THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

RAMBAUD

Étude des points singuliers pour une équation linéaire du premier ordre

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1932

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1932__141__3_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

N° d'Ordre

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

RAMBAUD

Licencié ès Sciences
Ancien Elève de l'Ecole Polytechnique

1e **THÈSE** : ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS POUR UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

2re **THÈSE** : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le *devant la Commission d'examen*

MM. DULAC, *Président.*
SIRE, *Examinateur.*
EYRAUD, —

LYON

BOSC Frères, M. et L. RIOU

IMPRIMEURS-ÉDITEURS

1932

UNIVERSITÉ DE LYON - FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. GRIGNARD, O., I., P. N., Membre de l'Institut.

Assesseur

M. VANEY, I.,

Professeurs honoraires

MM. VESSIOT, O. I.;
GÉRARD, O. I., C.;
RIGOLLOT, I
OFFRET, I.,
COUTURIER, I., ;

Professeurs titulaires

MM. GRIGNARD, O., I., P. N., Membre de l'Institut, *Chimie générale.*
DULAC, I., *Calcul différentiel et intégral.*
MASCART, I., *Astronomie physique.*
SIRE, I., *Mécanique rationnelle et appliquée.*
MEUNIER, O., I., *Chimie industrielle.*
BEAUVERIE, I., C., *Botanique.*
THOVERT, I., *Physique.*
CARDOT, *Physiologie générale et comparée.*
VANEY, I. *Zoologie.*
LONGCHAMBON, *Minéralogie théorique et appliquée.*
LOCQUIN, I., *Chimie générale.*
ROMAN, I., *Géologie.*
DÉJARDIN, *Physique.*
DOUIN, *Botanique.*

Professeurs titulaires (sans chaire)

MM. LEMARCHANDS, I., *Chimie industrielle.*
EYRAUD, *Mathématiques.*

Maîtres de conférences et Chargés de cours complémentaires

MM. SOLLAUD, I., *Zoologie.*
AUMÉRAS, *Chimie physique.*
FROMAGEOT, *Chimie biologique.*
BONNET, I., *Zoologie appliquée et Zootechnie.*
MAYET, I., *Anthropologie.*
PELOSSE, I, *Sériciculture.*
DONCIEUX, I., *P. C. N. supérieur.*
SEYEWETZ, I., *Matières colorantes artificielles.*
Mlle BACHRACH, I., *Physiologie.*
MM. DARESTE DE LA CHAVANNE, I., *Géologie.*
DUFAY, *Astrophysique.*
VIRET, *Etude des Roches.*
RANSON, *Géométrie supérieure.*

Secrétaire

Mme NÉTIEN, I.

A Monsieur Henri DULAC

Professeur à la Faculté des Sciences

§ 1. — Introduction

Dans un mémoire, Briot et Bouquet ont étudié

$$x^2 y' + \lambda y = \varphi(x) \equiv b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \ldots\ldots$$

où $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe de x pour $x=0$.

Ils ont étudié la série entière vérifiant formellement cette équation et ont montré que, pour que cette série entière fut convergente et fournisse par suite une solution de l'équation holomorphe et nulle pour $x=0$, il fallait et il suffisait que l'on ait :

$$R = b_0 - b_1\lambda + b_2 \frac{\lambda^2}{2!} - b_3 \frac{\lambda^3}{3!} + b_4 \frac{\lambda^4}{4!} - \ldots\ldots = 0$$

Horn, dans une série de mémoires parus dans le journal de Crelle (tomes 113, 116, 117, 118, 119 et 120), a généralisé les résultats obtenus par Briot et Bouquet. Notamment dans le tome 120 (année 1899), il étudie l'équation linéaire plus générale :

$$x^{k+1} y' + y\ G(x) = H(x)$$

ou K est un entier plus grand que l'unité et où G(x) et H(x) sont des fonctions holomorphes de x pour la valeur $x=0$ de la variable. Horn montre d'abord que l'on peut ramener cette équation à la forme :

$$x^{k+1} y' + (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ . + a_k x^k)\, y = h(x)$$

puis il étudie les solutions de cette équation au moyen de l'expression de l'intégrale générale donnée par la méthode classique et obtient en particulier les résultats suivants :

1° Si x tend vers zéro à l'intérieur d'un secteur tel que la partie réelle de $-\frac{1}{Kx^k}$ soit négative, c'est-à-dire si $\cos K\varphi > 0$, une seule solution de l'équation tend vers 0 avec x (φ étant l'argument de x).

2° Si x tend vers zéro à l'extérieur de ce secteur toutes les solutions tendent vers 0 avec x.

3° Il faut que K conditions soient satisfaites pour que l'équation admette pour $x = 0$ une solution holomorphe et nulle. Ces conditions sont obtenues en égalant à zéro K quantités ω_i exprimées par des intégrales compliquées. Ces K quantités ne semblent pas pouvoir être exprimées au moyen de séries analogues à la série figurant dans la condition trouvée par Briot et Bouquet.

Dans un intéressant mémoire du « Tokohu mathematical journal » (vol. VII, 1915, page 64), dont je n'ai eu connaissance qu'après la rédaction de mon travail, M. Watanabbe a donné la condition pour que l'équation :

$$x^2y = (a + a_1x)\,y' + x\,\varphi\,(x)$$

ait une solution holomorphe et nulle pour $x = 0$.

Dans ce travail, je montre :

1° Que l'on peut toujours ramener l'équation linéaire à la forme :

$$\text{(II)}\quad x^{k+1}\,y' = y\,(A - Bx^k) + g\,(x)$$

L'intégration de cette équation (II) se ramène à l'intégration de K équations de la forme :

III) $x^{k+1} y' = y (A - Bx^k) + x^r \varphi_r (x^k)$

Chacune de ces équations (III) se ramène par un changement de variable très simple à l'équation :

$$\text{(IV)} \quad x^2 y' = y (\lambda - \beta x) + \varphi (x)$$

2° Si l'on pose :

$$u(x) = \frac{e^{-\frac{A}{kx}}}{x^{\frac{\beta+r}{k}}} \; ; \quad z_r(x) = u \int_0^x \frac{x^{\frac{\beta+r-k}{k}}}{u} dx$$

$$; \; r = 1, 2 \; . \; k$$

Si l'on désigne par C une constante arbitraire et par F (x) une fonction holomorphe pour $x=0$ représentée par une série entière dont les coefficients s'expriment en fonction des coefficients de (I) au moyen de polynomes, l'intégrale générale de (II) prend la forme :

$$y = C u(x) + F(x) + \sum_{r=1}^{r=k} S_r Z_r (x)$$

Les S_r sont des séries analogues à la série qui figure dans la condition trouvée par Briot et Bouquet.

L'emploi de cette forme de l'intégrale générale simplifie notablement la démonstration des propriétés des solutions de II au voisinage de $x = 0$.

3° Les conditions pour que (II) admettent une solution holomorphe et nulle pour $x = 0$ sont :

$$S_r = o \qquad r = 1, 2 \ldots\ldots K$$

Ce résultat a été établi par diverses méthodes ; les unes utilisent l'étude directe de la série entière vérifiant formellement (II), les autres s'appuient sur la forme donnée à l'intégrale générale.

Dans un premier chapitre, j'établis la convergence des séries employées dans la suite du travail.

CHAPITRE PREMIER

Théorèmes préliminaires sur les séries

§ 1. — Théorème I

Soient les séries entières :

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots\dots + b_n x^n + \dots$$

$$\psi(x) = b_0 + \frac{b_1}{\lambda+1} x + \frac{b_2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} x^2 + \dots + \frac{b_n}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)} x^n + \dots$$

où λ *est un nombre quelconque autre qu'un entier négatif, qui annulerait un des facteurs du produit* $(\lambda + 1) \dots\dots (\lambda + n)$.

Si la série $\varphi(x)$ *a un rayon de convergence non nul, la série* $\psi(x)$ *est convergente pour toute valeur de* x.

Soit ρ un nombre positif inférieur au rayon de convergence de la série $\varphi(x)$.

Puisque $\varphi(x)$ est convergent pour $|x| < \rho$, on peut trouver un nombre A positif, tel que l'on ait pour toutes les valeurs de n:

$$|b_n|\, \rho^n < A \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad |b_n| < \frac{A}{\rho^n}$$

On aura donc :

$$\left| \frac{b_n\ x^n}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+n)} \right| = \rho^n \mid b_n \mid \frac{\left|\frac{x}{\rho}\right|^n}{\mid(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)\mid}$$

$$< A \frac{\left|\frac{x}{\rho}\right|^n}{\mid(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)\mid}$$

Mais la série de terme général :

$$u_n = \frac{x^n}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+n)}$$

est convergente pour toute valeur de x car le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{\rho(\lambda+n+1)}$$

tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Il en sera de même de la série de terme général $A u_n$. La série ψ (x), dont le terme général est inférieur en module au terme général $A\ u_n$ sera également convergente quel que soit x.

§ 3. — Théorème II

Soient les séries entières :

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_n x^n + \ldots.$$

$$\Phi(x) = \frac{b_{n+1}}{r+nK} + \frac{b_{n+2}}{(r+nK)\left[r+(n+1)K\right]} x + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{b_{n+p+1}}{(r+nK)\ldots\ldots\left[r+(n+p)K\right]} x^p + \ldots.$$

où r *et* K *sont des nombres quelconques astreints à la seule condition que* r/K *ne soit pas un nombre négatif de valeur absolue plus grande ou égale à* n.

Si la série φ (x) *a un rayon de convergence non nul, la série* Φ (x) *est convergente pour toute valeur de* x.

La restriction apportée au nombre r/K montre qu'aucun des facteurs figurant dans les dénominateurs des termes de $\Phi(x)$ ne peut s'annuler.

Puisque la série $\varphi(x)$ est convergente pour $|x| < \rho$ il en est de même de la série :

$$S_1(x) = b_{n+1}\, x^{n+1} + b_{n+2}\, x^{n+2} + \ldots\ldots$$

et par conséquent de la série :

$$S_2(x) = b_{n+1}\, x + b_{n+2}\, x^2 + \ldots.$$

Or, si l'on écrit $\Phi(x)$ sous la forme :

$$\Phi(x) = \frac{1}{r + nK}\left[b_{n+1} + b_{n+2}\frac{\frac{x}{K}}{\frac{r}{K} + n + 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{b_{n+3}\left(\frac{x}{K}\right)^2}{\left(\frac{r}{K} + n + 1\right)\left(\frac{r}{K} + n + 2\right)} + \ldots\ldots \right]$$

nous pouvons appliquer le théorème I en posant : $r/K + n = \lambda$ et en prenant pour variable x/K au lieu de x.

La série $\Phi(x)$ est donc convergente pour toute valeur de x si la série $\varphi(x)$ a un rayon de convergence non nul.

