THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

P. MASSÉ

Sur l'amortissement des intumescences qui se produisent dans les eaux courantes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1935

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1935__173__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Série A, N° 1564
N° d'ordre : 2430

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

P. MASSÉ

1re THÈSE. — **Sur l'Amortissement des Intumescences qui se produisent dans les eaux courantes.**

2e THÈSE. — **Propositions données par la Faculté.**

Soutenues le 7 juin 1935, devant la Commission d'examen

Président : M. H. VILLAT.

Examinateurs : M. J. PÉRÈS.
M. J. VILLEY.

INSTITUT H. POINCARÉ
11, rue Pierre-Curie
PARIS 5e

PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, rue de la Sorbonne

1935

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . M. MOLLIARD.

Doyen . . . . . C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Professeurs honoraires

H. LE CHATELIER.	Léon BRILLOUIN.	AUGER.
H. LEBESGUE.	GOURSAT.	BLAISE.
A. FERNBACH.	WALLERANT.	DANGEARD.
A. LEDUC.	GUILLET.	JANET.
EMILE PICARD.	PÉCHARD.	LESPIEAU.
Rémy PERRIER.	FREUNDLER.	MARCHIS.
		MOUTON.

PROFESSEURS

G. BERTRAND . .	T	Chimie biologique.
M. CAULLERY . .	T	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
G. URBAIN . .	T	Chimie générale.
Emile BOREL. .	T	Calcul des probabilités et Physique mathém.
Jean PERRIN . .	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM . .	T	Physique.
E. CARTAN . . .	T	Géométrie supérieure.
M. MOLLIARD . .	T	Physiologie végétale.
L. LAPICQUE . .	T	Physiologie générale.
E. VESSIOT . . .	T	Mecanique analytique et Mécanique céleste.
A. COTTON . . .	T	Recherches Physiques.
J. DRACH. . . .	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
Charles FABRY.	T	Enseignement de Physique
Charles PÉREZ .	T	Zoologie.
Léon BERTRAND.	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
P. PORTIER . .	T	Physiologie comparée.
E. RABAUD . . .	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD. .		Chimie minérale.
Paul MONTEL. .	T	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
P. WINTREBERT.	T	Anatomie et histologie comparees.
L. BLARINGHEM.	T	Botanique.
O. DUBOSCQ. . .	T	Biologie maritime.
G. JULIA.	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
C. MAUGUIN. . .	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY		Pétrographie.
H. BÉNARD . . .	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY . . .	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
L. LUTAUD . . .	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH .	T	Physique théorique et physique celeste.
G. BRUHAT . . .		Physique.
E. DARMOIS. . .		Physique.
A. DEBIERNE . .	T	Radioactivité.
A. DUFOUR . . .	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER. . .		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	T	Botanique (P. C. B.)
M. JAVILLIER. .		Chimie biologique.
L. JOLEAUD . . .		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY . .		Zoologie.
F. PICARD. . . .		Zoologie (Evolution des êtres organisés).
Henri VILLAT. .		Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB. . . .	T	Géologie.
P. PASCAL. . . .	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET. . .	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON. .	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN . . .	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER. . .		Physique (P.C.B.).
De BROGLIE. . .	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN. . . .		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE . . .		Physique du Globe.
PRENANT		Zoologie.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
BOHN		Zoologie (P. C. B.).
COMBES.		Botanique.
GARNIER		Calcul différentiel.
PÉRÈS.		Mécanique des fluides.
HACKSPILL . . .		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER.		Physiologie générale.
TOUSSAINT . . .		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD. . . .	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.)
CROZE		Physique.
DUPONT.	T	Théories chimiques.
LANQUINE. . . .		Géologie.
VALIRON		Mathématiques générales.

Secrétaire..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire... D. TOMBECK.

A Monsieur Jacques HADAMARD
et a Monsieur Henri VILLAT

Hommage d'affectueuse gratitude.

PREMIÈRE THÈSE

SUR L'AMORTISSEMENT DES INTUMESCENCES

QUI SE PRODUISENT DANS LES EAUX COURANTES

INTRODUCTION

Les lois de propagation des intumescences, dans le cas extrême où il est permis de faire abstraction des frottements, sont connues depuis Scott Russell, Bazin et Boussinesq. Elles se traduisent, lorsqu'on néglige les influences du second ordre comme celles de la courbure de la surface libre, par l'existence d'ondes de translation se propageant en bloc avec une célérité $U + \sqrt{gH}$ pour l'onde-aval, $U - \sqrt{Hg}$ pour l'onde-amont.

A l'opposé de ce phénomène purement ondulatoire, d'où tout effet d'amortissement est *a priori* éliminé, se situe l'autre cas extrême, où l'influence des frottements devient prépondérante au point de masquer en première approximation la non-permanence du régime. C'est le phénomène de crue et de décrue des rivières, qui se résume, dans un lit uniforme soumis à la loi de frottement de Chézy, en une propagation en bloc dirigée uniquement vers l'aval, de célérité $\frac{dQ}{dH}$, c'est-à-dire $\frac{3}{2}\,U$ (Graeff-Boussinesq).

Le cas général, où l'ordre de grandeur des frottements est le même que celui des autres forces en jeu, présente un caractère plus complexe. Il a été abordé par Boussinesq, qui lui a consacré le paragraphe XXXVII de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*. Mais, en fait, les raisonnements et les résultats de Boussinesq ne sont valables, comme on le verra, que dans la mesure où la correction de frottement reste secondaire, c'est-à-dire à la tête des intumescences. Plus récemment, M. Bonneau a apporté une contribution notable à ce chapitre de la théorie, dans son Etude sur la propagation des crues (*Annales des Ponts et Chaussées*, mai-juin

1924). Mais sa méthode, basée en partie sur des approximations ingénieuses, ne constitue pas une solution définitive du problème.

Il m'a paru intéressant de reprendre la question dans sa généralité tant en raison de son importance théorique qu'en vue de certaines applications pratiques dans le domaine de l'hydroélectricité. Il est remarquable, en effet, de constater que les perturbations produites par le jeu des usines hydroélectriques ont, en général, le caractère d'intumescences *moyennes*, intermédiaires entre les intumescences courtes d'aspect purement ondulatoire, et les intumescences longues, assimilables à des crues.

* * *

Mon étude est divisée en quatre parties.

La première se limite au rappel des équations du régime variable, à l'établissement de l'équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire et à coefficients constants, qui, pour de faibles écarts autour du régime uniforme, détermine la marche des intumescences, enfin à l'examen des propriétés immédiates de cette équation. On y trouvera notamment quelques généralités sur deux solutions élémentaires évidentes, qu'on peut appeler « aval » et « amont », en ce sens qu'elles représentent des oscillations sinusoïdales dont la phase se propage et dont l'amplitude s'amortit respectivement vers l'une et l'autre de ces directions.

La seconde partie est consacrée à la solution du problème « mixte » fondamental, — étudié parallèlement par M. Deymié selon la méthode de Riemann-Hadamard —, dans lequel on se donne l'intumescence produite en tête d'un canal illimité vers l'aval, supposé en régime uniforme à l'origine des temps. La marche des idées consiste, suivant un procédé classique en Physique mathématique, à partir d'une des solutions élémentaires, — aval par exemple —, laquelle dépend d'un paramètre qu'on peut supposer complexe, et à observer qu'on en déduit des solutions plus générales en la multipliant par une fonction arbitraire du paramètre, puis en intégrant dans le plan complexe le produit ainsi obtenu. On choisit ensuite la fonction multiplicatrice et le chemin d'intégration de manière à répondre aux conditions aux limites du problème mixte. La solution ainsi obtenue se présente sous la forme d'une intégrale, qu'on peut étudier par des procédés apparentés à la « méthode de col », et d'où l'on

déduit assez simplement les propriétés générales de la propagation vers l'aval, notamment le mode de passage de l'onde de translation à une sorte de régime de crue. On traite bien entendu d'une manière analogue le problème de la propagation vers l'amont.

La troisième partie a pour objet l'étude de conditions aux limites d'un caractère plus complexe, notamment les suivantes :

a) l'intumescence est produite, non plus en tête d'un bief, mais en un point quelconque d'un canal indéfini vers l'aval et vers l'amont ;

b) l'intumescence est produite dans un bief limité à l'amont et à l'aval, les ouvrages extrêmes étant conçus et manœuvrés de manière à réaliser avant l'origine de la perturbation un régime uniforme et à emmagasiner ensuite dans le bief le débit supplémentaire injecté ;

c) l'intumescence est produite dans un bief limité, le régime antérieur à la perturbation étant permanent, mais non uniforme.

Enfin, une quatrième partie, relativement brève, est consacrée à diverses applications numériques et au contrôle de la théorie par certaines données d'expérience, malheureusement encore peu nombreuses.

PREMIÈRE PARTIE

L'ÉQUATION DES INTUMESCENCES

1. — Hypothèses de base.

Les équations classiques du mouvement variable reposent sur deux hypothèses fondamentales.

a) On ne considère que des *mouvements plans*, étant admis que le phénomène se reproduit identique à lui-même dans tous les plans verticaux parallèles à la direction d'écoulement (canal de largeur indéfinie).

b) On admet que le mouvement à étudier appartient à la catégorie des *régimes graduellement variés*, c'est-à-dire que les vitesses transversales sont faibles par rapport aux vitesses longitudinales, que les accélérations longitudinales sont petites, et les accélérations transversales d'un ordre de petitesse supérieur (BOULANGER, *Hydraulique générale*, p. 51 et 269).

Je serai amené à particulariser encore le problème en introduisant un peu plus tard deux nouvelles hypothèses.

c) Les perturbations étudiées n'entraînent que de *faibles écarts* de vitesse, de profondeur et de débit par rapport au régime permanent préexistant.

d) Le phénomène a lieu dans une *rivière* et non dans un *torrent*, au sens précis qu'on donne en hydraulique à ces expressions :

($bg - \alpha I > o$ ou ce qui revient au même $gH - \alpha U^2 > o$).

2. — Equations du Mouvement variable.

Le mouvement variable est régi, d'une part par l'équation de continuité qui est purement cinématique, d'autre part par des équations dynamiques reliant les accélérations et les forces.

En utilisant des notations usuelles, explicitées par le schéma ci-contre, ces dernières peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial s} = g\,Sin\,I - fs \\ \dfrac{dw}{dt} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = -g - fz \end{cases}$$

L'hypothèse b permet de négliger dans la seconde équation $\dfrac{dw}{dt}$

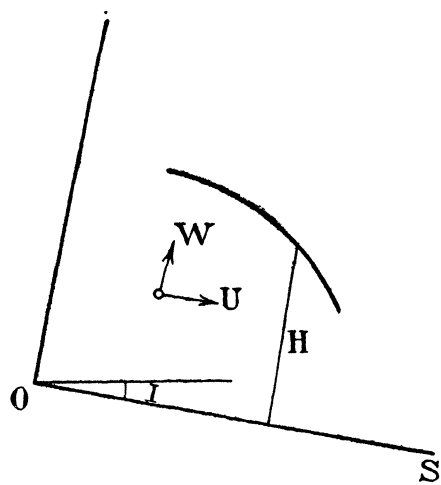

FIG. 1.

et fz. D'où l'on conclut par une intégration immédiate que dans les mouvements considérés les pressions suivent la loi hydrostatique :

$$p = \rho\, g\, (H - z).$$

En portant dans la première équation l'expression de p ainsi obtenue, en prenant les valeurs moyennes des différents termes sur une même ordonnée, et en admettant la loi de frottement de Chézy, il vient :

$$\alpha\, U \frac{\partial U}{\partial s} + \beta \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial s} = g\left(Sin\,I - \frac{bU^2}{H}\right)$$

équation classique qu'on retrouve, par exemple, dans l'Hydraulique générale de Boulanger (p. 304),

$$Sin\,I - \frac{\partial H}{\partial s}$$

y étant désigné sous le nom de pente motrice, et les coefficients α et β ayant pour expressions respectives $2\alpha-1-\eta$ et $1+2\eta$ Dans l'*Essai sur la Théorie des eaux courantes* (p. 270), BOUSSINESQ emploie une équation équivalente (258), compte tenu de l'équation de continuité.

Dans l'hypothèse d'un mouvement *par tranches*, les coefficients α et β seraient tous deux égaux à 1. En fait, l'inégale répartition des vitesses le long de chaque ordonnée conduit à leur attribuer des valeurs numériques légèrement supérieures. Les coefficients α et η de BOULANGER étant respectivement égaux à 1,058 et 0,020 dans le cas d'un canal de largeur indéfinie (*Hydraulique générale*, p. 293), il y a lieu d'adopter ici les valeurs numériques suivantes :

$$\alpha = 1{,}096$$
$$\beta = 1{,}040$$

L'équation de continuité est une seconde équation aux dérivées partielles qui achève de définir le mouvement. Comme il y a d'ailleurs dans la réalité physique trois grandeurs inconnues, la profondeur H, la vitesse moyenne U et le débit Q, liées par la formule évidente $Q=U\,H$, on peut écrire le système fondamental par rapport à un couple quelconque de grandeurs inconnues.

En adoptant le couple (Q, H) qui donne à l'équation de continuité la forme la plus simple et en même temps la plus suggestive, il vient :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 \\[2ex] \left(1 - \dfrac{\alpha Q^2}{gH^3}\right)\dfrac{\partial H}{\partial s} + \dfrac{\alpha+\beta}{gH^2}\,Q\,\dfrac{\partial Q}{\partial s} + \dfrac{\beta}{gH}\,\dfrac{\partial Q}{\partial t} = Sin\,I - \dfrac{bQ^2}{H^3} \end{cases}$$

3. — Equation de propagation.

Il résulte immédiatement de l'équation de continuité, écrite sous la forme ci-dessus, que $-Q$ et H sont les dérivées partielles d'une même fonction Z de s et de t.

Dès lors, la fonction Z satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(2)\qquad \left(1 - \frac{\alpha Q^2}{gH^3}\right)\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - \frac{\alpha+\beta}{gH^2}\,Q\,\frac{\partial^2 Z}{\partial s\partial t} - \frac{\beta}{gH}\,\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = Sin\,I - \frac{bQ^2}{H^3}$$

dans laquelle :

$$Q = \frac{\partial Z}{\partial t} \text{ et } H = -\frac{\partial Z}{\partial s}.$$

Cette équation étant linéaire par rapport aux dérivées du second ordre, la théorie générale des caractéristiques lui est applicable. On en conclut notamment qu'une perturbation quelconque donne naissance à deux fronts d'onde dont les vitesses de propagation V et V' sont les racines de l'équation ci-après en $\frac{ds}{dt}$:

$$ds^2 - \frac{\alpha + \beta}{\beta} U\, ds\, dt - \frac{gH - \alpha U^2}{\beta} dt^2 = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\alpha + \beta}{2} U \pm \sqrt{\frac{gH}{\beta} + U^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta}\right)^2}$$

ou, dans l'hypothèse des tranches :

$$U \pm \sqrt{gH}.$$

4. — Cas des faibles écarts.

Pour aller plus loin, il est nécessaire de faire intervenir le second groupe d'hypothèses, c'est-à-dire en premier lieu la *faible amplitude des écarts* par rapport au régime uniforme.

Soient alors H, U, Q, les valeurs constantes de la profondeur, de la vitesse et du débit avant l'origine de la perturbation, $H + h$, $U+u$, $Q+q$ les valeurs des mêmes grandeurs perturbées.

On porte ces dernières dans le système (1), et on considère h, u, q, comme des infiniment petits dont les puissances et les produits sont des infiniment petits d'ordre supérieur.

Le système (1) se ramène ainsi *en première approximation* à un système linéaire et à coefficients constants, d'où découle une équation du second ordre, également linéaire et à coefficients constants, dont la forme est la même, comme il est facile de s'en assurer, quelle que soit la grandeur inconnue, h, u, ou q, conservée dans l'élimination. Par rapport à q, par exemple, cette équation s'écrit :

$$(3) \qquad -\frac{gH - \alpha U^2}{\beta} \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\alpha + \beta}{\beta} U \frac{\partial^2 q}{\partial s\, \partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{3gI}{\beta} \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{2gI}{\beta U} \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

Telle est l'équation fondamentale, déjà considérée par divers auteurs que je me propose d'étudier.

5. — Equation des Intumescences.

L'équation (3) a l'avantage d'être *homogène*, c'est-à-dire indépendante du choix des unités, chaque terme ayant la dimension L^2T^{-3}. Elle a par contre l'inconvénient de contenir d'assez nombreux paramètres. Aussi est-il intéressant de la réduire à une forme plus simple.

Observons d'abord qu'on retrouve pour définir les caractéristiques la même équation qu'au paragraphe 3. Si donc on désigne par V et V', les célérités respectives des deux fronts d'onde, on a évidemment :

$$V\,V' = -\frac{g\,H - \alpha\,U^2}{\beta}$$

ce qui permet d'écrire l'équation (3) sous la forme :

$$V\,V'\,\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\alpha+\beta}{\beta}\,U\,\frac{\partial^2 q}{\partial s\,\delta t} + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{gI}{\beta U}\left(2\frac{\partial q}{\partial t} + 3\,U\frac{\partial q}{\partial s}\right) = 0$$

Le terme $\frac{gI}{\beta U}$ ayant pour dimension T^{-1}, on peut choisir l'unité de temps de manière à le rendre égal à l'unité. On peut en second lieu choisir l'unité de longueur, dont on dispose encore, pour ramener à l'unité le produit :

$$(-\,VV') = \frac{g\,H - \alpha\,U^2}{\beta}$$

qui, dans une rivière, est positif. L'équation ne dépend plus ainsi que d'un seul paramètre, la vitesse U, dont nous désignerons la valeur en unités réduites par a. Quant au coefficient numérique $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ d'après le § 2, il a pour valeur 2,054. Pour plus de généralité, nous remplacerons 2,054 a par 2 b, et nous écrirons l'équation des intumescences sous la forme définitive :

$$(4) \qquad -\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + 2\,b\,\frac{\partial^2 q}{\partial s\,\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + 3\,a\,\frac{\partial q}{\partial s} + 2\,\frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

l'équation correspondante des caractéristiques étant :

$$ds^2 - 2b\, ds\, dt - dt^2 = 0$$

Il est intéressant de noter qu'*on peut mettre sous cette forme toute équation à coefficients constants, linéaire et homogène par rapport aux dérivées seules et dont les caractéristiques ont des célérités de signe contraire.* La méthode qui va suivre est ainsi d'une portée relativement générale.

Les grandeurs de l'équation (3) sont exprimées en unités *usuelles*, et celles de l'équation (4) en unités *réduites*. La relation entre les premières (lettres accentuées) et les secondes (lettres non accentuées) est exprimée par les formules de transformation suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} t' &= \frac{\beta U}{g I}\, t \\ s' &= \frac{\beta U}{g I}\sqrt{\frac{g H - \alpha U^2}{\beta}}\, s \\ u' &= \sqrt{\frac{g H - \alpha U^2}{\beta}}\, u \\ q' &= \frac{U}{g I}\,(g H - \alpha U^2)\, q \end{aligned}\right.$$

La formule de transformation des vitesses montre immédiatement que la valeur du paramètre a est :

$$a = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{g H - \alpha U^2}{\beta}}} = \sqrt{\frac{U^2}{-V V'}} = \sqrt{\frac{\beta I}{g b - \alpha I}},$$

b étant ici le coefficient de frottement de la loi de Chézy.

Ainsi, *pour un canal donné, le paramètre a et par suite l'équation des intumescences sont les mêmes, quel que soit le régime uniforme précédant la perturbation.* D'où il résulte que les problèmes d'intumescences peuvent, pour un canal donné, être résolus une fois pour toutes en unités réduites. Seule la relation entre unités réduites et unités usuelles dépend du régime uniforme de départ.

6. — Observation préliminaire.

On voit se séparer, dans l'équation des intumescences, deux groupes de dérivées, les unes du second ordre, les autres du premier ordre. Réduite aux dérivées du second ordre, l'équation aurait pour solution la superposition de deux propagations en bloc, de célérités respectives V et V'. Réduite aux dérivées du premier ordre, elle aurait pour solution une propagation en bloc, dirigée uniquement vers l'aval, de célérité $\frac{3}{2}\ U$. On conçoit ainsi que, prise dans son ensemble, elle embrasse la généralité du phénomène. On pressent aussi que le caractère d'onde de translation doit prévaloir au voisinage du front d'onde où les dérivées secondes, discontinues, sont très supérieures aux dérivées premières, en général continues, tandis que le régime de crue doit tendre à s'établir dans le corps d'une intumescence très étalée où la circonstance inverse se produit.

7. — Solutions élémentaires.

