

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

PIERRE BOOS

Propriétés caractéristiques de courbes ou de surfaces

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1936

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__179__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__179__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :

2504

SÉRIE A.

N° DE SÉRIE :

1638

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. PIERRE BOOS

1^{re} THÈSE. — PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DE COURBES OU DE SURFACES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 20 mai 1936 devant la Commission d'examen.

MM. G. JULIA, *Président.*
R. GARNIER, *Examinateurs.*
G. VALIRON, }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

—
1936

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM

Doyen honoraire
Doyen

M MOLLIARD
C MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe

<i>Professeurs honoraires</i>	H LE CHATELIER	LEON BRILLOUIN	AUGER
	H LEBESGUE	GOURSAT	BLAISE
	A FERNBACH	WALLERANT	DANGEARD
	A LEDUC	GUILLET	JANET
	EMILE PICARD	PECHARD	LESPIEAU
	RUVY PERRIER	FREUNDLER	MARCHEL
			VESSIOT

PROFESSEURS

G BERTRAND	T Chimie biologique	M JAVILLIER	Chimie biologique
M CAULLERY	T Zoologie (Evolution des etres organises)	L JOLEAUD	Paleontologie
G URBAIN	T Chimie generale	ROBERT-LEVY	Zoologie
EMILE BOREL	T Calcul des probabilités et Physique mathematique	F PICARD	Zoologie (Evolution des etres organises)
JEAN PERRIN	T Chimie physique	HENRI VILLAT	T Mecanique des fluides et applications
H ABRAHAM	T Physique	CH JACOB	T Geologie
E CARTAN	T Geometrie superieure	P PASCAL	T Chimie minerale
M MOLLIARD	T Physiologie vegetale	M FRECHET	T Calcul differentiel et Calcul integral
L LAPICQUE	T Physiologie generale	E ESCLANGON	T Astronomie
A COTTON	T Recherches physiques	M ^{me} RAMART LUCAS	T Chimie organique
J DRACH	T Analyse superieure et Algebre superieure	H BEGHIN	T Mecanique physique et experimentale
CHARLES FABRY	T Enseignement de Physique	FOCH	Mecanique experimentale des fluides
CHARLES PEREZ	T Zoologie	PAUTHENIER	Physique (P C B)
LEON BERTRAND	T Géologie structurale et Geologie appliquee	DE BROGLIE	T Theories physiques
P PORTIER	T Physiologie comparee	CHRETIEN	Optique appliquee
E RABAUD	T Biologie experimentale	P JOB	Chimie generale
M GUICHARD	Chimie minerale	LABROUSTE	Physique du Globe
PAUL MONTEL	T Theorie des fonctions et Theorie des transformations	PRENANT	Zoologie
P WINTREBERT	T Anatomie et histologie comparees	VILLEY	Mecanique physique et experimentale
L BLARINGHEM	T Botanique	BOHN	Zoologie (P C B)
O DUBOSCQ	T Biologie maritime	COMBES	Botanique (P C B)
G JULIA	T Mecanique analytique et Mecanique celeste	GARNIER	T Mathematiques generales
C MAUGUIN	T Mineralogie	PERES	Mecanique des fluides
A MICHEL LEVY	T Petrographie	HACKSPILL	Chimie (P C B)
H BENARD	T Mécanique experimentale des fluides	LALGIER	Physiologie generale
A DENJOY	T Application de l'Analyse a la Geometrie	TOUSSAINT	Technique aeronautique
L LUTAUD	T Geographie physique et Geologie dynamique	M CURIE	Physique (P C B)
EUGENE BLOCH	T Physique theorique et Physique celeste	G RIBAUD	T Hautes temperatures
G BRUHAT	Enseignement de Physique	CHAZI	T Mecanique rationnelle
E DARMOIS	Physique	GALLT	Chimie (P C B)
A DEBIERNE	T Physique generale et Radio activite	CROZE	Recherches physiques
A DUFOUR	T Physique (P C B)	DUPONT	T Theories chimiques
L DUNoyer	Optique appliquee	LANQUINE	Geologie
A GUILLIERMOND	T Botanique	VALIRON	Mathematiques generales
		BARRABE	Geologie structurale et Geologie appliquee
		MILLOT	Zoologie (P C B)
		F PERRIN	Theories physiques
		VAVON	Chimie organique
		G DARMOIS	Calcul des Probabilités et Physique mathematique

Secrétaire
Secrétaire honoraire

A PACAUD
D TOMBECK

A MA GRAND'MÈRE

A MES PARENTS

PREMIÈRE THÈSE.

PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES

DE

COURBES OU DE SURFACES

Dans ce travail nous avons envisagé certaines figures simples attachées à des arcs de courbes ou à des portions de surfaces analytiques et nous avons cherché à déterminer les courbes ou les surfaces par des propriétés caractéristiques relatives à ces figures. Les différents éléments des figures sont définis par des fonctions d'un paramètre de grandeur et d'un paramètre de position, nous cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces fonctions aient certaines formes simples. La conclusion générale à laquelle nous arrivons, est que la simplicité de la structure de ces fonctions semble liée à l'*existence d'un groupe continu de transformations en elles-mêmes pour les courbes ou les surfaces*, si bien que les propriétés obtenues constituent des réciproques de théorèmes élémentaires.

Dans une première partie nous étudions la figure formée par un arc MM_1 d'une courbe tracée sur une surface et la corde géodésique qui sous-tend cet arc. Le paramètre qui définit la position de la figure est l'abscisse curviligne s de l'origine M de l'arc et le paramètre qui fixe la grandeur de cette figure est la longueur l de l'arc ou l'angle α

sous lequel on voit l'arc de son origine (ce dernier paramètre est, de beaucoup, plus intéressant, mais ne permet pas une généralisation immédiate en géométrie affine).

La première fonction envisagée est celle qui exprime la relation existant entre s , l et α (l'angle α pouvant être déterminé par sa tangente d) et les seules formes simples que nous avons pu obtenir pour $l(s, d)$ sont celle où l ne dépend pas de s et celle où l est le produit d'une fonction de s par une fonction de d . Dans le premier cas nous disons que la courbe est une courbe (P) et dans le second une courbe (P'). Pour déterminer ces courbes nous utilisons la fonction implicite des constantes d'intégration définie par l'intégrale générale de l'équation différentielle des géodésiques de la surface sur laquelle est tracée la courbe. Nous avons démontré ainsi les théorèmes suivants donnant les propriétés géométriques des courbes (P) et (P') :

S'il existe, sur une surface, une courbe (P), la surface est applicable sur une surface de révolution et la courbe correspond à un parallèle.

S'il existe, sur une surface, une courbe (P'), la surface est applicable sur une surface spirale de Maurice Lévy et la courbe correspond à une hélice conique.

Les propriétés correspondantes de la fonction $l(s, d)$ caractérisent donc des courbes tracées sur des surfaces admettant un groupe continu de transformations en elles-mêmes et ces courbes sont les trajectoires des points de la surface soumis aux transformations du groupe.

La nature géométrique des courbes (P) et (P') étant connue, il nous a semblé intéressant de rechercher si ces mêmes courbes ne pourraient pas être caractérisées à l'aide d'autres éléments de la figure considérée. Nous avons en particulier étudié la longueur L de la corde, le rapport r_1 de L à l , l'aire A balayée par une géodésique passant par M et dont un point décrit l'arc MM_1 , le rapport r_2 de l'aire A au produit des longueurs l et L , la longueur F de la flèche, le rapport r_3 de F à l , le rapport r_4 à l de la distance du point M au point d'incidence de la flèche, l'angle β (déterminé par sa tangente d_1) sous lequel on voit l'arc de son extrémité, l'angle γ (déterminé par sa tangente d_2) sous lequel on voit du point M l'arc opposé à MM_1 et nous avons obtenu les résultats suivants :

Si l'une des fonctions $l, L, A, r_2, r_3, d_1, d_2$ est une fonction impaire de d , la courbe est une courbe (P), de même si l'une des fonctions F, r_1, r_4 est une fonction paire de d .

Si l'une ou l'autre des fonctions l, L, A, F est indépendante de s , la courbe est une courbe (P); si l'une de ces fonctions est égale au produit d'une fonction de s par une fonction de d , la courbe est une courbe (P').

Si l'une des fonctions r_1, r_2, r_3 est indépendante de s (et ne dépend que de d) la courbe est une courbe (P) ou une courbe (P'). Le rapport r_4 , les angles β et γ posent d'autres problèmes dont la résolution complète paraît difficile par le procédé utilisé.

Les courbes (P) possèdent donc beaucoup de propriétés caractéristiques élémentaires des cercles du plan; elles sont encore caractérisées par le fait que *l'enveloppe de la corde qui sous-tend un arc de longueur fixe est, quelle que soit la longueur de l'arc, une courbe parallèle (sur la surface) à la courbe étudiée.* Par contre : *pour que la longueur de l'arc soit proportionnelle à l'angle sous lequel on le voit de son origine, il ne suffit pas que la courbe soit une courbe (P), il faut, de plus, que la surface soit applicable sur un plan.*

Dans une deuxième Partie nous établissons des propriétés analogues pour des surfaces analytiques. Nous construisons une figure dépendant de deux paramètres en coupant la surface par un plan sécant qui pivote autour d'un point régulier fixe O de la surface, le plan sécant est défini par la tangente λ de l'angle qu'il fait avec le plan tangent en O et par l'angle α que fait sa trace avec une direction fixe de ce plan tangent. Le premier élément étudié est le volume V compris entre le plan sécant et la calotte qu'il découpe et nous avons pu montrer que : *si ce volume ne dépend que de λ (et non de α) la surface est de révolution autour de la normale en O.* Il en est de même si l'aire de la calotte est indépendante de α .

Les transformations affines nous ont conduit à envisager des propriétés caractéristiques de surfaces transformées des surfaces de révolution. Afin de simplifier et de préciser les énoncés des théorèmes, nous utilisons le nom de *surfaces de révolution affine autour d'une droite D parallèlement à un plan P* pour désigner les surfaces engendrées par une courbe G soumise au groupe continu de transformations

défini ainsi qu'il suit : Soit une droite D et un plan P non parallèle à D , le groupe est celui des transformations affines de déterminant égal à 1 qui maintiennent invariants les points de D et sont telles que les trajectoires des différents points de l'espace sont des ellipses situées dans des plans parallèles à P (il faut supposer que la courbe G n'est pas située dans un plan parallèle à P). Cela étant, nous avons démontré que si le volume V ne dépend que du produit de λ par une fonction de α , la surface est de révolution affine autour de la normale en O parallèlement au plan tangent en ce point. Plus généralement :

Nous avons démontré qu'une surface est nécessairement de révolution affine autour d'une droite D , passant par O , parallèlement au plan tangent en O , si cette droite D est telle que les volumes compris entre la surface et les plans sécants passant par O ne dépendent que de la distance du point O aux points d'intersection de la droite D avec les plans tangents parallèles aux plans sécants.

Pour démontrer les différentes propriétés résumées ci-dessus nous déterminons la forme nécessaire du développement de la cote z d'un point de la surface au voisinage du point O étudié en établissant le développement du volume compris entre le plan sécant et la surface. Nous obtenons ainsi des conditions auxquelles doivent satisfaire des polynômes de Fourier déduits des polynômes homogènes comprenant tous les termes d'un même degré figurant dans le développement de z . Le calcul pourrait être conduit d'une manière différente, mais on est alors arrêté par des formules dans lesquelles interviennent les coefficients du binôme; nous n'avons pu démontrer ces formules directement, mais les résultats obtenus par le premier procédé nous montrent qu'elles sont exactes et nous avons cru utile d'en signaler quelques-unes.

Les procédés de calcul utilisés dans la première Partie peuvent être appliqués à des équations différentielles plus générales que celles des géodésiques d'une surface et nous démontrons ainsi des propriétés de leur intégrale générale considérée comme fonction des constantes d'intégration.

D'autre part, nous avons généralisé la définition des courbes (P)

et (P') au cas des courbes gauches d'un espace euclidien ou non-euclidien de courbure constante ainsi qu'au cas des courbes planes ou gauches en géométrie affine. Ces résultats ont été résumés dans des Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ⁽¹⁾, et ils feront l'objet d'une publication séparée. Remarquons que, là encore, il existe un groupe continu transformant en eux-mêmes l'espace, où sont tracées les courbes (P) ou (P') , ainsi que ces courbes.

En terminant cette introduction je tiens à exprimer ma très vive reconnaissance à M. Julia qui a bien voulu présenter à l'Académie les principaux résultats contenus dans ce travail, à tous les Maîtres qui m'ont formé pendant mon passage à l'École Normale et tout spécialement à M. Garnier qui a encouragé, conseillé et vérifié ces recherches. J'adresse des remerciements très sincères à M. Picard pour la grande joie qu'il me fait d'accueillir ce Mémoire *aux Annales de l'École Normale*, ainsi qu'à M. Valiron qui veut bien se joindre à M. Julia et à M. Garnier pour constituer le jury.

⁽¹⁾ *C. R. Ac. Sc.*, t. 194, 1932, p. 1623 et 2271; t. 198, 1934, p. 1898; t. 200, 1935, p. 1820; t. 201, 1935, p. 928; t. 202, 1936, p. 197.

PREMIÈRE PARTIE.

COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

CHAPITRE I.

CALCULS PRÉLIMINAIRES.

1. Pour étudier la relation qui existe entre la longueur d'un arc de courbe et l'angle sous lequel on voit cet arc de son origine, nous envisageons d'abord le cas des courbes planes; il est naturel de définir la courbe par son équation intrinsèque et de déterminer un développement limité de l'angle α (sous lequel on voit l'arc) en fonction des puissances de la longueur l de l'arc. Si $\gamma(s)$ désigne la courbure de la courbe au point d'abscisse curviligne s , l'angle que fait la tangente en ce point avec une direction fixe est $\theta(s) = \int \gamma ds$ et l'angle cherché est déterminé par la relation

$$\tan[\theta(s) + \alpha(l, s)] = \frac{\int_s^{s+l} \sin \theta(x) dx}{\int_s^{s+l} \cos \theta(x) dx},$$

d'où l'on déduit, par des transformations simples, en posant $e^{i\theta(s)} = f(s)$,

$$(1) \quad e^{-2i\alpha(l, s)} \int_0^l \frac{f(x+s)}{f(s)} dx = \int_0^l \frac{f(s)}{f(x+s)} dx.$$

Cette relation nous permet de calculer un développement limité de la détermination de l'angle α qui tend vers zéro en même temps que l . En effet $\frac{f'}{f}$ est égal à $i\gamma$ (que nous désignons par z) et le développe-

ment des intégrales précédentes (en fonction de l , de z et ses dérivées) s'obtient très facilement. Comme la seconde se déduit de la première par le changement de z en $-z$, il est naturel de calculer $-(e^{-2i\alpha}-1)$, d'où l'on déduit sans peine

$$-2i\alpha = -zl - z'\frac{l^2}{3} - z''\frac{l^3}{12} - l^4\left[\frac{z'''}{60} + \frac{z^2z'}{360}\right] - \dots;$$

comme il était à prévoir, l'expression ci-dessus ne contient que des puissances impaires par rapport à l'ensemble des lettres $z, z', z'', \dots$, donc le retour à la fonction γ nous permet de diviser les deux membres par i , et nous obtenons finalement

$$(2) \quad \alpha(l, s) = \frac{\gamma(s)}{2}l + \frac{\gamma'}{6}l^2 + \frac{\gamma''}{4!}l^3 + l^4\left(\frac{\gamma'''}{5!} - \frac{\gamma^2\gamma'}{6!}\right) + \dots$$

Ce développement est valable jusqu'au terme de degré p inclus, si la fonction $\gamma(s)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$, la dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ étant continue.

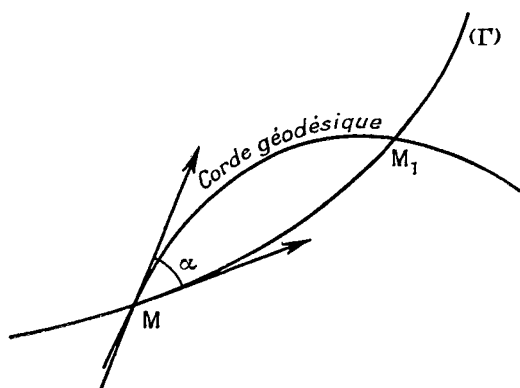
Nous remarquons immédiatement que γ doit être une constante pour que α soit indépendant de s ; nous disons alors que la courbe est une courbe (P) et nous voyons que les cercles sont les seules courbes planes possédant cette propriété. Il serait intéressant d'étudier l'équation (1) lorsque l est une longueur fixe donnée et chercher les courbes telles que pour cette valeur de l , l'angle α soit égal à une certaine constante c (ou même plus généralement soit une fonction de s donnée à l'avance); cette étude ne paraît pas aisée et nous n'avons pu obtenir que les résultats élémentaires suivants : parmi les solutions figurent :

1° les fonctions $f = e^{-2i\frac{c}{l}s + 2i\frac{\pi}{l}ks + ih}$ (k entier, h constante arbitraires) qui correspondent aux cercles de rayon $\frac{l}{2(c + k\pi)}$; 2° des fonctions f qui admettent la période $\frac{l}{k}$ et qui correspondent à des courbes fermées de longueur $\frac{l}{k}$.

2. Si maintenant nous supposons la courbe tracée sur une surface, l'angle α est l'angle que fait la tangente à la courbe (Γ) avec une géodésique de la surface passant par l'origine M et l'extrémité M₁ de

l'arc (cet angle α doit tendre vers zéro en même temps que la longueur de l'arc MM_1). Il faut remarquer que par deux points d'une surface peuvent passer plusieurs géodésiques, donc il importe de préciser celle que nous désignons par géodésique-corde de l'arc MM_1 : on sait

Fig. 1.



qu'à tout point *régulier* M de la surface, on peut associer une longueur λ , telle que si l'on porte à partir de M sur les géodésiques qui passent par ce point un arc de longueur λ , la région balayée par ces arcs jouit de la propriété suivante : par M et par tout point intérieur de la région passe une géodésique et une seule de longueur inférieure à λ . Il en résulte que nous devons supposer qu'il existe une portion de la courbe (Γ) sur laquelle aucun point n'est un point singulier de la surface, ensuite nous déterminons les valeurs de λ correspondant aux différents points de la courbe (ces valeurs ont une borne inférieure non nulle) et nous nous limiterons à la considération d'arcs (qui ne sont pas nécessairement infiniment petits) dont la longueur l sera inférieure à la borne inférieure des λ , la géodésique-corde aura, elle aussi, une longueur inférieure à la même borne.

Ces remarques faites, la géodésique-corde est bien déterminée et nous définissons la surface au voisinage du point M par le système de coordonnées polaires géodésiques : ν désigne l'angle d'une géodésique passant par M avec la tangente en M à la courbe (Γ) , u désigne la longueur de l'arc de cette géodésique compris entre M et le point de

coordonnées (u, v) . On a alors sur la surface $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$, où C est une fonction de u et v qui dépend en général de la position du point M sur la surface, donc de l'abscisse curviligne du point M sur (Γ) . Si $K(u, v)$ est la courbure totale de la surface au point (u, v) , on a les relations

$$(3) \quad K(u, v) = -\frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial u^2}, \quad C = u - \frac{K_0}{6} u^3 + Q(v) u^4 + \dots$$

L'angle α cherché n'est autre que la valeur de v qui correspond à l'extrémité de l'arc de (Γ) ayant pour longueur l ; or, si l'on désigne par $z(s)$ la courbure géodésique de la courbe (Γ) au point d'abscisse curviligne s , cet angle v est déterminé par le système

$$(4) \quad \begin{cases} 1 = u'^2 + C^2 v'^2, \\ z(l, s) = C(u' v'' - u'' v') + C'_u(v' + u'^2 v') + C'_v u' v'^2, \end{cases}$$

dans lequel $u', v', \dots$ désignent les dérivées par rapport à l'arc de (Γ) , s est un paramètre fixe et la variable est l . Ce système nous permet de trouver les valeurs en M des dérivées successives de v par rapport à l , et par suite d'écrire le développement limité cherché.

En effet, en dérivant les relations (3) on obtient les valeurs en M des dérivées partielles de C en fonction de celles de K ; en dérivant la première relation (4) on obtient les valeurs, pour $u = 0$, $v = 0$, des dérivées de u par rapport à l en fonction des dérivées de v ; enfin en dérivant la dernière équation (4) et tenant compte des relations précédemment établies, il est simple de calculer les valeurs de $v', v'', \dots$ en fonction des valeurs de $z, z', z'', \dots$ en M et des valeurs en ce même point de la courbure totale de la surface et de ses dérivées partielles successives.

En supposant que la courbure totale de la surface admette autant de dérivées partielles qu'il est nécessaire, on remarque que pour faire le calcul de $v^{(p)}$, il faut dériver $(p - 1)$ fois les équations (4), donc il faut que la fonction z admette des dérivées jusqu'à l'ordre $p - 1$, si cette dérivée $(p - 1)^{\text{ième}}$ est continue au voisinage de M , la fonction $v^{(p)}(l)$ est continue au voisinage de $l = 0$, et le développement limité sera valable jusqu'au terme de degré p . On obtient

$$v' = \frac{z}{2}, \quad v'' = \frac{z'}{3}, \quad v''' = \frac{z''}{4} + K \frac{z}{4},$$

K désigne ici la courbure totale en M,

$$5 \nu^{(4)} = z''' - \frac{z^2 z'}{6} + \frac{7}{3} K z' + 2 K' z,$$

en désignant par K' la valeur en M de la dérivée $\frac{dK}{ds}$ de la courbure totale considérée comme fonction de l'abscisse curviligne le long de (Γ),

$$6 \nu^{(5)} = z^{(4)} - z z'^2 - \frac{z^3 z''}{2} - \frac{3 K z^3}{2} + 4 K z'' + 3 K^2 z + 6 K' z' + 3 z K''_{\mu^2} + \frac{9}{2} z^2 K''_{\mu\nu},$$

K''_{μ^2} et $K''_{\mu\nu}$ sont les valeurs en M des dérivées partielles de K, la relation qui existe entre ces dérivées partielles et la dérivée seconde $\frac{d^2 K}{ds^2}$ ne permet pas de les éliminer de l'expression ci-dessus, afin de ne conserver que les dérivées de la courbure totale le long de la courbe (Γ). Le développement de α s'écrit donc

$$(5) \quad \alpha(l, s) = \frac{z}{2} l + \frac{z'}{3!} l^2 + \frac{l^3}{4!} (z'' + K z) + \frac{l^4}{5!} \left(z''' - \frac{z^2 z'}{6} + \frac{7}{3} K z' + 2 K' z \right) \\ + \frac{l^5}{6!} \left(z^{(4)} - z z'^2 - \frac{z^3 z''}{2} - \frac{3 K z^3}{2} \right. \\ \left. + 4 K z'' + 3 K^2 z + 6 K' z' + 3 z K''_{\mu^2} + \frac{9}{2} z^2 K''_{\mu\nu} \right) + \dots,$$

en définitive, l'angle α dépend de la courbure géodésique de (Γ) et ses dérivées successives, ainsi que de la courbure totale de la surface et ses dérivées partielles successives. La connaissance de la courbure totale de la surface le long de la courbe ne suffit pas pour obtenir l'angle α , mais permet de le connaître jusqu'au quatrième ordre.

3. Le développement (5) nous montre que si la courbe est une courbe (P), la fonction $z(s)$ est une constante. Nous éliminons le cas où z serait nul identiquement (la courbe est alors une géodésique) car l'angle α est lui aussi identiquement nul. Nous éliminons également ce cas particulier de toutes les recherches ultérieures. Si la fonction z est une constante, la courbe est un cercle géodésique, mais cette condition vérifiée par la courbe (Γ) n'est pas en général suffisante pour que cette courbe soit une courbe (P); en effet tous les coefficients de (5) doivent être indépendants de s et en général la cour-

bure totale de la surface varie avec la position du point M sur la courbe; il ne suffit même pas que cette courbure totale soit constante le long de (Γ) , d'après ce que nous avons remarqué plus haut.

Si tous les cercles géodésiques passant par M possèdent la propriété (P), la courbure totale de la surface est constante dans toute une région entourant le point M et cette condition est suffisante, car alors la fonction C qui figure dans le ds^2 de la surface est indépendante du choix du point M origine des coordonnées polaires. Dès lors, comme la courbe (Γ) est un cercle géodésique, le système (4) ne dépend pas de la position de M sur la courbe, les conditions initiales auxquelles doivent satisfaire u et v sont également indépendantes de s et l'angle cherché est indépendant de s . Donc :

Les surfaces à courbure totale constante sont les seules surfaces analytiques telles que tous leurs cercles géodésiques possèdent la propriété (P); par un point quelconque d'une telle surface passe une infinité de courbes (P) et, réciproquement, si par un point d'une surface analytique passe une infinité continue de courbes (P), la surface est à courbure totale constante.

4. Le développement limité (5) ne nous permet pas de répondre simplement à la question suivante : la courbe (Γ) peut-elle être la seule courbe de la surface passant par M et possédant la propriété (P)? Il faudrait en effet déterminer les conditions imposées à la courbure totale par tous les coefficients de (5).

Pour faire cette étude nous choisissons un autre mode de représentation de la surface S sur laquelle est tracée la courbe : v est l'arc de la courbe (Γ) compté à partir d'une origine O, les courbes, $v = \text{const.}$, sont les géodésiques de S qui sont orthogonales à (Γ) , u est l'arc de la géodésique v compté à partir de (Γ) dans un sens choisi une fois pour toutes. Le ds^2 de la surface est alors de la forme $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$ où C est une fonction de u et v se réduisant à 1 pour $u = 0$. [Nous verrons plus loin la condition imposée à C par le fait que (Γ) n'est pas une géodésique de S.]

Nous prenons comme paramètre arbitraire l'angle α sous lequel on voit l'arc MM_1 de son origine et nous déterminons la longueur l en fonction de s et de α (ou de la tangente d de cet angle). Nous obten-

drons cette fonction $l(s, d)$ en cherchant la valeur de v qui correspond au point d'intersection M_1 de (Γ) et de la géodésique qui passe par M et fait en ce point avec (Γ) un angle dont la tangente est d , ce point M_1 doit tendre vers M lorsque d tend vers zéro. Les géodésiques de la surface sont déterminées par l'équation différentielle

$$(6) \quad \frac{d^2 u}{dv^2} = 2 \frac{C'_u}{C} \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + \frac{C'_v}{C} \left(\frac{du}{dv} \right) + CC'_u$$

qui ne doit pas admettre la solution $u = 0$, puisque la courbe (Γ) n'est pas une géodésique, donc $C'_u(0, v)$ n'est pas identiquement nul.

La corde qui sous-tend l'arc MM_1 est définie par l'intégrale

$$u = u[v - s, d, s]$$

de l'équation (6) répondant aux conditions initiales suivantes :

$$u = 0, \quad \frac{du}{dv} = d$$

pour $v = s$; et la longueur l de l'arc MM_1 de (Γ) est une fonction de s et d telle que $u[l, d, s]$ soit identiquement nul et que l tende vers zéro en même temps que d .

5. Le problème auquel nous sommes ramené est donc l'étude de la fonction implicite des constantes d'intégration définie par l'intégrale générale d'une certaine équation différentielle du second ordre; cette équation est de la forme $u'' = F(u', u, v)$ dans laquelle la fonction inconnue u est définie par les conditions initiales $u = 0, u' = d$ pour $v = s$, la fonction F est holomorphe en u', u, v au voisinage des valeurs $0, 0, s$ et de plus $F(0, 0, v)$ n'est pas identiquement nul. Pour faire cette étude nous utilisons le changement de variable et fonction suivant :

$$d = \lambda^2, \quad v = \lambda V + s, \quad u = \lambda^2 U,$$

la fonction $U(V)$ est définie par l'équation différentielle

$$(7) \quad U'' = F(\lambda U', \lambda^2 U, \lambda V + s),$$

et les conditions initiales $U = 0, U' = \lambda$ pour $V = 0$.