§ 4. — Théorème III

Soit la série :

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_n x^n + \ldots\ldots$$

dont le coefficient A_n *est donné par la relation :*

$$\frac{\lambda^n A_n}{(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots\ldots(\beta + n)} = b_0 + \frac{b_1 \lambda}{\beta + 1} +$$

$$+ \frac{b_2 \lambda^2}{(\beta + 1)(\beta + 2)} + \ldots\ldots + \frac{b_n \lambda^n}{(\beta + 1)\ldots.(\beta + n)} = S_n$$

où β *est un nombre quelconque non entier négatif.*

Pour que la série $\Phi(x)$ *ait un rayon de convergence non nul, il faut et il suffit que* S_n *ait pour limite zéro pour* n *infiniment grand. Le rayon de convergence de la série* $\Phi_1(x)$ *est alors au moins égal à celui de la série :*

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots + b_n x^n + \dots$$

La condition est nécessaire.

En effet, on a :

$$\left| A_n x^n \right| = \left| S_n (\beta + 1)(\beta + 2) \dots (\beta + n) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right|$$

et comme $(\beta + 1)(\beta + 2) \dots (\beta + n) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n$ augmente indéfiniment avec n quelle que soit la valeur de x/λ, $A_n x^n$ augmentera indéfiniment si S_n ne tend pas vers zéro et la série $\Phi(x)$ aura son terme général qui augmentera indéfiniment. Pour que la série $\Phi(x)$ soit convergente, il est donc nécessaire que S_n tende vers zéro pour n infiniment grand.

La condition est suffisante.

Puisque S_n tend vers zéro, on peut écrire :

$$b_0 + \frac{b_1 \lambda}{\beta+1} + \dots + \frac{b_n \lambda^n}{(\beta+1)\dots(\beta+n)} =$$

$$-\left[\frac{b_{n+1} \lambda^{n+1}}{(\beta+1)\dots(\beta+n+1)} + \dots + \frac{b_{n+p} \lambda^{n+p}}{(\beta+1)\dots(\beta+n+p)} + \dots\right]$$

et par suite :

$$\frac{\lambda^n A^n}{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)} =$$

$$-\left[\frac{b_{n+1} \lambda^{n+1}}{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n+1)} + \dots + \frac{b_{n+p} \lambda^{n+p}}{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n+p)} + \dots\right]$$

$$A_n = -\left[\frac{\lambda b_{n+1}}{\beta+n+1} + \frac{\lambda^2 b_{n+2}}{(\beta+n+1)(\beta+n+2)} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^p b_{n+p}}{(\beta+n+1)\dots(\beta+n+p)} + \dots\right]$$

Soit ρ un nombre positif inférieur au rayon de convergence de $\varphi(x)$. Il existe un nombre fixe M tel que, pour $|x| < \rho$, l'on ait :

$$|b_{n+1}|\,\rho^{n+1} < M \qquad \text{ou} \qquad |b_{n+1}| < \frac{M}{\rho^{n+1}}$$

quelle que soit la valeur de n. On en déduit :

$$\rho^n\,|A_n| < \rho^n \left[\frac{|\lambda|\,M}{\rho^{n+1}\,|\beta+n+1|} + \dots + \frac{|\lambda|^p\,M}{\rho^{n+p}\,|\beta+n+1|\,\dots\,|\beta+n+p|} + \dots \right]$$

$$\rho^n\,|A^n| < M \left[\left|\frac{\lambda}{\rho}\right| \frac{1}{|\beta+n+1|} + \left|\frac{\lambda^2}{\rho^2}\right| \frac{1}{|\beta+n+1|\,|\beta+n+2|} + \dots \right]$$

En appliquant la règle $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, on voit que la série entre parenthèses est convergente pour toute valeur de λ/ρ et par suite en désignant par S_n sa somme on aura :

$$\rho^n\,|A_n| < M\,S_n$$

Montrons que parmi tous les nombres S_n ainsi définis il y en a un qui est plus grand que tous les autres. Pour cela, β étant un nombre quelconque, nous poserons :

$$\beta = -q + a + bi$$

a étant réel et compris entre 0 et 1 ($0 \leqslant a < 1$) et q étant un entier positif ou nul. Ne considérons aussi que les nombres S_n pour lesquels on a $n > q - 1$.

On peut écrire :

$$|\beta + n + 1| \geqslant n + 1 + a - q > 0$$

et d'une façon générale :

$$|\beta + n + p| \geqslant n + p + a - q > 0$$

car le module d'une quantité imaginaire est supérieur ou égal à la valeur absolue de sa partie réelle qui est positive dans ce cas puisque $n > q - 1$. Posons :

$$S' = \frac{|\lambda|}{\rho}\ \frac{1}{n+a-q+1} + \frac{|\lambda|^2}{\rho^2}\ \frac{1}{(n+a-q+1)\ (n+a-q+2)} + \cdots$$

on voit que tous les termes de S_n sont inférieurs aux termes correspondants de S' et on peut écrire :

$$S' > S_n$$

En désignant par S_1 le plus grand du nombre S' ou des nombres S_n correspondants à $n < q - 1$ on pourra donc écrire l'inégalité :

$$\rho^n\ |\ A^n\ | < M\ S_1$$

valable quel que soit le nombre n considéré.

La série $\Phi(x)$ est donc convergente pour $|x| < \rho$ d'après le théorème d'Abel. Son rayon de convergence est au moins égal au rayon des convergences R de φ **(x)** car x et ρ peuvent être pris aussi voisins que l'on veut de R en satisfaisant aux conditions $|x| < \rho < R$.

COROLLAIRE

Un théorème analogue s'applique à la série $B_n\ x_n$ *si le coefficient* Bn *est donné par la relation :*

$$\frac{\mu^n\ B^n}{r\ (r+K)\ (r+2\,K) \ldots [r+(n-1)\,K]} =$$

$$\rho_0 + \rho_1 \frac{\mu}{r} + \rho_2 \frac{\mu^2}{r\,(r+K)} + \rho_3 \frac{\mu^3}{r\,(r+K)\ (r+2\,K)} + \cdots$$

En effet, cette relation peut s'écrire :

$$\frac{\left(\frac{\mu}{K}\right)^n B^n}{\frac{r}{K}\left(\frac{r}{K}+1\right) \cdots \left(\frac{r}{K}+n-1\right)} =$$

$$\rho_0 + \rho_1 \frac{\frac{\mu}{K}}{\frac{r}{K}} + \rho_2 \frac{\left(\frac{\mu}{K}\right)^2}{\frac{r}{K}\left(\frac{r}{K}+1\right)} + \rho_3 \frac{\left(\frac{\mu}{K}\right)^3}{\frac{r}{K}\left(\frac{r}{K}+1\right)\left(\frac{r}{K}+2\right)} + \cdots$$

Il suffit de poser $\lambda = \frac{\mu}{K}$ et $\beta + 1 = \frac{r}{K}$ En appliquant le théorème précédent, on peut alors écrire :

La condition nécessaire et suffisante pour que la série $B_n \ x^n$ *soit convergente est que l'on ait :*

$$O = S_n = \rho_0 + \rho_1 \frac{\mu}{r} + \rho_2 \frac{\mu^2}{r(r+K)} + \rho_3 \frac{\mu^3}{r(r+K)(r+2K)} + \cdots$$

et son rayon de convergence est au moins égal à celui de la série :

$$\rho_0 + \rho_1 x + \rho_2 x^2 + \ldots\ldots + \rho_n x^n + \ldots\ldots$$

§ 5. — Théorème IV

Soient les séries :

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots . + b_n x^n \ldots .$$

$$Z(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots + u_n x^n + \ldots .$$

où les coefficients $u_0 \ u_1 \ldots . u$ *sont donnés par les relations :*

$$u_0 = \frac{b_1}{r} + \frac{b_2 \lambda}{r(r+K)} + \frac{b_3 \lambda^2}{r(r+K)(r+2K)} + \ldots +$$

$$\frac{b_{p+2} \lambda^p}{r(r+K)(r+2K) \ldots\ldots [r+p+K]} + \ldots .$$

et d'une façon générale par :

$$u_n = \frac{b_{n+1}}{r+nK} + \frac{b_{n+2} \lambda}{(r+nK)[r+(n+1)K]} + \ldots\ldots +$$

$$\frac{b_{n+p+1} \lambda^p}{(r+nK) \ldots\ldots [r+(n+p)K]} + \ldots .$$

où r *et* K *sont des nombres quelconques assujettis à la seule condition de n'annuler aucun des facteurs des dénominateurs des termes de* u_n, *c'est-à-dire où* r/K *n'est pas un entier négatif.*

Si la série $\varphi(x)$ *a un rayon de convergence* R *non* *nul, la série* Z (x) *a aussi un rayon de convergence* R_1 *non nul et l'on a :* $R_1 \geqslant R$.

En effet, puisque la série $\varphi(x)$ a un rayon de convergence R non nul, nous pouvons trouver un nombre A tel que pour toute valeur de n on ait :

$$| b_n | < \frac{A}{R_1^n}$$

et par suite :

$$| u^n | < \frac{A}{| r + nK |} \frac{1}{R^{n+1}} \left[1 + \frac{| \lambda |}{R \, | r + (n+1) K |} + \frac{| \lambda^2 |}{R^2 \, | r + (n+1) K | \; | r + (n+2) K |} + \dots \right]$$

$$R^n \, | u_n | < \frac{A}{R \, | r + nK |} \left[1 + \frac{| \lambda |}{R \, | K | \left| \frac{r}{K} + n + 1 \right|} + \frac{\lambda^2}{R^2 \, | K^2 | \left| \frac{r}{K} + n + 1 \right| \left| \frac{r}{K} + n + 2 \right|} + \dots \right]$$

La série entre parenthèses est convergente pour toute valeur de λ (il suffit pour le voir de prendre le rapport $\frac{u_{n+1}}{u^n}$) et a par suite une somme Bn. En raisonnant comme pour le théorème III, on voit que parmi les nombres Bn il en est un B plus grand que tous les autres et on peut par suite écrire :

$$R^n | u^n | < \frac{A \, B}{\rho \, | r + n K |}$$

La série Z (x) est par suite convergente et son rayon de convergence est au moins égal à R.

CHAPITRE II

Transformations de l'équation linéaire

$$\text{(I)} \qquad x^{K+1}\,dy = [\,y\,H(x) + G(x)\,]\,dx$$

§ 6. — Simplifications de l'équation linéaire I)

Dans l'équation (I) nous supposerons que K est un nombre entier plus grand que 1 et que $H(x)$ et $G(x)$ sont des fonctions holomorphes de x pour $x = 0$, c'est-à-dire développables en séries entières avec un rayon de convergence non nul.

Montrons d'abord que si le point origine $x = y = 0$ est un point singulier pour l'équation différentielle, on peut supposer $H(0) \neq 0 \quad G(0) = 0$.

En effet on a un point singulier pour $x = 0 \; y = 0$ si pour ce point les coefficients de dx et de dy sont tous les deux nuls, ce qui exige d'abord $G(0) = 0$.

Supposons maintenant $H(0) = 0$. On pourra alors diviser tous les termes de (I) par une certaine puissance entière et positive de x et comme après cette division on veut que la nouvelle fonction $g(x)$ déduite de G (x) soit nulle pour $x = 0$, il faut que l'exposant du terme de moindre degré de G (x) soit supérieur à l'exposant du terme de moindre degré de H (x) et, par suite, après avoir divisé par cette dernière puissance de x l'équation (I), on aura une équation de la même forme où l'on pourra supposer $H(0) \neq 0$ $G(0) = 0$.