L'équation (4) a évidemment *des solutions élémentaires*, de la forme $q = Re\ (e^{i\omega t - i\lambda s})$, λ étant une fonction de ω définie par la relation :

$$(6) \qquad \lambda^2 + 2\ b\ \omega\ \lambda - \omega^2 + 2\ i\ \omega - 3\ a\ i\ \lambda = 0$$

c'est-à-dire :

$$(6') \quad \lambda = -\ b\ \omega + \frac{3}{2}\ ai \pm \sqrt{(1 + b^2)\ \omega^2 - 2\ i\ \omega\ (1 + \frac{3}{2}\ ab) - \frac{9a^2}{4}}$$

On se bornera dans ce paragraphe à considérer les valeurs réelles du paramètre ω. A chacune de ces valeurs correspondent deux déterminations complexes de λ, et par suite deux solutions élémentaires :

$$q = Re \left\{ e^{\lambda_2 s}\ e^{i(\omega t - \lambda_1 s)} \right\}$$
$$q' = Re \left\{ e^{\lambda'_2 s}\ e^{i(\omega t - \lambda'_1 s)} \right\}$$

L'interprétation physique de ces formules est immédiate. Dans une section fixe s, q (ou q') représente une oscillation sinusoïdale entretenue qui ne s'amortit pas au cours du temps. A une époque fixe t, au contraire, q (ou q') représente une oscillation sinusoïdale

qui va en s'amortissant, selon le signe de λ_2 (ou λ'_2), vers l'aval ou vers l'amont. La phase de l'oscillation q est $\omega t - \lambda_1 s$, la vitesse de phase, $\frac{\omega}{\lambda_1}$, la fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$, le coefficient d'amortissement λ_2, et le facteur d'amortissement $e^{\lambda_2 s}$.

Appelons $A + i\,B$ la quantité sous radical, et R son module. Les deux déterminations de λ s'écrivent :

$$\lambda = -b\,\omega + \sqrt{\frac{R+A}{2}} + i\left(\frac{3}{2}\,a - \sqrt{\frac{R-A}{2}}\right)$$

$$\lambda' = -b\,\omega - \sqrt{\frac{R+A}{2}} + i\left(\frac{3}{2}\,a + \sqrt{\frac{R+A}{2}}\right)$$

La première peut être appelée *détermination-aval* et la seconde *détermination-amont* en raison des propriétés suivantes dont la démonstration est élémentaire.

Dans la détermination-aval, la vitesse de phase est positive et le coefficient d'amortissement négatif. Autrement dit, la phase se propage et l'amplitude s'amortit d'amont en aval.

Dans la détermination-amont, la vitesse de phase est négative et le coefficient d'amortissement positif. Autrement dit, la phase se propage et l'amplitude s'amortit d'aval en amont.

A fréquence égale, les oscillations-aval se propagent plus vite et s'amortissent moins vite que les oscillations-amont.

Pour un sens de propagation donné, la vitesse de propagation et le coefficient d'amortissement croissent avec la fréquence.

Dans le cas particulier d'une fréquence infinie, l'expression (6') de λ peut être facilement développée. On trouve ainsi pour la vitesse de phase (aval ou amont) la valeur :

$$\frac{\omega}{\lambda_1} = \frac{1}{-b \pm \sqrt{1+b^2}} = b \pm \sqrt{1+b^2},$$

c'est-à-dire précisément la célérité (v ou v') du front d'onde (aval ou amont) déduite des caractéristiques de l'équation (4). Le même calcul fournit pour le coefficient d'amortissement aval la valeur :

$$\mu_0 = \frac{2 + 3\,a\,b - 3\,a\sqrt{1+b^2}}{2\sqrt{1+b^2}} = \left(\sqrt{1+b^2} - b\right)\left(1 - \frac{3a - 2\,b}{2\sqrt{1+b^2}}\right)$$

et pour le coefficient d'amortissement amont la valeur :

$$\mu'_0 = \frac{2 + 3\,ab + 3\,a\sqrt{1+b^2}}{2\sqrt{1+b^2}} = (\sqrt{1+b^2} + b)\left(1 + \frac{3\,a - 2\,b}{2\sqrt{1+b^2}}\right)$$

En unités usuelles, les coefficients d'amortissement ont pour expressions respectives :

$$\frac{g\,I}{\beta\,U\,V}\left[1 - \frac{U}{V - V'}\left(3 - 2\frac{b}{a}\right)\right] \text{ et } -\frac{g\,I}{\beta\,U\,V'}\left[1 + \frac{U}{V - V'}\left(3 - 2\frac{b}{a}\right)\right]$$

Dans l'hypothèse des tranches, ces expressions se simplifient et deviennent :

$$\frac{g\,I}{U\,V}\left(1 - \frac{U}{2\sqrt{g\,H}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{-g\,I}{U\,V'}\left(1 + \frac{U}{2\sqrt{g\,H}}\right)$$

Dans le cas particulier d'une fréquence nulle, l'expression (6') de λ est également susceptible d'un développement facile. On en déduit pour l'oscillation-aval une vitesse de phase de $\frac{3}{2}\,a$ et un coefficient d'amortissement nul, et pour l'oscillation-amont une vitesse de phase de $-\frac{3\,a}{2\,(1 + 3\,ab)}$ et un coefficient d'amortissement de $3\,a$.

8. — Extension.

On peut élargir dans une certaine mesure la notion de solution élémentaire en supposant que, dans une section donnée, l'oscillation est une fonction du temps, non plus sinusoïdale, mais périodique et de forme quelconque. Cette fonction périodique du temps peut être représentée par une série de Fourier, c'est-à-dire par la superposition d'oscillations sinusoïdales pures (fondamentale et harmoniques). La décomposition ainsi effectuée dans une section reste valable dans les autres sections. Mais, à mesure qu'on se déplace vers l'aval, les harmoniques de rang élevé ont une valeur relative de plus en plus faible, à cause de la croissance du coefficient d'amortissement avec la fréquence. Il en résulte qu'à grande distance l'oscillation résultante tend vers la forme sinusoïdale pure.

Les solutions élémentaires, au sens restreint ou au sens élargi qui vient d'être esquissé, ne correspondent pas à la réalité physique. D'abord, elles supposent une extension indéfinie du canal dans les

deux sens et ne permettent pas de tenir compte des conditions aux limites qu'on rencontre dans les problèmes réels. Ensuite et surtout, elles représentent un régime permanent d'oscillation établi depuis toujours, et non la propagation d'une perturbation localisée dans l'espace et dans le temps.

Pour ces raisons, les solutions élémentaires n'ont pas de valeur physique propre et doivent être seulement considérées comme le point de départ d'une solution plus complète.

SECONDE PARTIE

LE PROBLÈME MIXTE DE LA PROPAGATION

9. — Principe de la Solution.

Le problème fondamental de la Théorie des intumescences consiste à déterminer la propagation et l'amortissement des perturbations produites par la manœuvre d'un ouvrage mobile situé en tête d'un canal indéfini, supposé en régime uniforme à l'origine des temps. Les données du problème sont ainsi, d'une part l'absence de perturbation à l'origine des temps, d'autre part la fonction d'injection de débit dans la section initiale :

$$q(s, o) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial q}{\partial t}(s, o) = 0 \qquad \text{pour } s > 0$$

$$q(o, t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc bien d'un problème *mixte*, qu'il est naturel de traiter d'abord et en détail dans le cas, le plus important en pratique, de la *propagation vers l'aval.*

L'équation des intumescences étant linéaire et à coefficients constants, on peut évidemment déduire des solutions élémentaires une solution de caractère plus général en formant l'intégrale :

$$q(s, t) = Re \int e^{i\omega t - i\lambda s} F(\omega)\, d\omega \tag{7}$$

Dans cette intégrale, λ est la fonction de la variable *complexe* $\omega = \xi + i\eta$ définie par l'équation (6). Elle a deux points de ramification :

$$\left.\begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix}\right\} = i \frac{1 + \frac{3}{2} a b \pm \sqrt{1 + 3\, ab - \frac{9a^2}{4}}}{1 + b^2}$$

situés sur l'axe imaginaire, et peut-être rendue *uniforme* par une cou-

pure pratiquée entre ces deux points. La détermination choisie est celle qui a été précédemment désignée sous le nom de *détermination-aval*, c'est-à-dire celle qui a pour partie principale à l'infini $\frac{\omega}{\rho}$ (§ 7). Le *chemin d'intégration* est une parallèle à l'axe réel, allant de $-\infty$ à $+\infty$ au voisinage et au-dessous de cet axe. Enfin la *fonction multiplicatrice* $F(\omega)$ est choisie de manière à satisfaire aux conditions aux limites.

Pour montrer qu'un tel choix est possible, j'examinerai successivement trois cas.

1° — $f(t)$ est défini par une *suite finie de Fourier* :

$$f(t) = a_o + \sum_1^p \left(a_n \cos \frac{n2\pi t}{T} + b_n \sin \frac{n2\pi t}{T} \right) \tag{8}$$

On choisit dans ce cas pour fonction multiplicatrice la fonction rationnelle :

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{a_o}{\omega} + \sum_1^p \frac{a_n - ibn}{\omega - n\frac{2\pi}{T}} \right) \tag{9}$$

Considérons d'abord $q(o, t)$. A cause de l'exponentielle, $F(\omega)e^{i\omega t}$ est nul pour $\eta = -\infty$ si $t<O$ et pour $\eta = +\infty$ si $t>O$. Il est par suite indiqué de transporter le chemin d'intégration par déplace-

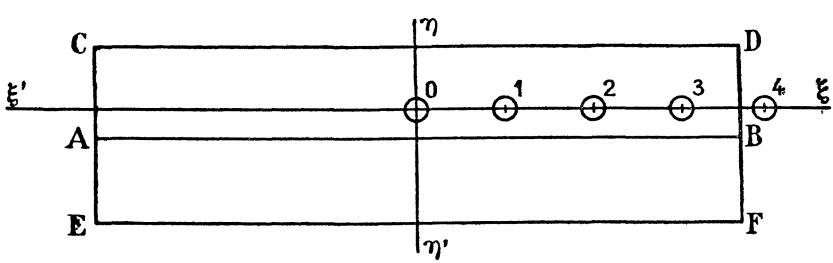

Fig. 2.

ment parallèle à l'infini vers le bas ou vers le haut, selon le cas. Pour examiner la légitimité de ce déplacement, effectuons l'intégrale sur le contour d'un rectangle tel que *ACDB* ou *AEFB*.

L'intégrale d'une fonction uniforme prise le long d'un contour

simple étant égale au produit de $2\pi i$ par la somme des résidus de la fonction relatifs aux pôles situés à l'intérieur du contour (PICARD, *Analyse*, t. II, chap. V, § 14), on a :

$$\int_A^B + \int_B^D + \int_D^C + \int_C^A = 2\pi i \sum Rn$$

$$\int_A^B + \int_B^F + \int_F^E + \int_E^A = 0$$

Supposons alors que les petits côtés des rectangles s'éloignent à l'infini par translation parallèle à 0 ξ et 0 ξ' et observons que sur ces petits côtés la fonction à intégrer est la somme d'un nombre fini de termes de la forme :

$$\frac{An}{\xi - \frac{n2\pi}{T} + i\eta} e^{i\xi t - \eta t}$$

qui tendent évidemment vers zéro.

On en conclut que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}$ est la même pour toutes les parallèles à l'axe réel situées d'un même côté de cet axe, et qu'elle subit à son passage, des η positifs vers les η négatifs, une discontinuité égale à :

$$2\pi i \sum Rn = f(t)$$

Compte tenu des valeurs à l'infini, il est dès lors évident qu'elle vaut 0 au-dessous de l'axe réel et $-f(t)$ au-dessus si $t < 0$, et 0 au-dessus de l'axe réel et $f(t)$ au-dessous si $t > 0$. Donc l'intégrale q, qui doit par définition être prise au-dessous de l'axe réel, satisfait à la seconde condition aux limites.

Considérons d'autre part $q(s, t)$. La partie principale de λ à l'infini est $\frac{\omega}{v}$, et celle de l'exponentielle $e^{i\omega\left(t - \frac{s}{v}\right)}$. Tous les raisonnements précédents, aussi bien sur les valeurs à l'infini que sur la légitimité du déplacement du chemin d'intégration, s'appliquent au cas actuel à condition de remplacer t par $t - \frac{s}{v}$. Donc l'intégrale est nulle lorsque t est inférieur à $\frac{s}{v}$, ce qui démontre l'existence

d'un *front d'onde* se propageant vers l'aval à la vitesse v. Elle est nulle en particulier pour $t = 0$ ainsi que la dérivée $\frac{\partial q}{\partial t}$ en tout point situé à l'aval de la section initiale, ce qui démontre que la première condition aux limites est également remplie.

2° $f(t)$ est défini par une *série de Fourier*. On choisit dans ce cas comme fonction multiplicatrice la fonction méromorphe définie par la série obtenue en faisant augmenter indéfiniment p dans l'expression (9). En observant que les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier sont de l'ordre de $\frac{1}{n}$, on démontre tout d'abord que la série $F(\omega)$ est absolument convergente en tout point du plan complexe différent des pôles et que par suite la fonction multiplicatrice est bien définie.

Pour étendre à ce cas les résultats obtenus plus haut, on considère l'aire intérieure à l'un des rectangles précédents et extérieure à des cercles de rayon petit, mais fini, tracés autour de chacun des pôles. Il est facile de s'assurer que la série $F(\omega)$ est uniformément convergente dans cette aire. Soit en effet l le demi-grand côté (fini) du rectangle, et A une constante telle que $|a_{n-i}b_n|$ soit inférieur à $\frac{A}{n}$, Si l'on fait abstraction des termes en nombre fini correspondant aux pôles intérieurs au rectangle, le terme général de la série $F(\omega)$ est inférieur en module à $\frac{A}{n} \frac{1}{\frac{n2\pi}{T} - l}$ quelle que soit la position du point ω dans l'aire considérée, d'où résulte la convergence uniforme. D'autre part, chacun des termes de la série est, dans cette même aire, une fonction holomorphe de ω. Donc $F(\omega)$ est elle-même holomorphe (Picard, *Analyse*, t. II, chap. V, § 40). Donc les égalités tirées d'intégrations sur le contour des rectangles restent valables.

Les expressions des résidus ne sont pas modifiées parce que la série $F(\omega)$, étant uniformément convergente sur la circonférence entourant un pôle quelconque ω_n, peut être intégrée terme à terme, et que dans ces conditions seul le terme en $\frac{1}{\omega-\omega_n}$ apporte une contribution différente de zéro à l'intégrale.

Il reste à démontrer, pour légitimer le déplacement du chemin d'intégration, que les intégrales sur les petits côtés des rectangles tendent vers zéro si l'on considère une succession de positions de ces

côtés ne rencontrant pas les cercles tracés autour des pôles et s'éloignant à l'infini. Considérons par exemple le petit côté correspondant aux ξ positifs. Sur ce petit côté, la série des modules de $F(\omega)$ est majorée par la série suivante :

$$\frac{A}{1}\frac{1}{a+(p\text{-}1)\frac{2\pi}{T}}+\frac{A}{2}\frac{1}{a+(p\text{-}2)\frac{2\pi}{T}}+\ldots\ldots+\frac{A}{p}\frac{1}{a}$$

$$+\frac{A}{p+1}\frac{1}{b}+\frac{A}{p+2}\frac{1}{b+\frac{2\pi}{T}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{A}{p+n}\frac{1}{b+(n\text{-}1)\frac{2\pi}{T}}+\ldots.$$

en appelant a et b les distances du petit côté aux pôles de rang p et $p+1$ entre lesquels il se trouve placé.

Or cette série définit une fonction de p qui tend vers zéro quand p augmente indéfiniment. Elle comprend en effet trois groupes de termes successivement décroissants, croissants et décroissants. En s'inspirant d'une méthode classique (Picard, *Analyse*, t. I, chap. I, § 25), on démontre sans difficulté que la somme de chacun de ces groupes est inférieure à une intégrale fonction de p qui tend vers zéro quand p augmente indéfiniment. Enfin il est évident que, comme plus haut, $F(\omega)\, e^{i\omega t - i\lambda s}$ est nul pour $\eta = -\infty$ si $t < \frac{s}{\varphi}$ et pour $\eta = +\infty$ si $t > \frac{s}{\varphi}$.

L'analyse précédente s'étend donc au cas actuel avec toutes ses conséquences,et l'intégrale $q(st)$ satisfait encore aux deux conditions aux limites.

3° Dans les deux cas qui précèdent, l'intumescence produite dans

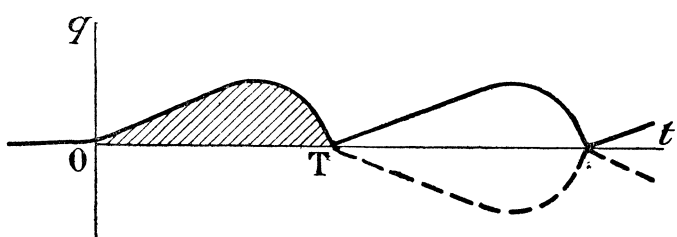

Fig. 3.

la section initiale à partir de l'origine des temps se répète indéfiniment avec une période égale à T. Le cas d'une intumescence limitée, nulle avant l'époque 0 et après l'époque T, s'en déduit sans difficulté

en superposant à l'intégrale $q\ (s,\ t)$ la même intégrale changée de signe et décalée de T dans le temps. Autrement dit, on passe du cas de l'intumescence périodique illimitée à celui de l'intumescence limitée en multipliant la fonction à intégrer par $1 - e^{-i\omega T}$.

Les raisonnements précédents conduisent à des expressions simples de l'intégrale $q\ (s\ t)$ parce que, dans les cas particuliers envisagés, la coupure n'intervient pas : soit que le chemin d'intégration soit transporté à l'infini vers le bas $\left(t < \frac{s}{v}\right)$, soit que la fonction à intégrer soit uniforme lorsqu'il est transporté à l'infini vers le haut $(s = 0,\ t > 0)$.

Le cas où t est supérieur à $\frac{s}{v}$ $(s \neq 0)$ est moins simple parce que le chemin d'intégration ne peut plus être transporté à l'infini vers le haut sans rencontrer la coupure. L'étude de l'intégrale repose encore sur l'existence, dans le plan complexe, de régions où la fonction à intégrer devient extrêmement petite. Si l'on pose $i\omega t - i\lambda s = X + iY$ ces régions sont celles où X est négatif et de grande valeur absolue. On est amené, dans cet esprit, à considérer X, en chaque point du plan complexe, comme la cote d'altitude d'une surface fictive (X) associée à l'équation des intumescences, et à diviser le calcul de l'intégrale $q\ (s,\ t)$ en deux parties : en premier lieu la détermination du relief de la surface (X), en second lieu le choix d'un chemin d'intégration approprié, l'attention étant spécialement portée sur les parties hautes du parcours, qui fournissent la contribution la plus importante à l'intégrale, c'est-à-dire sur les *cols* qui permettent le passage d'une vallée à une autre.

10. — Etude de la surface associée (X).

Soit donc à étudier la surface (X) dont la cote au point $\omega = \xi + i\eta$ est :

$$(10) \qquad X = Re\ (i\omega t - i\lambda s) = Re\left[\frac{3}{2}\, as + i\omega(t + bs) - is\sqrt{1+b^2}\sqrt{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}\right]$$

Une remarque préliminaire consiste à préciser le *choix de la détermination du radical*, c'est-à-dire la valeur de l'argument à lui attribuer pour chaque position de ω dans le plan complexe. Les conditions à remplir sont, en premier lieu, que l'argument varie d'une

façon continue sur toute courbe tracée dans le plan complexe et ne rencontrant pas la coupure, en second lieu que le choix effectué se raccorde à la définition de la détermination-aval, c'est-à-dire qu'à l'infini la partie principale de λ, soit

$$\frac{\omega}{\varphi} = - b\omega + \omega \sqrt{1 + b^2}.$$

On voit ainsi que l'argument du radical doit être $+ \frac{\pi}{2}$ à l'infini vers le haut ($\omega = i\eta$ et $\eta > 0$) et $-\frac{\pi}{2}$ à l'infini vers le bas ($\omega = i\eta$ et $\eta < 0$).

Cela étant, il est facile de s'assurer qu'on obtient dans chaque cas la valeur correcte de l'argument en appliquant la règle suivante : On trace les demi-droites $\omega_1 \xi_1$, $\omega_2 \xi_2$ à partir des points de ramifi-

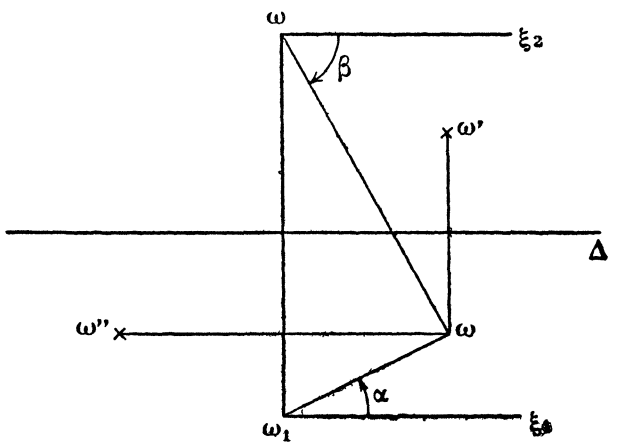

FIG. 4.

cation dans le sens des ξ positifs. Soient α et β les angles $\widehat{\xi_1 \omega_1 \omega}$ et $\widehat{\xi_2 \omega_2 \omega}$ comptés de manière à laisser la coupure en dehors de chacun d'eux. L'argument du radical est $\frac{\alpha + \beta}{2}$ ou $\frac{\alpha + \beta}{2} + \pi$ suivant que ω est à droite ou à gauche de l'axe imaginaire.