D'après un théorème de Poincaré, les hypothèses faites sur la fonc-

tion F nous permettent d'affirmer la possibilité de développer le deuxième membre de (7) suivant les puissances de λ , soit

$$(8) \quad F = 2a(s) + \lambda[2a'V + bU'] + \lambda^2[a''V^2 + b'U'V + cU'^2 + dU] + \dots,$$

la fonction $a(s)$ n'est pas identiquement nulle; le coefficient de la puissance $m^{\text{ième}}$ de λ est une somme de termes de la forme $g(s)U'^k U^p V^q$ dans lesquels $g(s)$ est une fonction holomorphe au voisinage de la valeur s considérée et les exposants k, p, q sont liés par la relation

$$k + 2p + q = m.$$

Nous pouvons alors calculer le développement de l'intégrale U en fonction de λ . Les premiers termes sont

$$(9) \quad U = aV^2 + \lambda \left[V + \frac{V^3}{3}(a' + ab) \right] \\ + \lambda^2 \left[V^2 \frac{b}{2} + \frac{V^4}{12}(4a^2c + ab^2 + 2ab' + ad + ba' + a'') \right] \\ + \lambda^3 \left[\frac{V^3}{6}(4ac + b^2 + b' + d) + \dots \right] + \lambda^4 \left[\frac{V^2}{2}c + \dots \right] + \dots$$

Pour obtenir dans ce développement le terme de degré m , connaissant tous ceux qui le précèdent, il suffit de déterminer les développements (limités par le degré du dernier terme connu de U) de toutes les expressions coefficients des puissances de λ , inférieures à la $m^{\text{ième}}$, contenues dans (8); nous obtenons ainsi un certain polynome en V et en intégrant deux fois nous avons le coefficient de λ^m dans U, compte tenu des conditions initiales. Quel que soit m , le polynome en V coefficient de λ^m ne contient pas de terme constant et, si $m \neq 1$, il ne contient pas non plus de terme du premier degré.

6. Nous aurons besoin d'exprimer les conditions nécessaires pour que tous les termes de (9) aient certaines formes particulières; nous ne précisons pas ici ces formes, car il nous a semblé préférable d'exposer le raisonnement général qui, convenablement modifié, nous sera utile dans des questions plus compliquées.

Soit

$$(10) \quad F = 2a(v) + b(v)u' + cu'^2 + du + eu'^3 + fuu' + \dots$$

le développement de F avant le changement de variable et fonction; si tous les termes de ce développement pour lesquels la somme de l'exposant de u' et du double de l'exposant de u est inférieure à m vérifient des conditions suffisantes pour que l'intégrale u ait la forme désirée entraînant pour chacun des coefficients de (9) une expression particulière, les premiers termes de U qui pourront empêcher cette fonction d'avoir la forme cherchée sont tels que la somme des degrés de λ et de V est égale à $2m + 2$, et ces termes proviennent uniquement des termes de (10) pour lesquels la somme de l'exposant de u' et du double de l'exposant de u est égale à m .

En effet, les termes du développement (8), de plus bas degré en λ , qui ne vérifient pas la condition supposée suffisante, sont de la forme

$$\lambda^m \sum_p g_p(s) U'^{m-2p} U^p,$$

puisque les termes en $\lambda^m U'^k U^p V^q$, où $k + 2p + q = m$, proviennent des termes en $u'^k u^p$ de (10) et vérifient la condition suffisante si

$$k + 2p < m.$$

Or, du développement (9) nous déduisons que les termes de U sont de degré au moins égal à 2 par rapport à l'ensemble des lettres V et λ et ceux de U' au moins de degré 1; donc la somme des degrés de V et λ pour les différents termes du développement de $U'^k U^p$ aura pour valeur minima $k + 2p$. Il en résulte qu'un terme $\lambda^n U'^k U^p V^q$ de (8), dans lequel $k + 2p + q = n$, aura un développement limité qui ne contiendra que des éléments ayant, par rapport à l'ensemble des lettres V et λ , un degré au moins égal à $n + k + 2p + q = 2n$; et, après les intégrations pour obtenir les éléments correspondants de (9), nous aurons des termes dont le degré par rapport à l'ensemble des lettres V et λ sera au moins égal à $2n + 2$, donc toujours supérieur à $2m + 2$ si $n > m$.

Si n est égal à m , nous obtiendrons effectivement dans U des éléments de degré $2m + 2$ par rapport à l'ensemble des lettres V et λ en remplaçant U et U' par les deux premiers termes de leurs développements (nous ferons plus loin le calcul de ces termes).

Si nous considérons dans (8) un terme de degré, en λ , inférieur à m , nous aurons des éléments de l'intégrale satisfaisant aux condi-

tions désirées en remplaçant U et U' par les premiers termes de leurs développements; il faudra donc pour obtenir, à partir de ce terme de (8), un élément de (9) non conforme aux conditions imposées, prendre soit dans le développement de U , soit dans celui de U' , au moins un terme lui-même non conforme à ces conditions. Or, les termes de ce genre dont nous connaissons actuellement l'existence sont au moins, par rapport à l'ensemble des lettres V et λ , de degré $2m+2$ dans U ou $2m+1$ dans U' ; donc dans le développement de $U'^k U^p$ les termes non conformes aux conditions sont au moins de degré $2p+k+2m$ et après les intégrations les éléments correspondants pour (9) sont au moins de degré $n+2p+k+2m+q+2$, donc toujours de degré supérieur à $2m+2$, puisque n ne peut être nul.

Pour calculer les termes de degré $2m+2$ dans (9) provenant des termes de (10) tels que la somme de l'exposant de u' et du double de l'exposant de u soit égale à m , nous déterminons les termes de plus bas degré en V figurant dans les coefficients de λ^θ des développements de U^p et U'^k et ces termes eux-mêmes ne peuvent nous être utiles que s'ils proviennent des deux premiers termes de U ou U' . On a

$$\begin{array}{lll} \text{dans } U^p & \lambda^\theta V^{2p-\theta} \alpha^{p-\theta} C_p^\theta & \text{à condition que } \theta \leq p, \\ \text{dans } U'^k & \lambda^\theta V^{k-\theta} \alpha^{k-\theta} 2^{k-\theta} C_k^\theta & \text{à condition que } \theta \leq k, \end{array}$$

Les seuls termes du développement de $U'^{m-2p} U^p$ dont le degré, par rapport à l'ensemble des deux lettres V et λ , est m sont donc

$$\lambda^j V^{m-j} \sum_q 2^q C_p^q C_{m-2p}^{j-q} 2^{m-2p-j} \alpha^{m-p-j},$$

la somme par rapport à q étant prise depuis la plus grande des valeurs 0 ou $2p+j-m$ jusqu'à la plus petite des valeurs p ou j et l'entier j variant de 0 à $m-p$. Par conséquent, dans U , l'ensemble des termes de degré $2m+2$ provenant des termes étudiés de (10) est

$$(11) \quad \sum_j \frac{\lambda^{m+j} V^{m-j+2}}{(m-j+2)(m-j+1)} \sum_p g_p(s) \alpha^{m-p-j} 2^{m-2p-j} \sum_q 2^q C_p^q C_{m-2p}^{j-q},$$

les sommes étant prises : celle par rapport à j depuis 0 jusqu'à m , celle par rapport à p depuis 0 jusqu'à $E(m/2)$ ou $m-j$, celle par rapport à q depuis 0 ou $2p+j-m$ jusqu'à p ou j .

En outre, dans certains problèmes nous aurons besoin de connaître les deuxièmes et même les troisièmes termes des intégrales contenant des fonctions de forme inconnue. Une méthode analogue à la précédente peut être utilisée, mais elle exige un développement beaucoup plus compliqué que nous ne présenterons pas en détail.

CHAPITRE II.

RECHERCHE DES COURBES (P) ET (P').

7. Pour que la courbe (Γ) possède la propriété (P), il faut que la fonction implicite $l(s, d)$, définie à la fin du paragraphe 4, soit indépendante de s . Après le changement de variable et fonction, nous devons considérer la relation $U(V, \lambda, s) = 0$ qui définit, pour λ assez petit, une fonction $V(\lambda, s)$ tendant vers zéro en même temps que λ et dont nous pourrions déterminer le développement suivant les puissances de λ à partir du développement (9). La longueur l de l'arc MM_1 est égale à $\lambda V(\lambda, s)$ et par suite la courbe sera une courbe (P) si la fonction $V(\lambda, s)$ est indépendante de s quel que soit λ .

Il faut donc calculer le développement du deuxième membre de (6) après le changement de variable et fonction, puis les développements de U et de la fonction implicite V . La surface étant analytique, la fonction $C(u, v)$ peut être développée sous la forme

$$(12) \quad C = 1 + 2a(v)u + b(v)u^2 + \dots$$

donc, après le changement de variable et fonction, nous avons

$$U'' = 2a(s) + \lambda 2a'V + \lambda^2 [a''V^2 + 4aU'^2 + 2bU + 4a^2U] + \dots$$

et, appliquant (9), il vient

$$(13) \quad U = a(s)V^2 + \lambda \left[V + \frac{V^3 a'}{3} \right] + \frac{\lambda^3 V^4}{12} (20a^3 + 2ab + a'') \\ + \frac{\lambda^3 V^3}{3} (10a^2 + b) + \lambda^4 2a'V^2 + \dots$$

La fonction $V(\lambda, s)$ admet au voisinage de la valeur $\lambda = 0$ et de la

valeur s correspondant au point M un développement limité dont nous déterminons les premiers termes par la méthode des coefficients indéterminés. On obtient très simplement

$$(14) \quad V = -\frac{1}{a}\lambda - \frac{a'}{3a^3}\lambda^3 + \left[\frac{1}{3a} - \frac{b}{6a^2} - \frac{2a'^2}{9a^3} + \frac{a''}{12a^4} \right] \lambda^5 + \dots$$

Pour que la courbe possède la propriété (P), il est nécessaire et suffisant que tous les coefficients de (14) soient indépendants de s ; donc en particulier *les premiers termes de (12) doivent être indépendants de v* .

Ce résultat nous conduit à étudier le cas où C serait indépendant de v ; alors s ne figure pas dans (7) ni dans les conditions initiales, donc U est indépendant de s , donc aussi V défini par la relation $U = 0$; donc la courbe est une courbe (P).

8. La condition que C soit indépendant de v est donc suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Soit m le degré, en u , du premier terme de C dont le coefficient n'est pas indépendant de v , on aura, après le changement de variable et fonction,

$$(15) \quad C = 1 + 2aU\lambda^2 + \dots + \lambda^{2m}g(s)U^m + \dots$$

d'où

$$(16) \quad U'' = 2a + \lambda^2(\dots) + \dots + \lambda^{2m-2}U^{m-1}mg(s) + \dots,$$

les termes non écrits sont indépendants de s ou sont de degré, en λ , supérieur à $2m - 2$.

Nous pouvons alors appliquer la formule (11), particulièrement simple ici, et nous obtenons

$$(17) \quad U = aV^2 + \lambda V + \dots + \sum_0^{m-1} \frac{\lambda^{2m-2+j}V^{2m-j}mC_{m-1}^j}{(2m-j)(2m-j-1)} a^{m-j-1}g(s) + \dots,$$

les termes non écrits sont tels que la somme des degrés de V et λ surpasse 2 si ces termes sont indépendants de s et surpasse $4m - 2$ s'ils dépendent de s .

La fonction V admet un développement de la forme

$$(18) \quad \beta_1\lambda + \beta_3\lambda^3 + \dots + \beta_q\lambda^q + \dots,$$

et pour obtenir β_q il faut diviser par a un certain polynome formé à l'aide des β d'indice inférieur à q et des termes de (17) dans lesquels la somme des exposants de V et λ est égale ou inférieure à $q + 1$. Par suite le premier des β qui peut dépendre de s est le coefficient de λ^{4m-3} et il est égal à

$$g(s) \frac{1}{a^{m+1}} m! \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!} + k,$$

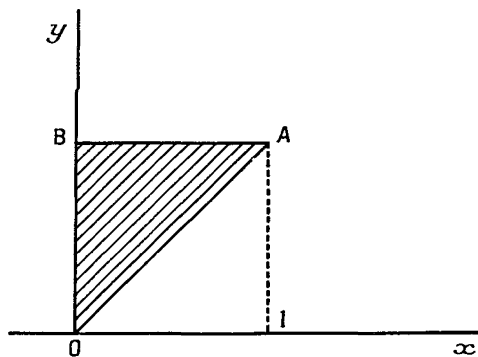
en désignant par k une certaine constante correspondant aux termes de U indépendants de s .

Pour calculer le coefficient de $g(s)$ dans l'expression ci-dessus, il nous suffit de connaître la valeur pour $x=1$ de l'expression

$$G(x) = \sum \frac{(-1)^j x^{2m-j} (m-1)!}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!}$$

nulle pour $x=0$. Or, on a $G'(x) = (-1)^{m+1} x^{m-1} (1-x)^{m-1}$, donc $G(1)$ est égal à l'intégrale $(-1)^{m+1} \int_0^1 dy \int_0^y x^{m-1} (1-x)^{m-1} dx$ ou encore

Fig 2.



à l'intégrale double $(-1)^{m+1} \iint x^{m-1} (1-x)^{m-1} dx dy$ entendue au triangle OAB; donc, en intervertissant l'ordre des intégrations à

$$(-1)^{m+1} B(m, m+1) = (-1)^{m+1} \frac{m!(m-1)!}{2m!},$$

et nous obtenons

$$V = -\frac{1}{a}\lambda + \left(\frac{1}{3a} - \frac{b}{6a^2}\right)\lambda^3 + \dots + \lambda^{m-3} \left[g(s) \frac{(-1)^{m+1} (m!)^2}{a^{m+1} (2m!)} + k \right] + \dots$$

Donc, pour que la fonction $V(\lambda, s)$ soit indépendante de s quel que soit λ , il faut que g soit une constante; par suite il est nécessaire que tous les coefficients de (12) soient des constantes.

Le ds^2 de la surface rapportée au système de coordonnées défini plus haut (§ 4) est donc de la forme $du^2 + C^2(u) dv^2$ lorsque la courbe (Γ) est une courbe (P) : la surface est applicable sur une surface de révolution et la courbe (Γ) correspond à un parallèle. La surface S admet donc un groupe continu de transformations en elle-même (qui correspondent aux rotations de la surface de révolution autour de son axe); ces transformations transforment en elle-même la courbe (Γ) , elles permettent de faire coïncider les différentes figures construites à partir d'arcs de (Γ) ayant même longueur et des origines différentes et ceci nous montre géométriquement que la condition trouvée est suffisante.

On en conclut que *par un point régulier d'une surface ne passe en général aucune courbe (P) ; s'il en passe une, la surface est applicable sur une surface de révolution et, dans ce cas, par tout point régulier de la surface passe en général une telle courbe et une seule* (de même que par un point régulier d'une surface de révolution passe en général un parallèle et un seul non géodésique). Ce résultat complète celui que nous indiquions au paragraphe 3.

9. Si la longueur l de l'arc MM_1 dépend de l'abscisse curviligne s de M , il est intéressant de chercher à quelles conditions on pourra séparer les deux variables de cette fonction; autrement dit, à quelles conditions la fonction l est-elle la somme ou le produit d'une fonction de s et d'une fonction de d . On remarque immédiatement que l'on ne peut avoir $l = \varphi(s) + h(d)$ car l doit être nul lorsque d est nul quel que soit s , donc la fonction φ devrait se réduire à la constante $-h(0)$. Il nous reste donc seulement à chercher les courbes, que nous appelons courbes (P') , pour lesquelles on a $l = \varphi(s) h(d)$, les fonctions φ et h inconnues étant supposées holomorphes dans un certain intervalle. Dans ce cas l'angle α ne doit dépendre que du quotient de la

longueur de l'arc par la fonction φ de l'abscisse curviligne. Le développement (5) nous donne immédiatement des conditions nécessaires pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait, en désignant par a, b, m des constantes

$$z = (as + b)^{-1}, \quad \varphi(s) = m(as + b),$$

mais ces conditions ne sont pas en général suffisantes et la surface doit, elle aussi, vérifier certaines conditions [en particulier la courbure totale le long de la courbe (Γ) doit être proportionnelle à z^2 , *et il n'existe pas de courbe (P') sur une surface à courbure totale constante*].

Dans le cas où la surface est développable, la condition imposée à la courbure de la courbe est suffisante. La courbure totale est nulle en tout point de la surface et le système (4) conserve la même expression pour toutes les surfaces développables, nous pouvons donc examiner uniquement ce qui a lieu sur un plan (en utilisant les calculs du paragraphe 1). On trouve ainsi que l'angle α , dans le cas d'une courbe dont l'équation intrinsèque est $z = (as + b)^{-1}$ (spirale), a pour expression $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ en désignant par α_1 un angle dont la tangente est a et par α_2 l'angle défini par

$$\tan \alpha_2 = \frac{\cos \left\{ a^{-1} \log \left[1 + \frac{al}{as + b} \right] \right\} - \left[1 + \frac{al}{as + b} \right]^{-1}}{\sin \left\{ a^{-1} \log \left[1 + \frac{al}{as + b} \right] \right\}},$$

l'angle α ne dépend donc en effet que du quotient $\frac{l}{as + b}$, d'où l'on déduit, car il est possible de faire l'inversion au voisinage des valeurs $l = 0, \alpha = 0$, que l'on a bien $l = (as + b)h(\alpha)$.

10. Il existe donc des courbes (P') sur un plan, mais nous voulons préciser ce résultat en cherchant les conditions strictement nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe (Γ) tracée sur une surface S quelconque soit une courbe (P'). Nous utilisons le système de coordonnées défini au paragraphe 4 et la courbe (Γ) possède la propriété (P') si la fonction $V(\lambda, s)$ est égale au produit d'une fonction $\varphi(s)$ par une fonction $h(\lambda)$. Comme plus haut, nous cherchons d'abord les conditions auxquelles doivent satisfaire les premiers termes de $C(u, v)$,

cela nous permettra de trouver une condition suffisante et enfin nous établirons que cette condition est nécessaire.

Si C admet le développement (12), le développement de V est (14), ce qui montre que l'on doit avoir nécessairement

$$\varphi(s) = \frac{A}{a(s)}, \quad \frac{A}{a} = AB \frac{a'}{a}, \quad A, B, D = \text{const.},$$

donc

$$a = - \frac{B}{s - s_0}, \quad b = Da^2,$$

nous pouvons changer l'origine sur la courbe (Γ) et multiplier φ par une constante, nous en déduisons qu'il est nécessaire que les premiers termes de $C(u, v)$ soient des puissances de u/v .

Nous sommes conduit ainsi à étudier le cas où C est une fonction de u/v , alors le deuxième membre de (6) est de la forme $\frac{1}{v} F(u', \frac{u}{v})$. Il en résulte que l'intégrale u , définie par les conditions initiales $u = 0, u' = d$ pour $v = s$, est de la forme $u = sG[\frac{v-s}{s}, d]$; en effet en effectuant le changement $v = s(x+1), u = sy$ la fonction $y(x)$ est définie par l'équation $y'' = \frac{1}{x+1} F(y', \frac{y}{x+1})$ et par les conditions initiales $y = 0, y' = d$ pour $x = 0$; par suite y est de la forme $G(x, d)$, donc $u = sG(\frac{v-s}{s}, d)$. Dès lors la fonction $l(s, d)$ définie par la relation $u(l, s, d) = 0$ est égale au produit de s par une fonction de d . Bien entendu nous supposons que s n'est pas nul, autrement dit, nous éliminons le point origine des arcs sur (Γ), nous savons qu'en ce point le rayon de courbure est nul (d'après le paragraphe 9).

11. Démontrons que la condition suffisante trouvée ci-dessus est nécessaire : soit m le degré (en u) du premier terme de C dont le coefficient n'est pas égal au produit de v^{-m} par une constante, on a

$$(19) \quad C = 1 + 2au + \dots + g(v)u^m + \dots$$

où a est une fonction de v ($a = \frac{a_1}{v}$). Après le changement de variable et fonction, l'équation différentielle a encore l'expression (16),

mais les termes non écrits de degré inférieur à $2m - 2$ ne sont pas indépendants de s et vérifient la condition suffisante. Le développement de U s'obtient en remplaçant a par $\frac{a_1}{s}$ dans les termes écrits de (17), les termes non écrits de U correspondent aux termes en u/v de C ou bien sont de degré, par rapport à V et λ , supérieur à $4m - 2$. La fonction $V(\lambda, s)$ admet un développement de la forme (18) où les β d'indice inférieur à $4m - 3$ sont égaux au produit d'une constante par s^{-1} , puisque les termes correspondants de C vérifient une condition suffisante. On déduit des calculs du paragraphe 8 que

$$V = s \left[-\frac{\lambda}{a_1} + \dots + \lambda^{4m-3} \left(h + s^m g(s) \frac{(-1)^{m+1} (m!)^2}{a_1^{m+1} (2m)!} \right) + \dots \right],$$

en désignant par h une certaine constante. Pour que la courbe soit une courbe (P') il est nécessaire que $g(s)$ soit le produit de s^{-m} par une constante. Donc nécessairement C est une fonction de u/v .

12. Le ds^2 de la surface sur laquelle est tracée la courbe (P') est donc de la forme $du^2 + C^2 \left(\frac{u}{v} \right) dv^2$, et cette surface S est applicable sur une surface spirale de Maurice Lévy, nous pouvons en effet mettre ce ds^2 sous la forme classique du ds^2 d'une surface spirale, à savoir

$$ds^2 = e^{2v_1} [du_1^2 + g^2(u_1) dv_1^2],$$

il suffit pour cela d'effectuer la transformation définie par

$$u = v\omega, \quad \frac{dv}{v} = dv_1 - \frac{\omega d\omega}{\omega^2 + C^2(\omega)}, \quad du_1 = \frac{C(\omega) d\omega}{\sqrt{\omega^2 + C^2(\omega)}} e^{-\int \frac{\omega d\omega}{\omega^2 + C^2(\omega)}}$$

qui conduit à un ds^2 du type précité avec

$$g = \sqrt{\omega^2 + C^2(\omega)} e^{-\int \frac{\omega d\omega}{\omega^2 + C^2(\omega)}},$$

où le second membre a été exprimé en fonction de u_1 .

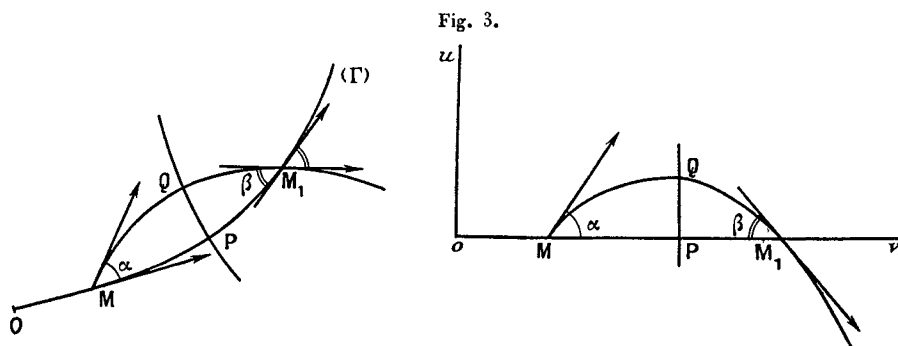
La courbe (Γ) correspond à une courbe $u = \text{const.}$ de la surface spirale, c'est-à-dire à une hélice conique (ou spirale logarithmique). Comme dans le cas des courbes (P) nous voyons que la surface S admet un groupe continu de transformations en elle-même, ces transformations correspondent aux rotations et homothéties qui trans-

forment la surface spirale en elle-même et la courbe (Γ) est aussi transformée en elle-même par ces transformations. Géométriquement l'existence de ce groupe nous montre que la condition trouvée est bien suffisante.

CHAPITRE III.

QUELQUES PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DE (P) OU (P') .

13: Les courbes (P) et (P') sont telles que la figure formée par un arc et sa corde subisse une transformation géométrique simple lorsque l'origine M de l'arc varie et l'angle en M reste constant. Cette transformation est analogue à une translation le long de la courbe dans le cas des courbes (P) et analogue à une homothétie de centre O dans le cas des courbes (P') . D'ailleurs, si l'on considère dans le plan Ouv



l'image de la courbe et des géodésiques, la figure représentant celle que nous étudions subit effectivement une translation ou une homothétie de centre O suivant le cas.

Il en résulte que tous les éléments que nous pouvons considérer sur la figure, et qui en général dépendent à la fois de s et de d , sont indépendants de s sur une courbe (P) . Sur une courbe (P') les longueurs sont égales au produit de s par une fonction de d , les angles, les rapports de deux longueurs, ... sont indépendants de s comme sur une courbe (P) , etc.

Il nous a semblé intéressant de chercher si l'on peut caractériser les courbes (P), ou les courbes (P'), ou l'ensemble des courbes (P) et (P'), par des propriétés relatives à la forme des fonctions donnant la grandeur d'autres éléments de la figure. Nous n'examinons d'abord que les éléments qui nous ont donné des propriétés caractéristiques aussi bien pour (P) que pour (P').

14. Quelles sont les courbes telles que la longueur L de la corde géodésique MM₁ soit indépendante de s [c'est le cas des courbes (P)] ou soit égale au produit d'une fonction de s par une fonction de d [c'est le cas des courbes (P')]? La longueur L est égale à une intégrale prise le long de la géodésique de M en M₁, or nous connaissons l'expression de u en fonction de v le long de cette courbe et nous obtenons, après les changements de variable et fonction,

$$(20) \quad L = \lambda \int_0^{v(\lambda, s)} \left[\lambda^2 \left(\frac{dU}{dV} \right)^2 + C^2(\lambda^2 U, \lambda V + s) \right]^{\frac{1}{2}} dV.$$

Nous calculons très simplement, à partir des développements (12), (13) et (14), les premiers termes du développement de L

$$(21) \quad L = -\frac{\lambda^2}{a} - \frac{a'}{3a^3} \lambda^4 + \lambda^6 \left[\frac{1}{2a} - \frac{b}{6a^3} - \frac{2a'^2}{9a^5} + \frac{a''}{12a^4} \right] + \dots$$

Il est donc nécessaire que a soit constant pour que L soit indépendant de s; il est nécessaire que a' soit proportionnel à a² pour que L soit égal au produit d'une fonction de s (qui est $\frac{1}{a}$) par une fonction de d. Il en résulte — en changeant au besoin l'origine des arcs sur (Γ) — que les premiers termes de C doivent correspondre suivant le cas à une courbe (P) ou à une courbe (P').

Il est visible sur l'intégrale $\int_s^{s+l} \sqrt{\left(\frac{du}{dv} \right)^2 + C^2(u, v)} dv$, donnant L, qu'il suffit que la courbe soit une courbe (P) pour que L soit indépendant de s. En effet C est alors indépendant de v. De même, si la courbe est une courbe (P'), en tenant compte des expressions de C, u, l dans ce cas, on peut mettre cette intégrale sous la forme

$$s \int_0^l \left\{ g'^2(x, d) + C^2 \left[\frac{1}{1+x} g(x, d) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} dx.$$

Supposons alors que C admette le développement (15) dans lequel a et les coefficients des termes non écrits de degré inférieur à $2m$ sont des fonctions de s vérifiant la condition suffisante. L'élément différentiel de (20) admet alors le développement

$$1 + 4a^2\lambda^2 V^2 + 4a\lambda^3 V + \frac{\lambda^4}{2} + \dots + \frac{1}{2}g(s)H(\lambda, V) + \dots,$$

où la fonction $H(\lambda, V)$ est homogène de degré $4m$ par rapport à l'ensemble des lettres V et λ , les termes non écrits ont un degré supérieur à $4m$, ou bien correspondent à des termes vérifiant la condition suffisante et ont un degré supérieur à 4. Nous aurons besoin ultérieurement de l'expression de $H(\lambda, V)$ qui est

$$H(\lambda, V) = \sum_{j=0}^m \frac{2\lambda^{2m+j} V^{2m-j} m!}{a^{-m+j} j! (m-j)!} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{2\lambda^{2m+j} V^{2m-j-1} a^{m-j-1} m!}{(2m-j-1)j! (m-j-1)!} \left[\lambda + \frac{2aV(2m-j+1)}{2m-j} \right].$$

Pour obtenir L, il suffit de remplacer V par son expression déjà calculée (§ 8 ou 11), à savoir

$$(22) \quad V = -\frac{\lambda}{a} - \frac{a'\lambda^4}{3a^3} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{g(s)(m!)^2}{a^{m+1}(2m)!} \lambda^{4m-3} + \dots$$

dans le développement

$$(23) \quad \lambda V + \lambda \left[\frac{4}{3} a^2 \lambda^2 V^3 + 2a\lambda^3 V^2 + \frac{\lambda^4 V}{2} \right] + \dots + \frac{1}{2} \lambda g(s) \int_0^V H(\lambda, V) dV + \dots$$

En tenant compte des degrés des termes qui figurent dans les puissances de V et dépendent de $g(s)$, on calcule le premier terme de L qui dépend de cette fonction inconnue et l'on trouve

$$(24) \quad L = -\frac{\lambda^2}{a} + \dots + \lambda^{4m-2} (-1)^{m+1} g(s) \frac{(m!)^2}{a^{m+1}(2m)!} + \dots,$$

les termes non écrits correspondent à des éléments qui vérifient la condition suffisante ou bien sont de degré supérieur à $4m-2$. Il en résulte que $g(s)$ doit être une constante pour que L soit indépendant de s et que $g(s)$ doit être égal au produit par une constante de la fonc-

tion a^m pour que L soit égal au produit d'une fonction de s , à savoir $\frac{1}{a}$, par une fonction de λ .

