_4^{(1)} + u_2^{(2)}\,v_4^{(0)}\right] + 2\left[v_2^{(0)}\,u_4^{(2)} + v_2^{(1)}\,u_4^{(1)} + v_2^{(2)}\,u_4^{(0)}\right]\ \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

$$\tag{95}\left\{\begin{aligned}
Q_4^{(0)} &= 4u_4^{(0)} - 2\left[u_2^{(0)}\right]^2 - 2\left[v_2^{(0)}\right]^2\ \ldots\\
Q_4^{(1)} &= 4u_4^{(1)} - 4u_2^{(0)}\,u_2^{(1)} - 4v_2^{(0)}\,v_2^{(1)}\ \ldots\ldots\\
Q_4^{(2)} &= 4u_4^{(2)} - 2\left[\left[u_2^{(1)}\right]^2 + 2u_2^{(0)}\,u_2^{(2)}\right] - 2\left[\left[v_2^{(1)}\right]^2 + 2v_2^{(0)}\,v_2^{(2)}\right]\ \ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

$$\tag{96}\left\{\begin{aligned}
\Delta_0^{(0)} &= 1 + 2\left[u_2^{(0)}\right]^2 - \left[v_2^{(0)}\right]^2\ \ldots\ldots\\
\Delta_0^{(1)} &= 4u_2^{(0)}\,u_2^{(1)} - 2v_2^{(0)}\,v_2^{(1)}\ \ldots\ldots\\
\Delta_0^{(2)} &= 2\left[\left[u_2^{(1)}\right]^2 + 2u_2^{(0)}\,u_2^{(2)}\right] - \left[\left[v_2^{(1)}\right]^2 + 2v_2^{(0)}\,v_2^{(2)}\right]\ \ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

$$\tag{97}\left\{\begin{aligned}
\Delta_2^{(0)} &= -u_2^{(0)} + \frac{1}{2}\,u_2^{(0)}\,v_4^{(0)} - v_2^{(0)}\,u_4^{(0)} + \ldots\ldots\\
\Delta_2^{(1)} &= -u_2^{(1)} + \frac{1}{2}\left[u_2^{(0)}\,v_4^{(1)} + u_2^{(1)}\,v_4^{(0)}\right] - \left[v_2^{(0)}\,u_4^{(1)} + v_2^{(1)}\,u_4^{(0)}\right] + \ldots\ldots\\
\Delta_2^{(2)} &= -u_2^{(2)} + \frac{1}{2}\left[u_2^{(0)}\,v_4^{(2)} + u_2^{(1)}\,v_4^{(1)} + u_2^{(2)}\,v_4^{(0)}\right] - \left[v_2^{(0)}\,u_4^{(2)} + v_2^{(1)}\,u_4^{(2)} + v_2^{(2)}\,u_4^{(0)}\right]\ \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

$$\tag{98}\left\{\begin{aligned}
\Delta_4^{(0)} &= \left[u_2^{(0)}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[v_2^{(0)}\right]^2 - u_4^{(0)}\ \ldots\ldots\\
\Delta_4^{(1)} &= 2u_2^{(0)}\,u_2^{(1)} + v_2^{(0)}\,v_2^{(1)} - u_4^{(1)}\ \ldots\ldots\\
\Delta_4^{(2)} &= \left[\left[u_2^{(1)}\right]^2 + 2u_2^{(0)}\,u_2^{(2)}\right] + \frac{1}{2}\left[\left[v_2^{(1)}\right]^2 + 2v_2^{(0)}\,v_2^{(2)}\right] - u_4^{(2)}\ \ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Les formules que nous venons d'obtenir, de (90) à (98) inclus, vont nous permettre de développer toutes les autres fonctions. En suivant toujours la même marche, nous obtiendrons les développements suivants :

$$\tag{99}\left\{\begin{aligned}
(P^2)_0^{(0)} &= (P_0^{(0)})^2 + 2\,(P_2^{(0)})^2\ \ldots\ldots\\
(P^2)_0^{(1)} &= 2P_0^{(0)}\,P_0^{(1)} + 4\,P_2^{(0)}\,P_2^{(1)}\ \ldots\ldots\\
(P^2)_0^{(2)} &= \left[\left[P_0^{(1)}\right]^2 + 2P_0^{(0)}\,P_0^{(2)}\right] + 2\left[\left[P_2^{(1)}\right]^2 + 2P_2^{(0)}\,P_2^{(2)}\right]\ \ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

$$\tag{100}\left\{\begin{aligned}
(P^2)_2^{(0)} &= 2P_0^{(0)}\,P_2^{(0)} + \ldots\ldots\\
(P^2)_2^{(1)} &= 2\left[P_0^{(0)}\,P_2^{(1)} + P_0^{(1)}\,P_2^{(0)}\right] + \ldots\\
(P^2)_2^{(2)} &= 2\left[P_0^{(0)}\,P_2^{(2)} + P_0^{(1)}\,P_2^{(1)} + P_0^{(2)}\,P_2^{(0)}\right] + \ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

$$
(101)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(P_2)_4^{(0)} = 2P_0^{(0)} P_4^{(0)} + [P_2^{(0)}]^2 \; \ldots\ldots \\
&(P^2)_4^{(1)} = 2\,[P_0^{(0)} P_4^{(1)} + P_0^{(1)} P_4^{(0)}] + 2P_2^{(0)} P_2^{(1)} \; \ldots\ldots \\
&(P^2)_4^{(2)} = 2\,[P_0^{(0)} P_4^{(2)} + P_0^{(1)} P_4^{(1)} + P_0^{(2)} P_4^{(0)}] + \Big[[P_2^{(1)}]^2 + 2P_2^{(0)} P_2^{(2)} \Big] \; \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(102)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(Q^2)_0^{(0)} = -\,2\,[Q_2^{(0)}]^2 - \ldots\ldots \\
&(Q^2)_0^{(1)} = -\,4Q_2^{(0)} Q_2^{(1)} - \ldots\ldots \\
&(Q^2)_0^{(2)} = -\,2 \Big[[Q_2^{(1)}]^2 + 2Q_2^{(0)} Q_2^{(2)} \Big] - \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(103)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(Q^2)_2^{(0)} = -\,2Q_2^{(0)} Q_4^{(0)} \; \ldots\ldots \\
&(Q^2)_2^{(1)} = -\,2\,[Q_2^{(0)} Q_4^{(1)} + Q_2^{(1)} Q_4^{(0)}] \; \ldots\ldots \\
&(Q^2)_2^{(2)} = -\,2\,[Q_2^{(0)} Q_4^{(2)} + Q_2^{(1)} Q_4^{(1)} + Q_2^{(2)} Q_4^{(0)}] \; \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(104)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(Q^2)_4^{(0)} = [Q_2^{(0)}]^2 \; \ldots\ldots \\
&(Q^2)_4^{(1)} = 2Q_2^{(0)} Q_2^{(1)} \; \ldots\ldots \\
&(Q^2)_4^{(2)} = \Big[[Q_2^{(1)}]^2 + 2Q_2^{(0)} Q_2^{(2)} \Big] \; \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(105)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(\Delta^2)_0^{(0)} = [\Delta_0^{(0)}]^2 + 2\,[\Delta_2^{(0)}]^2 + \ldots\ldots \\
&(\Delta^2)_0^{(1)} = 2\Delta_0^{(0)} \Delta_0^{(1)} + 4\Delta_2^{(0)} \Delta_2^{(1)} + \ldots\ldots \\
&(\Delta^2)_0^{(2)} = \Big[[\Delta_0^{(1)}]^2 + 2\Delta_0^{(0)} \Delta_0^{(2)} \Big] + 2 \Big[[\Delta_2^{(1)}]^2 + 2\Delta_2^{(0)} \Delta_2^{(2)} \Big] \; \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(106)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(\Delta^2)_2^{(0)} = 2\Delta_0^{(0)} \Delta_2^{(0)} + \ldots\ldots \\
&(\Delta^2)_2^{(1)} = 2\,[\Delta_0^{(0)} \Delta_2^{(1)} + \Delta_0^{(1)} \Delta_2^{(0)}] + \ldots\ldots \\
&(\Delta^2)_2^{(2)} = 2\,[\Delta^{(0)} \Delta_2^{(2)} + \Delta_0^{(1)} \Delta_2^{(1)} + \Delta_0^{(2)} \Delta_2^{(0)}] + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(107)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(\Delta^2)_4^{(0)} = 2\Delta_0^{(0)} \Delta_4^{(0)} + \ldots\ldots \\
&(\Delta^2)_4^{(1)} = 2\,[\Delta_0^{(0)} \Delta_4^{(1)} + \Delta_0^{(1)} \Delta_4^{(0)}] + \ldots\ldots \\
&(\Delta^2)_4^{(2)} = 2\,[\Delta_0^{(0)} \Delta_4^{(2)} + \Delta_0^{(1)} \Delta_4^{(1)} + \Delta_0^{(2)} \Delta_4^{(0)}] + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(108)\qquad (DQ)_0 = 0
$$

$$
(109)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(DQ)_2^{(0)} = 2Q_2^{(0)} \;\ldots\ldots \\
&(DQ)_2^{(1)} = 2Q_2^{(1)} \;\ldots\ldots \\
&(DQ)_2^{(2)} = 2Q_2^{(2)} \;\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
\qquad\qquad
(110)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(DQ)_4^{(0)} = 4Q_4^{(0)} \;\ldots\ldots \\
&(DQ)_4^{(1)} = 4Q_4^{(1)} \;\ldots\ldots \\
&(DQ)_4^{(2)} = 4Q_4^{(2)} \;\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(111)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(P\Delta)_0^{(0)} = P_0^{(0)}\,\Delta_0^{(0)} + 2P_2^{(0)}\,\Delta_2^{(0)} + \ldots\ldots \\
&(P\Delta)_0^{(1)} = [\,P_0^{(0)}\,\Delta_0^{(1)} + P_0^{(1)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + 2\,[\,P_2^{(0)}\,\Delta_2^{(1)} + P_2^{(1)}\,\Delta_2^{(0)}\,] + \ldots\ldots \\
&(P\Delta)_0^{(2)} = [\,P_0^{(0)}\,\Delta_0^{(2)} + P_0^{(1)}\,\Delta_0^{(1)} + P_0^{(2)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + 2\,[\,P_2^{(0)}\,\Delta_2^{(2)} + P_2^{(1)}\,\Delta_2^{(1)} + P_2^{(2)}\,\Delta_2^{(0)}\,] + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(112)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(P\Delta)_2^{(0)} = P_0^{(0)}\,\Delta_2^{(0)} + P_2^{(0)}\,\Delta_0^{(0)} + \ldots\ldots \\
&(P\Delta)_2^{(1)} = [\,P_0^{(0)}\,\Delta_2^{(1)} + P_0^{(1)}\,\Delta_2^{(0)}\,] + [\,P_2^{(0)}\,\Delta_0^{(1)} + P_2^{(1)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + \ldots\ldots \\
&(P\Delta)_2^{(2)} = [\,P_0^{(0)}\,\Delta_2^{(2)} + P_0^{(1)}\,\Delta_2^{(1)} + P_0^{(2)}\,\Delta_2^{(0)}\,] + [\,P_2^{(0)}\,\Delta_0^{(2)} + P_2^{(1)}\,\Delta_2^{(1)} + P_2^{(2)}\,\Delta_2^{(0)}\,] + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(113)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(P\Delta)_4^{(0)} = P_0^{(0)}\,\Delta_4^{(0)} + P_4^{(0)}\,\Delta_0^{(0)} + \ldots\ldots \\
&(P\Delta)_4^{(1)} = [\,P_0^{(0)}\,\Delta_4^{(1)} + P_0^{(1)}\,\Delta_4^{(0)}\,] + [\,P_4^{(0)}\,\Delta_0^{(1)} + P_4^{(1)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + \ldots\ldots \\
&(P\Delta)_4^{(2)} = [\,P_0^{(0)}\,\Delta_4^{(2)} + P_0^{(1)}\,\Delta_4^{(1)} + P_0^{(2)}\,\Delta_4^{(0)}\,] + [\,P_4^{(0)}\,\Delta_0^{(2)} + P_4^{(1)}\,\Delta_0^{(1)} + P_4^{(2)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(114)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(u\Delta)_0^{(0)} = \Delta_0^{(0)} + 2u_2^{(0)}\,\Delta_2^{(0)} + \ldots\ldots \\
&(u\Delta)_0^{(1)} = \Delta_0^{(1)} + 2\,[\,u_2^{(0)}\,\Delta_2^{(1)} + u_2^{(1)}\,\Delta_2^{(0)}\,] + \ldots\ldots \\
&(u\Delta)_0^{(2)} = \Delta_0^{(2)} + 2\,[\,u_2^{(0)}\,\Delta_2^{(2)} + u_2^{(1)}\,\Delta_2^{(1)} + u_2^{(2)}\,\Delta_2^{(0)}\,] + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(115)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(u\Delta)_2^{(0)} = u_2^{(0)}\,\Delta_0^{(0)} + \Delta_2^{(0)} + \ldots\ldots \\
&(u\Delta)_2^{(1)} = [\,u_2^{(0)}\,\Delta_0^{(1)} + u_2^{(1)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + \Delta_2^{(1)} + \ldots\ldots \\
&(u\Delta)_2^{(2)} = [\,u_2^{(0)}\,\Delta_0^{(2)} + u_2^{(1)}\,\Delta_0^{(1)} + u_2^{(2)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + \Delta_2^{(2)} + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(116)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(u\Delta)_4^{(0)} = u_4^{(0)}\,\Delta_0^{(0)} + u_2^{(0)}\,\Delta_2^{(0)} + \ldots\ldots \\
&(u\Delta)_4^{(1)} = [\,u_4^{(0)}\,\Delta_0^{(1)} + u_4^{(1)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + [\,u_2^{(0)}\,\Delta_2^{(1)} + u_2^{(1)}\,\Delta_2^{(0)}\,] + \ldots\ldots \\
&(u\Delta)_4^{(2)} = [\,u_4^{(0)}\,\Delta_0^{(2)} + u_4^{(1)}\,\Delta_0^{(1)} + u_4^{(2)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + [\,u_2^{(0)}\,\Delta_2^{(2)} + u_2^{(1)}\,\Delta_2^{(1)} + u_2^{(2)}\,\Delta_2^{(0)}\,] + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