De cette remarque préliminaire, découlent d'intéressantes *propriétés de symétrie* de la surface (X).

On peut écrire, en effet, en appelant C l'ordonnée du milieu du segment $\omega_1 \omega_2$ $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = i\,C\right)$:

$$X-\frac{3}{2}as+C\,(t+bs)=Re\left\{\,i\left[(\omega\text{-}iC)\,(t+bs)-s\sqrt{1+b^2}\,\sqrt{(\omega\text{-}\omega_1)\,(\omega\text{-}\omega_2)}\right]\right\}$$

Si l'on considère alors deux points ω, ω', symétriques par rapport à la droite Δ, perpendiculaire au segment $\omega_1\,\omega_2$ en son milieu, il est clair que, pour ces deux points, les expressions entre crochets ont même module et des arguments égaux et opposés, c'est-à-dire sont imaginaires conjuguées l'une de l'autre. Donc les quantités entre accolades, qui sont le produit par i des expressions précédentes, ont leurs parties réelles égales et opposées. On en déduit que *la surface* (X) *est symétrique par rapport à la droite* Δ, de cote constante $\frac{3}{2}\,a\,s-C\,(t+bs)$, qui appartient elle-même à la surface.

Si l'on considère d'autre part deux points ω, ω'', symétriques par rapport à l'axe imaginaire, les cotes correspondantes sont égales, car les trois termes de l'expression (10) de X ont même partie réelle. C'est évident pour les deux premiers, et cela résulte pour le troisième de la règle énoncée plus haut, l'argument du radical étant $\frac{\alpha+\beta}{2}$ pour ω et $\frac{-\pi-\alpha+\pi-\beta}{2}+\pi=\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$ pour ω''. On en conclut que *la surface* (X) *est symetrique par rapport au plan vertical passant par l'axe imaginaire.*

Le profil de (X) *le long de l'axe imaginaire* présente du fait de cette symétrie un intérêt particulier. La règle de l'argument montre immédiatement que l'argument du radical est $+\frac{\pi}{2}$ au-dessus de ω_2, $-\frac{\pi}{2}$ au-dessous de ω_1, 0 sur la lèvre droite de la coupure et π sur la lèvre gauche. D'où les expressions suivantes de X :

$$(11)\quad X=\frac{3}{2}as-\eta\,(t+bs)+\begin{cases} s\sqrt{1+b^2}\,\sqrt{(\eta\text{-}\eta_1)\,(\eta\text{-}\eta_2)} & \text{au-dessus de } \omega_2 \\ 0 & \text{entre } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \\ -s\sqrt{1+b^2}\sqrt{(\eta\text{-}\eta_1)\,(\eta\text{-}\eta_2)} & \text{au-dessous de } \omega_1 \end{cases}$$

Il est dès lors immédiat que le profit de (X) le long de l'axe imaginaire se compose de deux arcs d'hyperbole réunis par un segment de droite, conformément à la figure ci-dessus.

L'équation du segment de droite est :

$$X=\frac{3}{2}as-\eta\,(t+bs)$$

celle de l'asymptote aux arcs d'hyperbole

$$X = \frac{3}{2} as - C s \sqrt{1 + b^2} - \eta \left(t - \frac{s}{\varphi}\right)$$

On vérifie d'ailleurs, qu'ainsi que l'exige la symétrie, ces deux droites se rencontrent au point C_0 ($\eta = C$).

Les arcs d'hyperbole présentent deux points à tangente horizon-

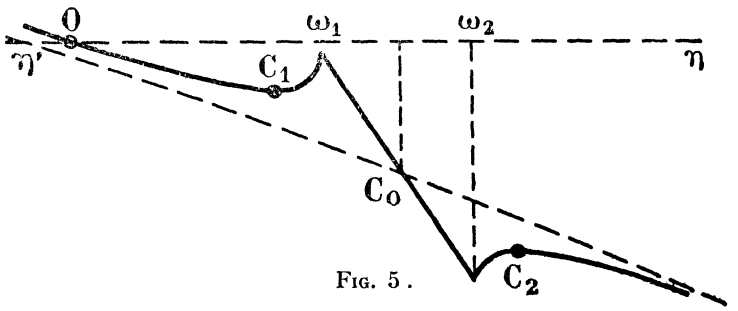

FIG. 5.

tale C_1 C_2. Or, le long de l'axe imaginaire, coupure exclue, λ est purement imaginaire comme ω, $X + iY$ est réel et Y est nul. On a donc constamment $\frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0$; aux points C_1 et C_2 on a en outre $\frac{\partial X}{\partial \eta} = 0$. Donc en ces points, les quatre dérivées partielles de X et Y sont nulles, et l'on a $\frac{dZ}{d\omega} = 0$. Les points C_1 et C_2 *sont des cols* dont on peut obtenir directement l'équation à partir de la condition ci-dessus.

Un autre point remarquable du profil est le « pic » correspondant au point de ramification ω_1. C'est bien un pic, car à son voisinage immédiat, la partie principale de $X - X_1$ est égale à :

$$Re \left[- is \sqrt{1 + b^2} \sqrt{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} \right]$$

et l'argument du radical reste compris, comme on le voit en appliquant la règle de l'argument, entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$ quelle que soit la position du point ω autour de ω_1. La partie imaginaire du radical est ainsi négative et $X - X_1$ est lui-même négatif. $| X - X_1 |$ est d'ailleurs très grand par rapport à $| \omega - \omega_1 |$, d'où il résulte que les sections de la surface (X) par les différents plans passant par la ver-

ticale de ω_1 sont des courbes à tangente verticale, sauf le cas exceptionnel du segment de droite $\omega_1\,\omega_2$.

Observons enfin que, *sur le profil, le point* $\omega = 0$ *est de cote nulle* ($X = 0$).

Les *lignes de niveau* ayant pour équation $X = C^{te}$ le déplacement élémentaire ($d\xi$, $d\eta$) effectué le long de l'une d'entre elles satisfait à la relation $\frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta = 0$. Il est ainsi perpendiculaire au vecteur $\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial X}{\partial \eta}\right)$, c'est-à-dire en vertu des relations d'analycité au vecteur $\left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}, -\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)$ c'est-à-dire enfin au déplacement élémentaire ($\delta\xi$, $\delta\eta$) le long de la courbe $Y = C^{te}$ passant par le point considéré. Les courbes $Y = C^{te}$ sont ainsi *les lignes de plus grande pente* de la surface (X).

Le profil le long de l'axe imaginaire, satisfaisant, coupure exclue, à la condition $Y = 0$, *est lui-même une ligne de plus grande pente. En un point ordinaire du profil, il n'en passe point d'autre. Aux cols par contre, il en passe une seconde dont l'équation est nécessairement encore* $Y = 0$.

Pour expliciter cette équation, on remplace dans la relation (6) ω par $\xi + i\eta$ et λ par $\frac{1}{s}\,[-(Y - \xi t) + i\,(X + \eta t)]$ puis on fait $Y = 0$ et l'on sépare le réel et l'imaginaire, ce qui conduit à deux relations entre X, ξ et η. L'élimination de X fournit l'équation de la courbe cherchée qui comprend d'une part l'axe imaginaire, d'autre part *l'ellipse*

$$\xi^2\left(\frac{t + bs}{s\sqrt{1 + b^2}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1 + \frac{3}{2}ab}{1 + b^2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \frac{3}{2}ab}{1 + b^2}\right)^2 + \frac{\left(s - \frac{3}{2}at\right)\left[s(1 + 3ab) + \frac{3}{2}at\right]}{(1 + b^2)\,(t^2 + 2bts - s^2)}$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^2 + (\eta - C)^2 = R^2 \tag{12}$$

en posant

$$(12') \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{s}{t} = K, \quad \dfrac{K\sqrt{1+b^2}}{1+bK} = A, \quad \dfrac{1+\frac{3}{2}ab}{1+b^2} = C \\ \sqrt{C^2 + \dfrac{\left(K - \frac{3}{2}a\right)\left[K(1+3ab) + \frac{3}{2}a\right]}{(1+b^2)(1+2bK-K^2)}} = R \end{array} \right.$$

Le centre de l'ellipse coïncide ainsi, comme il convient, avec le centre de symétrie de la surface, et ses sommets coïncident avec les

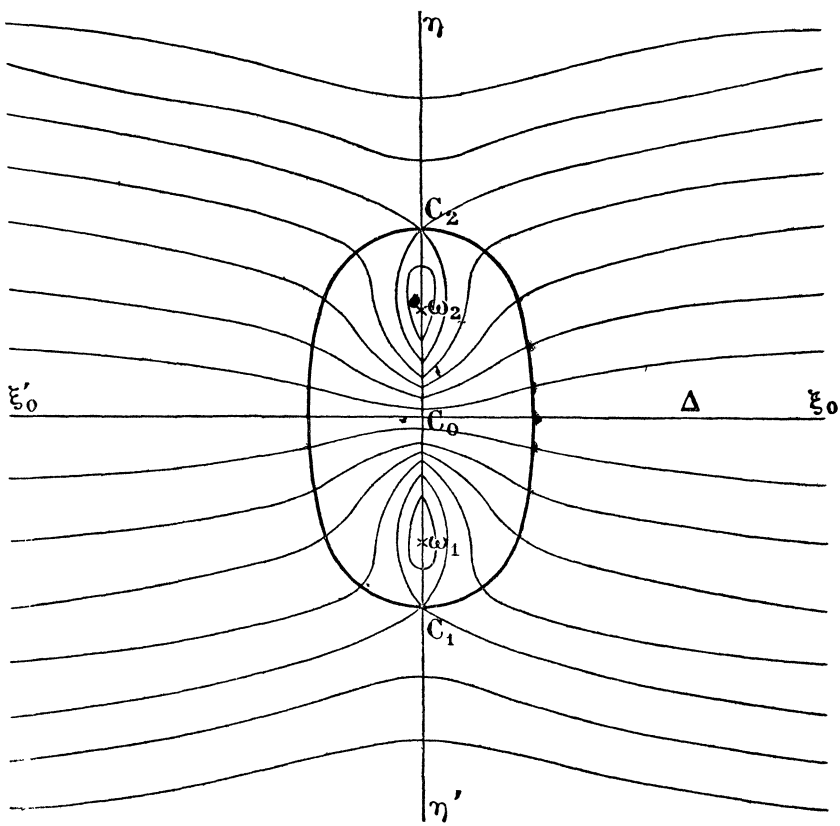

Fig. 6.

cols. La cote correspondant à chacun de ses points est donnée, d'autre part, par la formule

$$(13) \qquad X = -s\,(D\eta + E)$$

en posant

$$(13') \qquad D = \frac{1+2b\ K-K^2}{K\,(1+bK)} \text{ et } E = \frac{K-\frac{3}{2}a}{1+bK}$$

On peut observer que cette expression, qui est une fonction linéaire de η seul, définit un plan perpendiculaire au plan vertical passant par l'axe imaginaire. Autrement dit, la courbe $Y=0$ *sur la surface* est l'intersection de ce plan et du cylindre à génératrices verticales ayant pour directrice l'ellipse $Y=0$ du plan complexe. D'où il résulte que, *sur la surface aussi, la courbe* $Y=0$ *est une ellipse.*

Les indications qui précèdent permettent de se faire une idée

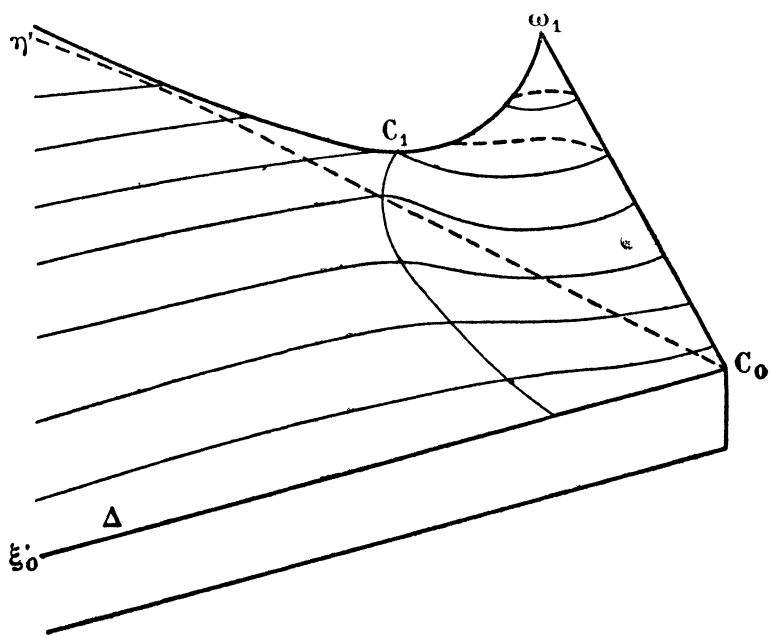

FIG. 7.

qualitative du relief de la surface. Nous les traduisons ci-dessus par un plan à courbes de niveau et par une vue perspective (cette dernière limitée en raison de la symétrie à un quart de la surface).

Il est intéressant, pour finir, de rechercher *la variation du relief de la surface* (X) *avec* s *et* t.

Observons tout d'abord que la position du point C dans le plan complexe est indépendante de s et de t, et que la position de l'ellipse $Y=0$ et des cols ne dépend que du rapport $\frac{s}{t} = K$.

Si K est très voisin de φ, les cols s'éloignent à l'infini vers le haut et vers le bas et l'asymptote aux arcs d'hyperbole tend à devenir horizontale. L'ellipse $Y=0$ est très voisine d'un cercle de rayon R infiniment grand, de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{V-K}}$; η est du même ordre de grandeur et $D\eta$ est infiniment petit, de l'ordre de $\sqrt{V-K}$. Tous les points de l'ellipse sont ainsi à la cote constante négative $-\mu_0 s$, μ_0 étant égal à $\frac{\varphi - \frac{3}{2}a}{1+b\varphi}$ ou encore, comme le montre un raisonnement direct appliqué à $e^{i\omega t - i\lambda s}$, au coefficient d'amortissement des oscillations sinusoïdales de fréquence infinie.

Si K diminue à partir de φ, les cols se rapprochent de la coupure et l'ellipse se contracte en s'amincissant ; l'altitude du col se relève tout en restant négative. Au voisinage de $K=\frac{3}{2}a$, le col est voisin de l'origine des coordonnées, et un développement facile montre que son altitude est donnée par la formule :

$$X = -\frac{s}{2K}\,\frac{\left(K-\frac{3}{2}a\right)^2}{(1+bK)\left(1+\frac{3}{2}ab\right)}$$

La valeur $K=\frac{3}{2}a$ correspond ainsi à un maximum pour l'altitude du col qui se confond alors avec l'origine, laquelle est, comme on le sait, un point de cote nulle.

Si K diminue au-dessous de $\frac{3}{2}a$ et tend vers 0, les cols tendent vers les points de ramification et l'ellipse vers le segment joignant ces deux points. L'altitude du col tend vers $-\infty$ quel que soit s.

Enfin, si s et t augmentent, K restant fixe, les cols et l'ellipse ne changent pas en plan, la surface se creuse et devient plus abrupte.

11. — Chemin d'intégration.

Continuons à nous placer dans le cas où $t > \frac{s}{\varphi}$ $(s \neq 0)$, c'est-à-dire où la fonction à intégrer est nulle à l'infini vers le haut.

Le déplacement parallèle dans cette direction se heurte à l'obstacle de la coupure, et par suite le chemin d'intégration doit être

constitué conformément au schéma ci-dessous. Il est indiqué, en raison de ce qui précède, d'y comprendre l'ellipse $Y=0$. Le col est en effet le passage naturel d'une dépression à l'autre, et l'ellipse de plus grande pente est la ligne qui descend le plus rapidement du col.

Il est d'ailleurs évident que la partie (III) de l'intégrale s'évanouit

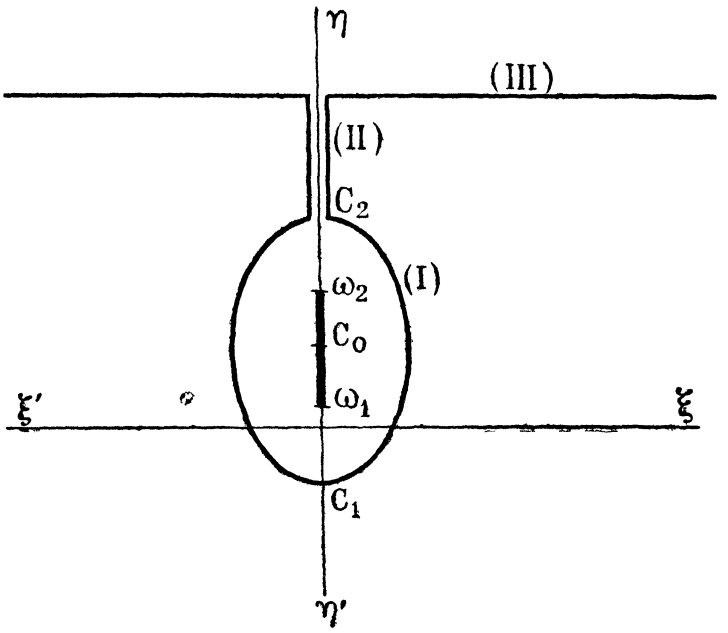

Fig. 7 *bis*.

à l'infini, et que la partie (II) est identiquement nulle, ses éléments se détruisant deux à deux.

Il en résulte que q (st) *est égal à l'intégrale le long de l'ellipse, accrue du produit par* $2\pi i$ *de la somme des résidus des pôles extérieurs à l'ellipse.*

12. — Front d'onde.

Une première application des généralités précédentes peut être faite au front d'onde.

Considérons un point de l'intumescence infiniment voisin du front d'onde et tendant vers celui-ci. K tend vers v et R augmente indéfiniment. L'intégrale le long de II et III est nulle à tout moment, et l'est par suite également à la limite. Quant à l'intégrale le long de

l'ellipse (I), elle a pour limite l'intégrale le long du cercle de l'infini, de cote constante $-\mu_0 s$. Observons ici que si on se plaçait au front d'onde même, au lieu de tendre vers lui, on trouverait pour l'intégrale une valeur moitié de celle ci-dessus, c'est-à-dire la demi-somme des valeurs de la perturbation immédiatement avant le front d'onde et immédiatement après (parce qu'alors l'intégrale III ne peut plus être considérée comme nulle et que le chemin d'intégra-

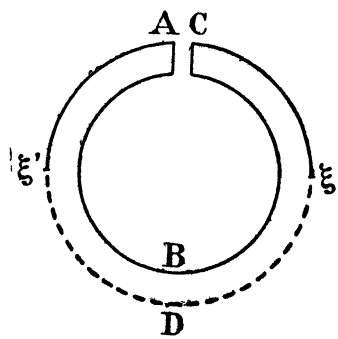

FIG. 8.

tion doit être constitué comme l'indique le schéma ci-contre par l'un des tracés ($\xi' A\ B\ C \xi$) ou ($\xi'\ D\ \xi$).

La valeur de la perturbation immédiatement après le front d'onde est ainsi :

$$e^{-\mu_0 s}\ Re \int F(\omega)\, d\omega$$

L'intégrale $Re \int F(\omega)\, d\omega$ étant indépendante de s et de t, on en déduit que le *front d'onde s'amortit selon une loi exponentielle au fur et à mesure de la propagation.*

Cette loi n'a de sens, pour l'instant, que si l'intégrale $\int F(\omega)\, d\omega$ est différente de zéro, c'est-à-dire s'il existe une discontinuité de débit à l'origine de la perturbation.

Mais on va voir qu'elle peut être étendue à des cas plus généraux par une méthode qui fournit en même temps un développement en série de l'intégrale autour du front d'onde.

Cette méthode repose sur la remarque suivante, due à M. GOLDSCHMIDT.

Soit l'intégrale :

$$q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{i\omega t}\ G(\omega)\, \frac{d\omega}{\omega}$$

G étant représenté par une série entière en $\frac{i}{\omega}$ uniformément convergente sur le cercle (C) de rayon fixe R :

$$G(\omega) = a_0 + a_1\left(\frac{i}{\omega}\right) + a_2\left(\frac{i}{\omega}\right)^2 + \ldots\ldots + a_K\left(\frac{i}{\omega}\right)^K + \ldots.$$

On en déduit par dérivation :

$$q^{(K)}(t) = \frac{i^K}{2\pi i}\int_C e^{i\omega t}\,\omega^K\,G(\omega)\,\frac{d\omega}{\omega}$$

et en posant $\omega = Re^{i\alpha}$:

$$q^{(K)}(o) = \frac{i^K}{2\pi}\int a_K\,i^K\,d\alpha = (-1)^K\,a_K$$

$q(t)$ peut dès lors être représenté par le développement suivant :

$$q(t) = a_0 - a_1\frac{t}{1} + a_2\frac{t^2}{2} - \ldots\ldots + (-1)^K\,a_K\,\frac{t^K}{K!} + \ldots.$$

Il est facile de s'assurer que ce développement est convergent pour toute valeur de t.

