THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

SHIH-KY WANG

Recherches sur la diffusion de la lumière dans la voie lactée

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1936

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__180__5_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SÉRIE
N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

WANG SHIH-KY

Licencie es Sciences Mathématiques

1re THÈSE

RECHERCHES SUR LA DIFFUSION DE LA LUMIÈRE
DANS LA VOIE LACTÉE

2e THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ :
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL TENSORIEL

Soutenues le *1936 devant la Commission d'examen*

Président : M. H. DULAC

Examinateurs MM H. EYRAUD.
J. DUFAY

IMPRIMERIE DE TRÉVOUX PRÈS LYON
G. PATISSIER

1936

ENS BM
M026624

UNIVERSITÉ DE LYON — FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. LONGCHAMBON, ✻, ✠, O I.

Assesseur

M. VANEY, ✻, O I., ✠.

Professeurs honoraires

MM. VESSIOT, O. ✻, O I.
RIGOLLOT, ✻, O I.
COUTURIER, ✻, O I., ✠.

Professeurs titulaires

LONGCHAMBON, ✻, ✠, O I., *Minéralogie.*
DULAC, ✻, O I., *Calcul différentiel et intégral.*
SIRE, O I., ✠, *Mécanique rationnelle et appliquée.*
MEUNIER, O. ✻, O I., *Chimie industrielle.*
BEAUVERIE, ✻, O I., ✠ C., *Botanique.*
CARDOT, O I., *Physiologie générale et comparée.*
VANEY, ✻, O I., ✠, *Zoologie.*
LOCQUIN, ✻, O I., *Chimie générale.*
ROMAN, O I., *Géologie.*
DÉJARDIN, O I, *Physique Générale.*
DOUIN, ✻, ✠, O I, *Botanique.*
SOLLAUD, O I, *Zoologie.*
THIBAUD, *Physique expérimentale.*
LEMARCHANDS, O I. *Chimie industrielle.*
EYRAUD, O I, *Mathématiques.*
AUMÉRAS, O. *Chimie physique.*
FROMAGEOT O, *Chimie biologique,*

Maîtres de conférences et Chargés de cours complémentaires

MM. BONNET, O I., *Zoologie appliquée et Zootechnie*
MAYET, ✻, O I., ✠, *Anthropologie.*
PELOSSE, O I., *Sériciculture.*
DONCIEUX, O I., *S. P. C. N.*
Mlle BACHRACH, O I, *Physiologie.*
MM. DARESTE DE LA CHAVANNE, O I., *Géographie physique.*
DUFAY, O, *Astrophysique,*
VIRET, *Etude des Roches.*
RANSON, *Géométrie supérieure.*
MERMET, *Mécanique des fluides.*

Secrétaire

M. ROUX.

INTRODUCTION

Le problème de la luminosité du ciel nocturne est posé depuis plus de 25 ans. M. Charles FABRY, à qui l'on doit les premières mesures photographiques correctes de la brillance du ciel, a insisté à plusieurs reprises, sur son importance.

Il est parvenu ainsi à attirer peu à peu l'attention des physiciens et des astronomes sur une question dont l'intérêt avait été longtemps méconnu, si bien que l'étude du ciel nocturne a donné lieu depuis une douzaine d'années à d'assez nombreuses recherches (STEPHER, LORD RAYLEIGH, DUFAY, SOMMER, etc.). Celles-ci ont reçu récemment une impulsion nouvelle par suite des progrès techniques réalisés dans la fabrication des objectifs très lumineux. (CABANNES et DUFAY, ARNULF, etc.).

L'hypothèse de la diffusion dans l'espace de la lumière du soleil et des étoiles avait été envisagée dès le début comme une cause possible de la luminosité du ciel. (SALET, VESSOT-KING, FABRY). L'expérience a montré que ce n'était certainement pas la seule, car la haute atmosphère intervient par l'émission d'un spectre caractéristique de raies et de bandes brillantes. Toutefois la lumière du ciel nocturne paraît avoir une origine complexe et les travaux les plus récents semblent encore favorables à l'hypothèse de la diffusion interstellaire.

Si le milieu diffusant s'étend à toute la Voie Lactée, on doit observer aussi une absorption apparente de la lumière des astres. On avait cru autrefois avoir mis en évidence l'existence de ce phénomène. D'autres observations y ont ensuite contredit et pendant quelque temps la transparence de l'espace galactique a été admise sans conteste. Mais voici que depuis 1930, un nombre considérable de travaux, dont quelques-uns sont vraiment décisifs, ont montré l'existence d'une faible absorption de la lumière des étoiles lointaines, qui se manifeste surtout au voisinage du plan galactique. Ils ont donné dans l'ensemble, des valeurs bien concordantes du coefficient d'absorption.

Il était naturel de chercher à lier les deux phénomènes de la diffusion et de l'absorption de la lumière dans l'espace. Mais on ne sait encore pas quelle sorte de particules diffusantes il faut faire intervenir. Certains astronomes penchent pour des particules solides. Ainsi SCHALEN conclut récemment en faveur de particules de fer de 50 à 80 mμ de diamètre. Nous admettons ici provisoirement qu'il s'agit de *particules petites par rapport aux longueurs d'onde*, d'abord parce que cette hypothèse nous paraît au moins aussi plausible qu'une autre, ensuite parce que la diffusion obéit alors à des lois particulièrement simples. Le but essentiel que nous avons poursuivi est d'évaluer la brillance communiquée au ciel par la diffusion interstellaire, à partir de la valeur trou-

vée pour le coefficient d'absorption. Il n'est donc pas nécessaire de choisir entre les molécules ou les atomes d'un gaz, d'une part, et les électrons libres d'autre part. Les calculs faits seront valables dans les deux cas ; seule sera changée la répartition de l'énergie dans le spectre de la lumière diffusée. Au contraire, nos résultats devraient être modifiés s'il était prouvé à l'avenir que les particules diffusantes ne sont pas petites par rapport aux longueurs d'onde. Encore, les méthodes de calcul que nous avons employées pourraient-elles servir de cadre à des nouvelles applications numériques.

La liaison entre la diffusion et l'absorption interstellaire a été tentée pour la première fois par Otto Struve [1], mais en partant d'hypothèses simplificatrices un peu trop grossières. M. Dufay a montré notamment qu'il était imprudent de négliger l'absorption de la lumière le long des rayons diffusés [2]. En cherchant à tenir compte des diffusions successives, il est parvenu à une équation à deux variables, du type Fredholm, à noyau singulier [3].

On sait comment depuis les travaux fondamentaux de Picard, Fredholm, etc., jusqu'aux recherches de Hilbert, Schmidt, Fréchet, etc., la théorie des équations intégrales est devenue un puissant instrument de travail en physique mathématique. C'est encore cette théorie qui permet de préciser le problème des diffusions successives dans la Voie Lactée.

Dans le premier chapitre de ce travail, je résume les résultats obtenus en collaboration avec M. Dufay sur le rôle des étoiles faibles dans la lumière du ciel nocturne. Dans le chapitre II, j'expose sommairement les raisons qui militent en faveur de la diffusion interstellaire ; dans le chapitre III, je rappelle les principaux résultats obtenus dans l'étude de l'absorption.

Les chapitres IV, V et VI sont consacrés à la diffusion de la lumière des étoiles dans la Voie Lactée. J'y développe les calculs qui n'ont été exposés que très sommairement par M. Dufay et qui aboutissent à l'équation des diffusions successives. Puis, simplifiant cette équation, j'étudie l'équation réduite et montre comment elle peut être résolue numériquement dans deux hypothèses schématiques sur la constitution de la Galaxie ; les calculs numériques sont effectués dans ces deux cas différents.

Enfin, j'aborde, dans le chapitre VII, la diffusion de la lumière du soleil dans l'espace.

Les Professeurs J. Dufay, Directeur de l'Observatoire, et H. Eyraud, Directeur de l'Institut de Science financière et d'assurances, ont été pour moi des maîtres bienveillants et dévoués. Qu'ils me permettent de leur exprimer ici mon affectueuse reconnaissance pour les conseils qu'ils ont bien voulu me prodiguer au cours de ce travail.

CHAPITRE PREMIER

Rôle des étoiles dans la lumière du ciel nocturne

1. — Les étoiles invisibles à l'œil nu contribuent évidemment à l'illumination du ciel nocturne. Il importe avant tout de préciser leur rôle, en cherchant à évaluer la brillance qu'elles communiqueraient à elles seules à la voûte céleste. Dans ce but, il a paru utile de reprendre, en utilisant des documents plus nombreux, les calculs faits par M. Dufay en 1928 [4]. Le premier travail, fait en collaboration avec M. Dufay, a été publié récemment [6]. Il suffira donc d'en donner ici un bref résumé.

2. — *Brillance d'origine stellaire dans le cas des mesures photographiques.* — Les comptes d'étoiles de Chapman et Melotte [5] s'étendent jusqu'à la magnitude $m_g = 17$. Ceux de Seares et ses collaborateurs jusqu'à $m_g = 18{,}5$ [7].

Nous désignerons dans la suite par la notation $m^1(1°)$ la brillance d'origine stellaire exprimée en nombre d'étoiles de magnitude 1,0 par degré-carré ; les mots *photographique, visuelle, photovisuelle*, seront désignés par les indices g, v, pv :

$$m_g^1(1°),\ m_v^1\ (1°),\ m_{pv}^1\ (1°)\ .$$

N_m étant le nombre d'étoiles de magnitudes $\leqslant$ m, ces comptes donnent directement ou permettent d'évaluer :

$$\log \frac{dN_m}{dm}$$

Exprimé en étoiles de magnitude photographique 1,0, l'éclairement produit par les étoiles de magnitude m est donné par la formule suivante :

$$dE_m = \frac{dN_m}{dm}\ 10^{-0{,}4(m\ 1)} = f(m)\ ;$$

d'où l'éclat global de toutes les étoiles de magnitudes $a \leqslant m \leqslant b$ contenues dans un degré carré du ciel :

$$E = \int_a^b f(m)\, dm$$

Les courbes f(m) ont toutes même allure et présentent un maximum pour m voisin de 10 ou 11. On admet généralement, lorsque $m \geqslant 16$:

$$\log \frac{dN_m}{dm} = -a + bm + cm^2 ,$$

a, b, c étant des constantes dans une zone galactique déterminée.

Entre l'échelle de Harvard utilisée par Chapman et Melotte et l'échelle internationale utilisée par Seares et ses collaborateurs, il existe une *différence de zéro* atteignant 0^m32.

Dans le tableau I les brillances d'origine stellaire sont toutes évaluées en $m_g'(1°)$ de l'échelle internationale :

Tableau I

b	$m_g > 8,0$ Chapman	$m_g > 8,0$ Seares	b	$m_g > 7,0$ Chapman	$m_g > 7,0$ Seares
0°		0,0221	0°		0,0237
30°		0,0067	30°		0,0074
60°		0,0034	60°		0,0039
90°		0,0026	90°		0,0030
0°	 0,0127	 0,0165	0°	 0,0140	 0,0174
10°	 0,0108		10°	 0,0119	
20°	 0,0093	 0,0070	20°	 0,0102	 0,0078
30°	 0,0069		30°	 0,0076	
40°	 0,0049	 0,0038	40°	 0,0055	 0,0043
50°	 0,0048		50°	 0,0054	
60°	 0,0042		60°	 0,0048	
70°	 0,0038		70°	 0,0043	
90°			90°		
Ciel entier	0,0081	0,0091	Ciel entier	0,0090	0,0099

On voit que ces deux statistiques conduisent à des résultats assez concordants.

3. — *Brillance d'origine stellaire dans le cas des mesures photovisuelles et indice de couleur global de toutes les étoiles.*

Par la formule $I = +0,16 + 0,05\, m_g$ établie par Seares [8], on peut transformer les m_g en m_{pv} ou inversement, connaissant l'indice de couleur moyen I des étoiles

de chaque magnitude m_g. Le tableau II donne en m_{pv}^1 (1°) les brillances d'origine stellaire et le tableau III donne les magnitudes photographiques et photovisuelles μ_g et μ_{pv} de 1° carré du ciel ainsi que l'indice de couleur global I_g de la lumière des étoiles faibles.

TABLEAU II

Latitudes galactiques	$m_g>8,0$	$m_g>7,0$
0-20°	0,0344	0,0364
20-40°	0,0137	0,0149
40-90°	0,0072	0,0080
30°	0,0132	0,0144

TABLEAU III

Latitudes galactiques	$m_g>8,0$			$m_g>7,0$		
	μ_g	μ_{pv}	I_g	μ_g	μ_{pv}	I_g
0-20°	5,46	4,66	+0,80	5,38	4,60	+0,78
20-40°	6,44	5,70	+0,74	6,28	5,57	+0,71
40-90°	7,07	6,36	+0,71	6,93	6,24	+0,69
30°	6,44	5,70	+0,74	6,32	5,71	+0,71

4. — *Etude particulière de la région polaire. Eclat global photographique.*

Les mesures directes par comparaison aux étoiles de la brillance du ciel nocturne ont porté le plus souvent sur la région voisine du pôle nord. Il est donc particulièrement intéressant de chercher à évaluer la brillance d'origine stellaire de cette région.

Le pôle céleste ayant pour coordonnées galactiques :

$$b = +27°21', \quad l = 90°$$

se trouve dans la zone 20°-40° de Seares dont la brillance d'origine stellaire est donnée dans le tableau I.

Mais les nombres empruntés au mémoire de SEARES ne concernent que la distribution moyenne des étoiles [9]. Tenant compte des corrections à apporter aux valeurs de log N_m fournies par cette distribution moyenne, on trouve finalement par interpolation graphique l'éclat global au point b = +27°30', l = 90° :

pour $m_g>8,0$ $\quad m_g^1(1°) = 0,0046$,

» $m_g>7,0$ $\quad m_g^1(1°) = 0,0051$,

soit environ les 2/3 des nombres correspondant à la zone 20°-40°.

En partant d'un travail de CHAPMAN et MELOTTE sur une région de 50' de diamètre entourant le pôle nord [10], on trouve que l'éclat global relatif à cette région équivaut à 0,00818 m_g^1 (1°) exprimé dans l'échelle de HARVARD ou 0,00609 = m_g^1 (1°) dans le système international. HERTZPRUNG a étudié aussi toutes les étoiles contenues dans un cercle de 21'40" de diamètre autour du pôle [11]. Un calcul identique conduit à l'état global m_g^1 (1°) = 0,00610 système international. *Donc, ces deux séries de mesures indépendantes l'une de l'autre donnent des résultats rigoureusement identiques.*

Les étoiles observées par CHAPMANN et MELOTTE et par HERTZPRUNG sont comprises dans les mêmes limites de magnitude ($9 \leqslant m_g \leqslant 16$). L'éclat global ainsi obtenu doit être

majoré d'une fraction de 0,15 environ pour tenir compte des étoiles de $m_g > 16$. D'où la brillance d'origine stellaire autour du pôle nord :

$$0{,}0061\ (1+0{,}15) = 0{,}0068\ m_g^1\ (1°)\ ;$$

mais la présence d'une étoile plus brillante que la 9e magnitude modifie d'une manière appréciable l'éclat global de 1° carré du ciel. Nous verrons dans quelle mesure une autre majoration pourra être faite lorsqu'on compare la brillance d'origine stellaire à la brillance réelle du ciel nocturne.

5. — *Eclat global photovisuel et indice de couleur des étoiles voisines du pôle.* HERTZPRUNG a déterminé, outre les m_g, les longueurs d'onde effectives λ de toutes les étoiles (jusqu'à $m_g = 16$) contenues dans le cercle de 21'40" de diamètre autour du pôle nord. La relation :

$$I_\lambda = \frac{1}{200}\,(\lambda - 4216\ \text{Å})$$

lui permet d'en tirer les indices de couleur I_λ dans le système de Göttingen Aktinometrie. Donc, dans ce système, on a :

$$m_{pv} = m_g - I_\lambda\ .$$

En faisant la somme, on obtient l'éclat global :

$$0{,}0099\ m_{pv}^1\ (1°),\ \text{correspondant à la magnitude}$$

$$m_{pv} = 6{,}01$$

L'indice de couleur global correspondant est donc :

$$I_\lambda = 6{,}54 - 6{,}01 = +0{,}53$$

Pour 77 étoiles de la liste de HERTZPRUNG, on connaît aussi les indices I_{MW} déterminés par SEARES dans le système international. HERTZPRUNG a obtenu ainsi la relation $I_{MW} = 0{,}104 + 1{,}117\ I_\lambda$ qui permet d'exprimer, dans le système international, l'indice de couleur global de toutes les étoiles autour du pôle (pour $9 < m < 16$). On trouve $I_g = +0{,}697$.

Dans le système international, la magnitude photovisuelle de 1° carré du ciel serait donc : $\mu_{pv} = 6{,}544 - 0{,}697 = +5{,}847$

$$\text{ou :}\qquad m_{pv}^1(1°) = 0{,}0115\ .$$

Ce nombre doit être majoré si l'on veut tenir compte des étoiles, telles que $m_g > 16$ et $8{,}0 < m_g < 9{,}0$.

Les brillances d'origine stellaire et les indices de couleur correspondants sont groupés dans le tableau IV.