Simplifions maintenant la fonction H (x).

Puisque $H(0) = 0$ l'équation pourra s'écrire :

(1) $x^{k+1}\, dy + [\,\alpha + x\, A(x)\,]\, y\, dx = G(x)\, dx$

où α est un nombre essentiellement différent de zéro et où A (x) est une fonction holomorphe de x.

Dans un travail sur les cycles limites publié dans le bulletin de la Société Mathématique de France (tome LI, 1923, pages 104 et suivante), M. Dulac a montré que $x\, A(x)$ pouvait être pris égal à $-b\, x^k$ Il suffit pour cela de prendre comme nouvelle variable indépendante une variable t liée à x par l'équation différentielle :

$$(2) \quad \frac{\alpha + x\, A(x)}{x^{k+1}}\, dx = \frac{\alpha - b\, t^k}{t^{k+1}}\, dt$$

M. Dulac montre en effet que l'on peut choisir la constante b pour que l'équation (2) précédente ait une solution holomorphe $t = F(x)$ nulle pour $x = 0$.

La fonction F (x) est de la forme :

$$t = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots.$$

d'où l'on tire réciproquement :

$$x = t + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots.$$

L'équation (1) peut s'écrire :

$$dy + y\, \frac{\alpha + x\, A(x)}{x^{k+1}}\, dx = \frac{G(x)}{x^{k+1}}\, dx$$

ou en se servant de la relation (2) :

$$(3) \qquad dy + y \, \frac{\alpha - b\,t^k}{t^{k+1}} \, dt = \frac{R\,(t)}{t^{k+1}} \, dt$$

$$(4) \qquad t^{k+1}\, dy + y\,(\alpha - b\,t^k)\, dt = R\,(t)\, dt$$

L'équation II est encore de la même forme que l'équation I mais ne contient plus qu'un terme variable de degré K.

§ 7. — Emploi d'équations plus simples pour la recherche de la solution (4)

Considérons donc l'équation :

$$(4) \quad x^{k+1}\, dy = y\,[\,\alpha - b\,x^k\,]\, dx + \varphi\,(x)\, dx$$

où l'on a :

$$\varphi\,(x) = b_1\, x + b_2\, x^2 + \dots + b_n\, x^n + \dots$$

$\varphi(x)$ étant une fonction développable en série entière, on sait que celle-ci est absolument convergente dans tout le cercle de convergence et que l'on peut, par suite, grouper ces termes d'une façon quelconque. On pourra donc écrire :

$$\varphi\,(x) = \sum_{r=1}^{r=K} x^r \left[a_{r0} + a_{r1}\, x^k + a_{r2}\, x^{2k} + \dots + a_{rn}\, x^{nk} + \dots \right]$$

Si l'on cherche à vérifier (4) par une fonction holomorphe nulle pour $x = 0$ de la forme :

$$y = A_1\, x + A_2\, x^2 + A_3\, x^3 + \dots + A_n\, x^n + \dots$$

Le calcul de détermination des coefficients : $A_1\; A_2 \dots A_n$ montre facilement les résultats suivants

1° Les coefficients de la forme : $A_1\; A_{k+1}\; \dots\; A_{nk+1}$ dépendent uniquement des coefficients α, b et des coefficients de la série :

$$a_{10} + a_{11}\, x^k + a_{12}\, x^{2k} + \dots\; a_{1n}\, x^{nk} + \dots$$

2° Plus généralement les coefficients de la forme :

$$A_r \; A_{k+r} \ldots A_{nk+r} \ldots$$

dépendent uniquement des coefficients α, b et des coefficients de la série :

$$a_{r0} + a_{r1} x^k + a_{r2} x^{2k} + \ldots\ldots + a^{rn} x^{nk} + \ldots.$$

3° Ces coefficients sont les mêmes que ceux des séries vérifiant formellement les K équations :

$$x^{k+1} dy = y (\alpha - b x^k) dx + x^r (a_{r0} a_{r1} x^k + a_{r2} x^{2k} + \ldots)$$

où l'on donne à r les K valeurs 1, 2, 3 .. K — 1, K.

Or, si l'équation (4) admet pour solution une fonction holomorphe nulle pour $x = 0$ celle-ci étant absolument convergente à l'intérieur de tout son cercle de convergence, il en est de même de toutes les séries partilles déduites en supprimant certains termes dans celles-ci et par suite les K fonctions ($r = 1, 2, \ldots K$).

$$y_r = A_r x^r + A_{r+K} x^{r+K} + A_{r+2K} x^{r+2K} + \ldots.$$

sont des fonctions holomorphes pour $x = 0$.

Il s'en suit que si l'équation (4) admet pour solution une fonction holomorphe nulle pour $x = 0$, il en est de même des K équations.

$$(5) \quad x^{k+1} dy = y (\alpha - b x^k) dx + x^r (a_{r0} + a_{r1} x^K a_{r2} x^{2K} + \ldots)$$

Réciproquement si les K équations (5) admettent chacune une solution holomorphe pour $x = 0$, il est évident que la fonction somme de ces K fonctions holomorphes sera une solution holomorphe de l'équation (4).

En résumé, l'étude des solutions holomorphes nulles pour $x = 0$ *de l'équation* (4) *et par suite de l'équation* (1) *se ramène à l'étude des solutions holomorphes des* K *équations* (5). *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1) *ait une solution holo-*

morphe nulle pour $x = 0$ *s'obtiendra en écrivant que chacune des* K *équations* (5) *a une solution holomorphe nulle pour* $x = 0$.

Nous aurons donc en général K *conditions indépendantes les unes des autres puisque dans le cas général il est évident que les coefficients des séries :*

$$a_{r0} + a_{r1} x^K + a_{r2} x^{2K} + \dots$$

sont indépendants les uns des autres.

§ 8. — Réduction du cas K quelconque au cas K=1

Considérons l'une des K équations (5)

$$x^{K+1} y' = y\,(\alpha - \beta x^K) + x^r\,(b_0 + b_1 x^K + b_2 x^{2K} + \quad)$$

où α est un nombre essentiellement différent de zéro et où r peut prendre les K valeurs 1, 2, 3... K-1, K.

A. — *Faisons d'abord un changement de fonction inconnue en posant :*

$$y = -\frac{bo}{\alpha} x^r + u\, x^r$$

u étant la nouvelle fonction inconnue. Nous aurons :

$$x^{K+1}\left[-\frac{r b_0}{\alpha} x^{r-1} + r\,u\,x^{r-1} + u'\,x^r\right] - \left[u\,x^r - \frac{b_0}{\alpha} x^r\right]\left[\alpha - \beta x^K\right] = x^r\left[b_0 + b_1 x^K + b_2 x^{2K} + \dots\right]$$

ou en divisant par x^r :

$$x^K\left[-\frac{r b_0}{\alpha} + ru - \frac{b_0 \beta}{\alpha} + u\,\beta + u'x\right] = -b_0 + \alpha u + b_0 + b_1 x^K + b_2 x^{2K} + \dots$$

$$x^{K+1} u = u\left[\alpha - (\beta + r)\,x^K\right] + x^K\left[b_1 + \frac{b_0\,(r+\beta)}{\alpha}\right] + b_2 x^{2K} + \dots$$

B. — *Faisons maintenant un changement de variable indépendante en posant :*

$$x^K = V$$

V étant la nouvelle variable indépendante :

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} = K\,x^{K-1}\frac{du}{dv}$$

L'équation devient :

$$K\,x^{K+1}\,x^{K-1}\frac{du}{dv} = u\left[\alpha - (\beta + r)\,x^K\right] + x^K\left[b_1 + \frac{b_0\,(r+\beta)}{\alpha}\right] + b_2\,x^{2K} + ..$$

c'est-à-dire :

$$K\,v^2\frac{du}{dv} + u\left[\alpha - (\beta + r)\,v\right] + v\left[b_1 + \frac{b_0\,(r+\beta)}{\alpha}\right] + b_2\,v^2 + \ldots$$

Equation de la forme :

$$x^2\frac{dy}{dx} + y\left[a - c\,x\right] + b_1\,x + b_2\,x^2 + b_3\,x^3$$

En posant :

$$a = \frac{\alpha}{K} \neq o \qquad c = \frac{\beta + r}{K}$$

Nous sommes ainsi amené, pour chercher les conditions d'existence d'une solution de (I) holomorphe pour $x=o$, à considérer successivement les équations:

$x^{K+1}\,y' = y\,H\,(x) + G\,(x)$

$t^{K+1}\,y' = x\,(\alpha - \beta\,t^K) + g\,(t)$

$t^{K+1}\,y' = y\,(\alpha - \beta\,t^K) + t^r\,\varphi^r\,(t^K) \qquad r = 1\ 2 \ldots.\ K$

$v^2\,u' = u\,(a - c\,x) + \varphi\,(v)$

On passe de la première équation à la seconde par un changement de variable de la forme

$$t=x+a_2x^2+a_3x^3+.....$$

On décompose ensuite la seconde équation linéaire en K autres équations de sorte que l'on aura K équations pour exprimer que la première équation a une solution holomorphe. On ramène ensuite chacune de ces K équations à la dernière forme par un change-

ment de fonction et un changement de variable en posant :

$$y = - \frac{b_0}{\alpha} x^r + u\, x^r \ \ et \ \ v = x^K$$

Employant uniquement les variables x et y, nous sommes amené à considérer dans cette étude les quatre équations fondamentales :

(I) $x^{K+1}\, y' = y\, H(x) + G(x)$

(II) $x^{K+1}\, y' = y\, (A - Bx^K) + g(x)$

(III) $x^{K+1}\, y' = y\,(A - Bx^K) + x^r\, \varphi_r(x^K) \qquad r = 1,2..K$

(IV) $x^2\, y' = y\, (\lambda - \beta\, x) + \varphi(x)$

Et nous savons qu'entre les quatre constantes A, B, λ, β, existent les deux relations :

$$\lambda = \frac{A}{K} \qquad\qquad \beta = \frac{B + r}{K}$$

Les coefficients de $\varphi(x)$ sont les memes que ceux de $\varphi_r(x^K)$, *à l'exception du premier qui est donné par*

$$b_1 + \frac{bo\ (r+\beta)}{A}$$

Nous appellerons aussi (II') (III') et (IV') les équations (II) (III) (IV) dans le cas où l'on aura soit B=o, soit β*=o.*

CHAPITRE III

Etude de l'équation linéaire

§ 9. — Condition pour que l'équation (II) ait une solution holomorphe et nulle pour $x=0$ dans le cas $K=1$, $\beta=0$.