En effet, la série $G(\omega)$ étant convergente sur le cercle de rayon R, on peut trouver un nombre M indépendant de K tel que $\frac{|a_K|}{R^K} < M$. La série des modules de $q(t)$ a pour terme général

$$|a_K|\,\frac{t^K}{K!} = \frac{|a^K|}{R^K}\,\frac{(Rt)^K}{K!} < M\,\frac{(Rt)^K}{K!}$$

La série de terme général $M\,\frac{(R\,t)^K}{K!}$ étant convergente pour toute valeur de t, il en est de même *a fortiori* de la série $q(t)$, dont au surplus le reste est inférieur en module à :

$$M\,\frac{(Rt)^{K+1}}{(K+1)!}\,e^{Rt}$$

Soit alors :

$$q(s\,t) = Re\int F(\omega)\,e^{i\omega t - i\lambda s}\,d\omega$$

L'exposant $i\omega t - i\lambda s$ peut s'écrire :

$$i\omega\left(t - \frac{s}{\varphi}\right) - i\omega s\left(\frac{\lambda}{\omega} - \frac{1}{\varphi}\right)$$

$t - \dfrac{s}{\varphi} = \theta$ représente le temps compté dans chaque section à partir du passage du front d'onde; d'autre part $\dfrac{\lambda}{\omega}$ est une fonction de ω holomorphe à l'extérieur d'un cercle de centre 0 et de rayon η_2, donc développable en série entière selon les puissances de $\dfrac{i}{\omega}$, le rayonde convergence du développement étant $\dfrac{1}{\eta_2}$.

$$(14) \qquad \frac{\lambda}{\omega} = \frac{1}{\varphi} - \mu_0 \frac{i}{\omega} + \mu_1 \left(\frac{i}{\omega}\right)^2 + \mu_2 \left(\frac{i}{\omega}\right)^3 + \ldots\ldots$$

L'exposant s'écrit alors :

$$i\omega\theta - \mu_0 s + \mu_1 s \frac{i}{\omega} + \mu_2 s \left(\frac{i}{\omega}\right)^2 + \ldots.$$

et l'intégrale devient :

$$q(s,\theta) = Re \left\{ e^{-\mu_0 s} \int_C e^{i\omega\theta} e^{\mu_1 s \frac{i}{\omega} + \mu_2 s \left(\frac{i}{\omega}\right)^2 + \ldots.} F(\omega)\, d\omega \right.$$

Elle s'identifie à l'intégrale précédente (au remplacement près de t par θ), en posant :

$$G(\omega) = 2\pi i\omega\, F(\omega)\, e^{\mu_1 s \frac{i}{\omega} + \ldots\ldots}$$

Or $2\pi i\omega F(\omega)$ est la somme d'une constante a_0 et de termes de la forme

$$An \frac{\omega}{\omega - n\dfrac{2\pi}{T}} = \frac{An}{1 - n\dfrac{2\pi}{T\omega}}$$

et se trouve par suite développable en série entière en $\dfrac{i}{\omega}$ si l'on suppose les pôles de F en nombre limité, et si en outre le cercle (C) enveloppe tous ces pôles. De même $e^{\mu_1 s \frac{i}{\omega} + \cdots}$ est développable en série entière en $\dfrac{i}{\omega}$ pourvu que le cercle (C) enveloppe le point de ramification ω_2.

Donc $G(\omega)$ est représentable par un développement en série entière de la forme précédente

$$(15) \qquad G(\omega) = 2\pi i\omega F(\omega) e^{\mu_1 s \frac{i}{\omega} + \dots} = a_0 + a_1 \frac{i}{\omega} + a_2 \left(\frac{i}{\omega}\right)^2 + \dots$$

et l'on a :

$$\frac{\partial^K q}{\partial \theta^K}(s, o) = e^{-\mu_0 s} (-1)^K a_K$$

D'où :

$$(16) \qquad q = e^{-\mu_0 s} \Sigma (-1)^K \frac{a_K}{K!} \theta^K = e^{-\mu_0 s} \left(a_0 - a_1\theta + a_2 \frac{\theta^2}{2!} \dots\right)$$

En faisant $s = 0$, on trouve pour $2\pi i \omega F(\omega)$ le développement $f(o) - f'(o) \frac{i}{\omega} + f''(o) \left(\frac{i}{\omega}\right)^2 - \dots\dots$ Celui de l'exponentielle est d'autre part :

$$1 + \mu_1 s \frac{i}{\omega} + \left(\frac{\mu_1^2 s^2}{2} + \mu_2 s\right) \left(\frac{i}{\omega}\right)^2 + \dots\dots$$

D'où :

$$q = e^{-\mu_0 s} \left\{ f(o) + [f'(o) - \mu_1 s f(o)]\theta + \left[f''(o) - \mu_1 s f'(o) + \left(\frac{\mu_1^2 s^2}{2} + \mu_2 s\right) f(o)\right] \frac{\theta^2}{2} + \dots \right\}$$

Si en particulier $G(\omega)$ se réduit à son premier terme (injection d'un débit supplémentaire *constant*), les valeurs de q et de ses dérivées première et seconde au front d'onde sont respectivement :

$$e^{-\mu_0 s} f(o)$$
$$-e^{-\mu_0 s} \mu_1 s f(o)$$
$$e^{-\mu_0 s} \left(\frac{\mu_1^2 s^2}{2} + \mu_2 s\right) f(o)$$

les coefficients μ_1 et μ_2 étant négatifs.

Donc q et $\frac{\partial q}{\partial \theta}$ sont toujours positifs au front d'onde. Par contre $\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}$ est négatif si s est petit, et positif si s est grand. Pour $s = -\frac{2\mu_2}{\mu_1^2}$, un point d'inflexion apparaît au front d'onde. Pour $s < -\frac{2\mu_2}{\mu_1^2}$, l'intu-

mescence immédiatement en arrière du front d'onde tourne sa concavité vers le bas; pour $s > -\frac{2\mu_2}{\mu_1^2}$ elle tourne sa concavité vers le haut (dans le cas bien entendu d'une intumescence positive, l'inverse ayant lieu dans le cas d'une intumescence négative).

Dans une section fixe, $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}$. D'autre part, au front d'onde, $\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$ comme on le voit facilement par dérivation de l'intégrale q.

Donc *suffisamment loin vers l'aval*, $\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}$ est > 0 au front d'onde comme $\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}$.

On verra plus loin que les résultats actuels, afférents aux intumescences de débit, s'étendent sans difficulté aux intumescences de hauteur. On retrouve ainsi, en le précisant, un résultat intuitivement obtenu par Boussinesq et énoncé par lui en ces termes au paragraphe XXXVII de l'*Essai sur la Théorie des eaux courantes* :

« La partie inférieure d'une onde avance généralement plus vite « que le corps de la même onde et doit, en s'amincissant, s'étrangler « sans cesse de manière à tourner vers le haut sa concavité ou sa « convexité, suivant que l'intumescence est positive ou négative. »

La dérivée seconde changeant de signe dans le corps de l'intumescence, soit qu'il s'agisse d'une perturbation limitée passant par un maximum, soit qu'il s'agisse d'une perturbation illimitée tendant vers un nouveau régime uniforme, on conclut que *suffisamment loin vers l'aval l'intumescence présente certainement un point d'inflexion intermédiaire.*

L'analyse précédente s'étend au cas où les pôles de F sont en nombre infini, les termes correspondant aux pôles extérieurs au cercle d'intégration étant développables en série entière par rapport à ω. Toutefois, à l'intégrale sur le cercle s'ajoute alors $2\pi i$ fois la somme de série des résidus des pôles extérieurs.

Remarquons enfin que le développement de $\frac{\lambda}{\omega}$ se rattache aux Polynômes de Legendre. On sait en effet que ceux-ci apparaissent dans le développement de l'irrationnelle

$$X = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha u + \alpha^2}} = X_0 + X_1 \alpha + \ldots + X_k \alpha^k + \ldots$$

l'expression de X_K étant $\frac{1}{2^K K!} \frac{d^K(u^2-1)^K}{du^K}$.

Pour l'irrationnelle $Y = \sqrt{1-2\alpha u + \alpha^2}$ on a un développement analogue $Y_0 + Y_1\alpha + \ldots\ldots + Y_K \alpha^K + \ldots\ldots$ avec

$$Y_K = X_{K-2} - 2u\, X_{K-1} + X_K$$

On en conclut que :

$$\frac{\lambda}{\omega} = Y_0 - b + \frac{3a}{2}(1 + Y_1)\frac{i}{\omega} + Y_2\,\alpha^2 + \ldots\ldots + Y_K\,\alpha^K + \ldots$$

avec $\alpha = \frac{3\,a}{2\sqrt{1+b^2}} \frac{i}{\omega}$ et $u = \frac{2 + 3a\,b}{3\,a\sqrt{1+b^2}}$.

13. — Formules asymptotiques.

Les formules asymptotiques ont pour objet de définir la valeur de la perturbation au bout d'un temps très long, soit très loin à l'aval ($s = Kt$ —intumescence asymptotique), soit dans une section fixe ($s = C^{te}$—résidu d'intumescence).

Nous traiterons d'abord le cas de *l'intumescence asymptotique correspondant à une perturbation initiale limitée.* Dans ce cas, la fonction multiplicatrice $F(\omega)$ contient le facteur $1 - e^{-i\omega T}$, dont les zéros sont $n\frac{2\pi}{T}$ ($n = 0, 1, 2\ldots$), et n'a par suite aucun pôle à distance finie; $q(s, t)$ se réduit donc à l'intégrale le long de l'ellipse. Or il est évident que, lorsque s et t sont très grands tous deux dans le rapport fixe K, la contribution des éléments voisins du col, si faible que puisse être sa valeur absolue, l'emporte infiniment en valeur relative sur celle des autres éléments de l'ellipse. Il est par suite possible, en première approximation, de remplacer l'ellipse par la parabole osculatrice, et de donner à $F(\omega)$ sous le signe d'intégration la valeur constante correspondant au col. En transportant au col l'origine des ordonnées, et en désignant par η' les nouvelles valeurs de celles-ci, l'équation de l'ellipse s'écrit $\left(\frac{\xi}{A}\right)^2 + \eta'^2 - 2\,R\eta' = 0$, et celle de la parabole osculatrice $\eta' = \frac{1}{2R}\left(\frac{\xi}{A}\right)^2$. D'autre part, si l'on désigne l'altitude du col par $-\mu s$ et si l'on observe que $X = -\mu s$

$-s\,D\,\eta'$, l'intégrale à évaluer, $\int e^X F(\omega)\,d\omega$ a pour partie principale

$$e^{-\mu s}\,F_c \int e^{-sD\eta'} d\xi$$

Posons alors $s\,D\,\eta' = y$. D'où :

$$\xi = A\sqrt{\frac{2R}{Ds}}\;y^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad d\xi = \frac{1}{2}\,A\sqrt{\frac{2R}{Ds}}\;y^{-\frac{1}{2}}\,dy.$$

L'intégrale s'écrit :

$$e^{-\mu s}\,Fc\,\frac{A}{2}\sqrt{\frac{2R}{Ds}}\int e^{-y}\,y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

Il faut d'ailleurs intégrer de 0 à $+\infty$, puisque $y = s\,D\,\eta'$ et que s est supposé très grand, et doubler ensuite le résultat pour tenir compte de la contribution de la demi-ellipse de gauche. La valeur asymptotique de l'intégrale est finalement :

$$A\,F_c\sqrt{\frac{2\pi R}{D}}\,e^{-\mu s}\,s^{-\frac{1}{2}} \tag{17}$$

Cette formule est d'une très grande importance, car elle contient implicitement la **loi des crues**. On y observe en effet la présence d'une exponentielle, produisant un amortissement très rapide, sauf dans le cas où l'on a simultanément $\mu = 0$, $F_c \neq 0$, auquel cas l'intumescence asymptotique a une valeur relative beaucoup plus importante, de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{s}}$. La condition $\mu = 0$ signifie que le col est à l'origine, c'est-à-dire que $K = \frac{3}{2}\,a$, ou encore, en unités usuelles, que la vitesse de l'observateur est égale à $\frac{3}{2}\,U$. La condition $F_c \neq 0$, lorsque le col est à l'origine, signifie que $a_0 T \neq 0$, c'est-à-dire, en langage clair, que le volume total injecté pendant la durée de la perturbation est différent de zéro.

Ainsi, pour qu'à grande distance à l'aval on puisse observer la propagation d'une intumescence notable, il faut que la perturbation initiale se traduise par un apport de liquide, c'est-à-dire que le débit supplémentaire moyen injecté en tête du canal soit différent de zéro, quelle que puisse être par ailleurs la forme du diagramme des débits instan-

tanés. En outre, lorsque cette condition est remplie, l'intumescence tend à se propager à la vitesse $\frac{3}{2}$ *U requise par la loi des crues. Il faut entendre par là que tous les observateurs se déplaçant le long du canal à une vitesse différente, et notamment celui qui accompagne le front d'onde, constatent un amortissement exponentiel qui rend la perturbation rapidement négligeable.*

Le cas de l'**intumescence illimitée** se distingue de celui qui vient d'être traité, en ce que la fonction multiplicatrice $F(\omega)$ a des pôles qui sont les points $n\frac{2\pi}{T}$ ($n=0, 1, 2, 3\ldots$) sur l'axe réel. A l'intégrale le long de l'ellipse s'ajoutent donc les résidus autour des pôles extérieurs à l'ellipse.

Il est facile de montrer tout d'abord que la traversée d'un pôle par l'ellipse, lorsque K varie, ne produit pas de discontinuité. En effet, lorsque l'ellipse enveloppe encore le pôle, la contribution des éléments infiniment voisins est égale à πi fois le résidu ; lorsqu'au contraire elle vient de le franchir, la contribution des mêmes éléments est égale à $-\pi i$ fois le résidu ; mais il s'y ajoute $2\pi i$ fois le résidu autour du pôle, ce qui rétablit la continuité.

Il est également manifeste que tant que K reste supérieur à $\frac{3}{2}a$, l'analyse précédente, n'a pas à être modifiée dans l'essentiel. En effet, le col est plus élevé que le point d'intersection, en plan, de l'ellipse et de l'axe réel, et celui-ci est plus élevé à son tour que les pôles extérieurs à l'ellipse (ce dernier point étant une conséquence du fait que pour ω réel, le coefficient d'amortissement croît avec la fréquence). Donc la contribution asymptotique du voisinage du col, telle qu'elle a été précédemment écrite, l'emporte sur les résidus. La seule différence est que Fc ne contient plus le facteur $(1-e^{\eta_c T})$.

Les choses changent, par contre, lorsque K dépasse $\frac{3}{2}a$. Le pôle $\omega=0$ devient en effet extérieur à l'ellipse et plus élevé que le col ; son résidu devient donc prépondérant ; en outre, à mesure que K tend vers 0, le col s'abaisse successivement au-dessous de tous les autres pôles de l'axe réel. Si $a_0 \neq 0$, c'est-à-dire si le débit moyen supplémentaire injecté n'est pas nul, l'intégrale I tend vers a_0 pour $K < \frac{3}{2}$ et vers $\frac{a_0}{2}$ pour $K = \frac{3}{2}a$. *Il tend à s'établir asymptotiquement un nouveau régime uniforme correspondant au débit moyen*

supplémentaire injecté a_0, *et la zone de raccordement des deux régimes tend à se propager à la vitesse* $\frac{3}{2}U$ (il en est ainsi en particulier du point d'inflexion dont l'existence a été démontrée au § 12). En effet, très loin à l'aval, l'intégrale qui représente $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$ est du signe de l'élément correspondant au col, soit :

$$-\omega^2 \frac{a_0}{2\pi i\omega} e^X d\omega = -\eta \frac{a_0}{2\pi} d\xi,$$

qui est positif si $K > \frac{3}{2}a$, le col étant alors au-dessous de l'origine, et négatif si $K < \frac{3}{2}a$, la situation inverse se présentant alors).

Le nouveau régime uniforme est d'ailleurs altéré par des oscillations de très petite amplitude ($e^{\lambda_2 s}$) correspondant aux résidus des autres pôles. Si $a_0=0$, il se confond avec l'ancien, et la perturbation ne se traduit asymptotiquement que par les oscillations de très petite amplitude dont il vient d'être question, l'oscillation fondamentale l'emportant de beaucoup en valeur relative sur les harmoniques, puisque le pôle $\frac{2\pi}{T}$ est plus élevé que les suivants le long de l'axe réel.

Analytiquement, le cas de l'intumescence illimitée n'apporte de formule asymptotique nouvelle que dans le cas où le col est à l'origine, et coïncide alors avec un pôle de $F(\omega)$. La même méthode d'évaluation s'applique en posant $F(\omega) = \frac{G(\omega)}{\omega}$, et en tenant compte du fait que $G_0 = \frac{a_0}{2\pi i}$.

On trouve ainsi pour valeur asymptotique de q :

$$\frac{a_0}{2}\left(1 + \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{A\sqrt{2\pi RD}}\right) \tag{18}$$

Dans le cas, enfin, du *résidu d'intumescence* (s fini, t infini), l'ellipse est venue se confondre avec la coupure, et l'intégrale doit être prise sur les deux bords de celle-ci. En associant 2 à 2 les points de même affixe situés sur deux bords opposés, et en mettant en évi-

dence le voisinage de ω_1 qui apporte seul une contribution relative appréciable à l'intégrale, on peut écrire celle-ci :

$$F_1\, e^{i\omega_1 t - i\lambda_1 s} \int e^{i(\omega-\omega_1)t}\, [e^{-i(\lambda-\lambda_1)s} - e^{-i(\lambda'-\lambda_1)s}]\, d\omega$$

D'autre part, dans le voisinage de ω_1, la quantité entre crochets est approximativement égale à $-i\,s\,(\lambda-\lambda')$ ou à :

$$-2\,is\sqrt{(1+b^2)\,(\eta-\eta_1)\,(\eta_2-\eta_1)}.$$

En posant $\eta-\eta_1=\eta'$, l'intégrale prend la forme :

$$F_1\, e^{i\omega_1 t - i\lambda_1 s}\; 2s\,\sqrt{(1+b^2)(\eta_2-\eta_1)} \int e^{-\eta' t}\,\sqrt{\eta'}\, d\eta'$$

c'est-à-dire, tous calculs faits :

$$(19) \qquad F_1\,\sqrt{\pi(1+b^2)\,(\eta_2-\eta_1)}\; 2s\; e^{s\left(\frac{3a}{2} - b\eta_1\right)}\; e^{-\eta_1 t}\; t^{-\frac{3}{2}}$$

Dans le cas de l'*intumescence limitée*, cette expression représente le résidu d'intumescence qui est ainsi de l'ordre de $e^{\eta_1 t}\, t^{-\frac{3}{2}}$.

Le coefficient η_1 qui figure dans cette formule a pour expression approchée, en unités réduites $\frac{9}{8}\,a^2$ et en unités usuelles, — dans l'hypothèse des tranches—,

$$\frac{9}{8}\,\frac{U^2}{gH-U^2}\,\frac{g\,I}{U} = \frac{9}{8}\,\frac{gI^{5/3}}{bg-I}\,\frac{b^{1/3}}{Q^{1/3}}$$

A une époque donnée, le résidu d'intumescence est d'autant plus faible que η_1 est plus grand. Il varie donc en sens inverse de la pente et dans le même sens que le coefficient de rugosité.

Dans le cas de l'intumescence illimitée il s'ajoute à l'expression ci-dessus le produit par $2\pi i$ des résidus autour des pôles qui sont beaucoup plus importants puisqu'ils correspondent à des oscillations sinusoïdales d'amplitude finie, s étant fini. Le résidu d'intumescence est alors l'image de l'intumescence initiale transposée au moyen de la règle suivante :

On fait le spectre de l'intumescence initiale. Le terme constant de ce spectre se retrouve sans altération dans le résidu d'intumescence. Par contre, chaque terme sinusoïdal est corrigé d'une différence de phase et d'un facteur d'amortissement dépendant de la fréquence de

l'oscillation, et de l'écart entre la section-origine et la section d'observation.

Si, en particulier, le spectre initial se réduit à son terme constant, le spectre résiduel lui est rigoureusement *égal* (injection indéfinie d'un débit supplémentaire constant).

Si le spectre initial comprend un seul terme sinusoïdal, le spectre résiduel est *semblable*, avec réduction et décalage.

Si le spectre initial comprend plusieurs termes sinusoïdaux, il y a *déformation* lors du passage au spectre résiduel, ce dernier se rapprochant d'autant plus de la forme sinusoïdale pure (oscillation fondamentale) que l'on est plus loin à l'aval.

On observera que le résidu d'intumescence ainsi défini coïncide avec le régime permanent d'oscillation correspondant à la superposition des solutions élémentaires

$$A_n \, e^{i\omega_n t - i\lambda_n s}$$

résultat à peu près évident *a priori* puisqu'au bout d'un temps très long l'influence de la période initiale non perturbée s'évanouit.

14. — Etude des surélévations.