TABLEAU IV

	Mesures photographiques	Mesures photovisuelles	μ_g	μ_{pv}	I_g
$9<m<16,0$	0,0061	0,0115	6,544	5,847	+0,697
$9<m<25,0$	0,0068	0,0137	6,419	5,658	+0,761
$8<m<25,0$	0,0078	0,0152	6,270	5,545	+0,725

Les nombres obtenus pour I_g et pour μ_{pv} aussi bien que pour μ_g sont très voisins des valeurs moyennes relatives à la zone 20°-40°.

6. — *Somme des éclats de toutes les étoiles.*

La somme ΣE des éclats de toutes les étoiles n'est pas l'éclairement produit sur un plan, puisqu'on n'introduit pas l'inclinaison des rayons. Mais on peut lui donner la signification physique suivante : Une sphère transparente de rayon unité et centrée sur la terre serait traversée au total par le flux $\pi\Sigma E$.

Dans le tableau V, M représente la magnitude correspondante à ΣE et M_g-M_{pv} l'indice de couleur de toutes les étoiles.

TABLEAU V

	ΣE	M	M_g-M_{pv}
Mesures photographiques :			
Chapman et Melotte	514	—5,78	
Seares	577	—5,90	+0,68
Mesures photovisuelles : Seares	1092	—6,58	

7. — *Comparaison avec les mesures directes de la brillance du ciel.* — Le tableau VI rassemble les valeurs moyennes de la brillance du ciel au voisinage du pôle, exprimées en $m_g'(1°)$ d'après les mesures photométriques de M. DUFAY [3].

TABLEAU VI

	B	μ
Mesures photographiques	0,045	4,36
Mesures visuelles	0,036	4,60
Mesures photovisuelles	0,073	3,84

La comparaison doit être faite avec la brillance moyenne d'origine stellaire d'une large région autour du pôle plutôt qu'avec l'éclat global déduit des petites aires étudiées par CHAPMAN et MELOTTE et par HERTZPRUNG.

Il est probable qu'en prenant les valeurs correspondant à la distribution moyenne pour 30° de latitude galactique, on obtient une valeur maximum de la brillance stellaire et qu'une valeur minimum doit s'obtenir d'après les nombres corrigés de SEARES pour la région polaire. On prendra dans tous les cas celle-ci égale à 2/3 de la valeur maximum.

Nous prendrons en définitive pour la brillance d'origine stellaire du ciel les valeurs maxima et minima suivantes :

		Minima	Maxima
Mesures	photographiques	0,0051	0,0078 $m_g^1(1°)$
»	photovisuelles	0,0088	0,0132
»	visuelles	0,0067	0,0100

Soit P le rapport entre la brillance d'origine stellaire et la brillance réelle du ciel. On obtient ainsi pour P les limites ci-dessous :

Mesures	photographiques	$0,113 < P < 0,173$
»	photovisuelles	$0,120 < P < 0,181$
»	visuelles	$0,185 < P < 0,278$

Au-dessus des couches diffusantes de l'atmosphère terrestre, ces limites doivent être sensiblement majorées [3]. Lorsqu'on compare en effet l'éclairement produit par un certain angle solide du ciel à l'éclairement produit par une étoile, les pertes provenant de l'absorption atmosphérique sont en grande partie compensées lorsqu'on vise le ciel et dans ce cas seulement. Toutes les molécules contenues dans l'angle solide considéré diffusent alors, vers l'observateur, une partie de la lumière provenant des autres régions du ciel dont la brillance est du même ordre de grandeur.

La correction qu'il convient de faire subir aux rapports P pour les ramener aux valeurs qu'on observerait au-dessus de l'atmosphère terrestre est importante et ne peut naturellement être évaluée que d'une manière assez grossière.

Le calcul a été fait par M. Dufay en appliquant à l'atmosphère les lois de la diffusion moléculaire [3]. Il conduit ici aux limites suivantes :

Mesures	photographiques	$0,151 < P < 0,221$
»	photovisuelles	$0,135 < P < 0,203$
»	visuelles	$0,259 < P < 0,334$

Les facteurs de transmission suivant la verticale admis dans les 3 cas sont respectivement 0,60 ; 0,75 ; et 0,80.

8. — *Conclusion.*

Il résulte de cette discussion qu'au-dessus des couches diffusantes de l'atmosphère, les étoiles faibles n'expliqueraient que 15 *à* 22 *pour* 100 *de la brillance photographique du ciel au voisinage du pôle.*

Les mesures photovisuelles beaucoup moins nombreuses conduisent à un résultat fort peu différent, mais moins sûr. L'interprétation des mesures visuelles, bien qu'elles soient nombreuses et précises, mérite encore moins de confiance : ces mesures portent sur une région spectrale moins bien définie. Le maximum de la courbe de visibilité de l'œil pour les très faibles éclairements est probablement voisin de 0,50 à 0,52 μ. On n'a aucun dénombrement d'étoiles correspondant à ces variations et l'on a pris assez arbitrairement dans les tableaux précédents $m_v^1(1°) = 0{,}0100$ (dans le cas de la distribution moyenne), nombre intermédiaire entre $m_g^1(1°) = 0{,}0078$ et $m_{pv}^1(1°) = 0{,}0132$.

Ainsi interprétées, les mesures visuelles conduisent à donner une importance relative plus grande aux étoiles (26 à 33 pour 100). Ces nombres ne sont pas nécessairement incompatibles avec ceux qui résultent des mesures photographiques ou photovisuelles par suite des nombreuses bandes et raies d'émission dans le spectre du ciel nocturne.

CHAPITRE II

Luminescence de la haute atmosphère et diffusion extra-atmosphérique

9. — Il reste à trouver l'origine des 3/4 ou des 4/5 de la brillance du ciel nocturne. La lumière du ciel donne un spectre continu à raies d'absorption sur lequel se détachent un grand nombre de raies et de bandes brillantes. M. Dufay a constaté que les raies d'absorption paraissaient, avec une forte dispersion, coïncider avec les raies du spectre solaire [12]. Or, l'indice de couleur global des étoiles faibles est précisément celui des étoiles G_0. L'ensemble des étoiles donnerait donc un spectre du type solaire et l'on peut se demander s'il est possible d'attribuer d'une part, la totalité du spectre continu du ciel nocturne aux étoiles faibles, d'autre part l'ensemble du spectre de bandes et de raies brillantes à la luminescence de la haute atmosphère. Il faudrait pour cela que l'ensemble des bandes et des raies puisse expliquer les 3/4 ou les 4/5 de la brillance du ciel.

L'étude spectrophotométrique de la lumière du ciel nocturne est encore peu avancée et l'on ne peut encore évaluer que d'une manière grossièrement approchée l'importance relative du spectre de bandes et de raies brillantes et celle du spectre continu. Nous allons examiner successivement le cas des mesures photovisuelles, des mesures photographiques et des mesures visuelles.

10. — *Mesures photovisuelles.* — Dans la région spectrale intéressée par les mesures photovisuelles de la brillance, se trouve la raie 5577 Å [OI], la plus intense du ciel. Elle coïncide presque avec le maximum de sensibilité des plaques orthochromatiques. On peut donc négliger par rapport à cette raie les radiations incomparablement plus faibles et d'ailleurs mal connues, émises dans l'intervalle 5000-6000 Å et raisonner comme si la luminescence de la haute atmosphère se réduisait pratiquement, dans cette région, à la raie 5577 Å.

En septembre 1926, Dufay a mesuré à l'aide d'un dispositif spectral particulier, le rapport entre les éclairements produits sur une plaque orthochromatique par la raie 5577 et par la portion de spectre continu comprise entre 4960 et 6000 Å [13, 14]. Les nombres obtenus en visant à 50° du zénith, un peu variables vers le nord d'une nuit à

l'autre, étaient compris entre 0,4 et 0,6. Dans le cas des mesures photovisuelles faites sur les mêmes plaques orthochromatiques, la raie verte aurait donc produit une fraction de l'éclairement total comprise entre 0,28 et 0,38.

A lui seul, le spectre continu représenterait 0,62 à 0,72 de la brillance totale. Il ne provient donc pas tout entier des étoiles faibles.

11. — *Mesures photographiques.* — Dans la région 3.800-5.000 Å, intéressée par les mesures photographiques, les radiations émises par la haute atmosphère sont extrêmement nombreuses. Cabannes et Dufay ont montré que les plus importantes sont les bandes A → X de la molécule d'azote, dites bandes Vegard-Kaplan, et les radiations d'origine inconnue des noyaux cométaires [15,16]. La présence des bandes de Schumann-Runge de la molécule d'oxygène est aussi probable [17].

Aucune de ces radiations ne joue un rôle comparable à celui de la raie verte ; il n'y a pas de radiation réellement prépondérante, par rapport à laquelle on puisse négliger les autres. Il est donc plus difficile d'évaluer l'importance relative du spectre de bandes et du spectre continu. Toutefois, les enregistrements microphotométriques reproduits par Cabannes et Dufay dans diverses publications montrent qualitativement que la plus grande partie de la lumière provient encore du spectre continu.

Supposons pour fixer les idées, que les bandes couvrent, en longueurs d'onde, les 2/3 du spectre. Pour qu'ensemble, elles donnent 80 pour 100 de la brillance du ciel, il faudrait que, sur les bandes, la brillance spectrale soit en moyenne 7 fois celle du spectre continu. Le seul aspect des spectrogrammes ou de leurs enregistrements, montre qu'un tel rapport est absolument inadmissible. Du reste, d'après les mesures spectrophotométriques de Cabannes et Dufay [18], c'est à peine si, sur les bandes les plus intenses de la région 3800-5000 Å, la brillance spectrale atteint 2 fois celle du spectre continu.

La comparaison de l'amplitude des variations annuelles de l'intensité des bandes de Vegard-Kaplan 4425 et 4171 (faite en 1933-1934 par Cabannes et Dufay) conduirait à admettre que les bandes d'émission expliquent, suivant les saisons, 15 à 40 pour 100 de la brillance photographique totale et en moyenne, 25 pour 100 [19]. Mais, comme il ne s'agit pas de mesures simultanées, ces nombres sont en réalité fort incertains.

L'ordre de grandeur de 25 pour 100 paraît cependant acceptable : si l'on suppose encore que les bandes couvrent, en longueurs d'onde, les 2/3 du spectre, la brillance spectrale serait en moyenne 1,37 sur les bandes de 1,0 sur le spectre continu, nombre parfaitement admissible.

Il est hors de doute, en tous cas, que le spectre continu de la région 3800-5000 *Å ne provient pas en totalité des étoiles faibles.*

12. *Mesures visuelles.* — La raie verte, malgré sa grande intensité, a beaucoup moins d'importance dans le cas des mesures visuelles que dans le cas de mesures photovisuelles, car le maximum de sensibilité de l'œil est voisin de 5200 Å pour les brillances

les plus faibles. DUFAY a tiré indirectement de ses mesures exclusivement photographiques l'indication suivante : la raie verte produirait, dans le cas des mesures visuelles, une fraction de la brillance totale comprise entre 0,06 et 0,09 [13, 14]. Lord RAYLEIGH a trouvé par une méthode entièrement différente et beaucoup plus directe, la fraction 0,069 [20], et ce nombre a reçu tout récemment une nouvelle confirmation de la part de CERNIAEV, KHVOSTIKOV et PANSCHIN [21].

Les trois physiciens russes ont donné en même temps toute une série d'intéressants résultats relatifs à la lumière du ciel nocturne, obtenus par une méthode de spectrophotométrie visuelle. L'étude des variations de la brillance spectrale au cours de la nuit les conduit à distinguer dans la lumière globale du ciel celle qui provient du fond stellaire, celle de la luminescence atmosphérique et une 3e partie qu'ils appellent la lumière diffuse. Cette dissociation est naturellement basée sur un certain nombre d'hypothèses plausibles, mais parfois un peu hardies. La luminescence est maximum vers 1 h. après minuit, le fond stellaire supposé constant représente (en énergie) 22 à 33 pour 100 de l'énergie totale, suivant l'heure de la nuit. Quant à la lumière diffuse, elle varie également suivant l'heure entre 18 et 32 pour 100, et, en gros, est du même ordre de grandeur que le fond stellaire.

Il est particulièrement intéressant de constater que sur les courbes d'énergie, la luminescence montre, à toute heure de la nuit, un maximum net vers 5200 Å, c'est-à-dire vers le maximum de la sensibilité de l'œil pour les faibles brillances. Dans cette région, le spectre continu est donc tout à fait prépondérant et se partage à peu près également entre le fond stellaire et la lumière diffuse. Ainsi paraît se trouver confirmée l'importance relative plus grande des étoiles faibles dans le cas des mesures visuelles que nous avions signalée à la fin du chapitre I.

En adoptant les valeurs *maxima* obtenues pour la brillance d'origine stellaire, nous arrivons finalement, dans les 3 cas envisagés ci-dessus, à répartir ainsi la brillance du ciel nocturne :

	Mesures photovisuelles	Mesures visuelles	Mesures photographiques
Luminescence	0,35	0,15	0,25
Etoiles	0,20	0,33	0,22
D'origine inconnue	0,45	0,52	0,53

Ces nombres encore très incertains et sujets à revoir, ne peuvent être admis que comme un ordre de grandeur probablement acceptable.

Ils montrent que, dans tous les cas, la luminescence de l'atmosphère jointe à la lumière des étoiles faibles, n'explique pas complètement la brillance du ciel nocturne : l'origine de la moitié de celle-ci reste à trouver (1).

13. — La lumière d'origine inconnue donne un spectre continu et très probablement un spectre continu à raies solaires, car l'intensité des raies de FRAUNHOFER dans

(1) Nous n'envisagerons pas la région rouge du spectre, ni la région ultraviolette. Dans ces deux domaines, le spectre d'émission de la haute atmosphère devient partiellement prépondérant. Le spectre continu est extrêmement faible par rapport au précédent dans le rouge (CABANNES), presque inexistant dans l'ultraviolet au dessous de 3500 Å (DUFAY, GAUZIT, ARNULF).

le spectre du ciel nocturne paraît trop grande pour être uniquement attribuée au fond stellaire. On ne peut guère attribuer cette lumière qu'à une diffusion de la lumière du soleil ou des étoiles mêmes.

Du reste, la polarisation partielle de la lumière du ciel nocturne prouve qu'une partie de celle-ci provient *effectivement* d'une diffusion de la lumière solaire.

Dufay a trouvé en 1925 que la lumière du ciel montrait une faible polarisation liée à la position du soleil [22, 14]. Les résultats de ses expériences s'expliquent très bien en admettant que le plan de polarisation passe, à chaque instant, par le soleil. La proportion de lumière polarisée qui paraît varier légèrement avec la distance angulaire du soleil au point visé est d'ailleurs très faible, elle n'excède pas 4 pour 100. Ce nombre devrait être un peu majoré au-dessus des couches diffusantes de l'atmosphère où il pourrait atteindre 6 pour 100.

Khvostikov et Panschin viennent de publier des observations visuelles sur la polarisation de la lumière du ciel [23]. Ils trouvent aussi une polarisation partielle pendant toute la nuit, mais tandis que le plan de polarisation passe bien par le soleil au début et à la fin de la nuit, il s'en écarte au milieu de celle-ci et l'écart maximum vers 1 h. après minuit peut atteindre 25°.

Rapprochant ce phénomène du maximum d'intensité de la raie verte vers 1 h. du matin, les physiciens cherchent à l'expliquer par la différence de composition spectrale des deux images formées par leur photopolarimètre de Cornu. Il s'agit donc d'une cause physiologique et, en réalité, le plan de polarisation passerait toujours par le soleil.

L'existence de la lumière solaire diffusée dans la lumière du ciel nocturne étant ainsi démontrée, reste à préciser où a lieu cette diffusion et par quelle sorte de particules. Pour ces physiciens russes, il s'agit d'un phénomène atmosphérique. Seulement, s'il s'agit d'une simple diffusion *primaire*, il faut admettre une extension considérable de l'atmosphère terrestre (jusqu'à plusieurs milliers de kilomètres d'altitude), et s'il s'agit d'un phénomène de diffusion successive, il devient très difficile d'interpréter la polarisation. Il semble plus naturel de supposer que la lumière solaire est diffusée hors de notre atmosphère elle-même, par un milieu très raréfié. Si la matière diffusante est constituée de particules très petites par rapport aux longueurs d'onde répandues dans un volume n'excédant pas celui du système solaire, la proportion de lumière polarisée serait beaucoup plus grande.

Il faut donc admettre :

ou bien que la lumière solaire est diffusée par des particules relativement grandes (telles que les météorites).

ou bien que les particules, si elles sont petites par rapport aux longueurs d'onde, occupent dans l'espace un volume si grand que la diffusion de la lumière des étoiles puisse devenir au moins aussi importante que celle de la lumière du soleil. La lumière des étoiles, venant de toutes les directions, sera diffusée sans polarisation appréciable et diminuera alors beaucoup la proportion de polarisation qu'on observe [24].

Ainsi, qualitativement, l'existence d'un milieu diffusant interstellaire serait capable d'expliquer une partie du spectre continu du ciel nocturne et de rendre compte de sa faible polarisation.

CHAPITRE III

Absorption de la lumière dans l'espace

14. — Dans les spectres des étoiles de la classe O et des premiers types B, apparaissent les raies d'absorption très fines H, K et D L'étude du déplacement de ces raies spectrales montre que les atomes absorbants ne participent pas au mouvement individuel de l'étoile, mais seulement à la rotation d'ensemble de la Voie Lactée.