On peut donc caractériser les courbes (P) par le fait que la longueur de la corde ne dépend pas de la position de l'arc et les courbes (P') par le fait que la longueur de la corde est égale au produit d'une fonction de l'abscisse curviligne de l'origine de l'arc par une fonction de l'angle sous lequel on voit l'arc de son origine.

15. Nous avons remarqué déjà que le rapport r_1 des longueurs de la corde et de l'arc est indépendant de s aussi bien sur les courbes (P) que sur les courbes (P') et nous nous proposons de chercher si ce rapport permet de caractériser ces courbes.

Une difficulté se présente ici pour obtenir les conditions imposées aux premiers termes de C : les développements limités donnés précédemment ne permettent pas de conclure et nous devons compléter les calculs du paragraphe précédent en déterminant tous les termes de L qui ont un degré inférieur ou égal à 8. On a

$$\int_0^{\cdot} [\lambda^2 U'^2 + C^2]^{\frac{1}{2}} dV = V + \frac{4}{3} a^2 \lambda^2 V^3 + 2 a \lambda^3 V^2 + \frac{\lambda^4 V}{2} + \frac{7}{6} a a' \lambda^3 V^4 + a' \lambda^4 V^3 + \dots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur à 7 par rapport à l'ensemble des lettres V et λ . On obtient les premiers termes du rapport r_1 en remplaçant V par (14) dans le quotient par V de l'expression ci-dessus, donc

$$r_1 = 1 - \frac{\lambda^4}{6} + \frac{\lambda^6 a'}{18 a^3} + \dots$$

et par suite r_1 ne peut être indépendant de s que si $\frac{a'}{a^2}$ est une constante; donc, ou bien a est une constante, ou bien $a = \frac{a_1}{s}$ (en changeant au besoin l'origine sur la courbe).

Puisqu'il suffit que la courbe soit une courbe (P) ou (P') pour que r_1 soit indépendant de s , nous pouvons employer le même procédé que plus haut pour montrer que cette condition suffisante est aussi nécessaire. Si C admet le développement (15), nous connaissons le développement (23) de L, suivant les puissances de V et λ . En

tenant compte de l'expression de H, les termes non écrits sont de degré supérieur à $4m+2$ (par rapport à l'ensemble des lettres V et λ) ou bien ne dépendent pas des fonctions inconnues et sont de degré supérieur à 6.

Nous obtenons r_1 en remplaçant V par (22) dans le quotient du développement (23) par λV . Le premier terme de r_1 qui peut dépendre de s doit contenir $g(s)$ et pour le calculer nous remarquons que dans le développement de V^p la première puissance de λ dont le coefficient dépend de $g(s)$ est de degré $4m-4+p$. On trouve ainsi que le premier terme de r_1 qui peut dépendre de s est de degré $4m$ et son coefficient est (à une constante additive près)

$$\frac{g(s)}{a^m} \left\{ \frac{2}{3} (-1)^m \frac{(m!)^2}{2m!} + \sum_0^m \frac{(-1)^j C_m^j}{2m-j+1} + \sum_0^{m-1} \frac{(-1)^j m C_{m-1}^j}{(2m-j)(2m-j-1)} \right\}.$$

La deuxième somme qui figure ci-dessus est connue, la première s'obtient par un procédé analogue à celui employé plus haut et l'on voit que le coefficient de λ^{4m} dans r_1 est (à une constante additive près)

$$\frac{g(s)}{a^m} \frac{2}{3} (-1)^{m+1} \frac{(m-1)(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Donc le rapport r_1 ne peut être indépendant de s que si $\frac{g(s)}{a^m}$ est une constante, et par suite il est nécessaire que la courbe soit une courbe (P) ou une courbe (P').

16. Cela étant établi, peut-on distinguer d'après la valeur du rapport r_1 les courbes (P) des courbes (P') sans avoir besoin de calculer la courbure géodésique? Pour faire cette recherche nous exprimons le rapport r_1 en fonction de d (il est facile de montrer que le développement ne peut contenir aucune puissance fractionnaire); on a

$$(25) \quad r_1 = 1 - \frac{d^2}{6} + \frac{d^3}{18} \frac{a'}{a^2} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{g}{a^m} \frac{2(m-1)[m!]^2}{3(2m+1)!} d^{2m} + \dots$$

Ce rapport n'est donc certainement pas une fonction paire de d si la courbe est une courbe (P') puisqu'alors a'/a^2 n'est pas nul. Au contraire sur une courbe (P) il est une fonction paire; on peut le vérifier

géométriquement en examinant la surface de révolution sur laquelle s'applique la surface portant la courbe (P). L'équation différentielle des géodésiques nous le montre aussi aisément, car dans le cas d'une courbe (P) l'équation (6) est de la forme $u'' = 2 \frac{C'_u}{C} u'^2 + CC'_u$ puisque C est indépendant de v ; donc la fonction $u(v-s, -d)$ définie par les conditions initiales $u=0, \frac{du}{dv} = -d$ pour $v-s=0$ est identique à la fonction $u[-(v-s), +d]$ définie par les conditions $u=0, \frac{du}{d(-v)} = +d$. Donc les valeurs algébriques de deux arcs correspondant à $+d$ et $-d$ sont deux nombres opposés (ce qui prouve que l est alors une fonction impaire de d), les longueurs des cordes correspondantes sont égales (plus précisément on obtient, en comptant les cordes positivement dans un sens défini par le sens positif sur la courbe, deux valeurs opposées), donc le rapport r_1 ne doit pas être modifié par le changement de d en $-d$.

Nous avons donc là un moyen de distinguer les courbes (P) des courbes (P') lorsqu'on sait que r_1 est indépendant s ; mais *il n'est même pas nécessaire de démontrer que r_1 est indépendant de s pour caractériser une courbe sur laquelle ce rapport est une fonction paire de d .*

En effet, supposons seulement que r_1 soit une fonction paire de d , il faut que les coefficients des puissances de λ dont le degré est un multiple de 4 plus 2, soient tous nuls dans le développement de r_1 . Il faut en particulier que a'/a^2 soit nul, donc que le premier terme de C corresponde à une courbe (P). Soit alors m le degré en u du premier terme de C qui dépend de v , on a

$$(15') \quad C = 1 + 2\lambda^2 a U + \dots + \lambda^{2m} g(s) U^m + \lambda^{2m+1} g'(s) U^m V + \dots,$$

d'où

$$(17') \quad U = a V^2 + \lambda V + \lambda^2 V^4 (\dots) + \dots + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m-2+j} V^{2m-j} a^{m-j-1} m! g(s)}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!} \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m-1+j} V^{2m+1-j} a^{m-1-j} m!}{(2m-j+1)(2m-j)j!(m-j-1)!} g'(s) + \dots,$$

les termes non écrits dans (17') sont indépendants de s et de degré supérieur à 5 ou bien dépendent de s mais sont de degré supérieur

à $4m$ (degré par rapport à l'ensemble des lettres V et λ). Nous pouvons calculer dans le développement de $V(\lambda, s)$ le terme qui dépend de s et est de degré $4m-1$ en λ . On trouve, en évaluant encore à l'aide des fonctions B une certaine somme, que

$$(26) \quad V = -\frac{\lambda}{a} + \lambda^3(\dots) + \dots + \lambda^{4m-3} \frac{g(s)}{a^{m+1}} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{2m!} \\ + \lambda^{4m-1} \frac{g'(s)}{a^{m+2}} (-1)^m \frac{m[m!]^2}{(2m+1)!} + \dots$$

D'autre part nous calculons dans l'élément différentiel de (20) les termes dépendants de s qui sont de degré $4m$ ou $4m+2$ par rapport à l'ensemble des lettres V et λ et l'on en déduit que l'on obtient le développement de r_1 en remplaçant V par (26) dans le développement ci-dessous :

$$1 + \frac{4}{3} a^2 \lambda^2 V^2 + 2a\lambda^3 V + \frac{\lambda^4}{2} + \dots + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j-1} a^{m-j-1} (2aV + \lambda) m!}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!} g(s) \\ + \sum_{j=0}^m \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j} a^{m-j} m!}{(2m-j+1)j!(m-j)!} g(s) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m+j+1} V^{2m-j-1} a^{m-j-1} (2aV + \lambda) m!}{(2m-j+1)(2m-j)j!(m-j-1)!} g'(s) \\ + \sum_{j=0}^m \frac{\lambda^{2m+j+1} V^{2m-j+1} a^{m-j} m! g'(s)}{(2m-j+2)j!(m-j)!} + \dots,$$

les termes non écrits sont indépendants de s et, par rapport à l'ensemble des deux lettres V et λ , de degré supérieur à 7 ou bien dépendent de s et sont de degré supérieur à $4m+2$. Or, dans le développement de V^p les termes contenant $g(s)$ sont, en λ , de degré $4m+p-4$ ou de degré au moins égal à $4m+p$ et les termes contenant g' de degré au moins égal à $4m+p-2$, les premiers termes sont de degré p et les suivants au moins de degré $p+4$. Donc les seuls termes de r_1 qui ont pour degré $4m+2$, sont

$$\lambda^{4m+2} \left\{ \frac{(-1)^m g' m[m!]^2}{3 a^{m+1} (2m+1)!} + \frac{g'}{a^{m+1}} \sum_0^m \frac{(-1)^{j+1} m!}{(2m-j+2)j!(m-j)!} + k \right\},$$

où k est le coefficient correspondant à l'hypothèse $g'=0$; donc k est nul puisque les premiers termes de C vérifient une condition suffisante pour que r_1 soit une fonction paire de d . La somme ci-dessus se

calcule facilement et l'on obtient en remplaçant λ^2 par d

$$(27) \quad r_1 = 1 - \frac{d^2}{6} + \dots + d^{2m} \left[\frac{g(s)}{a^m} (-1)^{m+1} \frac{2(m-1)[m!]^2}{3(2m+1)!} + h \right] \\ + d^{2m+1} \frac{g'(s)}{a^{m+1}} \frac{(-1)^m (2m-3)[m!]^2}{6(2m+1)!} + \dots$$

Donc le rapport r_1 ne peut être une fonction paire de d que si $g'(s)$ est nul, on démontrera ainsi de proche en proche que tous les coefficients de (12) sont indépendants de v , donc la courbe est une courbe (P). On démontrerait de même très simplement à l'aide des développements (14), (26), (21), (24) que l'on peut caractériser les courbes (P) par le seul fait que l'une des fonctions l ou L est une fonction impaire de d (sans faire aucune hypothèse sur la dépendance de ces fonctions vis-à-vis de s).

17. Les hypothèses que nous avons faites sur la surface, la courbe, la valeur de d , ... nous permettent de revenir à la variable l , au lieu de la variable d , en calculant la fonction inverse définie par $l = \lambda V(\lambda, s)$, $\lambda^2 = d$. Ce retour à la variable l permettra une généralisation plus facile en géométrie affine, que nous publions séparément; nous ne donnons ci-dessous que les résultats et certains calculs qui nous seront utiles plus loin.

Si l'on a

$$l = -\frac{d}{a} - \frac{a'}{3a^3} d^2 + \dots + \alpha_k d^k + \alpha_{k+1} d^{k+1} + \dots,$$

on obtient

$$(28) \quad d = -al - \frac{a'}{3} l^2 + \dots + l^k [(-1)^k a^{k+1} \alpha_k + \dots] \\ + l^{k+1} \left[(-1)^{k+1} a^{k+2} \alpha_{k+1} + \frac{(-1)^k (2+k)}{3} a^k a' \alpha_k + \dots \right] + \dots$$

Il est alors facile de calculer le développement de r_1 en fonction de l [en utilisant les développements (25) et (27)] et d'en conclure que : *si le rapport des longueurs de la corde et de l'arc ne dépend que de la longueur de l'arc, la courbe est une courbe (P), de même, ce rapport ne peut être une fonction paire de l que si la courbe est une courbe (P); enfin si ce rapport ne dépend que du quotient de la longueur de l'arc par une*

fonction de l'abscisse curviligne de l'origine, la courbe est une courbe (P').

La substitution de la longueur de la corde à celle de l'arc en tant que paramètre indépendant nous conduit à des énoncés tout à fait analogues. On les démontre en cherchant l'expression de d en fonction de L à l'aide des développements (21) et (24), où l'on remplace λ^2 par d .

18. En utilisant de nouveau la variable arbitraire d , nous étudions l'aire balayée par une géodésique de la surface qui passe par M et dont un point décrit l'arc MM_1 . Nous avons remarqué géométriquement que pour une courbe (P) cette aire est indépendante de s et pour une courbe (P') elle est égale au produit de s^2 par une fonction de d . Or cette aire $A(s, d)$ est égale à l'intégrale $\iint C(u, v) du dv$ étendue au domaine limité sur la surface par l'arc et sa corde. C'est donc, après les changements de variable et fonction

$$(29) \quad A = \lambda^3 \int_0^{v(\lambda, s)} dV \int_0^{u(V, \lambda, s)} C[\lambda^2 U, \lambda V + s] dU.$$

L'intégrale donnant A nous montre très simplement que les conditions — (Γ) courbe (P) ou courbe (P') — sont suffisantes pour que l'aire soit indépendante de s ou produit d'une fonction de s par une fonction de d . Par exemple, dans le cas des courbes (P') on a pour définir cette aire l'intégrale $\int_s^{s+l} dv \int_0^u C\left(\frac{u}{v}\right) du$, d'où, en désignant par $K(x)$ la fonction $\int_0^x C(x) dx$ et en posant $v = s(1+x)$,

$$A = s^2 \int_0^{h(d)} (1+x) K\left[\frac{1}{x+1} g(x, d)\right] dx.$$

A l'aide des formules (13) et (14) on calcule les premiers termes de A qui sont

$$(30) \quad A = \frac{\lambda^6}{6a^2} + \frac{\lambda^8 a'}{12a^3} + \dots,$$

donc l'aire ne peut être indépendante de s que si a est une constante et cette aire ne peut être le produit d'une fonction de s par une

fonction de d que si cette fonction de s est égale à $\frac{1}{a^2}$ et si a' est proportionnel à a^2 . Donc il est nécessaire que les premiers termes de C correspondent à une courbe (P) ou à une courbe (P') suivant le cas.

Nous démontrons que ces conditions suffisantes sont nécessaires en utilisant toujours le même procédé : soit m le degré en u du premier terme de C dont le coefficient ne vérifie pas la condition suffisante; alors, en tenant compte de (17),

$$\int_0^u C dU = aV^2 + \lambda V + \dots + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m-2+j} V^{2m-j} a^{m-j-1} m!}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!} g(s) + \dots$$

les termes non écrits sont par rapport à V et λ de degré supérieur à $4m-2$ s'ils dépendent d'une fonction inconnue ou de degré supérieur à 2 s'ils correspondent à des éléments de C vérifiant la condition suffisante.

Nous multiplions l'expression ci-dessus par dV , puis nous intégrons et remplaçons V par le développement (22). Les remarques faites (§ 15) au sujet du développement de V^p nous montrent que l'on a

$$A = \frac{\lambda^6}{6a^2} + \dots + \lambda^{4m+2} \frac{g(s)}{a^{m+2}} \sum_0^{m-1} \frac{(-1)^{j+1} m!}{(2m-j+1)(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!} + \dots,$$

les termes non écrits étant, en λ , d'un degré supérieur à $4m+2$ ou bien sont de la forme voulue.

La somme précédente s'exprime simplement à l'aide de sommes déjà calculées (§ 8 et 16) et l'on a

$$A = \frac{d^1}{6a^2} + \frac{d^1 a'}{12a^4} + \dots + d^{2m+1} \left\{ \frac{g(s)}{a^{m+2}} (-1)^m \frac{m!(m+1)!}{2(2m+1)!} + \frac{k}{a^2} \right\} + \dots$$

et A ne peut être une fonction de la forme désirée que si $g(s)$ est le produit de a^m par une constante. Donc :

Si l'aire limitée sur une surface par un arc de courbe et sa corde géodésique est indépendante de la position de l'origine de l'arc sur la courbe, la courbe est une courbe (P); si cette aire est égale au produit d'une

fonction de l'abscisse curviligne de l'origine de l'arc par une fonction de l'angle sous lequel on voit l'arc de son origine, la courbe est une courbe (P').

19. Comme pour les fonctions étudiées plus haut, le fait que la fonction A est impaire suffit pour caractériser une courbe (P) sans même que l'on ait besoin d'établir l'indépendance de A vis-à-vis de s . En effet le coefficient de λ^8 dans (30) ne peut être nul que si a est une constante; nous pouvons alors supposer que C admet le développement (15') et nous déterminons le coefficient de λ^{4m+4} dans le développement de A; ce coefficient est nul si $g(s)$ est une constante, car les premiers termes de C vérifient une condition suffisante pour que A soit une fonction impaire de d . En utilisant la formule (17'), on voit que les termes de A dépendants de $g(s)$ et de degré, en λ , $4m+2$ et $4m+4$ s'obtiendront en remplaçant V par (26) dans

$$\lambda^3 a \frac{V^3}{3} + \frac{\lambda^4 V^2}{2} + \dots + \sum_0^{m-1} \frac{\lambda^{2m+j+1} V^{2m-j+1} a^{m-j-1} m! g(s)}{(2m-j+1)(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!} \\ + \sum_0^{m-1} \frac{\lambda^{2m+j+2} V^{2m-j+2} a^{m-j-1} m! g'(s)}{(2m-j+2)(2m-j+1)(2m-j)j!(m-j-1)!} + \dots,$$

les termes non écrits sont, par rapport à l'ensemble V et λ , de degré supérieur ou égal à 10 s'ils sont indépendants de g ou de degré supérieur à $4m+4$ s'ils dépendent de fonctions inconnues. Par suite le coefficient de d^{2m+2} dans le développement de A est $g'(s) \frac{(-1)^{m+1} m[m!]^2}{4a^{m+3}(2m+1)!}$ et A ne peut être une fonction impaire de d que si g' est identiquement nul.

Une propriété élémentaire de l'aire d'un triangle nous a conduit à chercher dans quel cas l'aire A est égale au produit des longueurs de l'arc et de la corde par une fonction de l'angle à l'origine; autrement dit, quelles conditions doit vérifier la courbe pour que le rapport r_2 de A au produit lL soit une fonction de d seulement? Nous savons déjà qu'il suffit que la courbe soit une courbe (P) ou une courbe (P'). Les premiers termes du rapport r_2 s'obtiennent aisément à l'aide des développements (30), (21) et (14); on trouve, en revenant à la

variable d , $\frac{d}{6} - \frac{a'}{36a^2}d^2 + \dots$, ce qui montre que r_2 n'est indépendant de s , quel que soit d , que si a' est proportionnel à a^2 [donc le premier terme de C correspond à une courbe (P'), ou à une courbe (P) si le coefficient de proportionnalité est nul]; nous remarquons aussi que ce rapport ne peut être une fonction impaire de d que si la fonction a est une constante. En supposant alors que C admet le développement (15) dans lequel les termes non écrits correspondent à la condition suffisante ou bien sont de degré (en λ) supérieur à $2m$ et en utilisant les développements déjà calculés de V, L, A, on démontre que le premier terme de r_2 qui peut dépendre de la fonction g est en λ de degré $4m-2$ et le coefficient de $g(s)$ dans ce terme est $\frac{[m!]^2(m-1)(-1)^{m+1}}{6a^m(2m+1)!}$; donc le rapport r_2 ne peut être indépendant de s que si $g(s)$ est égal au produit d'une constante par a^m . Donc, *si le rapport r_2 est indépendant de s , et dépend seulement de d , la courbe est une courbe (P) ou une courbe (P')*. Pour démontrer que ce rapport ne peut être une fonction impaire de d que sur les courbes (P), il suffit de calculer le coefficient de d^{2m} dans ce rapport, calcul qui n'offre aucune difficulté, car tous les termes utiles ont déjà été donnés; on trouve que le coefficient en question est égal à $\frac{(-1)^{m+1}m[m!]^2g'(s)}{12a^{m+1}(2m+1)!}$; donc il ne peut être nul que si $g'(s)$ est identiquement nul.

20. Nous nous proposons maintenant d'étudier la longueur de la flèche PQ de l'arc MM_1 , c'est la longueur de la portion de géodésique normale en P à (Γ) et normale en Q à la corde MM_1 (*fig. 3*). L'équation de cette géodésique est donc $v = \text{const.}$, et la valeur de la constante est telle que l'on ait, en Q, $\frac{du}{dv} = 0$; la longueur cherchée est la valeur de u correspondant au point Q.

Donc, après le changement de variable nous pourrions déterminer le point P comme correspondant à la valeur V_1 de V telle que $\frac{dU}{dV}$ soit nul, cette valeur V_1 doit être comprise entre 0 et V et tendre vers 0 en même temps que d . La longueur de la flèche F est alors égale à la valeur de $\lambda^2 U$ où l'on remplace V par V_1 .

Nous calculons V_1 par la méthode des coefficients indéterminés à

partir du développement de $\frac{dU}{dV}$. Or, si C admet le développement (12),

$$(31) \quad \frac{dU}{dV} = 2aV + \lambda[1 + V^2 a'] + \lambda^2 V^3 \left[\frac{20}{3} a^3 + \frac{2}{3} ab + \frac{a''}{3} \right] + \lambda^3 V^2 (10a^2 + b) + 4aV\lambda^4 + \dots,$$

les termes non écrits sont, par rapport à V et λ , de degré supérieur à 5; les premiers termes de V, sont donc

$$(32) \quad V_1 = -\frac{\lambda}{2a} - \frac{\lambda^3 a'}{8a^3} + \lambda^5 \left[\frac{1}{6a} + \frac{a''}{48a^4} - \frac{a'^2}{16a^5} - \frac{b}{12a^3} \right] + \dots$$

En remplaçant V par (32) dans (13), on obtient, après multiplication par λ^2 ,

$$(33) \quad F = -\frac{\lambda^4}{4a} - \frac{\lambda^6 a'}{24a^3} + \lambda^8 \left[\frac{3}{16a} - \frac{a'^2}{32a^5} - \frac{b}{32a^3} + \frac{a''}{192a^4} \right] + \dots$$

Pour que F soit indépendant de la position de l'arc sur la courbe il faut donc que a soit une constante; pour que F soit égal au produit d'une fonction de s par une fonction de d , il faut que a' soit proportionnel à a^2 ; nous obtenons bien les premières conditions correspondant soit à une courbe (P), soit à une courbe (P').

Il est facile de vérifier analytiquement qu'il suffit que la courbe soit une courbe (P) ou une courbe (P') pour que F ait l'une des formes désirées car nous connaissons alors les formes des fonctions C et u .

Démontrons que ces conditions suffisantes sont nécessaires en désignant toujours par m le degré du premier terme de C dont le coefficient ne correspond pas à la condition suffisante. Nous connaissons alors l'expression de U (17), d'où l'on déduit celle de $\frac{dU}{dV}$, et enfin

$$(34) \quad V_1 = -\frac{\lambda}{2a} + \dots + \lambda^{4m-3} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{m! 2^{-2m+j} (-1)^j g(s)}{(2m-j-1)j!(m-j-1)! a^{m+1}} + \dots \right\} + \dots,$$

les termes non écrits sont, en λ , de degré supérieur à $4m-3$ ou bien proviennent d'éléments de C qui vérifient la condition suffisante.

Nous aurons F en remplaçant V par (34) dans le développement de $\lambda^2 U$ et par suite

$$F = -\frac{\lambda^4}{4a} + \dots + \lambda^{4m} \left\{ \sum_0^{m-1} \frac{(-1)^j m! 2^{-2m+j} g(s)}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)! a^{m+1}} + \dots \right\},$$

les termes non écrits sont de degré supérieur à $4m$ ou bien correspondent à des éléments de C qui vérifient la condition suffisante.

Pour calculer le coefficient figurant dans l'expression ci-dessus, nous remarquons qu'il est égal à

$$\sum \frac{(-1)^{j+1} m! 2^{-2m+j}}{(2m-j)j!(m-j-1)!} + \frac{1}{2} \sum \frac{(-1)^j m! 2^{-2m+j+1}}{(2m-j-1)j!(m-j-1)!},$$

or ces sommes sont les valeurs pour $x = 1/2$ des fonctions suivantes, nulles toutes deux pour $x = 0$,

$$\sum \frac{(-1)^{j+1} m! x^{2m-j}}{(2m-j)j!(m-j-1)!} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^j m! x^{2m-j-1}}{(2m-j-1)j!(m-j-1)!},$$

dont les dérivées sont respectivement

$$(-1)^m m x^m (1-x)^{m-1} \quad \text{et} \quad (-1)^{m+1} m (1-x)^{m-1} x^{m-1},$$

et nous sommes amené au calcul des intégrales

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1} (1-x)^{m-1} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{1}{2}} x^m (1-x)^{m-1} dx,$$

or le changement de x en $1-x$ montre que I a aussi pour expression

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1} (1-x)^{m-1} dx$$

et, par suite,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{m-1} dx = \frac{m!(m-1)!}{(2m)!}.$$

D'autre part on a

$$1 - J = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1} (1-x)^m dx,$$

d'où, en faisant une intégration par parties, $J = \frac{1}{2} - \frac{2^{-2m-1}}{m}$. Donc

le coefficient de $\lambda^{4m} \frac{g(s)}{a^{m+1}}$ dans le développement de F est égal à $(-1)^m m \left(J - \frac{1}{2} \right)$ ou $(-1)^{m+1} 2^{-2m-1}$, il n'est jamais nul et

$$(35) \quad F = -\frac{\lambda^1}{4a} + \dots + \lambda^{4m} \left[\frac{(-1)^{m+1} g(s)}{2^{2m+1} a^{m+1}} + \dots \right] + \dots$$

ne peut être de la forme désirée que si la courbe est une courbe (P)

ou une courbe (P'). Donc : *si la longueur de la flèche est indépendante de s la courbe est une courbe (P); si cette longueur est le produit d'une fonction de s par une fonction de d la courbe est une courbe (P').*

Nous pourrions démontrer maintenant que le rapport r_3 des longueurs de la flèche et de l'arc permet de caractériser les courbes (P) et (P'), courbes sur lesquelles il ne dépend que de d . De même, si r_3 est une fonction impaire de d ou si F est une fonction paire de d , la courbe est une courbe (P). Nous n'avons pas jugé utile de reproduire ici la démonstration de la première de ces propriétés (qui doit être faite tout à fait comme les précédentes); nous aurons plus loin besoin d'effectuer un calcul plus complet que celui qu'il y aurait lieu de faire pour établir les deux autres propriétés mentionnées et nous renvoyons le lecteur au paragraphe 24.

CHAPITRE IV.

AUTRES PROPRIÉTÉS DES COURBES (P) ET (P'). PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DES COURBES (P).