La théorie des intumescences ne comporte pas seulement la détermination du surdébit q, mais aussi celle de la surélévation h.

Il est facile de démontrer que celle-ci est fournie par l'intégrale :

$$h = Re \int \frac{\lambda}{\omega} \, e^{i\omega t - i\lambda s} \, F(\omega) \, d\omega \tag{20}$$

Appelons en effet provisoirement h_1 la solution cherchée. On a, d'après l'équation de continuité,

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

et d'après la forme des intégrales

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

Donc, la différence $h - h_1$ est une fonction de s seul et non de t. Or, si l'on considère une section fixe quelconque, h et h_1, y sont nuls tous deux avant le passage du front d'onde.

Donc, ils coïncident à tout moment, et l'intégrale h fournit bien la solution du problème.

L'étude précédente de l'intégrale q se transpose sans difficulté à l'intégrale h qui jouit de propriétés analogues. Elle est nulle avant et différente de zéro après le passage du front d'onde. Elle s'amortit au front d'onde suivant la même loi exponentielle que q. Enfin, elle n'a asymptotiquement une valeur notable que pour un observateur se déplaçant à la vitesse $\frac{3}{2}U$.

Au front d'onde, le rapport $\frac{q}{h}$ est égal à V ; dans l'intumescence asymptotique, il tend vers $\frac{3}{2}U$. Il n'est autre, d'ailleurs, que la vitesse de propagation d'une partie d'intumescence telle qu'elle a été définie par Boussinesq, c'est-à-dire la vitesse d'un observateur qui se déplacerait vers l'aval de manière à avoir constamment devant lui le même volume tuméfié.

Observons pour finir que les développements en série des § 12 et 15 s'étendent sans difficulté aux surélévations.

15. — Développements asymptotiques.

Le § 13 a permis d'obtenir des formules asymptotiques de première approximation, basées sur des raisonnements intuitifs, tels que l'assimilation de l'ellipse de plus grande pente à sa parabole osculatrice au voisinage du col. On peut retrouver ces formules d'une manière rigoureuse et les compléter par des développements plus étendus en adaptant au problème actuel des méthodes générales indiquées, entre autres, par L. Brillouin dans un article sur la méthode de col (*Annales de l'Ecole normale supérieure*, t. 33, 1916, p. 17) et par O. Perron (*Uber die naherungsweise Berechnung von Funktionen grosser Zahlen.* Sitzungsberichte der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Münich, 1917).

Il y a avantage à suivre l'analyse de ce dernier qui est d'une portée plus générale, et qui fournit l'ordre de grandeur du reste lorsqu'on s'arrête au terme de rang K dans le développement.

Les intégrales de PERRON sont de la forme :

$$I_1 = \int_o^{\Omega} \omega^{\alpha-1} F(\omega)\, e^{nz(\omega)}\, d\omega$$

$$I_2 = \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \omega^{\alpha-1} F(\omega)\, e^{nz(\omega)}\, d\omega$$

ω étant la variable (complexe) d'intégration, et n un nombre positif quelconque qui augmente indéfiniment. En outre, on suppose que $Z(o) = 0$, cas auquel on se ramène immédiatement, par le changement de fonction $Z' = Z - Z_0$.

Ecrivons les développements de F et de Z autour de $\omega=0$:

$$F(\omega) = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots..$$
$$Z(\omega) = \omega^p (b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \ldots.)$$

p et α étant choisis de telle sorte que les coefficients des premiers termes des développements, a_0 et b_0, soient différents de zéro.

D'après ce qui a été dit plus haut, p n'est pas nul. Si $p = 1$, $\omega=0$ est un point ordinaire de $Z(\omega)$. Si $p = 2$, c'est un col, etc...

PERRON trace autour du point $\omega=0$ les courbes $Re\,[Z(\omega)]=0$,

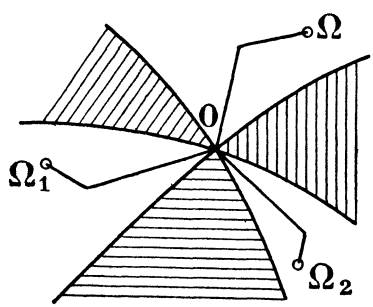

FIG. 9.

qui sont évidemment au nombre de p, et qui divisent le plan en secteurs dans lesquels $Re\,(Z)$ est alternativement positif et négatif.

Le chemin d'intégration est compris dans les secteurs négatifs, sinon l'intégrale serait très grande avec n. Il peut d'ailleurs être déformé d'une manière arbitraire à l'intérieur de ces secteurs.

Cela étant, les tracés choisis par PERRON pour son calcul sont figurés sur le schéma ci-contre.

Ils ont pour caractéristique essentielle d'emprunter au voisinage

du point O la bissectrice de l'angle des secteurs. S'il y a lieu, deux bissectrices différentes sont raccordées par un arc de cercle de rayon infiniment petit autour de O.

PERRON démontre que, dans ces conditions, I_1 et I_2 sont représentables par les développements suivants :

$$(21)\quad \begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{j=0}^{K-1} Pj \left(\dfrac{1}{nr}\right)^{\frac{\alpha+j}{p}} + O\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{Re(\alpha)+K}{p}}\right] \\ I_2 = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{j=0}^{K-1} Qj \left(\dfrac{1}{nr}\right)^{\frac{\alpha+j}{p}} + O\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{Re(\alpha)+K}{p}}\right] \end{cases}$$

Dans ces formules, r est le module de bo, O [ ] est le symbole de Landau et signifie « un terme de l'ordre de grandeur de... » ; enfin P_j et Q_j ont les expressions ci-après :

$$(22)\quad \begin{cases} Pj = e^{i\theta_0(\alpha+j)} \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \frac{g_{ji}}{(-b_0)^i} \Gamma\left(\frac{\alpha+j}{p}+i\right) \\ Qj = [e^{i\theta_2(\alpha+j)} - e^{i\theta_1(\alpha+j)}] \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \frac{g_{ji}}{(-b_0)^i} \Gamma\left(\frac{\alpha+j}{p}+i\right) \end{cases}$$

θ_0, θ_1, θ_2 étant les angles respectifs des chemins de départ et d'arrivée des intégrales, et g_{ji} étant le coefficient de ω^j dans le développement de :

$$\frac{1}{i!}(a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots.)\ (b_1\omega + b_2\omega^2 + \ldots.)^i$$

Enfin, dans le cas exceptionnel où $\frac{\alpha+j}{p} + i$ est un nombre entier nul ou légatif, égal à $-\lambda$, le terme correspondant de Q_j est :

$$\frac{g_{ji}}{(-b_0)^i}\ e^{i\theta_1(\alpha+j)} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda\,!}\ pi.(\theta_2-\theta_1)$$

Les généralités qui précèdent s'appliquent immédiatement au problème de l'intumescence.

Soit d'abord à trouver le développement asymptotique de l'intégrale I autour d'un col qui n'est ni un point de ramification de λ, ni un pôle de la fonction multiplicatrice (intumescence limitée).

Appelons ω_c, λ_c, les valeurs correspondantes de ω et λ et posons ω-$\omega_c=\omega$, λ-$\lambda_c=\lambda'$. L'intégrale peut s'écrire :

$$I = e^{is\left(\frac{\omega c}{K}-\lambda c\right)} \int e^{is\left(\frac{\omega'}{K}-\lambda'\right)} F\,(\omega_c + \omega')\, d\omega'$$

En vertu de nos hypothèses, F est dans le voisinage du col une fonction holomorphe de ω', et dans le cas général son développement commence par un terme $F_c \neq O$. Quant à l'exposant de l'exponentielle sous le signe d'intégration, c'est également une fonction holomorphe de ω', mais du fait que ω est un col, son développement commence par un terme du second degré, $s\omega'^2 b_0$.

On se trouve ainsi en présence d'une intégrale de Perron du second type, dans laquelle $\alpha=1$ et $p=2$. Les limites de secteurs sont les lignes de niveau de la surface (X) qui, au point ω_c, sont inclinées à 45° sur l'horizontale, et le chemin d'intégration est parallèle à l'axe des ξ.

On a, dans ces conditions :

$$Q_0 = (1\text{-}e^{i\pi})\; g_{00}\; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\, a_0 \sqrt{\pi}.$$

D'autre part, $\frac{\omega}{K} - \lambda_c$ est un nombre purement imaginaire $i\mu$ et par suite le développement asymptotique de l'intégrale I commence par le terme

$$F_c \sqrt{\frac{\pi}{r}}\, e^{-\mu s}\, s^{-\frac{1}{2}}$$

qui coïncide, comme il est facile de le vérifier, avec l'expression trouvée au § 13. En particulier, si $K = \frac{3}{2}$, $\mu=0$, le col est à l'origine et on retrouve la loi des crues.

Soit en second lieu à trouver le développement asymptotique de l'intégrale I autour du col $\omega=0$, qui est en même temps un pôle de F (intumescence illimitée). Dans ce cas, le développement de F autour du pôle peut s'écrire $\frac{1}{2\pi i}\,\omega^{-1}\,(a_0+a_1\omega + \ldots\ldots)$. On est ramené à une intégrale de Perron du second type dans laquelle $p=2$ et $\alpha=0$ (au lieu de 1 dans le cas précédent). Le calcul de Q_0 rentre alors dans le cas exceptionnel signalé plus haut avec la valeur 0 du paramètre $\lambda = \frac{\alpha + j}{p} + i$. On trouve ainsi que $Q_0 = a_0$, et le développement de I commence par le terme constant $\frac{a_0}{2}$ conformément au § 13.

Dans le cas enfin du *résidu d'intumescence*, l'intégrale I doit être prise sur les deux bords de la coupure, au voisinage du point de ramification ω_1. On a vu au § 13 qu'on peut l'écrire, en l'étendant seulement à la lèvre droite,

$$Re \left\{ F_1 \; e^{i\omega_1 t - i\lambda_1 s} \int e^{i(\omega-\omega_1)t} \; [e^{-i(\lambda-\lambda_1)s} - e^{-i(\lambda'-\lambda)s}] \; d\omega \right\}$$

Dans cette intégrale, t devient très grand et non s. L'exponentielle se réduit ainsi à $e^{i(\omega-\omega_1)t}$, et la fonction multiplicatrice est représentée par la différence entre crochets. Pour l'exponentielle, les choses se passent très simplement, ω_1 étant un point ordinaire de l'exposant ; autour de ω_1 le plan complexe se divise en deux secteurs séparés par une droite horizontale. Le chemin d'intégration part de ω_1 perpendiculairement à cette droite, et correspond à une intégrale de PERRON du premier type dans laquelle $p=1$ et $b_0=i$. Quant à la fonction multiplicatrice entre crochets, elle peut se développer selon les puissances de $(\omega-\omega_1)^{\frac{1}{2}}$, le développement commençant par un terme en $(\omega-\omega_1)^{\frac{1}{2}}$, ce qui correspond à $\alpha = \frac{3}{2}$ dans l'intégrale de PERRON. On en déduit que le développement asymptotique du résidu d'intumescence commence par un terme en $e^{-\eta_1 t} \, t^{-\frac{3}{2}}$.

La méthode de PERRON confirme ainsi, en les étendant et en les précisant, les formules de première approximation du § 13.

16. — Comparaison avec l'essai sur la théorie des eaux courantes.

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus plus haut, notamment aux § 11, 12 et 13, avec les indications données par BOUSSINESQ sur le même sujet au § XXXVII de l'*Essai sur la Théorie des eaux courantes.*

L'équation du mouvement variable a été écrite par BOUSSINESQ sous la forme (éq. 258, p. 270) :

$$H \frac{\partial U}{\partial t} - \alpha'' \, U \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{gH - \alpha' U^2}{1+2\eta} \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{g\,(HI - bU^2)}{1+2\eta} \tag{23}$$

Son hypothèse fondamentale est que « la vitesse moyenne U et la profondeur H ne diffèrent pas beaucoup, en chaque point, des va-

leurs Uo et Ho qu'elles auraient si un régime permanent ou très graduellement varié d'une section à l'autre, se trouvait établi » (p. 282).

Dès lors, les lois de première approximation s'obtiennent en remplaçant, comme il est classique, H par $H+h$ et U par $U+u$ et, en outre, en négligeant dans l'équation (258) le terme $\frac{g(HI\text{-}bU^2)}{1+2\eta}$ « qui représente à la fois l'influence de la pente du fond et celle du frottement extérieur » (p. 448), puisque dans le régime permanent et uniforme on a précisément $HI - bU^2 = 0$.

Les lois de seconde approximation s'obtiennent en remplaçant l'équation (258) par une équation (276) qui est de même forme, mais contient dans son premier membre un terme dépendant de la courbure de la surface libre. On prend pour le premier membre une approximation plus poussée, mais on continue à négliger

$$\frac{g\,(HI - bU^2)}{1+2\eta}$$

Enfin, la mise en compte des frottements est abordée, ceux-ci ne constituant toutefois qu'*une cause perturbatrice secondaire*. Dès lors $\frac{g(HI\text{-}bU^2)}{1+2\eta}$ n'est plus nul, mais peut être représenté par son expression de première approximation, soit $-2f'\,(\omega_0\text{-}U_0)h$ en désignant par ω_0 la célérité du front d'onde, et en posant $f' = \frac{g(2\omega_0\text{-}3fU_0)}{2(1+2\eta)(\omega_0\text{-}U_0)}\frac{I}{U_0}$ (éq. 379 et 380 de la p. 449).

Boussinesq démontre alors, à l'aide de considérations ingénieuses et complexes, que la vitesse de propagation ω d'une partie d'intumescence est exprimée par la formule (387)

$$(24) \qquad \omega = \omega_0 \left[1 + \frac{K''}{2}\left(\frac{2+K}{2}\frac{h}{H_0} + \frac{K'H_0^2}{3h}\frac{d^2h}{ds^2} - \frac{2f'W}{\omega_0 h} - \frac{2W'}{H_0^2 h}\right)\right]$$

dans laquelle W est le volume tuméfié en aval de la section considérée et k, k', k'' des coefficients ayant approximativement les valeurs suivantes :

$$k = 1 - \frac{3\,U_0}{\omega_0} \qquad k' = 1 - \frac{U_0}{\omega_0} \qquad k'' = 1$$

Il en déduit « l'intégrale, malheureusement compliquée, qui repré-

sente sous forme finie, aux diverses époques, la surface libre des longs remous de courbure insensible » (éq. 392).

$$s = \left[\omega_0 + (\omega_0 - U_0)\frac{3h}{2H_0}\frac{e^{f't} - 1}{f't}\right]t + \varphi(h\,e^{f't})$$

Une première observation, qui suffirait à justifier notre nouvelle manière d'aborder le problème, est que les formules ci-dessus n'expriment pas le raccordement de l'onde de translation du début au régime de crue qui tend à s'instituer par la suite. Mais il est utile d'aller plus loin et de rechercher la raison de cette lacune.

La formule (387) qui donne la vitesse de propagation ω d'une partie d'intumescence peut se simplifier en négligeant par rapport à $1 - \frac{f'W}{\omega_0 h}$ les termes en a et $\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}$ qui sont très petits comme la surélévation et comme la courbure, et le dernier terme qui a été introduit par Boussinesq pour des raisons de pure forme et qui est très petit par rapport au précédent (p. 450). Il vient ainsi :

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{f'W}{\omega_0 h}\right) \tag{24'}$$

Il est clair que cette formule n'est valable, d'après sa structure même, que dans la mesure où $\frac{f'W}{\omega_0 h}$ représente un terme correctif bien inférieur, ou en tout cas inférieur à l'unité. Or dans le corps d'une longue intumescence $\frac{W}{h}$ peut devenir aussi grand que l'on veut. La formule n'a plus de sens.

Au front d'onde, par contre, le terme correctif est petit et la for-

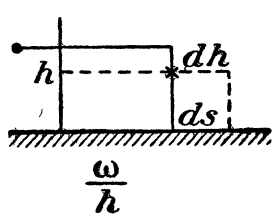

Fig. 10.

mule s'applique. Elle se confond alors avec la formule d'amortissement du § 12.

Si l'on considère en effet une section située à une très petite distance $\frac{W}{h}$ en arrière du front d'onde, la vitesse de propagation

$\omega = \frac{ds}{dt}$ de la partie d'intumescence doit être telle qu'il y ait conservation du volume tuméfié, c'est-à-dire que $h\,ds - \frac{W}{h}\,dh = h\omega_0\,dt$. D'autre part, μ_0 étant le coefficient d'amortissement de la tête de l'intumescence, on a par définition $dh = \mu_0\,h\,ds$. D'où $\omega = \frac{ds}{dt}$ $= \omega_0 \frac{1}{1 + \frac{W\mu_0}{h}}$ ou, puisque $\frac{W}{h}$ est très petit, $\omega = \omega_0\left(1 - \frac{W\mu_0}{h}\right)$.

La coïncidence des deux formules exige que :

$$\mu_0 = \frac{f'}{\omega_0} = \frac{gI}{(1 + 2\eta)\,U_0\,\omega_0}\,\frac{2\omega_0 - 3f\,U_0}{2\,(\omega_0 - U_0)}$$

Or nous avons trouvé (§ 7) :

$$\mu_0 = \frac{gI}{\beta\,U\,V}\left[1 - \frac{U}{V - V'}\left(3 - 2\,\frac{b}{a}\right)\right] = \frac{gI}{\beta\,U\,V}\,\frac{2V - 3U}{2\left(V - \frac{b}{a}\,U\right)}$$

c'est-à-dire une concordance complète si l'on admet, ce qui est le cas, que $\frac{b}{a}$ et f sont extrêmement voisins de l'unité. On conclut de cette analyse que la *formule* (387) *de Boussinesq est valable, et n'est valable, qu'au voisinage du front d'onde.*

Pourquoi cette restriction? C'est que la méthode de Boussinesq consiste à traiter les frottements comme une cause perturbatrice secondaire, c'est-à-dire à remplacer $\frac{g\,(H\,I - bU^2)}{1 + 2\eta}$ par son expression de première approximation, correspondant au cas où il n'y a pas de frottements en jeu, et où par suite la vitesse de propagation ω de toutes les parties d'intumescence se confond avec la célérité ω_0 du front d'onde. Les formules obtenues par cette méthode deviennent nécessairement inexactes lorsque la vitesse de propagation ω s'écarte notablement de ω_0, ce qui a lieu dans le corps de l'intumescence au bout d'un temps assez long, ω tendant alors vers $\frac{3}{2}\,U_0$.

Il est possible, à la lumière de ces réflexions, de reprendre la méthode de Boussinesq en la corrigeant de manière à lui donner une validité plus générale. La définition de la vitesse de propagation d'une partie d'intumescence permet d'écrire $q = U_0 h + H_0 u = \omega h$.

D'autre part, pour de faibles écarts autour du régime uniforme, $(HI - bU^2) = h\,I - 2\,b\,u\,U_0$, d'où l'on déduit en remplaçant u par sa valeur tirée de la relation précédente

$$\frac{g\,(HI - bU^2)}{1 + 2\eta} = \frac{g\,h\,I}{(1 + 2\eta)\,U_0}(3\,U_0 - 2\omega)$$

au lieu de

$$\frac{g\,h\,I}{(1 + 2\eta)\,U_0}(3\,f\,U_0 - 2\omega_0)$$

d'après Boussinesq.

La différence entre les deux formules, abstraction faite du rôle du coefficient numérique f très voisin de l'unité, tient au remplacement de ω_0 par ω. Cette substitution transforme l'allure du phénomène. Au début de la propagation en effet, les frottements n'ont pas eu le temps de faire sentir leur action, et l'intumescence se déplace en bloc avec la célérité ω_0. Le terme $HI - bU^2$ est alors négatif et la propagation est freinée. La vitesse ω tombe au-dessous de ω_0, et le terme $HI - bU^2$, tout en restant négatif, diminue de valeur absolue. Le freinage continue, mais il est en quelque sorte moins intense. ω diminue encore et $HI - bU^2$ se rapproche de zéro. Le mécanisme se poursuit ainsi au cours de la propagation, ω tendant nécessairement vers la limite $\frac{3}{2}\,U_0$ qui annule $HI - bU^2$. On retrouve asymptotiquement la loi des crues.

17. — Propagation-amont.

Le problème de la propagation-amont se traite de la même manière que celui de la propagation-aval. Sa solution est également basée sur l'étude préalable d'une surface (X') associée à l'équation des intumescences. X' diffère de X en ce que, d'une part s est négatif au lieu d'être positif, et en ce que, d'autre part, la détermination de λ, ou ce qui revient au même le signe du radical, a changé. Il est facile de voir qu'à la suite de ce double changement, le relief de (X') garde la même allure générale que celui de (X). La différence essentielle, pour l'objet de notre étude, est que la cote de l'origine n'est plus nulle, mais négative et égale à $-3\,as$.

Il y a ainsi, comme précédemment, un front d'onde, qui cette fois se propage vers l'amont à la vitesse v'.