D'après les belles recherches de J. S. Plaskett et J. A. Pearce [25], la rotation différentielle de la Voie Lactée est exactement, sur ces raies, la moitié de l'effet observé sur les raies des atmosphères stellaires. Ainsi, a-t-on la preuve directe que des atomes de calcium ionisés et des atomes de sodium neutres, sont répandus dans l'espace, d'une manière presque uniforme, en première approximation.

L'effet de cette absorption limitée à des raies très fines du spectre est insignifiant du point de vue énergétique. Cependant les atomes de calcium et de sodium ne doivent pas être les seuls dans l'espace, leur présence *certaine* suggère l'existence *probable* d'un milieu interstellaire susceptible d'exercer, par diffusion, une absorption apparente de la lumière des astres.

Cette absorption générale a été mise en évidence de plusieurs manières depuis 1929. Les travaux publiés à ce sujet sont très nombreux et l'on ne saurait les analyser ici en détail ni en donner la liste complète. Néanmoins, on peut les classer en plusieurs catégories :

1°) On s'adresse à des astres à diamètre apparent sensible, situés hors de la Galaxie à des latitudes galactiques différentes. L'effet de l'absorption est de réduire leur brillance et cela d'autant plus que le trajet des rayons lumineux dans la Galaxie est plus long. Si l'on limite schématiquement la Voie Lactée à deux plans parallèles, la densité optique à la latitude b est D coséc. b, en designant par D la densité optique de la Voie Lactée vers l'un de ses pôles.

On n'obtient pas ainsi de coefficient d'absorption, mais le procédé a l'avantage de ne pas faire intervenir les distances, souvent incertaines, des astres. Il a été appliqué

par DUFAY et par CARPENTER aux brillances des nébuleuses extra-galactiques mesurées par WIRTZ, mais ces données sont peu sûres.

C'est l'affaiblissement de brillance des spirales produit par l'absorption, qui cause leur raréfaction apparente au voisinage du plan galactique. D'où un procédé un peu différent pour atteindre l'absorption à partir des dénombrements de spirales à diverses latitudes (MINEUR et MACHIEL).

2°) On s'adresse à des étoiles dont on détermine la magnitude apparente (éclairement), et la magnitude absolue (intensité lumineuse). S'il existe une absorption, l'éclairement diminue plus vite que ne l'exigerait la loi du carré des distances. On en déduit le coefficient d'absorption.

C'est ainsi que SCHALEN a mis en évidence l'absorption dès 1929 [26]. Déterminant à la fois les magnitudes apparentes photographiques et les magnitudes absolues spectroscopiques dans plusieurs régions de la Voie Lactée, il se proposait d'abord de déduire la densité stellaire à diverses distances du soleil, en appliquant la loi du carré des distances. Or, les densités stellaires trouvées décroissaient à mesure qu'on s'éloignait du soleil, dans *toutes les directions*. SCHALEN a supposé alors les densités stellaires invariables et le milieu absorbant. Les coefficients d'absorption trouvés ainsi, variables avec la région considérée de la Voie Lactée, étaient de l'ordre de 0,5 à 1 magnitude par kiloparsec.

A cette catégorie se rattachent également les recherches de JOY sur les Céphéides, récemment confirmées par VAN RHIJN [27]. L'étude des vitesses radiales permet de déterminer l'effet de rotation différentielle, d'où la distance. La magnitude absolue est déduite indépendamment de la loi période luminosité, et la magnitude apparente est mesurée par photographie. On a donc encore tout le nécessaire pour déterminer le coefficient d'absorption. JOY trouve 0,85 magnitude par kiloparsec. D'après VAN RHIJN, ce nombre pourrait être légèrement majoré et pourrait atteindre 1,1 magnitude par kiloparsec.

3°) Les travaux de TRUMPLER sur les amas ouverts peuvent être considérés comme une variante de la méthode précédente. Ici, l'absorption, comme dans la première méthode envisagée, diminue la « brillance moyenne » des amas, sans agir sur leur diamètre apparent qui est seulement fonction de la distance. TRUMPLER trouve une absorption de 0,8 magnitude par kiloparsec dans le cas des mesures photographiques [28].

15. — Au lieu de chercher à mettre en évidence l'absorption pour une région spectrale, on peut chercher la différence d'absorptions relatives à deux régions spectrales distinctes. Ces recherches sur l'absorption différentielle sont les plus nombreuses. On peut, comme les précédentes, les diviser en deux classes, suivant que les distances des astres interviennent ou non.

1° Les distances n'interviennent pas dans les mesures de STEBBINS sur les indices de couleur des amas globulaires [29]. STEBBINS montre que les indices de couleur de ces

amas, mesurés à la cellule photo-électrique, augmentent régulièrement quand leur latitude galactique diminue. Ce travail basé sur des mesures fort précises est peut-être le plus convaincant qui soit, relativement à l'existence d'une absorption différentielle. Naturellement, on n'obtient pas ici la différence des coefficients d'absorption, mais la différence des densités optiques pour deux régions spectrales.

2°) Au contraire, les distances interviennent dans les travaux si nombreux basés sur les indices de couleur des étoiles des premiers types spectraux. Tous les auteurs trouvent ainsi, entre les régions spectrales correspondant aux mesures photographiques et aux mesures photovisuelles une différence de coefficients d'absorption de l'ordre de 0,30 à 0,35 magnitude par kiloparsec (Trumpler, Van de Kamp, Miss Williams, etc.). L'accord de ces résultats est vraiment impressionnant Toutefois les distances sont évaluées à partir des magnitudes absolues spectroscopiques et sont particulièrement incertaines pour les étoiles O et B. D'après un travail inédit de Dufay et Liau, basé sur les indices de couleur photoélectriques de Becker, la différence des coefficients d'absorption deviendrait 3 fois plus petite si l'on prenait comme critère de distance l'intensité de la raie K interstellaire mesurée par Plaskett [1].

16. — En définitive, l'existence d'une faible absorption de la lumière dans la Voie Lactée est aujourd'hui bien établie La couche absorbante serait relativement mince ; elle n'aurait sans doute que quelques centaines ou un millier de parsecs d'épaisseur et le coefficient d'absorption est de l'ordre de 1 magnitude par kiloparsec dans le cas des observations photographiques. Mais il paraît variable d'une direction à l'autre de la Voie Lactée.

Dans le cas des observations photovisuelles, le coefficient d'absorption est plus petit; on estime généralement la différence de l'ordre de 0,3 à 0,35 magnitude.

Nous ne discuterons pas ici la question encore controversée de savoir s'il s'agit d'une diffusion obéissant à la loi en λ^{-4}. Dans les chapitres suivants, on considérera seulement les observations photographiques, pour lesquelles la valeur moyenne du coefficient d'absorption semble mieux connue.

---

(1) Communication privée.

CHAPITRE IV

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE BIBLIOTHÈQUE

Diffusion de la lumière des étoiles

17. — *Diffusion moléculaire.* — L'intensité lumineuse diffusée à 90° du faisceau incident par un gaz de volume unité, recevant l'éclairement E que produit le faisceau incident, est donnée par : [30]

$$I\left(\frac{\pi}{2}\right) = RE = \frac{\pi^2}{2\lambda^4}\,\frac{(\mu^2-1)^2}{n}\,\frac{6(1+\rho)}{6-7\rho}$$

expression dans laquelle, ρ est la dépolarisation de la lumière diffusée, n le nombre de molécules par unité de volume, μ l'indice du gaz et λ la longueur d'onde. On suppose que la lumière incidente est *naturelle*. Dans une direction faisant un angle θ avec le faisceau incident, l'intensité lumineuse diffusée s'écrit :

$$I(\theta) = I\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1 + \frac{1-\rho}{1+\rho}\cos^2\theta\right)$$

ou lorsque la valeur de ρ est négligeable :

$$I(\theta) = I\left(\frac{\pi}{2}\right)(1+\cos^2\theta)\ . \tag{1}$$

Un calcul simple montre que le flux total diffusé dans tout l'espace dans le cas où la lumière incidente est *naturelle* a pour valeur :

$$F = \frac{16\pi}{3}\,I\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Soient R le rapport de Lord Rayleigh et K le coefficient d'absorption du gaz diffusant. L'énergie diffusée dans l'espace est empruntée au rayonnement incident. Celui-ci

s'affaiblit donc a mesure qu'il se propage dans sa course suivant une direction donnée. Pour une longueur parcourue *dr*, on a :

$$-\frac{dE}{E} = Kdr \quad \text{ou} \quad -\frac{dE}{dr} = KE\ .$$

$-\frac{dE}{dr}$ représente précisément le flux diffusé dans tout l'espace par unité de volume de gaz, c'est-à-dire $\frac{16\pi}{3} I\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D'où :

$$R = \frac{3K}{16\pi}$$

Dans le cas de la diffusion par des électrons libres, le rapport de Lord Rayleigh a pour expression :

$$R = \frac{ne^4}{2m^2c^4}$$

$e = 4{,}77.10^{-10}$ UES étant la charge de l'électron.

$m = 9{,}01.10^{-28}$ grammes, sa masse.

$c = 3.10^{10}$ cm/sec, la vitesse de la lumière dans le vide.

L'intensité lumineuse diffusée dans la direction θ est encore donnée par (1) et le coefficient d'absorption est lié à R par la même relation.

18. — *Diffusion de la lumière stellaire.* — Nous devons faire auparavant, pour que le problème se prête au calcul, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices relatives à la structure de notre système galactique ainsi qu'à la matière diffusante qui y est répandue. Il est d'abord impossible de se faire une idée sur la forme et les dimensions de la galaxie ; la distribution des étoiles et leur répartition d'éclat intrinsèque sont encore plus mal connues de sorte que, si l'on rapporte la galaxie à un système d'axes de coordonnées rectangulaires, l'intensité lumineuse de l'unité de volume $i(x, y, z, \xi_j)$ autour d'un point $(x\ y\ z)$, provenant de la lumière de toutes les étoiles est une fonction très compliquée de (x, y, z) et d'un certain nombre de paramètres ξ_j dépendant de la constitution de notre univers et de la variété de l'intensité lumineuse d'une étoile à l'autre, etc.

Du fait que les étoiles sont plus nombreuses dans le plan galactique que dans la direction perpendiculaire, on avait tenté d'attribuer à la Galaxie la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati dans le sens du plan galactique. Shapley pensait que les amas globulaires devaient dessiner les grandes lignes de la Voie Lactée. Comme l'en-

semble de ceux-là présente une certaine symétrie par rapport au plan galactique et par le fait que le Soleil se trouve à l'intérieur de ce système, il en conclut que la Galaxie doit avoir l'aspect d'un ellipsoïde de révolution aplati suivant la ligne des pôles galactiques avec un rayon équatorial de 40.000 parsecs et un demi-axe de 10.000 parsecs. Quant à la position du Soleil, il se trouve à 15.000 parsecs du centre de la Galaxie.

Ce n'est que par l'étude de la répartition des étoiles, la suggestion de l'existence du système local et par identification avec les nébuleuses spirales extragalactiques que Charlier [31], Shapley [32], Seares [33] ont été conduits à admettre que la Voie Lactée est une de ces nébuleuses spirales comprenant des condensations locales qui jouissent de leur propre individualité et se maintiennent dans le temps ; celle, à laquelle le Soleil appartient, n'est pas autre chose que l'amas local.

Mais Lindblad et Oort pensent un peu différemment : la Voie Lactée serait simplement une grande nébuleuse spirale de 80.000 parsecs de diamètre. Le Soleil serait à 15.000 parsecs du centre qui se trouve dans le Sagittaire. Les amas globulaires seraient alors considérés comme des sortes de satellites qui accompagnent notre spirale.

Un peu plus tard, Shapley [34] a trouvé que la Galaxie est, non pas une simple spirale, mais un amas de spirales et que l'amas local dont il était question plus haut n'est autre que la spirale dans laquelle se trouve le système solaire. Cette dernière hypothèse n'est pas trop invraisemblable si l'on assimile notre univers à une supergalaxie.

On voit qu'il est difficile de schématiser la Galaxie. D'autres difficultés se présentent ensuite : la manière dont le milieu diffusant est constitué, la variabilité du coefficient d'absorption K par exemple. Enfin du fait que l'intensité lumineuse diffusée varie avec l'angle de diffusion, résultent certaines complications pour la mise en équation et surtout, comme nous le verrons ultérieurement, pour l'équation résolvante elle-même.

Nous allons choisir, en première simplification, un facteur constant pour le rapport de Lord Rayleigh tel que le flux diffusé total dans tout l'espace soit le même que suivant la loi de Lord Rayleigh ; cela revient à prendre un angle de diffusion moyen θ_m tel que l'on ait :

$$1+\cos^2\theta_m = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}(1+\cos^2\theta)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta)2\pi\sin\theta d\theta \ .$$

D'où :

$$1+\cos^2\theta_m = \frac{4}{3},$$

$$\frac{(\cos^2\theta)\,I}{E} = \frac{4}{3}\,R = C^{te} \ .$$

L'intensité lumineuse diffusée est alors constante et égale dans chaque direction, à 4/3 RE.

En seconde simplification, assimilons la Galaxie à un milieu indéfini compris entre deux plans parallèles au plan galactique et distants de h (voir la figure 1) et supposons

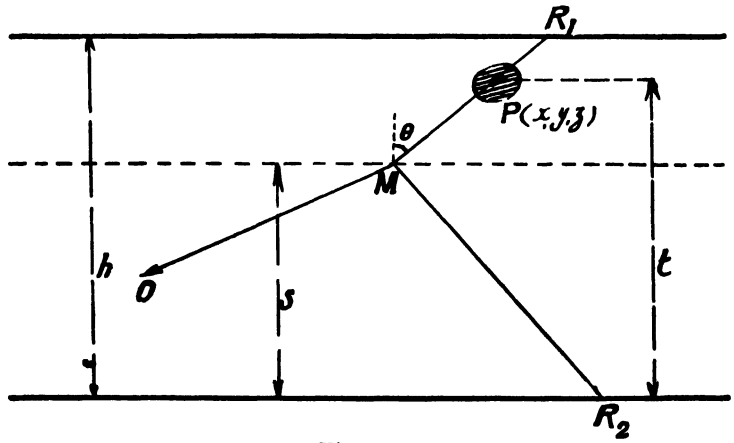

Figure 1

que les étoiles ainsi que les molécules diffusantes soient uniformément réparties dans ce milieu :

$$K = \text{constante} \; ; \qquad i = J_0 = \text{constante} \; .$$

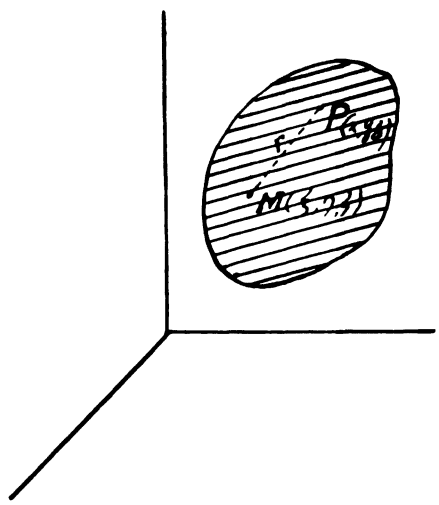

Figure 2

Si E est l'éclairement reçu en un point M, l'intensité diffusée vue d'une direction quelconque ÓM, sera 4/3 RE. D'une manière générale, l'éclairement total produit par

un milieu uniformément lumineux et uniformément absorbant en un point M (ξ, η, ζ) situé à l'intérieur de ce milieu est évidemment (figure 2) :

$$E(\xi, \eta, \zeta) = J_0 \int\int\int_V \frac{e^{-Kr}}{r^2} dx\, dy\, dz \quad ,$$

expression qui traduit simplement la loi de l'éclairement et de l'absorption. La quantité sous le signe $\int$ devient ∞ pour les éléments infiniment petits, mais en passant aux coordonnées polaires : $x = \xi + r \sin\theta \cos\varphi$; $y = \eta + r \sin\theta \sin\varphi$; $z = \zeta + r \cos\theta$, on voit aussitôt que :

$$E(\xi, \eta, \zeta) = J_0 \int\int\int_{(D)} e^{-Kr} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

conserve toujours un sens.