Nous retrouvons le cas traité par Briot et Bouquet. Nous pouvons obtenir de la manière suivante la condition pour que cette équation ait une solution holomorphe nulle pour $x=0$. L'équation peut s'écrire :

$$x^2 y' - \lambda y = \varphi(x) \equiv b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \dots$$

et la solution générale prend la forme :

$$y = Ce^{-\frac{\lambda}{x}} + e^{-\frac{\lambda}{x}} \int_0^x \frac{e^{\frac{\lambda}{x}} \varphi(x)}{x^2} dx$$

Précisons la définition de l'intégrale

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{\frac{\lambda}{x}} \varphi(x)}{x^2} dx$$

Désignons par S_1 le demi-plan de la variable complexe x pour lequel la partie réelle de $\frac{\lambda}{x}$ est négative. Partons de 0 *suivant un chemin intérieur à* S_1, dans le voisinage de 0 et aboutissant à un point x situé ou non dans S_1; f (x) sera l'intégrale curviligne prise suivant ce chemin.

L'intégrale n'est pas en général une fonction uniforme car lorsqu'on tourne de 2π autour de l'origine, l'intégrale augmente de $2\pi i R$ en appelant R le résidu de la fonction sous le signe $\int$

Pour que y soit holomorphe il est donc essentiel que l'on ait $R=0$. Or il est facile de voir que l'on a :

$$R = b_0 + b_1 \lambda + b_2 \frac{\lambda^2}{2!} + b_3 \frac{\lambda^3}{3!} + \dots$$

Cette condition nécessaire est suffisante car si elle est vérifiée y est une fonction uniforme et le point $x=0$ est un point essentiel isolé. Toutes les solutions sont de la forme

$$y = \dots\dots + \frac{B_n}{x^n} + \dots + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_1}{x} + B_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A^n x^n + \dots\dots$$

mais la présence du terme $Ce^{-\frac{\lambda}{x}}$ permet de trouver une de ces solutions pour lesquelles on a $B_0=0$ et alors un calcul d'identification donne de suite :

$$- B_1 = \lambda B_0 \ ; \quad - 2 B_2 = \lambda B_1 \ \dots\dots \ n B_n = \lambda B_{n-1}$$

Si $B_0=0$ on a donc $B_1 = B_2 = \dots = B_n = o$ et la fonction y devient une fonction holomorphe nulle pour $x=0$.

§ 10. — CONDITIONS POUR QUE L'ÉQUATION (II) AIT UNE SOLUTION HOLOMORPHE ET NULLE POUR $x=0$ DANS LE CAS $\beta=0$.

Ce cas, qui est une première généralisation du cas traité par Briot et Bouquet, peut se ramener comme nous l'avons vu au cas de l'équation (IV), mais il me semble intéressant de le traiter directement sans faire les changements précédents de fonction et de variable. Considérons donc l'équation :

$$\text{(II)}' \quad {}^{k+1}\, y' - \lambda y = \varphi(x) \equiv b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \dots$$

Un raisonnement analogue à celui qui est fait au paragraphe (7) permet de considérer séparément les K équations

$$\text{(III)}' \quad x^{k+1} y - \lambda y = x^r (\rho_0 + \rho_1 x^K + \rho_2 x^{2K} + \dots$$

où r prend successivement les valeurs 1 2 3..... K-1, K, il suffira et il faudra, pour que (II)' ait une solution holomorphe nulle pour $x=0$, que les K équations ainsi écrites admettent chacune une solution holomorphe nulle pour $x=0$.

Cherchons une solution de l'équation (III)' de la forme

$$y = A_0 x^r + A_1 x^{r+K} + A_2 x^{r+2k} + \dots + A_n x^{r+nK} + \dots$$

En identifiant les coefficients des termes en x^{r+nK} on a la formule de récurrence :

$$[r + (n-1) K]\, A_{n-1} - \lambda A_n = \rho^n$$

Les coefficients $A_0\ A_1 \dots A_n$ sont donnés par les $n+1$ équations :

$$
\begin{array}{llll|l}
\lambda A_0 & & = -\rho_0 & & 1 \\
\dfrac{\lambda A_1}{r} & - A_0 & = -\dfrac{\rho_1}{r} & & \lambda \\
\dfrac{\lambda A_2}{r+K} & - A_1 & = -\dfrac{\rho_2}{r+K} & & \dfrac{\lambda^2}{r} \\
\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots \\
\dfrac{\lambda A_{n-1}}{r+(n-2)K} & - A_{n-2} & = -\dfrac{\rho_{n-1}}{r+(n-2)K} & & \dfrac{\lambda^{n-1}}{r(r+K)\ldots[r+(n-3)K]} \\
\dfrac{\lambda A_n}{r+(n-1)K} & - A_{n-1} & = -\dfrac{\rho^n}{r+(n-1)K} & & \dfrac{\lambda^n}{r(r+K)\ldots[r+(n-2)K]}
\end{array}
$$

Si l'on multiplie ces (n+1) équations par les facteurs placés en regard et si l'on additionne ensuite toutes les équations ainsi obtenues, on obtiendra :

$$
\frac{\lambda^{n+1} A^n}{r(r+K)\ldots[r+(n-1)K]} = -\left[\rho_0 + \rho_1 \frac{\lambda}{r} + \rho_2 \frac{\lambda^2}{r(r+K)} + \ldots\ldots + \rho_n \frac{\lambda^n}{r(r+K)\ldots[r+(n-1)K]}\right]
$$

La série $\rho_0 + \rho_1 x^K + \rho_2 x^{2K} + \ldots$ ayant un rayon de convergence non nul, le corollaire du théorème III montre que la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série entière vérifiant formellement l'équation (III)' est :

$$
O = \rho_0 + \rho_1 \frac{\lambda}{r} + \rho^2 \frac{\lambda^2}{r(r+K)} + \ldots + \rho^n \frac{\lambda^n}{r(r+K)\ldots[r+(n-1)K]} + \ldots
$$

et le rayon de convergence est au moins égal à celui de la série de terme général $\rho^n x^{nK}$

En donnant successivement à r dans la condition (C) les valeurs 1, 2..... K et en prenant pour $\rho_0\ \rho_1\ \rho_2 \cdot \rho^n$ les coefficients de la série $\varphi^r(x^K)$ correspondante, on obtient les K conditions de convergence de la série entière. Le rayon de convergence de cette série est celui de la série g (x) —.

Remarques.

1° Si K=1, on est dans le cas traité par Briot et Bouquet. En faisant r=1 on retrouve ainsi la condition donnée par ces mathématiciens.

2° Si K>1, on doit décomposer l'équation (II)' en K équations (III)' et par conséquent l'équation (II)' ne sera vérifiée par une solution holomorphe et nulle pour $x = 0$ que si le nombre λ satisfait à ces K conditions.

3° On peut encore remarquer que dans la décomposition de l'équation (II)' en K équations de la forme (III)', la dernière équation peut s'écrire :

$$x^{K+1}\, y' - \lambda y = x^K [\, \rho_0 + \rho_1\, x^K + \rho_2\, x^{2K} + \ldots\,]$$

et se ramène immédiatement au cas où K=1 en posant

$$u = x^K \quad \text{d'où} \quad u' = K\, x^{K-1}$$

On a alors l'équation :

$$K\, u^2\, y' - \lambda\, y = \rho_0\, u + \rho_1\, u^2 + \rho_2\, u^3 + \ldots.$$

§ 11. — Forme générale de l'intégrale générale de II dans le cas : B=0

Pour obtenir l'intégrale générale de (II)', nous savons que nous devons considérer K équations analogues à (III)' et nous mettrons l'intégrale générale sous la forme d'une somme de divers termes. Cette forme d'intégrale générale nous donnera comme cas particulier les conditions de convergence déjà obtenues pour la série vérifiant formellement l'équation (II)'.

Considérons donc une des équations (III)':

(III) $x^{K+1} y' = \lambda y + x^r (\rho_0 + \rho_1 x^K + \rho_2 x^{2K} + \ldots.)$

Considérons *a priori* la série $Z(x)$:

$Z(x) = u_0 x^r + u_1 x^{r+K} + u_2 x^{r+2K} + \ldots + u_n x^{r+nK} + \ldots$

où nous posons :

$$u_0 = \frac{\rho_1}{r} + \frac{\rho^2 \lambda}{r(r+K)} + \ldots + \rho_{p+1} \frac{\lambda^p}{r(r+K) \ldots . (r+pK)} + \ldots .$$

et d'une façon générale :

$$u_n = \frac{\rho_{n+1}}{r+nK} + \frac{\rho_{n+2} \lambda}{(r+nK)[r+(n+1)K]} + \ldots . +$$
$$\rho_{p+n+1} \frac{\lambda^p}{(r+nK) \ldots . [r+(n+p)K]} + \ldots .$$

D'après le théorème (II), toutes les séries u_n sont convergentes pour toute valeur de x et d'après le théorème (IV) la série Z (x) a un rayon de convergence au moins égal à celui de la série $\rho_n x^{nK}$

Cherchons la fonction F (x) telle que la fonction Z (x) soit solution de l'équation :

$$x^{K+1} Z' - \lambda Z = F(x)$$

On voit facilement par identification que l'on doit avoir :

$$F(x) \equiv - \lambda u_0 x^r + (r u_0 - \lambda u_1) x^{r+nK} + \ldots$$
$$+ x^{r+nK} \left\{ [r + (n-1)K] u_{n-1} - \lambda u^n \right\} + \ldots .$$

ou en remarquant que :

$$[r+(n-1)K] u_{n-1} - \lambda u^n = \rho^n$$

$F(x) \equiv - \lambda u_0 x^r + \rho_1 x^{r+K} + \rho_2 x^{r+2K} + \ldots + \rho^n x^{r+nK} + \ldots$

y et Z sont donc respectivement solution des équations :

(4) $x^{K+1} y' - \lambda y = x^r (\rho_0 + \rho_1 x^K + \rho_2 x^{2K} + \ldots.)$

(5) $x^{K+1} Z' - \lambda Z = x^r (- \lambda u_0 + \rho_1 x^K + \rho_2 x^{2K} + \ldots)$

et l'on sait de plus que la série Z (x) vérifiant formellement (5) a un rayon de convergence non nul au moins égal à celui de la série $\rho^n\ x^{nK}$

On en conclut que la fonction $y - Z$ sera solution de l'équation :

$$x^{k+1}(y' - Z') - \lambda(y - Z) = x^r(\rho_0 + \lambda u_0)$$

On en tire par intégration de cette dernière équation qui est une équation linéaire du premier ordre :

$$y = Z + C e^{\frac{-\lambda}{Kx^k}} + (\rho_0 + \lambda u_0)\, e^{\frac{-\lambda}{Kx^k}} \int_0^x x^{r-k-1}\, e^{\frac{\lambda}{Kx^k}}\, dx$$

Précisons la définition de l'intégrale que nous introduisons. Désignons par S, un secteur du plan de la variable complexe x pour lequel la partie réelle de $\frac{\lambda}{x^k}$ est négative. L'intégrale introduite sera l'intégrale curviligne prise suivant un chemin partant de 0 à l'intérieur du secteur S, au voisinage de 0 et aboutissant à x situé ou non dans le secteur S.

L'intégrale générale se présente donc comme la somme de trois fonctions :

1° Une fonction holomorphe Z (x) dont le rayon de convergence est au moins égal au rayon de convergence de la série $\rho^n\ x^{nK}$.