24. Les recherches précédentes ont toutes abouti à des résultats complets et nous avons obtenu, assez simplement, des propriétés caractéristiques des courbes (P) ou (P'); il n'en sera pas de même dans les cas que nous allons étudier. Nous nous proposons en effet d'envisager des éléments de notre figure qui sont indépendants de s , aussi bien sur les courbes (P) que sur les courbes (P'), mais qui, dans le cas des courbes (P), conduisent à des expressions particulièrement simples (ils sont indépendants de s et de d , ou bien sont du premier degré en d). En raison même de cette simplicité les conditions nécessaires que nous obtiendrons en exprimant que ces éléments sont indépendants de s , seront moins restrictives que celles indiquées par la condition suffisante connue et il ne nous a pas été possible, en général, d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes. Cependant nous pourrions toujours caractériser les courbes (P) par des propriétés intéressantes relatives à ces éléments.

L'élément qui nous a permis d'obtenir les conclusions les plus précises, est le rapport r_4 des arcs MP et MM₁; r_4 fixe la position

de la flèche et est manifestement indépendant de s aussi bien sur (P) que sur (P'), il s'obtient en déterminant le quotient des fonctions $V_1(s, \lambda)$ et $V(s, \lambda)$ que nous connaissons déjà (§ 20 et 7). Les premiers termes de ce rapport sont

$$r_4 = \frac{1}{2} - \lambda^2 \frac{a'}{24a^2} + \lambda^4 \left(\frac{a''}{48a^3} - \frac{5a'^2}{144a^4} \right) + \dots$$

Pour que r_4 soit indépendant de s il faut donc que a' soit proportionnel à a^2 , et a est une constante ou bien correspond à une courbe (P'); mais nous remarquons que le coefficient b de C ne figure pas dans le coefficient de λ^4 du développement précédent. Cela était à prévoir car dans le cas des courbes (P) le rapport r_4 est constant et égal à $1/2$; en effet si nous examinons le modèle particulier de courbe (P) réalisé par un parallèle de surface de révolution, nous remarquons que l'arc MM_1 et la figure formée par l'arc et sa corde sont symétriques par rapport au plan méridien passant par le milieu de l'arc, par suite la flèche est un arc de ce méridien et le rapport MP/MM_1 est bien égal à $1/2$. Nous en concluons que dans le développement de r_4 doivent disparaître tous les termes qui ne contiennent aucune des dérivées des fonctions de v figurant dans le développement par rapport à u de la fonction C. Cette remarque nous fournira une vérification des calculs ultérieurs si nous conservons dans C la lettre a , sans expliciter cette fonction de s dans le cas des courbes (P'); cette vérification est d'autant plus intéressante que les termes qui doivent disparaître dans les résultats sont ceux qui correspondent aux calculs les plus complexes.

Supposons que m soit le degré (en u) du premier terme de C dont le coefficient ne correspond pas à une courbe (P) ou (P') suivant le choix fait pour a , et déterminons les conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire la fonction $g(s)$; nous devons trouver une (ou plusieurs) équation différentielle.

Nous avons vu que V_1 admet le développement (34), la somme qui figure dans le coefficient de λ^{4m-3} a été calculée et l'on vérifie que le coefficient de λ^{4m-4} dans r_4 est indépendant de la fonction $g(s)$, donc est indépendant de s d'après nos hypothèses sur les premiers termes de C.

Nous devons alors calculer dans V et V_1 les coefficients de λ^{4m-1} dans le cas où a est une fonction de s (le calcul pour V a été déjà fait plus haut lorsque a est une constante). Soit donc

$$(36) \quad C = 1 + 2au + bu^2 + \dots + g(s)u^m + h(s)u^{m+1} + \dots;$$

l'équation (6) devient après le changement de variable

$$(37) \quad U'' = 2a + 2\lambda a'V + \lambda^2[a''V^2 + (4a^2 + 2b)U + 4aU'^2] + \dots \\ + \lambda^{2m-2}mgU^{m-1} + \lambda^{2m-1}mg'U^{m-1}V \\ + \lambda^{2m}\left[\frac{m}{2}g''U^{m-1}V^2 + 2mgU^{m-1}U'^2 + (m+1)(h+2ag)U^m\right] + \dots,$$

les termes non écrits sont, en λ , de degré supérieur à $2m$ s'ils contiennent des fonctions de forme inconnue, ou supérieur à 2, s'ils ne contiennent que des fonctions correspondant à la condition suffisante.

Dans ce paragraphe nous n'avons besoin que des termes de U dont le degré est inférieur ou égal à $4m$, on trouve

$$(38) \quad U = aV^2 + \lambda V + \lambda V^3 \frac{a'}{3} + \lambda^2 V^4 \left(\frac{5}{3}a' + \frac{ab}{6} + \frac{a''}{12} \right) + \lambda^3 V^3 \left(\frac{10}{3}a^2 + \frac{b}{3} \right) \\ + \lambda^4 V^2 2a + \dots + \sum_0^{m-1} \frac{\lambda^{2m-2+j} V^{2m-j} m! a^{m-1-j}}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!} g(s) \\ + \sum_0^{m-1} \frac{\lambda^{2m-1+j} V^{2m+1-j} m! a^{m-1-j} g'(s)}{(2m-j+1)(2m-j)j!(m-j-1)!} \\ + \sum_0^{m-2} \frac{\lambda^{2m-1+j} V^{2m+1-j} m! a^{m-2-j} a' g(s)}{3(2m-j+1)(2m-j)j!(m-j-2)!} + \dots$$

Les degrés des différents termes figurant dans le développement d'une puissance V^p de V sont $p, p+2, \dots$ si ces termes sont indépendants des fonctions inconnues et $4m+p-4, 4m+p-2, \dots$ s'ils en dépendent; cette remarque nous permet de calculer

$$(39) \quad V = -\frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda^2 a'}{3a^2} + \lambda^3 \left[\frac{1}{3a} - \frac{b}{6a^2} - \frac{2a'^2}{9a^3} + \frac{a''}{12a^4} \right] + \dots \\ + \lambda^{4m-3} \frac{g}{a^{m+1}} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{2m!} + \lambda^{4m-1} \frac{g'}{a^{m+2}} (-1)^m \frac{m[m!]^2}{(2m+1)!} \\ + \lambda^{4m-1} \frac{g a'}{a^{m+2}} (-1)^{m+1} \frac{(m^2+6m+2)[m!]^2}{3(2m+1)!} + \dots,$$

les termes non écrits sont indépendants des fonctions inconnues et de degré supérieur à 5 ou bien dépendent des fonctions inconnues et sont de degré supérieur à $4m - 1$. La somme, coefficient de $\lambda^{4m-1} g a' a^{-m-3}$, a été calculée comme les précédentes en utilisant une fonction B.

Pour calculer V_4 nous utilisons l'expression de $\frac{dU}{dV}$ et nous faisons des remarques, analogues aux précédentes, sur les degrés des termes du développement de V_4^p . Nous obtenons ainsi

$$(40) \quad V_4 = -\frac{\lambda}{2a} - \frac{\lambda^3 a'}{8a^3} + \dots + \lambda^{4m-1} (-1)^{m+1} \frac{g(s)}{a^{m+1}} \frac{[m!]^2}{2(2m)!} \\ + \lambda^{4m-1} \frac{(-1)^m g'}{4a^{m+2}} \left[\frac{(m!)^2}{2m!} - \frac{1}{2^{2m}} \right] \\ + \lambda^{4m-1} \frac{g a'}{a^{m+3}} \left[\frac{(-1)^m}{3 \cdot 2^{2m+2}} + (-1)^{m+1} \frac{(m+4)[m!]^2}{12(2m)!} \right] + \dots,$$

les coefficients de cette expression s'obtiennent à l'aide d'intégrales définies prises entre les limites 0 et $1/2$, comme nous l'avons fait pour calculer F au paragraphe 20. Les termes non écrits correspondent à la condition suffisante ou sont de degré supérieur à $4m - 1$. Donc le rapport cherché admet pour développement

$$r_4 = \frac{1}{2} - \lambda^2 \frac{a'}{24a^2} + \dots + \lambda^{4m-2} \frac{g a'}{a^{m+2}} (-1)^{m+1} \left[\frac{1}{3 \cdot 2^{2m+2}} + \frac{(m!)^2 (4m-1)}{24(2m+1)!} \right] \\ + \lambda^{4m-2} \frac{(-1)^{m+1} g'}{4a^{m+1}} \left[\frac{(m!)^2}{(2m+1)!} - \frac{1}{2^{2m}} \right] + \dots,$$

les termes non écrits sont indépendants de s ou bien sont de degré supérieur à $4m - 2$.

Pour que ce rapport soit indépendant de s , il est seulement nécessaire que g' soit une constante si les premiers termes de C correspondent à une courbe (P) ou bien que g vérifie l'équation différentielle suivante si les premiers termes correspondent à une courbe (P')

$$(41) \quad g s^m \left[\frac{1}{3 \cdot 2^{2m}} + \frac{(4m-1)[m!]^2}{6(2m+1)!} \right] + g' s^{m+1} \left[\frac{1}{2^{2m}} - \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \right] = \text{const.},$$

le coefficient de $g(s)$ dans cette équation ne peut pas être nul, puisqu'il est la somme de deux termes positifs, le coefficient de $g'(s)$ non plus, comme on le vérifie aisément, car il faudrait que $2^{2m}(m!)^2$ soit égal à $(2m+1)!$, or $(2m+1)!$ est égal au produit des nombres impairs $1.3.5.7 \dots (2m+1)$ par $2^m m!$, donc si le coefficient

de $g'(s)$ était nul, $2^m m!$ serait égal à un nombre impair. La relation que nous venons de trouver n'exige donc pas que la fonction inconnue $g(s)$ ait la forme correspondant à une courbe (P) ou (P'); si les premiers termes de C sont indépendants de s , il est seulement nécessaire que g soit de la forme $k_2 s + k_1$ (k_1 et k_2 étant des constantes); si les premiers termes de C correspondent à une courbe (P') on doit avoir $g = k_1 s^{-\mu} + k_2 s^{-\frac{\mu}{\nu}}$ en désignant par μ et ν les coefficients de l'équation (41), notons d'ailleurs que l'on ne peut pas avoir $\mu = m\nu$ car il faudrait que le produit par $(3m - 1)$ des $m + 1$ premiers nombres impairs fût égal à $(10m - 1)2^{m-1}m!$

22. Le terme suivant du rapport r_n dépend de g, g', g'' , mais non pas de la fonction inconnue nouvelle $h(s)$; par suite il nous fournira une seconde équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction g et l'on peut espérer que cette équation ne sera pas une conséquence de (41) et donnera la condition k_2 nul.

L'équation différentielle donnant U, telle qu'elle est écrite sous la forme (37), nous permet d'effectuer le calcul des termes de U dans lesquels la somme des degrés de V et λ est égale à $4m + 2$ et qui contiennent une des fonctions inconnues g ou h ou leurs dérivées. Ces termes sont obtenus en faisant des remarques analogues à celles qui nous ont permis d'établir la formule (11).

Bien que ce ne soit pas la manière la plus rapide d'écrire ces termes de U, nous les donnons en indiquant les termes de l'équation (37) auxquels ils correspondent :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j+2} m! \alpha^{m-1-j} g''(s)}{2(2m-j+2)(2m-j+1)j!(m-j-1)!} \\ & + \sum_0^m \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j+2} (m+1)! \alpha^{m-j}}{(2m-j+2)(2m-j+1)j!(m-j)!} (h + 2ag) \\ & + \sum_0^{m-1} \frac{8\lambda^{2m+j} V^{2m-j+1} m! \alpha^{m-j}}{(2m-j+1)j!(m-j-1)!} \left[\frac{aV}{2m-j+2} + \frac{\lambda}{2m-j} \right] g \\ & + \sum_0^{m-1} \frac{2\lambda^{2m+j+2} V^{2m-j} \alpha^{m-j-1} g}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!} \end{aligned}$$

provenant des termes en λ^{2m+1} de (37):

$$\sum_0^{m-1} \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j+2} m! a^{m-j-1} (4a^2 + 2b) g(s)}{(2m-j+2)(2m-j+1)(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!} \\ + \sum_0^{m-1} \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j+1} m! a^{m-j} 8g(s)}{(2m-j+1)(2m-j-1)j!(m-j-1)!} \left[\frac{2aV}{2m-j+2} + \frac{\lambda}{2m-j} \right]$$

provenant des termes en λ^3 de (37);

$$\sum_0^{m-2} \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j+2} m! a^{m-2-j} g(s)}{(2m-j+2)(2m-j+1)j!(m-j-2)!} \left(\frac{5a^3}{3} + \frac{ab}{6} + \frac{a''}{12} \right) \\ + \sum_0^{m-2} \frac{\lambda^{2m+j+1} V^{2m-j} m! a^{m-j-2}}{(2m-j)j!(m-j-2)!} \left[\frac{(10a^2+b)V}{3(2m-j+1)} + \frac{2a\lambda}{2m-j-1} \right] g(s) \\ + \sum_0^{m-3} \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j+2} m! a^{m-3-j} a'^2 g(s)}{18(2m-j+2)(2m-j+1)j!(m-j-3)!}$$

provenant du terme $\lambda^{2m-2} mgU^{m-1}$ de (37) dans lequel nous avons tenu compte de tous les termes de U dont le degré est inférieur ou égal à 6 [voir formule (13)]; ces termes ne peuvent pas être calculés par la formule générale ci-dessus dans le cas particulier où $m=2$ et il sera nécessaire de faire une étude directe dans cette hypothèse;

$$\sum_0^{m-2} \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j+2} m! a^{m-2-j} a' g'(s)}{3(2m-j+2)(2m-j+1)j!(m-j-2)!}$$

provenant du terme $\lambda^{2m-1} mg'U^{m-1}V$.

Nous pouvons alors calculer le coefficient de λ^{4m+4} dans le développement de V; on trouve en omettant les éléments qui ne contiennent aucune fonction inconnue et correspondent aux premiers termes de C:

$$(42) \quad \frac{h(s)}{a^{m+2}} (-1)^m \frac{[(m+1)!]^2}{(2m+2)!} + \frac{g''(s)}{a^{m+3}} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \frac{m}{4} \\ + \frac{a'g'm(m+7)[m!]^2(-1)^m}{6a^{m+4}(2m+1)!} + \frac{a''g(m^2+17m+6)[m!]^2(-1)^m}{24a^{m+4}(2m+1)!} \\ + \frac{a'^2g}{a^{m+5}} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \frac{m^3+15m^2+80m+24}{36} \\ + \frac{(-1)^m g}{a^{m+1}} \frac{[m!]^2}{(2m+1)!} \frac{m(3m-1)}{2} + \frac{gb}{a^{m+3}} (-1)^{m+1} \frac{m!(m+2)!}{4(2m+1)!}.$$

Le calcul des coefficients des différents produits $a''g, a'^2g, g, g'a', g'', h$ doit être conduit comme celui des sommes rencontrées précédemment en effectuant d'abord, s'il y a lieu, une décomposition en éléments simples pour ramener le dénominateur au produit de deux factorielles par une ou deux fonctions linéaires de j , puis en utilisant les fonctions B.

Du développement de U on déduit celui de U' puis on calcule le coefficient de λ^{4m+1} dans le développement de V₁. Ce coefficient est, en négligeant les termes indépendants des fonctions inconnues,

$$(43) \quad \frac{h}{a^{m+2}} (-1)^m \frac{m! (m+1)!}{4(2m+1)!} + \frac{g''}{a^{m+3}} (-1)^m \left[\frac{1}{2^{2m+1}} - \frac{m! (m+1)!}{8(2m+1)!} \right] \\ + \frac{a'g'}{a^{m+4}} (-1)^m \left[\frac{[m!]^2 (2m^2 + 12m + 7)}{24(2m+1)!} - \frac{(m+7)}{3 \cdot 2^{2m+1}} \right] \\ + \frac{a''g}{a^{m+4}} (-1)^m \left[\frac{[m!]^2 (m^2 + 9m + 5)}{48(2m+1)!} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2m+1}} \right] \\ + \frac{a'^2g}{a^{m+5}} (-1)^m \left[\frac{(m+9)}{9 \cdot 2^{2m+1}} - \frac{[m!]^2 (2m^3 + 24m^2 + 94m + 45)}{144(2m+1)!} \right] \\ + \frac{bg}{a^{m+3}} (-1)^{m+1} \frac{m! (m+2)!}{8(2m+1)!} + \frac{g}{a^{m+1}} (-1)^m \frac{[m!]^2 (3m^2 - m)}{4(2m+1)!}.$$

Le calcul des sommes rencontrées dans l'expression de ce coefficient se fait en les décomposant en d'autres sommes n'ayant au dénominateur qu'un seul facteur de la forme $2m - j + k$ et ces dernières sont évaluées à l'aide d'intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p_1} (1-x)^{p_2} dx$ comme plus haut (§ 20).

Le coefficient de λ^{4m} dans le rapport r_* est alors, à une constante additive près provenant des premiers termes de C supposés conformes à une condition suffisante,

$$\frac{g''}{a^{m+2}} \left[\frac{1}{2^{2m}} - \frac{[m!]^2}{(2m+1)!} \right] \frac{(-1)^{m+1}}{8} + \frac{a'g'}{a^{m+3}} \left[\frac{(m-5)(m!)^2}{(2m+1)!} + \frac{m+5}{2^{2m}} \right] \frac{(-1)^m}{24} \\ + \frac{a''g}{a^{m+3}} \left[\frac{1}{3 \cdot 2^{2m}} + \frac{m[m!]^2}{(2m+1)!} \right] \frac{(-1)^m}{8} \\ + \frac{a'^2g}{a^{m+4}} \left[\frac{(m!)^2 (m^2 + 9m - 1)}{(2m+1)!} + \frac{m+7}{2^{2m+1}} \right] \frac{(-1)^{m+1}}{36} + \dots$$

Donc, si a n'est pas une constante mais correspond à une courbe (P'), nous obtenons une nouvelle équation différentielle à laquelle doit

satisfaire la fonction g , c'est

$$(44) \quad g'' s^{m+2} \left[\frac{1}{2^{2m}} - \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \right] + g' s^{m+1} \left[\frac{(m-5)[m!]^2}{3(2m+1)!} + \frac{m+5}{3 \cdot 2^{2m}} \right] \\ + g s^m \left[\frac{m+1}{9 \cdot 2^{2m}} + \frac{2(m^2-1)[m!]^2}{9(2m+1)!} \right] = \text{const.},$$

or, en dérivant (41), multipliant par s et retranchant de (44), nous obtenons une nouvelle équation du premier ordre

$$(45) \quad g' s^{m+1} \left[\frac{2m-1}{3 \cdot 2^{2m}} - \frac{[m!]^2(4m-3)}{6(2m+1)!} \right] \\ + g s^m \left[\frac{2m-1}{9 \cdot 2^{2m}} + \frac{[m!]^2(8m^2-3m+4)}{18(2m+1)!} \right] = \text{const.}$$

et finalement, en multipliant les deux membres de (41) par $(2m-1)/3$ et retranchant membre à membre de (45), nous obtenons la relation

$$\frac{(m!)^2}{6(2m+1)!} \left\{ g' s^{m+1} + (m+1) g s^m \right\} = \text{const.},$$

qui exige que g soit égal à $k_1 s^{-m} + k_2 s^{-m-1}$, mais g devant aussi vérifier (45), il faut que

$$k_2 s^{-1} \left\{ \frac{5(m!)^2}{6(2m)!} - \frac{3m+2}{3 \cdot 2^{2m}} \right\} = \text{const.},$$

or, $5(m!)^2 2^{2m-1}$ ne peut être égal à $(3m+2)(2m!)$; en effet $2m!$ est égal au produit de $2^m m!$ par des nombres impairs, il faudrait donc que $3m+2$ fût divisible par $2^{m-1+\mathbb{E}(m/2)}$ (donc au moins par 2^m) et $3m+2$ est toujours inférieur à 2^m lorsque $m \geq 4$. Par suite, comme le coefficient de k_2 n'est pas nul, la relation précédente n'est possible que si k_2 est nul, donc si la fonction g correspond, elle aussi, au cas d'une courbe (P').

23. Nous avons remarqué en calculant les termes de U dont le degré est $4m+2$, que la formule générale ne pouvait s'appliquer sans précaution au cas où $m=2$, c'est-à-dire pour trouver la forme de la fonction b figurant dans le développement de C . Il est nécessaire de déterminer cette forme pour conclure dans le cas où a n'est pas une constante; d'autre part on peut prévoir les différences que nous

devrons constater entre les coefficients calculés directement et ceux que l'on obtiendrait en appliquant la formule générale si bien que nous aurons une vérification précieuse de la valeur de nos différents coefficients.

Nous remarquons que les formules générales contiennent des éléments où b (supposé connu) et g (fonction inconnue) interviennent par leur produit, au contraire, dans le cas où $m = 2$ (alors $g = b$), nous aurions des termes correspondant à des carrés et non à des produits et l'on peut prévoir que dans les coefficients de λ^9 de V et V_1 le terme en b^2/a^5 calculé par la formule générale sera double de celui calculé directement. Ensuite dans le calcul des formules générales nous avons rencontré les sommes suivantes :

$$\frac{a'^2 g}{18 a^{m+4}} \sum_0^{m-3} \frac{(-1)^{j+1} m!}{(2m-j+2)(2m-j+1)j!(m-j-3)!}$$

et

$$\frac{a'^2 g}{18 a^{m+4}} \sum_0^{m-3} \frac{(-1)^{j+1} m! \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-j+1}}{(2m-j+1)j!(m-j-3)!},$$

qui n'existent pas pour $m = 2$ et dont les valeurs sont dans le cas général

$$\frac{a'^2 g}{18 a^{m+4}} (-1)^m \frac{m!(m+3)!(m-2)}{(2m+2)!}$$

et

$$\frac{a'^2 g}{18 a^{m+4}} (-1)^m \left\{ \frac{m!(m+3)!}{2(2m+1)!} - \frac{3m^2+7m+6}{2^{2m+1}} \right\};$$

par suite, si l'on fait $m = 2$ dans la formule générale, les termes correspondants disparaissent. La seule différence que nous devons donc trouver en appliquant la formule générale au cas $m = 2$ est celle signalée plus haut pour le coefficient de b^2/a^5 . On a en effet, en représentant, dans les crochets, par des points des termes qui ne contiennent que a et ses dérivées

$$\begin{aligned} V = & -\frac{\lambda}{a} - \frac{\lambda^3 a'}{3a^3} + \lambda^5 \left[-\frac{b}{6a^3} + \frac{a''}{12a^4} - \frac{2a'^2}{9a^5} + \frac{1}{3a} \right] + \lambda^7 \left[\frac{b'}{15a^4} - \frac{a'b}{5a^5} + \dots \right] \\ & + \lambda^9 \left[\frac{c}{20a^4} - \frac{b''}{60a^5} + \frac{a'b'}{10a^6} + \frac{11a''b}{180a^5} + \frac{b}{6a^4} - \frac{b^2}{20a^5} - \frac{7ba'^2}{30a^7} + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$V_1 = -\frac{\lambda}{2a} - \frac{\lambda^3 a'}{8a^4} + \lambda^5 \left[-\frac{b}{12a^4} + \frac{a''}{48a^4} - \frac{a'^2}{16a^5} + \frac{1}{6a} \right] + \lambda^7 \left[\frac{5b'}{192a^4} - \frac{5a'b}{64a^5} + \dots \right] \\ + \lambda^9 \left[\frac{c}{40a^4} - \frac{3b''}{640a^5} + \frac{59a'b'}{1920a^6} - \frac{9a'^2b}{128a^7} + \frac{31a''b}{1920a^8} + \frac{b}{12a^4} - \frac{b^2}{40a^5} + \dots \right] + \dots,$$

donc, conformément à la formule générale

$$r_4 = \frac{1}{2} - \frac{\lambda^2 a'}{24a^2} + \lambda^4 \left[\frac{a''}{48a^4} - \frac{5a'^2}{144a^5} \right] + \lambda^6 \left[\frac{7b'}{960a^4} - \frac{43a'b}{2880a^5} + \dots \right] \\ + \lambda^8 \left[-\frac{7b''}{1920a^4} + \frac{9a'b'}{640a^5} - \frac{157ba'^2}{5760a^6} + \frac{7ba''}{640a^4} + \dots \right] + \dots,$$

par suite, lorsque a' est proportionnel à a^2 ($a = a_1 s^{-1}$) la fonction b doit satisfaire aux deux équations différentielles

$$21b's^3 + 43bs^2 = \text{const.}, \\ 21b''s^4 + 81b's^3 + 31bs^2 = \text{const.},$$

sur lesquelles on peut opérer les mêmes transformations que celles indiquées dans le cas général pour obtenir finalement la condition nécessaire $b = b_1 s^{-2}$. Il en résulte que si le premier terme de C correspond à une courbe (P'), il doit en être de même pour le second et ainsi de suite de proche en proche. Donc :

Si le rapport (MP/MM₁), dans lequel le pied de la flèche divise l'arc, est indépendant de la position de l'arc sur la courbe (et ne dépend que de l'angle à l'origine) ET SI LA COURBE N'EST PAS UN CERCLE GÉODÉSIQUE, la courbe est une courbe (P').

Si ce rapport est une fonction paire de l'angle en M, la courbe est une courbe (P) et le rapport est constant et égal à 1/2. Ce dernier théorème est une conséquence immédiate des calculs du paragraphe 21; en effet pour que r_4 soit une fonction paire de d , il faut et il suffit que ce rapport ne contienne que des puissances de λ dont le degré est un multiple de 4, donc le coefficient de λ^2 doit être nul et a est une constante. D'autre part, la condition que C soit indépendant de v est suffisante puisque r_4 est alors égal à 1/2; donc si C admet le développement (15), le premier coefficient non nul d'une puissance de λ dont le degré ne soit pas multiple de 4, est le coefficient

de λ^{4m-2} et il est égal à $\frac{g'}{a^{m+1}} \frac{(-1)^{m+1}}{4} \left[\frac{(m!)^2}{(2m+1)!} - \frac{1}{2^{2m}} \right]$, puisque a' est nul, donc g' doit être nul.

La restriction qui figure dans le premier des énoncés ci-dessus provient de ce que les équations trouvées ne nous imposent pas la condition $g = \text{const.}$ dans l'hypothèse où a est une constante, car alors les équations (41) et (44) se réduisent à $g' = \text{const.}$ et $g'' = \text{const.}$ Dans ce cas, il ne suffit certainement pas de choisir dans C pour les coefficients des puissances de u , supérieures ou égales à la deuxième, des binômes du premier degré; mais il semble que l'on puisse déterminer de proche en proche les coefficients des puissances de u comme étant des polynômes en v dont le degré croît (d'une unité à chaque coefficient, si b n'est pas une constante). Il ne nous a pas été possible de démontrer que ce calcul est possible ni que la série obtenue converge.

24. Nous avons maintenant à notre disposition les formules nécessaires pour démontrer les propriétés signalées à la fin du paragraphe 20. Pour que la longueur de la flèche soit une fonction paire de l'angle en M , le développement (33) ne doit contenir que des puissances de λ dont le degré est divisible par 4, il est donc nécessaire que a' soit nul; il est suffisant pour cela que C ne dépende pas de v et nous pouvons supposer que C admet le développement (15) en désignant par m le degré en u du premier terme qui n'est pas indépendant de v . Nous obtenons les deux premiers termes de V_1 qui dépendent de g en utilisant le développement (40) où l'on fait $a' = 0$; puis en remplaçant V par (40) dans le produit de (38) par λ^2 nous obtenons

$$(46) \quad F = -\frac{d^2}{4a} + \dots + d^{2m}(\dots) + d^{2m+1} \left[\frac{(-1)^m g'}{4a^{m+2}} \left(\frac{1}{2^{2m}} - \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \right) + k \right] + \dots,$$

or, k est nul puisque la condition vérifiée par les premiers termes de C est suffisante, il est donc nécessaire que g' soit nul, car son coefficient n'est jamais nul (voir § 21). Donc *il faut et il suffit que la courbe soit une courbe (P) pour que F soit une fonction paire de d .*

De même la recherche du développement du quotient de (46) par le développement de $l(s, d)$ nous montre que le rapport $r_3(s, d)$ des

longueurs de la flèche et de l'arc ne peut être une fonction impaire de d que si la courbe est une courbe (P).