Revenons au cas particulier. Par raison de symétrie, l'éclairement produit par toutes les étoiles en un point M est fonction seulement de sa cote s, l'un des plans-parois étant pris pour plan des xy :

$$E(s) = J_0 \int_0^h \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-Kr}}{r^2} dx\, dy\, dz \ .$$

Pour les éléments de volume $dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ autour d'un point P de coordonnées :

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \ , \quad y = r \sin\theta \sin\varphi \ , \quad z = t = r \cos\theta + s \ ,$$

l'éclairement en M a pour expression (figure 1) :

$$J_0 \int_0^{R_1} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, e^{-Kr} d\theta \ ,$$

si ces éléments sont au-dessus du plan de cote s et

$$J_0 \int_0^{R_2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, e^{-Kr} d\theta$$

s'ils sont au-dessous de ce plan. On obtient finalement, après changement de variables d'intégration, l'expression de l'éclairement :

$$(2)\ E(s) = 2\pi J_0 \left[\int_0^s dt \int_1^{\infty} \frac{e^{-aK(s-t)}}{a} da + \int_s^h dt \int_1^{\infty} \frac{e^{-aK(t-s)}}{a} da = 2\pi J_0 \int_0^h dt \int_1^{\infty} \frac{e^{-aK/s-t/}}{a} da \right] .$$

Après avoir effectué l'intégration par rapport à t, (2) peut s'écrire :

$$(3)\ E(s) = \frac{2\pi J_o}{K}\left[2 - e^{-K(h-s)} - e^{-Ks} + K(h-s)\int_1^{\infty}\frac{e^{-aK(h-s)}}{a}\,da + Ks\int_1^{\infty}\frac{e^{-aKs}}{a}\,da\right].$$

L'intensité lumineuse de la diffusion primaire sera alors :

$$I_1(s) = \frac{K}{4\pi}E(s) = J_o\frac{K}{2}\int_0^{h}\int_1^{\infty}\frac{e^{-aK/s-t/}}{a}\,da\,dt,$$

et la somme de toutes les diffusions successives peut être traduite par la série en K :

$$(4)\ I(s) = \frac{KJ_o}{4\pi}\int_V\frac{e^{-Kr}}{r^2}\,dx\,dy\,dz + \left(\frac{K}{4\pi}\right)^2\int_V I_1(t)\frac{e^{-Kr}}{r^2}\,dx\,dy\,dt + \ldots + \left(\frac{K}{4\pi}\right)^n\int_V I_{n-1}(t)\frac{e^{-Kr}}{r^2}\,dx\,dy\,dt. + \ldots\ldots$$

Remarquons immédiatement que quelques propriétés évidentes de la fonction E (s) — et par suite de $I_1(s)$ — s'établissent facilement : Dans la formule (3), E(s) ne change pas lorsqu'on change s en h-s.

$$\frac{\partial E(s)}{\partial s} = E'(s) = \frac{2\pi J_o}{K}\left[\int_1^{\infty}\frac{e^{-aKs}}{a}\,da - \int_1^{\infty}\frac{e^{-aK(h-s)}}{a}\,da\right],$$

expression qui s'annule pour $s = h/2$ et devient infini pour $s = o$ et $s = h$. Pour $s < h/2$, elle est positive et négative pour $s > h/2$. On en conclut que la fonction E(s) est symétrique par rapport au plan galactique, qu'elle est maximum pour $s = h/2$ et minimum pour $s = h$ ou $s = o$. La tangente est horizontale au point $s = h/2$ et verticale aux points $s = \begin{cases} o \\ h \end{cases}$

19. — Si la série (4) a une limite, on pourra obtenir la valeur de I (s) aussi approchée que l'on voudra, en calculant de proche en proche la valeur de chaque terme à partir du terme précédent. Mais on n'a aucun renseignement, à priori, sur les coefficients et il serait illusoire de parler de telle diffusion, même de la diffusion primaire, si cette série n'était pas convergente. Car cela revient à prendre en considération le premier terme d'une série qui n'a pas de somme. Une étude inductive s'impose donc immédiatement.

Soit I (t) l'intensité lumineuse en un point P de cote t due à la diffusion générale, I (s) la quantité analogue relative à un point M de cote s. Un élément de volume dV = dx dy dt autour du point P produit en M l'éclairement :

$$\left[J_o + I(t)\right]\frac{e^{Kr}}{r^2}\,dV$$

et par tout le milieu :

$$\int\int\int_V \left[J_0 + I(t)\right] \frac{e^{-Kr}}{r^2}\, dV .$$

Puisque $I(s) = \frac{K}{4\pi} \int\int\int_V \left[J_0 + I(t)\right] \frac{e^{-Kr}}{r^2}\, dV$,

d'après le calcul de E (s), il n'est pas difficile de voir que :

$$(5) \quad I(s) = I_1(s) + \frac{K}{2} \int_0^h \int_1^\infty I(t) \frac{e^{-aK/s-t/}}{a}\, da\, dt .$$

telle est l'équation de Fredholm donnant la valeur de I (s).

Cette équation est souvent désignée sous le nom d'équation de Kundt et Warburg. Ces physiciens allemands ont été, en effet, amenés à étudier une équation dont le noyau est exprimé par l'exponentielle intégrale, en étudiant la distribution des vitesses moléculaires d'une couche de gaz raréfié limitée par deux parois planes parallèles [35].

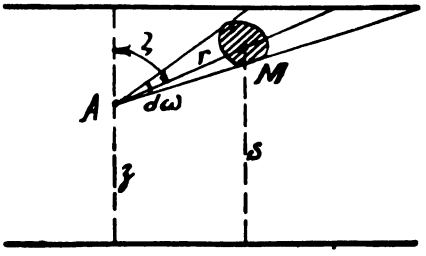

Figure 3

Lorsque l'intensité due à la diffusion I (s) est connue, on peut évaluer la brillance correspondante vue d'un point de cote z et suivant une direction faisant un angle ζ avec l'axe des z. Désignons par B (z, ζ) cette brillance (figure 3). Soit $d\omega$ l'angle solide sous lequel on voit un élément de volume dV entourant un point M. Cet élément $dV = dS\, dr = r^2\, dr\, d\omega$ produit en A l'éclairement :

$$de = \frac{I(s)\, e^{kr}}{r^2}\, r^2 dr\, d\omega .$$

La brillance, ou l'éclairement par unité d'angle solide, observé en A, s'écrit :

$$B(z, \zeta) = \int_0^{R_1} I(s)\, e^{Kr} dr = \text{séc.}\, \zeta \int_z^h I(s)\, e^{-K(s-z)\text{séc}\, \zeta}\, ds \; ; \qquad (\zeta < \pi/2)$$

et $$B(z, \zeta) = \text{séc}\, \zeta \int_0^z I(s)\, e^{-K(z-s)\text{séc}\, \zeta}\, ds \; ; \qquad (\zeta > \pi/2) .$$

Seule la brillance est une grandeur accessible aux mesures. C'est à cette valeur que nous devrons comparer les résultats obtenus par l'observation.

20. — *Propriétés de I (s).* — Un calcul très simple montre que (5) peut se mettre sous la forme :

$$(6)\quad I(s) = J_0 \left[1 - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-aK(h-s)}}{a^2}\,da - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-aKs}}{a^2}\,da \right] + \frac{K}{2}\int_0^h I(t)\,dt \int_1^\infty \frac{e^{-aK/s-t/}}{a}\,da .$$

Si l'on pose $\quad U_n(s) = \int_1^\infty \frac{e^{-as}}{a^{n+1}}\,da$, il vient :

$$I(s) = \frac{J_0}{2}\left[2 - U_1(Kh - Ks) - U_1(Ks)\right] + \frac{K}{2}\int_0^h I(t)\,U_0(K/s-t/)\,dt ,$$

$$I(h-s) = \frac{J_0}{2}\left[2 - U_1(Ks) - U_1(Kh - Ks)\right] + \frac{K}{2}\int_0^h I(h-t)\,U_0(K/s-t/)\,dt ,$$

d'où :

$$(7)\quad I(s) = I(h-s)$$

donc symétrique par rapport au plan galactique.

D'autre part, posons le noyau :

$$\frac{K}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-aK/s-t/}}{a}\,da = N(s, t) = N(/s-t/) .$$

Par différenciation sous signe $\int$, on a :

$$I'(s) = -J_0 N(h-s) + J_0 N(s,o) + \frac{K}{2}\int_0^h I(t)\,dt \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial s}\frac{e^{-aK/s-t/}}{a}\,da.$$

La somme des deux premiers termes du second membre est identiquement nulle en vertu de l'égalité (7). Donc :

$$I'(s) = \frac{-K}{2}\int_0^s I(t)\,dt \frac{\partial}{\partial t}\int_1^\infty \frac{e^{-aK(s-t)}}{a}\,da - \frac{K}{2}\int_s^h I(t)\,dt \frac{\partial}{\partial t}\int_1^\infty \frac{e^{-aK(t-s)}}{a}\,da$$

$$= -\frac{K}{2}\left[\int_1^\infty \frac{e^{-aK(s-t)}}{a}\,da\, I(t)\right]_0^s - \frac{K}{2}\left[\int_1^\infty \frac{e^{-aK(t-s)}}{a}\,da\, I(t)\right]_s^h$$

$$+ \int_0^s I'(t)\,N(s-t)\,dt + \int_s^h I'(t)\,N(t-s)\,dt.$$

ou tout calcul fait :

$$I'(s) = \int_0^h N(/s-t/)\, I'(t)\, dt + I(o)\, N(s, o) - I(h)\, N(h-s).$$

On peut considérer cette dernière équation comme une équation de FREDHOLM en I' (s) dont la solution s'écrit :

$$I'(s) = \int_0^h R(1\,;\, s, t)\, [N(t,o) - N(h-t)]\, I(o)\, dt$$

$$+ I(o)\, [N(s,o) - N(h-s)],$$

car $I(o) = I(h)$ et où l'on a posé le noyau résolvant :

$$R(\lambda\,;\, s, t) = \sum_0^\infty N_{n+1}(s, t)\, \lambda^n$$

$$\text{ou} \qquad R(1\,;\, s, t) = \sum_0^\infty N_{n+1}(s, t) \quad .$$

Or, d'après la formation des noyaux réitérés :

$$\int_0^h N(s, t)\, N(t,o)\, dt = N_2(s, o) \quad \ldots\ldots \text{etc.} \quad ,$$

on voit immédiatement que l'expression de la dérivée s'écrit :

$$I'(s) = I(o)\, [R(1; s, o) - R(1; s, h)] \quad .$$

On démontre [36] que si le noyau est de la forme $N(/s-t/)$, le noyau résolvant sera aussi d'une forme $R(/s-t/)$; on obtient donc les résultats suivants : I'(s) prend la valeur $+\infty$ pour $s=o$, devient nulle pour $s = h/2$ et $-\infty$ quand s atteint la valeur h. La courbe I (s) partant du point [o, I (o)] avec tangente verticale, croît jusqu'à son maximum à tangente horizontale pour redescendre ensuite au point [h, I (h)] à tangente verticale. Ces propriétés sont analogues à celles de $I_1(s)$ signalées plus haut. Il en est de même de toute diffusion $I_i(s)$ d'un ordre quelconque i.

Remarquons aussi que I (s) devient ∞ lorsqu'on suppose la Galaxie indéfinie dans tous les sens ; il suffit pour le voir de faire dans la formule (3) *h* et *s* tendre vers l'∞. Un calcul facile montre en effet que dans ces conditions, $I_1(s) = J_o = c^{te}$ et l'expression (4) devient $I(s) = n\, J_o$ augmentant indéfiniment avec *n*.

21. — *Etude du noyau.* — Le noyau :

$$N(s, t) = \frac{K}{2} \int_1^\infty \frac{e^{aK/s-t/}}{a}\, da = \frac{K}{2} \int_{K/s-t/}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx$$

tend vers l'infini comme log /s-t/ pour s tendant vers t. Il faut donc trouver un noyau réitéré qui reste borné dans son champ de variation. On peut montrer sans faire beaucoup de calculs, que tous les *itérés* restent bornés. Un noyau d'ordre n est défini par la relation suivante :

$$N_n(s, t) = \int_0^h N(s, \theta)\, N_{n-1}(\theta, t)\, d\theta \quad .$$

Considérons alors, d'une manière générale, la fonction :

$$g(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx \qquad \text{qui tend vers l'}\infty$$

comme log u pour u = 0. Mais

$$\int \frac{e^{-x}}{x}\, dx = \log x + l(x) \quad ,$$

l (x) restant fini de 0 à l'∞. Il résulte de là que si une fonction f(u) restait finie pour u = o ou devenait ∞ comme log u pour u = o, l'intégrale :

$$\int_u^\alpha g(x)\, f(x)\, dx \quad .$$

redeviendrait finie pour la valeur zéro de u. f (u) qui joue le rôle de N_{n-1} reste toujours fini sauf pour n = 2 ; dans ce cas, il tend vers l'∞ comme log u.

Ainsi le raisonnement de Fredholm relatif au cas où le noyau devient ∞ en certains points est largement applicable.

Kostitzin [37] a indiqué une série majorante pour le noyau résolvant : (Dans le calcul de chaque itéré, on doit effectuer l'itération pour $s \geqslant t$ et pour $s \leqslant t$. L'itéré aura alors deux aspects différents $N'_n(s, t)$ et $N''(s, t)$.) On a :

$$N'_2(s, t) = \frac{K^2}{2} \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{da\, db}{ab} \left\{ \int_0^s e^{-aK(s-\theta)-bK(t-\theta)}\, d\theta \right.$$

$$\left. + \int_s^t e^{-aK(\theta-s)-bK(t-\theta)}\, d\theta + \int_t^h e^{-aK(\theta-s)-bK(\theta-t)}\, d\theta \right\} .$$

$$N''_2(s, t) = \frac{K^2}{4} \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{da\, db}{ab} \left\{ \int_0^t e^{-aK(s-\theta)-bK(t-\theta)}\, d\theta \right.$$

$$\left. + \int_t^s e^{-aK(s-\theta)-bK(\theta-t)}\, d\theta + \int_s^h e^{aK(\theta-s)-bK(\theta-t)} \right\} .$$

ou tout calcul fait :

$$N'_2(s, t) = \frac{K}{2}\int_1^{\infty} \frac{e^{-aK(t-s)}}{a^2} \log \frac{a+1}{a-1}\, da$$

$$- \frac{K}{4}\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{da\, db}{ab(a+b)} \left[e^{-aKs-bKt} + e^{-aK(h-s)-bK(h-t)} \right] ,$$

$N''_2(s, t)$ s'obtient en permutant dans le premier terme de $N'_2(s, t)$, t et s. D'ou :

$$N''_2(s, t) = \frac{K}{2}\int_1^{\infty} \frac{e^{aK/s-t/}}{a^2} \log \frac{a+1}{a-1}\, da$$

$$- \frac{K}{2}\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{da\, db}{ab(a+b)} \left[e^{-aKs-bKt} + e^{-aK(h-s)-bK(h-t)} \right]$$

C'est une fonction bornée, le premier terme étant inférieur ou au plus égal à :

$$\frac{K}{2}\int_1^{\infty} \log \frac{a+1}{a-1} \frac{da}{a^2} = K \log 2 .$$

Les dérivées partielles par rapport à s et à t de la quantité entre crochets sont négatives pour $s=t=0$, s'annulent pour $s=t=h/2$, et prennent le signe + au point $s=t=h$. Donc cette quantité sera minimum lorsque $s=t=h/2$ et l'on a :

$$N_2(s, t) \leqslant K \log 2 - \frac{K}{2}\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{Kh(a+b)}{2}}\, da\, db}{ab(a+b)} = KA\left(\frac{Kh}{2}\right)$$

Posons d'autre part :

$$\frac{I_1(s)}{J_0} = \alpha(Ks) = \int_0^h N(s, t)\, dt = 1 - \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{e^{-aKs}}{a^2}\, da - \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{e^{-aK(h-s)}}{a^2}\, da .$$

On voit de la même façon que $\alpha(Ks)$ est maximum pour $s=h/2$:

$$\alpha(Ks) \leqslant \alpha\left(\frac{Kh}{2}\right) .$$

Par suite :

$$N_2(s, t) \leqslant KA\left(\frac{Kh}{2}\right)\int_0^h N(s, t)\, dt \leqslant KA\left(\frac{Kh}{2}\right) \alpha\left(\frac{Kh}{2}\right),$$

. . . . . ,

$$N_n(s, t) \leqslant KA\left(\frac{hK}{2}\right) \left[\alpha\left(\frac{Kh}{2}\right)\right]^{n-3} \alpha(Ks) \leqslant KA\left(\frac{Kh}{2}\right) \left[\alpha\left(\frac{Kh}{2}\right)\right]^{n-2}$$

On obtient donc pour le noyau résolvant :

$$R(\lambda\,;\,s,\,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n N_{n+1}(s,\,t)$$

la série majorante :

$$N(s,\,t) + \lambda N_1(s,\,t) + \lambda K \frac{A\left(\frac{Kh}{2}\right)\sqrt{\alpha(Ks)\,\alpha(Kt)}}{1-\lambda\alpha\left(\frac{Kh}{2}\right)}$$

qui sera convergente lorsque λ vérifie :

$$\left|\lambda\alpha\left(\frac{Kh}{2}\right)\right| < 1\,.$$

Dans l'équation (5), le paramètre λ étant l'unité, comme la première valeur fondamentale satisfait à l'inégalité :

$$|\lambda_1| > \frac{1}{\alpha\left(\frac{Kh}{2}\right)} > 1\,,$$

la méthode d'approximations successives est applicable.