2° Une fonction uniforme mais non holomorphe multipliée par une constante arbitraire : $Ce^{-\frac{\lambda}{Kx^k}}$

3° Une intégrale multipliée par une fonction uniforme non holomorphe. L'intégrale n'est pas une fonction uniforme car le résidu R de la fonction sous le signe $\int$ n'est pas nul et par suite la valeur de l'intégrale augmente de $2\pi i R$ lorsque l'on tourne autour de l'origine.

La fonction y ne pourra donc être holomorphe que si les deux dernières fonctions sont affectées d'un coefficient nul. Toute combinaison linéaire d'une fonction uniforme non holomorphe et d'une fonction non uniforme ne peut, en effet, fournir une fonction holomorphe.

L'équation (III)' aura donc pour solution une fonction holomorphe et nulle pour $x=0$ si l'on prend la constante arbitraire C égale à zéro et si le coefficient $\rho_0 + \lambda u_0$ de l'intégrale est nul, ce qui donne la condition :

$$(6)\quad 0 = \rho_0 + \rho_1 \frac{\lambda}{r} + \rho_2 \frac{\lambda^2}{r(r+K)} + \dots\dots$$
$$+ \rho_n \frac{\lambda^n}{r(r+K)\dots[r+(n-1)K]} + \dots$$

et l'équation (II)' aura pour solution une fonction holomorphe nulle pour $x=0$ si les K équations (III)' admettent chacune une solution holomorphe nulle pour $x=0$, c'est-à-dire si K conditions analogues à (6) sont satisfaites.

§ 12. — Autre méthode de formation de l'intégrale générale de (II)'

L'équation 1 :

$$(II)\quad x^{k+1}y' - \lambda y = \varphi(x) \equiv b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \dots$$

admet pour solution générale les fonctions :

$$y = C e^{-\frac{\lambda}{Kx^k}} + e^{-\frac{\lambda}{Kx^k}} \cdot \int_0^x \frac{e^{\frac{\lambda}{Kx^K}}\varphi(x)}{x^{k+1}}\,dx$$

Considérons la fonction :

$$Y_n = e^{-\frac{\lambda}{Kx^K}} \int_0^x x^{n-k-1} e^{\frac{\lambda}{Kx^K}} dx$$

qui est une solution particulière de l'équation :

$$x^{k+1} Y' - \lambda Y = x^n$$

I. — Cherchons une relation entre la fonction Y_n et la fonction Y_{n-K} définie d'une manière analogue en remplaçant n par $n - K$. La fonction :

$$Z = a Y_n - b Y_{n-K}$$

sera solution de : $x^{K+1} Z' - \lambda Z = a x^n \quad b x^{n-k}$

et si l'on veut que cette dernière équation admette une solution de la forme : $Z = C x^{n-k}$ où C est une constante, on aura :

$$C (n \quad K) x^n - \lambda C x^{n-k} \equiv a x^n - b x^{n-k}$$

d'où l'on tire par identification :

$$C = 1 \qquad \beta = \lambda \qquad a = n - K$$

et par suite, en identifiant x^{n-k} avec Z, on a la relation suivante entre Y_n et Y_{n-K} :

$$(8) \qquad (n - K) Y_n - \lambda Y_{n-K} = x^{n-K}$$

relation que l'on aurait pu obtenir aussi en dérivant la fonction

$$x^p e^{\frac{\lambda}{Kx^K}}$$

et intégrant.

La différenciation donnait :

$$\left(x^p e^{\frac{\lambda}{Kx^K}}\right) = p x^{p-1} e^{\frac{\lambda}{Kx^K}} - \lambda x^{p-K-1} e^{\frac{\lambda}{Kx^K}}$$

L'intégration donnait ensuite :

$$(9) \qquad x^p e^{\frac{\lambda}{Kx^K}} = p \int_0^x x^{p-1} e^{\frac{\lambda}{Kx^K}} - \lambda \int_0^x x^{p-K-1} e^{\frac{\lambda}{Kx^K}} dx$$

et on obtient la relation (8) en faisant $p=n-K$ et en multipliant les deux membres de (9) par $e^{-\frac{\lambda}{K x^K}}$

II. — Si dans la relation (8) on fait successivement $n=qK+r$; $n=(q-1)K+r$..... $n=K+r$, on obtiendra les $q-1$ équations :

$$
\begin{array}{lll|l}
(1) & [(q-1)K+r]\,Y_{qK+r} - \lambda\, Y_{(q-1)K+r} = x^{(q-1)K+r} & & (K+r)\ldots[(q-2)K+r] \\
(2) & [(q-2)K+r]\,Y_{(q-1)K+r} - \lambda\, Y_{(q-2)K+r} = x^{(q-2)K+r} & & \lambda(K+r)\ .\,[(q-3)K+r] \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
(q-2) & (2K+r)\,Y_{2K+r} \;-\; \lambda\, Y_{2K+r} \;=\; x^{2K+r} & & \lambda^{q-3}(K+r) \\
(q-1) & (K=r)\,Y_{K+r} \;-\; \lambda\, Y_{K+r} \;=\; x^{K+r} & & \lambda^{q-2}
\end{array}
$$

Si l'on multiplie toutes ces équations par les facteurs placés en face d'elles et qu'on les additionne, on aura la relation :

$$
\begin{aligned}
&(K+r)(K+2r)\ldots[(q-2)K+r]\,Y_{qK+r} = \\
&\quad (K+r)(K+2r)\ldots[(q-2)K+r]\,x^{q-1)K+2} \\
&\quad +\lambda(K+r)\ldots[(q-3)K+r]\,x^{(q-2)K+r} + \ldots\ldots + \\
&\quad +\lambda^{q-3}(K+r)\,x^{2K+r} + \lambda^{q-2}\,x^{K+r} + \lambda^{q-1}\,Y_{K+r}
\end{aligned}
$$

ou en résolvant par rapport à Y_{qk+r} :

$$
(10)\quad Y_{qk+r} = \frac{x^{(q-1)k+r}}{(q-1)K+r} + \frac{\lambda\, x^{(q-2)k+r}}{[r+(q-1)K][r+(q-2)K]} + \ldots\ldots + \frac{\lambda^{q-2}\,x^{k+r}}{[r+(q-1)K]\ldots(K+2r)(K+r)} + \frac{\lambda^{q-1}\,Y_{K+r}}{[r+(q-1)K]\ldots(K+2r)(K+r)}
$$

Le calcul de la solution particulière Y_{Kq+r} de l'équation

$$x^{K+1}\,Y'_{Kq+r} - \lambda\, Y_{Kq+r} = x^{qK+r}$$

est ainsi ramené quel que soit le nombre positif et entier q au calcul de l'intégrale analogue Y_{K+r} de l'équation

$$x^{K+1}\,V'_{K+r} - \lambda\, Y_{K+r} = x^{r+K}$$

III. — Si l'on considère maintenant une des équations (III)' servant à la résolution de l'équation (II)'

$$(\mathrm{III})' \quad x^{K+1}\,Y' - \lambda\,Y = x^r\,(\rho_0 + \rho_1\,x^K + \rho_2\,x^{2K} + \ldots)$$

le calcul précédent permet de mettre l'intégrale générale de (III)' sous la forme d'une série entière et de l'intégrale générale de l'équation :

$$(11) \qquad x^{k+1}\,w' - \lambda\,w = x^r\left(\rho_0 + \rho_1\,\frac{\lambda}{r} + \rho_2\,\frac{\lambda^2}{r\,(r+K)} + \rho_3\,\frac{\lambda^3}{r\,(r+K)\,(r+2\,K)} + \ldots.\right)$$

Le terme général $u_q\ x^{qk+r}$ de la série entière s'obtient en faisant la somme de tous les termes du même degré dans toutes les expressions (10) de Y_{qk+r} trouvées plus haut. Le coefficient u_q est ainsi donné par :

$$u_q = \frac{\rho_{q+1}}{q\,K+r} + \frac{\rho_{q+2}\,\lambda}{(q\,K+r)\,[(q+1)\,K+r]} + \frac{\rho_{q+3}\,\lambda^2}{(qK+r)\,[(q+1)\,K+r]\,[(q+2)\,K+r]} + \ldots$$

D'après le théorème (IV) et un raisonnement déjà employé, le rayon de convergence de cette série entière est égal au rayon de convergence de $\varphi\,(x^K)$

Conclusions

Si nous posons :

$$S = \rho_0 + \rho_1\,\frac{\lambda}{r} + \rho_2\,\frac{\lambda^2}{r\,(r+K)} + \ldots..$$

S est une série convergente pour toute valeur de λ d'après le théorème (II) et la solution générale de chaque équation (III)' se met sous la forme :

$$Y = \Sigma\,u_q\,x^{qk+r} + C\,e^{-\frac{\lambda}{Kx^K}} + S\,e^{-\frac{\lambda}{Kx^K}} \int_0^x x^{r-k-1}\,e^{\frac{\lambda}{Kx^K}}\,dx$$

et l'on retombe sur les conclusions du paragraphe précédent n° 11.

§ 13. — Etude de l'équation (IV) dans le cas où β est entier

(IV) $x^2 y' - (\lambda - \beta x) y = \varphi(x) \equiv b_0 x + b_1 x^2 + \ldots + b_n x^{n+1} + \ldots\ldots$

Si $\beta = 0$, nous sommes dans le cas traité par Briot et Bouquet.

Si β est un nombre entier positif ou négatif, nous allons ramener l'équation IV au même cas $\beta = 0$ en changeant la fonction inconnue : Posons en effet

$$y = u\, x^r$$

u étant la nouvelle fonction inconnue. On obtient la nouvelle équation :

$x^2 [u' x^r + ru\, x^{r-1}] = ux^r (\lambda - \beta x) + b_0 x + b_1 x^2 + \ldots$

ou en divisant par x^r :

(13) $x^2 u' = u [\lambda - (\beta + r) x] = b_0 x^{1-r} + b_1 x^{2-r} + b_2 x^{3-r} + \ldots\ldots$

et on peut en tirer les conclusions suivantes :

A. — Si β est un entier positif, on ramène l'équation IV au cas traité par Briot et Bouquet, en posant $r = -\beta$, car alors tous les exposants $1-r$, $2-r$..... sont des entiers positifs.

B. — Si β est un entier négatif, on aura encore ramené l'équation (IV) au même cas en posant $r = -\beta$ si les r premiers coefficients $b_0\, b_1 \ldots b_{r-1}$ de la série du second membre sont nuls. On obtient ce dernier résultat en posant

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_r\, x^r + V$$

V étant une fonction nouvelle inconnue et $A_1\, A_2 \ldots A_r$ étant les r premiers coefficients de la série vérifiant l'équation IV.

Après ce changement de fonction l'équation sera remplacée par une équation analogue en V mais où les r premiers coefficients $b_0\ b_1 \ldots\ b_{r-1}$ seront nuls. La transformation $y=u\,x^r$ devra donc ramener l'équation (IV) au cas traité par Briot et Bouquet.

§ 14. — CONDITION POUR QUE L'ÉQUATION IV AIT UNE SOLUTION HOLOMORPHE ET NULLE POUR $x=0$ DANS LE CAS OÙ LE NOMBRE β EST QUELCONQUE.

Pour que l'équation II ait une solution holomorphe nulle pour $x=0$, il faut, comme on l'a vu, qu'il en soit de même des K équations linéaires (IV) déduites de II.