25. L'étude du rapport r_1 nous a permis d'obtenir une propriété caractéristique de (P') moyennant une hypothèse sur a ; dans les questions que nous abordons maintenant nous n'obtiendrons même pas ce résultat, car des deux équations différentielles auxquelles doit satisfaire simultanément la fonction inconnue, l'une est conséquence de l'autre. Nous trouverons pourtant des propriétés caractéristiques des courbes (P).

Nous envisageons d'abord l'angle sous lequel on voit l'arc MM_1 de son extrémité M_1 . Cet angle β ne dépend que de d aussi bien sur les courbes (P) que sur les courbes (P'). Nous le déterminons par sa tangente d_1 qui est égale au produit par λ de la valeur de $\frac{dU}{dV}$ lorsqu'on y remplace V par la valeur correspondant à l'extrémité M_1 de l'arc. Nous obtenons donc immédiatement les premiers termes du développement de d_1 ,

$$d_1 = -\lambda^2 + \lambda^3 \frac{a'}{3a^2} + \lambda^6 \left(\frac{2a'^2}{9a^3} - \frac{a''}{6a^3} \right) + \dots,$$

on voit que a' doit être proportionnel à a^2 pour que d_1 ne dépende que de d . Nous supposons alors que les premiers termes de C vérifient la condition suffisante de correspondre, soit à une courbe (P), soit à une courbe (P'), et nous cherchons la forme de la fonction inconnue $g(s)$. Nous remarquons que, dans le cas des courbes (P), nous devons avoir $d_1 + d = 0$, soit en examinant le modèle particulier de courbe (P) constitué par un parallèle de surface de révolution, soit en nous rappelant qu'alors $u(x, -d) = u(-x, d)$; ceci prouve que l'arc MM_1 et l'arc MM_2 , ayant pour origine M et pour valeur algébrique $-l$, sont vus de leur origine M sous deux angles ayant une détermination égale en valeur absolue, or le déplacement du point M_2 n'altère pas la figure quand la longueur de l'arc reste constante et l'égalité précédente nous montre que les angles en M et M_1 doivent, eux aussi, être égaux en valeur absolue (il suffit d'amener M_2 en M).

Dans le développement de d_1 doivent donc disparaître tous les éléments (excepté le terme $-d$) qui ne contiennent aucune dérivée

de fonctions figurant dans le développement de C. En tenant compte des formules établies plus haut, on voit facilement que le premier coefficient de d_1 qui peut dépendre de la fonction inconnue g est celui de λ^{4m-2} et ce coefficient est, à une constante additive près,

$$2 \frac{g}{a^m} \frac{(-1)^{m+1} (m!)^2}{(2m)!} + \frac{g}{a^m} \sum \frac{(-1)^{j+1} m!}{(2m-j-1)j!(m-j-1)!} + \dots;$$

et dans cette expression la fonction g a bien un coefficient nul.

Les termes en λ^{4m} s'obtiennent en évaluant des sommes analogues à celles déjà rencontrées et l'on trouve qu'ils ont pour expression

$$\left[\frac{g'}{a^{m+1}} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} + \frac{g a'}{a^{m+2}} (-1)^m \frac{m!(m+1)!}{(2m+1)!} + k \right] \lambda^{4m},$$

k étant une constante provenant des premiers termes de C. Par suite, si les premiers termes de C correspondent à une courbe (P), on obtient seulement la condition $g' = \text{const.}$, et si les premiers termes de C correspondent à une courbe (P'), on obtient l'équation différentielle

$$(47) \quad \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \{ g' s^{m+1} + (m+1) g s^m \} = \text{const.},$$

exigeant que g soit égal à $k_1 s^{-m} + k_2 s^{-m-1}$.

Si m est différent de 2, les calculs faits pour U nous permettent de trouver le coefficient de λ^{4m+2} dans le développement de d_1 ; on obtient, à une constante additive près,

$$\begin{aligned} & \frac{g''}{a^{m+2}} \frac{(-1)^m (m!)^2}{2(2m+1)!} + \frac{2a' g' m! (m+1)!}{3a^{m+1} (2m+1)!} (-1)^{m+1} \\ & + \frac{(-1)^{m+1} a'' g (m!)^2 (5m+4)}{6a^{m+1} (2m+1)!} + \frac{a'^2 g [m!]^2 (m^2 + 9m + 6)}{6a^{m+1} (2m+1)!} (-1)^m, \end{aligned}$$

et par suite nous devons avoir, si a' n'est pas nul, la nouvelle relation

$$\frac{(m!)^2}{6(2m+1)!} \{ 3g'' s^{m+2} + g' s^{m+1} (4m+4) + g s^m (m^2 - m - 2) \} = \text{const.},$$

mais celle-ci est toujours vérifiée, quelles que soient les constantes k_1 et k_2 , lorsque $g = k_1 s^{-m} + k_2 s^{-m-1}$.

Dans le cas particulier où $m = 2$, nous ne pouvons pas utiliser, du moins sans précaution, la formule générale; ici nous effectuons le

calcul uniquement en vue d'une vérification, car il est facile de prévoir qu'en réalité la formule générale donne le résultat exact. En effet, dans le calcul de cette formule générale figure la somme

$$\sum_0^{m-3} \frac{(-1)^{j+1} m! a'^2 g(s) a^{-m-1}}{18(2m-j+1)j!(m-j-3)!},$$

qui n'existe pas pour $m=2$; son expression, dans le cas général, est $(-1)^m \frac{a'^2 g m! (m+3)!}{18 a^{m+4} (2m+1)!}$, ce qui devient $+\frac{a'^2 b}{9a^6}$ pour $m=2$. D'autre part, nous avons rencontré dans le calcul les sommes

$$\sum_0^{m-1} \frac{(-1)^{j+1} (2m-j-2)m! a'^2 g}{18 a^{m+4} j! (m-j-1)!} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^j m! a'^2 g}{9 a^{m+4} j! (m-j-2)!}$$

qui sont nulles dans le cas général mais ont, pour $m=2$, les valeurs respectives $-\frac{a'^2 b}{9a^6}$ et $+\frac{2a'^2 b}{9a^6}$. Par suite, en appliquant la formule générale au cas particulier $m=2$, nous négligeons deux termes dont la somme est égale au terme ajouté. Le calcul direct des coefficients en question ne présente aucune difficulté et les deux équations auxquelles doit satisfaire b sont bien

$$s^4 h' + 3s^2 b = \text{const.}, \quad s^4 b'' + 4s^3 h' = \text{const.}$$

Dans ce problème, que a soit ou non une constante, nous n'avons pu obtenir des conditions nécessaires et suffisantes, mais du moins nous avons vu que : *les courbes (P) sont caractérisées par le fait que l'angle sous lequel on voit l'arc de son extrémité est une fonction impaire de l'angle sous lequel on le voit de son origine*; et encore que *les courbes (P) sont caractérisées par le fait que l'angle en M et l'angle en M₁ ont une détermination égale en valeur absolue*.

26. Nous étudions une dernière propriété commune aux courbes (P) et (P'), qui a été signalée au paragraphe précédent dans le cas des courbes (P), au sujet de l'angle γ sous lequel on voit de M l'arc MM₂ opposé à MM₁. Les deux angles α et γ ont même valeur absolue sur une courbe (P); dans le cas des courbes (P'), si d_2 désigne la tangente de γ , on a les deux relations $l = s.h(d)$ et $-l = s.h(d_2)$; donc il

existe entre d et d_2 une relation indépendante de s

$$h(d) + h(d_2) = 0.$$

Pour déterminer le développement de d_2 en fonction de d , il suffit de chercher la condition pour que $l(s, d_2)$ soit opposé à $l(s, d)$, donc il suffit d'égaliser à 0 le développement de V , correspondant à l'extrémité de l'arc MM_1 , après avoir remplacé dans ce développement λ^{2p-1} par $d^p + d_2^p$, nous avons donc

$$0 = -\frac{d + d_2}{a} - \frac{(d^2 + d_2^2)a'}{3a^3} + (d + d_2) \left[\frac{1}{3a} - \frac{2a'^2}{9a^3} + \frac{a''}{12a^4} - \frac{b}{6a^5} \right] + \dots,$$

et, comme d_2 doit tendre vers 0 en même temps que d ,

$$\begin{aligned} d_2 = & -d - \frac{2a'}{3a^2}d^2 - \frac{4a'^2}{9a^4}d^3 + d \left[\frac{2b'}{15a^3} - \frac{a'b}{15a^4} + \dots \right] \\ & + d \left[\frac{4a'b'}{15a^5} - \frac{2a'^2b}{15a^6} + \dots \right] + \dots + \gamma_k d^k + \dots \end{aligned}$$

Supposons que C admette le développement (15) dans lequel les premiers termes correspondent à une courbe (P) ou (P') , le premier coefficient γ_k qui peut dépendre de s est celui de d^{2m} , il a pour valeur

$$\gamma_{2m} = \frac{g'}{a^{m+1}} \frac{(-1)^m 2m(m!)^2}{(2m+1)!} + \frac{a'g}{a^{m+2}} (-1)^m \frac{2(m^2 - 2m - 1)(m!)^2}{(2m+1)!} + \dots,$$

le coefficient suivant est

$$\gamma_{2m+1} = \frac{2a'}{3a^2} (m+1) \gamma_{2m} + \dots,$$

de sorte que γ_m et γ_{m+1} n'imposent qu'une même condition pour la fonction g . Les termes non écrits dans les deux égalités précédentes sont des constantes et l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire g , si a n'est pas une constante, est

$$ms^{m+1}g' - (m^2 - 2m - 1)s^m g = \text{const.},$$

si a est une constante g' , doit être une constante.

Sans expliciter les coefficients du développement de V , nous allons chercher une deuxième relation à laquelle doit satisfaire g et qui pourrait ne pas être une conséquence de la précédente. Pour simplifier

l'écriture nous désignons par des lettres, dont la signification est évidente, les différents coefficients de V, de sorte que le développement de d_2 est donné par

$$d + d_2 = A(d^2 + d_2^2) + B(d^3 + d_2^3) + D(d^4 + d_2^4) + \dots + X(d^{2m-1} + d_2^{2m-1}) \\ + Y(d^{2m} + d_2^{2m}) + T(d^{2m+1} + d_2^{2m+1}) + Z(d^{2m+2} + d_2^{2m+2}) + \dots,$$

X et Y dépendent de la fonction inconnue g et sont liés par la relation établie plus haut, nécessaire pour que γ_{2m} et γ_{2m+1} soient des constantes; cette relation s'écrit $Y + (2m-1)AX = \text{const.}$ Les fonctions T et Z dépendent de g et de la nouvelle fonction inconnue h , nous obtiendrons entre T, Z, X, Y deux relations nécessaires pour que γ_{2m+2} et γ_{2m+3} soient des constantes. On obtient, en représentant par des points des constantes dont la valeur ne nous intéresse pas,

$$\gamma_{2m+2} = 2Z + 2AT(2m+1) + 4m(2m+1)A^2Y + 6(2m-1)ABX \\ + 2(2m-1)DX + \frac{4}{3}(2m-1)(4m^2 + 2m + 3)A^3X + \dots,$$

puis, si nous supposons ce coefficient γ_{2m+2} constant, on aura

$$\gamma_{2m+3} = -4A(m+1)Z - 4A^2(m+1)(2m+1)T - \frac{8}{3}m(4m^2 + 6m + 5)A^3Y \\ - 12mABY - 4mDY - \frac{8}{3}(2m-1)(2m^2 + 3m^2 + 7m + 3)A^4X \\ - 12(2m-1)(2m+1)A^2BX - 4(2m-1)(2m+1)ADX + \dots,$$

qui doit être constant. Il est donc nécessaire que X et Y vérifient la relation obtenue en exprimant que $2A(m+1)\gamma_{2m+2} + \gamma_{2m+3}$ est une constante (relation dans laquelle ne figurent ni T ni Z)

$$\frac{8}{3}m(2m^2 + 3m - 2)A^3Y + \frac{8}{3}m(2m-1)(2m^2 + 3m - 2)A^4X \\ - 12mABY - 4mDY - 12m(2m-1)A^2BX - 4m(2m-1)ADX = \text{const.}$$

Ceci peut s'écrire

$$[Y + (2m-1)AX] \left[-4mD - 12mAB + \frac{8}{3}m(2m^2 + 3m - 2) \right] = \text{const.},$$

et n'est donc qu'une conséquence de la première relation trouvée. Ici encore nous ne pouvons obtenir simplement une condition nécessaire et suffisante.

Le calcul du début de ce paragraphe nous montre pourtant que *les courbes (P) sont caractérisées par le fait que les angles, sous lesquels on voit du milieu d'un arc ses deux moitiés, ont une détermination égale en valeur absolue*, ou encore, *si l'angle γ est une fonction impaire de l'angle α , la courbe est une courbe (P)*. Il suffit, en effet, d'étudier les conditions imposées au premier terme de C par la propriété envisagée, puis de déterminer la forme de la fonction g pour que le coefficient de d^{2m} dans d_2 soit nul, sachant que la condition vérifiée par les premiers termes de C est suffisante. Il en résulte que g doit être aussi une constante et la courbe est bien une courbe (P).

CHAPITRE V.

REMARQUES DIVERSES.

27. Les courbes (P) et (P') correspondent donc à une relation de forme très simple existant entre la longueur d'un arc, l'angle sous lequel on le voit de son origine et l'abscisse curviligne de cette origine. Les deux formes trouvées pour cette relation sont deux cas particuliers de la forme plus générale suivante :

$$(48) \quad g(l) = h(d) k(s),$$

g , h , et k étant des fonctions d'une variable, holomorphes au voisinage des valeurs 0, 0, s et telles que $g(0)$ et $h(0)$ sont nuls.

Les courbes (P) correspondent à $k(s)$ constante et les courbes (P') au cas où $g(l)$ est une fonction du premier degré. Nous nous étions proposé de chercher, par la même méthode que précédemment, s'il existe d'autres courbes conduisant à la relation (48).

Nous supposons que la fonction $g(l)$ est développable au voisinage de $l = 0$, soit

$$(49) \quad g(l) = l + g_2 l^2 + g_3 l^3 + g_4 l^4 + \dots,$$

et nous utilisons les développements déjà calculés pour déterminer les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions inconnues et les

premiers coefficients du développement de C. On a

$$k(s) = p \alpha^{-1}(s), \quad \alpha' = A\alpha + B\alpha^2, \quad g_2 = A/3,$$

en désignant par A, B, p des constantes arbitraires. Alors il faut que

$$b(s) = 6g_3 + \frac{A^2}{2} + \frac{AB}{6} \alpha + D\alpha^2,$$

en désignant par D une nouvelle constante. La considération du terme de degré 4 en d nous fournit un certain nombre de relations auxquelles doivent satisfaire les constantes arbitraires introduites ci-dessus. Ce sont :

$$\begin{aligned} g_4 + \frac{A^3}{45} - \frac{23}{15} g_3 A &= 0, \\ -\frac{A^2 B}{60} - \frac{11}{5} g_3 B &= 0, \\ \frac{2}{45} DA + \frac{A}{90} - \frac{B^2 A}{108} &= 0. \end{aligned}$$

Nous supposons que A n'est pas nul — sinon on se trouve dans le cas des courbes (P') — alors, si B n'est pas nul, nous calculons D, g_3 et g_4 ; si B est nul nous pouvons choisir arbitrairement l'une des constantes g_3 ou g_4 . L'étude du terme en d^5 nous donnera l'expression du coefficient $c(v)$ de $C(u, v)$, expression dans laquelle interviendront deux nouvelles constantes arbitraires et le terme en d^6 nous donnera 6 relations auxquelles devront satisfaire les différentes constantes (au nombre de 6), il est donc probable que nous déterminerons ainsi toutes les constantes arbitraires (nous n'avons pu faire le calcul, très compliqué) et, même si nous pouvons poursuivre la détermination des différents coefficients, nous n'obtiendrons pas une classe de courbes aussi générale que les courbes (P) et (P').

Remarquons que les calculs faits nous donnent la conclusion suivante : *il n'existe aucune courbe [autre que les courbes (P) ou (P')] pour laquelle la relation entre l, s, d aurait la forme (48) avec g égal à un polynome du second degré.*

Dans le cas particulier où l'on sait que la surface, sur laquelle est tracée la courbe, a une courbure totale constante (ou si l'on veut, dans l'étude des courbes planes d'un espace non euclidien de courbure

constante K), nous pouvons utiliser le développement (5). Si la relation entre l, s, d a la forme (48), il en résulte que $\alpha(l, s)$ est une fonction du quotient x de $g(l)$ par $h(s)$ et, si $g(l)$ admet le développement (49), il faudrait pouvoir identifier (5) avec un développement de la forme

$$A_1 \frac{l}{k(s)} + \left[\frac{A_2}{k^2} + \frac{A_1 g_2}{k} \right] l^2 + l^3 \left[\frac{A_3}{k^3} + \frac{2g_2 A_2}{k^2} + \frac{A_1 g_3}{k} \right] \\ + l^4 \left[\frac{A_4}{k^4} + \frac{3g_2 A_3}{k^3} + \frac{(g_2 + 2g_3) A_2}{k^2} + \frac{g_4 A_1}{k} \right] + \dots,$$

où $A_1, A_2, \dots$ désignent les coefficients du développement de la fonction de x à laquelle est égal $\alpha(l, s)$. On en conclut facilement que

$$z = \frac{2A_1}{k(s)} \quad \text{et} \quad z' = k_1 z + k_2 z^2,$$

puis, que k_1 et k_2 sont tous deux nuls (cas des courbes P) ou bien que k_1 et K sont nuls (cas des courbes P' qui n'existent pas dans un espace non euclidien de courbure constante non nulle, voir § 9).

28. Les courbes (P) possèdent plusieurs propriétés caractéristiques élémentaires des cercles du plan et il est naturel de rechercher si ces courbes ne possèdent pas également la propriété suivante vraie pour un cercle : la longueur de l'arc MM_1 est proportionnelle à l'angle sous lequel on le voit de M .

Le développement (5) ne nous permet pas de conclure facilement; il faut en effet que tous les coefficients de ce développement soient nuls, à l'exception du premier; cela entraîne des conditions pour la courbure totale de la surface le long de la courbe, mais il est difficile d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes par ce procédé. Nous utilisons encore la représentation de la surface introduite au paragraphe 4, nous avons calculé (28) le développement de la tangente de l'angle α en fonction de l et il est facile d'en déduire le développement de l'angle lui-même, c'est

$$(50) \quad \alpha = -al - \frac{a'}{3} l^2 + \dots + [(1-1)^k \alpha^{k+1} \alpha_k + \dots] l^k + \dots,$$

les termes non écrits sont de degré supérieur ou égal à 3, les points dans le coefficient de l^k représentent les éléments de ce coefficient qui

proviennent des termes du développement de $C(u, v)$ dont le degré en u est inférieur à $(k + 1)/2$.

Pour que l soit proportionnel à α , il faut que tous les coefficients de (50) soient nuls à l'exception du premier. Donc a' est nul et a est une constante.

La condition que C se réduise à $1 + 2au$ (a constant) est suffisante : géométriquement, la courbe est alors tracée sur une surface applicable sur un plan et correspond à un cercle ; analytiquement, l'équation (6) s'intègre facilement, car alors

$$u'' = \frac{4a}{1 + 2au} u'^2 + 2a(1 + 2au),$$

donc

$$u = \frac{\sin[a(v - s) + \alpha] \sin[a(v - s)]}{a \cos[2a(v - s) + \alpha]} \quad \text{d'où} \quad l = -\frac{\alpha}{a}.$$

Alors si l'on suppose que C admet le développement suivant :

$$C = 1 + 2au + g(v)u^m + \dots$$

dans lequel les termes non écrits sont de degré en u supérieur à m , le premier coefficient de (50) qui n'est pas nul est celui de l^{2m-1} et il est égal à $g(s)a^{m-1}(-1)^m \frac{(m!)^2}{2m!}$ (puisque les deux premiers termes de C ne peuvent fournir aucun terme en l^{2m-1}), donc pour que l soit proportionnel à α , il est nécessaire que g soit nul et, par suite :

Si la longueur d'un arc d'une courbe tracée sur une surface est proportionnelle à l'angle sous lequel on voit l'arc de son origine, la surface est développable et la courbe est un cercle géodésique.

29. La propriété caractéristique précédente des cercles ne s'étend donc pas aux courbes (P) dans leur généralité ; par contre, toutes les courbes (P), et elles seules, sont telles que l'enveloppe de la corde soit une courbe parallèle à la courbe (I') lorsque l'angle en M est constant ou lorsque la longueur de l'arc MM_1 est constante.

La surface étant rapportée au système de coordonnées du paragraphe 4, l'équation de la corde qui sous-tend l'arc est

$$u = u[v - s, s, d,]$$

ce qui devient, après le changement de variable et fonction,

$$u = \lambda^2 U[V, s, \lambda], \quad v = s + \lambda V.$$

L'enveloppe de la corde sera une courbe parallèle à (Γ) si cette enveloppe s'obtient en portant sur les géodésiques normales à (Γ) une longueur constante; et par suite cette enveloppe doit avoir une équation de la forme $u = \text{const.}$

Premier cas : l'arc MM_1 est vu de son origine sous un angle constant, donc d et λ sont des constantes; nous aurons le point caractéristique de la corde en cherchant la valeur de v , comprise entre s et $s + L$, telle que $\frac{\partial u}{\partial s}$ soit nul. Donc ce point est déterminé par la valeur $V_2(s, \lambda)$ qui annule

$$-\frac{\partial U}{\partial V} + \lambda \frac{\partial U}{\partial s},$$

et la courbe possédera la propriété étudiée ici, si U prend une valeur indépendante de s lorsqu'on y remplace V par V_2 .

Les premiers termes du développement de V_2 suivant les puissances de λ sont déterminés par la relation

$$0 = -2aV - \lambda - \frac{\lambda^2 V^3}{3} (20a^3 + 2ab) - \lambda^3 V^2 (10a^2 + b) - 4aV\lambda' + \dots,$$

dans laquelle les termes non écrits sont de degré supérieur à 5, donc

$$V_2 = -\frac{\lambda}{2a} + \lambda^3 \left(\frac{1}{6a} - \frac{b}{12a^3} \right) + \dots$$

d'où, en remplaçant V par cette valeur dans (13), nous déduisons l'ordonnée u_2 du point caractéristique

$$u_2 = -\frac{\lambda^4}{4a} - \frac{\lambda^6 a'}{8a} + \frac{\lambda^5}{8 \cdot 4!} \left(\frac{36}{a} - \frac{6b}{a} + \frac{a''}{a^4} \right) + \dots,$$

qui ne peut être indépendante de s que si a et b sont indépendants de s , donc si les premiers termes de C correspondent à une courbe (P).

Comme il suffit que la courbe soit une courbe (P) pour qu'elle possède la propriété étudiée ici, nous pouvons supposer que C admet le développement (15), où m désigne le degré en u du premier terme de C dont le coefficient n'est pas indépendant de v . L'équation donnant V_2 est alors

$$0 = -2aV - \lambda + \dots - \sum \frac{\lambda^{2m-2+j} V^{2m-j-1} a^{m-j-1} m!}{(2m-j-1)j! (m-j-1)!} g(s) + \dots,$$

où les termes non écrits sont indépendants de s et de degré supérieur à 4 ou bien dépendent de s et sont de degré supérieur à $4m - 3$.

Il en résulte que le premier coefficient de V_2 qui peut dépendre de s est celui de λ^{m-3} et V_2 ne diffère de (34) que par des termes non écrits.

Le premier terme de u_2 qui peut dépendre de s est de degré $4m$ et son coefficient nous est connu, car nous avons effectué les calculs au paragraphe 20; on voit que u_2 ne peut être indépendant de s que si g est une constante; donc finalement, il faut que la courbe soit une courbe (P) et nous trouvons pour u_2 la valeur déjà calculée de la flèche F.

Deuxième cas : *l'arc variable* MM_1 *est tel que sa longueur* l *soit constante*. Nous devons donc chercher l'enveloppe de la courbe définie par $u = u[(c - s), s, d]$ sachant que d est lié au paramètre s par la condition $u(l, s, d) = 0$; le point caractéristique s'obtient en joignant, à l'équation de la corde, l'équation

$$-\frac{\partial u}{\partial c} = 0, \quad \text{car} \quad \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial s} = 0.$$

Ce point caractéristique correspond donc à la valeur V_1 de V qui annule $\frac{\partial U}{\partial V}$. Comme nous devons ensuite remplacer V par V_1 dans $\lambda^2 U$ pour obtenir l'ordonnée u_3 du point cherché, nous pouvons utiliser les calculs faits plus haut pour déterminer la flèche, mais nous devons ici revenir à la variable l en utilisant le développement (28). Nous trouvons ainsi que les premiers termes de u_3 sont $-\frac{al^2}{4} - \frac{a'l^3}{8} - \dots$, donc ne peuvent être indépendants de s que si a est une constante.

Puis supposant que C admet le développement (15), les développements (35) et (28) nous montrent que le premier terme de u_3 qui peut dépendre de s est de degré $2m$ (en l) et a pour coefficient, à une constante additive près, $g(s) \frac{(-1)^m a^{m-1}}{2} \left[\frac{[m!]^2}{2m!} - \frac{1}{2^{2m}} \right]$, ce qui ne peut être indépendant de s que si la fonction g est une constante, car $2^m(m!)$ ne peut être un nombre impair. Donc, *si l'enveloppe de la corde qui sous-tend un arc de longueur constante sur une courbe tracée sur une surface est toujours une courbe parallèle, sur la surface, à la courbe donnée, cette courbe est une courbe (P)*.

DEUXIÈME PARTIE.

SURFACES.

CHAPITRE I.

DEFINITION ET RECHERCHE DES POINTS (R) ET (R').

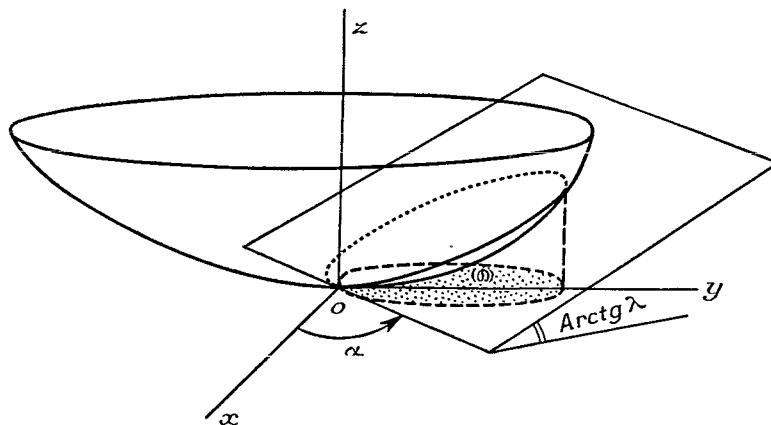
1. Nous nous proposons dans cette Partie d'établir relativement aux surfaces analytiques des résultats analogues aux précédents en considérant la figure formée par un plan sécant et la calotte découpée par lui dans la surface. Nous supposons que la surface est convexe de sorte que les dimensions de la figure tendront vers zéro en même temps que l'angle du plan sécant avec le plan tangent à la surface en un point de la section; un point de l'intersection du plan et de la surface doit jouer un rôle particulier pour la détermination de l'angle du plan sécant et d'un plan tangent et comme nous désirons étudier des fonctions de deux variables seulement, il est naturel de considérer les figures correspondant aux plans sécants qui pivotent autour d'un point régulier fixe, O, de la surface; c'est donc une propriété de la surface en ce point que nous mettrons en évidence. La figure formée par le plan sécant dépend effectivement de deux paramètres : l'un, qui fixe sa position, est l'angle α que la trace du plan sécant fait avec une direction fixe du plan tangent en O et l'autre, qui détermine

les dimensions de la figure, est l'angle du plan sécant et du plan tangent en O (cet angle sera déterminé par sa tangente que nous désignons par λ). Nous utiliserons aussi ultérieurement un autre paramètre arbitraire à la place de cet angle des plans sécant et tangent.