Enfin, signalons encore une propriété intéressante du noyau résolvant établie par Kostitzin [37]. Soit $N(/s-t/)$ un noyau dépendant seulement de la distance de deux points. On sait que le noyau résolvant vérifie les deux équations intégrales suivantes :

$$R(\lambda\,;\,s,\,z) = N(/s-z/) + \lambda\int_0^h N(/s-t/)\,R(\lambda\,;\,t,\,z)\,dt$$

$$R(\lambda\,;\,s,\,z) = N(/s-z/) + \lambda\int_0^h R(\lambda\,;\,s,\,t)\,N(/t-z/)\,dt\,.$$

On y voit de suite que :

$$R(\lambda\,;\,h-s,\,h-z) = R(\lambda\,;\,s,\,z)\,.$$

En différenciant la première de ces équations par rapport respectivement à s et à z, (ces différenciations s'effectuent de la même manière que la différenciation de l'équation (6)), nous obtenons :

$$\frac{\partial R(\lambda\,;\,s,\,z)}{\partial s} = \frac{\partial N(/s-z/)}{\partial s} - \lambda N(h-s)\,R(\lambda\,;\,h,\,z)$$

$$+\ \lambda N(s)\,R(\lambda\,;\,o,\,z) + \lambda\int_0^h N(/s-t/)\frac{\partial R(\lambda\,;\,t,\,z)}{\partial t}\,dt\,.$$

$$\frac{\partial R(\lambda\,;\,s,\,z)}{\partial z} = \frac{\partial N(/s-z/)}{\partial z} + \lambda \int_0^h N(/s-t/)\,\frac{\partial R(\lambda\,;\,t,\,z)}{\partial t}\,dt\,.$$

En ajoutant ces deux formules, on trouve l'équation intégrale :

$$\frac{\partial R(\lambda\,;\,s,\,z)}{\partial z} + \frac{\partial R(\lambda\,;\,s,\,z)}{\partial s} = \lambda N(h,\,s)\,R(\lambda\,;\,h,\,z) + \lambda N(o,\,s)\,R(\lambda\,;\,o,\,z)$$

$$+ \lambda \int_0^h N(/s-t/)\left[\frac{\partial R(\lambda\,;\,t,\,z)}{\partial t} + \frac{\partial R(\lambda\,;\,t,\,z)}{\partial z}\right] dt$$

dont la résolution par rapport à $\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial z}$ conduit à l'équation fonctionnelle suivante :

$$\frac{\partial R(\lambda\,;\,s,\,z)}{\partial s} + \frac{\partial R(\lambda\,;\,s,\,z)}{\partial z} = \lambda R(\lambda;\,s,\,o)\,R(\lambda;\,z,\,o) - \lambda R(\lambda;\,s,\,h)\,R(\lambda;\,z,\,h)\,.$$

22. — *Résolution numérique.* — Pour faciliter l'écriture, nous écrivons l'équation (5) sous la forme suivante :

$$\varphi(s) = f(s) + \int_0^h N(s,\,t)\,\varphi(t)\,dt\,. \tag{7}$$

Il est possible de vérifier que la solution :

$$\varphi(s) = f(s) + \int_0^h R(1;\,s,\,t)\,f(t)\,dt \tag{8}$$

et la série (4) dont chaque terme de rang *i* représente la diffusion d'ordre *i*, sont identiques.

D'après un résultat établi par Fredholm sur la loi de décroissance des coefficients, on voit que les termes de la série (8) décroissent très rapidement. Si nous nous limitons à la diffusion secondaire, nous obtenons, par conséquent, comme deuxième approximation :

$$\varphi(s) = f(s) + \int_0^h [N(s,\,t) + N_2(s,\,t)]\,f(t)\,dt =$$

$$f(s) + \int_0^s N'(s,\,t)\,f(t)\,dt + \int_s^h N''(s,\,t)\,f(t)\,dt$$

$$+ \int_0^s N'(s, t) \int_0^t N'(t, t_1)\, f(t_1)\, dt\, dt_1 + \int_0^s N'(s, t) \int_t^h N''(t, t_1)\, f(t_1)\, dt\, dt_1$$

$$+ \int_s^h N''(s, t) \int_0^t N'(t, t_1)\, f(t_1)\, dt\, dt_1 + \int_s^h N''(s, t) \int_t^h N''(t, t_1)\, f(t_1)\, dt\, dt_1 ,$$

où l'on a posé $N(s, t) = N'(s, t)$ lorsque $t \leqslant s$, et $N(s, t) = N''(s, t)$ lorsque $t \geqslant s$.

Déjà, on aperçoit combien, à partir de la diffusion secondaire, le calcul est compliqué, (quelque centaine d'intégrations numériques), et le calcul de la brillance correspondante observée en un point de cote z le sera davantage encore, puisqu'il y a une intégration par rapport à s de plus à effectuer.

Nous nous bornerons à la diffusion primaire, et cela pour rendre compte simplement de son ordre de grandeur, vu l'incertitude des données, ainsi que la rapidité de décroissance des termes de la série (8). Nous améliorerons les résultats par application d'une méthode d'approximations successives indiquée par M. Kostitzin.

Reportons-nous à la première des formules donnant les valeurs de la brillance qu'on a déjà écrites précédemment

On a, pour $0 \leqslant \zeta \leqslant \pi/2$:

$$B(z, \zeta) = \sum_{i=1}^{i=n} B_i(z, \zeta) , \tag{9}$$

avec :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1(z, \zeta) = J_0 \operatorname{séc} \zeta \left(\frac{K}{2}\right) \int_z^h \int_0^h \int_1^\infty \frac{e^{-aK/s-t/-K(s-z)\operatorname{séc}\zeta}}{a}\, da\, dt\, ds , \\ B_2(z, \zeta) = J_0 \operatorname{séc} \zeta \left(\frac{K}{2}\right)^2 \int_z^h \int_0^h \int_0^h \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{e^{aK/s-t/-bK/t-t_1/-K(s-z)\operatorname{séc}\zeta}\, da\, db\, dt\, dt_1\, ds}{ab} , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ B_n(z, \zeta) = J_0 \operatorname{séc} \zeta \left(\frac{K}{2}\right)^n \int_z^h \underbrace{\left[\int_0^h\right]}_{n} \underbrace{\left[\int_1^\infty\right]}_{n} \\ \frac{e^{-aK/s-t_1/-bK/t_1-t_2/-\dots\dots-lK/t_{n-1}-t/-(s-z)\operatorname{séc}\zeta}}{a\,b\,c\,\dots\dots l}\, da\, db \dots\dots dl\, dt_1\, dt_2 \dots\dots dt_{n-1}\, dt\, ds . \end{array} \right.$$

La série (9) évidemment convergente, a les dimensions d'une brillance, c'est-à-dire d'un éclairement par unité de surface. J_0 étant un éclairement par unité de volume, K l'inverse d'une longueur, le second membre de (9), en outre que Kz et ζ, est fonction de J_0/K et de Kh seulement.

Nous voyons par les formules (10) que le calcul numérique, à partir de B_1, doit être terriblement fastidieux.

Pour justifier toute approximation à laquelle on se contentera de se restreindre, il est nécessaire de chercher une *borne supérieure* de l'intensité lumineuse de toutes les diffusions successives.

Posons dans ce but :

$$J(s) = J_0 + I(s) .$$

Il est visible que l'équation (5) est équivalente à l'équation intégrale [38] :

$$(11) \qquad J(s) = J_0 + \int_0^h J(t)\, N(s, t)\, dt ,$$

où la fonction connue est une constante.
La solution s'écrit donc :

$$J(s) = J_0 + J_0 \int_0^h R(1; s, t)\, dt ,$$

d'où :

$$I(s) = J_0 \int_0^h R(1; s, t)\, dt = J_0 \int_0^h [N(s, t) + N_2(s, t) + \ldots\ldots]\, dt .$$

Or :

$$\int_0^h N(s, t) \leqslant \alpha \left(\frac{Kh}{2}\right) = \frac{I_1(s)}{J_0} ,$$

$$\int_0^h N_2(s, t) \leqslant KA \left(\frac{Kh}{2}\right) \int_0^h dt = Kh\, A \left(\frac{Kh}{2}\right),$$

$$\int_0^h N_3(s, t) \leqslant Kh\, A \left(\frac{Kh}{2}\right) \alpha \left(\frac{Kh}{2}\right) ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\int_0^h N_n(s, t) \leqslant Kh\, A \left(\frac{Kh}{2}\right) \left[\alpha \left(\frac{Kh}{2}\right)\right]^{n-2}$$

La fonction I (s) admet donc la série majorante :

$$(12) \qquad J_0 \left[\alpha \left(\frac{Kh}{2}\right) + \frac{Kh\, A \left(\frac{Kh}{2}\right)}{1 - \alpha \left(\frac{Kh}{2}\right)} \right]$$

Dans le calcul de $\alpha(Ks)$ et de $A(Ks)$, ainsi que dans d'autres expressions qui se trouveront dans la suite, les valeurs numériques de l'exponentielle et du logarithme intégral sont calculées à l'aide de « Funktionentafeln » [1].

La valeur approchée par défaut du second terme :

$$\frac{Kh}{2}\int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{e^{\frac{-Kh(a+b)}{2}}}{ab(a+b)}\,da\,db$$

de $Kh\,A\left(\frac{Kh}{2}\right)$ a été trouvée 0,09 environ en prenant $Kh = 0{,}8$ et on a alors :

$$Kh\,A\left(\frac{Kh}{2}\right) < 0{,}8\,(0{,}3 - 0{,}09) =/= 0{,}16\ .$$

(Nous verrons que $I(s)$ est une fonction croissante de Kh et que le maximum des valeurs adoptées pour cette dernière constante à partir de diverses statistiques est environ 0,8]. D'autre part, $\alpha(Kh/2) = \alpha(0{,}4) = 0{,}66$ approximativement. La valeur de la série (12) est certainement inférieure à $1{,}14\ J_0$.

Si l'on remarque que (12) est une borne supérieure de $I(s)$, ce n'est naturellement pas la plus petite, la valeur $1{,}14\ J_0$ sera sûrement beaucoup plus grande que la plus grande valeur que $I(s)$ puisse atteindre. En tâtonnant, on peut arriver à affirmer que J_0 constituera encore une borne supérieure de $I(s)$. Ainsi, *l'intensité lumineuse* $I(s)$, *et par conséquent la brillance* $B(z,\zeta)$ *observée en un seul point de cote* z *et suivant une direction* ζ, *due à la somme de toutes les diffusions successives stellaires est certainement inférieure à celle provenant de la lumière incidente des étoiles; la constante* Kh *dont* $I(s)$ *est fonction croissante étant pris égale à sa valeur maximum.*

Remarquons aussi que le maximum de la diffusion secondaire

$$I_2\left(\frac{h}{2}\right) \leqslant J_0\,Kh\,A\left(\frac{Kh}{2}\right) < 0{,}16\,J_0\ ,$$

et que d'autre part le minimum de la diffusion primaire

$$I(o) = J_0\,\alpha(o) > 0{,}4\,J_0\ .$$

Donc, le premier est au plus égal aux 2/5 du second.

23. — *Calcul de la diffusion primaire.* — Afin de pouvoir faire la comparaison avec les résultats obtenus par l'observation, il convient effectivement d'évaluer par la voie du calcul, la brillance vue d'un point de coteu est dans notre but la Terre ou le Soleil.

Il est établi que celui-ci est au nord du plan galactique. L'étude sur des amas ou-

(1) IAHNKE-EMDE, Funktionentafeln, (Teubner, Berlin).

verts a conduit TRUMPLER [28] à trouver pour z la valeur de 10 parsecs. En étudiant la répartition spatiale des étoiles B, CHARLIER [31] a trouvé 15 parsecs, SHAPLEY [32] 120. DUFAY, dans ses recherches statistiques sur l'absorption dans l'espace et la répartition galactique des magnitudes surfaciques [39] a trouvé 100 avec un coefficient d'absorption pour les observations visuelles K = 0,3 mag. / kilo parsec. MINLER et MACHIEL ont obtenu le même résultat à partir des dénombrements des nébuleuses extragalactiques et en prenant pour le coefficient d'absorption relatif aux observations photograques K = 0,7 mag / kilo parsec [40].

La valeur de h que nous déterminerons par une autre voie est, comme nous le verrons par la suite, de l'ordre de quelque mille parsecs ; on ne commettra pas d'erreur sensible en supposant le Soleil situé dans le plan de symetrie de la Galaxie, mais le calcul numérique sera notablement simplifié.

Cela posé, la brillance de la diffusion primaire est donnée par la formule suivante :

$$B_1(z, \zeta) = \frac{J_0 \text{ séc } \zeta}{K} \int_z^h \left[2 - e^{-K(h-s)} - e^{-Ks} + K(h-s) \int_1^\infty \frac{e^{-aK(h-s)}}{a} da \right.$$

$$\left. + Ks \int_1^\infty \frac{e^{-aKs}}{a} da \right] e^{-K(s-z)\text{séc}\zeta} ds$$

L'intégration des trois premiers termes est facile, quant à celle des deux derniers, elle pourrait s'effectuer sous le signe $\int$ par rapport à s ; mais on aboutirait de telle manière à une formule fort compliquée et difficilement applicable aux calculs numériques. Nous nous contenterons de sa valeur approchée en appliquant au logarithme intégral la méthode d'interpolation linéaire :

$$\int_1^\infty \frac{e^{-mx}}{x} dx \backsim \int_1^p \frac{e^{-mx}}{x} dx \backsim \frac{e^{-mx}}{2} + \ldots\ldots + \frac{e^{-pmx}}{2p} = P(x)$$

La courbe $y = \dfrac{e^{-mx}}{x}$ se rapproche très rapidement de ox. En prenant $p = 4$, l'approximation ne sera pas trop mauvaise. D'autre part, y tourne sa concavité vers le haut, et on a :

$$P(x) > \int_1^4 \frac{e^{-mx}}{x} dx .$$

L'erreur sera partiellement compensée

Pour $z = h/2$, on a trouvé la formule suivante donnant valeur approchée de B_1 :

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{2\cos\zeta\, B_1(h/2,\zeta)\,K}{J_0} &= \frac{2}{\text{séc}\,\zeta}\left(1 - e^{-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}\right) + \frac{1}{(1-\text{séc}\,\zeta)}\left(e^{-Kh/2} - e^{-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}\right) \\
&+ \frac{1}{1+\text{séc}\,\zeta}\left(e^{-Kh-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2} - e^{-Kh/2}\right) + \frac{Kh}{2}\left(\frac{e^{-Kh/2}}{\text{séc}\,\zeta - 1} + \frac{e^{-Kh}}{\text{séc}\,\zeta - 2}\right) \\
&+ \frac{Kh}{6}\,\frac{e^{-3Kh/2}}{(\text{séc}\,\zeta - 3)} + \frac{Kh}{16}\,\frac{e^{-2Kh}}{(\text{séc}\,\zeta - 4)} \\
&+ \frac{e^{-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2} - e^{-Kh}}{2(2-\text{séc}\,\zeta)^2} + \frac{e^{-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2} - e^{-3Kh/2}}{3(3-\text{séc}\,\zeta)^2} \\
&+ \frac{e^{-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2} - e^{2Kh}}{8(4-\text{séc}\,\zeta)^2} + \frac{Kh/2\, e^{K/2} - Kh\, e^{-Kh-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}}{2(1+\text{séc}\,\zeta)} \\
&+ \frac{Kh/2\, e^{Kh/2} - Kh\, e^{-2Kh-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}}{2(2+\text{séc}\,\zeta)} + \frac{Kh/2\, e^{-3Kh/2} - Kh\, e^{-3Kh-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}}{3(3+\text{séc}\,\zeta)} \\
&+ \frac{Kh/2\, e^{-2Kh} - Kh\, e^{-4Kh-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}}{8(4+\text{séc}\,\zeta)} + \frac{e^{-Kh/2} - e^{-Kh-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}}{2(1+\text{séc}\,\zeta)^2} \\
&+ \frac{e^{-Kh} - e^{-2Kh\,Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}}{2(2+\text{séc}\,\zeta)^2} + \frac{e^{-3Kh/2} - e^{-3Kh-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}}{3(3+\text{séc}\,\zeta)^2} \\
&+ \frac{e^{2Kh} - e^{-4Kh-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}}{8(4+\text{séc}\,\zeta)^2}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour $\zeta = 0$, on doit remplacer dans (13) :

$$
\frac{1}{1-\text{séc}\,\zeta}\left(e^{-Kh/2} - e^{-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2}\right) + \frac{Kh}{4}\left(\frac{e^{-Kh/2}}{\text{séc}\,\zeta - 1}\right) + \frac{e^{-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2} - e^{-Kh/2}}{2(1-\text{séc}\,\zeta)^2} = \frac{Kh}{2}\,e^{-Kh/2}\left(1 + \frac{Kh}{8}\right)
$$

Pour $\zeta = \pi/2$:

$$
\frac{Kh}{4}\left(\frac{e^{-Kh}}{\text{séc}\,\zeta - 2}\right) + \frac{e^{-Kh\,\text{séc}\,\zeta/2} - e^{-Kh}}{2(2-\text{séc}\,\zeta)^2} = \frac{K^2h^2}{16}\,e^{-Kh}\,,
$$

et pour $\zeta = \pi/2$, on a :

$$
B_1\left(\frac{h}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_1(h/2)}{K} = \frac{J_0}{K}\left(1 - e^{-Kh/2} + Kh\int_{Kh/2}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx\right).
$$

24. — *Méthode d'approximations successives de* KOSTITZIN

On construit un algorithme d'approximations successives, en remplaçant dans l'équation (7), le noyau N (s, t) par :

$$N_a(s, t) = \frac{K}{2} e^{K/s-t/}$$

et la fonction connue f (s) par :

$$f_a(s) = J_0 \left[1 - \frac{e^{-K(h-s)}}{2} - \frac{e^{-Ks}}{2} \right],$$

ce qui revient, remarquons-le, à remplacer simplement dans l'équation (11) le noyau N par N_a.