Soit donc :

$$y = A_1\,x + A_2\,x^2 + \ldots . + A_n\,x^n + \ldots$$

la série entière vérifiant formellement l'équation :

$$\text{V)}\quad x^2\,y' = (\lambda - \beta x)\,y = \varphi(x) \equiv b_0 x + b_1 x^2 + b_n\,x^{n+1} + \ldots$$

On aura :

$$x^2\,y' = A_1\,x^2 + 2\,A_2\,x^3 + \ldots + (n-1)\,A_{n-1}\,x^n + \ldots$$

$$\beta\,xy = \beta\,A_1\,x^2 + \beta\,A_2\,x^3 + \ldots + \beta\,A_{n-1}\,x^n + \ldots$$

$$\lambda\,y = \lambda\,A_1\,x + \lambda\,A_{2}x^2 + \lambda\,A_3\,x^3 + \ldots + \lambda\,A_n\,x^n + \ldots$$

$$\varphi(x) = b_0 x + b_1 x^2 + b_2\,x^3 + \ldots + b_{n-1}\,x^n + \ldots$$

Par identification des coefficients des mêmes puissances de x on a la relation de récurrence :

$$A_{n-1}\,(\beta + n - 1) = \lambda\,A_n + b_{n-1}$$

d'où le système suivant pour calculer les coefficients $A_1\ A_2 \ldots\ A_n$

$$
\begin{array}{lll||c}
O = & \lambda A_1 & + b_0 & 1 \\[2ex]
A_1 = & \dfrac{\lambda A_2}{\beta + 1} & + \dfrac{b_2}{\beta + 1} & \lambda \\[2ex]
A_2 = & \dfrac{\lambda A_3}{\beta + 2} & + \dfrac{b_2}{\beta + 2} & \dfrac{\lambda^2}{\beta + 1} \\[2ex]
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
A_{n-2} = & \dfrac{\lambda A_{n-1}}{n + \beta - 2} & + \dfrac{b_{n-2}}{n + \beta - 2} & \dfrac{\lambda^{n-2}}{(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + n - 3)} \\[2ex]
A_{n-1} = & \dfrac{\lambda A_n}{n + \beta - 1} & + \dfrac{b_{n-1}}{n + \beta - 1} & \dfrac{\lambda^{n-1}}{(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + n - 2)}
\end{array}
$$

Pour calculer A_n il suffira de multiplier toutes ces équations par les fonctions qui sont placées dans la seconde colonne et d'additionner toutes ces équations. On obtient :

$$
O = \frac{\lambda^n A_n}{(\beta + 1)(\beta + 2)\,..(\beta + n - 2)} + b_0 + \frac{b_1 \lambda}{\beta + 1} +
\frac{b_2\,\lambda^2}{(\beta + 1)(\beta + 2)} + \ldots\ldots + \frac{(\beta + 1)\ \ldots(\beta + n - 1)}{b^n\ \lambda^{n-1}}
$$

On peut donc calculer tous les coefficient A_n au moyen de cette formule et ceci d'une manière unique pourvu qu'aucun des facteurs du produit

$$(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + n)$$

ne soit nul et nous sommes précisément dans ce cas puisque β n'est pas un nombre entier.

D'après le théorème III, la condition nécessaire et suffisante pour que cette série entière vérifiant formellement l'équation (IV) soit convergente est que l'on ait :

$$S = b_0 + \frac{b_1 \lambda}{\beta + 1} + \frac{b_2 \lambda^2}{(\beta + 1)(\beta + 2)} + \dots + \frac{b_n \lambda^n}{(\beta + 1)\dots(\beta + n)} + \dots = 0$$

et si $S = 0$, on sait que la série $A_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à celui de la série $\varphi(x)$.

Dans cette démonstration, il n'est pas utile de traiter à part le cas où β est un nombre entier positif ou nul ; il suffit de supposer que β n'est pas un entier négatif. On retrouve encore pour $\beta = 0$ la condition donnée par Briot et Bouquet.

§ 15. — Forme de l'intégrale générale de l'équation IV

L'équation (IV) est une équation du 1er ordre dont la solution générale obtenue par les procédés classiques prend la forme

$$y = \frac{C\, e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta} + \frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta} \int_0^x \frac{x^\beta\, e^{\frac{\lambda}{x}}}{x^2} \varphi(x)\, dx$$

où C est une constante arbitraire.

L'intégrale curviligne introduite est prise suivant le chemin indiqué au paragraphe 9.

La fonction $\dfrac{e^{\frac{\lambda}{x}}}{x^2} \varphi(x)$ peut se développer en série de Laurent qui sera convergente à l'intérieur d'un cercle de rayon non nul au moins égal au rayon de convergence de la série $\varphi(x)$ (Le centre 0 en étant naturellement exclu).

Quand on aura intégré cette série de Laurent multipliée par le facteur x^β on aura donc comme résultat une nouvelle série de Laurent multipliée par le facteur x^β et quand on multipliera le résultat ainsi obtenu par $\frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta}$ on aura encore une série de Laurent puisque le facteur x^β (β étant supposé non entier) aura disparu et on pourra écrire :

$$y = C\,\frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta} + L$$

avec $L = \ldots \frac{B_n}{x_n} + \ldots + \frac{B_1}{x} + B_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + .$

Pour que l'équation (IV) admette une solution holomorphe nulle pour $x=0$, il faudra donc, la fonction holomorphe étant un cas particulier de la série de Laurent :

1° Que cette fonction y soit uniforme, ce qui exige $C=0$, puisque β est supposé non entier ;

2° Que la série de Laurent ait son terme constant nul puisque la fonction holomorphe doit être nulle pour $x=0$;

3° Que tous les termes de la série de Laurent de la forme $\frac{B_n}{x^n}$ soient aussi nuls.

Nous allons montrer que les deux premières conditions entraînent nécessairement la troisième. Soit L la série de Laurent vérifiant l'équation :

$$x^2\,y' - (\lambda - \beta x)\,y = \varphi(x) \equiv b_0\,x + b_1\,x^2 + b^2\,x^3 + \ldots$$

$$x^2 y' = -\left[-B_1 + \frac{2B_2}{x} + \frac{3B_3}{x^2} + \ldots + \frac{n B^n}{x^{n-1}}\right] +$$

$$A_1 x^2 + 2 A^2 x^3 + \ldots + n A_n x^{n+1} + \ldots$$

$$-\lambda y = -\lambda\left[B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots + \frac{B^n}{x^n} + \ldots\right]$$

$$-\lambda\left[A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A^n x^n + \ldots\right]$$

$$\beta xy = \beta\left[B_1 + \frac{B_2}{x} + \frac{B_3}{x^2} + \ldots + \frac{B^n}{x^{n-1}} + \ldots\right] +$$

$$\beta\left[B_0 x + A_1 x^2 + \ldots + A_n x^{n+1} + \ldots\right]$$

$$\varphi(x) = b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \ldots$$

En égalant les coefficients des termes en x, on obtiendra :

$$\beta B_0 = \lambda A_1 + b_0$$

En égalant les coefficients des termes en x^2 :

$$A_1 - \lambda A_2 + \beta A_1 = b_1$$

et d'une manière générale en égalant les coefficients des termes en x^n on aura la formule de récurrence :

$$(n-1) A_{n-1} - \lambda A_n + \beta A_{n+1} = b_{n-1}$$

L'égalité des termes constants donne de même :

$$-B_1 - \lambda B_0 + \beta B_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda B_0 = B_1(\beta - 1)$$

en égalant les coefficients de $\frac{1}{x}$ on aura :

$$-2B_2 - \lambda B_1 + \beta B_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda B_1 = B_2(\beta - 2)$$

et en égalant les coefficients de $\frac{1}{x^n}$ on a la formule de récurrence :

$$-(n+1) B_{n+1} - \lambda B_n + \beta B_{n+1} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\lambda B_n = B_{n+1}(\beta - n - 1)$$

Si donc nous prenons B_0 les formules

$$\lambda B_0 = B_1 (\beta - 1)$$
$$\lambda B_1 = B_2 (\beta - 2)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda B^n = B_{n+1} (\beta - n - 1)$$

donnent puisque β n'est pas supposé entier :

$$O = B_1 = B_2 = \dots\dots = B_n$$

et la série de Laurent se réduit à une série entière.

Les coefficients $A_1\ A_2 \dots A_n$ sont alors donnés par les formules

$$\lambda A_1 + b_0 = O$$
$$\lambda A_2 + b_1 = A_1 (\beta + 1)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda A_n + b_{n-1} = A_{n+1} (\beta + n - 1)$$

Les termes de la série entière sont donc calculables d'une manière unique par ces formules et le raisonnement fait au début montre que la série entière ainsi obtenue sera convergente et aura un rayon de convergence non inférieur à celui de la série $\varphi(x)$.

Pour obtenir la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (IV) ait une solution holomorphe nulle pour $x=0$, il suffit donc d'écrire que la série de Laurent représentant la fonction

$$\frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta} \int_0^x \frac{x^\beta e^{\frac{\lambda}{x}}}{x^2} \varphi(x)\, dx$$

a son terme constant nul.

Or le terme de $\dfrac{x^\beta e^{\frac{\lambda}{x}}}{x^2} \varphi(x)$ ayant $b_n\ x^\beta$ en facteur peut s'écrire :

$$x^{\beta} b^{n}\left[x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \frac{\lambda^2}{2!} x^{n-3} + \ldots + \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} x \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\lambda^n}{n!} \frac{1}{x} + \ldots \right]$$

et après intégration il devient :

$$x^{\beta} b_n \left[\frac{x_n}{\beta+n} + \lambda \frac{x^{n-1}}{\beta+n-1} + \frac{\lambda^2}{2!} \frac{x^{n-2}}{\beta+n-2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \frac{x^2}{\beta+2} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \frac{x}{\beta+1} + \frac{\lambda^n}{n!\,\beta} + \ldots \right]$$

et par suite on pourra écrire :

$$\frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^{\beta}} \int_0^x \frac{x^{\beta} e^{\frac{\lambda}{x}}}{x^2} \varphi(x)\, dx \equiv \left[1 - \frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{2!\, x^2} - \frac{\lambda^3}{3!\, x^3} + \ldots \right] A$$

avec :

$$A = b_0 \left[\frac{1}{\beta} + \frac{\lambda}{(\beta-1)\,x} + \frac{\lambda^2}{2!\,(\beta-2)\,x^2} + \frac{\lambda^3}{3!\,(\beta-3)\,x^3} + \ldots \right]$$
$$+ b_1 \left[\frac{x}{\beta+1} + \frac{\lambda}{\beta} + \frac{\lambda^2}{2!\,(\beta-1)\,x} + \frac{\lambda^3}{3!\,(\beta-2)\,x^2} + \ldots \right] +$$

....

$$+ b^n \left[\frac{x^n}{\beta+n} + \frac{\lambda x^{n-1}}{\beta+n-1} + \frac{\lambda^2 x^{n-2}}{2!\,(\beta+n-1)} + \ldots \right] + \ldots$$