$$
(117)\qquad (v\Delta)_0 = 0
$$

$$(118)\quad \begin{cases} (v\Delta)_2^{(0)} = v_2^{(0)}\,\Delta_0^{(0)} + \dots\dots \\ (v\Delta)_2^{(1)} = [\,v_2^{(0)}\,\Delta_0^{(1)} + v_2^{(1)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + \dots\dots \\ (v\Delta)_2^{(2)} = [\,v_2^{(0)}\,\Delta_0^{(2)} + v_2^{(1)}\,\Delta_0^{(1)} + v_2^{(2)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + \dots\dots \\ \dots\ \dots\dots \end{cases}$$

$$(119)\quad \begin{cases} (v\Delta)_4^{(0)} = v_4^{(0)}\,\Delta_0^{(0)} + \dots\dots \\ (v\Delta)_4^{(1)} = [\,v_4^{(0)}\,\Delta_0^{(1)} + v_4^{(1)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + \dots\dots \\ (v\Delta)_4^{(2)} = [\,v_4^{(0)}\,\Delta_0^{(2)} + v_4^{(1)}\,\Delta_0^{(1)} + v_4^{(2)}\,\Delta_0^{(0)}\,] + \dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Les premières séries que nous devons étudier maintenant sont celles qui représentent les fonctions $K\rho^3_0 + 2\nu m^2$ et :

$$W = 2P^2 - Q^2 - DQ - (K\rho^3_0 + 2\nu m^2)$$

et leurs expressions suivant les puissances de w s'obtiendront immédiatement en vertu des formules (99), (100), (101), (102), (103), (104), (108), (109), (110), (123), (124), (125).

Prenons ensuite les séries représentées par les formules (67). Leurs coefficients seront calculés au moyen des formules (64^{bis}) et (64,) ce qui est facile car on connaît les développements suivant les puissances de w des coefficients des équations (64) et les équations :

$$\delta l_{1,0} = 2 \qquad\qquad \sigma_{1,0} = 1$$

*dans les premiers membres desquelles on mettra les développements correspondant suivant les puissances de w, don-*neront les valeurs de ω et ω' en fonction de w.

Nous pouvons donc aborder l'étude des séries que donnent $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$, δv, z, s.

Nous remarquons d'abord que les séries qui donnent $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$ et δv contiennent les facteurs $\rho_0\xi_0$, $\rho_0\eta_0$, $\rho^2_0\xi_0$, $\rho^2_0\eta_0$; nous les calculerons aisément au moyen des formules (120), (121), (122), (90), (91), (92), et des formules :

$$\xi_{o,h} = \xi^{(0)}_{o,h} + w\,\xi^{(1)}_{o,h} + w^2\,\xi^{(2)}_{o,h} \quad \dots\dots$$
$$\eta_{o,h} = \eta^{(0)}_{o,h} + w\,\eta^{(1)}_{o,h} + w^2\,\eta^{(2)}_{o,h} \quad \dots\dots$$

Ordonnant par rapport aux puissances de w et nous arrêtant à w^2, nous obtiendrons :

$$(120)\qquad M_0^{(0)} = \rho^{(0)}_{0,0} + \rho^{(0)}_{0,2}\,\xi^{(0)}_{0,2} + \quad \dots$$

$$(121)\quad \begin{cases} M_0^{(1)} = \rho^{(1)}_{0,0} + [\rho^{(0)}_{0,0}\,\xi^{(1)}_{0,2} + \rho^{(1)}_{0,2}\,\xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ M_0^{(2)} = \rho^{(2)}_{0,0} + [\rho^{(0)}_{0,2}\,\xi^{(2)}_{0,2} + \xi^{(1)}_{0,2}\,\xi^{(1)}_{0,2} + \rho^{(2)}_{0,2}\,\xi^{(2)}_{0,2}] + \dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(122)\quad \begin{cases} M_2^{(0)} = \rho^{(0)}_{0,2} + 2\rho^{(0)}_{0,0}\,\xi^{(0)}_{0,2} + \dots \\ M_2^{(1)} = \rho^{(1)}_{0,2} + 2\,[\rho^{(0)}_{0,0}\,\xi^{(1)}_{0,2} + \rho^{(1)}_{0,0}\,\xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ M_2^{(2)} = \rho^{(2)}_{0,2} + 2\,[\rho^{(0)}_{0,0}\,\xi^{(2)}_{0,2} + \rho^{(1)}_{0,0}\,\xi^{(1)}_{0,2} + \rho^{(2)}_{0,0}\,\xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ \dots\ \dots\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_4^{(0)} = \rho^{(0)}_{0,4} + 2\rho^{(0)}_{0,0}\,\xi^{(0)}_{0,4} + \dots \\ M_4^{(1)} = \rho^{(1)}_{0,4} + 2\,[\rho^{(0)}_{0,0}\,\xi^{(2)}_{0,4} + \rho^{(1)}_{0,4}\,\xi^{(0)}_{0,4}] + \dots \\ M_4^{(2)} = \rho^{(2)}_{0,4} + 2\,[\rho^{(0)}_{0,0}\,\xi^{(2)}_{0,4} + \rho^{(1)}_{0,0}\,\xi^{(1)}_{0,4} + \rho^{(2)}_{0,0}\,\xi^{(0)}_{0,4}] + \dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(124) $$N_0 = 0$$

(125)
$$\begin{cases} N_2^{(0)} = i\,[2\rho^{(0)}_{0,0}\,\eta^{(0)}_{0,2} + \dots] \\ N_2^{(1)} = i\left[2\,[\rho^{(0)}_{0,0}\,\eta^{(1)}_{0,2} + \rho^{(1)}_{0,0}\,\eta^{(0)}_{0,2}] + \dots\right] \\ N_2^{(2)} = i\left[2\,[\rho^{(0)}_{0,0}\,\eta^{(2)}_{0,2} + \rho^{(1)}_{0,0}\,\eta^{(1)}_{0,2} + \rho^{(2)}_{0,0}\,\eta^{(0)}_{0,2}] + \dots\right] \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(126)
$$\begin{cases} N_4^{(0)} = i\,[2\rho^{(0)}_{0,0}\,\eta^{(0)}_{0,4} + \dots] \\ N_4^{(1)} = i\left[2\,[\rho^{(0)}_{0,0}\,\eta^{(1)}_{0,4} + \rho^{(1)}_{0,0}\,\eta^{(0)}_{0,4}] + \dots\right] \\ N_4^{(2)} = i\left[2\,[\rho^{(0)}_{0,0}\,\eta^{(2)}_{0,4} + \rho^{(1)}_{0,0}\,\eta^{(1)}_{0,4} + \rho^{(2)}_{0,2}\,\eta^{(0)}_{0,4}] + \dots\right] \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(127)
$$\begin{cases} E_0^{(0)} = (\rho^2_0)_0^{(0)} + (\rho^2_0)_2^{(0)}\,\xi^{(0)}_{0,2} + \dots \\ E_0^{(1)} = (\rho^2_0)_0^{(1)} + [(\rho^2_0)_2^{(0)}\,\xi^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_2^{(1)}\,\xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ E_2^{(0)} = (\rho^2_0)_0^{(2)} + [(\rho^2_0)_2^{(0)}\,\xi^{(2)}_{0,2} + (\rho^2_0)_2^{(1)}\,\xi^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_2^{(2)}\,\xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(128)
$$\begin{cases} E_2^{(0)} = (\rho^2_0)_2^{(0)} + 2\,(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\xi^{(0)}_{0,2} + \dots \\ E_2^{(1)} = (\rho^2_0)_2^{(1)} + 2\,[(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\xi^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(1)}\,\xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ E_2^{(2)} = (\rho^2_0)_2^{(2)} + 2\,[(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\xi^{(2)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(1)}\,\xi^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(2)}\,\xi^{(0)}_{0,2}] + \dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(129)
$$\begin{cases} E_4^{(0)} = (\rho^2_0)_4^{(0)} + 2\,(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\xi^{(0)}_{0,4} + \dots \\ E_4^{(1)} = (\rho^2_0)_4^{(1)} + 2\,[(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\xi^{(1)}_{0,4} + (\rho^2_0)_0^{(1)}\,\xi^{(0)}_{0,4}] + \dots \end{cases}$$

(130)
$$\begin{cases} E_4^{(2)} = (\rho^2_0)_4^{(2)} + 2\,[(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\xi^{(2)}_{0,4} + (\rho^2_0)_0^{(1)}\,\xi^{(1)}_{0,4} + (\rho^2_0)_0^{(2)}\,\xi^{(0)}_{0,4}] + \dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(131) $$F_0 = 0$$

(132)
$$\begin{cases} F_2^{(0)} = i\,[2\,(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\eta^{(0)}_{0,2} + \dots] \\ F_2^{(1)} = i\left[2\,[(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\eta^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(1)}\,\eta^{(0)}_{0,2}] + \dots\right] \\ F_2^{(2)} = i\left[2\,[(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\eta^{(2)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(1)}\,\eta^{(1)}_{0,2} + (\rho^2_0)_0^{(2)}\,\eta^{(0)}_{0,2}] + \dots\right] \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(133)
$$\begin{cases} F_4^{(0)} = i\,[2\,(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\eta^{(0)}_{0,4} + \dots] \\ F_4^{(1)} = i\left[2\,[(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\eta^{(1)}_{0,4} + (\rho^2_0)_0^{(1)}\,\eta^{(0)}_{0,4}] + \dots\right] \\ F_4^{(2)} = i\left[2\,[(\rho^2_0)_0^{(0)}\,\eta^{(2)}_{0,4} + (\rho^2_0)_0^{(1)}\,\eta^{(1)}_{0,4} + (\rho^2_0)_0^{(2)}\,\eta^{(0)}_{0,4}] + \dots\right] \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Si nous combinons maintenant les valeurs que nous venons de trouver pour les coefficients M , N , E , F , avec les valeurs en fonction de w des $\delta\xi_{i,j}$ et des $\delta\eta_{i,j}$, nous obtiendrons les coefficients des développements trigonométriques de $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$, de δl et de s sous la forme générale suivante :

a) Coefficients du développement de $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$

(134)
$$R^{(0)}_{1,k} = \varepsilon\left[M_0^{(0)}\,\delta\xi^{(0)}_{1,k} + \frac{1}{2}\,M_2^{(0)}\,\delta\xi^{(0)}_{1,k-2} + \frac{1}{2}\,M_2^{(0)}\,\delta\xi^{(0)}_{1,k+2} + \dots + \frac{1}{2}\,i\,N_2\,\delta\eta^{(0)}_{1,k-2} - \frac{1}{2}\,i\,N_2\,\delta\eta^{(0)}_{1,k+2}\ \dots\right]$$

(135)
$$R^{(1)}_{1,k} = \varepsilon\Big[[M_0^{(0)}\,\delta\xi^{(1)}_{1,k} + M_0^{(1)}\,\delta\xi^{(0)}_{1,k}] + \frac{1}{2}\,[M_2^{(0)}\,\delta\xi^{(1)}_{1,k-2} + M_2^{(1)}\,\delta\xi^{(0)}_{1,k-2}] + \frac{1}{2}\,[M_2^{(0)}\,\delta\xi^{(1)}_{1,k+2} + M_2^{(1)}\,\delta\xi^{(0)}_{1,k+2}] +$$
$$+ \frac{1}{2}\,i\,[N_2^{(0)}\,\delta\eta^{(1)}_{1,k-2} + N_2^{(1)}\,\delta\eta^{(0)}_{1,k-2}] - \frac{1}{2}\,i\,[N_2^{(0)}\,\delta\eta^{(1)}_{1,k+2} + N_2^{(1)}\,\delta\eta^{(0)}_{1,k+2}]\ \dots\Big]$$

(136)
$$R^{(2)}_{1,k} = \varepsilon\Big[[M_0^{(0)}\,\delta\xi^{(2)}_{1,k} + M_0^{(1)}\,\delta\xi^{(1)}_{1,k} + M_0^{(2)}\,\delta\xi^{(0)}_{1,k}] + \frac{1}{2}\,[M_2^{(0)}\,\delta\xi^{(2)}_{1,k-2} + M_2^{(1)}\,\delta\xi^{(1)}_{1,k-2} + M_2^{(2)}\,\delta\xi^{(0)}_{1,k-2}] +$$
$$+ \frac{1}{2}\,[M_2^{(0)}\,\delta\xi^{(2)}_{1,k+2} + M_2^{(1)}\,\delta\xi^{(1)}_{1,k+2} + M_2^{(2)}\,\delta\xi^{(0)}_{1,k+2}] + \frac{1}{2}\,i\,[N_2^{(0)}\,\delta\eta^{(2)}_{1,k-2} + N_2^{(1)}\,\delta\eta^{(1)}_{1,k-2} + N_2^{(2)}\,\delta\eta^{(0)}_{1,k-2}] -$$
$$- \frac{1}{2}\,i\,[N_2^{(0)}\,\delta\eta^{(2)}_{1,k+2} + N_2^{(1)}\,\delta\eta^{(1)}_{1,k+2} + N_2^{(2)}\,\delta\eta^{(0)}_{1,k+2}]\ \dots\Big]$$

. . . .

b) Coefficients du développement de δl .