Dans ces conditions, (7) devient :

$$\varphi_a(s) = f_a(s) + \frac{K}{2} \int_0^h \varphi_a(t)\, N_a(s, t)\, dt \,. \tag{14}$$

L'itération des noyaux, quoique laborieuse, est facile et la somme de la série résolvante a une expression simple, tout calcul fait :

$$R'_a(1\,;s\,t) = \sum_{n=0}^{\infty} N'_{n+1}(s, t) = \frac{K(1+Kh-Ks)(1+Kt)}{Kh+2} \;;\quad (t \leqslant s)$$

$$R''_a(1\,;s\,t) = \sum_{n=0}^{\infty} N''_{n+1}(s, t) = \frac{K(1+Ks)(1+Kh-Kt)}{Kh+2} \;;\quad (t \geqslant 0)\,.$$

La solution de (14) :

$$\varphi_a(s) = f_a(s) + \int_0^s R'_a(1\,;s, t)\, f_a(t)\, dt + \int_s^h R''_a(1\,;s, t)\, f_a(t)\, dt$$

est une parabole :

$$\varphi_a(s) = I_a(s) = J_0 + \frac{J_0}{Kh+2}\left[-s^2 \left(1 + \frac{Kh}{2}\right) K^2 + s \left(1 + \frac{Kh}{2}\right) K^2 h + \frac{K^2h^2}{2} - 2 \right] \tag{15}$$

dont le sommet a pour abscisse h/2. Le maximum de la quantité entre crochet ne s'annule que lorsque Kh vérifie l'équation :

$$\xi^3 + 6\xi^2 - 16 = 0$$

qui n'admet qu'une racine positive entre 1,4 et 1,401 : *donc I_a est certainement inférieure à J_0*. La parabole (15) doit traduire assez bien l'allure de la courbe I (s).

Ensuite, l'expression de la brillance $B_a(h/2, \zeta)$ s'est largement simplifiée lorsqu'on suppose $z = h/2$:

$$(16) \quad \frac{2\cos\zeta\, B_a(h/2, \zeta)\, K}{J_0} = e^{-Kh\text{séc}\zeta/2}\left[\frac{Kh}{\text{séc}^3\zeta} - \frac{Kh}{\text{séc}\,\zeta} + \frac{2}{\text{séc}^2\zeta}\right] + \frac{K^2h^2}{4\,\text{séc}\,\zeta} + \frac{Kh}{\text{séc}\,\zeta} - \frac{2}{\text{séc}^2\zeta}$$

Donnons maintenant à l'équation (7) la forme suivante :

$$(17) \quad \varphi(s) = \int_0^h N(s, r)\,\varphi(r)\,dr + \int_0^h [N(s, r) - N_a(s, r)]\,\varphi(r)\,dr + f(s)$$

et définissons l'algorithme approché :

$$(18) \quad \varphi_n(s) = \int_0^h N_a(s, r)\,\varphi_n(r)\,dr + \int_s^h [N(s, r) - N_a(s, r)]\,\varphi_{n-1}(r)\,dr + f(s).$$

Si l'on suppose $\varphi_{n-1}(s)$ connu, (18) est une équation de Fredholm dont le noyau est $N_a(s,t)$; le noyau résolvant $R_a(1; s, t)$ reste le même que celui de (14) ; $\varphi_n(s)$ sera donc exprimé en fonction de φ_{n-1} :

$$\varphi_n(s) = \Psi(s) + \int_0^s R'_a(1\,; s, t)\,\Psi(t)\,dt + \int_s^h R''_a(1\,; s, t)\,\Psi(t)\,dt = \Phi[\varphi_{n-1}]$$

où l'on a posé :

$$\Psi(s) = \int_0^h [N(s, t) - N_a(s, t)]\,\varphi_{n-1}(t)\,dt + f(s)$$

$$(19) \quad \varphi_n(s) = \Phi[\varphi_{n-1}]$$

On démontre à la manière de Kostitzin que la suite $[\varphi_i]$ est convergente et que cette convergence est même très rapide.

Nous pouvons prendre $\varphi_a(s)$ comme première approximation par calculer φ de proche en proche par la relation (19). Mais le second membre de cette dernière est fort compliqué et incommode pour des applications : nous nous contenterons, pour ce que nous voulons faire, de procéder de la façon suivante : Dans l'équation (7), $f(s)$ désigne la diffusion primaire et le second terme :

$$\frac{K}{2}\int_0^h N(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

représente la somme des diffusions successives d'ordre $\geqslant 2$, c'est-à-dire :

$$I_2 + I_3 + \ldots\ldots + I_n\ ;$$

donc :

$$\int_0^h R(1\,; s, t)\,f(t)\,dt = \sum_{n=2}^{\infty} I_n(s)$$

Nous prendrons pour valeur approchée de cette dernière somme, la quantité :

$$\int_0^h R_a(1\,;s,t)\,f_a(t) = \int_0^s R'_a(1\,;s,t)\,f_a(t)\,dt + \int_s^h R''_a(1\,;s,t)\,f_a(t)\,dt$$

de sorte que la valeur approchée de $\varphi(s)$ adoptée dans ces conditions, soit égale effectivement à :

$$\varphi_1^a(s) = f(s) + \int_0^h R_a(1\,;s,t)\,f_a(t)\,dt\,,$$

puis,

$$B_1^a(z,\zeta) = \text{séc}\,\zeta \int_0^h \varphi_1^a(s)\,e^{-K(s-z)\text{séc}\zeta}\,ds\,.$$

Or :

$$\varphi_1^a = \frac{J_0}{K}\left[K(h-s)\int_1^\infty \frac{e^{-aK(h-s)}}{a}da + Ks\int_1^\infty \frac{e^{-Kas}}{a}da\right]$$

$$+ f_a(s) + \int_0^h R_a(1\,;s,t)\,f_a(t)\,dt\,.$$

La somme des deux derniers termes n'est pas autre chose que $\varphi_a(s)$. Si l'on pose :

$$B_0^a(z,\zeta) = B_a(z,\zeta) = \text{séc}\,\zeta \int_z^h \varphi_a(s)\,e^{-K(s-z)\text{séc}\zeta}\,ds\,.$$

$$B_1^a(z,\zeta) = \text{séc}\,\zeta \int_z^h \varphi_1^a(s)\,e^{-K(s-z)\text{séc}\zeta}\,ds\,,$$

on aura :

$$B_1^a(z,\zeta) = \beta(z,\zeta) + B_0^a(z,\zeta)$$

avec :

$$\beta(z,\zeta) = \frac{J_0}{K}\int_z^h \left[K(h-s)\int_1^\infty \frac{e^{-aK(h-s)}}{a}da + Ks\int_1^\infty \frac{e^{-aKs}}{a}da\right]e^{-K(s-z)\text{séc}\zeta}\,ds\,,$$

Il est évident que :

$$B_1^a(z,\zeta) > B_1(z,\zeta)$$

l'approximation sera ainsi sensiblement améliorée.

25. — *Détermination des constantes J_0/K et Kh.*

On a vu dans l'étude de la lumière stellaire que les dénombrements d'étoiles par magnitudes photographiques de Chapman et Melotte d'une part, et Seares et ses collaborateurs, d'autre part, permettent d'évaluer la brillance d'origine stellaire à diverses habitudes galactiques et dans chaque zone galactique. Mais remarquons que la nature de l'échelle des magnitudes à l'aide de laquelle on *somme* ces comptes d'étoiles ne joue aucun rôle dans l'étude de la diffusion, puisque le rapport entre la brillance due aux étoiles et celle due à leur lumière diffusée est un *invariant* pourvu qu'on les exprime dans un même système d'unité.

Le calcul numérique étant trop laborieux, nous nous bornerons à calculer la brillance relative à la diffusion, seulement pour :

$$\zeta = 0°,\ 30°,\ 60°,\ 90°.$$

C'est avec ces quatre valeurs de ζ également que nous allons former les équations de conditions relatives aux inconnues J_0/K et $Kh/2$. Soit $B_e(h/2, \zeta)$ la brillance stellaire, l'observation étant toujours supposée avoir lieu dans le plan galactique, on a :

$$B_e\left(\frac{h}{2}, \zeta\right) = \text{séc}\,\zeta\, J_0 \int_{h/2}^{\infty h} e^{-K(s-h/2)\text{séc}\zeta}\, ds, \qquad (0 \leqslant \zeta \leqslant \pi/2),$$

d'où les quatre équations de conditions :

$$B_e\left(\frac{h}{2}, \zeta_i\right) = \frac{J_0}{K}\left(1 - e^{-Kh\text{séc}\zeta_i/2}\right).$$

Les différentes valeurs du premier membre, exprimées en étoiles de magnitude photographique 1,0 sont données par le tableau VII ci-dessous [4] :

Tableau VII

Latitude galactique $b = \pi/2 - \zeta$	Chapman et Melotte	*B_e moyenne*	*B_e Seares*
0		0,0195	0,027
10	...0,019		
20	...0,016		
30	...0,013	0,0115	0,0092
40	...0,010		
50	...0,0075		
60	...0,0073	0,0069	0,0052
70	...0,0065		
80	...0,0060		
90		0,0055	0,0041

Le mémoire de CHAPMAN et MELOTTE ne contient que les valeurs de B_e relatives à chaque zone comprise entre 2 latitudes consécutivement équidistantes ; nous prendrons pour celles relatives à ζ, les moyennes de deux valeurs voisines. On a trouvé en première approximation (et ce sera suffisant en égard des données) :

$$J_0/K = 0{,}0195 \; ; \qquad Kh = 0{,}8 \text{ environ .}$$

Tandis que les dénombrements de SEARES et ses collaborateurs, permettent, en outre, d'évaluer directement les valeurs de B_e pour chaque latitude ζ. La méthode des moindres carrés donne comme 2me approximation :

$$J_0/K = 0{,}0271 \; ; \qquad Kh = 0{,}4 \text{ environ .}$$

A partir des valeurs de k, généralement admises pour les mesures photographiques, les valeurs de h déduites de ces résultats sont fort vraisemblables.

Le tableau VIII contient les valeurs ainsi calculées de $B_e(h/2, \zeta)$, $B_1(h/2, \zeta)$ et $B_1^a(h/2, \zeta)$, ainsi que les rapports B_1/B_e et B_1^a/B_e pour respectivement :

$$\begin{cases} Kh = 0{,}4 \\ J_0/K = 0{,}095 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Kh = 0{,}8 \\ J_0/K = 0{,}0271 \end{cases}.$$

Les brillances sont exprimées en étoiles de magnitude photographique 1,0.

On a posé aussi pour simplifier l'écriture $B_1^a = B_a$.

TABLEAU VIII

	Kh = 0,4				*kh = 0,8*			
ζ	0°	30°	60°	90°	0°	30°	60°	90°
B_e	0,0049	0,0056	0,0089	0,0271	0,0064	0,0072	0,0107	0,0195
B_1	0,0018	0,0023	0,0031	0,0115	0,0037	0,0039	0,0048	0,0129
B_a	0,0024	0,0025	0,0034	0,0129	0,0046	0,0050	0,0071	0,0142
B_1/B_e	0,367	0,410	0,344	0,429	0,570	0,547	0,447	0,611
B_a/B_e	0,404	0,448	0,383	0,478	0,713	0,691	0,664	0,731

On voit que la brillance due à la diffusion est de l'ordre d'une moitié de la brillance qui provient directement des étoiles.

CHAPITRE V

Autre hypothèse

26. — Dans ce qui précède, le problème de la diffusion interstellaire a été grossièrement résolu dans la supposition que les étoiles étaient uniformément réparties entre deux plans parallèles. L'approximation sera peut-être meilleure si l'on tient compte de la variation en fonction de la cote galactique de l'intensité lumineuse de l'unité de volume du milieu diffusant i(s).

Nous avons vu aussi que la diffusion devient infinie si la Galaxie s'étend indéfiniment dans tous les sens dans le cas où i(s) est une constante J_0. Nous verrons qu'elle peut avoir une limite lorsque i(s) est une fonction convenablement décroissante de s.

Dans un récent mémoire [41], Van Rhijn a donné la valeur de la densité stellaire à différentes cotes galactiques pour un domaine relativement restreint comprenant le soleil. En exprimant cette densité en étoiles de magnitude 1.0 par parsec³, on a le tableau suivant :

TABLEAU IX

s	0	125 parsecs	250	500	1000	1500
i(s)	0,00111	0,000109	0,000045	0,000018	0,000005	0,000004

D'après ce tableau, i(s) décroit graduellement a partir de s = 125 parsecs, et la décroissance est brusque entre les cotes 0 et 125. Ceci résulte de ce que, dans le plan galactique, i(s) comprend le nombre d'étoiles de magnitudes absolues $-6 \leqslant M \leqslant 14{,}0$, ou plutôt l'éclairement produit par les étoiles de chaque magnitude absolue variant de —6 à 14,0. Tandis qu'à partir de 125 parsecs, Van Rhijn n'a pu déterminer que l'éclairement produit par les étoiles de magnitudes absolues -4, -2, 0, $+4$, $\geqslant 8$. De telles données sont trop incertaines et insuffisantes pour pouvoir servir à la détermination de la fonction empirique attribuée à i(s).

Elles peuvent cependant nous suggérer une première idée. Si l'on fait passer une courbe continue par les cinq points ayant pour coordonnées les nombres du tableau IX, on constate qu'elle se rapproche de l'axe des abscisses quand s croît. On peut, d'une infinité de manières, assimiler $i(s)$ à une courbe qui s'en rapproche autant que possible, soit à l'aide de ces cinq points si l'on se base sur le mémoire de Van Rhijn, soit à l'aide des quatre équations de conditions :

$$(21) \qquad B_e\left(\frac{h}{2}\,\zeta\right) = \text{séc}\,\zeta \int_{h/2}^{\infty h} i(s)\, e^{-K(s-h/2)\text{séc}\zeta}\, ds\ .$$

si l'on estime les dénombrements d'étoiles plus préférables.

L'interpolation linéaire donne une approximation trop grossière. Une parabole quartique assujettie à passer par les cinq points ou une parabole cubique vérifiant les quatre équations (21) entraîne des calculs fort pénibles et ne satisfait pas à la condition de tendre vers zéro pour s infini. L'idée la plus naturelle est celle de la fonction exponentielle :

$$i(s) = J_0 e^{-\alpha/s/}$$

J_0 étant l'intensité de l'unité de volume en un point du plan galactique.

On peut alors déterminer α de manière à satisfaire autant que possible le système (21). Par bonheur, les équations (21) résolues séparément ne conduisent pas à des résultats trop incompatibles. Cela veut dire que la brillance observée, provenant des étoiles, obéit assez bien à la loi exprimée par (21) lorsque $i(s) = J_0 e^{\alpha/s/}$.

Nous supposerons de plus, en vue de simplifier les calculs, que le milieu interstellaire rempli uniformément de gaz raréfié s'étende indéfiniment dans tous les sens. Les équations (21) deviennent dans ces conditions :

$$(22) \qquad B_e(0, \zeta) = \frac{J_0\,\text{séc}\,\zeta}{\alpha + K\,\text{séc}\,\zeta} = \frac{KB_e(0, \pi/2)\,\text{séc}\,\zeta}{\alpha + K\,\text{séc}\,\zeta}\ ,$$

en prenant pour plan des x, y le plan galactique. D'où les valeurs de α connaissant K.

Dans une direction déterminée, le rapport entre α et K est constant :

$$(23) \qquad \frac{\alpha}{K} = \frac{[B_e(0, \pi/2) - B_e(0, \zeta)]}{B_e(0, \zeta)}\,\text{séc}\,\zeta \quad ; \quad (0 \leqslant \zeta < \pi/2)\ .$$

Et le rapport de la valeur moyenne de α par K doit être considéré comme constant dans toute direction ζ. D'autre part, il est essentiel que ni α ni K ne doive être nul. D'après l'ensemble des observations photographiques, K est de l'ordre de 5.10^{-4} à 10^{-3} parsec^{-1}. Pour $K = 5.10^{-4}$ par exemple, on a trouvé comme valeur moyenne $\alpha = 10^{-3}$ avec les dénombrements de Chapman et Melotte et $\alpha = 2.5\ 10^{-3}$ avec ceux de Seares et ses collaborateurs. Pour $K = 10^{-3}$, ces valeurs sont doublées, c'est-à-dire 2.10^{-3} et 5.10^{-3}.