En général la figure dépend des deux paramètres λ et α et nous allons chercher en premier lieu s'il existe des surfaces (ou plus exactement des points sur une surface) telles que certains éléments de la figure ne dépendent que de λ et non de α . L'élément le plus intéressant (à cause de ses propriétés affines) est le volume compris entre le plan sécant et la calotte; nous dirons que la surface possède en O la propriété (R), ou que le point O est un point (R), si ce volume ne dépend que de λ .

2. Nous rapportons la surface aux axes suivants ayant pour origine le point O : la normale Oz à la surface et les deux directions princi-

Fig 4.



pales Ox et Oy en O. Puisque le point O est, par hypothèse, un point régulier convexe, le développement de la cote z d'un point de la surface en fonction de x et y peut s'écrire

$$(1) \quad z = a(\sin^2 \varphi x^2 + \cos^2 \varphi y^2) + \dots,$$

en désignant par φ l'angle, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, tel que $\cot^2 \varphi = \frac{R_1}{R_2}$ R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux en O.

Nous avons défini le plan sécant par l'angle α que fait sa trace sur le plan xOy avec l'axe Ox et par la tangente λ de l'angle qu'il fait avec le plan xOy , son équation est donc

$$(2) \quad z_1 = \lambda(y \cos \alpha - x \sin \alpha).$$

Dans tout ce qui suit les plans sécants seront choisis de telle façon que λ soit arbitraire à l'intérieur d'un intervalle non nul comprenant zéro.

Le volume cherché est égal à l'intégrale double $\iint (z_1 - z) dx dy$ étendue à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$ correspondant à l'intersection de la surface et du plan. Pour l'évaluer nous effectuons le changement de variables

$$(\Lambda) \quad x = \rho \frac{\cos u}{\sqrt{2} \sin \varphi}, \quad y = \rho \frac{\sin u}{\sqrt{2} \cos \varphi}.$$

La section de la surface par le plan sécant est alors représentée par la relation

$$(3) \quad \lambda \frac{\sin u \cos \alpha \sin \varphi - \cos u \sin \alpha \cos \varphi}{\sqrt{2} \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{a}{2} \rho + \rho^2(\dots).$$

Quel que soit u , ρ est infiniment petit avec λ puisque la surface est convexe et nous pouvons calculer le développement en série de ρ en fonction de λ (les coefficients de ce développement sont des fonctions de u). Le calcul du premier terme est immédiat, on obtient

$$(4) \quad \rho = \lambda \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{\sin u \cos \alpha \sin \varphi - \cos u \sin \alpha \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} + \lambda^2(\dots),$$

les limites du domaine auquel on doit étendre l'intégrale double après le changement de variables sont : pour ρ , zéro, et la valeur définie par (4); pour u , les deux valeurs u_0 et $u_0 + \pi$ qui annulent le coefficient de λ dans (4).

L'intégrale admet un développement limité suivant les puissances de λ et on l'obtient en remplaçant ρ par le développement (4) dans

$$\int_{u_0}^{u_0+\pi} \frac{du}{2 \sin \varphi \cos \varphi} \left[\frac{\lambda}{3\sqrt{2}} \rho^3 \frac{\sin u \cos \alpha \sin \varphi - \cos u \sin \alpha \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{a}{8} \rho^4 + \dots \right],$$

le premier terme du développement du volume V cherché est donc

$$\frac{\lambda^4}{12 a^3 \sin^5 \varphi \cos^5 \varphi} \int_{u_0}^{u_0 + \pi} (\sin u \cos \alpha \sin \varphi - \cos u \sin \alpha \cos \varphi)^4 du.$$

Or, d'après la valeur de u_0 nous avons

$$(5) \quad [\sin u \cos \alpha \sin \varphi - \cos u \sin \alpha \cos \varphi]^2 = \sin^2(u - u_0) [\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi]$$

et par suite l'intégrale donnant le premier terme du développement de V est immédiatement calculée. On trouve

$$(6) \quad V = \lambda^4 \frac{\pi [\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi]^2}{32 a^3 \sin^5 \varphi \cos^5 \varphi} + \dots,$$

que l'on peut écrire également

$$V = \lambda^4 \frac{\pi [1 - \cos 2 \varphi \cos 2 \alpha]^2}{128 a^3 \sin^5 \varphi \cos^5 \varphi} + \dots$$

3. Pour que le point O soit un point (R) de la surface, il est nécessaire que tous les coefficients du développement de V suivant les puissances de λ soient indépendants de α . Donc nécessairement $1 - \cos 2 \varphi \cos 2 \alpha$ est indépendant de α ce qui exige $\varphi = \frac{\pi}{4}$, et le point O doit être un *ombilic*.

Nous voyons immédiatement que *les sphères sont les seules surfaces analytiques dont tous les points sont des points (R)* puisqu'il faut que tous les points soient des ombilics.

4. Nous chercherons maintenant s'il peut exister sur une surface (autre qu'une sphère) un point O, au moins, possédant la propriété (R); remarquons qu'un point régulier d'une surface de révolution est un tel point (R) s'il est situé sur l'axe de la surface, puisque les rotations qui transforment la surface en elle-même font coïncider les figures correspondant aux différentes valeurs de α . Autrement dit, il suffit pour qu'un point soit un point (R) que la surface soit de révolution autour de la normale en ce point, si bien que le développement (1) ne contient que des puissances (entières) de $x^2 + y^2$. Nous allons démontrer que cette condition suffisante est aussi nécessaire.

Soit en effet

$$(7) \quad z = \frac{a}{2}(x^2 + y^2) + \dots + P(x, y) + \dots,$$

le développement de z où l'on désigne par $P(x, y)$ le polynôme homogène de degré n contenant tous les termes figurant dans le développement de z et ayant ce degré. Nous supposons que tous les polynômes analogues et de degré inférieur à n sont égaux au produit d'une constante par une puissance de $x^2 + y^2$ et nous voulons déterminer la forme nécessaire du polynôme P . Pour cela nous devons calculer dans le développement de V suivant les puissances de λ , le premier terme dont le coefficient peut dépendre de P .

La relation (3) nous montre que le degré, en λ , du premier terme du développement de ρ dont le coefficient dépend de P est égal à $n - 1$ et nous obtenons sans difficulté, pour représenter l'intersection de la surface et du plan, la relation

$$(8) \quad \rho = \frac{\lambda 2 \sin(u - \alpha)}{a} + \sum_{j=2}^{j < \frac{n}{2}} \lambda^{2j-1} A_j \sin^{2j-1}(u - \alpha) .$$

$$- \frac{\lambda^n}{a^n} \sin^{n-1}(u - \alpha) . P(\cos u, \sin u) + \dots,$$

dans laquelle les termes non écrits sont de degré, en λ , supérieur à $n - 1$ et les grandes lettres $A, B, \dots$ désignent ici, comme plus loin, des constantes dont la valeur n'intervient pas. Nous remarquons que dans le développement de ρ^k la première puissance de λ dont le coefficient fait intervenir P est de degré $n - 2 + k$ et son coefficient est

$$- k \left(\frac{2}{a} \right)^{n-1+k} \sin^{n-2+k}(u - \alpha) P(\cos u, \sin u) + B \sin^{n-2+k}(u - \alpha).$$

L'intégrale double donnant le volume est devenue, après le changement de variables,

$$V = \iint_{\omega} \left[\lambda \rho^3 \sin(u - \alpha) - \frac{a \rho^3}{2} - \dots - \rho^{n+1} P(\cos u, \sin u) - \dots \right] d\rho du,$$

donc on a

$$V = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[\lambda \frac{\rho^3}{3} \sin(u - \alpha) - \frac{a \rho^4}{8} - \dots - \rho^{n+2} \frac{P(\cos u, \sin u)}{n+2} - \dots \right] du,$$

où l'on doit remplacer φ par l'expression (8); les termes non écrits dans la dernière intégrale ont un degré, en φ , supérieur à $n+2$ s'ils ont pour coefficient une fonction de u dont la forme ne nous est pas connue, ou bien sont d'un degré pair supérieur ou égal à 6 s'ils ont pour coefficient une constante.

Après le remplacement de φ par (8), l'élément différentiel de l'intégrale donnant V a pour développement par rapport à λ

$$\lambda^2 \frac{\sin^2(u-\alpha)}{3a^2} + \sum B_i \lambda^{2i} \sin^{2i}(u-\alpha) \\ + \lambda^{n+2} \left[C \sin^{n+2}(u-\alpha) - \left(\frac{2}{a}\right)^{n+2} \frac{\sin^{n+2}(u-\alpha) \cdot P(\cos u, \sin u)}{n+2} \right] + \dots$$

les termes non écrits sont de degré supérieur à $n+2$. Il en résulte que le premier terme du développement de V dont le coefficient peut dépendre de α est de degré $n+2$ en λ , puisque les premiers termes de (7) vérifient une condition suffisante pour que le volume soit indépendant de α . Le coefficient de ce terme est, à une constante additive près provenant des premiers termes de (7),

$$-\left(\frac{2}{a}\right)^{n+2} \frac{1}{n+2} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin^{n+2}(u-\alpha) \cdot P(\cos u, \sin u) du.$$

Pour que le point O soit un point (R) il faut donc que l'intégrale

$$(9) \quad \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin^{n+2}(u-\alpha) \cdot P(\cos u, \sin u) du$$

soit indépendante de α . Rappelons que P est un polynome homogène de degré n .

5. La méthode qui semble ici la plus directe pour déterminer le polynome P serait d'expliciter ce polynome et d'évaluer l'intégrale (9), nous pourrions ainsi obtenir des équations linéaires auxquelles doivent satisfaire les coefficients de P ; mais ce procédé ne permet de conclure qu'après avoir démontré que les déterminants des systèmes obtenus ne sont pas nuls, or ces déterminants ont pour éléments des

quotients de coefficients du binome et il ne nous a pas été possible d'en faire l'étude directe ⁽¹⁾.

Pour trouver la forme que doit avoir le polynome P nous cherchons les conditions imposées par l'intégrale (9) au polynome de Fourier identique à P(cos u, sin u). On peut en effet écrire

$$(10) \quad f(u) \equiv P(\cos u, \sin u) = a_0 + a_1 \cos u + b_1 \sin u + \dots + a_n \cos nu + b_n \sin nu$$

et remarquer que tous les coefficients, dont l'indice est de la parité différente de celle de n, sont nuls. En effet, si n est impair, le remplacement de u par u + π donne à P(cos u, sin u) la valeur opposée, cela exige que

$$a_0 + a_2 \cos 2u + b_2 \sin 2u + \dots + a_{n-1} \cos(n-1)u + b_{n-1} \sin(n-1)u$$

soit identiquement nul, ce qui n'est possible qu'en donnant la valeur 0 à tous les coefficients d'indice pair de (10). De même, si n est pair, la fonction f(u) admet la période π et nous en concluons que tous les coefficients d'indice impair dans (10) doivent être nuls.

En effectuant le changement de variable u = x + α, nous ramenons le problème au suivant : *déterminer une fonction, ayant la forme (10) telle que l'intégrale*

$$(11) \quad \int_0^\pi \sin^{n+2} x \cdot f(x + \alpha) dx$$

soit indépendante de α.

Puisque cette intégrale (11) doit être indépendante de α, ses dérivées successives par rapport à α sont nulles, or, comme nous pouvons dériver sous le signe somme, nous voyons, d'après la dérivée première, que

$$\int_0^\pi \sin^{n+1} x \cos x f(x + \alpha) dx = 0,$$

et, d'après la dérivée seconde,

$$(n+2) \int_0^\pi \sin^{n+2} x f(x + \alpha) dx = (n+1) \int_0^\pi \sin^n x f(x + \alpha) dx.$$

⁽¹⁾ Nous indiquons plus loin (§ 16) les conclusions que l'on peut obtenir en comparant ce procédé à celui que nous avons utilisé pour obtenir effectivement la forme de P.

donc, si l'intégrale (11) est indépendante de α il en est de même de l'intégrale $\int_0^\pi \sin^n x f(x + \alpha) dx$ et, par suite, de toutes les intégrales

$$(12) \quad \int_0^\pi \sin^{n-2j} x f(x + \alpha) dx,$$

dans lesquelles j est un entier inférieur ou égal à la partie entière de $n/2$.

Nous donnons ci-dessous les valeurs d'un certain nombre d'intégrales définies que l'on obtient par des calculs élémentaires (soit par intégration par parties, soit en tenant compte de l'expression de $\sin^k x$ en fonction des sinus et cosinus de multiples de x) :

$$\int_0^\pi \sin^k x \sin m(x + \alpha) dx = 0, \quad \int_0^\pi \sin^k x \cos m(x + \alpha) dx = 0,$$

si m est supérieur à k et de même parité que k ;

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^k x \cos k(x + \alpha) dx &= (-1)^{j+1} 2^{-k} \pi \sin k\alpha, \\ \int_0^\pi \sin^k x \sin k(x + \alpha) dx &= (-1)^j 2^{-k} \pi \cos k\alpha, \end{aligned}$$

si k est impair et égal à $2j + 1$;

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^k x \cos k(x + \alpha) dx &= (-1)^j 2^{-k} \pi \cos k\alpha, \\ \int_0^\pi \sin^k x \sin k(x + \alpha) dx &= (-1)^j 2^{-k} \pi \sin k\alpha, \end{aligned}$$

si k est pair et égal à $2j$.

Donnons alors à j dans l'intégrale (12) les valeurs décroissantes successives depuis $E\left(\frac{n}{2}\right)$. Si n est pair, la première condition ainsi obtenue est que $\int_0^\pi f(x + \alpha) dx$ soit indépendant de α ; elle est toujours vérifiée puisque cette intégrale a pour valeur $a_0 \pi$, tous les coefficients d'indice impair étant nuls dans $f(u)$. La deuxième intégrale à considérer est $\int_0^\pi \sin^2 x f(x + \alpha) dx$ dont nous obtenons la valeur en utilisant le tableau précédent, c'est à une constante addi-

tive près provenant de a_0 : $-a_2 \frac{\pi}{4} \cos 2\alpha - b_2 \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha$; ce qui ne peut être indépendant de α qu'à la condition que a_2 et b_2 soient tous deux nuls.

Supposons alors démontré que les coefficients de f dont l'indice est inférieur à $2p$ (a_0 excepté) doivent être nuls pour que les intégrales (12) correspondant aux valeurs de j supérieures à $\frac{n}{2} - p$ soient indépendantes de α . L'intégrale correspondant à $j = \frac{n}{2} - p$ est

$\int_0^\pi \sin^{2p} x f(x + \alpha) dx$ dont nous pouvons obtenir la valeur à l'aide du tableau précédent, puisqu'il ne figure plus dans f aucun terme dont l'indice soit inférieur à l'exposant de $\sin x$ dans cette intégrale (a_0 excepté); cette intégrale ne peut être indépendante de α si $(-1)^p 2^{-2p} \pi \{a_{2p} \cos 2p\alpha + b_{2p} \sin 2p\alpha\}$ l'est, donc il faut que a_{2p} et b_{2p} soient nuls.

Par conséquent, nous démontrons, en donnant à j les valeurs décroissantes successives jusqu'à la valeur 0, que tous les coefficients de f (a_0 excepté) sont nuls. Cette condition nécessaire est manifestement suffisante pour que (11) soit indépendant de α .

Si nous supposons n impair le même raisonnement peut être répété, mais ici f ne contient que des termes d'indice impair et j varie de $(n-1)/2$ à zéro, la première intégrale considérée a donc pour valeur $-\frac{\pi}{2} a_1 \sin \alpha + \frac{\pi}{2} b_1 \cos \alpha$, ce qui ne peut pas être indépendant de α si a_1 et b_1 ne sont pas nuls; on démontre de proche en proche comme ci-dessus que tous les coefficients de f doivent être nuls, si bien que dans ce cas la fonction f est identiquement nulle.

Donc le polynôme $P(\cos u, \sin u)$, identique à la fonction $f(u)$, doit se réduire à la constante a_0 si n est pair ou être identiquement nul si n est impair; par suite, si n est impair, l'ensemble des termes de degré n dans le développement de z doit être identiquement nul et si n est pair nous avons $P(\cos u, \sin u) \equiv a_0 [\cos^2 u + \sin^2 u]^{\frac{n}{2}}$ et $P(x, y)$ est identique à $a_0 (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$.

Il en résulte que la fonction z est seulement fonction de $x^2 + y^2$, donc la surface est de révolution autour de Oz et nous pouvons énoncer

le théorème suivant : *s'il existe, sur une surface analytique, un point régulier convexe O tel que le volume compris entre un plan sécant passant par O et la calotte découpée par lui ne dépende que de l'angle du plan sécant et du plan tangent en O, la surface est de révolution autour de la normale en O.* Nous supposons, ainsi qu'il ressort de la démonstration, que la propriété relative au volume est vraie quel que soit l'angle du plan sécant et du plan tangent lorsque cet angle est choisi à l'intérieur d'un certain intervalle comprenant zéro.

6. Ainsi donc lorsqu'une surface possède un point (R) il existe un groupe continu de transformations transformant la surface en elle-même : plus précisément ces transformations sont des déplacements qui permettent de faire coïncider les figures correspondant à la même valeur de λ et à deux valeurs différentes de α ; il en résulte que tous les éléments que nous pourrions étudier sont indépendants de α lorsque le point O est un point (R). Avant de rechercher si l'on peut caractériser les surfaces de révolution par des propriétés correspondant à d'autres éléments de la figure, nous nous proposons de déterminer des surfaces sur lesquelles existe un point régulier tel que la relation entre le volume V, l'angle α et le paramètre λ contienne effectivement α et ait une forme particulière. Pour choisir cette forme nous nous laissons guider par des remarques géométriques.

Soit (S) une surface ayant en O un point régulier où la normale est Oz, si la surface (S) est transformée en elle-même par un groupe continu d'affinités conservant le volume et maintenant invariants tous les points de Oz, nous pourrions faire correspondre géométriquement à la figure définie par les valeurs λ et α des paramètres, une autre figure définie par λ' et α' ayant même volume que la première, α' pourra prendre toutes les valeurs possibles et il existera une relation entre λ , α , λ' et α' .

Un groupe d'affinités maintenant invariants les points de Oz et conservant le volume est représenté par

$$(13) \quad \begin{cases} x = x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \\ y = -x_1 \cos \tau \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + y_1 \sin \tau, \\ z = z_1, \end{cases}$$

où φ est un paramètre arbitraire fixe et τ est la variable définissant les différentes transformations du groupe. Ces transformations (13) transforment en elles-mêmes des surfaces qui sont découpées par les plans perpendiculaires à Oz suivant des ellipses semblables dont les centres sont sur Oz , et dont les axes sont dans les plans xOz et yOz , le rapport de ces axes étant $\tan \varphi$.

Pour simplifier les énoncés nous utiliserons l'expression *surface de révolution affine* pour désigner de telles surfaces, et nous préciserons l'axe Oz invariant par les transformations du groupe ainsi que la direction des plans des différentes ellipses. Cette notation se justifie, car les surfaces en question sont des transformées de surfaces de révolution par une certaine transformation affine et surtout parce qu'on peut les engendrer en soumettant une courbe quelconque (non située dans un plan parallèle à ceux des ellipses) aux transformations du groupe. Une telle surface a une équation de la forme

$$z = F(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi)$$

et, comme le point O est régulier, le développement de z ne contient que des puissances entières de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$.

Le plan sécant défini par les valeurs λ et α des paramètres est le transformé, d'un certain plan contenant Ox , par la transformation (13) que définit la relation

$$(14) \quad -\sin \tau \sin \alpha + \cos \tau \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha = 0,$$

l'équation du plan correspondant passant par Ox est

$$(15) \quad z = y \left\{ \lambda \left(\cos \alpha \sin \tau + \cos \tau \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \sin \alpha \right) \right\}.$$

Or le volume compris entre la surface et le plan sécant n'est pas altéré par cette transformation (13), donc le volume correspondant à la figure définie par λ et α ne dépend que du coefficient de y dans l'équation (15). En tenant compte de (14) ce coefficient peut s'exprimer très simplement en fonction de λ et de α , c'est

$$\frac{\lambda [\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}}{\sin \varphi},$$

donc : sur les surfaces de révolution affine autour de Oz parallèlement au plan xOy , le volume V ne dépend que du produit de la tangente de l'angle des plans sécant et tangent par une fonction de l'angle α .

7. Nous dirons que le point O régulier convexe d'une surface est un point (R') si le volume V ne dépend que du produit de λ par une fonction $g(\alpha)$; en un tel point la surface « possédera » la propriété (R') . L'étude géométrique du paragraphe 6 montre que les surfaces de révolution affine autour de la normale en O parallèlement au plan tangent possèdent la propriété (R') ; réciproquement, nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface possède la propriété (R') .

La méthode que nous utiliserons pour chercher les points (R') est la même que celle exposée plus haut en détail. Les hypothèses faites sur le point O nous permettent en effet d'utiliser les résultats du paragraphe 2; le volume V devant être une fonction de $\lambda g(\alpha)$, il faut que l'on puisse identifier son développement avec un développement de la forme $\Sigma A_j \lambda^j g^j(\alpha)$ et la formule (6) nous donne immédiatement la valeur de la fonction inconnue g qui doit être

$$[\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha]^{\frac{1}{2}}$$

(on peut, bien entendu, multiplier g par une constante arbitraire sans rien changer au résultat).

Nous savons que si z est seulement fonction de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$, le point O possède la propriété (R') , ce qu'il est d'ailleurs très facile de montrer analytiquement. En effet nous avons alors

$$z = \bar{F}(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi)$$

et l'intégrale donnant le volume devient, après le changement de variables (A) ,

$$V = \iint_{\omega} \left[\frac{\lambda \rho^2 (\sin u \cos \alpha \sin \varphi - \cos u \sin \alpha \cos \varphi)}{\sqrt{2} \sin \varphi \cos \varphi} - \rho F(\rho^2) \right] \frac{d\rho du}{2 \sin \varphi \cos \varphi},$$

les limites étant, pour u , u_0 et $u_0 + \pi$ et pour ρ , 0 et la fonction $\rho_1(u)$ définie par

$$\frac{\lambda (\sin u \cos \alpha \sin \varphi - \cos u \sin \alpha \cos \varphi)}{\sqrt{2} \cos \varphi \sin \varphi} \equiv \frac{1}{\rho} F(\rho^2),$$

donc cette fonction φ_1 ne dépend que de la valeur de

$$\lambda(\sin u \cos \alpha \sin \varphi - \cos u \sin \alpha \cos \varphi),$$

et, d'après (5), φ_1 est une fonction de

$$\lambda[\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}} \sin(u - u_0),$$

d'où l'on déduit que le volume V est égal à une intégrale de la forme

$$\int_{u_0}^{u_0 + \pi} G \left[\lambda(\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \sin(u - u_0) \right] du,$$

dans laquelle le changement de variable $u - u_0 = t$ conduit à une expression qui ne dépend que de $\lambda(\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$.

Supposons alors démontré que l'ensemble des termes du développement (1), dont le degré est inférieur à n , doit se réduire au développement d'un polynôme en $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$, nous pouvons écrire

$$(16) \quad z = a(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi) + \dots + P(x \sin \varphi, y \cos \varphi) + \dots,$$

où P représente l'ensemble des termes de degré n . Les termes non écrits de degré inférieur à n ne donneront dans V que des quantités ayant la forme voulue; le premier terme de V qui pourra empêcher l'identification avec un développement $\Sigma A_j \lambda^j g^j(\alpha)$ doit contenir P .

Après le changement de variables (A), l'intersection de la surface (16) et du plan sécant est définie par l'expression de φ en fonction de u ; pour simplifier l'écriture nous posons

$$S = \sin u \cos \alpha \sin \varphi - \cos u \sin \alpha \cos \varphi,$$

alors on a, pour représenter cette intersection,

$$(17) \quad \rho = \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{\lambda S}{\sin \varphi \cos \varphi} + \dots - \sqrt{2} \lambda^{n-1} \frac{P(\cos u, \sin u) S^{n-1}}{a^n \sin^{n-1} \varphi \cos^{n-1} \varphi} + \dots,$$

les termes non écrits sont de degré, en λ , supérieur à $n - 1$ ou bien sont tels que les coefficients de $\lambda^p S^p$ sont indépendants de u et p supérieur ou égal à 2.

Le volume V est donné par l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_0 + \pi} \frac{du}{2 \sin \varphi \cos \varphi} \left[\frac{\lambda \rho^3 S}{3 \sqrt{2} \sin \varphi \cos \varphi} - \frac{a \rho^3}{8} - \dots - \frac{\rho^{n+2} P(\cos u, \sin u)}{(n+2) \sqrt{2}^n} - \dots \right],$$

où φ doit être remplacé par la valeur (17) et u_0 par la valeur indiquée au paragraphe 2.

On démontre comme plus haut (p. 63) que le premier terme du développement de V qui n'est pas le produit d'une constante par une puissance de $\lambda [\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}$ est de degré $n+2$ (en λ) et a pour expression

$$\lambda^{n+2} \left\{ B (\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)^{\frac{n+2}{2}} - \frac{1}{(n+2) \alpha^{n+2} \sin \varphi \cos \varphi} \int_{u_0}^{u_0+\pi} \frac{S^{n+2} P(\cos u, \sin u)}{\sin^{n+2} \varphi \cos^{n+2} \varphi} du \right\},$$

où B désigne une certaine constante, nulle si n est impair.

En tenant compte de (5), l'intégrale figurant dans l'expression ci-dessus se transforme et le premier terme de V qui peut empêcher l'identification souhaitée est égal finalement à

$$- \lambda^{n+2} \frac{[\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi]^{\frac{n+2}{2}}}{(n+2) \alpha^{n+2} \sin^{n+2} \varphi \cos^{n+2} \varphi} \times \left[C + \int_{u_0}^{u_0+\pi} \sin^{n+2}(u - u_0) P(\cos u, \sin u) du \right].$$

Il faut donc déterminer la fonction $P(\cos u, \sin u)$ par la condition que l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_0+\pi} \sin^{n+2}(u - u_0) P(\cos u, \sin u) du,$$

soit indépendante de α . Mais on a

$$\tan \alpha = \tan u_0 \tan \varphi, \quad \text{donc} \quad u_0 = \arctan \frac{\tan \alpha}{\tan \varphi}$$

et l'intégrale ne pourra être indépendante de α que si elle est indépendante de u_0 et pour cela il faut (§ 5) que le polynôme $P(\cos u, \sin u)$ soit identiquement nul si n est impair et identique à $a_0 (\cos^2 u + \sin^2 u)^{\frac{n}{2}}$ si n est pair.

Il est donc nécessaire que tous les termes de (16) soient de degré pair et représentent le développement d'une somme de puissances

de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$. Donc : *une surface est de révolution affine autour de la normale en un point régulier O, parallèlement au plan tangent en ce point, si le volume compris entre un plan sécant passant par O et la calotte qu'il découpe ne dépend que du produit de la tangente de l'angle des plans sécant et tangent en O par une fonction du paramètre qui fixe la position du plan sécant autour de la normale en O.*

Par exemple les six sommets d'un ellipsoïde sont des points (R'); si l'ellipsoïde est de révolution, les deux sommets situés sur l'axe sont des points (R) et tous les points du parallèle médian sont des points (R').

CHAPITRE II.

AUTRES PROPRIÉTÉS DES POINTS (R) ET (R'). POINTS (R'').

8. Nous avons déjà remarqué que tous les éléments attachés à la figure qui nous occupe sont indépendants de α lorsque le point O est un point (R), puisque le groupe des transformations qui font coïncider une figure particulière avec une autre, correspondant à la même valeur de λ , est un groupe de déplacements. Par contre, le groupe des transformations qui transforment en elles-mêmes les surfaces ayant un point (R') ne conserve invariants que certains des éléments que nous pouvons considérer et ces éléments seuls nous conduiront à des propriétés intéressantes simples pour les points (R').

En premier lieu l'aire de la calotte n'est pas conservée par les transformations affines (13) et par suite nous n'étudierons à son sujet que le problème suivant : existe-t-il des points tels que l'aire de la calotte ne dépende que de α et non pas de λ ? Il suffit qu'un point soit un point (R) pour qu'il jouisse de la propriété envisagée ici.