(137)
$$\delta l^{(0)}_{1,k} = -\frac{1}{2}\,F_2^{(0)}\,[\delta\xi^{(0)}_{1,k-2} - \delta\xi^{(0)}_{1,k+2}] + \dots + i\,E_0^{(0)}\,\delta\eta^{(0)}_{1,k} + \frac{1}{2}\,i\,E_2^{(0)}\,[\delta\eta^{(0)}_{1,k+2} + \delta\eta^{(0)}_{1,k-2}]\ \dots$$

(138)
$$\delta l^{(1)}_{1,k} = -\frac{1}{2}\left[F_2^{(0)}\,[\delta\xi^{(1)}_{1,k-2} - \delta\xi^{(1)}_{1,k+2}] + F_2^{(1)}\,[\delta\xi^{(0)}_{1,k-2} - \delta\xi^{(0)}_{1,k+2}]\right] + \dots + i\,[E_0^{(0)}\,\delta\eta^{(1)}_{1,k} + E_0^{(1)}\,\delta\eta^{(0)}_{1,k}]\ \dots +$$
$$+ \frac{1}{2}\,i\left[E_2^{(0)}\,[\delta\eta^{(1)}_{1,k+2} + \delta\eta^{(1)}_{1,k-2}] + E_2^{(1)}\,[\delta\eta^{(0)}_{1,k+2} + \delta\eta^{(0)}_{1,k-2}]\right] + \dots$$

(139)
$$\delta l^{(2)}_{1,k} = -\frac{1}{2}\left[F_2^{(0)}\,[\delta\xi^{(2)}_{1,k-2} - \delta\xi^{(2)}_{1,k+2}] + F_2^{(1)}\,[\delta\xi^{(1)}_{1,k-2} - \delta\xi^{(1)}_{1,k+2}] + F_2^{(2)}\,[\delta\xi^{(0)}_{1,k-2} - \delta\xi^{(0)}_{1,k+2}]\right] + \dots$$
$$+ i\,[E_0^{(0)}\,\delta\eta^{(2)}_{1,k} + E_0^{(1)}\,\delta\eta^{(1)}_{1,k} + E_0^{(2)}\,\delta\eta^{(0)}_{1,k}] + \frac{1}{2}\,i\Big[E_2^{(0)}\,[\delta\eta^{(2)}_{1,k+2} + \delta\eta^{(2)}_{1,k-2}] +$$
$$+ E_2^{(1)}\,[\delta\eta^{(1)}_{1,k+2} + \delta\eta^{(1)}_{1,k-2}] + E_2^{(2)}\,[\delta\eta^{(0)}_{1,k+2} + \delta\eta^{(0)}_{1,k-2}]\Big] + \dots$$

. . . .

c) Coefficients du développement de s .

(140)
$$B_k^{(0)} = \rho^{(0)}_{0,0}\,z^{(0)}_{1,k} + \frac{1}{2}\,\rho^{(0)}_{0,2}\,[z^{(0)}_{1,k-2} + z^{(0)}_{1,k+2}] + \dots$$

(141)
$$B_k^{(1)} = [\rho^{(0)}_{0,0}\,z^{(1)}_{1,k} + \rho^{(1)}_{0,0}\,z^{(0)}_{1,k}] + \frac{1}{2}\left[\rho^{(0)}_{0,2}\,[z^{(1)}_{1,k-2} + z^{(1)}_{1,k+2}] + \rho^{(1)}_{0,2}\,[z^{(0)}_{1,k-2} + z^{(0)}_{1,k+2}]\right] + \dots$$

(142)
$$B_k^{(2)} = [\rho^{(0)}_{0,0}\,z^{(2)}_{1,k} + \rho^{(1)}_{0,0}\,z^{(1)}_{1,k} + \rho^{(2)}_{0,0}\,z^{(0)}_{1,k}] + \frac{1}{2}\Big[\rho^{(0)}_{0,2}\,[z^{(2)}_{1,k-2} + z^{(2)}_{1,k+2}] + \rho^{(1)}_{0,2}\,[z^{(1)}_{1,k-2} + z^{(1)}_{1,k+2}] +$$
$$+ \rho^{(2)}_{0,2}\,[z^{(0)}_{1,k-2} + z^{(0)}_{1,k+2}]\Big] + \dots$$

. . . .

Il ne reste plus à adapter que z . Or, si nous nous reportons a la formule (71), nous voyons que les coefficients $z_{1,k}$ sont liés aux $c_{1,k}$ par la relation

$$z_{1,k} = \omega' c_{1,k}$$

et on obtiendra les $z_{1,k}$ immédiatement connaissant les $c_{1,k}$ et ω'

27 — Nous avons fait usage des formules (64), (64^{bis}) et (71) qui contiennent, les premières les $a''_{1,k}$ et $b_{1,k}$ et la troisième les $c_{1,k}$. Il nous faut expliquer comment on pourra exprimer les $a''_{1,k}$, $b_{1,k}$, $c_{1,k}$, en fonction de w

Pour cela, reportons-nous au num 17 et examinons les différentes formules qui conduisent aux intégrales de l'équation (55).

Nous voyons tout d abord qu il faut calculer n_0 par le formule (62). Pour cela, nous calculons A et B en donnant à φ la valeur W pour les $a''_{1,k}$ et $b_{1,k}$ et $(K\rho^3_0 + 2\nu m^2)$ pour les $c_{1,k}$ Comme W et $(K\rho^3_0 + 2\nu m^2)$ sont développés suivant les puissances de w , nous obtiendrons A et B développes de la même maniere et, par conséquent, nous pouvons calculer en fonction de w la partie principale de n_0 . Nous obtiendrons ensuite une valeur approchée de g_0 et de h_0 d après la relation :

$$a^2_0 = n_0 + \varphi_0$$

ou .

$$a_0 = g_0 \qquad \text{pour} \qquad \varphi = W$$

$$a_0 = h_0 \qquad \text{pour} \qquad \varphi = K\rho^3_0 + 2\nu m^2$$

Ceci fait, la formule de définition de n_k nous donnera une valeur approchée de n_2 et de n_{-2} et, de la, une valeur approchée de C On aura donc, par application de la formule (62) une valeur meilleure pour n_0 On recommencera les opérations jusqu'a ce que deux operations successives donnent le même résultat au degré d approximation choisi

On calculera alors les valeurs definitives de n_2 et n_{-2} , etc puis, faisant successivement dans la formule (57) :

$$\varphi_1 = W_1 \qquad\qquad \varphi_1 = [K\rho^3_0 + 2\nu m^2]_1$$

on calculera par approximations successives les $a''_{1,k}$ et les $c_{1,k}$ que l'on obtiendra sous la forme de series ordonnées suivont les puissances de w

Connaissant les $a''_{1,k}$ et utilisant la deuxieme équation (50), on calculera par approximations successives les $b_{1,k}$ que l'on obtiendra aussi sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de w

Il nous reste a donner les formules necessaires au calcul du mouvement de la planete idéale : nous le ferons dans la troisieme partie et nous expliquerons sommairement comment nous les avons obtenues

TROISIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER

28 — Nous allons revenir maintenant à la première partie pour obtenir le développement complet de la fonction perturbatrice et des fonctions auxiliaires, et ensuite des fonctions qui se présentent quand on veut tenir compte de la troisième coordonnée. Voyons d'abord la fonction perturbatrice.

29. — Nous savons que la fonction des forces a pour expression :

$$U = f\frac{M_0 + M}{r} + fM'\left[\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos H}{r'^2}\right]$$

avec :

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H$$

H désignant l'angle que fait le rayon vecteur de la petite planète avec celui de la planète troublante.

Si nous posons :

$$U' = fM'\left[\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos H}{r'^2}\right]$$

et si nous développons $\frac{1}{\Delta}$ suivant les puissances du rapport $\frac{r}{r'}$, nous savons que nous pouvons écrire :

$$U' = fM'\left[\frac{1}{r'}S_0 + \frac{r^2}{r'^3}S_2 + \frac{r^3}{r'^4}S_3 + \frac{r^4}{r'^5}S_4 + \frac{r^5}{r'^6}S_5 + \ldots\right] \tag{143}$$

les coefficients S_i représentant les fonctions :

$$(144)\qquad \left\{\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= \cos H \\ S_2 &= \frac{3}{2}\cos^2 H - \frac{1}{2} \\ S_3 &= \frac{5}{2}\cos^3 H - \frac{3}{2}\cos H \\ S_4 &= \frac{35}{8}\cos^4 H - \frac{30}{8}\cos^2 H + \frac{3}{8} \\ S_5 &= \frac{63}{8}\cos^5 H - \frac{70}{8}\cos^3 H + \frac{15}{8}\cos H \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

de plus, nous savons par la formule (11^{bis}) que nous pouvons écrire :

$$\frac{r}{a}\cos H = \frac{1}{2}\left[xe^{-l'} + ye^{l'}\right]\cos s' + \frac{z}{i}\sin s' \tag{145}$$

Si, maintenant, nous nous rappelons que nous avons posé :

$$\rho' = \frac{a'}{r'} \qquad m = \frac{n'}{n - n'} \qquad 2\nu = \frac{M'}{M_0 + M'} \qquad \alpha = \frac{a}{a'}$$

et que :

$$f(M_0 + M') = n'^2 a'^3 \qquad f(M_0 + M) = K(n - n')^2 a^3$$

nous pouvons écrire :

$$(146) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{U}{(n-n')^2 a^2} = {} & 2\nu m^2 \rho'^3 \left[\frac{3}{2}\left(\frac{r}{a}\cos H\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] + 2\nu m^2 \rho'^4 \left[\frac{5}{2}\left(\frac{r}{a}\cos H\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{r}{a}\cos H\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] + \\ & + 2\nu m^2 \rho'^5 \left[\frac{35}{8}\left(\frac{r}{a}\cos H\right)^4 - \frac{30}{8}\left(\frac{r}{a}\cos H\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^4\right] + 2\nu m^2 \rho'^6 \left[\frac{63}{8}\left(\frac{r}{a}\cos H\right)^5 - \right. \\ & \left. \frac{70}{8}\left(\frac{r}{a}\cos H\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{15}{8}\left(\frac{r}{a}\cos H\right)\left(\frac{r}{a}\right)^4\right] + \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Nous devons remplacer les diverses puissances de $\frac{r}{a}\cos H$ par leurs valeurs en fonction de x, y, z et l'. Pour cela, si nous posons :

$$(147) \qquad P = xe^{-l'} + ye^{l'}$$

nous pourrons écrire ces diverses puissances sous la forme suivante :

$$\frac{r}{a}\cos H = \frac{1}{2} P \cos s' + \frac{z}{i}\sin s'$$

$$(148) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{r}{a}\cos H\right]^2 = {} & \left[\frac{1}{8}P^2 - \frac{1}{2}z^2\right] + \left[\frac{1}{8}P^2 + \frac{1}{2}z^2\right]\cos 2s' + \frac{1}{2}P\frac{z}{i}\sin 2s' \\ \left[\frac{r}{a}\cos H\right]^3 = {} & \left[\frac{3}{32}P^3 - \frac{3}{8}Pz^2\right]\cos s' + \left[\frac{1}{32}P^3 + \frac{3}{8}Pz^2\right]\cos 3s' + \left[\frac{3}{16}P^2\frac{z}{i} - \frac{3}{4}\frac{z}{i}\right]\sin s' + \\ & + \left[\frac{3}{16}P^2\frac{z}{i} + \frac{1}{4}\frac{z}{i}\right]\sin 3s' \\ \left[\frac{r}{a}\cos H\right]^4 = {} & \left[\frac{3}{128}P^4 - \frac{3}{16}P^2z^2 + \frac{3}{8}z^4\right] + \left[\frac{1}{32}P^4 - \frac{1}{2}z^4\right]\cos 2s' + \left[\frac{1}{128}P^4 + \frac{3}{16}P^2z^2 + \frac{1}{8}z^4\right]\cos 4s' + \\ & + \left[\frac{1}{8}P^3\frac{z}{i} - \frac{1}{2}P\frac{z^3}{i}\right]\sin 2s' + \left[\frac{1}{16}P^3\frac{z}{i} + \frac{1}{4}P\frac{z^3}{i}\right]\sin 4s' \\ \left[\frac{r}{a}\cos H\right]^5 = {} & \left[\frac{10}{512}P^5 - \frac{20}{128}P^3z^2 + \frac{10}{32}Pz^4\right]\cos s' + \left[\frac{5}{512}P^5 + \frac{10}{128}P^3z^2 - \frac{15}{32}Pz^4\right]\cos 3s' + \\ & + \left[\frac{1}{512}P^5 + \frac{10}{128}P^3z^2 + \frac{5}{32}Pz^4\right]\cos 5s' + \left[\frac{10}{256}P^4\frac{z}{i} - \frac{20}{64}P^2\frac{z^3}{i} + \frac{10}{16}\frac{z^5}{i}\right]\sin s' + \\ & + \left[\frac{15}{256}P^4\frac{z}{i} - \frac{10}{64}P^2\frac{z^3}{i} - \frac{5}{16}\frac{z^5}{i}\right]\sin 3s' + \left[\frac{5}{256}P^4\frac{z}{i} + \frac{10}{64}P^2\frac{z^3}{i} + \frac{1}{16}\frac{z^5}{i}\right]\sin 5s' \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

les différentes puissances de P ayant pour expressions :

$$
(149) \quad \left\{ \begin{aligned}
P &= xe^{-l'} + ye^{l'} \\
P^2 &= x^2e^{-2l'} + y^2e^{2l'} + 2xy \\
P^3 &= x^3e^{-3l'} + y^3e^{3l'} + 3x^2ye^{-l'} + 3xy^2e^{l'} \\
P^4 &= x^4e^{-4l'} + y^4e^{4l'} + 4x^3ye^{-2l'} + 4xy^3e^{2l'} + 6x^2y^2 \\
P^5 &= x^5e^{-5l'} + y^5e^{5l'} + 5x^4ye^{-3l'} + 5xy^4e^{3l'} + 10x^3y^2e^{-l'} + 10x^2y^3e^{l'} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \right.
$$