27. — Cela posé, prenons pour plan des xy le plan galactique et limitons l'espace par deux plans parallèles de cotes +h et —h. L'équation (11) devient :

$$(24) \qquad J(s) = J_0 e^{-\alpha/s/} + \frac{K}{2}\int_{-h}^{+h} J(t)\,dt \int_1^{\infty} \frac{e^{aK/s-t/}}{a}\,da .$$

Nous allons transformer cette équation en introduisant les intégrales de Fourier. D'abord, on a :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-aK/s\,t/}}{a}\,da = \int_{K/s-t/}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} u}{u}\cos(uK/s-t/)\,du .$$

En effet, dérivons par rapport respectivement à p et à q, la fonction :

$$H(p, q) = \int_0^{\infty} e^{-pt}.\,\frac{\sin qt}{t}\,dt ,$$

puis faisons la somme :

$$\frac{\partial H}{\partial q} + i\,\frac{\partial H}{\partial p} = \int_0^{\infty} e^{-(p+iq)t}\,dt = \frac{p - iq}{p^2+q^2} ,$$

$$dH(p, q) = \frac{\partial H}{\partial p}\,dp + \frac{\partial H}{\partial q}\,dq = \frac{-q\,dp + p\,dq}{p^2+q^2} = d\left(\operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right) ,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}.\,\frac{\sin qt}{t}\,dt = \operatorname{arctg}\frac{q}{p} + C .$$

La constante C est nulle, car pour $p = \infty$ ou $q = 0$, l'intégrale est nulle. Ensuite si l'on pose :

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_0^{\infty} g(u)\cos ux\,du ,$$

la formule d'inversion de Fourier donne :

$$g(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos ut\,dt \int_t^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

ou, en intervertissant l'ordre des intégrales (formule de Dirichlet) :

$$g(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{x}}{x}\,dx \int_0^{x} \cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{x}}{x}.\,\frac{\sin ux}{u}\,dx = \frac{2}{\pi u}\operatorname{arctg} u$$

Donc :

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} u}{u} \cos ux \, dx .$$

Ecrivons maintenant (24) sous la forme suivante :

$$(24) \qquad J(s) = J_0 e^{-\alpha/s/} + \frac{K}{2} \int_{-h}^{+h} J(t) \, dt \int_{K/s-t/}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx .$$

$e^{-\alpha/s/}$ et $J(s)$ étant des fonctions paires de s, on pose alors :

$$J_0 e^{-\alpha/s/} = \int_0^{\infty} F(v) \cos vs \, dv$$

$$J(s) = \int_0^{\infty} \Phi(v) \cos vs \, dv .$$

L'équation 24 devient : [43]

$$\int_0^{\infty} [\varphi(v) - F(v)] \cos vs \, dv = \frac{K}{2} \int_{-h}^{+h} dt \int_0^{\infty} \Phi(v) \cos vt \, dv . \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} u}{u} \cos (uK/s-t/) \, du .$$

Comme le cosinus est une fonction paire, on a :

$$\int_{-h}^{+h} 2 \cos vt \cos (uK/s-t/) \, dt = \int_{-h}^{s} \ldots dt + \int_{s}^{+h} \ldots dt ,$$

ou :

$$\int_{-h}^{+h} 2 \cos vt \cos (uK/s-t/) \, dt = 2 \cos (sKu) \left[\frac{\sin (v - Ku) h}{v - Ku} + \frac{\sin (v + Ku) h}{v + Ku} \right]$$

Posant $Ku = w$, il vient :

$$\int_0^{\infty} [\Phi(v) - F(v)] \cos vs \, dv = \frac{K}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(v) \, dv \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} (w/K)}{w/K} \cos ws$$

$$\times \left[\frac{\sin (v - w) h}{v - w} + \frac{\sin (v + w) h}{v + w} \right] \frac{dw}{K}$$

Changeant w et v dans le second membre et identifiant les coefficients de Fourier, on obtient finalement :

$$(25) \qquad \Phi(v) = F(v) + \frac{K}{\pi} \frac{\operatorname{arctg} (v/K)}{v/K} \int_0^{\infty} \Phi(w) \left[\frac{\sin (w - v) h}{w - v} + \frac{\sin (w + v) h}{w + v} \right] \frac{dw}{K},$$

une équation intégrale en Φ, où le noyau est borné dans son champ de variation.

Faisons alors h tendre vers l'infini, la solution de (25) est immédiate :

$$\Phi(v) = \frac{F(v)}{1 - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arctg}(v/K)}{(v/K)}} \,. \tag{26}$$

D'autre part :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha/s/} \cos vs\, dv = \frac{\alpha}{\alpha^2 + v^2}\,, \tag{27}$$

on en déduit :

$$F(v) = \frac{2\,J_0}{\pi}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+v^2}\right),$$

$$\Phi(v) = \frac{\frac{2\,J_0}{\pi}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+v^2}\right)}{1 - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arctg}(v/K)}{(v/K)}}$$

Remarquons que de la première de ces deux relations, on tire :

$$\int_0^\infty \frac{\cos vs\, dv}{\alpha^2+v^2} = \frac{\pi}{2\alpha}\, e^{-\alpha/s/} \,.$$

La solution de l'équation (24) s'obtient, elle aussi, par inversion intégrale de Fourier [43].

$$J(s) = \frac{2\alpha J_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos vs\, dv}{(\alpha^2+v^2)\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arctg}(v/K)}{(v/K)}\right]} \,.$$

En vertu de l'égalité (27), l'expression de la diffusion s'écrit :

$$I(s) = \frac{2\alpha J_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos vs.\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(v/K)\, dv}{(\alpha^2+v^2)\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arctg}(v/K)}{(v/K)}\right]} \,. \tag{28}$$

L'intégration doit être très difficile, le numérateur contenant le *cos* et le dénominateur l'*arctg*. Mais ce qui nous intéresse est l'expression de la brillance qui se prête beaucoup mieux au calcul numérique par suite de la disparition de ce cosinus.

En posant :

$$B'(z, \zeta) = B_0(z, \zeta) + B(z, \zeta),$$

on a évidemment :

$$B'(z, \zeta) = \frac{4\alpha J_0 \sec\zeta}{\pi} \int_z^\infty \int_0^\infty \frac{v \cdot e^{-K(s-z)\sec\zeta} \cos vs \, dv \, ds}{(\alpha^2 + v^2)\,[2v - K \operatorname{arctg}(v/K)]},$$

ou :

$$B'(z, \zeta) = \frac{2\alpha J_0 \sec\zeta}{\pi} \int_0^\infty \frac{[K \sec\zeta \cos zv - v \sin zv]\, dv}{(\alpha^2 + v^2)(v^2 + K^2 \sec^2\zeta)\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}(v/K)}{(v/K)}\right]}$$

et pour $z = 0$, après changement de variable :

$$B(o, \zeta) = \frac{2\alpha J_0 \sec^2\zeta}{\pi} \int_0^\infty \frac{dw}{(w^2 + \sec^2\zeta)(K^2 w^2 + \alpha^2)\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} w}{w}\right]}$$

Il n'est pas difficile de voir que :

$$B_0(o, \zeta) = \frac{2\alpha J_0 \sec\zeta}{\pi} \int_0^\infty \frac{dv}{\alpha^2 + v^2} \int_0^\infty e^{-Ks \cdot \sec\zeta} \cos vs \, ds =$$

$$\frac{2\alpha J_0 \sec^2\zeta}{\pi} \int_0^\infty \frac{dw}{(w^2 + \sec^2\zeta)(K^2 w^2 + \alpha^2)} = \frac{J_0 \sec\zeta}{\alpha + K \sec\zeta}.$$

D'où la brillance des intensités diffusées :

$$(29) \qquad B(o, \zeta) = \frac{2 J_0 \sec^2\zeta}{\pi\alpha} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} w}{w}\, dw}{(w^2 + \sec^2\zeta)\left(1 + \frac{K^2}{\alpha^2} w^2\right)\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} w}{w}\right]}.$$

Comme :

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} w}{w}}{1 - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} w}{w}} \leqslant 1,$$

donc :

$$B(o, \zeta) \leqslant \frac{J_0 \sec\zeta}{\alpha + K \sec\zeta} = B_0(o, \zeta).$$

L'intensité lumineuse, et par conséquent la brillance correspondante due à la diffusion, est toujours inférieure à celle qui résulte de la lumière stellaire incidente.

D'autre part, dans la formule (29), l'expression sous le signe $\int$ ne dépend pas de la variation de α ou de K, puisque α/K est constant d'après la manière dont ils sont déterminés à partir de certains dénombrements d'étoiles *considérés.*

Dans le monde sidéral ainsi construit (géométriquement et physiquement), la brillance due à la diffusion varie en raison inverse du coefficient α qui mesure la raréfaction des étoiles à partir du plan galactique et du coefficient d'absorption K de la matière diffusante qui y est uniformément répandue.

La formule (29) montre de plus que la nullité de l'une ou de l'autre de ces deux constantes rend infinie l'intensité de la lumière diffusée, ce qui semble évident, physiquement.

La brillance prend une expression toute différente quand on vise dans la direction du plan galactique :

$$B(o, \pi/2) = \frac{I(o)}{K} .$$

Dans l'intervalle $o \leqslant vs \leqslant \pi/2$ par exemple, la quantité sous le signe $\int$ de la formule (28) est une fonction *continue.* Donc, lorsque s tend vers zéro, l'intensité tend vers la limite :

$$I(o) = \frac{2KJ_o}{\pi\alpha} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} w}{w}\, dw}{\left(1 + \frac{K^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} w}{w}\right)} ,$$

et :

$$B(o, \pi/2) = \frac{2J_o}{\pi\alpha} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} w}{w}\, dw}{\left(1 + \frac{K^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} w}{w}\right)} .$$

28. — *Approximation.* — On peut écrire (28) de la façon suivante :

$$B(o, \zeta) = \frac{2\alpha J_o \operatorname{séc}^2\zeta}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg} w}{w}\right)^n dw}{(w^2 + \operatorname{séc}^2\zeta)(K^2w^2 + \alpha^2)} \tag{31}$$

Le premier terme du second membre de (31) étant inférieur à

$$\frac{J_o \log(1+\alpha)}{\alpha^2} \quad \text{et comme} \quad \frac{\operatorname{arctg} w}{w} < 1 ,$$

B (0,ζ) vérifie l'inégalité suivante :

$$B(o, \zeta) < \frac{J_o \log(1+\alpha)}{\alpha^3}\left(\frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{J_o \log(1+\alpha)}{\alpha^3}$$

Il résulte de là que, si l'on se borne à la somme des n premiers termes, l'erreur commise sera inférieure à :

$$\frac{2^n - (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1)}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

L'intégration de série (31) peut se faire par partie. Mais pour ce que nous avons à considérer, nous nous contenterons de la méthode des trapèzes :

$$B(o, \zeta) < \frac{2\alpha J_o \sec^2\zeta}{\pi}\int_o^\infty \frac{dw}{(w^2 + \sec^2\zeta)(K^2w^2 + \alpha^2)}$$

$$\int_p^\infty < \int_p^\infty \frac{dw}{(w^2 + \sec^2\zeta)(K^2w^2 + \alpha^2)} .$$

La quantité sous signe ∫ tend rapidement vers zéro quand w croît; en prenant p = 5, l'approximation sera suffisamment bonne. Dans le tableau X, les brillances sont toujours exprimées en étoiles de magnitude 1,0 par degré carré.

TABLEAU X

$K = 5.10^{-4}$								
Chapman et Melotte → $\alpha = 10^{-3}$					*Seares* → $\alpha = 2,5.10^{-3}$			
ζ	0°	30°	60°	90°	0°	30°	60°	90°
B_o	0,0065	0,0071	0,0098	0,0195	0,0045	0,0051	0,0070	0,0271
B	0,0048	0,0053	0,0065	0,0083	0,0031	0,0034	0,0043	0,0062
B/B_o	0,738	0,746	0,663	0,426	0,689	0,666	0,614	0,226

$K = 10^{-3}$								
Chapman et Melotte → $\alpha = 2.10^{-3}$					*Seares* → $\alpha = 5.10^{-3}$			
ζ	0°	30°	60°	90	0°	30°	60°	90°
B/B_o	0,369	0,373	0,332	0,213	0,345	0,333	0,307	0,113
$K = 2,5.10^{-4}$ Valeur moy. de B/B_o	0,553	0,559	0,498	0,320	0,512	0,500	0,461	0,169

Le nombre 10^{-3} parsec^{-1} doit être considéré, d'après diverses statistiques, comme la valeur maximum de K. Il est certainement trop grand. On voit que, en prenant la moyenne $K = 2,5.10^{-4}$ parsec^{-1}, pour les latitudes galactiques supérieures à 30°, *les résultats sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus dans la première hypothèse.*

CHAPITRE VI

Cas où l'intensité diffusée varie avec l'angle de diffusion

29. — Nous avons supposé, dès le début du chapitre IV, que l'intensité diffusée était constante et égale dans chaque direction à 4/3 RE. Ce n'était là qu'une approximation relative à la loi de Lord RAYLEIGH.

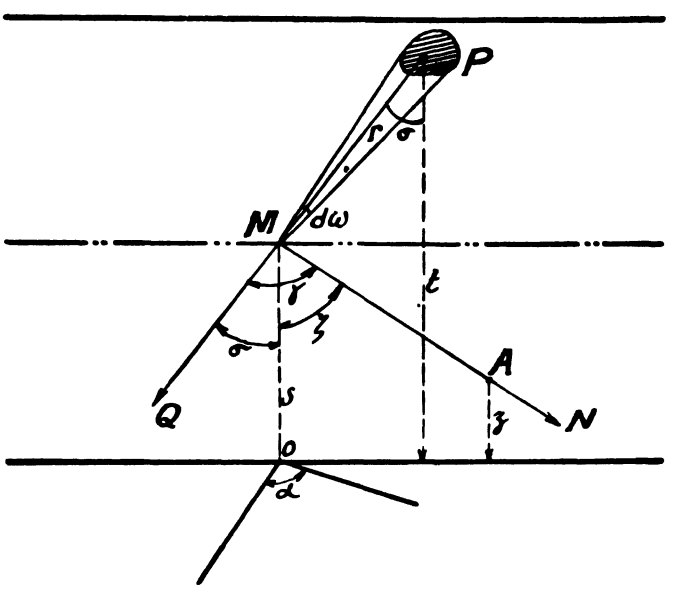

Figure 4

M. DUFAY, en examinant le cas plus général, a abouti à une équation de FREDHOLM à 2 variables [24].

Soit J (s,ζ) l'intensité de l'unité de volume autour du point M évaluée dans la direction MN faisant avec la « verticale » un angle ζ (figure 4). I (t,σ) sera la quantité analogue relative au point P.

Comme on a vu au début, $J(s,\zeta)$ est la somme de deux termes dont l'un J_0, représente la densité stellaire et l'autre $I(s,\zeta)$, variable avec s et ζ, résulte de la diffusion :

$$J(s, \zeta) = J_0 + I(s, \zeta) .$$

Un élément de volume dV autour d'un point quelconque P produit en M l'éclairement:

$$J(t, \sigma) \frac{e^{-Kr}}{r^2} dV = J(t, \sigma) e^{-Kr} d\omega\, dr .$$

L'éclairement produit en M par le cône d'angle solide $d\omega$ sera, si $\begin{cases} 0 \leqslant \sigma \leqslant \pi/2 \\ t \geqslant s \end{cases}$,

$$d\omega \int_0^{R_1} J(s, \zeta) e^{-Kr} dr = d\omega \operatorname{séc} \sigma \int_s^h J(t, \sigma) e^{-K(t-s)\operatorname{séc}\sigma} dt = d^2E$$

et :

$$d^2E = d\omega \operatorname{séc} \sigma \int_0^s J(t, \sigma) e^{-K(s-t)\operatorname{séc}\sigma} dt \quad \text{si} \quad \begin{cases} \pi/2 \leqslant \sigma \leqslant \pi \\ t \leqslant s \end{cases} .$$

Soit γ l'angle des deux directions PM et MN, le rapport de Lord Rayleigh étant

$$R = \frac{3K}{16\pi},$$

l'unité de volume en M produit l'intensité lumineuse :

$$d^2I = \frac{3K}{16\pi} d^2E (1 + \cos^2\gamma)$$

$$= \frac{3K}{16\pi} d^2E [1 + (\cos\sigma \cos\zeta + \sin\sigma \sin\zeta \cos\alpha)^2] ,$$

en appelant par α l'angle dièdre (OMQ), (OMN). L'intensité totale $I(s, \zeta)$ due à la diffusion s'obtient en intégrant pour tout l'espace ; donc, après avoir remplacé $d\omega$ par $\sin\sigma\, d\sigma\, d\alpha$, on a

$$I(s, \zeta) = \frac{3K}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \left\{ \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\sigma\, d\sigma\, [1 + (\cos\sigma \cos\zeta + \sin\sigma \sin\zeta \cos\alpha)^2] \right.$$

$$\times \int_s^h J(t, \sigma) e^{-K(t-s)\operatorname{séc}\sigma} dt$$

$$\left. + \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\sigma\, d\sigma\, [1 + (\cos\sigma \cos\zeta + \sin\sigma \sin\zeta \cos\alpha)^2] \int_0^s J(t, \sigma) e^{-K(s-t)\operatorname{séc}\sigma} dt . \right\} .$$

Ou symboliquement :

$$I(s, \zeta) = \frac{3K}{16\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\sigma \, \mathrm{tg}\,\sigma \, [1 + (\cos\sigma\cos\zeta + \sin\sigma\sin\zeta\cos\alpha)^2]$$

$$\times \int_0^h J(t, \sigma)\, e^{-K/s-t/\sec\sigma}\, dt$$

Et après l'intégration par rapport à α :

$$(35) \qquad J(s, \zeta) = J_0 + \frac{3K}{16\pi}\int_0^h \int_0^{\pi/2} I(t, \sigma)\,(2 + 2\cos^2\sigma\cos^2\zeta + \sin^2\sigma\sin^2\zeta)$$

$$\times\ \mathrm{tg}\,\sigma\, e^{-K/s-t/\sec\sigma}\, ds d\sigma\,.$$

On vérifie facilement qu'en y remplaçant $\frac{3K}{16\pi}(1+\cos^2\gamma)$ par $\frac{K}{4\pi}$, l'équation (35) se réduit à l'équation (11).