En multipliant ces deux séries on obtient une nouvelle série de Laurent. Le terme constant de cette série de Laurent est lui-même une série entière en λ

$$S = C_0 + C_1 \lambda + C_2 \lambda^2 + C_3 \lambda^3 +$$

et l'on obtient facilement :

$$C_0 = \frac{b_0}{\beta}$$

$$C_1 = \frac{b_1}{\beta} - \frac{b_1}{\beta+1} = \frac{b_1 \lambda}{\beta(\beta+1)}$$

$$C_2 = b_2 \left[\frac{1}{2!\,\beta} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{2!\,(\beta+2)} \right] = \frac{b_2 \lambda^2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}$$

et d'une façon générale :

$$C_n = b_n \left[\frac{1}{n!\,\beta} - \frac{1}{(n-1)!\,(\beta+1)} + \frac{1}{(n-2)!\,(\beta+2)}\,\frac{1}{2!} - \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^n \frac{1}{(\beta+n)\,n!} \right]$$

Or il est facile de voir que la quantité entre parenthèses est égale à $\dfrac{1}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}$

en décomposant la fraction $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n)}$

en éléments simples

On a en effet le coefficient A^k du terme $\dfrac{A_k}{x+k}$ en faisant $x=-K$ dans

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots\ldots(x+K-1)(x+K+1)\ldots\ldots(x+n)}$$

Le terme constant s'écrit donc :

$$S = \frac{1}{\beta}\left[b_0 + \frac{b_1\lambda}{\beta+1} + \frac{b_2\lambda^2}{(\beta+1)(\beta+2)} + \ldots + \frac{b_n\lambda^n}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)} + \ldots \right.$$

et l'on retrouve la condition de convergence trouvée plus haut en écrivant $S=0$.

On peut retrouver peut-être plus simplement ce résultant en raisonnant de la manière suivante :

Les équations :

$$9 \left\{ \begin{array}{l} \lambda B_0 = B_1(\beta-1) \\ \lambda B_1 = B_2(\beta-2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda B_n = B_{n+1}(\beta+n-1) \\ \lambda A_1 + b_0 = \beta B_0 \end{array} \right.$$

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda A_2 + b_1 = A_1 (\beta + 1) \\ \dotfill \\ \dotfill \\ \lambda A_n + b_{n-1} = A_{n+1} (\beta + n - 1) \end{array}\right.$$

permettent de calculer les coefficients d'une série de Laurent vérifiant formellement l'équation donnée et nous avons vu que cette série sera convergente à l'intérieur du cercle de convergence dont le rayon est au moins égal au rayon de convergence de la série $\varphi(x)$.

Il suffit pour cela de choisir arbitrairement le nombre A_1. Les équations (9) donnent alors les coefficients $A_2 A_3 \,.\, A_n$ en fonction de A_1 et les équations (10) donnent $B_0 B_1 \ldots B_n$

On a vu de plus que si l'on prenait A_1 tel que $B_0 = 0$, c'est-à-dire $\lambda A_1 + b_1 = 0$, la série de Laurent devenait une série de Mac-Laurin. Nous allons voir qu'il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que l'on ait :

$$0 = S = b_0 + \frac{b_1 \lambda}{\beta + 1} + \frac{b_2 \lambda^2}{(\beta + 1)(\beta + 2)} + \ldots + \frac{b_n \lambda^n}{(\beta + 1)(\beta + 2)\ldots(\beta + n)} + \ldots$$

En effet, soit :

$$R_n = \frac{b_n \lambda^n}{(\beta + 1)\ldots(\beta + n)} + \frac{b_n \lambda^{n+1}}{(\beta + 1)(\beta + 2)\;\;(\beta + n + 1)} + \ldots$$

le reste de la série S.

La série S est absolument convergente pour toute valeur de λ puisque la série $\varphi(x)$ a un rayon de convergence non nul (Théorème I). Prenons :

$$R_n = \frac{\lambda^n A^n}{\beta(\beta + 1).\;.(\beta + n - 1}$$

c'est-à-dire :

$$A_n = \frac{b_n}{\beta + n} + \frac{b_{n+1} \lambda}{(\beta + n)(\beta + n + 1)} + \ldots$$

$$A_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{\beta + n - 1} + \frac{b_n \lambda}{(\beta + n - 1)(\beta + n)} + \cdots$$

on en déduit si n>1 la formule de récurrence

$$(\beta + n - 1)\ A_{n-1} = b_{n-1} + \lambda\, A_n$$

Les nombres An ainsi définis sont donc bien les coefficients A_n de la série de Laurent ; ils se calculent en fonction de A_1 et l'on a

$$A_1 = \frac{b_1}{\beta + 1} + \frac{b_2 \lambda}{(\beta + 1)(\beta + 2)} + \frac{b_3 \lambda^2}{(\beta + 1)(\beta + 2)(\beta + 3)} + \cdots$$

Pour que la fonction de Laurent devienne une série entière, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\lambda\, A_1 + b_0 = 0$$

c'est-à-dire :

$$O = S = b_0 + \frac{b_1}{\beta + 1} + \frac{b_2 \lambda}{(\beta + 1)(\beta + 2)} + \frac{b_3 \lambda^2}{(\beta + 1)(\beta + 2)(\beta + 3)} + \cdots$$

Remarque. — Si l'on était parti de l'équation :

$$\text{(III)} \quad x^{k+1}\, y' = y\,(A - B\, x^k) + g\,(x)$$

on aurait eu les K équations :

$$\text{(III)}' \quad x^{k+1}\, y' = y\,(A - B\, x^k) + x^k\, \varphi_r\,(x^k) \quad r = 1, 2 \ldots K$$

et on aurait eu les K conditions $S = 0$, où l'on aurait posé : $\lambda = \dfrac{A}{K}$ et $\beta = \dfrac{B + r}{K}$

Les coefficients $b_0\ b_1$ b_n de la série S auraient été les mêmes coefficients que ceux des séries $\varphi_r\ (x^k)$ à l'exception du premier qui aurait été remplacé par

$$b_1 + \frac{b_0\,(r + B)}{A}$$

§ 16. — Autre méthode de formation de la solution générale de IV

$$(IV) \quad x^2 y' - (\lambda - \beta x) y = \varphi(x) \equiv b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \ldots.$$

Nous allons suivre une marche semblable à celle du paragraphe 12. La solution générale de IV s'obtient en ajoutant à la solution générale $\dfrac{C e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta}$ de l'équation linéaire sans second membre une solution particulière de l'équation linéaire avec second membre et nous prendrons pour celle-ci la fonction déjà indiquée au paragraphe précédent.

$$\frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta} \int_0^x \frac{x^\beta e^{\frac{\lambda}{x}}}{x^2} \varphi(x)\, dx$$

Pour lui donner une nouvelle forme, nous considèrerons la fonction :

$$Y_n = \frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta} \int_0^x x^{n+\beta-2} e^{\frac{\lambda}{x}} dx$$

solution particulière de l'équation :

$$(14) \quad x^2 y' - (\lambda - \beta x) y = x^n$$

1° Cherchons d'abord une relation entre la fonction Y_n et la fonction Y_{n-1} définie de la même manière.

La relation (9) de la page 35 où nous faisons K=1 donne :

$$(15) \quad x^p e^{\frac{\lambda}{x}} = p \int_0^x x^{p-1} e^{\frac{\lambda}{x}} dx - \lambda \int_0^x x^{p-2} e^{\frac{\lambda}{x}} dx$$

ou en faisant $p=n+\beta-1$ et en multipliant les 2 membres par $\dfrac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta}$

$$(16) \quad x^{n-1} = (n+\beta-1)\, Y_n - \lambda\, Y_{n-1}$$

2° Cette formule de récurrence nous donne les relations suivantes :

$$\begin{array}{l|l}
\dfrac{\lambda\, Y_{n-1}}{n+\beta-1} - Y_n = -\dfrac{x^{n-1}}{n+\beta-1} & 1 \\[2ex]
\dfrac{\lambda\, Y_{n-2}}{n+\beta-2} - Y_{n-1} = -\dfrac{x^{n-2}}{n+\beta-2} & \dfrac{\lambda}{n+\beta-1} \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\lambda\, Y_3}{\beta+3} - Y_4 = -\dfrac{x^3}{\beta+3} & \dfrac{\lambda^{n-4}}{(n+\beta-1)(n+\beta-2)\dots(\beta+4)} \\[2ex]
\dfrac{\lambda\, Y_2}{\beta+2} - Y_3 = -\dfrac{x^2}{\beta+2} & \dfrac{\lambda^{n-3}}{(n+\beta-1)(n+\beta-2)\dots(\beta+3)} \\[2ex]
\dfrac{\lambda\, Y_1}{\beta+1} - Y_2 = -\dfrac{x}{\beta+1} & \dfrac{\lambda^{n-2}}{(n+\beta-1)(n+\beta-2)\dots(\beta+2}
\end{array}$$

En multipliant toutes ces relations par les facteurs placés en regard et en les ajoutant on obtient :

$$Y_n = \frac{\lambda^{n-1}\, Y_1}{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)} + \frac{x\,\lambda^{n-2}}{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}$$
$$+ \frac{x^2\,\lambda^{n-3}}{(\beta+2)\dots(\beta+n-1)} + \frac{x^3\,\lambda^{n-4}}{(\beta+4)\dots(\beta+n-1)} + \cdots$$
$$+ \frac{x^{n-2}\,\lambda}{(\beta+n-2)(\beta+n-1)} + \frac{x^{n-1}}{\beta+n-1}$$

3° Si nous considérons l'équation (IV), le calcul précédent permet de mettre la solution particulière considérée sous la forme de la somme de la série entière

$\Sigma\, u_n\, x^n$ et de l'intégrale particulière analogue de l'équation :

$$x^2 y' - (\lambda - \beta x)\, y = S\, x$$

en appelant S la somme de la série entière toujours convergente d'après le théorème (I) :

$$S = b_0 + b_1 \frac{\lambda}{\beta+1} + b_2 \frac{\lambda^2}{(\beta+1)(\beta+2)} + b_3 \frac{\lambda^3}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)} + \dots$$

Le terme général $u_n\, x^n$ de la série entière s'obtient en faisant la somme de tous les termes de même degré dans toutes les expressions Y_n (formule 17), ce qui donne :

$$u_n = \frac{b_n}{\beta+n} + \frac{\lambda\, b_{n+1}}{(\beta+n)(\beta+n+1)} + \frac{\lambda^2\, b_{n+2}}{(\beta+n)(\beta+n+1)(\beta+n+2)} + \dots$$

D'après le théorème II toutes les séries u_n sont convergentes pour toute valeur de λ et d'après le théorème IV la série entière $\Sigma\, u_n\, x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à celui de la série φ (x)

La solution générale de IV prend alors la forme :

$$y = \frac{C\, e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta} + \Sigma\, u_n\, x^n + S\, \frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^\beta} \int_0^x x^{\beta-1}\, e^{\frac{\lambda}{x}}\, dx$$

On retrouve la condition $S=0$ pour que la fonction 19 puisse être holomorphe et nulle pour $x=0$. Il suffit alors de prendre la constante C égale à 0.