Mais il n'existe pas de vitesse dirigée vers l'amont jouant un rôle analogue à celui de la vitesse $\frac{3}{2}\,a$ dans le cas de la propagation-aval. Autrement dit, quelle que soit la vitesse d'un observateur se déplaçant vers l'amont, l'intumescence qu'il accompagne subit dans tous les cas, sans aucune exception, un amortissement exponentiel et devient très rapidement négligeable. Il n'y a pas de propagation asymptotique appréciable vers l'amont.

Sous cette réserve, tous les développements et toutes les formules indiqués aux paragraphes précédents se transposent sans difficulté dans le cas de la propagation vers l'amont.

TROISIÈME PARTIE

AUTRES PROBLÈMES AUX LIMITES

18. — Problème de Cauchy.

La *superposition* d'une propagation-aval et d'une propagation-amont permet de résoudre le problème de CAUCHY, c'est-à-dire de définir une intumescence $q(s, t)$ telle que $q(o, t)$ et $\frac{\partial q}{\partial s}(o, t)$ se réduisent à deux fonctions connues $f(t)$ et $g(t)$.

Soient en effet $Q(\omega)$ et $Q'(\omega)$ les fonctions multiplicatrices des deux intégrales I et I' dont la superposition représente q ; $\frac{\partial q}{\partial s}$ est évidemment représenté à son tour par la somme de deux intégrales dont les fonctions multiplicatrices respectives sont $-i\lambda Q(\omega)$, $-i\lambda' Q'(\omega)$. Soient alors $F(\omega)$ et $G(\omega)$ les fonctions multiplicatrices des intégrales de FOURIER de $f(t)$ et $g(t)$ (§ 9). On résout le problème de CAUCHY en déterminant Q et Q' par les relations :

$$Q(\omega) + Q'(\omega) = F(\omega)$$
$$Q(\omega) + \lambda' Q'(\omega) = i\,G(\omega)$$

c'est-à-dire :

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} Q(\omega) &= \frac{-\lambda' F(\omega) + i\,G(\omega)}{\lambda - \lambda'} \\ Q'(\omega) &= \frac{\lambda F(\omega) - i\,G(\omega)}{\lambda - \lambda'} \end{aligned} \right.$$

Les fonctions multiplicatrices qui apparaissent ainsi dans la solution ne sont pas du type exact étudié dans la seconde partie à cause de l'intervention de λ et de λ'. Mais les conclusions précédemment obtenues restent valables du fait que l'exponentielle est prépondérante à l'infini par rapport à λ et λ' comme elle l'est par rapport à $F(\omega)$ et $G(\omega)$, et que par suite le relief des surfaces (X) et (X') con-

tinue à jouer un rôle fondamental. On observera que les fonctions multiplicatrices deviennent infinies aux points de ramification. Mais comme il s'agit d'infinis d'ordre $\frac{1}{2}$, l'intégrale sur une circonférence infiniment petite autour de l'un d'eux, coupure exclue, est elle-même infiniment petite, et leur présence n'entraîne de la sorte aucune modification essentielle de l'analyse.

19. — Injection au milieu d'un canal.

Le problème fondamental traité dans la seconde partie suppose une injection de débit en tête d'un canal. Un cas plus difficile est celui où l'injection de débit a lieu en un point quelconque, de telle manière que le débit injecté se partage entre l'aval et l'amont suivant une loi qui n'est pas connue *a priori*.

Cette circonstance peut être réalisée en pratique au moyen d'une injection latérale par un canal secondaire affluent du canal principal. Il se produit alors dans la zone du confluent des phénomènes complexes, notamment une altération profonde du champ local des vitesses, qui échappent évidemment à la théorie. On ne peut songer à traiter qu'un problème schématique qui soit l'image simplifiée du problème réel.

Nous considérerons de nouveau un mouvement plan, et nous supposerons qu'il existe une section singulière où l'injection est produite, et au passage de laquelle ont lieu corrélativement des discontinuités de débit, de vitesse et de profondeur.

Il est impossible à cause de ces discontinuités d'appliquer l'équation des intumescences en bloc à l'ensemble du mouvement. On peut, par contre, essayer de représenter le phénomène par la *juxtaposition* d'une propagation-aval à l'aval de la section singulière et d'une propagation-amont à l'amont en posant :

$$q = Re \int Q(\omega)\, e^{i\omega t - i\lambda s}\, d\omega \qquad \text{à l'aval}$$
$$q' = Re \int Q'(\omega)\, e^{i\omega t - i\lambda' s}\, d\omega \qquad \text{à l'amont}$$

On satisfait évidemment de la sorte au premier groupe de conditions aux limites : l'état de régime uniforme du canal dans toute son étendue à l'origine des temps.

Il reste à déterminer les fonctions multiplicatrices $Q(\omega)$ et $Q'(\omega)$ de manière à satisfaire au second groupe de conditions aux limites,

qu'on peut énoncer d'une manière générale en disant que les discontinuités observées dans le mouvement au passage de la section singulière doivent provenir de l'injection et en traduire les caractéristiques.

Une première condition est que la discontinuité de débit soit égale au débit injecté (ramené, s'il s'agit d'un problème pratique, à l'unité de largeur du canal principal) :

$$q\ (o,\ t) - q'\ (o,\ t) = q_0\ (t)$$

Observons, pour préparer ce qui va suivre, que cette condition intuitive découle de l'équation de continuité. En régime permanent tout d'abord, celle-ci a pour conséquence immédiate $Q = C^{te}$. D'où il suit qu'une discontinuité de Q ne peut provenir que d'un apport extérieur et être égale à cet apport. Le passage au régime variable ne modifie pas cette conclusion, $\frac{\partial H}{\partial t}$ étant fini en règle générale dans la section singulière, ou, si l'on préfère, la discontinuité étant spatiale et non temporelle.

Il est dès lors naturel, pour obtenir la seconde condition, de raisonner d'une manière exactement semblable sur l'équation dynamique qui constitue avec l'équation de continuité le système fondamental (1). Nous l'écrirons en régime permanent et sous la forme d'une équation en U, H où nous l'avons obtenue tout d'abord au § 2. Il vient ainsi :

$$\alpha\ U \frac{dU}{ds} + g \frac{dH}{ds} - g\ sin\ I + \frac{gbU^2}{H} = 0$$

On en conclut en premier lieu que la quantité :

$$E = \frac{\alpha U^2}{2} + g\ H - gs\ sin\ I + \int_o^s \frac{gbU^2}{H}\, ds \tag{26}$$

reste constante dans le cours du mouvement. On en conclut en second lieu qu'une discontinuité de E ne peut provenir que d'un apport extérieur et être égale à cet apport. D'autre part, les deux derniers termes de E sont manifestement continus, réserve faite en pratique de la dissipation d'énergie qui est la conséquence de l'injection latérale et des perturbations locales qui l'accompagnent.

La discontinuité ne peut ainsi affecter, en théorie, que les deux premiers termes de E qui représentent physiquement l'énergie ciné-

tique moyenne et l'énergie de pression d'une particule fluide de masse unité. Pour écrire correctement la condition correspondante, il faut d'ailleurs considérer, non pas l'énergie individuelle d'une particule, mais l'énergie globale correspondant aux débits en jeu.

D'où finalement la seconde condition (qui pour les mêmes raisons que plus haut n'est pas altérée par le passage au régime variable) :

$$Q\left(gH + \frac{\alpha U^2}{2}\right) - Q'\left(gH' + \frac{\alpha U'^2}{2}\right) = q_0\left(gH_0 + \frac{\alpha U_1^2}{2}\right)$$

U_1 désignant la vitesse des particules injectées.

Pour mettre en œuvre cette seconde condition, on pose $Q = Qo + q$, $H = Ho + h$, $U = Uo + u$, et on considère q, h, u comme des infiniment petits du premier ordre. Il vient ainsi :

$$Q_0\left[g\,(h-h') + \alpha U_0\,(u-u')\right] + (q-q')\left(gH_0 + \frac{\alpha U_0^2}{2}\right) = q_0\left(gH_0 + \frac{\alpha U_1^2}{2}\right)$$

puis, compte tenu de la relation $q = Uo\,h + Ho\,u$ et de la première condition de discontinuité $q - q' = qo$:

$$h - h' = q_0\,\frac{\alpha\,(U_1^2 - 3\,U_0^2)}{2\,U_0\,(gH_0 - \alpha\,U_0^2)}$$

Désignons par c la fraction du second membre. Les deux conditions de discontinuité prennent ainsi la forme simple :

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} q - q' &= q_0 \\ h - h' &= q_0\,c \end{aligned}\right.$$

Soit alors $F(\omega)$ la fonction multiplicatrice de l'intégrale de FOURIER de $q_0(t)$.

On résout le problème en déterminant Q et Q' par les relations :

$$Q(\omega) - Q'(\omega) = F(\omega)$$
$$\frac{\lambda}{\omega}\,Q(\omega) - \frac{\lambda'}{\omega}\,Q'(\omega) = c\,F(\omega)$$

c'est-à-dire :

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} Q(\omega) &= \frac{c\omega - \lambda'}{\lambda - \lambda'}\,F(\omega) \\ Q'(\omega) &= \frac{c\omega - \lambda}{\lambda - \lambda'}\,F(\omega) \end{aligned}\right.$$

20. — Particularités de la Solution.

Comme il a été expliqué au § 19, l'analyse de la seconde partie demeure applicable dans ses lignes générales aux nouvelles intégrales q et q' ainsi déterminées, l'exponentielle restant prépondérante à l'infini. Il y a ainsi **deux fronts d'onde** se propageant respectivement vers l'aval et vers l'amont aux vitesses V et V', et s'amortissant exponentiellement avec les coefficients μ_0 et μ'_0. Si d'ailleurs l'on compare le cas actuel à celui de l'injection totale vers l'aval, la perturbation au front d'onde est multipliée, vers l'aval, par $V\,\frac{1-CV'}{V-V'}$ et vers l'amont par $V'\,\frac{1-CV}{V-V'}$. Enfin, la méthode générale de développement en série autour du front d'onde s'applique encore en multipliant les développements du § 12 par l'expression $\left(C-\frac{\lambda'}{\omega}\right)\frac{1}{\frac{\lambda-\lambda'}{\omega}}$ dont les deux facteurs se développent aisément en série entière par rapport à $\frac{i}{\omega}$. On peut ainsi se rendre compte du ralentissement de la montée en un point quelconque, par suite de l'épanouissement entre l'aval et l'amont du débit injecté dans la section singulière. L'**intumescence asymptotique** vers l'aval n'est pas modifiée dans son essence. Elle n'échappe à l'amortissement exponentiel que pour un observateur animé de la vitesse $\frac{3}{2}\,a$, auquel cas elle a la même valeur asymptotique $\frac{A\,F_c}{2}\sqrt{\frac{2\pi R}{D}}\;s^{-\frac{1}{2}}$ que si tout le débit était injecté vers l'aval, la valeur de $\frac{c\omega-\lambda'}{\lambda-\lambda'}$ au point $\omega=0$ étant égale à l'unité. De son côté, l'intumescence asymptotique vers l'amont subit dans tous les cas un amortissement exponentiel, étant observé qu'au surplus $\frac{c\omega-\lambda}{\lambda-\lambda'}$ s'annule au point $\omega=0$, ce qui accroît encore l'effet d'amortissement. De même enfin, dans le cas d'une perturbation initiale illimitée, tout se passe asymptotiquement comme si tout le débit était injecté vers l'aval.

Le *résidu d'intumescence*, par contre, obéit à une loi un peu différente, parce que l'intégrale doit être prise dans le voisinage du point de ramification ω_1 et qu'il faut alors tenir compte de l'infini d'ordre $\frac{1}{2}$ de la fonction multiplicatrice.

En reprenant dans ce cas le calcul du § 13, le résidu d'intumescence aval se met sous la forme :

$$F_1 e^{i\omega_1 t - i\lambda_1 s} \int e^{i(\omega - \omega_1)t} \frac{(c\omega - \lambda')e^{-i(\lambda - \lambda_1)s} + (c\omega - \lambda)e^{-i(\lambda' - \lambda_1)s}}{\lambda - \lambda'} d\omega$$

Le numérateur de la fraction est très voisin de :

$$2\, c\omega_1 - (\lambda_1 + \lambda'_1) = i\, [2\,(b + c)\, \eta_1 - 3a]$$

et le dénominateur de :

$$2\, \sqrt{(1 + b^2)\, (\eta - \eta_1)\, (\eta_2 - \eta_1)}$$

L'intégrale prend alors la forme :

$$F_1\, e^{i\omega_1 t - i\lambda_1 s} \frac{\frac{3}{2}\, a - (b + c)\, \eta_1}{\sqrt{(1 + b^2)\, (\eta_2 - \eta_1)}} \int \frac{e^{-\eta' t}}{\sqrt{\eta'}}\, d\eta'$$

c'est-à-dire tous calculs faits :

$$(29) \qquad F_1 \sqrt{\pi}\, \frac{\frac{3}{2}\, a - (b + c)\, \eta_1}{\sqrt{(1 + b^2)\, (\eta_2 - \eta_1)}}\, e^{s\left(\frac{3a}{2} - b\eta_1\right)}\, e^{-\eta_1 t}\, t^{-\frac{1}{2}}$$

Cette expression reste valable pour le résidu d'intumescence amont, la permutation de $c\omega - \lambda'$ et $c\omega - \lambda$ d'une part, des exponentielles d'autre part, dans la fraction sous le signe d'intégration ne modifiant évidemment pas celle-ci.

La méthode de Perron conduit au même résultat, la fonction multiplicatrice étant ici la fraction ci-dessus, et son développement suivant les puissances de $(\omega - \omega_1)^{\frac{1}{2}}$ commençant par un terme en $(\omega - \omega_1)^{-\frac{1}{2}}$, ce qui correspond à $\alpha = \frac{1}{2}$ dans l'intégrale de Perron.

La conséquence de l'épanouissement du débit injecté entre l'aval et l'amont est ainsi un accroissement du résidu d'intumescence qui passe de l'ordre de $e^{-\eta_1 t}\, t^{-\frac{3}{2}}$ à l'ordre de $e^{-\eta_1 t}\, t^{-\frac{1}{2}}$.

Dans le cas d'une injection illimitée, il faut ajouter à cette expression le produit par $2\pi i$ des résidus autour des pôles de $Q(\omega)$ ou $Q'(\omega)$. Par exemple, dans le cas particulier où le débit injecté q_0 est constant, $F(\omega)$ et $Q(\omega)$ ont pour unique pôle l'origine dont le

résidu est q_0 pour l'une et l'autre de ces fonctions ; de son côté $Q'(\omega)$ n'a pas de pôle puisque $\frac{c\omega - \lambda}{\lambda - \lambda'}$ s'annule à l'origine.

Les résultats que nous venons d'établir contiennent la *loi de partage asymptotique* du débit injecté entre l'aval et l'amont : il suffit d'y faire $s = 0$.

Par exemple, dans le cas de l'injection illimitée d'un débit supplémentaire constant, la loi de partage est exprimée par les formules :

$$q = q_0 - m\, e^{-\eta_1 t}\, t^{-\frac{1}{2}}$$

$$q' = -m\, e^{-\eta_1 t}\, t^{-\frac{1}{2}}$$

m étant un paramètre égal à :

$$q_0 \frac{\frac{2}{3} a - (b + c)\, \eta_1}{2\eta_1 \sqrt{\pi}\, (1 + b^2)\, (\eta_2 - \eta_1)}$$

Il est intéressant de compléter ces résultats par le calcul de *l'emmagasinement vers l'amont*, qui est la véritable source des différences entre le problème actuel et celui de la seconde partie. Cet emmagasinement est évidemment donné par la formule :

$$W'(t) = \int_0^t q'(o,t)\, dt = Re \int \frac{-iF(\omega)}{\omega(\lambda - \lambda')} (c\omega - \lambda)\, e^{i\omega t}\, d\omega + W'_0 \tag{30}$$

La constante W'_0 du second membre se détermine en faisant $t=0$ et en intégrant dans le plan complexe sur le cercle de l'infini. L'exponentielle est égale à 1, et la fonction multiplicatrice est de degré —2 en ω. Donc l'intégrale du second membre est nulle. Comme il en est de même de celle du premier membre, $W'_0 = 0$.

Au bout d'un temps très long, $W'(t)$ est égal à l'intégrale le long de la coupure, asymptotiquement de la forme $m\, e^{-\eta_1 t}\, t^{-\frac{1}{2}}$, accrue du produit par $2\pi i$ des résidus autour des pôles. Dans le cas particulier de l'injection illimitée d'un débit supplémentaire constant, $F(\omega) = \frac{q_0}{2\pi\omega i}$, et l'origine est un pôle de la fonction multiplicatrice. Il y a un emmagasinement-limite :

$$W'_\infty = -q_0 \frac{2 - 3\, ac}{9a^2} \tag{31}$$

On peut obtenir enfin de la même manière les *valeurs limites de* h, h', u, u', dans la section singulière.

Si l'on se place dans le cas de l'injection illimitée du débit constant q_0 et si l'on considère d'abord h et h', les fonctions multiplicatrices correspondantes sont :

$$\frac{\lambda}{\omega} Q(\omega) = \frac{\lambda}{\omega} \frac{c\omega - \lambda'}{\lambda - \lambda'} \frac{q_0}{2\pi i \omega} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda'}{\omega} Q'(\omega) = \frac{\lambda'}{\omega} \frac{c\omega - \lambda}{\lambda - \lambda'} \frac{q_0}{2\pi i \omega}$$

qui ont toutes deux pour pôle l'origine. Les valeurs limites cherchées sont :

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} h &= \frac{2}{3a} q_0 \\ h' &= \left(\frac{2}{3a} - c\right) q_0 \end{aligned} \right.$$

Si l'on appelle f la valeur de la profondeur en unités réduites, la relation $q = u f + a h$ permet de calculer les valeurs limites de u et u'

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{3} \frac{q_0}{f} \\ u' &= -\left(\frac{2}{3} - ac\right) \frac{q_0}{f} \end{aligned} \right.$$

On vérifie d'ailleurs sans difficulté, sur l'équation différentielle du régime permanent non uniforme, écrite dans le cas d'une faible hauteur de remous, que pour une surélévation égale à h'_∞ dans la section origine, l'emmagasinement total vers l'amont $\int_{-\infty}^{0} h\, ds$ est bien égal à $| W'_\infty |$.

Les diverses formules qui viennent d'être établies mettent en évidence le rôle du paramètre $c = \dfrac{\alpha(U_1^2 - 3\, U_0^2)}{2\, U_0\, (gH_0 - \alpha U_0^2)}$ qui peut être positif ou négatif et qui caractérise l'énergie cinétique du débit injecté dont il est une fonction linéaire. D'une manière générale, plus c est grand, plus le partage des débits s'effectue au profit de l'aval, et plus l'emmagasinement vers l'amont se réduit. Il peut même arriver, si $c > \dfrac{2}{3a}$, c'est-à-dire si $U_1^2 > \dfrac{1}{3\alpha}(4\, gH_0 + 5\alpha U_0^2)$, que non seulement tout le débit injecté soit envoyé vers l'aval, mais qu'il y ait même aspiration du débit normal venant de l'amont. En pratique, d'ailleurs, il y aura lieu de prendre pour U_1 et pour c des valeurs un

peu inférieures à celles qui correspondraient exactement aux conditions de l'injection, à cause de la dissipation d'énergie dans la zone du confluent. Autrement dit, cette dissipation d'énergie favorise dans une certaine mesure le reflux du débit injecté vers l'amont.

21. — « Image » d'une propagation.

Nous allons montrer qu'il est possible, à l'aide de conventions convenables, de considérer toute propagation-amont comme « l'image » d'une propagation-aval.

Soit donc une propagation-amont :

$$q'(s'\,t') = Re \int F(\omega)\, e^{i\omega t' - i\lambda' s'}\, d\omega$$

En vertu de la relation $\lambda + \lambda' = -2\,b\,\omega + 3\,ai$, l'intégrale peut s'écrire :

$$q'(s'\,t') = e^{3as'}\, Re \int F(\omega)\, e^{i\omega(t' + 2bs') + i\lambda s'}\, d\omega$$

Comparons à cette intégrale la propagation-aval :

$$q(st) = Re \int F(\omega)\, e^{i\omega t - i\lambda s}\, d\omega$$

Les deux propagations se ramènent l'une à l'autre par les formules :

$$(34) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} s' & = -s \\ t' + 2\,bs' & = t \\ q' & = q.\ e^{3as'} = q.\ e^{-3as} \end{array} \right.$$

Pour obtenir l'interprétation physique de ce résultat, observons que :

$$2\,b = -\left(\frac{1}{b + \sqrt{1 + b^2}} + \frac{1}{b - \sqrt{1 + b^2}}\right) = -\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'}\right)$$

ce qui permet d'écrire :

$$t' - s'\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'}\right) = t$$

Cette manière de faire peut sembler artificielle, et l'on peut y objecter qu'il existe d'autres expressions de $2b$ en fonction des éléments physiques du problème, par exemple $2b = \varphi + \varphi'$. Mais l'ex-

pression employée plus haut est la seule correcte, comme on le verrait plus clairement encore en unités usuelles, parce que c'est la seule qui assure l'homogénéité du terme ($t'+2\,bs'$).