La valeur de cette aire est égale à l'intégrale

$$\iint_{\omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

étendue au domaine $\mathcal{O}$ défini au paragraphe 2. Nous effectuons le changement de variables (A) et nous cherchons un développement de

l'aire en fonction de λ ; pour que le point O possède la propriété étudiée, tous les coefficients du développement ainsi trouvé doivent être indépendants de α . Après ce changement de variables, l'intégrale donnant l'aire devient

$$\iint \frac{\rho + \rho^3 a^2 (\sin^2 \varphi \cos^2 u + \cos^2 \varphi \sin^2 u) + \dots}{2 \sin \varphi \cos \varphi} d\rho du$$

et, par suite, on a

$$\mathcal{A} = \int_{u_0}^{u_0 + \pi} \frac{du}{2 \sin \varphi \cos \varphi} \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} (\dots) \right],$$

les termes non écrits sont, en ρ , de degré supérieur ou égal à 4 et il faut remplacer dans cette expression ρ par (4) et u_0 par la valeur définie au paragraphe 2. On trouve ainsi

$$\mathcal{A} = \frac{\lambda^2 \pi (\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi)}{4 a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} + \dots,$$

ce premier terme nous montre que l'aire $\mathcal{A}$ ne peut être indépendante de α que si le point O est un ombilic.

Nous savons qu'il suffit que le point O soit un point (R) pour que $\mathcal{A}$ soit indépendante de α . Montrons, comme au paragraphe 4, que la condition suffisante est aussi nécessaire. Soit n le degré le plus bas des termes de (1) tels que le polynôme $P(x, y)$ qui les représente tous ne soit pas le produit d'une constante par $(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$, alors z admet le développement (7) et les termes de degré inférieur à n dans ce développement donnent dans $\mathcal{A}$ des éléments indépendants de α . Après le changement de variables le développement de $\sqrt{1 + z'^2 + \bar{z}'^2}$ devient

$$1 + \frac{a^2 \rho^2}{2} + \dots + a n \rho^n P(\cos u, \sin u) + \dots,$$

où les termes non écrits sont indépendants de u et de degré supérieur à 2, ou bien sont de degré supérieur à n . On a donc

$$\mathcal{A} = \int_{\alpha}^{\alpha + \pi} \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{a^2 \rho^4}{8} + \dots + \frac{a n \rho^{n+2}}{n+2} P(\cos u, \sin u) + \dots \right] du,$$

où l'on doit remplacer ρ par le développement (8). L'aire en question

admet donc un développement suivant les puissances de λ et les premiers termes de ce développement sont indépendants de α ; le terme de degré n (en λ) est le premier qui puisse dépendre de α et il a pour coefficient, à une constante additive près,

$$(9') \quad -\left(\frac{2}{a}\right)^{n+1} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin^n(u-\alpha) P(\cos u, \sin u) du.$$

Il faut donc pour que l'aire soit indépendante de α que l'intégrale ci-dessus soit elle-même indépendante de α , or cette intégrale est égale à l'intégrale (12) correspondant à $j=0$, donc elle ne peut être indépendante de α que si tous les coefficients du polynôme P mis sous la forme (10) sont nuls (a_0 excepté) jusqu'à ceux dont l'indice est égal à l'exposant de $\sin(u-\alpha)$ dans l'intégrale; on voit donc que, ici encore, le polynôme P doit être identiquement nul si n est impair ou égal au produit d'une constante par une puissance de x^2+y^2 si n est pair; par suite le point O est nécessairement un point (R).

9. Nous nous proposons maintenant d'étudier des éléments invariants par les transformations du groupe (13) et qui par suite dépendront seulement du produit de λ par une fonction de α lorsque le point O sera un point (R'), cette fonction de α est d'ailleurs nécessairement $[\cos^2\varphi \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}$. Les transformations du groupe (13) maintiennent invariantes les aires situées dans un plan perpendiculaire à Oz , par suite la projection sur le plan tangent en O de l'intersection de la surface et du plan sécant limite une aire qui est indépendante de λ lorsque le point O est un point (R) et qui dépend seulement de $\lambda[\cos^2\varphi \sin^2\alpha + \sin^2\varphi \cos^2\alpha]^{\frac{1}{2}}$ lorsque O est un point (R'). Il est très facile de montrer que cette propriété est caractéristique en étudiant l'intégrale double $\iint dx dy$ étendue au domaine $\mathcal{D}$.

Les transformations (13) maintiennent invariants les points de Oz , donc aussi les longueurs sur cet axe, et ceci nous invite à envisager un élément nouveau de notre figure : nous appelons hauteur de la calotte la plus grande distance au plan sécant d'un point de la calotte; cette plus grande distance correspond à un point où le plan tangent à la

surface est parallèle au plan sécant; or le parallélisme de deux plans ainsi que le contact d'un plan et de la surface se conservent par les transformations (13), donc aussi le point de Oz par lequel passent les différents plans tangents considérés pour avoir les hauteurs des calottes homologues par les transformations (13). Il en résulte que la projection sur Oz de la hauteur de la calotte ne doit dépendre, lorsque le point est un point (R'), que du produit de λ par une fonction de α . Ces remarques géométriques nous ont également conduit à prendre comme paramètre, au lieu de l'angle du plan sécant et du plan tangent en O, cette projection de la hauteur de la calotte sur Oz qui est aussi la distance du point O au point d'intersection de Oz et du plan tangent parallèle au plan sécant.

Si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées d'un point situé sur la calotte et tel que le plan tangent soit parallèle au plan sécant, ces quantités X, Y, Z doivent vérifier le système

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(X, Y) = -\lambda \sin \alpha, \\ \frac{\partial z}{\partial y}(X, Y) = \lambda \cos \alpha, \end{cases}$$

et X, Y, Z doivent tendre vers O en même temps que λ .

La hauteur de la calotte est la distance du point (X, Y, Z) au plan sécant, donc cette hauteur est

$$\Delta = [\lambda(Y \cos \alpha - X \sin \alpha) - Z] (1 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or si le point O est un point (R'), z est une fonction $F(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi)$ et par suite le système (18) devient

$$\begin{aligned} 2X \sin \varphi F'(X^2 \sin^2 \varphi + Y^2 \cos^2 \varphi) &= -\lambda \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}, \\ 2Y \cos \varphi F'(X^2 \sin^2 \varphi + Y^2 \cos^2 \varphi) &= \lambda \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $X^2 \sin^2 \varphi + Y^2 \cos^2 \varphi$ ne dépend que du produit $\lambda(\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$ (on le voit en ajoutant les deux équations membre à membre après les avoir élevées au carré) donc Z ne dépend que de $\lambda(\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$; de même en multipliant

la première équation par $-\lambda \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}$ et en l'ajoutant membre à membre au produit de la seconde par $\lambda \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}$, on démontre que $\lambda[Y \cos \alpha - X \sin \alpha]$ ne dépend aussi que de $\lambda[\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}$. Donc le numérateur de Δ est bien seulement fonction du produit de λ par une fonction de α , ainsi que nous l'avons remarqué géométriquement car ce numérateur n'est autre que la projection de la hauteur de la calotte sur Oz .

Il est très facile de démontrer que cette propriété est caractéristique des points (R) et (R'). En effet le système (18) nous fournit immédiatement les premiers termes des développements de X et de Y suivant les puissances de λ , on trouve

$$X = -\lambda \frac{\sin \alpha}{2\alpha \sin^2 \varphi} + \dots, \quad Y = \lambda \frac{\cos \alpha}{2\alpha \cos^2 \varphi} + \dots$$

on en déduit Z, d'où le numérateur de Δ qui est

$$\Delta_1 = \lambda^2 \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}{4\alpha \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} + \dots$$

Donc pour que Δ_1 soit indépendant de α , il faut que O soit un ombilic; pour que Δ_1 soit fonction du produit de λ par une fonction $g(\alpha)$, cette dernière doit être $[\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}$.

Comme il suffit que le point O soit un point (R) ou un point (R') pour que Δ_1 ait la forme voulue, nous supposons que les premiers termes de z sont conformes à la condition suffisante (c'est-à-dire sont des puissances de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$) et que les termes de degré n sont les premiers qui ne vérifient pas cette condition. Nous étudions simultanément le cas où Δ_1 est fonction de $\lambda g(\alpha)$ et celui où Δ_1 (et aussi Δ) est indépendant de α , car il suffit dans ce dernier cas de supposer $\varphi = \pi/4$ d'après la condition trouvée pour le premier terme du développement de z .

Soit alors

$$z = a(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi) + \dots + \sum_k b_{m-k} x^k y^{m-k} \sin^k \varphi \cos^{m-k} \varphi + \dots$$

en désignant par $b_{m,k}$ des constantes; le système (18) nous donne aisément les développements de X et de Y

$$\begin{aligned} X &= -\lambda \frac{\sin \alpha}{2\alpha \sin^2 \varphi} + \dots + \lambda^{m-1} \sum k b_{m,k} \frac{(-1)^k \sin^{k-1} \alpha \cos^{m-k} \alpha}{2^m \alpha^m \sin^k \varphi \cos^{m-k} \varphi} + \dots, \\ Y &= \lambda \frac{\cos \alpha}{2\alpha \cos^2 \varphi} + \dots + \lambda^{m-1} \sum (m-k) b_{m,k} \frac{(-1)^{k-1} \sin^k \alpha \cos^{m-k-1} \alpha}{2^m \alpha^m \sin^k \varphi \cos^{m-k} \varphi} + \dots \end{aligned}$$

les termes non écrits sont de degré (en λ) supérieur à $m-1$ ou bien correspondent aux termes de z qui vérifient la condition suffisante.

Le développement de Z s'en déduit très facilement, d'où

$$\Delta_1 = \frac{\lambda^2}{4\alpha} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi} \right) + \dots + \frac{\lambda^m}{2^m \alpha^m} \sum b_{m,k} \frac{(-1)^{k-1} \sin^k \alpha \cos^{m-k} \alpha}{\sin^k \varphi \cos^{m-k} \varphi} + \dots,$$

expression dans laquelle les termes non écrits correspondent aux termes de z qui vérifient la condition suffisante, ou bien sont de degré supérieur à m . Il est donc nécessaire que

$$\sum b_{m,k} (-1)^k \sin^k \alpha \cos^k \varphi \cos^{m-k} \alpha \sin^{m-k} \varphi \equiv \lambda (\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi)^{\frac{m}{2}}.$$

A étant une constante; il en résulte que les termes de degré n doivent constituer le développement d'une puissance de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$ si n est pair; si n est impair, ils doivent être identiquement nuls, cela est évident si φ est différent de $\frac{\pi}{4}$, puisque le premier membre est un polynome et le second est irrationnel; si φ est égal à $\frac{\pi}{4}$, le premier membre de degré impair dépend sûrement de α s'il n'est pas identiquement nul. Donc le point O doit être un point (R') si $\varphi \neq \frac{\pi}{4}$, ou un point (R) si φ est égal à $\frac{\pi}{4}$.

10. Nous avons remarqué au début du paragraphe précédent que les plans tangents, voisins du plan tangent en O, qui se déduisent de l'un d'eux par les transformations (13), coupent l'axe Oz en un même point; on constate que ces plans tangents touchent la surface en des points qui ont même cote, puisque les transformations (13) maintiennent invariante la cote d'un point. Donc si une surface est de révolution affine autour de Oz parallèlement au plan tangent en O, un cône

circonscrit ayant pour sommet un point de Oz (voisin de O) touche la surface suivant une courbe plane dont le plan est parallèle au plan tangent en O ⁽¹⁾.

Cette propriété caractérise les points (R) ou (R') . En effet nous pouvons représenter la surface au voisinage de O par l'équation

$$z = a(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi) + \sum a_p (x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi)^p + P(x \sin \varphi, y \cos \varphi) + \dots$$

où l'on désigne par P le polynôme homogène de degré n qui groupe les termes de plus bas degré dont l'ensemble n'est pas une puissance de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$. Un plan tangent voisin du plan tangent en O touche la surface en un point dont les coordonnées x, y, z sont toutes trois voisines de zéro et il rencontre l'axe Oz en un point dont la cote K est déterminée par la relation

$$(19) \quad K = -a(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi) - \sum (2p - 1) a_p (x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi)^p - (n - 1) P(x \sin \varphi, y \cos \varphi) + \dots$$

Nous représenterons sous la forme

$$(B) \quad x = r \frac{\cos \beta}{\sqrt{2} \sin \varphi}, \quad y = r \frac{\sin \beta}{\sqrt{2} \cos \varphi}$$

les coordonnées x et y du point de contact d'un plan tangent mené par un point M de Oz , alors la cote z de ce point de contact est

$$z = \frac{ar^2}{2} + \sum \frac{a_p r^{2p}}{2^p} + \frac{r^n}{\sqrt{2}^n} P(\cos \beta, \sin \beta) + \dots$$

Soit $-a\mu^2$ la cote du point M (μ est petit et tend vers zéro quand M tend vers O); nous pourrions déterminer le développement de r suivant les puissances de μ en fonction du paramètre β figurant dans les expressions de x et de y , il suffit pour cela de faire $K = -a\mu^2$ dans (19) et de déterminer r par la méthode des coefficients indéterminés; on obtient

$$(20) \quad r = \mu \sqrt{2} + \dots - \mu^{n-1} \frac{n-1}{a \sqrt{2}} P(\cos \beta, \sin \beta) + \dots$$

(1) Il s'agit d'un cône qui enveloppe des plans tangents tendant vers le plan tangent en O lorsque le sommet du cône tend vers O et nous supposons toujours que le point O est un point régulier convexe de la surface.

d'où l'on déduit que la cote du point de contact est

$$(21) \quad z = a\mu^2 + \dots + n\mu^n P(\cos\beta, \sin\beta) + \dots,$$

les termes non écrits sont de degré supérieur à n ou bien correspondent aux termes vérifiant la condition suffisante et sont alors indépendants de β . Pour que le point O possède la propriété cherchée, il faut que z conserve la même valeur quel que soit β et qu'il en soit ainsi pour toutes les valeurs de μ , donc les coefficients du développement (21) doivent être tous indépendants de β et par suite il faut que $P(\cos\beta, \sin\beta)$ soit identique à une constante. Cela exige que le polynôme $P(x \sin \varphi, y \cos \varphi)$ soit identiquement nul si n est impair ou qu'il soit identique à $a_0(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{n}{2}}$ si n est pair. Donc la surface est de révolution affine autour de Oz parallèlement au plan tangent en O.

Remarquons que nous arrivons à la même conclusion si nous supposons simplement que les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur Oz touchent la surface suivant des courbes planes parallèles (sans supposer comme plus haut que les plans de ces courbes sont parallèles au plan tangent en O). En effet il faut alors pouvoir trouver des coefficients A, B, C, D indépendants de β tels qu'il existe entre les coordonnées du point de contact du plan tangent une relation de la forme

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

qui doit être vérifiée quel que soit β et de plus les coefficients A, B, C doivent être les produits d'une même fonction de μ par des constantes; on peut donc, en modifiant la valeur de D, supposer que A, B, C sont des constantes (indépendantes de β et de μ). Le premier membre de la relation peut être développé suivant les puissances de μ et tous les coefficients doivent être identiquement nuls. En posant

$$D = d_0 + \mu d_1 + \mu^2 d_2 + \dots,$$

il vient

$$d_0 + \mu \left[A \frac{\cos \beta}{\sin \varphi} + B \frac{\sin \beta}{\cos \varphi} + d_1 \right] + \mu^2 [\dots] \equiv 0;$$

cela exige que A et B soient nuls et les plans des courbes de contact doivent être parallèles au plan tangent en O; nous sommes donc ramené à l'étude précédente. Cela est d'ailleurs évident géométriquement.

11. Dans le paragraphe qui précède nous n'avons eu nullement besoin de supposer les axes rectangulaires pour effectuer les différents calculs; si nous supposons que $O\xi$ et $O\eta$ coïncident avec Ox et Oy et que le nouvel axe $O\zeta$ est défini par ses cosinus directeurs i, j, k relativement à $Oxyz$, le plan tangent en ξ, η, ζ à la surface représentée par l'équation $\zeta = f(\xi, \eta)$ est défini par une équation de la même forme que plus haut et la distance du point O au point de rencontre de ce plan avec $O\zeta$ est $\zeta - \xi f'_\xi - \eta f'_\eta$. Par suite il est naturel, pour étudier les cônes circonscrits à la surface lorsque leurs sommets sont sur une droite (D) passant par O et ayant pour cosinus directeurs i, j, k , de prendre pour axes Ox, Oy et cette droite (D) . La surface est alors représentée en coordonnées obliques par une équation de la même forme que (1) et la recherche du point de contact d'un plan tangent passant par le point M de (D) ayant pour coordonnées $O, O, -a\mu^2$ s'effectue exactement comme dans le cas particulier où la droite (D) est normale à la surface. Donc : *s'il existe une droite (D) passant par un point régulier convexe, O , d'une surface analytique telle que les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur (D) touchent la surface suivant des courbes planes situées dans des plans parallèles, l'équation de la surface doit être de la forme*

$$\zeta = f(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi);$$

nous dirons que *la surface est de révolution affine autour de la droite (D) parallèlement au plan tangent en O et que le point O est un point (R'') .*

Cette appellation généralise celle que nous avons introduite plus haut. Par exemple tous les points d'un ellipsoïde sont des points (R'') relativement à la droite joignant ce point au centre de la surface.

Le paramètre OM que nous avons été amené à choisir nous permettra d'obtenir des propriétés intéressantes du volume V lorsque la surface possède en O l'une des propriétés $(R), (R')$ ou (R'') . En effet les surfaces ayant un point (R'') admettent un groupe de transformations affines de déterminant 1 qui les transforment en elles-mêmes. Ces transformations conservent les volumes compris entre un plan et la surface et conservent le point d'intersection d'un plan avec l'axe de révolution affine. Nous voyons donc géométriquement que si un point O est un point (R'') [les points (R') et (R) ne sont que des

points (R'') particuliers], le volume compris entre un plan sécant et la calotte qu'il découpe ne dépend que de la distance du point O au point d'intersection de l'axe et du plan tangent parallèle au plan sécant. Il n'est guère simple d'introduire l'angle des plans sécant et tangent en O pour déterminer le plan sécant, à cause de l'obliquité des axes, pourtant nous utiliserons encore l'équation du plan sécant mise sous la forme (2), étant entendu que dans le cas général (pour les points R'') le paramètre λ ne représente plus la tangente de l'angle des plans.

12. Cette propriété que nous venons de remarquer est-elle une propriété caractéristique des surfaces de révolution affine? Conservons dans le plan tangent les axes Ox et Oy précédemment employés et prenons comme axe Oz , en général oblique, la droite (D). Soit $OM = -a\mu^2$ la cote du point d'intersection de (D) et du plan tangent arbitraire (Q) qui nous permet de définir le plan sécant et par suite de construire la figure étudiée. Nous déterminons le plan (Q) en lui imposant la condition de toucher la surface en un point d'un certain plan arbitraire (II) passant par Oz ; soit $y = x \tan \beta \tan \varphi$ l'équation de (II) (β est arbitraire).

Lorsque μ et β sont donnés, le plan tangent est parfaitement déterminé et par suite le plan sécant qui lui est parallèle et passe par O ; nous écrivons l'équation de ce plan sécant sous la forme (2) et les quantités λ et α sont déterminées en fonction de μ et de β .

Si les axes sont rectangulaires nous aurons le volume compris entre le plan sécant et la calotte qu'il découpe par une application des résultats des paragraphes 2 et 7. Si la droite (D) sur laquelle se déplace M n'est pas la normale, nous pouvons appeler ξ, η, ζ , les coordonnées du point (x, y, z) lorsqu'on rapporte la surface aux axes rectangulaires Ox, Oy et la normale à la surface. Le volume d'un domaine quelconque de l'espace est égal à l'intégrale triple $\iiint d\xi d\eta d\zeta$ étendue au domaine en question, ce qui par un changement de variables se ramène à $k \iiint dx dy dz$. Finalement nous aurons à effectuer les mêmes calculs que la droite (D) soit ou non normale à la surface et il suffira, pour

avoir le volume de multiplier la valeur des intégrales par le cosinus directeur k .

La cote z d'un point de la surface peut être représentée par le développement (16) où l'on suppose toujours que les termes non écrits ont un degré supérieur à n ou bien sont des puissances de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$. Le plan tangent (Q) est défini par les valeurs, en son point de contact, de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ et le plan sécant qui lui est parallèle est représenté par l'équation

$$Z = X \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + Y \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

dont les coefficients peuvent être développés suivant les puissances de r (développements qui dépendent de β), par suite, en tenant compte de (20), suivant les puissances de μ . Nous avons pour calculer les quantités λ et α qui figurent dans l'équation (2) le système suivant :

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda \cos \alpha = \sqrt{2} a r \sin \beta \cos \varphi + \dots + \cos \varphi 2^{-\frac{n-1}{2}} r^{n-1} P'_w(\cos \beta, \sin \beta) + \dots \\ -\lambda \sin \alpha = \sqrt{2} a r \cos \beta \sin \varphi + \dots + \sin \varphi 2^{-\frac{n-1}{2}} r^{n-1} P'_v(\cos \beta, \sin \beta) + \dots \end{cases}$$

dans lequel nous désignons par $P'_v(v, w)$ et $P'_w(v, w)$ les dérivées partielles de $P(v, w)$.

Nous voyons donc que $4a^2 \mu^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$ est le premier terme du développement de $\lambda^2 (\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)$; par suite le premier terme du développement, suivant les puissances de μ , du volume V cherché, est le produit par le cosinus directeur k [de (D) relativement à la normale en O] de la quantité $\frac{\pi a}{\sin 2 \varphi} \mu^4$ qui est bien indépendante de β .

Pour que le point O possède la propriété que nous désirons il faut que tous les coefficients du développement de V suivant les puissances de μ soient indépendants de β et nous savons qu'il suffit pour cela que la surface soit de révolution affine autour de (D). Donc les termes non écrits dans (16) vérifient une condition suffisante quand leur degré est inférieur à n , si bien que le calcul du premier terme de V qui peut dépendre de β doit faire intervenir le polynôme P ; ce premier terme est donc, en μ , de degré $n + 2$.

Pour simplifier l'écriture nous posons

$$L = (\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \cos^{-1} \varphi \sin^{-1} \varphi.$$

Cela étant, les relations (22) nous donnent facilement

$$\lambda^2 L^2 = 2 a^2 r^2 + \dots + 2^{\frac{n}{2}-\frac{n}{2}} n a r^n P(\cos \beta, \sin \beta) + \dots,$$

donc, d'après (20),

$$\lambda^2 L^2 = 4 a^2 \mu^2 + \dots + 4 a \mu^n P(\cos \beta, \sin \beta) + \dots,$$

où les termes non écrits sont indépendants de β ou sont, en μ , de degré supérieur à n . D'autre part nous savons que le volume V est alors représenté par le développement

$$\begin{aligned} \frac{V}{k} &= \pi \frac{\lambda^4 L^4}{32 a^3 \sin \varphi \cos \varphi} + \dots \\ &= \frac{\lambda^{n+2} L^{n+2}}{(n+2) a^{n+2} \sin \varphi \cos \varphi} \int_{u_0}^{u_0+\pi} \sin^{n+2}(u - u_0) P(\cos u, \sin u) du + \dots, \end{aligned}$$

dans lequel les termes non écrits sont en λ de degré supérieur à $n+2$ ou bien sont tels que les coefficients de $\lambda^p L^p$ sont des constantes (p étant d'ailleurs supérieur à 4).

Dans l'intégrale précédente u_0 est déterminé par la relation

$$(23) \quad \text{tang } u_0 \text{ tang } \varphi = \text{tang } \alpha,$$

qui nous donne immédiatement

$$\text{tang } u_0 = -\frac{1}{\text{tang } \beta} + \mu(\dots), \quad \text{d'où} \quad u_0 = \beta - \frac{\pi}{2} + \mu(\dots),$$

par suite le coefficient de μ^{n+2} dans le développement de V/k sera, à une constante additive près provenant des premiers termes de z ,

$$\frac{\pi P(\cos \beta, \sin \beta)}{\sin \varphi \cos \varphi} - \frac{2^{n+2}}{n+2} \int_0^\pi \frac{\sin^{n+2} t}{\sin \varphi \cos \varphi} P\left[\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2} + t\right), \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2} + t\right)\right] dt$$

et nous devons déterminer P pour que l'expression ci-dessus soit indépendante de β .

Autrement dit, nous devons chercher des fonctions $f(u)$, ayant la

forme (10), vérifiant les conditions indiquées au paragraphe 5, telles que

$$(24) \quad \pi f(\beta) = \frac{2^{n+2}}{n+2} \int_0^\pi \sin^{n+2} t f\left(\beta - \frac{\pi}{2} + t\right) dt,$$

soit indépendant de β . Il suffit évidemment que f soit une constante, mais ce n'est pas nécessaire.

En dérivant cette expression (24) par rapport à β nous n'avons pu simplifier beaucoup les conditions imposées et nous avons dû calculer la valeur de (24) en fonction des coefficients a_p et b_p de $f(\beta)$. Pour cela nous complétons le tableau des intégrales définies données au paragraphe 5 par les intégrales suivantes dont les valeurs s'obtiennent à l'aide des formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^{2m+1} t \sin[(2j+1)(t+\alpha)] dt &= \pi 2^{-2m-1} (-1)^j C_{2m+1}^{m-j} \cos(2j+1)\alpha, \\ \int_0^\pi \sin^{2m+1} t \cos[(2j+1)(t+\alpha)] dt &= \pi 2^{-2m-1} (-1)^{j+1} C_{2m+1}^{m-j} \sin(2j+1)\alpha, \\ \int_0^\pi \sin^{2m} t \cos 2j(t+\alpha) dt &= \pi 2^{-2m} (-1)^j C_{2m}^{m-j} \cos 2j\alpha, \\ \int_0^\pi \sin^{2m} t \sin 2j(t+\alpha) dt &= \pi 2^{-2m} (-1)^j C_{2m}^{m-j} \sin 2j\alpha, \end{aligned}$$

j est inférieur ou égal à m .

Nous pouvons alors calculer la valeur d'une expression (24) correspondant à une fonction $f(u)$ qui a pour expression

$$A \cos(n-2p)u + B \sin(n-2p)u,$$

on obtient

$$(25) \quad \pi [A \cos(n-2p)\beta + B \sin(n-2p)\beta] \left[1 - \frac{C_{n+2}^{n-1}}{n+2} \right]$$

et par suite nous pouvons étudier la fonction de β définie par (24) lorsque f est représentée par le polynôme de Fourier (10), puisque les indices de tous les coefficients de (10) ont la même parité que n .

Si n est impair $f(u)$ peut s'écrire

$$\sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} \{ a_{n-2p} \cos(n-2p)u + b_{n-2p} \sin(n-2p)u \},$$

donc l'expression (24) prend la valeur

$$\pi \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} \{ a_{n-2p} \cos(n-2p)\beta + b_{n-2p} \sin(n-2p)\beta \} \left[1 - \frac{C_{n+2}^{p+1}}{n+2} \right],$$

c'est donc un polynome de Fourier qui ne peut être indépendant de β qu'à la condition que tous ses coefficients soient nuls (puisque aucun des termes ci-dessus n'est indépendant de β , n étant impair). Donc tous les coefficients de $f(u)$, dont l'indice est tel que $1 - \frac{C_{n+2}^{p+1}}{n+2}$ ne soit pas nul, doivent être nuls. C'est-à-dire que tous les coefficients de $f(u)$ doivent être nuls à l'exception de ceux qui correspondent à $p=0$, puisque ces derniers, seuls, disparaissent de l'expression (24). Les coefficients a_n et b_n peuvent donc être choisis arbitrairement et eux seuls peuvent l'être.