§ 17. — Propriétés des solutions de l'équation différentielle dans le voisinage de l'origine

Pour étudier les solutions de l'équation (I) nous savons que nous devons étudier les solutions des K équations de la forme

$$\text{(IV)} \qquad x^2 y' = (\lambda - \beta x) y + \varphi(x)$$

où $\beta = \dfrac{B+r}{K}$ avec $r=1, 2 \ldots\ldots K-1, K.$

et par suite nous sommes amené à étudier les K fonctions transcendantes introduites dans la formule (19)

$$(20) \quad F(x) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^{\beta}} \int_{0}^{x} x^{\beta-1} e^{\frac{\lambda}{x}} dx$$

La droite (D) pour laquelle la partie réelle de $\frac{\lambda}{x}$ est nulle divise le plan de la variable complexe x en deux demi-plans : Le demi-plan P_1, pour lequel la partie réelle de $\frac{\lambda}{x}$ est négative et le demi-plan P_2 pour lequel elle est positive. Soit S le point représentant la variable complexe x. Désignons par A_1 un angle de sommet O aussi voisin que l'on veut de deux droits et intérieur au demi-plan P_1, c'est-à-dire ne contenant aucun point de D à son intérieur ou sur ses côtés. Dans les mêmes conditions on désignera par A_2 un angle de sommet O intérieur à P_2.

Premier Cas. — Le point S *est dans l'angle* A_1

Pour définir F(x) nous prendrons l'intégrale le long du segment de droite OS. On voit facilement que l'on définit ainsi une fonction analytique dans A_1. Montrons que lorsque x tend vers O dans A_1, F(x) tend vers O.

En effet, pour intégrer le long de la droite OS nous poserons $x = \rho e^{i\omega}$ (ω restant constant et ρ variant de O à $|x|$, $|x|$ désignant le module du point S).

Si nous considérons seulement les modules des quantités complexes et si nous désignons par ν une quantité positive, nous aurons:

$$| F(x) | < H(\rho) = \frac{e^{\frac{\nu}{\rho}}}{\rho^{\beta}} \int_{o}^{\rho} r^{\beta-1} e^{-\frac{\nu}{r}} dx$$

Nous allons montrer que H (ρ) tend vers O avec ρ tendant vers O. Nous avons :

$$\left(r^{\beta+1} e^{-\frac{\nu}{r}}\right)' = e^{-\frac{\nu}{r}} \left[(\beta + 1) r^{\beta} + \nu\, r^{\beta-1}\right]$$

ce qui donne par intégration :

$$\int_{o}^{\rho} r^{\beta-1} e^{-\frac{\nu}{r}} dr = \frac{1}{\nu} \rho^{\beta+1} e^{-\frac{\nu}{\rho}} - \frac{\beta+1}{\upsilon} \int_{o}^{\rho} r^{\beta} e^{-\frac{\nu}{r}} dr$$

et par suite :

$$H(\rho) = \frac{\rho}{\nu} - \frac{\beta +}{\nu} \frac{e^{\frac{\nu}{\rho}}}{\rho^{\beta}} \int_{o}^{\beta} r^{\beta} e^{-\frac{\nu}{r}} dr$$

La quantité $e^{-\frac{\nu}{r}}$ est maximum pour $r = \rho$ et par suite

$$\int_{o}^{\rho} r^{\beta} e^{-\frac{\nu}{r}} dr < e^{-\frac{\nu}{\rho}} \int_{o}^{\rho} r^{\beta} = \frac{\rho^{\beta+1}}{\beta+1} e^{-\frac{\nu}{\rho}}$$

$$\frac{e^{\frac{\nu}{r}}}{\rho^{\beta}} \int_{o}^{\rho} r^{\beta} e^{-\frac{\nu}{r}} dr < \frac{\rho}{\beta+1}$$

quantité qui tend vers O pour $\rho \longrightarrow O$

Les fonctions H (ρ) et par suite F (x) tendent bien vers O quand x tend vers O dans l'angle A_1.

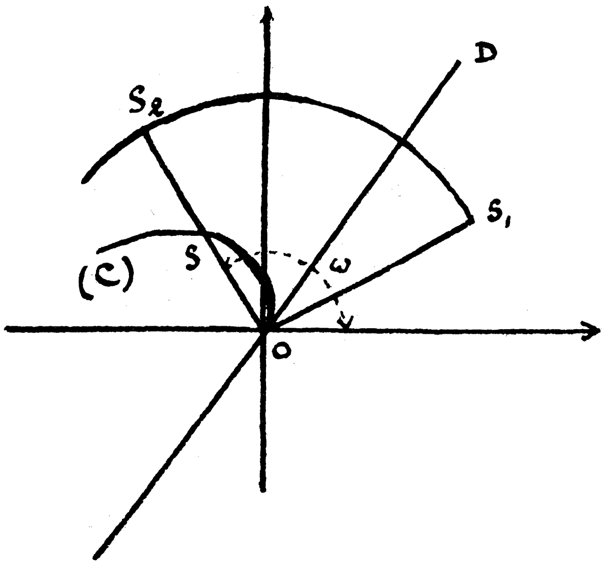
Comme dans ce cas la fonction $\dfrac{C e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^{\beta}}$ de la formule (19) augmente indéfiniment avec x tendant vers zéro, nous retrouvons le résultat connu :

Si x tend vers zéro dans un angle A_1 à l'intérieur et sur les côtés duquel la partie réelle de $\dfrac{\lambda}{x}$ est négative, la seule solution de l'équation différentielle (IV) qui tende vers O avec x est celle qui correspond à C=O. Toutes les autres solutions croissent indéfiniment lorsque x tend vers O.

Deuxième Cas. — Le point S *est dans l'angle* A_2

A l'intérieur de cet angle et sur ses côtés, la partie réelle de $\dfrac{\lambda}{x}$ est positive.

Pour définir F(x) dans l'angle A_2, nous prendrons à l'intérieur du demi-plan P_1 dans l'angle A_1 un point fixe S_1. De O comme centre, nous décrirons un cercle passant par S_1. Soit S_2 le point de rencontre de ce cercle avec la demi-droite OS. L'intégrale figurant dans (20) sera prise le long du chemin OS_1 S_2 S. Rien ne serait changé dans les raisonnements qui vont suivre si l'intégrale était prise à partir de S_1 suivant S_1 S_2 S. Nous conservons le chemin OS_1 S_2 S pour que la fonction F(x) définie par (20) soit la même que S soit intérieur à l'angle A_1 ou intérieur à l'angle A_2. Il est évident que, si l'on va de S_1 à S suivant un che-



min faisant avec S_1 S_2 S un contour fermé ne contenant pas O à son intérieur, la valeur de F(x) ne change pas. Nous poserons donc :

$$F(x) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^{\beta}} \left[\int_{O\,S_1\,S_2} x^{\beta-1} e^{\frac{\lambda}{x}} dx + \int_{S_2\,S} x^{\beta-1} e^{\frac{\lambda}{x}} dx \right]$$

L'intégrale prise suivant le chemin O S_1 S_2 est finie et comme on la multiplie par $\frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^{\beta}}$ quantité qui tend vers zéro avec x, on voit que cette partie de F(x) tend vers O avec x. Il reste à considérer :

$$F_2(x) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^{\beta}} \int_{S_2\,S} x^{\beta-1} e^{\frac{\lambda}{x}} dx$$

Si l'on intègre en posant $x = \rho\, e^{i\omega}$, en raisonnant comme précédemment, on est amené à considérer la fonction réelle :

$$\Phi(\rho) = \frac{e^{-\frac{\nu}{\rho}}}{\rho^{\beta}} \int_{\rho}^{R} r^{\beta-1}\, e^{\frac{\nu}{r}}\, dr$$

en posant $R = O\,S_2 > O$ $\qquad \rho = O\,S > O$

R est fixe; ν est nombre positif dans l'angle A_2, il varie avec l'argument φ du point S mais reste fixe sur la droite O S.

ρ est un nombre positif tendant vers O avec S tendant vers O.

L'intégration par partie employée deux fois donne:

$$\Phi(\rho) = -\frac{e^{-\frac{\nu}{\rho}}}{\rho^{\beta}} \left[\frac{\beta+1}{\nu^2}\, r^{\beta+2}\, e^{\frac{\nu}{r}} + \frac{r^{\beta+1}}{\nu}\, e^{\frac{\nu}{r}} \right]_{\rho}^{R}$$

$$+ \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{\nu^2} \frac{e^{-\frac{\nu}{\rho}}}{\rho^{\beta}} \int_{\rho}^{R} r^{\beta+1}\, e^{\frac{\nu}{r}}\, dr$$

Le premier terme du second membre tend vers O avec ρ. Montrons qu'il en est de même du second terme. Considérons pour cela les 3 fonctions :

$$u(r) = r^{\beta+1}\, e^{\frac{\nu}{r}} \; ; \quad g(\rho) = \frac{e^{-\frac{\nu}{\rho}}}{\rho^{\beta}}\, f(\rho) \; ; \quad f(\rho) = \int_{\rho}^{R} u(r)\, dr$$

La dérivée $u'(r)$ ne s'annule que pour $r = \alpha = \dfrac{\nu}{\beta+1}$

A. — α *n'est pas compris entre* O *et* R

La fonction u est infinie pour r=o et par suite décroissante de ρ à R et l'on peut écrire :

$$f(\rho) < \rho^{\beta+1} e^{\frac{\nu}{\rho}} (R - \rho) \text{ et par suite } g(\rho) < \rho\ (R - \rho)$$

La fonction $\Phi(\rho)$ tend bien vers O avec ρ tendant vers O.

B. — α *est compris entre* O *et* R

On peut encore supposer que l'on a $\rho < \alpha$ puisque l'on fait tendre ρ vers zéro et l'on a encore :

$$f(\rho) = \int_{\rho}^{\alpha} u(r)\,dr + \int_{\alpha}^{R} u(r)\,dr$$

Lorsque r varie de ρ à α, u(r) est maximum pour $r = \rho$.

La première intégrale est inférieure à :

$$(\alpha - \rho)\, u(\rho)$$

Lorsque r varie de α à R, u(r) est maximum pour r=R et la seconde intégrale est inférieure à :

$$(R - \alpha)\, u(R)$$

On a donc :

$$f(\rho) < (\alpha - \rho)\, \rho^{\beta+1} e^{\frac{\nu}{\rho}} + (R - \alpha)\, R^{\beta+1}\, e^{\frac{\nu}{R}}$$

$$g(\rho) < (\alpha - \rho)\, \rho + (R - \alpha)\, R^{\beta+1} e^{\frac{\nu}{R}}\, \frac{e^{-\frac{\nu}{\rho}}}{\rho^{\beta}}$$

$g(\rho)$ tend donc vers O avec ρ et il en est de même de $\Phi(\rho)$ et de F(x). On a le résultat connu :

Si le point x *représenté par* S *tend vers* O *suivant une courbe* (C) *intérieure à un angle* A_2 *ayant ou non une tangente en* O, *on voit que toutes les solutions* y *de l'équation IV tendent vers zéro avec* x.

TABLE DES MATIÈRES