On voit aussi que le noyau :

$$[2 + 2\cos^2\sigma\cos^2\zeta + \sin^2\sigma\sin^2\zeta]\ \mathrm{tg}\,\sigma\, e^{-K/s-t/\sec\sigma} = N\begin{pmatrix} s, & t \\ \zeta, & \sigma \end{pmatrix}$$

devient ∞ quand on a $s = t$, $\sigma = \pi/2$. Mais on pourrait démontrer que tous les itérés sont bornés et que le noyau résolvant admet une série majorante double convergente.

La résolution numérique de (35) paraît inopportune, vu l'incertitude des données et les hypothèses simplificatrices.

La brillance évaluée en un point A de cote z et suivant la direction ζ sera :

$$B(z, \zeta) = \sec\zeta \int_z^h I(s, \zeta)\, e^{-K(s-z)\sec\zeta}\, ds\,.$$

CHAPITRE VII

Diffusion de la lumière solaire

30. — M. Ch. Fabry a traité ce problème dès 1917 [42] et est arrivé à expliquer entièrement le phénomène lumineux du ciel nocturne en répondant uniformément dans tout l'espace, de l'hydrogène de densité voisine de 10^{-4}. Cette théorie n'a pas été confirmée par l'observation. Elle donne une polarisation beaucoup plus importante à la lumière du ciel.

M. Dufay a fait un calcul analogue, en admettant pour valeur du coefficient d'absorption K = 0 m, 7 / kilo parsec et a trouvé qu'à 90° du soleil, la brillance résultant de la lumière solaire diffusée équivaut à 0,0088 étoiles de magnitude 1,0 par degré carré [4].

Otto Struve [1], en procédant de la même manière, a obtenu un résultat concordant. Dans l'hypothèse de Dufay, la méthode de calcul de Fabry conduit à une polarisation partielle de 30 % à 90° du soleil dans la lumière diffusée de celui-ci. Il résulte de l'ensemble de ces résultats qu'une telle diffusion n'expliquerait qu'une petite partie de la luminescence du ciel.

Dans le même ordre d'idée, un calcul semblable relatif à la diffusion stellaire effectué par Otto Struve donne une brillance équivalente à 0,16 étoiles de magnitude 1,0 par degré carré. Cette bizarrerie provient, d'une part, d'après Dufay, non pas de ce que le coefficient d'absorption admis est trop grand, comme le prétendait l'auteur lui-même, mais de la trop forte valeur de l'éclairement produit par toutes les étoiles sur laquelle Struve s'est basé, et d'autre part de l'absorption le long du rayon diffusé qu'il néglige.

On remarque, à propos de cette dernière cause d'erreur qu'il est indispensable, en principe de calcul, de tenir compte de telle absorption dans le cas de la diffusion stellaire. Vu la petitesse de la distance Terre-Soleil et du degré de raréfaction du gaz diffusant, la formule relative à la diffusion solaire établie par M. Fabry suppose l'absence de l'absorption interne du rayon diffusé. Ce procédé de calcul qui donne évidemment une approximation par excès est applicable dans le seul cas du Soleil qui, en effet, est assimilable à une source ponctuelle. Il n'en est pas de même de la diffu-

sion galactique : un calcul simple montre que la formule (5) — et même la formule (3) — cesse d'avoir un sens lorsqu'on ne tient pas compte de cette absorption. Autrement dit, la diffusion devient ∞.

S'il est un gaz raréfié répandu dans tout l'espace qui diffuse de la lumière, il importe en même temps que celui des étoiles, d'envisager le cas du Soleil. Ce problème traité de la même manière dans les deux cas revient évidemment à résoudre une autre équation de Frédholm à noyau singulier et facile à établir :

$$I(r) = \frac{K}{4\pi} J_{\odot} \frac{e^{-Kr}}{r^2} + \frac{K}{2} \int_0^R I(\rho) \frac{\rho}{r} d\rho \int_{/\rho-r/}^{/\rho+r/} \frac{e^{-Kt}}{t} dt ,$$

$J_{\odot}$ étant l'intensité du Soleil, r la distance d'un point au soleil et R le rayon d'une sphère quelconque ayant pour centre le Soleil.

La résolution numérique de cette équation ne sera pas nécessaire du moment que la diffusion solaire n'est appréciable que dans un domaine assez limité.

D'après les travaux récents de Van Rhijn [41] sur l'absorption galactique, le coefficient K diminue à mesure qu'on s'éloigne du système solaire. En prenant K égal à sa plus petite valeur, on a trouvé par la formule de Fabry les résultats suivants :

TABLEAU XI

θ	0°	30°	40°	60°	85°	90°	120°	150°	180°
$B_{\odot}$	∞	0,021	0,0148	0,0094	0,0069	0,0065	0,0057	0,0056	0,0056
$p_{\odot}$	0,333	0,411	0,431	0,423	0,392	0,333	0,172	0,045	0

On désignera :

par θ la distance angulaire du soleil, $\theta = \pi - \alpha$,

par $B_{\odot}$ la brillance due à la lumière solaire diffusée exprimée en étoiles de magnitude 1,0 par degré carré,

par $p_{\odot}$ la fraction de lumière solaire polarisée,

par $B_{c.n.}$ la brillance en étoiles de magnitude 1,0 du ciel nocturne,

par $p_{c.n.}$ la fraction de lumière polarisée correspondante.

$$B_{\odot} = \frac{3KDE}{16\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \cos\alpha \right) + \frac{\alpha}{\sin\alpha} \right] \tag{32}$$

$$p_{\odot} = \frac{4 + 2\alpha + \sin 2\alpha}{4 - 2\alpha - \sin 2\alpha} . \tag{33}$$

où E étant l'éclairement du Soleil reçu par la Terre, D la distance Terre-Soleil ; $p_{\odot}$ est indépendante de toutes constantes données, ce qui est évident d'après la façon dont on calcule $B_{\odot}$, et celle-ci est proportionnelle au coefficient d'absorption K ainsi qu'à D et E. Rien n'est étonnant à cela parce qu'on a négligé l'absorption suivant le rayon

diffusé. Les valeurs de $B_\odot$ contenues dans le tableau XI doivent être considérées comme les limites supérieures.

Pour pouvoir comparer $p_\odot$ aux valeurs de $p_{c.n.}$ obtenues par l'observation, il faudra connaître $B_{cn}(\theta)$ et $p_{cn}(\theta)$ en fonction de la distance angulaire du Soleil. Supposons ces quantités connues et désignons par p'_{cn} la fraction de lumière polarisée dans la lumière du ciel nocturne comme si cette polarisation provenait uniquement de la lumière solaire, on a :

$$p'_{c.n.}(\theta) = \frac{p_\odot(\theta)\, B_\odot(\theta)}{B_{c.n.}(\theta)} \tag{34}$$

Il s'agit alors de comparer $p_{cn.}(\theta)$ et $p'_{cn}(\theta)$.
$p_{c.n.}(\theta)$ a été mesurée par M. Dufay (mais malheureusement $B_{c.n.}(\theta)$ nous fait défaut). Ci-dessous quelques valeurs correspondant à diverses distances angulaires du Soleil :

Tableau XII

θ	40°	60°	71°31'	80°	85°	90°
$p_{c.n.}(\theta)$	0,031	0,039	0,043	0,036	0,021	0,013
$p'_{c.n.}(\theta)$	0,132	0,089			0,060	0

Supposons, pour avoir une idée générale, que $B_{cn.}(\theta)$ reste constante et égale à 0,045 étoiles de magnitude 1.0 ; lorsque θ varie, $p'_{c.n}(\theta)$ prendra alors les valeurs contenues dans la dernière ligne du tableau XII. Au-dessus des couches diffusantes de l'atmosphère terrestre, ces valeurs doivent être majorées d'une fraction de 1/3.

A partir de 30° du Soleil, la théorie de M. Fabry appliquée à un milieu de coefficient d'absorption $K = 5.10^{-4}$ parsec^{-1}, donne une valeur de $B_\odot$ du même ordre de grandeur que la brillance stellaire, mais la polarisation partielle ainsi calculée est un peu trop forte vis-à-vis des valeurs observées. Il est très probable qu'au voisinage du soleil, la valeur de K admise soit trop élevée, l'absorption négligée ne doit pas en effet influencer de beaucoup sur les résultats. On voit par les formules (32), (33) et (34) que pour que $p'_{cn}(\theta)$ et $p_{cn}(\theta)$ s'accordent à peu près, il faut que la valeur de K soit trois fois plus petite : $K = 5/3.10^{-4}$ et la valeur de $B_\odot$ sera aussi réduite dans la même proportion.

RESUME ET CONCLUSION

Le rôle des étoiles faibles dans la lumière du ciel nocturne a été précisé en évaluant la brillance d'origine stellaire dans les cas des mesures photographiques et photovisuelles, à partir des dénombrements d'étoiles, et il a été établi que les étoiles ne peuvent expliquer qu'au plus 22/100 de la luminosité totale du ciel. De même, il est impossible que les étoiles seules soient responsables du spectre continu qui représente 0,72 environ de la brillance totale.

La luminescence de la haute atmosphère, caractérisée par des bandes et des raies brillantes, ne peut contribuer, elle aussi, que pour 30/100 à l'illumination du ciel et la présence d'une matière diffusante dans le milieu interstellaire est probable comme il a été démontré dans le chapitre II.

La concordance des valeurs du coefficient d'absorption trouvées par différentes méthodes, exposées sommairement au chapitre III, est des plus frappantes et la possibilité de lier le phénomène de l'absorption observée à celui de la diffusion interstellaire semble désormais incontestable

Pour étudier la diffusion de la lumière stellaire, j'ai supposé d'abord les étoiles uniformément réparties entre 2 plans parallèles distants de h. Après avoir étudié l'équation de la diffusion, j'ai calculé la diffusion primaire d'après sa propre expression (ce calcul est pratiquement impossible à partir de la diffusion secondaire ; déjà celle-ci exige le calcul de plus d'une centaine d'intégrations numériques) ; puis, j'ai appliqué l'algorithme approché indiqué par Kostitzin à la somme des diffusions d'ordre $\geqslant 2$. L'approximation est peut-être un peu grossière, mais j'ai pu, toutefois, trouver une borne supérieure de la diffusion générale, qui montre, à partir des constantes données, que la brillance due à la diffusion est toujours inférieure à la brillance *incidente* stellaire. Ce résultat est conforme au bon sens et en tout cas ne va pas jusqu'à contredire les faits observés.

J'ai supposé ensuite les dimensions de la Galaxie infinies dans tous les sens, avec décroissance exponentielle de la densité stellaire lorsqu'on s'éloigne du plan galactique, mais avec une répartition de la matière diffusante restant uniforme. L'expression de la diffusion générale s'obtient dans ce cas par simple quadrature, et la brillance due à la diffusion est, comme précédemment, toujours inférieure à la brillance *incidente*. Dans les deux hypothèses envisagées, la valeur de cette diffusion générale est de l'ordre de 1/2 de la brillance qui provient directement des étoiles.

La mise en équation de la diffusion de la lumière solaire est identique à celle relative à la lumière des étoiles, mais sa résolution numérique m'a semblée inutile, vu la petitesse du système solaire. J'ai jugé suffisant de me servir d'une formule établie jadis par M. Ch. Fabry, qui m'a montré que la diffusion de la lumière du soleil hors de l'atmosphère terrestre peut devenir aussi importante que la brillance communiquée au ciel par les étoiles.

Il résulte de ce qui précède que l'existence d'un milieu diffusant interstellaire permet de rendre compte de 33/100 de la brillance du ciel nocturne.

En l'ajoutant à la luminescence atmosphérique, les 80/100 environ de ce curieux phénomène se trouveraient convenablement expliqués.

C'est pour moi un agréable devoir de remercier M. H. Grouiller, astronome à l'Observatoire de Lyon, qui a bien voulu me prêter son concours pour la révision des épreuves de ce travail.

Erratum

p. 40, § 23, 3e ligne :

au lieu de :

.... la brillance vue d'un point de coteui est ....

lire :

.... la brillance vue d'un point de cote z qui est ....

p. 46, § 25, 5e ligne :

au lieu de :

habitudes galactiques

lire :

latitudes galactiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Otto Struve. — *Astrophysical Journal*, 77, 153 (1933).

[2] J. Dufay. — *Revue d'Optique*, Paris, 1934, p. 41.

[3] J. Dufay. — *C. R. Acad. Sc.*, *201*, 1323 (1935).

[4] J. Dufay. — *Bull. Observatoire Lyon*, t. X, n° 9, sept. 1928.

[5] S. Chapman et P. J. Melotte. — *Memoirs Royal Astr. Soc.*, 60, part 4 (1914).

[6] J. Dufay et Wang Shih-Ky. — *Journal des Observateurs*, vol. XVIII, n° 12, p. 193.

[7] F. H. Seares, P. J. Van Rhijn, M. C. Joyner et M. L. Richmond. — *Mont Wilson Contr.*, n° 301 ; *Ap. Journal*, 62 (1925).

[8] F. H. Seares. — *Ap. J.*, 41 (1915), p. 259.

[9] F. H. Seares et M. C. Joyner. — *Ap. J.*, 67 (1928), p. 24.

[10] S. Chapman et P. J. Melotte. — *Monthly Notices*, 74 (1913), p. 40.

[11] E. Hertzsprung. — *Ap. J.*, 55 (1922), p. 370.

[12] J. Dufay. — *C. R. Acad. Sc.*, *176*, 1290 (1923).

[13] J. Dufay. — *C. R. Acad. Sc.*, *185*, 147 (1927).

[14] J. Dufay. — *Journal Physique*, 6e série, *10*, 219 (1929).

[15] J. Cabannes et J. Dufay. — *C. R. Acad. Sc.*, *200*, 1504 (1935).

[16] J. Cabannes et J. Dufay. — 68e *Congrès Soc. Sav.*, p. 66 (1935).

[17] J. Cabannes et J. Dufay. — *C. R. Acad. Sc.*, *202*, 365 (1936).

[18] J. Cabannes et J. Dufay. — *C. R. Acad. Sc.*, *201*, 696 (1935).

[19] J. Cabannes et J. Dufay. — *C. R. Acad. Sc.*, *200*, 878 (1935).

[20] Lord Rayleigh. — *Proc. Royal Soc. London, Série A*, *129*, 458 (1930).

[21] V. I. Cerniajev, I. A. Khostikov et K. B. Panschin. — *Journal Physique*, 7e série, 7, 149 (1936).

[22] J. Dufay. — *C. R. Acad. Sc.*, *182*, 331 (1926).

[23] I. A. Khostikov et K. B. Panschin. — *Journal Physique*, 7e série, 7, 187 (1936).

[24] J. Dufay. — *C. R. Acad. Sc.*, *201*, 1323 (1935).

[25] J. S. Plaskett et J. A. Pearce. — *Publ. Dominion Obs. Victoria*, t. 5, n° 3, pp. 167-237 (1933).

[26] C. Schalèn. — *Astronom. Nachr.*, *236*, 249 (1929).

[27] P. J. Van Rhijn. — *Groningen Publ.*, n° 47, 1936.

[28] R. J. Trumpler. — *Lick Observ. Bull.*, n° 420, 1930.

[29] J. Stebbins. — *Proc. Nation. Acad Sc.*, *19*, p. 222 (1933).

[30] J. Cabannes. — *Théorie de la diffusion de la lumière.*

[31] Charlier. — *Med. Lund*, II, 14.

[32] Shapley. — *Proc. Americ. Acad. Washington*, *59*, n° 9 (1924) ; *Mont Wilson Contr.*, n° 157, réf. 41.

[33] F. H. Seares. — *Mont Wilson Contr.*, nos 346 et 347.

[34] Shapley. — *Harvard Circulars 350.*

[35] Kundt et Warburg. — *Annalen. Ph. und Ch.*, 1875.

[36] V. Volterra. — *Leçon sur les équations intégrales et équations intégro-différentielles.*

[37] Kostitzin. — *Mémorial des Sciences math. F. 69* (1935).

[38] Wang Shih-Ky. — *C. R. Acad. Sc.*, *201*, 1326 (1935)

[39] J. Dufay. — *Journal des Observateurs*, *XVI*, n° 5, p. 77.

[40] Mineur et Machiel. — *C. R. Acad. Sc.*, *195*, 1234 (1932).

[41] Van Rhijn. — *Publ. Kap. Astr. Laboratory*, n° 47.

[42] Ch Fabry. — *Journal Physique*, mai-juin (1917).

[43] Wang Shih-Ky. — *C. R. Acad. Sc.*, *201*, 1326 (1936).

Table des Matières

Introduction 7

CHAPITRE PREMIER : Rôle des étoiles dans la lumière du ciel nocturne 9

CHAPITRE II : Luminescence de la haute atmosphère et diffusion extragalactique. 17

CHAPITRE III : Absorption de la lumière dans l'espace 21

CHAPITRE IV : Diffusion de la lumière stellaire 25

CHAPITRE V : Autre hypothèse 49

CHAPITRE VI : Cas où l'intensité varie avec l'angle de diffusion 57

CHAPITRE VII : Diffusion de la lumière solaire 61

Résumé et conclusion 65

Bibliographie 67