On en conclut que *toute propagation-amont est l'« image » d'une propagation-aval, la correspondance entre les deux propagations étant définie comme il suit : deux points homologues ont des abscisses égales et opposées ; deux époques homologues correspondent au passage du même signal émis de* 0 *avec les célérités respectives* v *et* v' *vers l'aval et vers l'amont.*

Dans ces conditions, il y a entre les valeurs homologues des deux perturbations la relation :

$$q' = q\,.\,e^{3as'} = q\,.\,e^{-3as}$$

Cette correspondance est évidemment réciproque, et une propagation-aval peut tout aussi bien être considérée comme l' « image » d'une propagation-amont.

22. — Réflexion des Intumescences.

La relation du paragraphe précédent entre q et q' prend une forme particulièrement simple dans la section-origine, où elle s'écrit $q = q'$.

Il est alors permis de considérer, dans le cas où il s'agit de débits,

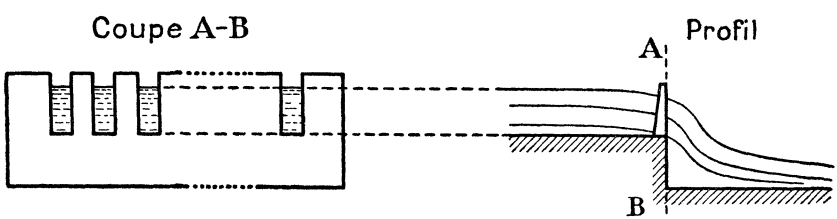

Fig. 11.

que la perturbation ($-q'$) est le résultat de la réflexion de la perturbation (q) par rapport à la section-origine.

Cette réflexion de débit correspond-elle à une réalité pratique ? Autrement dit, est-il possible de concevoir un bief limité dans lequel règnerait avant la perturbation un régime uniforme, et à l'extrémité-aval duquel il y aurait réflexion totale du supplément de débit apporté par la perturbation ?

Il est permis de répondre affirmativement à ces questions. Envisageons, par exemple, à la limite-aval du bief un déversoir à pertuis conforme aux coupes schématiques à la page précédente.

L'équation du régime uniforme est, par unité de largeur du lit :

$$Q = \sqrt{\frac{I_0}{b}}\, H^{3/2}$$

Celle du déversoir est :

$$Q = 0{,}62\, M \sqrt{2\, g}\, H^{3/2}$$

en appelant M le rapport de la largeur de pertuis à la largeur totale du lit.

Le rapprochement des deux formules montre qu'il est possible, dans chaque cas d'espèce, de déterminer M de manière à les faire coïncider. On aura ainsi un régime uniforme dans un bief limité, ce qui satisfait à la première des deux conditions énoncées plus haut.

Supposons maintenant qu'une intumescence se propage d'amont en aval dans le bief situé à l'amont du déversoir. Pour qu'il y ait réflexion du débit supplémentaire, il faut et il suffit que le débit Q écoulé par le déversoir reste invariable pendant le passage de l'intumescence, c'est-à-dire que l'ouverture des pertuis soit réglée de manière à ce que $M\, H^{3/2}$ reste constant au cours du temps. Il est facile de concevoir une consigne de manœuvre ou un dispositif automatique qui réponde à cette seconde condition.

Considérons donc un bief, limité à l'amont par un barrage-déversoir permettant l'injection d'un débit supplémentaire, et à l'aval par un déversoir à pertuis réglé comme nous venons de l'indiquer. Soit :

$$q_1 = Re \int F(\omega)\, e^{i\omega t - i\lambda s}\, d\omega$$

la formule de l'intumescence-aval provoquée en O.

Le problème des réflexions successives de cette intumescence aux deux limites du bief se ramène entièrement, d'après ce qui précède, au problème de l'intumescence dans un bief indéfini. Précisons-le par le calcul.

Les formules du § 21 montrent qu'en cas de réflexion d'une intu-

mescence en $s=0$, les exposants respectifs des exponentielles dans les intégrales correspondantes sont :

aval $\qquad i\omega t - i\lambda s + \ldots.$

amont $\qquad 3\,as + i\omega\,(t + 2\,bs) + i\lambda s + \ldots.$

Lorsque la réflexion a lieu en $s=l$, la correspondance devient évidemment la suivante :

aval $\qquad i\omega t - i\lambda(s - l) + \ldots$

amont $\qquad 3a\,(s\text{-}l) + i\omega(t + 2bs - 2bl) + i\lambda(s - l) + \ldots$

Appelons q_2 l'intumescence-amont produite par la réflexion de q_1 en $s=l$, q_3 l'intumescence-aval produite par la réflexion de q_2 en $s=0$, etc... Il est facile de déduire l'exposant de q_2 de celui de q_1, celui de q_3 de celui de q_2...

On trouve ainsi pour les exposants de q_{2n} et q_{2n+1} les expressions suivantes :

$$3\,as + i\omega(t + 2bs) + i\lambda s - nl\,(2i\lambda + 2\,ib\omega + 3a)$$
$$i\omega t - i\lambda s - nl\,(2\,i\lambda + 2\,ib\omega + 3a).$$

d'où l'on déduirait facilement les intégrales q_{2n}, q_{2n+1}, h_{2n}, h_{2n+1}, étant rappelé que les intégrales de rang pair doivent, en vertu des lois de la réflexion, être précédées du signe—.

L'état du bief en un point quelconque et à un instant quelconque est défini par la superposition de l'intumescence directe et des intumescences réfléchies ayant pris naissance à cette époque.

Cherchons à titre d'application ce qui se passe au bout d'un temps très long.

L'intégrale comprend trois parties, l'une à l'infini vers le haut, la seconde le long de la coupure, et la troisième autour du point 0 dans le cas où celui-ci est un pôle.

Si l'on envisage par exemple l'intégrale q_{2n}, l'exposant a pour partie principale à l'infini vers le haut :

$$+i\omega\left[t + s\left(2b + \frac{1}{v}\right) - nl\left(2b + \frac{2}{v}\right)\right] = -\eta\left(t - \frac{s}{v'} - \frac{nl}{v} + \frac{nl}{v'}\right)$$

Or puisque l'intumescence de rang $2n$ a déjà atteint le point s, c'est que nécessairement t est supérieur à :

$$\frac{nl}{v} - \frac{(n\text{-}1)\,l}{v'} - \frac{l\text{-}s}{v'} = \frac{s}{v'} + \frac{nl}{v} - \frac{nl}{v'}.$$

Donc la partie réelle des exposants est négative et de très grande valeur absolue et l'intégrale est nulle.

Mêmes conclusions pour les autres intégrales et par suite pour leur superposition.

Le long de la coupure, λ, ω et s sont finis et t et n sont très grands. La partie principale de l'exposant, dans q_{2n}, est :

$$i\omega t - nl(2i\lambda + 2ib\omega + 3a).$$

Or, le long de la coupure, $\lambda + b\omega - \frac{3}{2}\, ai$ est réel et $2\, i\lambda + 2\, ib\omega + 3a$ est par suite purement imaginaire. Donc la partie principale réelle des exposants se réduit à $i\omega t = -\eta t$ qui est négatif et de très grande valeur absolue. Là encore, q_{2n} et les autres intégrales analogues sont négligeables.

Reste le voisinage du point 0. L'intumescence initiale est nécessairement limitée, sinon notre calcul n'aurait plus de sens. Notre théorie des intumescences suppose en effet qu'il s'agit de perturbations de faible valeur relative. Comme, dans le cas actuel, le volume supplémentaire injecté est entièrement emmagasiné dans le bief, il est de stricte nécessité que ce volume supplémentaire soit limité. Dans ce cas, la fonction $F(\omega)$ n'a pas de pôle en 0. Il en est de même de $\frac{\lambda}{\omega} F(\omega)$. Seul $\frac{\lambda'}{\omega} F(\omega)$ a un pôle au point 0.

En conséquence, seules les intégrales h_{2n} ont un résidu au point 0, les intégrales q_{2n}, q_{2n+1}, h_{2n+1} n'en ayant pas.

On a ainsi :

$$Lim\ \Sigma\, q_{2n}, \quad \Sigma\, q_{2n+1}, \quad \Sigma\, h_{2n+1} = 0$$

$$Lim\ \Sigma\, h_{2n} = 6\, a\, Fo\, \frac{e^{3as}\, e^{-3al}}{1 - e^{-3al}}$$

Si $F(\omega) = qo\, \frac{1 - e^{-i\omega T}}{2\pi i\omega}$, on a $Fo = \frac{T}{2\pi}$, et

$$(35) \quad ho(s) = Lim\ \Sigma\, h_{2n} = qo.\ 3\, a\, T\, e^{3as}\, \frac{e^{-3al}}{1 - e^{-3al}}$$

Ainsi, *il tend à s'établir, au bout d'un temps infini, un équilibre dans lequel le débit supplémentaire est nul en tout point du bief, la surélévation étant égale à ho (s).*

On vérifie d'ailleurs que $\int_0^l ho(s)\, ds = qoT$, c'est-à-dire que le volume emmagasiné est égal au volume injecté.

Enfin, on peut traiter d'une manière analogue le cas de la réflexion partielle, caractérisée d'une manière générale par la condition-aval $q = m\,h$.

23. — Intumescences en régime non uniforme.

Le cas du bief limité en régime uniforme, tel qu'il a été étudié au paragraphe précédent, a un caractère purement théorique. Dans la réalité, le barrage aval a en général pour objet de relever le plan d'eau et produit de la sorte un « remous d'exhaussement ». Dans d'autres cas, plus rares, on se trouve en présence d'un remous d'abaissement.

On est ainsi amené à envisager l'extension de la théorie des intumescences au cas où le régime antérieur à la perturbation est permanent, mais non uniforme.

Le mouvement permanent est caractérisé par le fait que Q, U, H dépendent de s seul, et non de t. L'équation de continuité, dès lors, permet de conclure immédiatement à l'invariabilité du débit, et la seconde équation fondamentale s'écrit :

$$\frac{A\,Q_0^2\,dH}{H^3 - H_0^3} = I_0\,ds - dH \tag{36}$$

en désignant par H_0 la profondeur du régime uniforme équivalent $\left(\sqrt[3]{\frac{bQ_0^2}{I_0}}\right)$ et par A l'expression $\frac{gHo - \alpha U_0^2}{gUo^2}$.

La relation ci-dessus, qui est l'équation différentielle fondamentale du régime permanent s'intègre par quadrature, grâce à l'emploi de la fonction de Bresse

$$f(x) = -\int_0^x \frac{dx}{x^3 - 1}$$

Les formules se simplifient d'ailleurs lorsque le régime permanent à étudier est voisin du régime uniforme, ou même d'un régime permanent connu. C'est grâce à ces formules simplifiées que l'on vérifie, par exemple, la correspondance signalée au § 20 entre h'_∞ et W'_∞, ou qu'on peut établir directement la relation finale du § précédent.

Ces notions élémentaires étant rappelées, passons à l'étude des écarts de faible amplitude autour d'un régime permanent quelcon-

que. A cet effet, appliquons la méthode générale du § 4 au système fondamental (1) qui est encore valable. On obtient de nouveau, en première approximation, un système linéaire, du premier ordre en h et q qui s'écrit :

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial s} = 0 \\ (gH - \alpha U^2)\dfrac{\partial h}{\partial s} + (\alpha + \beta)\, U \dfrac{\partial q}{\partial s} + \beta \dfrac{\partial q}{\partial t} + \left(1 - \dfrac{\alpha}{bg}\dfrac{dH}{ds}\right) bg U^2 \left(\dfrac{2q}{Q} - \dfrac{3h}{H}\right) = 0 \end{cases}$$

puis une équation linéaire du second ordre en q, mais cette fois à *coefficients variables*, qui a la même expression formelle que l'équation (3), les termes du premier ordre étant multipliés toutefois par le facteur

$$1 - \frac{\alpha}{bg}\frac{dH}{ds} = 1 - \frac{\alpha U^2}{gH\, I}\frac{dH}{ds}.$$

24. — Esquisse d'une solution.

On peut étendre au cas actuel la méthode générale de la seconde partie en considérant des solutions élémentaires de la forme

$$(38)\qquad q = e^{i\omega t - i\int_0^s \lambda(s)ds} = e^z$$

d'où l'on déduit successivement :

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial s} = -\dfrac{\partial h}{\partial t} = -i\lambda e^z \\ h = \dfrac{\lambda}{\omega}\, e^z \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} = i\omega\, e^z \\ \dfrac{\partial h}{\partial s} = \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{d\lambda}{ds} - i\lambda^2\right) e^z \end{cases}$$

Les expressions ci-dessus satisfont, en vertu de leur formation même, à l'équation de continuité. En les portant dans la seconde équation (37), on obtient, au lieu de la relation algébrique (5) entre

λ et ω, l'équation différentielle suivante (de RICCATI), dont les coefficients dépendent de ω et à laquelle doit satisfaire $\lambda(s)$:

$$(gH - \alpha U^2)\, i \frac{d\lambda}{ds} + (gH - \alpha U^2)\lambda^2 + (\alpha + \beta) U \lambda\omega - \beta\omega^2$$

$$(40) \qquad + i\left(1 - \frac{\alpha}{bg}\frac{dH}{ds}\right) gbU^2 \left(\frac{2\omega}{Q} - \frac{3\lambda}{H}\right) = 0$$

$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ étant une solution de cette équation, les expressions écrites plus haut définissent une solution élémentaire qui, lorsque ω est réel, a pour vitesse de phase $\frac{\omega}{\lambda_1(s)}$ et pour coefficient d'amortissement $\lambda_2(s)$. Ces deux éléments ne sont plus constants le long du canal comme dans le cas du régime uniforme, mais varient d'une section à l'autre : autrement dit, ils ont un caractère différentiel. Enfin, dans la section origine, la perturbation se réduit à une oscillation sinusoïdale, ce qui permet d'appliquer encore la méthode générale de la seconde partie.

Revenons à la détermination de $\lambda(s)$. Il se présente à première vue des circonstances assez différentes de celles du régime uniforme, puisqu'il semble exister pour chaque valeur de ω une infinité de solutions $\lambda(s)$ de l'équation de RICCATI alors qu'en vertu de la relation algébrique (5) à chaque valeur de ω correspondent seulement deux valeurs de λ. Mais on va voir, en portant spécialement l'attention sur les grandes valeurs du paramètre , que des considérations de continuité permettent de rétablir l'analogie.

Posons à cet effet $z = \frac{i}{\omega}$ et $\psi = \frac{\lambda}{\omega} = \lambda \frac{z}{i}$. L'équation de RICCATI se transforme en la suivante :

$$(41) \qquad \begin{cases} (gH - \alpha U^2) \dfrac{d\psi}{ds} z + (gH - \alpha U^2)\psi^2 + (\alpha + \beta) U\psi - \beta \\ + \left(1 - \dfrac{\alpha}{bg}\dfrac{dH}{ds}\right) gbU^2 z \left(\dfrac{2}{Q} - \dfrac{3\psi}{H}\right) = 0 \end{cases}$$

Cherchons à représenter ψ par un développement de la forme :

$$(42) \qquad \psi(s) = \frac{1}{V(s)} - z\psi_0(s) + z^2\psi_1(s) + z^3\psi_2(s) + \ldots\ldots$$

Il vient successivement :

$$(43)\quad \begin{cases} (gH-\alpha U^2)\dfrac{1}{V^2}+(\alpha+\beta)U\dfrac{1}{V}-\beta=0 \\[2ex] (gH-\alpha U^2)\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{V}\right)-(gH-\alpha U^2)\dfrac{2}{V}\psi_0-(\alpha+\beta)U\psi_0 \\ \qquad +\left(1-\dfrac{\alpha}{bg}\dfrac{dH}{ds}\right)bgU^2\left(\dfrac{2}{Q}-\dfrac{3}{VH}\right)=0 \\[2ex] (gH-\alpha U^2)\dfrac{d\psi_0}{ds}+(gH-\alpha U^2)\left(\psi_0+\dfrac{2\psi_1}{V}\right)+(\alpha+\beta)U\psi_1 \\ \qquad +\left(1-\dfrac{\alpha}{bg}\dfrac{dH}{ds}\right)gbU^2\dfrac{3\psi_0}{H}=0 \end{cases}$$

d'où l'on tire de proche en proche $\dfrac{1}{V}$, ψ_0, ψ_1, etc...

On trouve en particulier pour V deux solutions qui sont précisément les célérités de la théorie générale (première partie, § 3). Il n'y a pas à s'en étonner, les formules de célérité des fronts d'onde étant valables, quel que soit le régime antérieur à la perturbation et quelle que soit l'ampleur de celle-ci. A chacune des deux solutions correspond pour $\psi(s)$ un développement unique, dont nous admettrons la convergence, de telle sorte que l'équation différentielle ait effectivement deux solutions, mais en aucun cas davantage, qui soient fonctions continues du paramètre autour de la valeur $z=\dfrac{i}{\omega}=0$. Ces deux solutions peuvent être étendues de proche en proche aux autres valeurs du paramètre et l'on trouve ainsi, pour chaque valeur de ω, deux fonctions bien définies $\lambda(s)$ et $\lambda'(s)$ qui remplacent ici les constantes λ et λ' tirées de la relation (5).

Considérons alors l'intégrale :

$$(44)\qquad q=Re\int F(\omega)\,e^{i\omega t-i\int_0^s\lambda ds}\,d\omega$$

L'exposant peut s'écrire :

$$i\omega\left(t-\int_0^s\psi\,ds\right)=i\omega\left(t-\int_0^s\frac{ds}{V}\right)-\int_0^s\psi_0\,ds+z\int_0^s\psi_1 ds+\ldots.$$
$$=i\omega\theta-\mu_0(s)+z\,\mu_1(s)+z^2\,\mu_2(s)+\ldots.$$

en désignant par θ le temps compté dans chaque section à partir

du passage du front d'onde et par μ_0, μ_1, μ_2,... les intégrales de ψ_0, ψ_1, ψ_2, ...entre o et s. D'où :

$$q = Re\left\{ e^{-\mu_0(s)} \int e^{i\omega\theta}\, e^{\frac{i}{\omega}\mu_1 + \left(\frac{i}{\omega}\right)^2 \mu_2 + \cdots} F(\omega)\, d\omega \right\}$$

Les développements en série autour du front d'onde indiqués au § 12 (seconde partie) s'étendent donc au cas actuel, les termes tels que $\mu_k s$ étant remplacés par

$$\mu_K(s) = \int_o^s \psi_K(s)\, ds.$$

$\psi_0(s)$ représente en particulier le coefficient d'amortissement (différentiel) de la tête de l'intumescence :

$$(45) \qquad \psi_0(s) = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{bg}\frac{dH}{ds}\right) gbU^2 \left(\frac{2}{Q} - \frac{3}{VH}\right) + (gH - \alpha U^2)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{V}\right)}{(gH - \alpha U^2)\frac{2}{V} + (\alpha + \beta)U}$$

Cette formule se ramène à celle du régime uniforme en remplaçant le facteur $1 - \frac{\alpha}{bg}\frac{dH}{ds}$ par 1, et en ajoutant le terme $(gH - \alpha U^2)\frac{d\left(\frac{1}{V}\right)}{ds}$. La correction inverse sera dite *correction de non-uniformité.* Dans l'hypothèse des tranches et pour la propagation-aval, la correction de non-uniformité consiste, toutes réductions faites, à ajouter au numérateur le terme $-\frac{1}{2}(gH - U^2)\sqrt{\frac{g}{H}}\frac{dH}{ds}$ qui est négatif dans le cas général du remous d'exhaussement.

Ainsi, dans ce cas, par suite de la non-uniformité, l'amortissement est un peu moins rapide que ne l'indiquerait l'application au régime permanent des formules du régime uniforme.

Une autre valeur importante du paramètre ω est la valeur 0 (*intumescence asymptotique*), autour de laquelle on cherche à représenter λ par un développement de la forme :

$$\lambda(s) = \lambda_0(s) + \omega\lambda_1(s) + \omega^2\lambda_2(s) + \ldots.$$

On trouve ainsi tout d'abord la relation :

$$(gH - \alpha U^2)\, i\frac{d\lambda_0}{ds} + (gH - \alpha U^2)\lambda_0^2 - i\left(1 - \frac{\alpha}{bg}\frac{dH}{ds}\right) gbU^2 \frac{3\lambda_0}{H} = 0$$

qui a la solution évidente $\lambda_0 = 0$.

Puis, compte tenu de $\lambda_0=0$, il vient :

$$(46) \qquad (gH-\alpha U^2)\frac{d\lambda_1}{ds}+\left(1-\frac{\alpha}{bg}\frac{dH}{ds}\right)gbU^2\left(\frac{2}{Q}-\frac{3\lambda_1}{H}\right)=0$$

Le fait que λ_0 est nul signifie qu'en régime permanent comme en régime uniforme une intumescence de fréquence nulle ne s'amortit pas, et que par suite il y a encore une vitesse privilégiée, mesurée dans le cas actuel par $\frac{1}{\lambda_1}$, permettant l'observation d'une intumescence asymptotique notable. Mais cette vitesse $\frac{1}{\lambda_1}$, variable avec s, peut s'écarter très sensiblement de la valeur $\frac{3}{2}U$. Pour nous en rendre compte, observons qu'en posant $h=q\,\lambda_1$ l'équation différentielle qui définit λ_1 s'identifie en régime permanent avec la seconde équation (37), c'est-à-dire avec l'équation de la nouvelle ligne d'eau correspondant au supplément de débit q. La fonction λ_1 (s) est ainsi le rapport de la surélévation au supplément de débit pour un régime permanent voisin du régime permanent initial, et son inverse, la vitesse de propagation asymptotique $\frac{1}{\lambda_1}$, est le rapport du supplément de débit à la surélévation.