En nous rappelant que l'on a :

$$\frac{r^2}{a^2} = xy - z^2$$

et substituant dans la forme (146) les diverses puissances de $\frac{r}{a}\cos H$ données par les formules (148) et (149) et les diverses puissances de $\frac{r}{a}$, puis, effectuant les calculs et réductions nécessaires, nous obtiendrons, pour le développement de la fonction U′, jusqu'aux termes du cinquième ordre inclus en x, y, z, l'expression suivante (nous donnons séparément l'ensemble des termes qui sont multipliés par la même puissance de α) :

1) Termes multipliés par νm^2.

$$\frac{3}{8}\rho'^3[x^2e^{-2l'} + y^2e^{2l'}] - \frac{1}{4}\rho'^3(xy + 2z^2) + \left[\frac{3}{8}\rho'^3[x^2e^{-2l'} + y^2e^{2l'}] + \frac{3}{4}\rho'^3(xy + 2z^2)\right]\cos 2s' + \left[\frac{3}{2}\rho'^3\left[\frac{xz}{i}e^{-l'} + \frac{yz}{i}e^{l'}\right]\right]\sin 2s' +$$

2) Termes multipliés par $2\nu m^2\alpha$.

$$\left[\frac{15}{64}\rho'^4[x^3e^{-3l'} + y^3e^{3l'}] - \frac{3}{64}\rho'^4[xe^{-l'} + ye^{l'}](xy + 4z^2)\right]\cos s' + \left[\frac{5}{64}\rho'^4[x^3e^{-3l'} + y^3e^{3l'}] + \frac{15}{64}\rho'^4[xe^{-l'} + ye^{l'}](xy + 4z^2)\right]\cos 3s' +$$

$$+ \left[\frac{15}{32}\rho'^4\left[\frac{x^2z}{i}e^{-2l'} + \frac{y^2z}{i}e^{2l'}\right] - \frac{9}{16}\rho'^3\frac{z}{i}\left(xy + \frac{2}{3}z^2\right)\right]\sin s' + \left[\frac{15}{32}\rho'^4\left[\frac{x^2z}{i}e^{-2l'} + \frac{y^2z}{i}e^{2l'}\right] + \frac{15}{16}\rho'^4\frac{z}{i}\left(xy + \frac{2}{3}z^2\right)\right]\sin 3s'$$

3) Termes multipliés par $2\nu m^2\alpha^2$.

$$\left[\frac{105}{1024}\rho'^5[x^4e^{-4l'} + y^4e^{4l'}] - \frac{15}{256}\rho'^5[x^2e^{-2l'} + y^2e^{2l'}](xy + 6z^2) + \frac{27}{512}\rho'^5\left(x^2y^2 + 8xyz^2 + \frac{8}{3}z^4\right)\right] + \left[\frac{35}{256}\rho'^5[x^4e^{-4l'} + y^4e^{4l'}] +\right.$$

$$\left. + \frac{5}{64}\rho'^5[x^2e^{-2l'} + y^2e^{2l'}](xy + 6z^2) - \frac{15}{128}\rho'^5\left(x^2y^2 + 8xyz^2 + \frac{8}{3}z^4\right)\right]\cos 2s' + \left[\frac{35}{1024}\rho'^5[x^4e^{-4l'} + y^4e^{4l'}] +\right.$$

$$\left. + \frac{35}{256}\rho'^5[x^2e^{-2l'} + y^2e^{2l'}](xy + 6z^2) + \frac{105}{512}\rho'^5\left(x^2y^2 + 8xyz^2 + \frac{8}{3}z^4\right)\right]\cos 4s' + \left[\frac{35}{64}\rho'^5\left[\frac{x^3z}{i}e^{-3l'} + \frac{y^3z}{i}e^{3l'}\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{5}{64}\rho'^4\left[\frac{xz}{i}e^{-l'} + \frac{yz}{i}e^{l'}\right](3xy + 4z^2)\right]\sin 2s' + \left[\frac{35}{128}\rho'^5\left[\frac{x^3z}{i}e^{-3l'} + \frac{y^3z}{i}e^{3l'}\right] + \frac{105}{128}\rho'^5\left[\frac{xz}{i}e^{-l'} + \frac{yz}{i}e^{l'}\right]\left(xy + \frac{4}{3}z^2\right)\right]\sin 4s'$$

4) Termes multipliés par $2\nu m^2\alpha^3$.

$$\left[\frac{315}{2048}\rho'^6[x^5e^{-5l} + y^5e^{5l'}] - \frac{105}{2048}\rho'^6[x^3e^{-3l'} + y^3e^{3l'}](xy + 8z^2) + \frac{15}{1024}\rho'^6[xe^{-l'} + ye^{l'}](x^2y^2 + 12xyz^2 + 8z^4)\right]\cos s' +$$

$$+ \left[\frac{315}{4096}\rho'^6[x^5e^{-5l'} + y^5e^{5l'}] + \frac{455}{4096}\rho'^6[x^3e^{-3l'} + y^3e^{3l'}](xy + 8z^2) - \frac{105}{2048}\rho'^6[xe^{l'} + ye^{l'}](x^2y^2 + 12xyz^2 + 8z^4)\right]\cos 3s' +$$

$$+ \left[\frac{63}{4096}\rho'^6 [x^5 e^{-5l'} + y^5 e^{5l'}] + \frac{315}{4096}\rho'^6 [x^3 e^{-3l'} + y^3 e^{3l'}](xy + 8y^2) + \frac{315}{2048}\rho'^6 [x e^{-l'} + y e^{l'}](x^2 y^2 + 12 xyz^2 + 8z^4)\right] \cos 5s' +$$

$$+ \left[\frac{315}{1024}\rho'^6 [\frac{x^4 z}{i} e^{-4l'} + \frac{y^4 z}{i} e^{4l'}] - \frac{105}{256}\rho'^6 [\frac{x^2 z}{i} e^{-2l'} + \frac{y^2 z}{i} e^{2l'}](xy + 2z^2) + \frac{225}{512}\rho'^6 \frac{z}{i}(x^2 y^2 + \frac{8}{3} xyz^2 + \frac{8}{15} z^4)\right] \sin s' +$$

$$+ \left[\frac{945}{2048}\rho'^6 [\frac{x^4 z}{i} e^{-4l'} + \frac{y^4 z}{i} e^{4l'}] + \frac{105}{512}\rho'^6 [\frac{x^2 z}{i} e^{-2l'} + \frac{y^2 z}{i} e^{2l'}](xy + 2z^2) - \frac{525}{1024}\rho'^6 \frac{z}{i}(x^2 y^2 + \frac{8}{3} xyz^2 + \frac{8}{15} z^4)\right] \sin 3s' +$$

$$+ \left[\frac{315}{2048}\rho'^6 [\frac{x^4 z}{i} e^{-4l'} + \frac{y^4 z}{i} e^{4l'}] + \frac{315}{512}\rho'^6 [\frac{x^2 z}{i} e^{-2l'} + \frac{y^2 z}{i} e^{2l'}](xy + 2z^2) + \frac{945}{1024}\rho'^6 \frac{z}{i}(x^2 y^2 + \frac{8}{3} xyz^2 + \frac{8}{15} z^4)\right] \sin 5s'$$

Dans le développement que nous venons d'écrire ainsi que dans les formules (155) et 158), i représente $\sqrt{-1}$.

30. — Comme nous le savions, ce développement fait apparaître les fonctions :

$$\rho'^m e^{\pm n l'} \qquad\qquad \rho'^m$$

et nous devons les développer suivant les puissances de ε'_1 et ε'_{-1} .

Pour savoir jusqu'à quel ordre dous devons les développer, nous devons remarquer que les excentricités des orbites des grosses planètes que l'on considère habituellement, c'est-à-dire Jupiter et Saturne, sont de l'ordre de 0,01 ; les excentricités des orbites des petites planètes sont quelquefois assez considérables mais forcément inférieures à 1. Si donc, nous considérons comme étant du premier ordre les excentricités des orbites des petites planètes, celles des orbites de Jupiter et Saturne devront être considérées comme étant du second ordre. Nous pourrons donc arrêter les développements aux termes du troisième ordre pour les fonctions $\rho'^m e^{\pm n l'}$, ρ'^m . Pareillement, si nous considérons la tangente de l'inclinaison de l'orbite des petites planètes comme étant du premier ordre, les tangentes des inclinaisons des orbites de Jupiter et de Saturne devront être considérées comme étant du second ordre.

Pour le développement des fonctions $\rho'^m e^{\pm n l'}$, ρ'^m , nous utiliserons les formules données par Andoyer (*Cours de Mécanique Céleste*, Tome I, pages 396 et suiv.) pour des fonctions analogues et, d'après ce qui a été dit plus haut, nous limiterons ces développements aux termes du troisième ordre. Nous obtiendrons ainsi les développements :

$\varepsilon'^m_1 \varepsilon'^n_{-1}$ / $\rho'^m e^{nl'}$			ε'_1	ε'_{-1}	ε'^2_1	$\varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1}$	ε'^2_{-1}	ε'^3_1	$\varepsilon'^2_1 \varepsilon'_{-1}$	$\varepsilon'_1 \varepsilon'^2_{-1}$	ε'^3_{-1}
m	n										
3	0	1	3	3	9	6	9	53/2	27/2	27/2	53/2
3	− 1	1	1	5	5/2	9	39/2	19/3	6	− 1	206/3
3	+ 1	1	5	1	39/2	9	5/2	206/3	− 1	6	19/3
3	− 2	1	− 1	7	0	− 10	34	1/6	1/2	− 123/2	845/6
3	+ 2	1	7	− 1	34	− 10	0	845/6	− 123/2	1/2	1/6
4	0	1	4	4	14	12	14	46	34	34	46
4	− 1	1	2	6	11/2	8	53/2	46/3	20	22	308/3
4	+ 1	1	6	2	53/2	8	11/2	308/3	22	20	46/3
4	− 2	1	0	8	1	− 4	43	8/3	4	− 40	580/3
4	+ 2	1	8	0	43	− 4	1	580/3	− 40	4	8/3
4	− 3	1	− 2	10	1/2	− 24	127/2	0	10	− 176	326
4	+ 3	1	10	− 2	127/2	− 24	1/2	326	− 176	10	0

$\rho'^m e^{nl'}$ \ $\varepsilon'^m_1\,\varepsilon'^n_{-1}$			ε'_1	ε'_{-1}	ε'^2_1	$\varepsilon'_1\,\varepsilon'_{-1}$	ε'^2_{-1}	ε'^3_1	$\varepsilon'^2_1\,\varepsilon'_{-1}$	$\varepsilon'_1\,\varepsilon'^2_{-1}$	ε'^3_{-1}
m	n										
5	0	1	5	5	20	20	20	145/2	135/2	135/2	145/2
5	− 1	1	3	7	19/2	16	69/2	88/3	45	60	437/3
5	+ 1	1	7	3	69/2	16	19/2	437/3	60	45	88/3
5	− 2	1	1	9	3	4	53	49/6	33/2	− 3/2	1541/6
5	2	1	9	1	53	4	3	1541/6	− 3/2	33/2	49/6
5	− 3	1	− 1	11	1/2	− 16	151/2	1	6	− 141	414
5	3	1	11	− 1	151/2	− 16	1/2	414	− 141	6	1
5	− 4	1	− 3	13	2	− 44	102	− 1/6	75/2	− 765/2	3751/6
5	4	1	13	− 3	102	− 44	2	3751/6	− 765/2	75/2	− 1/6
6	0	1	6	6	27	30	27	107	117	117	107
6	− 1	1	4	8	29/2	26	87/2	148/3	84	116	596/3
6	1	1	8	4	87/2	26	29/2	596/3	116	84	148/3
6	− 2	1	2	10	6	14	64	53/3	41	57	997/3
6	2	1	10	2	64	14	6	997/3	57	41	53/3
6	− 3	1	0	12	3/2	− 6	177/2	4	12	− 84	516
6	3	1	12	0	177/2	− 6	3/2	516	− 84	12	4
6	− 4	1	− 2	14	1	− 34	117	1/3	21	− 331	2273/3
6	4	1	14	− 2	117	− 34	1	2273/3	− 331	21	1/3
6	− 5	1	− 4	16	9/2	− 70	299/2	− 4/3	92	− 708	3196/3
6	5	1	16	− 4	299/2	− 70	9/2	3196/3	− 708	92	− 4/3

31 — Il reste à développer les fonctions $\cos ms'$ et $\sin ms'$. Nous devons, pour cela, exprimer la tangente de la latitude s' en fonction de γ'_1 et de γ'_{-1}.