Si n est pair nous avons de même

$$f(u) = a_0 + \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-1} \{ a_{n-2p} \cos(n-2p)u + b_{n-2p} \sin(n-2p)u \}$$

et l'expression (24) devient, en designant par D une certaine constante

$$D + \pi \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-1} \{ a_{n-2p} \cos(n-2p)\beta + b_{n-2p} \sin(n-2p)\beta \} \left(1 - \frac{C_{n+2}^{p+1}}{n+2} \right),$$

ce qui ne peut être indépendant de β qu'à la condition de donner la valeur 0 à tous les coefficients a et b dont l'indice est différent de zéro et tel que $n+2 - C_{n+2}^{p+1}$ ne soit pas nul. Par conséquent le polynome de Fourier f doit être identique à $a_0 + A \cos nu + B \sin nu$, quel que soit n pair ou impair, mais a_0 est nul si n est impair.

Il en résulte que la considération de ce terme en μ^{n+2} dans V , ne nous prouve pas que la condition suffisante est nécessaire. Il suffit en effet que le polynome $P(v, w)$ ait une expression de la forme suivante pour que ce terme soit indépendant de β

$$A \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j C_n^{2j} v^{n-2j} w^{2j} + B \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j C_n^{2j+1} v^{n-2j-1} w^{2j+1},$$

expression à laquelle on doit ajouter le produit de $(\rho^2 + \omega^2)^{\frac{n}{2}}$ par une constante arbitraire a_0 si n est pair.

13. Puisque la condition suffisante n'est peut-être pas nécessaire, il nous faut chercher s'il existe une surface possédant la propriété désirée, telle que le polynôme P correspondant ait la forme ci-dessus où A et B ne seraient pas nuls. Pour cela nous déterminerons les polynômes homogènes de degré supérieur à n qui figurent dans le développement de z .

Soit donc

$$z = a(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi) + \dots + P(x \sin \varphi, y \cos \varphi) + \sum X_q(x \sin \varphi, y \cos \varphi),$$

où X_q désigne un polynôme homogène de degré q (supérieur à n) et où P est le polynôme trouvé ci-dessus, les termes non écrits sont des puissances de $(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi)$.

Nous calculerons le volume en fonction de μ et il faudra pousser le développement de V/k jusqu'aux termes qui nous permettront de déterminer successivement les polynômes X . Or un polynôme X_q est tel que la fonction $X_q(\cos u, \sin u)$ soit identique à un polynôme de Fourier ne contenant que des termes dont l'ordre est inférieur ou égal à q et de même parité que q . Le calcul du paragraphe précédent nous apprend aussi que le premier coefficient de V/k dans lequel intervient le polynôme X_q est celui de μ^{q+2} et dans ce coefficient figurent seulement, parmi les coefficients inconnus du polynôme de Fourier cherché, ceux dont l'ordre est inférieur ou égal à $q - 2$.

En déterminant successivement les polynômes X à partir de celui d'indice $n + 1$, nous aurons à chaque détermination deux constantes arbitraires nouvelles (ou 3 si le polynôme X est de degré pair mais la constante additive correspondant à la puissance de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$ ne modifie en rien les calculs effectués plus loin). La détermination des coefficients du polynôme X_q (mis sous forme de polynôme de Fourier) ne sera possible que si les autres éléments du coefficient de μ^{q+2} dans V/k forment eux-mêmes un polynôme de Fourier ne contenant que des termes d'ordre inférieur ou égal à $q - 2$ et de même parité que q .

Dans ce paragraphe nous nous proposons de montrer que la déter-

mination de X_q est possible lorsque q est inférieur à $2n - 2$. Nous ne ferons pas la détermination complète de ces polynômes, car le calcul est long (et sans grand intérêt) même dans le cas où $q = n + 2$.

En premier lieu nous déterminons l'équation du plan sécant mené par O parallèlement au plan (Q) en fonction de μ et du paramètre β . Pour cela nous devons compléter les calculs des paragraphes précédents. La cote du point de rencontre de Oz et du plan tangent au point x, y, z est donnée par

$$(26) \quad K = -a\mu^2 = -a(x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi) + \dots - (n-1)P(x \sin \varphi, y \cos \varphi) \\ - \sum (q-1)X_q(x \sin \varphi, y \cos \varphi),$$

où les termes non écrits sont des puissances de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$. Les abscisse et ordonnée du point de contact du plan (Q) étant encore représentées en fonction de β par les expressions (B), on a, pour déterminer r en fonction de μ et de β , la relation

$$(27) \quad -a\mu^2 = -a \frac{r^2}{2} + \dots - (n-1)r^n 2^{-2}P - \sum (q-1)r^q 2^{-\frac{q}{2}}X_q,$$

où les termes non écrits sont indépendants de β . Dès lors le développement de r en fonction de μ est de la forme

$$r = \mu \sqrt{2} + \dots + \mu^{n-1} \frac{(n-1)}{a\sqrt{2}} P(\cos \beta, \sin \beta) + \sum \mu^m Y_m.$$

Les coefficients de ce développement s'obtiennent par la méthode des coefficients indéterminés. La détermination de Y_m conduit à une expression linéaire en fonction des polynômes X et P tant que l'on n'a pas à faire intervenir dans r^2 le carré du premier terme qui dépend de β (par l'intermédiaire de P; ce terme est de degré $n-1$), ni dans r^n un terme dont le coefficient dépend de β . Donc, pour toutes les puissances de μ inférieures à $2n-3$, les coefficients Y_m seront des fonctions linéaires des différents polynômes X d'indice inférieur ou égal à $m+1$; le coefficient de μ^{2n-3} fera intervenir P^2 . On en conclut que tous les coefficients des puissances μ^m dans le développement de r sont identiques à des polynômes de Fourier dont l'ordre est $m+1$ tant que m est inférieur à $2n-3$; mais le coefficient de μ^{2n-3} contient deux termes d'ordre $2n$ qui proviennent de P^2 tandis que le polynôme X inconnu qui figure dans ce même coefficient de μ^{2n-1} n'est que

d'ordre $2n - 2$. Il est donc probable que nous serons arrêté dans la détermination des polynômes X lors du calcul du terme en μ^{2n} de V/k .

Des remarques précédentes et du développement (27) nous déduisons que r admet le développement

$$(28) \quad r = \mu \sqrt{2} - \dots - \mu^{n-1} \frac{(n-1) P(\cos \beta, \sin \beta)}{a \sqrt{2}} - \dots \\ + \mu^{2n-3} \left[\frac{n(n-1)^2 P^2}{2 a^2 \sqrt{2}} - \frac{2n-3}{a \sqrt{2}} X_{2n-2} \right] + \dots,$$

dans lequel les termes non écrits sont de trois catégories différentes : ou bien ils sont de degré supérieur à $2n - 3$, ou bien leurs coefficients sont des constantes et leur degré supérieur à 2, ou bien leurs coefficients sont des polynômes de Fourier dont l'ordre dépasse d'une unité le degré m (supérieur ou égal à n) de μ , mais dans ces polynômes de Fourier les seuls termes d'ordre le plus élevé ($m + 1$) proviennent du polynôme X_{m+1} non déterminé par l'étude des termes de V/k dont le degré est inférieur à $m + 3$; en effet les ordres des polynômes de Fourier croissent avec leurs indices et les seuls qui figurent dans le coefficient de μ^m dans (28) sont d'indice inférieur ou égal à $m + 1$.

Le développement (28) nous donnant l'expression de r , nous pouvons, pour utiliser les calculs des premiers paragraphes, écrire l'équation du plan tangent sous la forme (2) alors λ et α sont déterminés par le système

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \cos \alpha = r \sqrt{2} a \sin \beta \cos \varphi + \dots + r^{n-1} 2^{\frac{1-n}{2}} \cos \varphi P'_n(\cos \beta, \sin \beta) \\ \quad + \sum r^{q-1} 2^{\frac{1-q}{2}} \cos \varphi X'_{q,n}(\cos \beta, \sin \beta), \\ -\lambda \sin \alpha = r \sqrt{2} a \cos \beta \sin \varphi + \dots + r^{n-1} 2^{\frac{1-n}{2}} \sin \varphi P'_n(\cos \beta, \sin \beta) \\ \quad - \sum r^{q-1} 2^{\frac{1-q}{2}} \sin \varphi X'_{q,n}(\cos \beta, \sin \beta), \end{array} \right.$$

dans lequel $X'_{q,n}$ et $X'_{q,\infty}$ représentent les dérivées partielles du polynôme homogène $X_q(\varphi, \varpi)$, donc $X'_{q,n}$ et $X'_{q,\infty}$ sont de degré $q - 1$ et le polynôme de Fourier identique à $X'_{q,n}(\cos \beta, \sin \beta)$ est d'ordre $q - 1$. Les termes non écrits dans (29) correspondent à des puissances de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$ figurant dans z . Nous ajoutons membre à membre les deux équations (29) après les avoir multipliées respecti-

vement par $(\cos \varphi)^{-1}$ et $(\sin \varphi)^{-1}$ puis élevées au carré. Nous obtenons ainsi

$$\lambda^2 L^2 = 2a^2 r^2 + \dots + na P r^n 2^{\frac{4-n}{2}} + \dots + r^{2n-2} [(2n-2) 2^{3-n} a X_{2n-2} + \dots] + \dots,$$

dans cette expression les termes non écrits sont indépendants de β et de degré supérieur à 2, ou bien sont de degré supérieur à n et leur coefficient est un polynôme de Fourier dont l'ordre est égal au degré de r , ou bien sont de degré supérieur à $2n-2$. On vérifie ces affirmations en tenant compte des remarques sur les ordres de $X'_{q,\nu}$ et de $X'_{q,\omega}$; notons encore que dans les termes de degré m inférieur à $2n-2$, les seuls éléments d'ordre m du polynôme de Fourier coefficient de r^n proviennent du polynôme X_m .

En tenant compte de (28) nous obtenons

$$(30) \quad \lambda^2 L^2 = 4a^2 \mu^2 + \dots + 4a \mu^n P + \dots + \mu^{2n-2} [4a X_{2n-2} - (n^2 - 1) P^2] + \dots,$$

où les termes non écrits sont de trois catégories, ils correspondent à des puissances de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$, ou bien ils sont de degré m supérieur à n et leur coefficient est un polynôme de Fourier d'ordre m dont les termes d'ordre le plus élevé proviennent exclusivement du polynôme X_m (si $m < 2n-2$), ou bien ils sont de degré supérieur à $2n-2$.

D'autre part des relations (29) et de la relation (23) on déduit

$$\operatorname{tang} u_0 = - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - r^{n-2} \frac{\sin \beta P'_\nu (\cos \beta, \sin \beta) - \cos \beta P'_\omega (\cos \beta, \sin \beta)}{\sqrt{2^n} a \sin^2 \beta} + \dots,$$

d'où, en tenant compte de (28),

$$u_0 = \beta - \frac{\pi}{2} - \mu^{n-2} \frac{\sin \beta P'_\nu - \cos \beta P'_\omega}{2a} + \dots$$

Mais nous connaissons l'expression du polynôme P (elle est donnée à la fin du paragraphe 12, à une puissance de $\nu^2 + \omega^2$ près si n est pair), ce qui nous permet de calculer P'_ν et P'_ω . On trouve

$$\begin{aligned} P'_\nu (\cos \beta, \sin \beta) &= n [A \cos(n-1)\beta + B \sin(n-1)\beta] \\ P'_\omega (\cos \beta, \sin \beta) &= n [-A \sin(n-1)\beta + B \cos(n-1)\beta] \quad (1); \end{aligned}$$

(1) On peut obtenir ces formules en utilisant les propriétés des polynômes harmoniques $(A - iB)(\nu + i\omega)^n$.

les termes provenant de la puissance de $\nu^2 + \omega^2$ qui doit être ajoutée, dans le cas où P est de degré pair, ne modifient pas le calcul ultérieur.

Nous pouvons donc déterminer le développement de u_0 en fonction de μ et de β en faisant intervenir les constantes arbitraires A et B du polynome P

$$(31) \quad u_0 = \beta - \frac{\pi}{2} - \mu^{n-2} \frac{n[A \sin n\beta - B \cos n\beta]}{2a} + \dots$$

14. Nous devons maintenant prolonger les développements donnés précédemment pour obtenir le volume V. Le produit de ce volume par $k^{-1} \sin \varphi \cos \varphi$ est égal à l'intégrale suivante (nous désignons toujours par la lettre S l'expression $\sin u \cos \alpha \sin \varphi - \cos u \sin \alpha \cos \varphi$):

$$\int_{u_0}^{u_0 + \pi} \left\{ \frac{\lambda S \rho^3}{\sqrt{2}} - \frac{a \rho^3}{8} + \dots - \frac{\rho^{n+2} P(\cos u, \sin u)}{(n+2)\sqrt{2}^n} - \sum \frac{\rho^{q+2} X_q(\cos u, \sin u)}{(q+2)\sqrt{2}^q} \right\} du,$$

où l'on doit remplacer ρ par la fonction de u qui représente l'intersection de la surface avec le plan sécant défini par (2). Cette fonction $\rho(u)$ est déterminée par

$$\frac{\lambda S}{\sqrt{2} \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{a}{2} \rho + \dots + \rho^{n-1} \frac{1}{2} P(\cos u, \sin u) + \sum \rho^{q-1} \frac{1}{2} X_q(\cos u, \sin u);$$

et l'on obtient, par la méthode des coefficients indéterminés,

$$(32) \quad \rho = \frac{\sqrt{2} \lambda S}{a \sin \varphi \cos \varphi} - \dots - \frac{\lambda^{n-1} S^{n-1} \sqrt{2} P(\cos u, \sin u)}{a^n \sin^{n-1} \varphi \cos^{n-1} \varphi} + \dots \\ + \frac{\lambda^{2n-3} S^{2n-3}}{\sin^{2n-3} \varphi \cos^{2n-3} \varphi} \left[\frac{(n-1)\sqrt{2} P^2}{a^{2n-1}} - \frac{\sqrt{2} X_{2n-2}}{a^{2n-2}} - \dots \right] + \dots,$$

où les termes non écrits sont tels que le coefficient de $\lambda^m S^m$ est indépendant de u et m est alors supérieur à 2, ou bien ce coefficient est identique à un polynome de Fourier d'ordre $m+1$ et m est supérieur à n (les seuls termes d'ordre $m+1$ dans le coefficient en question proviennent du polynome X d'indice égal à $m+1$) ou enfin les termes non écrits sont de degré supérieur à $2n-3$.

Après remplacement de ρ par (32) dans l'intégrale donnant le volume, nous sommes conduit à intégrer des expressions ayant la

forme $\int_{u_0}^{u_0+\pi} S^m f(u) du$ où $f(u)$ est un polynome de Fourier d'ordre $m-2$, lorsque m est inférieur à $2n$ et supérieur à $n+2$, et les seuls termes d'ordre $m-2$ proviennent du polynome X_{m-2} . Les intégrales définies calculées précédemment nous montrent que

$$\int_{u_0}^{u_0+\pi} S^m f(u) du = L^m g(u_0),$$

où la fonction $g(u_0)$ est un polynome de Fourier dont l'ordre est égal à $m-2$ et les seuls termes d'ordre $m-2$ proviennent du polynome X_{m-2} .

Les remarques faites sur les ordres des polynomes de Fourier figurant dans les coefficients des différents développements que nous avons calculés et le calcul du paragraphe 12 nous montrent que les remplacements de L par sa valeur tirée de (30) et de u_0 par sa valeur (31) donneront un développement suivant les puissances de μ tel que le coefficient de μ^m soit un polynome de Fourier en β d'ordre $m-4$; par suite il sera possible de déterminer de proche en proche les coefficients des polynomes de Fourier identiques aux X_q (et ces polynomes dépendront de deux ou trois arbitraires suivant que q est impair ou pair) et nous calculerons le développement de z tant que nous ne considérons dans V que des termes de degré, en μ , inférieur à $2n$.

15. Qu'arrive-t-il si nous étudions maintenant le terme de degré $2n$ du développement de V/k ? Ce terme a pour coefficient un polynome de Fourier qui ne contient comme inconnus que des coefficients d'ordre inférieur ou égal à $2n-4$ et nous allons voir qu'il y figure des termes d'ordre $2n$. Pour que ce coefficient soit indépendant de β il faudra donc annuler les coefficients de ces termes d'ordre $2n$.

Nous distinguons deux cas suivant la parité de n pour tenir compte des changements d'expression de certaines intégrales. Supposons d'abord n pair. Soit $n = 2m$, nous trouvons alors

$$(33) \quad \frac{V \sin \varphi \cos \varphi}{k} = \frac{\pi \lambda^4 L^4}{32 a^3} - \dots - \lambda^{n+2} L^{n+2} \pi (-1)^m \frac{A \cos n u_0 + B \sin n u_0}{2^{n+2} a^{n+2}} + \dots \\ + \lambda^{2n} L^{2n} \int_u^{u_0+\pi} \frac{P^2(\cos u, \sin u) \sin^{2n}(u - u_0) du}{a^{2n+1}} + \dots;$$

les termes non écrits ne peuvent, d'après ce que nous avons dit, donner aucun élément d'ordre $2n$ dans le coefficient de μ^{2n} . Nous avons conservé, pour simplifier l'écriture, l'expression P^2 mais les seuls termes de ce polynôme qui nous intéressent sont ceux d'ordre $2n$; ils ont pour valeur

$$\frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2nu + AB \sin 2nu.$$

Il faut maintenant remplacer dans (33) L par son expression tirée de (30) et u_0 par (31). Les seuls éléments d'ordre $2n$ que nous obtenons dans le coefficient de μ^{2n} sont :

$$\frac{\pi}{4a} (3 - n^2) P^2(\cos \beta, \sin \beta),$$

provenant de $\frac{\pi \lambda^4 L^4}{32a}$;

$$- \frac{\pi}{2a} (n + 2) P^2(\cos \beta, \sin \beta) - \frac{\pi}{2a} n^2 [A \sin n\beta - B \cos n\beta]^2,$$

provenant du terme en $L^{n+2} \lambda^{n+2}$ dans (30);

$$\frac{\pi}{a} \left[\frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2n\beta + AB \sin 2n\beta \right],$$

provenant du terme en L^{2n} de (30); par suite, lorsque n est pair le coefficient de μ^{2n} dans le développement de V contient les termes d'ordre $2n$ suivants :

$$\frac{\pi}{4a} (n^2 - 2n + 3) \left[\frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2n\beta + AB \sin 2n\beta \right],$$

et ils ne peuvent disparaître de l'expression de V qu'à la condition que A et B soient tous deux nuls, si bien que le polynôme P doit se réduire au produit d'une constante par une puissance de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$.

Si nous supposons que n est impair, soit $n = 2m + 1$, le coefficient de λ^{n+2} dans la formule (33) est seul modifié et l'on a alors

$$\begin{aligned} \frac{V \sin \varphi \cos \varphi}{h} = & \frac{\pi \lambda^4 L^4}{32a^3} + \dots - \lambda^{n+2} L^{n+2} \pi (-1)^m \frac{A \sin nu_0 + B \cos nu_0}{2^{n+2} a^{n+2}} + \dots \\ & + \lambda^{2n} L^{2n} a^{-2n-1} \int_{u_0}^{u_0+\pi} P^2(\cos u, \sin u) \sin^{2n}(u - u_0) du + \dots; \end{aligned}$$

les seuls termes d'ordre $2n$ figurant dans le coefficient de μ^{2n} du développement de V/k sont encore

$$\frac{\pi}{4a}(n^2 - 2n + 3) \left[\frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2n\beta + AB \sin 2n\beta \right],$$

ce qui exige A et B nuls.

En résumé : *Si il existe une droite D, passant par un point régulier O convexe d'une surface analytique, telle que le volume compris entre un plan sécant passant par O et la calotte qu'il découpe ne dépende que de la distance du point O au point d'intersection de D et du plan tangent parallèle au plan sécant, la surface est de révolution affine autour de D parallèlement au plan tangent en O.* Si la droite D est normale à la surface, le point O est un point (R') ou un point (R).

REMARQUES.

16. Pour déterminer le polynome $P(x, y)$ tel que l'intégrale (9) ou l'intégrale (9') soit indépendante de α nous pouvons utiliser le procédé indiqué au paragraphe 5 en vue d'obtenir les coefficients de ce polynome P.

Soit en effet

$$(34) \quad P(x, y) = \sum_{p=0}^n a_p x^p y^{n-p},$$

l'expression du polynome P; les intégrales (9) et (9') deviennent respectivement

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} I &= \sum_{j=0}^{n+2} \left\{ (-1)^{n-j} C_{n+2}^{(j)} \cos^j \alpha \sin^{n+2-j} \alpha \sum_{p=0}^n a_p \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin^{n-p+j} u \cos^{n-j+p+2} u du \right\}, \\ J &= \sum_{j=0}^n \left\{ (-1)^{n-j} C_n^{(j)} \cos^j \alpha \sin^{n-j} \alpha \sum_{p=0}^n a_p \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin^{n-p+j} u \cos^{n-j+p} u du \right\}, \end{aligned} \right.$$

les intégrales qui figurent dans les expressions ci-dessus sont indépendantes de α et elles peuvent être calculées par des procédés élémen-

taires, en utilisant les formules

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin^{2m-2k} u \cos^{2k} u \, du = \frac{\pi}{2^{2m-1}} C_{2m-1}^{m-1} \frac{C_{m-1}^{k-1}}{C_{2k-1}^{k-1}} \quad (m \geq k > 0).$$

Les expressions (35) sont donc des polynomes homogènes en $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$, ayant pour degré $n + 2$ ou n , dont on connaît tous les coefficients en fonction linéaire des a_p . Or, pour qu'un polynome homogène en $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ soit indépendant de α , il est nécessaire que le polynome soit identiquement nul si son degré est impair ou qu'il soit identique au produit d'une constante par une puissance de $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ si son degré est pair. Nous connaissons donc la forme que doivent avoir les expressions (35) pour que (9) ou (9') soit indépendant de α et par suite nous avons $n + 3$ ou $n + 1$ équations linéaires pour déterminer les $n + 1$ coefficients inconnus de (34). Ces équations sont homogènes si n est impair, leurs seconds membres sont alternativement nuls ou égaux au produit des coefficients du binome par une même constante arbitraire si n est pair.

Ainsi que nous l'avons déjà signalé, la difficulté que présente ce procédé provient de la complication des déterminants des systèmes linéaires trouvés. Dans le cas de l'expression J (nous avons alors autant d'équations que d'inconnues) le système se décompose en deux autres comprenant chacun seulement des coefficients a_p d'une même parité; nous obtenons ainsi, en examinant les deux hypothèses sur la parité de n , quatre déterminants symétriques dont les éléments situés sur une parallèle à la diagonale principale sont égaux. Si l'on écrit $n = 2m + 1$ ou $n = 2m$ suivant la parité de n , trois des déterminants sont d'ordre $m + 1$, le quatrième s'obtient en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne du troisième (les deux premiers correspondent au cas où n est impair). Il suffit donc de connaître les éléments de la première ligne des trois premiers déterminants pour pouvoir les écrire; on trouve que l'élément de la première ligne et de la colonne $j + 1$ a pour expression dans les déterminants d'ordre $m + 1$

$$\frac{C_{2m}^{m+j}}{C_{m+1}^{2m+2j+1}}, \quad \frac{C_{2m}^{m+j}}{C_{m+1}^{2m+2j}}, \quad \frac{C_{2m-1}^{m+j-1}}{C_{m-1}^{2m+2j-1}}$$

Nous n'avons pas pu montrer directement que ces déterminants ne sont pas nuls, mais la démonstration donnée plus haut de la forme nécessaire de la fonction P, nous prouve indirectement que les systèmes d'équations linéaires que nous venons de trouver n'admettent qu'une solution unique (la solution nulle ou bien une solution dépendant du paramètre par lequel peuvent être multipliés tous les seconds membres), par conséquent tous les déterminants rencontrés dans l'étude de l'expression J sont différents de 0.

De plus, la connaissance de la solution unique nous permet d'écrire, lorsque n est pair (et égal à $2m$), $m + 1$ relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients du développement de $(1 + x)^m$ en considérant le système provenant de J et $m + 2$ relations en considérant le système provenant de I.

Ces relations sont

$$(36) \quad \frac{C_{2m}^{2j}}{C_m^{2j}} \sum_{p=0}^m C_m^p \frac{C_{2m-1}^{m-j+p-1}}{C_{4m-1}^{2m-2j+2p-1}} = 2^{2m} \frac{C_{2m-1}^{m-1}}{C_{4m-1}^{2m-1}} \quad (0 \leq j < m),$$

$$(37) \quad \frac{C_{2m+2}^{2j}}{C_{m+1}^{2j}} \sum_{p=0}^m C_m^p \frac{C_{2m+1}^{m-j+p-1}}{C_{4m+1}^{2m+2j+2p-1}} = 2^{2m} \frac{C_{2m+1}^m}{C_{4m+1}^{2m}} \quad (0 \leq j < m + 1).$$

Lorsque l'on donne à j la valeur m la relation (36) est encore vraie à condition de remplacer par 1 le terme qui correspond à $p = 0$, de même la relation (37) subsiste lorsqu'on donne à j la valeur $m + 1$ à condition de remplacer par 1 le terme du premier membre qui correspond à $p = 0$.

Le même procédé pourrait aussi être utilisé pour déterminer le polynôme P dans l'étude faite au paragraphe 12. Il faut alors que l'expression

$$(38) \quad \pi P(\cos \beta, \sin \beta) = \frac{2^{n+2}}{n+2} \int_{\beta - \frac{\pi}{2}}^{\beta + \frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} \left(u - \beta + \frac{\pi}{2} \right) P(\cos u, \sin u) du$$

soit indépendante de β . Or, si l'on écrit P sous la forme

$$P(\cos \beta, \sin \beta) = \sum a_q \sin^q \beta \cos^{n-q} \beta,$$

cette expression (38) devient

$$\pi \sum_{q=0}^n \alpha_q \sin^q \beta \cos^{n-q} \beta - \frac{2^{n+2}}{n+2} \sum_{j=0}^{n+2} \left\{ \sin^j \beta \cos^{n+2-j} \beta C_{n+2}^j \sum_{q=0}^n \alpha_q \int_{\beta-\frac{\pi}{2}}^{\beta+\frac{\pi}{2}} \sin^{q+j} u \cos^{2n+2-q-j} u du \right\},$$

Nous savons d'autre part que P vérifie la condition imposée à (38) lorsqu'il est une puissance de $x^2 + y^2$ et (38) a alors une valeur constante non nulle, ou bien lorsque le polynome P correspond à la forme indiquée à la fin du paragraphe 12 et (38) est alors identiquement nulle quelle que soit la parité de n . Ceci nous permet d'obtenir de nouvelles relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients du binome.

Nous aurons par exemple

$$(39) \quad (-1)^j (C_n^{2j} - C_n^{2j-2}) = \frac{C_{n+2}^{2j} C_{2n+1}^n}{2^{n-1} (n+2)} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^q C_n^{2q} \frac{C_n^{q+j}}{C_{2n+1}^{2q+2j}},$$

quand on donne à j une valeur quelconque comprise entre 0 et $E(n/2)$. cette limite comprise. De même

$$(40) \quad (-1)^j (C_n^{2j+1} - C_n^{2j-1}) = \frac{C_{n+2}^{2j+1} C_{2n+1}^n}{2^{n-1} (n+2)} \sum_{q=0}^{L\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^q C_n^{2q+1} \frac{C_n^{q+j+1}}{C_{2n+1}^{2q+2j+2}},$$

lorsque l'on a $0 < j \leq E\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

Si l'on donne à j la valeur 0 dans l'une ou l'autre de ces relations, leur forme est légèrement modifiée; on obtient

$$n+2 = \frac{C_{2n+1}^n}{2^{n-1}} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^q C_n^{2q} \frac{C_n^q}{C_{2n+1}^{2q}} = 2^{1-n} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^q C_n^q C_{2n+1}^{n-2q}$$

qui correspond à (39), et

$$n = \frac{C_{2n+1}^n}{2^{n-1}} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^q C_{n'}^{2q+1} \frac{C_n^{q+1}}{C_{2n+1}^{2q+2}}$$

qui correspond à (40).

Nous avons signalé ces relations qui peuvent se rencontrer dans d'autres études où l'utilisation des polynômes de Fourier ne serait pas possible. Il serait intéressant de démontrer directement les relations (39) et (40).

Vu et approuvé :

Paris, le 3 avril 1936.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 3 avril 1936.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS.

S. CHARLÉTY.