Il est dès lors évident que, selon les conditions aux limites, λ_1 peut varier dans une très large mesure. Si l'on envisage, par exemple, un bief indéfini vers l'amont, la limite de λ_1 à l'infini amont est manifestement $\frac{2Q}{3H}=\frac{2}{3\,U}$, c'est-à-dire qu'on tend vers les conditions du régime uniforme. Au droit de l'ouvrage qui limite le bief à l'aval, par contre, la valeur de λ_1 est fixée par la condition aval qu'on peut écrire d'une manière très générale sous la forme $q=m\,h$. D'où $\lambda_1=\frac{1}{m}$.

La constante m peut être supérieure à $\frac{3}{2}U$, si par exemple le canal se jette dans un lac ($m=\infty$) ou aboutit à un barrage déversoir. Elle peut dans d'autres cas être inférieure à $\frac{3}{2}U$, si par exemple le bief est limité à l'aval par un barrage à vannes de fond. Dans la première hypothèse, la surélévation est petite (ou même théoriquement nulle), et la vitesse asymptotique est grande (ou même théoriquement infinie) à l'extrémité-aval ; $\frac{d\lambda_1}{ds}$ est, en vertu de l'équation dif-

férentielle, < 0. Donc $\frac{1}{\lambda_1}$ croît et se rapproche de la limite $\frac{3}{2}\,U$ à mesure qu'on remonte vers l'amont. Dans la seconde hypothèse, des circonstances inverses se produisent, $\frac{1}{\lambda_1}$ tendant toujours vers la limite $\frac{3}{2}\,U$.

QUATRIÈME PARTIE

APPLICATIONS

25. — Applications numériques.

La théorie qui précède peut être poussée jusqu'aux applications numériques. J'en donnerai un exemple important, relatif à l'injection illimitée d'un débit supplémentaire constant en tête d'un bief indéfini, le cas de l'injection limitée s'en déduisant immédiatement comme il est expliqué au § 9.

Rappelons que les intumescences de débit et de hauteur sont alors données par les formules :

$$\frac{q}{q_0} = Re \int \frac{1}{2\pi i\omega} e^{i\omega t - i\lambda s} d\omega$$

$$\frac{h}{q_0} = Re \int \frac{\lambda}{2\pi i\omega^2} e^{i\omega t - i\lambda s} d\omega$$

Si on intègre sur l'ellipse $Y = 0$, l'exponentielle est égale à la fonction réelle e^X, X étant donné par les formules 14 et 15 du § 10, et l'on a d'autre part les relations :

$$Re \frac{d\omega}{2\pi i\omega} = \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{\pi}$$

$$Re \frac{\lambda d\omega}{2\pi i\omega^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K} \frac{d\alpha}{\pi} + \frac{X}{s} \frac{\sin\alpha}{\rho} \frac{d\alpha}{\pi} - \frac{X}{s} \frac{\cos\alpha}{\pi} d\left(\frac{1}{\rho}\right) \right]$$

Désignons alors par F, G, H les fonctions :

$$\frac{1}{K} e^X, \frac{X}{s} e^X \frac{\sin\alpha}{\rho}, -\frac{X}{s} e^X \frac{\cos\alpha}{\pi},$$

intégrons sur la demi-ellipse de droite, et doublons le résultat. $\frac{q}{q_0}$

et $\frac{h}{q_0}$ sont données par les intégrales suivantes (auxquelles il faut ajouter le résidu du pôle $\omega = 0$ si $K < \frac{3}{2}\,a$) :

$$K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F \frac{d\alpha}{\pi}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F \frac{d\alpha}{\pi} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} G \frac{d\alpha}{\pi} + \int_{\rho_1}^{\rho_2} H\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Avec le concours de MM. Goldschmidt et Jollet, j'ai effectué le calcul numérique pour la valeur a=0,1333, qui correspond au lit de

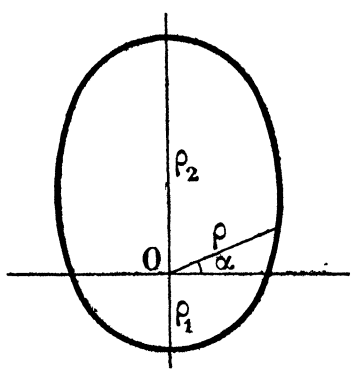

Fig. 12.

la Seine en aval de Paris dans le cas du régime uniforme, b étant égal à 1,027 a (§ 5), q_0 étant égal à l'unité, et s et t étant exprimés en unités réduites (formules 5 du § 5).

On obtient ainsi le tableau ci-après, dans lequel figurent, en fonction de s et de t, les valeurs numériques des rapports $\frac{q}{q_0}$ et $\frac{h}{ho}$ (le second étant égal à $\frac{h}{q_0}\frac{q_0}{h_0} = \frac{h}{q_0}\frac{3}{2}\,a$), qui définissent le degré de réalisation du nouveau régime uniforme en ce qui concerne respectivement les débits et les hauteurs. Ces valeurs numériques ont d'ailleurs

été vérifiées, au voisinage du front d'onde, en utilisant les développements en série du § 12.

Le tableau ci-après a un caractère synthétique puisqu'il est valable quel que soit le régime uniforme antérieur à la perturbation ou, qu'en d'autres termes, à chaque couple (s, t) exprimé en unités réduites, correspondent en vertu des formules (5) une infinité de couples $(s' \; t')$ exprimés en unités usuelles. Soit $(s'_1 \; t'_1)$ et $(s'_2 \; t'_2)$ deux d'entre eux, correspondant aux vitesses U_1 et U_2 dans le régime uniforme préexistant, le rapport $\frac{U_2}{U_1}$ étant égal à γ. On a d'après les formules (5) :

$$\frac{t'_2}{t'_1} = \gamma, \quad \frac{s'_2}{s'_1} = \gamma^2.$$

	$s = 1$			$s = 2$		
K	t	q/q_0	h/h_0	t	q/q_0	h/h_0
1,146	0,872	0,441	0,77	1,744	0,195	0,034
0,6	1,666	0,577	0,155	3,333	0,411	0,130
0,4	2,5	0,661	0,223	5	0,545	0,219
0,3	3,333	0,715	0,276	6,666	0,631	0,297
0,25	4	0,751	0,314	8	0,678	0,341
0,15	6,666	0,831	0,435	13,333	0,801	0,504
0,10	10	0,874	0,527	20	0,873	0,639
0,05	20	0,946	0,728	40	0,955	0,835
0,01	100	0,9998	0,990	200	0,99997	0,999

	$s = 3$			$s = 4$		
K	t	q/q_0	h/h_0	t	q/q_0	h/h_0
1,146	2,616	0,086	0,015	3,488	0,038	0,006
0,6	5	0,320	0,111	6,666	0,260	0,094
0,4	7,5	0,473	0,209	10	0,418	0,196
0,3	10	0,577	0,297	13,333	0,538	0,294
0,25	12	0,638	0,353	16	0,605	0,360
0,15	20	0,784	0,542	26,666	0,777	0,567
0,10	30	0,874	0,694	40	0,880	0,729
0,05	60	0,965	0,911	80	0,972	0,923
0,01	300	1	1	400	1	1

Ces deux relations définissent une transformation de l'espace temps dans laquelle les durées sont dilatées dans le rapport γ et les distances dans le rapport γ^2. En deux points homologues, les valeurs des rapports $\frac{q}{q_0}$ et $\frac{h}{h_0}$ sont égales: en d'autres termes, l'intumescence de débit est la même et les intumescences de hauteur sont, comme il est aisé de le voir, dans le rapport $\frac{1}{\gamma}$.

26. — Exemple de la Seine.

J'indiquerai à titre d'exemple le résultat de l'application des calculs précédents à l'amortissement des intumescences produites dans la Seine en aval de Paris ($I=10^{-4}$).

Dans le cas des plus hautes eaux navigables, le régime uniforme antérieur à la perturbation est défini par un débit de 1.740 m³/sec, une largeur en surface de 242 m., une profondeur de 6,80 m. et une vitesse de 1,05 m/sec. Les données à introduire dans le calcul sont ainsi les suivantes :

$$I = 10^{-4} \quad Q = 7{,}14 \quad U = 1{,}05 \quad H = 6{,}80.$$

On en déduit :

$$a = 0{,}1333$$

$$\frac{\beta U}{gI} = 1.114^{\text{sec.}} \text{ (unité de temps).}$$

$$\frac{\beta U}{gI}\sqrt{\frac{gH-\alpha U^2}{\beta}} = 8.773 \text{ m. (unité de longueur).}$$

On considère d'autre part l'injection d'un débit supplémentaire constant pendant une durée de 2 h. 1/2 (en unités réduites, $T=8{,}07$) correspondant au fonctionnement pratique d'une usine de pompage en projet.

Dans ces conditions, le maximum de surélévation et le maximum de débit de l'intumescence ne sont qu'une fraction de la surélévation et du débit du régime uniforme correspondant à l'injection illimitée. Cette fraction atteint, selon les sections d'observation, les valeurs suivantes :

s	1	2	3	4
s'	8 km. 770	17 km. 550	26 km. 320	35 km. 090
$\frac{q}{q_0}$	0,86	0,70	0,55	0,37
$\frac{h}{h_0}$	0,50	0,37	0,27	0,17

27. — Expérience de Chatou.

Une expérience d'intumescence a été effectuée sur la Seine, le 14 juin 1933, dans le bief d'Andrésy, situé à l'aval du barrage de Chatou, sous les auspices de MM. Parmentier et Deymié, Ingénieur en Chef et Ingénieur du Service de la Navigation. Nous la relatons d'après un exposé de M. Deymié à la Société hydrotechnique de France.

L'expérience a consisté en une lâchure brusque (4 minutes), au barrage de Chatou, d'un débit supplémentaire de 100 m³/sec. pendant environ 2 h. 1/2, des observateurs étant postés pour relever le diagramme des surélévations le long de la Rivière Neuve à Chatou et à La Grenouillière, et le long de la Seine proprement dite au Pecq, à Maisons-Laffite et à Conflans. Le résultat de leurs observations est traduit sur les courbes ci-contre, où l'on distingue très nettement la surélévation brusque du front d'onde, suivie d'une montée lente vers le nouveau régime permanent.

Les comparaisons quantitatives, effectuées en tenant compte du changement de lit à partir de Bougival, se heurtent à plusieurs difficultés : le fait que le régime initial comme le régime final étaient permanents mais non-uniformes, l'importance relative de la perturbation qui a fait passer le débit de la Rivière Neuve du simple au double, enfin l'imprécision de certaines conditions aux limites comme le débit écoulé par les écluses et les barrages. Toutefois ces difficultés n'affectent pas la célérité du front d'onde qui est, comme on l'a vu au § 3, une donnée absolument générale du mouvement variable, et l'on obtient en effet une concordance très satisfaisante entre la célérité théorique (6,19) et la célérité expérimentale (6,37).

Les autres données de la propagation peuvent être approximati-

vement calculées en considérant en chaque point un régime uniforme « tangent » au régime permanent initial, c'est-à-dire caractérisé par une « pente équivalente » $I = \frac{b\,U^2}{H}$, étant observé qu'une seconde approximation exigerait l'intervention de « corrections de non-uniformité » (5 % dans le cas actuel pour le coefficient d'amortissement du front d'onde).

On a d'ailleurs : $H = 3$ m. 60 $L = 93$ m. $Q = \frac{100}{93} = 1{,}07$ m³/sec. $U = 0{,}30$ m./sec. $I = 1{,}6 \times 10^{-5}$ $a = 0{,}05$.

unité de temps $\frac{\beta U}{gI} = 2.000^{\text{sec.}}$ environ,

unité de longueur $\frac{\beta U}{gI}\sqrt{\frac{gH-\alpha U^2}{\beta}} = 12.000$ m. environ.

$\mu_0 = 0{,}93$.

D'où le tableau suivant des surélévations au front d'onde (celles-ci étant préalablement ramenées à un lit de largeur constante) :

Stations d'observations	s'	s	Surélévation relative	
			observée	calculée
Chatou	0	0	1	1
La Grenouillère	1,9	0,16	0,85	0,86
Le Pecq	8,5	0,71	0,46	0,51
Maisons-Laffitte	14	1,17	0,38	0,34
Conflans	25	2,08	0,14	0,14

La théorie et l'expérience concordent ainsi à 10 % près, ce qui est relativement satisfaisant eu égard aux difficultés rappelées plus haut. L'écart absolu ressort d'ailleurs en grandeur réelle à 6 mm. au maximum.

On peut aller un peu plus loin,et appliquer autour du front d'onde, c'est-à-dire au début de la montée lente, les développements en série du § 12 ; la surélévation calculée est de l'ordre de grandeur de la surélévation réelle.

D'autres expériences viennent d'être effectuées ou le seront à

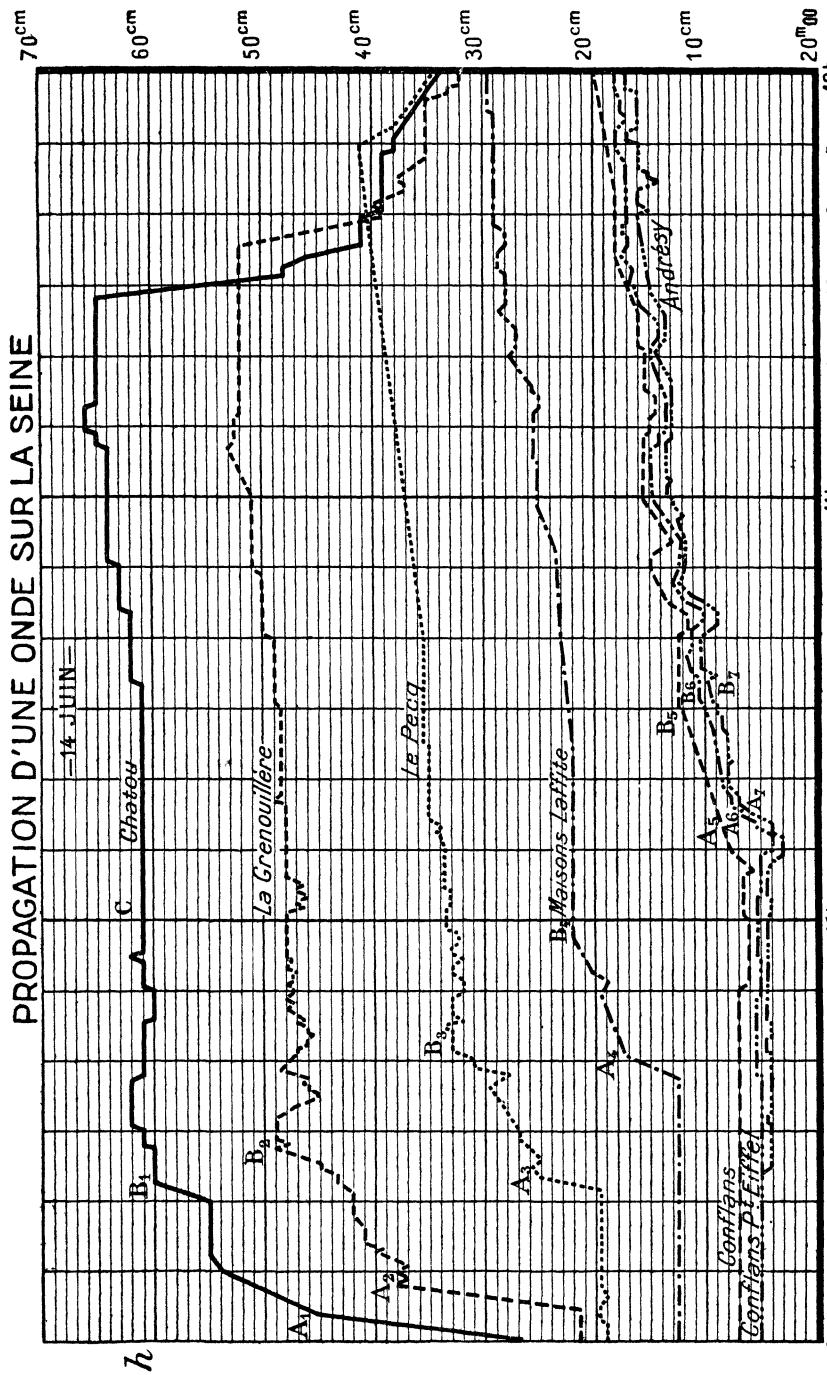
PROPAGATION D'UNE ONDE SUR LA SEINE
14 JUIN
70cm
60cm
50cm
40cm
30cm
20cm
10cm
20mm
9heures
10
20
30
40
50
10h.
10
20
30
40
50
11h.
10
20
30
40
50
5
12h.
h
Chatou
C
La Grenouillère
Le Pecq
Maisons-Laffite
Andrésy
Conflans
Conflans pt Eitel
A1
A2
A3
A4
A5
A6
A7
B1
B2
B3
B4
B5
B6
B7

Fig. 13.

relativement prochaine échéance dans le lit de la Seine. Il ne peut en être fait état actuellement.

28. — Expérience de l'Aar.

Une expérience d'intumescence à été effectuée sur l'Aar le 6 février 1920, sous la direction de l'Administration des Eaux. Ses résultats sont relatés dans une brochure du Dr Karl Kobelt (Sekretariat des Amtes für Wasserwirtschaft, Bollwerk 27, Berne).

L'expérience du 6 février 1920 a consisté en une lâchure d'un débit supplémentaire de 170 m³/sec. pendant environ 12 heures au débouché du lac de Bienne, les stations d'observation étant échelonnées le long de l'Aar d'abord, puis le long du Rhin jusqu'à Bâle.

L'intumescence observée présente un caractère nettement différent des intumescences de la Seine. On n'y distingue pas de front d'onde se propageant avec la célérité théorique et subissant un amortissement exponentiel. La perturbation évolue tout de suite vers le type « crue ». Ce caractère spécial est imputable à deux causes ; d'une part la progressivité de la perturbation, l'ouverture des vannes du lac de Bienne ayant duré une heure et demie au lieu de 4 minutes pour les vannes de Chatou ; d'autre part,l'importance du coefficient d'amortissement, la hauteur de la tête de l'intumescence diminuant de moitié tous les 650 m. environ au lieu de tous les 8.500 m. dans le cas de la Seine. Cette extrême rapidité de l'amortissement explique que le front d'onde théorique, de célérité 4,66 m/sec, ait presque aussitôt échappé, à l'observation, et que celle-ci ait conduit à attribuer au front d'onde pratique, c'est-à-dire au début des surélévations appréciables,une vitesse de 2,88 m/sec., intermédiaire entre la célérité ci-dessus et la vitesse asymptotique $\frac{3}{2} U = 2{,}02$ m./sec.

La propagation ne s'étend pas encore assez loin pour que les formules asymptotiques s'appliquent exactement. On constate néanmoins, conformément au § 13, l'amortissement de l'intumescence à grande distance comme $\frac{1}{\sqrt{s}}$. En effet à Döttingen (119 km.) et à Bâle (188 km.), les surélévations (réduites à la même largeur de la surface libre) ont atteint respectivement 0,35 m. et 0,28 m.

29. — Conclusion.

Il résulte des indications précédentes qu'au degré de précision des essais effectués, il y a concordance entre les faits et la théorie. Mais il serait évidemment souhaitable de procéder à des expériences nouvelles en vue de comparaisons plus poussées et plus rigoureuses.

BIBLIOGRAPHIE

BOUSSINESQ. — *Essais sur la Théorie des eaux courantes* (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, et imprimés par son ordre, 2e série, t. XXIII. Paris, 1877).

GRAEFF. — *Traité d'Hydraulique* (Imprimerie Nationale. Paris, 1882).

BOULANGER. — *Hydraulique générale* (Librairie Doin. Paris, 1909).

EYDOUX. — *Hydraulique générale et appliquée* (Librairie Baillière. Paris, 1921).

BONNEAU. — *Etude sur la Propagation des crues* (Annales des Ponts et Chaussées, mai-juin 1924).

PUPPINI. — *Influence sur les Régimes fluviaux de l'Exploitation non uniforme d'Installations hydrauliques* (Elettrotecnica, n° 22, 5 août 1933).

BRILLOUIN (L.). — *Méthode de Col* (Annales de l'Ecole normale supérieure, t. XXXIII, 1916).

PERRON (O.). — *Uber die näherungsweise Berechnung von Funktionengrosser Zahlen* (Sitzungsberichte der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Münich, 1917).

KOELT (K.). — *Uber eine künstlich erzeugte Hochwasserwelle in der Aare* (Mitteilungen des Amtes für Wasserwirtschaft. Bern, 1921).