Soient : E la trace du plan de l'écliptique sur la sphère céleste, P la trace du plan de l'orbite de la planète troublante, N′ son nœud ascendant, J sa position sur son orbite. L'angle en N′ sera l'inclinaison I′ de son orbite et, si nous désignons par J′ l'intersection avec la trace de l'écliptique du grand cercle abaissé de J perpendiculairement à l'écliptique, l'arc J′J sera égal à la latitude de la planète troublante. Le triangle sphérique N′J′J étant rectangle en J′, on aura la relation :

$$\operatorname{tg}\widehat{J'J} = \operatorname{tg} s' = \operatorname{tg} I' \sin \widehat{N'J'} \,;$$

or,

$$\widehat{N'J'} = v' - \Omega' = N' - \Omega' + \frac{l'}{i} = H' + \frac{l'}{i}$$

de sorte que, i désignant le radical $\sqrt{-1}$, nous pourrons écrire :

$$\operatorname{tg} s' = \operatorname{tg} I' \sin\left(H' + \frac{l'}{i}\right)$$

et, en vertu de la définition de γ'_1 et de γ'_{-1}, ceci devient :

$$\text{tg}s' = \frac{1}{i}\left(\gamma'_1\, e^{l'} - \gamma'_{-1}\, e^{-l'}\right) \tag{150}$$

D'autre part, en vertu des relations qui lient la tangente au sinus et au cosinus, on aura, en développant par la formule du binome l'inverse du radical :

$$\sin s' = \frac{\text{tg}s'}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 s'}} = \text{tg}s' \left(1 - \frac{1}{2}\,\text{tg}^2 s' + \frac{3}{8}\,\text{tg}^4 s' - \frac{5}{16}\,\text{tg}^6 s' \quad \ldots\right)$$

$$\cos s' = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 s'}} = 1 - \frac{1}{2}\,\text{tg}^2 s' + \frac{3}{8}\,\text{tg}^2 s' - \frac{5}{16}\,\text{tg}^6 s' \quad \ldots$$

En introduisant ces valeurs de $\sin s'$ et $\cos s'$ dans les formules qui donnent $\sin ms'$ et $\cos ms'$ en fonction de $\sin s'$ et $\cos s'$, nous trouverons :

$$\left\{\begin{aligned}
\sin 2s' &= 2\text{tg}s' - 2\text{tg}^3 s' + 2\text{tg}^5 s' - 2\text{tg}^7 s' \quad \ldots \\
\cos 2s' &= 1 - 2\text{tg}^2 s' + 2\text{tg}^4 s' - 2\text{tg}^6 s' \quad \ldots \\
\sin 3s' &= 3\,\text{tg}s' - \frac{11}{2}\,\text{tg}^3 s' + \frac{57}{8}\,\text{tg}^5 s' - \frac{135}{16}\,\text{tg}^7 s' \quad \ldots \\
\cos 3s' &= 1 - \frac{9}{2}\,\text{tg}^2 s' + \frac{51}{8}\,\text{tg}^4 s' - \frac{125}{16}\,\text{tg}^6 s' \quad \ldots \\
\sin 4s' &= 4\text{tg}s' - 12\text{tg}^3 s' + 20\text{tg}^5 s' - 28\text{tg}^7 s' \quad \ldots \\
\cos 4s' &= 1 - 8\text{tg}^2 s' + 16\text{tg}^4 s' - 24\text{tg}^6 s' \quad \ldots \\
\sin 5s' &= 5\text{tg}s' - \frac{45}{2}\,\text{tg}^3 s' + \frac{383}{8}\,\text{tg}^5 s' - \frac{1265}{16}\,\text{tg}^7 s' \quad \ldots \\
\cos 5s' &= 1 - \frac{25}{2}\,\text{tg}^2 s' + \frac{275}{8}\,\text{tg}^4 s' - \frac{1005}{16}\,\text{tg}^6 s' \quad \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right. \tag{151}$$

Dans les formules ci-dessus, nous devons remplacer $\text{tg}s'$ et ses puissances par leurs développements obtenus par application de la formule du binome à l'équation (150). Ces développements renferment les fonctions $e^{ml'}$ et nous développerons celles-ci suivant les puissances de ε'_1 et ε'_{-1} par la méthode utilisée par Andoyer (*Cours de Mécanique Céleste*, Tome I, pages 386 et suiv.). Nous obtiendrons ainsi les développements suivants limités aux termes du troisième ordre.

$\varepsilon'^{m}_1\ \varepsilon'^{n}_{-1}$ / $e^{ml'}$		ε'_1	ε'_{-1}	ε'^2_1	$\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$	ε'^2_{-1}	ε'^3_1	$\varepsilon'^2_1\varepsilon'_{-1}$	$\varepsilon'_1\varepsilon'^2_{-1}$	ε'^3_{-1}
$e^{-l'}$	1	-2	2	$-1/2$	-4	9/2	$-2/3$	0	-10	32/3
$e^{l'}$	1	2	-2	9/2	-4	$-1/2$	32/3	-10	0	$-2/3$
$e^{-2l'}$	1	-4	4	3	-16	13	2/3	14	-54	59
$e^{2l'}$	1	4	-4	13	-16	3	59	-54	14	2/3
$e^{-3l'}$	1	-6	6	21/2	-36	51/2	-4	66	-156	94
$e^{3l'}$	1	6	-6	51/2	-36	21/2	94	-156	66	-4
....										

Si nous introduisons maintenant ces développements dans les formules (154) et (155), nous obtiendrons, en nous bornant à conserver les termes du troisième ordre, les développements suivants pour les fonctions $\cos ms'$ et $\sin ms'$:

$\gamma_1'^m \gamma_{-1}'^{m'} \varepsilon_1'^p \varepsilon_{-1}'^{p'}$ / $\cos ms'$		$\gamma_1'^2$	$\gamma_1'\gamma_{-1}'$	$\gamma_{-1}'^2$	$\varepsilon_1'\gamma_1'^2$	$\varepsilon_1'\gamma_{-1}'^2$	$\varepsilon_{-1}'\gamma_1'^2$	$\varepsilon_{-1}'\gamma_{-1}'^2$
$\cos s'$	1	1/2	− 1	1/2	2	− 2	− 2	2
$\cos 2s'$	1	2	− 4	2	8	− 8	− 8	8
$\cos 3s'$	1	9/2	− 9	9/2	18	− 18	− 18	18
$\cos 4s'$	1	8	− 16	8	32	− 32	− 32	32
$\cos 5s'$	1	25/2	− 25	25/2	50	− 50	− 50	50

$\varepsilon_1'^m \varepsilon_{-1}'^n \gamma_1'^p \gamma_{-1}'^q$ / $i \sin ms'$	γ_1'	γ_{-1}'	$\varepsilon_1'\gamma_1'$	$\varepsilon_{-1}'\gamma_1'$	$\varepsilon_1'\gamma_{-1}'$	$\varepsilon_{-1}'\gamma_{-1}'$	$\varepsilon_1'^2\gamma_1'$	$\varepsilon_1'\varepsilon_{-1}'\gamma_1'$
$i\sin s'$	1	− 1	2	− 2	2	− 2	9/2	− 4
$i\sin 2s'$	2	− 2	4	− 4	4	− 4	9	− 8
$i\sin 3s'$	3	− 3	6	− 6	6	− 6	27/2	− 12
$i\sin 4s'$	4	− 4	8	− 8	8	− 8	18	− 16
$i\sin 5s'$	5	− 5	10	− 10	10	− 10	45/2	− 20
....								

$\varepsilon_1'^m \varepsilon_{-1}'^n \gamma'^p \gamma_{-1}'^q$ / $i \sin ms'$	$\varepsilon_{-1}'^2\gamma_1'$	$\varepsilon_1'^2\gamma_{-1}'$	$\varepsilon_1'\varepsilon_{-1}'\gamma_{-1}'$	$\varepsilon_{-1}'^2\gamma_{-1}'$	$\gamma_1'^3$	$\gamma_1'^2\gamma_{-1}'$	$\gamma_1'\gamma_{-1}'^2$	$\gamma_{-1}'^3$
$i\sin s'$	−1/2	1/2	4	−9/2	1/2	−3/2	3/2	−1/2
$i\sin 2s'$	−1	1	8	−9	−2	−6	6	−2
$i\sin 3s'$	−3/2	3/2	12	−27/2	11/2	−33/2	33/2	−11/2
$i\sin 4s'$	−2	2	16	−18	12	−36	36	−12
$i\sin 5s'$	−5/2	5/2	20	−45/2	45/2	−135/2	125/2	−45/2
....								

En remplaçant dans le développement donné plus haut de la fonction perturbatrice les fonctions :

$$\rho'^m e^{nl'} \ , \ \rho'^m \ , \ \cos ms' \ , \ \sin ms'$$

par leurs développements suivant les puissances de ε_1' , ε_{-1}' , γ_1' , γ_{-1}' , on obtiendra finalement le développement de la fonction perturbatrice suivant les puissances des mêmes quantités.

Il est d'ailleurs inutile de procéder à ce développement en général car, pour appliquer la méthode exposée à la première partie, il faut prendre, dans les approximations successives, l'ensemble des termes de même degré. On sera donc amené à opérer le développement de la fonction perturbatrice progressivement en même temps que l'on effectuera les approximations successives.

32. — Pour terminer, nous devons donner les développements des fonctions u , v , P , Q , Δ , P^2 , Q^2 , Δ^2 , DQ , $P\Delta$, $u\Delta$, $v\Delta$, puis ceux de W , $K\rho_0^3 + 2\nu m^2$, $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$, δv , s et des fonctions auxiliaires, en expliquant sommairement comment nous les avons obtenus.

CHAPITRE II

33. — Les premières séries à calculer sont celles qui représentent les fonctions u et v . Or, cela est immédiat si nous nous reportons aux formules (64), car elles nous donnent :

$$u_k = \xi_{o,k} + k\eta_{o,k} \qquad v_k = \eta_{o,k} + k\xi_{o,k}$$

avec :

$$u_{-k} = u_k \qquad v_{-k} = -v_k$$

Ceci fait, il sera aisé d'obtenir les développements de $u + v$, $u - v$, $u^2 - v^2$, Log $(u + v)$, Log $(u - v)$, Log $(u^2 - v^2)$, car les fonctions sous le signe Log ont un terme égal à l'unité.

Les formules (63) nous donnent alors les développements des fonctions P , Q , Δ , en utilisant les développements obtenus pour u et v . Nous avons ainsi :

$$P = \Sigma P_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k})$$
$$P_0 = 1 + m$$
$$P_2 = 2v_2 - 2u_2 v_4 - 2v_2 u_4 + \ldots\ldots$$
$$P_4 = 4v_4 - 4u_2 v_2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q = \Sigma Q_{2k} (\theta^{2k} - \theta^{-2k})$$
$$Q_0 = 0$$
$$Q_2 = 2u_2 - 2u_2 v_4 + 2v_2 u_4 + \ldots\ldots$$
$$Q_4 = 4u_4 - 2u_2^2 - 2v_2^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta = \Sigma \Delta_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k})$$
$$\Delta_0 = 1 + 2u_2^2 - v_2^2 \ldots\ldots$$
$$\Delta_2 = -u_2 + \frac{1}{2} u_2 v_4 - v_2 u_4 + \ldots\ldots$$
$$\Delta_4 = u_2^2 + \frac{1}{2} v_2^2 - u_4 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les développements que nous venons d'obtenir nous permettent de calculer immédiatement les fonctions P^2 , Q^2 , Δ^2 , DQ, PΔ , et nous obtenons ainsi :

$$P^2 = \Sigma (P^2)_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k})$$
$$(P^2)_0 = P_0^2 + 2P_2^2 + \ldots\ldots$$
$$(P^2)_2 = 2P_0 P_2 + \ldots\ldots$$
$$(P^2)_4 = 2P_0 P_4 + P_2^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q^2 = \Sigma (Q^2)_{2k} (\theta^{2k} + \theta^{-2k})$$
$$(Q^2)_0 = -2Q_2^2 - \ldots\ldots$$
$$(Q^2)_2 = -2Q_2 Q_4 \ldots\ldots$$
$$(Q^2)_4 = Q_2^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^2 = \Sigma\,(\Delta^2)_{2k}\,(\theta^{2k} + \theta^{-2k})$$

$$(\Delta)_0^2 = \Delta_0^2 + 2\Delta_2^2 + \ldots\ldots$$
$$(\Delta^2)_2 = 2\Delta_0\,\Delta_2 + \ldots\ldots$$
$$(\Delta^2)_4 = 2\Delta_0\,\Delta_4 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$DQ = \Sigma\,(DQ)_{2k}\,(\theta^{2k} + \theta^{-2k})$$

$$(DQ)_0 = 0$$
$$(DQ)_2 = 2Q_2 \ldots\ldots$$
$$(DQ)_4 = 4Q_4 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P\Delta = \Sigma\,(P\Delta)_{2k}\,(\theta^{2k} + \theta^{-2k})$$

$$(P\Delta)_0 = P_0\,\Delta_0 + 2P_2\,\Delta_2 + \ldots\ldots$$
$$(P\Delta)_2 = P_0\,\Delta_2 + P_2\,\Delta_2 + \ldots\ldots$$
$$(P\Delta)_4 = P_0\,\Delta_4 + P_4\,\Delta_0 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par combinaison des séries qui donnent Δ , u et v nous obtiendrons les développements des fonctions $u\Delta$ et $v\Delta$ sous la forme suivante :

$$u\Delta = \Sigma\,(u\Delta)_{2k}\,(\theta^{2k} + \theta^{-2k})$$

$$(u\Delta)_0 = \Delta_0 + 2u_2\,\Delta_2 + \ldots\ldots$$
$$(u\Delta)_2 = u_2\,\Delta_0 + \Delta_2 + \ldots\ldots$$
$$(u\Delta)_4 = u_4\,\Delta_0 + u_2\,\Delta_2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v\Delta = \Sigma\,(v\Delta)_{2k}\,(\theta^{2k} - \theta^{-2k})$$

$$(v\Delta)_0 = 0$$
$$(v\Delta)_2 = v_2\,\Delta_0 + \ldots\ldots$$
$$(v\Delta)_4 = v_4\,\Delta_0 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous devons effectuer maintenant les développements de W et de $K\rho_0^3 + 2\nu m^2$. Pour cela, nous utiliserons les développements trouvés pour P^2 , Q^2 , DQ , ρ_0^3 , et nous pouvons écrire :

$$W = \Sigma\,W_{2k}\cos 2kV \quad ,$$

avec :

$$W_0 = 2P_0^2 - Q_0^2 - (DQ)_0 - (K\rho_0^3 + 2m^2 + 2\nu m^2)_0$$
$$W_2 = 2P_2^2 - Q_2^2 - (DQ)_2 - (K\rho_0^3 + 2m^2 + 2\nu m^2)_2$$
$$W_4 = 2P_4^2 - Q_4^2 - (DQ)_4 - (K\rho_0^3 + 2m^2 + 2\nu m^2)_4$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

et :

$$K\rho_0^3 + 2\nu m^2 = \Sigma\,[K\rho_0^3 + 2\nu m^2]_{2k}\cos 2kV$$

avec :

$$[\,K\rho_0^3 + 2\nu m^2\,]_0 = K\,(\rho_0^3)_0 + 2\nu m^2$$
$$[\,K\rho_0^3 + 2\nu m^2\,]_2 = K\,(\rho_0^3)_2$$
$$[\,K\rho_0^3 + 2\nu m^2\,]_4 = K\,(\rho_0^3)_4$$
$$\ldots\ldots$$

Nous sommes en mesure de calculer les $a''_{1,k}$, $b_{1,k}$ et $c_{1,k}$, et par suite, δX, δY, Z. Passons aux coordonnées polaires.

34. — Nous avons d'abord pour le rayon vecteur :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right) = \varepsilon_1\,\delta\left(\frac{r}{a}\right)_1 + \varepsilon_{-1}\,\delta\left(\frac{r}{a}\right)_{-1}$$

avec :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right)_1 = (\rho_0\,\xi_0)\,\delta\xi_1 - (\rho_0\,\eta_0)\,\delta\eta_1$$

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right)_{-1} = (\rho_0\,\xi_0)\,\delta\xi_{-1} - (\rho_0\,\eta_0)\,\delta\eta_{-1}$$

Faisant usage des formules (89) et (32), nous obtiendrons d'abord les développements des fonctions $(\rho_0\,\xi_0)$ et $(\rho_0\,\eta_0)$ sous la forme :

$$(\rho_0\,\xi_0) = M_0 + M_2\cos 2V + M_4\cos 4V \quad .....$$

$$(\rho_0\,\eta_0) = N_0 + N_2\sin 2V + N_4\sin 4V \quad .....$$

avec :

$$M_0 = \rho_{0,0} + \rho_{0,2}\,\xi_{0,2} + \,.....$$

$$M_2 = \rho_{0,2} + 2\rho_{0,0}\,\xi_{0,2} + \,.....$$

$$M_4 = \rho_{0,4} + 2\rho_{0,0}\,\xi_{0,4} + \,.....$$

.....

$$N_0 = 0$$

$$N_2 = i\,[\,2\rho_{0,0}\,\eta_{0,2} + \,.....\,]$$

$$N_4 = i\,[\,2\rho_{0,0}\,\eta_{0,4} + \,.....\,]$$

.....

Utilisant maintenant les développements de $\delta\xi_1$ et $\delta\eta_1$, (formules (66)), et tenant compte de ce que l'on a :

$$\delta\xi_{-1,k} = \delta\xi_{1,-k} \qquad\qquad \delta\eta_{-1,k} = -\,\delta\eta_{1,-k}$$

nous trouverons pour $\delta\left(\frac{r}{a}\right)$ le développement :

$$\delta\left(\frac{r}{a}\right) = R_{1,0}\cos G_0 + R_{1,-2}\cos(G_0 - 2V) + R_{1,2}\cos(G_0 + 2V) + R_{1,-4}\cos(G_0 - 4V) + R_{1,4}\cos(G_0 + 4V)\ \ldots$$

avec :

$$R_{1,k} = \varepsilon\left[M_0\,\delta\xi_{1,k} + \frac{1}{2}\,M_2\,\delta\xi_{1,k-2} + \frac{1}{2}\,M_2\,\delta\xi_{1,k+2} + \ldots + \frac{1}{2}\,i\,N_2\,\delta\eta_{1,k-2} - \frac{1}{2}\,i\,N_2\,\delta\eta_{1,k+2}\ \ldots\right]$$

Pour la longitude nous avons :

$$\delta l = \varepsilon_1\,\delta l_1 + \varepsilon_{-1}\,\delta l_{-1}$$

avec :

$$\delta l_1 = -(\rho_0^2\,\eta_0)\,\delta\xi_1 + (\rho_0^2\,\xi_0)\,\delta\eta_1$$

$$\delta l_{-1} = (\rho_0^2\,\eta_0)\,\delta\xi_{-1} - (\rho_0^2\,\xi_0)\,\delta\eta_{-1}$$

ce qui exige le développement des fonctions $(\rho_0^2\,\xi_0)$ et $(\rho_0^2\,\eta_0)$. Utilisant les développements de ρ_0^2 donnés plus haut et de ξ_0 et η_0 donnés par les formules (32), nous obtiendrons de suite :

$$(\rho_0^2\,\xi_0) = E_0 + E_2\cos 2V + E_4\cos 4V\ .....$$

$$(\rho_0^2\,\eta_0) = F_0 + F_2\sin 2F + F_4\sin 4V\ .....$$

avec :

$$E_0 = (\rho_0^2)_0 + (\rho_0^2)_2 \xi_{0,2} + \dots\dots$$
$$E_2 = (\rho_0^2)_2 + 2 (\rho_0^2)_0 \xi_{0,2} + \dots\dots$$
$$E_4 = (\rho_0^2)_4 + 2 (\rho_0^2)_0 \xi_{0,4} + \dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

$$F_0 = 0$$
$$F_2 = i [2 (\rho_0^2)_0 \eta_{0,2} + \dots\dots]$$
$$F_4 = i [2 (\rho_0^2)_0 \eta_{0,4} + \dots\dots]$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Combinant les développements que nous venons d'obtenir avec ceux de $\delta\xi_1$, $\delta\xi_{-1}$, $\delta\eta_1$, $\delta\eta_{-1}$, (formules (66)), nous obtiendrons pour la longitude le développement suivant :

$$\delta v = \varepsilon\delta l_{1,0} \sin G_0 + \varepsilon\delta l_{1,-2} \sin (G_0 - 2V) + \varepsilon\delta l_{1,2} \sin (G_0 + 2V) + \\ + \varepsilon\delta l_{1,-4} \sin (G_0 - 4V) + \varepsilon\delta l_{1,4} \sin (G_0 + 4V) \dots\dots$$

avec :

$$\delta l_{1,k} = -\frac{1}{2} F_2 [\delta\xi_{1,k-2} - \delta\xi_{1,k+2}] + \dots + i\, E_0\, \delta\eta_{1,k} + \frac{1}{2} i\, E_2 [\delta\eta_{1,k+2} + \delta\eta_{1,k-2}] \dots$$

Pour la latitude, nous savons que l'on a le développement : (formule (72)) :

$$s = \gamma \Sigma \sigma_{1,k} \sin (H_0 + kV)$$

avec

$$\sigma = \rho_0 z \qquad\qquad \sigma = \gamma_1 \Sigma \rho_0 z_{1,k} \theta^k + \gamma_{-1} \Sigma \rho_0 z_{-1,k} \theta^k$$

et :

$$z_{1,k} = \omega' c_{1,k} \qquad\qquad c_{1,k} = c_{1,-k}$$
$$z_{-1,k} = - \omega' c_{-1,k} \qquad\qquad z_{-1,k} = - z_{1,-k}$$

Tenant compte du développement de ρ_0 et effectuant les réductions nécessaires, nous obtiendrons pour s le développement :

$$s = \gamma B_0 \sin H_0 + \gamma B_{-2} \sin (H_0 - 2V) + \gamma B_2 \sin (H_0 + 2V) + \\ + \gamma B_{-4} \sin (H_0 - 4V) + \gamma B_4 \sin (H_0 + 4V) \dots\dots$$

avec :

$$B_k = \rho_{0,0}\, z_{1,k} + \frac{1}{2} \rho_{0,2} [z_{1,k-2} + z_{1,k+2}] + \dots$$

APPLICATION NUMÉRIQUE

35. Comme application numérique de ce qui précède, nous allons construire une table et donner un exemple.

Nous avons choisi Jupiter comme planète troublante et, comme groupe, les astéroïdes du type (**46**) Hestia dont les moyens mouvements sont compris entre 800″ et 975″, groupe qui renferme 395 astéroïdes dans le volume des Kleine Planeteng Jahrgang de 1938 Comme pour 900″, on a environ :

$$n = 3n'$$

n' étant le moyen mouvement de Jupiter, le groupe correspondra à :

$$\mu_0 = \frac{1}{3}$$

Nous avons adopté pour la masse de Jupiter le nombre donné par Newcomb :

$$M' = \frac{1}{1047,355}$$

et, appliquant les formules données à la première partie, nous avons obtenu tout d'abord :

$$m_0 = \frac{1}{2}$$

$$\nu = 0,000\ 476\ 937\ 5$$

$$\nu m_0^2 = 0,000\ 119\ 234$$

$$(\nu m_0^2)^2 = 0,000\ 000\ 014$$

$$(\nu m_0^2)^3 = 0,000\ 000\ 000\ 002$$

$$(\nu m_0^2)^4 = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 196$$

et ces valeurs du paramètre font préjuger de la rapidité de la convergence des séries.

En partant de ces valeurs, nous avons appliqué à la lettre les formules données aux chapitres I et II de la première partie, I et II de la troisième partie et enfin I et II de la deuxième partie. Nous avons obtenu ainsi les coefficients des puissances 0, 1, 2, 3 et 4 de w dans les développements des coordonnées rectangulaires X, Y, Z et des coordonnées polaires r, v, s, coefficients qui sont donnés dans les tableaux I, I^bis, II, III, IV, V, VI, VII et VIII.

36. — Avant de passer aux tableaux qui constituent la table proprement dite, nous allons rappeler la forme des développements des coordonnées rectangulaires et polaires.

Nous savons que ces développements sont formés de deux parties : la première, caractérisée par l'indice zéro se rapporte à la solution périodique, la seconde se rapporte au complément qu'il faut lui ajouter pour tenir compte de la troisième coordonnée. Nous savons de plus que pour la coordonnée Z et pour la latitude la première partie n'existe pas.

Coordonnées rectangulaires.

Pour X et Y on a :

$$X = X_0 + \delta X \qquad\qquad Y = Y_0 + \delta Y$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} X_0 = \Sigma\, a\, (x\theta^{-1})_{0,2h} \cos (N + 2hV) \\ Y_0 = \Sigma\, a\, (x\theta^{-1})_{0,2h} \sin (N + 2hV) \end{array}\right.$$

$$V = N - N'$$

$$\begin{matrix} \delta X \\ \delta Y \end{matrix} = \frac{a\varepsilon}{2} \sum \left[(\delta\xi_{1,k} + \delta\eta_{1,k}) \begin{matrix} \cos (N + G_0 + kV) \\ \sin (N + G_0 + kV) \end{matrix} + (\delta\xi_{-1,-k} + \delta\eta_{-1,-k}) \begin{matrix} \cos (N - G_0 - kV) \\ \sin (N - G_0 - kT) \end{matrix} \right]$$

Nous poserons :

$$P_{1,k} = \delta\xi_{1,k} + \delta\eta_{1,k} \qquad\qquad P_{-1,k} = \delta\xi_{-1,k} + \delta\eta_{-1,k}$$

et les coefficients de δX et δY prendront la forme :

$$P'_{1,k} = \frac{a\varepsilon}{2} P_{1,k} \qquad\qquad P'_{-1,k} = \frac{a\varepsilon}{2} P_{-1,k}$$

Le développement de Z a la forme :

$$Z = a\gamma Z_{1,0} \sin H_0 + a\gamma Z_{1,-2} \sin (H_0 - 2V) + a\gamma Z_{1,2} \sin (H_0 + 2V) + a\gamma Z_{1,-4} \sin (H_0 - 4V) + a\gamma Z_{1,4} \sin (H_0 + 4V) \;\ldots$$

Coordonnées polaires.

Les coordonnées r et v ont respectivement pour expressions :

$$r = r_0 + \delta r \qquad\qquad v = v_0 + \delta v$$

avec :

$$r_0 = ar_{0,0} + ar_{0,2} \cos 2V + ar_{0,4} \cos 4V + \ldots$$

$$\begin{aligned} \delta r = {} & a\varepsilon R_{1,0} \cos G_0 + a\varepsilon R_{1,-2} \cos (G_0 - 2V) + a\varepsilon R_{1,2} \cos (G_0 + 2V) + \\ & + a\varepsilon R_{1,-4} \cos (G_0 - 4V) + a\varepsilon R_{1,4} \cos (G_0 + 4V) \;\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$v_0 = N + l_{0,2} \sin 2V + l_{0,4} \sin 4V \;\ldots$$

$$\begin{aligned} \delta v = {} & \varepsilon\delta l_{1,0} \sin G_0 + \varepsilon\delta l_{1,-2} \sin (G_0 - 2V) + \varepsilon\delta l_{1,2} \sin (G_0 + 2V) + \\ & + \varepsilon\delta l_{1,-4} \sin (G_0 - 4V) + \varepsilon\delta l_{1,4} \sin (G_0 + 4V) \;\ldots \end{aligned}$$

Enfin la latitude s a pour expression :

$$s = \gamma B_0 \sin H_0 + \gamma B_{-2} \sin (H_0 - 2V) + \gamma B_2 \sin (H_0 + 2V) + \gamma B_{-4} \sin (H_0 - 4V) + \gamma B_4 \sin (H_0 + 4V) \;\ldots$$

Dans les développements de δX , δY , δr , δv , d'une part, de Z et s , d'autre part, ε et γ sont des constantes qui seront déterminées plus loin, constantes dont la valeur dépend de l'astéroïde étudié.

Nous allons donner les tableaux des coefficients

$$P_{\pm 1,k} \,,\; Z_{1,k} \,,\; r_{0,k} \,,\; R_{1,k} \,,\; l_{0,k} \,,\; \delta l_{0,k} \,,\; B_k \,,$$

$P_{\pm 1,k}$ ayant la signification donnée plus haut, et $R_{1,k}$ représentant le quotient par ε des coefficients déterminés au chapitre II de la deuxième partie d'après le chapitre II de la troisième partie.

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
			Tableau I X_0 et Y_0		
$(x\theta^{-1})_{0,0}$	1,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000
$(x\theta^{-1})_{0,2}$	0,000 172 437	−0,000 911 322	0,002 433 374	−0,004 166 634	0,007 222 309
$(x\theta^{-1})_{0,4}$	0,000 000 055	−0,000 000 565	0,000 002 901	−0,000 010 199	0,000 038 657
$(x\theta^{-1})_{0,6}$	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000

Note. — Les coefficients complets de X_0 et Y_0 s'obtiendront en multipliant les nombres du tableau par a.

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
			Tableau I^bis X_0 et Y_0		
$(y\theta)_{0,2} = (x\theta^{-1})_{0,-2}$	−0,000 683 336	0,003 253 714	−0,007 982 599	0,014 701 344	−0,060 565 889
$(y\theta)_{0,4} = (x\theta^{-1})_{0,-4}$	0,000 000 009	−0,000 000 107	0,000 000 616	−0,000 002 375	0 000 006 909
$(y\theta)_{0,6} = (x\theta^{-1})_{0,-6}$	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000	0,000 000 000
			Tableau II δX et δY		
$P_{1,0}$	1,118 173 167	−0,094 274 159	0,271 166 843	−0,047 273 738	0,378 910 451
$P_{1,-2}$	0,000 588 957	−0,003 006 089	0,007 696 676	−0,007 512 233	0,007 810 042
$P_{1,2}$	−0,014 925 766	0,058 220 057	−0,149 002 703	0,262 836 830	−1,917 652 504
$P_{1,-4}$	0,000 000 089	−0,000 000 925	0,000 004 765	−0,000 014 830	0,000 087 118
$P_{1,4}$	−0,000 000 414	0,000 007 518	−0,000 049 600	0,000 200 020	−0,001 346 392
$P_{-1,0}$	−2,881 830 775	−0,094 239 939	0,271 011 175	−0,046 782 008	−0,854 829 365
$P_{-1,-2}$	0,008 260 408	−0,036 821 213	0,101 182 069	−0,194 721 788	1,247 277 452
$P_{-1,2}$	0,000 051 263	−0,000 420 931	0,001 414 924	−0,008 245 599	0,025 866 548
$P_{-1,\ 4}$	0,000 005 010	−0,000 045 344	0,000 218 748	−0,000 731 260	0,001 499 852
$P_{-1,4}$	−0,000 000 075	0,000 000 765	−0,000 003 637	0,000 011 182	−0,000 077 894
			Tableau III Z		
$Z_{1,0}$	1,000 000 141	−0,000 001 323	0,000 006 405	−0,000 021 383	0,000 066 157
$Z_{1,-2}$	−0,000 862 039	0,003 521 429	−0,008 034 685	0,015 524 222	−0,086 220 920
$Z_{1,2}$	0,000 172 441	−0,000 911 371	0,002 494 039	−0,005 211 718	0,021 405 375
$Z_{1,-4}$	0,000 000 227	−0,000 000 826	0,000 000 725	0,000 004 754	−0,000 032 736
$Z_{1,4}$	0,000 000 039	−0,000 000 446	0,000 002 425	−0,000 008 929	0,000 030 644
			Tableau IV r_0		
$r_{0,0}$	1,000 000 183	−0,000 001 782	0,000 008 792	−0,000 029 762	0,000 095 419
$r_{0,2}$	−0,000 510 900	0,002 342 392	−0,005 549 226	0,010 534 710	−0,053 343 580
$r_{0,4}$	−0,000 000 119	0,000 001 110	−0,000 005 274	0,000 017 188	−0,000 049 833

	w₀	w₁	W₂	w₃	w₄
			Tableau V δr		
$R_{1,0}$	− 0.881 833 390	− 0,094 214 476	0,270 883 519	− 0,046 339 203	− 0,240 460 377
$R_{1,-2}$	0,001 288 565	− 0,006 382 924	0,016 106 374	− 0,013 016 690	0,096 031 098
$R_{1,2}$	− 0,004 075 824	0,014 360 125	− 0,033 192 924	0,050 899 429	− 0,392 104 214
$R_{1,-4}$	0,000 000 648	− 0,000 006 549	0,000 024 430	− 0,000 069 100	0,000 239 911
$R_{1,4}$	0,000 007 629	− 0.000 067 354	0,000 308 625	− 0,001 013 642	0,002 862 759
			Tableau VI v_0		
$l_{0,2}$	176″,516	− 859″,100	2 148″,448	3 891″,800	13 982″,320
$l_{0,4}$	− 0″,035	0″,331	− 1″,573	5″,275	− 16″,292
			Tableau VII δv		
$\delta l_{1,0}$	412 529″,612	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000
$\delta l_{1,-2}$	− 22″,374	103″,858	− 235″,036	2 724″,135	7 553″,644
$\delta l_{1,2}$	− 2 343″,416	9 432″,353	− 24 919″,219	45 694″,693	− 320 714″,414
$\delta l_{1,-4}$	0″,010	− 0″,229	0″,842	3″,108	6″,753
$\delta l_{1,4}$	0″,340	− 2″,746	12″,570	− 38″,670	152″,809
			Tableau VIII s		
B_0	206 264″,806	0″,000	0″,000	0″,000	0″,000
B_{-2}	− 151″,462	605″,558	− 1 371″,118	2 658″,858	− 15 033″,588
B_{+2}	61″,913	− 308″,770	800″,575	− 1 618″,184	7 165″,722
B_{-4}	0″,037	− 0″,092	− 0″,174	2″.002	− 11″,438
B_{+4}	0″,025	− 0″,266	1″,285	− 4″,469	15″,239

37. — Nous allons donner maintenant un exemple. Nous avons choisi pour cela l'astéroide **(17)** Thétis dont le moyen mouvement a pour valeur :

$$914'',344$$

Nous avons tout d'abord à nous occuper du choix des constantes qui entrent dans les formules : a_0, ε, γ, φ_0 et Ω_0 .

Soit d'abord a_0 . Si nous nous reportons à la formule (35) qui donne la valeur de a , et à la façon dont nous l'avons démontrée, nous voyons que, pour un astre donné, ***étudié seul,*** a_0 est la valeur du demi grand axe qui correspond au moyen mouvement donné par les observations, d'après la formule :

$$n_0^2\, a_0^3 = f(M_0 + M)$$

où M_0 est la masse du Soleil (dans le cas actuel M est nul). Nous sommes donc conduit à prendre pour chaque astéroïde la valeur de a_0 donnée par cette équation. Le développement de a suivant les puissances de ϖ sera donné alors par la formule (85) où a_0 aura la valeur qui vient d'être déterminée.

Soient maintenant ε et γ. Nous avons dit que nous ferions en sorte que le coefficient complet de sin G dans le développement non symétrique de la longitude ait pour valeur :

$$2\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^3 + \frac{5}{96}\varepsilon^5$$

tout comme s'il s'agissait d un mouvement képlérien dans lequel ε serait l'excentricité, et nous nous sommes arrangés pour que le premier terme ait pour coefficient numérique 2 . Nous sommes donc conduit à prendre pour ε la valeur de l'exentricité de l'astéroïde donnée par ses éléments elliptiques.

Nous avons dit également que nous ferions en sorte que le coefficient complet de sin H dans le développement non symétrique de la latitude ait pour expression :

$$\gamma - \gamma\varepsilon^2 - \frac{1}{128}\gamma^3 + \frac{7}{64}\gamma\varepsilon^4 \ldots$$

comme s'il s'agissait d'un mouvement képlérien d'excentricité ε dans lequel γ serait égal au double du sinus de la demi-inclinaison. Nous avons réalisé cette condition pour le premier terme en nous arrangeant de telle sorte que son coefficient numérique soit égal à 1 . Nous sommes donc conduit à prendre pour γ le double de la valeur du sinus de la demi-inclinaison.

Il reste deux constantes φ_0 et Ω_0 . Elles entrent dans la composition des arguments G_0 et H_0 . Mais nous avons dit que si, dans les formules trouvées on faisait $vm^2 = 0$, on pourrait considérer l'astéroïde comme se mouvant approximativement sur une orbite elliptique d'excentricité ε , d'inclinaison γ , l'anomalie moyenne étant G_0 et l'argument de la latitude correspondant étant H_0 . Cela nous porte à prendre pour G_0 et H_0 respectivement l'anomalie moyenne et l'argument de la latitude sans nous occuper davantage de φ_0 et Ω_0 .

Ceci dit, revenons à Thétis. Le Kleine Planeten Jahrgang de 1938 nous donne pour les éléments les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} M_0 &= 358^\circ 41' 42'' \\ \omega &= 137\ 58\ 44{,}40 \\ \Omega &= 125\ 21\ 46{,}80 \\ i &= 5\ 36\ 7{,}20 \\ \varphi &= 7\ 50\ 52{,}80 \\ n &= 914'',344 \\ a &= 2{,}4694 \end{aligned} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} (\text{Equ. } 1950{,}0)$$

Le moyen mouvement de Jupiter ayant pour valeur

$$n' = 299'',1283 \qquad \text{(Connaissance des Temps)}$$

a formule :

$$\mu = \mu_0 (1 - w) \qquad \mu_0 = \frac{1}{3}$$

donne pour w la valeur : $w = 0{,}018\ 547\ 833$

et nous obtenons de suite les puissances successives de w :

$$w^2 = 0{,}000\ 344\ 022$$
$$w^3 = 0{,}000\ 006\ 381$$
$$w^4 = 0{,}000\ 000\ 112$$

Les valeurs de w et de ses puissances nous permettent d'obtenir de suite les valeurs de K , g_0 et h_0 :

$$K = 2{,}208\ 953\ 782$$
$$g_0 = 1{,}313\ 041\ 938$$
$$h_0 = 1{,}484\ 330\ 444$$

La formule (85) nous donne alors la valeur de a qui, en prenant pour a_0 la valeur du demi grand axe donnée aux eléments, est

$$a = 2{,}469\ 357\ 892$$

D'après ce que nous avons dit plus haut au sujet de ε et de γ, ils auront pour valeurs respectives $\sin\varphi$ et $2\sin\frac{i}{2}$. c'est-a-dire

$$\varepsilon = 0{,}136\ 545\ 800$$

$$\gamma = 0{,}097\ 734\ 440$$

Partant de ces valeurs et utilisant les tableaux IV, V, VI, VII, VIII, nous obtenons, pour les coordonnées polaires, les séries suivantes :

$$r_0 = 2{,}469\ 358\ 270 - 0{,}001\ 158\ 875\cos 2V - 0{,}000\ 000\ 247\cos 4V \quad \ldots$$

$$\delta r = -0{,}297\ 894\ 880\cos G_0 + 0{,}000\ 396\ 405\cos(G_0 - 2V) - 0{,}001\ 288\ 237\cos(G_0 + 2V) + \\ + 0{,}000\ 000\ 180\cos(G_0 - 4V) + 0{,}000\ 002\ 185\cos(G_0 + 4V) \ldots$$

$$v_0 = N + 171'',301\sin 2V - 0'',030\sin 4V \quad \ldots$$

$$\delta v = 56\ 329'',186\sin G_0 - 2'',801\sin(G_0 - 2V) - 293'',128\sin(G_0 + 2V) + \\ + 0'',001\sin(G_0 - 4V) + 0'',040\sin(G_0 + 4V) \quad \ldots$$

$$s = 20\ 159'',165\sin H_0 - 13'',749\sin(H_0 - 2V) + 5'',517\sin(H_0 + 2V) + \\ + 0'',004\sin(H_0 - 4V) - 0'',003\sin(H_0 + 4V) \quad \ldots$$

Telles sont les séries qui definisse en fonction du temps les coordonnées polaires de **(17)** Thétis, ces coordonnées etant rapportées a l équinoxe moyen de 1950,0

38 — Pour voir quel degré de confiance ces formules peuvent mériter, nous allons calculer pour la même date r, v et s par ces formules et par les formules du mouvement elliptique et examiner les differences des nombres obtenus Nous ferons seulement une observation les élements donnes par le Kleine Planeten Jahrgang ont eté calculés en tenant compte, par perturbations spéciales, de l'influence de Jupiter et de Saturne Les séries données plus haut sont obtenues en tenant compte seulement de l'action de Jupiter Si les éléments avaient été calculés en tenant compte de l action de Jupiter seul, les différences devraient être tres petites et de l'ordre des erreurs d'observations, mais ici les différences devront représenter l'action de Saturne Elles devront être quand même assez petites vu l'éloignement de Saturne

Ceci dit, pour reduire les formules en nombres, nous devons calculer N, V, G_0, H_0 ; pour ces derniers, selon ce qui a été dit plus haut, nous prendrons pour G_0 la valeur de l'anomalie moyenne à l'époque choisie et pour H_0 la valeur de l'argument correspondant de la latitude Nous choisirons comme époque le 11 Juin 1938 à 0^h T U qui est l epoque des eléments Nous aurons alors

$$G_0 = M_0 = 358^\circ\ 41'\ 42'',00$$

$$H_0 = M_0 + \omega = 136^\circ\ 40'\ 26'',40$$

Nous savons que la longitude moyenne N s'obtient en ajoutant a l'anomalie moyenne la longitude du perihelie, cela nous donnera ici pour N :

$$N = 262^\circ\ 2'\ 13'',20$$

Il reste à calculer $V = N - N'$. Pour cela il faut calculer la longitude moyenne de Jupiter. En utilisant les tables de Leverrier, nous obtenons, pour le 11 Juin 1938 à 0^h temps universel :

$$N' = 325^\circ\ 32'\ 7'',90$$

et nous obtenons ainsi :

$$V = 296^\circ\ 30'\ 5'',30$$

puis :

$$2V = 233^\circ\ 0'\ 10'',60$$
$$4V = 106^\circ\ 0'\ 21'',20$$

En faisant usage de tables de valeurs naturelles et d'une machine à calculer, nous obtiendrons enfin, pour r, v et s, le 11 Juin 1938 à 0^h T.U. les valeurs suivantes :

$$r = 2,172\ 804\ 653$$
$$v = 261^\circ\ 42'\ 21'',32$$
$$s = +\ 3^\circ\ 50'\ 46'',79$$

Si maintenant, nous calculons les mêmes coordonnées en faisant usage des formules du mouvement elliptique et pour déterminer la longitude projetée et la latitude, des formules :

$$\operatorname{tg}(v - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\varpi + \omega)$$
$$\operatorname{tg} s = \operatorname{tg} i \sin(\varpi + \omega)$$

nous obtiendrons pour les valeurs elliptiques de r, v et s :

$$r = 2,132\ 333\ 333$$
$$v = 261^\circ\ 44'\ 42''\ 27$$
$$s = +\ 3^\circ\ 51'\ \ 9''\ 16$$

Les différences avec les valeurs trouvées plus haut sont :

$$r' - r = 0,040\ 471\ 320$$
$$v' - v = 0^\circ\ \ 2'\ 20''\ 95$$
$$s' - s = 0^\circ\ \ 0'\ 22''\ 37$$

ces différences sont petites et justifient ce que nous avions annoncé plus haut.

En résumé, à l'inspection des formules données pour r, v et s, on voit que la décroissance des coefficients est très rapide, ce qui s'explique par le choix du paramètre νm^2 qui contient en facteur la masse perturbatrice.

Nous ferons simplement une remarque sur les calculs à effectuer pour obtenir les tableaux qui constituent une table : *Tous les calculs, sans exception, sont des calculs algébriques simples, résolution de systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues, multiplications ou divisions algébriques ; il s'introduit seulement quatre racines carrées et leur calcul est immédiat en partant de la formule du binôme, mais là aussi, les calculs se réduisent à des multiplications algébriques.* Il y a donc *uniformité* dans les calculs et les chances d'erreurs sont moindres que lorsqu'il s'agit de calculs trigonométriques.

CONCLUSIONS

39 — Le moment est venu de résumer notre travail et d examiner les résultats obtenus

Nous nous étions propose d étudier les astéroides par groupes en appliquant la méthode de Hill-Brown modifiée par l introduction de la conception de M Bohlin si μ désigne le rapport des moyens mouvements n de la planete troublante et n de l astéroide etudié, si μ_0 désigne un nombre *rationnel* voisin de μ, ces deux nombres sont liés par la relation

$$\mu = \mu_0 (1 - w)$$

w étant un petit nombre, μ_0 caracterisera le groupe auquel appartient l astéroide étudié et w caractérisera chaque astéroide du groupe

Ce problème est entierement résolu et nous sommes en mesure d etudier les astéroides par groupes, a une exception près le groupe Troyen lorsque la planète troublante est Jupiter Cela n a pas grande importance car le groupe Troyen est peu nombreux

Nous voyons que les calculs fondamentaux, les plus longs, sont reservés a l étude de la planète idéale qui correspond au nombre rationnel μ_0 choisi Ayant obtenu les coefficients des puissances de w dans les séries qui représentent le mouvement, coefficients qui sont numériques et calculés *une fois pour toutes pour le groupe considere*, le calcul, pour chaque astéroide, sera rapide Il se ramene, en effet au calcul de w, puis, pour chaque coefficient, dans les séries qui représentent les coordonnees, au calcul de quelques termes correctifs, deux ou trois genéralement, obtenus en multipliant un nombre deja calculé par la puissance correspondante de w Dans la majorite des cas, ce calcul pourra s effectuer très rapidement a la machine a calculer

Mais, ce qui distingue notre méthode, c est la facilite d obtenir *directement*, *sans être oblige de calculer les elements osculateurs*, *les coordonnees rectangulaires ou polaires* Son application permettra d obtenir les perturbations générales d un astéroide sous la forme de tableaux un pour chaque coordonnée, tableaux valables pour une époque quelconque En particularisant l epoque, et, spécialement, en prenant une succession regulière d époques on pourra obtenir ainsi, soit en coordonnées rectangulaires, soit en coordonnées polaires, une éphémeride qui tienne compte des perturbations soit de Jupiter, soit de Saturne ou de telle autre planete pour laquelle des tables auront éte dressées On voit donc qu on est dispensé de la résolution des équations de condition, chose nécessaire quand on veut obtenir les elements osculateurs

Il reste un pas a franchir pour avoir directement les ascensions droites et les declinaisons Cela sera facile quand les tableaux de perturbations auront été dressés pour la longitude, la latitude et le rayon vecteur Il suffira alors d appliquer les formules de changement de coordonnées et ce calcul pourra s'effectuer a la machine a calculer sans aucune difficulté

Vu et permis d imprimer

Le Recteur de l Academie de Paris,

G ROUSSY

Vu et approuve

Paris le 28 Mars 1939,

Le Doyen de la Faculte des Sciences,

Ch MAURAIN

ERRATA

Pages	Lignes	Au lieu de :	Lisez :
1	15	imaginé	imaginée
3	18	Vol. IV	Vol. LIII
4	3	$1m + m_0 w$	$1 + m_0 w$
7	9	snivant	suivant
8	16	$\rho'^3 e^{-2l}$	$\rho'^3 e^{-2l'}$
9	8	$D^1 F$	$D^{-1} F$
11	11	$x_\alpha , y_\alpha , C_\alpha$	x_a , y_a , C_a
11	11	$q - l$	$q - 1$
11	20	$q - l$	$q - 1$
11	avant-dernière	$+ \left(\frac{3}{2} + 2m\right) Dy_q$	$- \left(\frac{3}{2} + 2m\right) Dy_q$
12	1	une séries	des séries
12	9	x_{qk} , y_{qk}	$x_{q,k} , y_{q,k}$
12	17	$(x_{q0} + y_{q0})$	$(x_{q,0} + y_{q,0})$
12	27	$x^{1,k} , y^{1,k}$	$x_{1,k} , y_{1,k}$
13	15	$x_{1,2} \theta^{-}{}_2$	$x_{1,2} \theta^{-2}$
14	1	$m^2 y_1$	$m'^2 y_1$
16	4	$a , + b$	$, a + b$
16	35	$-\frac{6}{4} \theta^2$	$-\frac{6}{4} \theta^{-2}$
17	21	$\theta_{2q-4(p'+p')}$	$\theta_{2q-4(p'+p'')}$
18	20	déterminés	déterminer
18	32	fonctian	fonction
20	15	$\eta_{0,4} \theta_4$	$\eta_{0,4} \theta^4$
22	11	$- r\mathrm{cosse}^{-1V}$	$= r\mathrm{cosse}^{-iv}$
22	13	$ax = r\mathrm{cosse}^{-1V-l}$	$ay = r\mathrm{cosse}^{-iV-l}$
22	19	$\mathrm{Th}\, \lambda$	$\mathrm{Th}\, l$
22	26	$V = N + \frac{l}{2}$	$v = N + \frac{l}{2}$
25	21	$x_{2(q-1),2h}$	$x_{p+2(q-1),2h}$
26	27	$\sqrt{\lvert W_p \rvert}$	$\sqrt[p]{\lvert W_p \rvert}$
28	18	$(1 - 2\nu)\, m^2 x$	$(1 - 2\nu)\, m^2 \delta x$
28	19	$(1 - 2\nu)\, m^2 y$	$(1 - 2\nu)\, m^2 \delta y$
28	23	$+ y_0 z^2$	$- y_0 z^2$

29	31	$Q = \frac{1}{2}\left[\frac{D^2x_0}{Dx} - \frac{D^2y_0}{Dy}\right]$	$Q = \frac{1}{2}\left[\frac{D^2x_0}{Dx_0} + \frac{D^2y_0}{Dy_0}\right]$
30	6	$-2\, Dx_0\, Dy_0$	$-Dx_0\, Dy_0$
31	15	$y_1\, Dy_0$	$-y_1\, Dy_0$
31	25	$-2\, Dx_0\, Dy_0$	$-Dx_0\, Dy_0$
33	28	$\varphi_j\, \varphi_j$	$\varphi_j\, \varphi_j'$
34	22	n	n_0
37	23	ε^{-1}	ε_{-1}
38	23	$\mathrm{Th}\, (\lambda_0 + \delta l)$	$\mathrm{Th}\, (l_0 + \delta l)$
44	20	$M'^{n'}$	$M'_{n'}$
46	13, 16	$\frac{m_0}{m}$	$\frac{m}{m_0}$
47	18	$x^{h+2,2h}\, (\mu_0)$	$x_{h+2,2h}\, (\mu_0)$
47	19	$(x\theta^{-1})^{(0)}{}_{0,2h}$	$(x\theta^{-1})^{(1)}{}_{0,2h}$
47	19	$\Big] +$	$\Big] -$
49	15	suivants	suivant
50	3	$-2 \Big[\xi^{(2)}{}_{0,2}\, \eta^{(2)}{}_{0,4} +$	$-2 \Big[\xi^{(0)}{}_{0,2}\, \eta^{(2)}{}_{0,4} +$
50	17	$\frac{-n}{1}\, \xi'_0$	$-\frac{n}{1}\, \xi'_0$
51	3	$\xi^{(0)}{}_{0,2}\, \xi^{(2)}{}_{0,4}\, \xi^{(1)}{}_{0,2}\, \xi^{(1)}{}_{0,4} +$	$\xi^{(0)}{}_{0,2}\, \xi^{(2)}{}_{0,4} + \xi^{(1)}{}_{0,2}\, \xi^{(1)}{}_{0,4} +$
51	6 en montant	$-2\, [v_2{}^{(0)}\, u_1{}^{(2)} +$	$-2\, [v_2{}^{(0)}\, u_1{}^{(2)} +$
51	4 en montant	$-4u_2{}^{(0)}$	$-4u_2{}^{(0)}\, v_2{}^{(0)}$
55	13	(123), (124), (125)	(90), (91), (92)
55	3 en montant	$2\, [\rho^{(0)}{}_{0,0}\, \xi^{(2)}{}_{0,4} +$	$2\, [\rho^{(0)}{}_{0,0}\, \xi^{(1)}{}_{0,4} +$

TABLE DES MATIÈRES