THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

CHRISTOS CARATZÉNIS

Sur le problème plan et symétrique des trois corps

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1931

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1931__127__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

H.F.u.f 166 (92)

SÉRIE A N° 1311
N° D'ORDRE :
2180

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Christos CARATZÉNIS
Licencié ès Sciences de l'Universite d'Athenes
Ingénieur diplôme de l'E. S. O. de Paris

1re THÈSE — SUR LE PROBLÈME PLAN ET SYMETRIQUE DES TROIS CORPS.
2e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTE.

Soutenues le 26 Juin 1931 devant la Commission d'examen

MM P. MONTEL . . . *Président.*
A. DENJOY . . . } *Examinateurs*
J. CHAZY. . . . }

PARIS (Ve)
LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
49, Boulevard Saint-Michel, 49

1931

D.99.280

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen	C. MAURAIN, *Professeur*,	Physique du globe.
Doyen honoraire ..	M. MOLLIARD.	
Profes. honoraires.	H. LE CHATELIER.	
	H. LEBESGUE.	
	A. FERNBACH.	
	A. LEDUC.	
	E. HÉROUARD.	
Professeurs	Émile PICARD	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	E. GOURSAT.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
	G. KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	P. JANET	Électrotechnique générale.
	F. WALLERANT ...	Minéralogie.
	P. PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	M. CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	Émile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	H. ABRAHAM	Physique.
	M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	Gabriel BERTRAND .	Chimie biologique.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	L. LAPICQUE	Physiologie générale.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	G. URBAIN	Chimie générale.
	L. MARCHIS	Aviation.
	E. VESSIOT	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
	A. COTTON	Physique générale.
	J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY	Physique.
	R LESPIEAU	Théories chimiques.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	Charles PÉREZ	Zoologie.
	É. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD ..	Botanique.
	Rémy PERRIER ...	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	Léon BERTRAND ...	Géologie structurale et géologie appliquée.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	Paul MONTEL	Mécanique rationnelle.
	V. AUGER	Chimie appliquée.
	P. WINTREBERT ...	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
	Eugène BLOCH	Physique théorique et physique céleste.
	A. MAILHE	Étude des combustibles.
	L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
	Henri VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
	Ch. JACOB	Géologie.
	P. PASCAL	Chimie minérale.
	Léon BRILLOUIN ..	Théories physiques.
	E. ESCLANGON	Astronomie.
	H. BÉNARD	Mécanique expérimentale des fluides.
	MAUGUIN	Minéralogie.
	L. BLARINGHEM ...	Botanique.
E. PÉCHARD	Chimie (Enseigt P. C. N.)	
A. GUILLET.....	Physique.	
M. GUICHARD	Chimie minérale.	
A. MICHEL-LÉVY ..	Pétrographie.	
A. DEREIMS.	Géologie.	
A. DENJOY	Calcul différentiel et intégral.	
H. MOUTON	Chimie physique.	
A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).	
L. DUNOYER	Optique appliquée.	
M. JAVILLIER	Chimie biologique.	
ROBERT-LÉVY	Zoologie.	
A. DEBIERNE.....	Radioactivité.	
E. DARMOIS	Physique.	
G. BRUHAT.....	Physique.	
A. GUILLIERMOND .	Botanique (P. C. N.).	
F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	
L. JOLEAUD	Paléontologie.	
M. FRÉCHET	Calcul des Probabilités et Physiques mathématiques.	
Mme RAMART-LUCAS	Chimie organique.	
BÉGHIN	Mécanique théorique des fluides.	
FOCH	Mécanique expérimentale des fluides.	
PAUTHENIER	Physique (P. C. N.).	
VILLEY	Mécanique physique et expérimentale.	
De BROGLIE	Théories physiques.	
LABROUSTE.....	Physique du Globe.	
FREUNDLER	Chimie (P. C. N.).	
PRENANT	Zoologie.	
P. JOB	Chimie générale.	
CHRÉTIEN	Optique appliquée.	

Secrétaire..... A. PACAUD

A MON MAITRE

MONSIEUR JEAN CHAZY

Hommage reconnaissant.

PREMIÈRE THÈSE

SUR LE PROBLÈME PLAN ET SYMÉTRIQUE DES TROIS CORPS

INTRODUCTION

On sait que le problème des trois corps, à cause de son importance fondamentale pour l'Astronomie et des difficultés, que présente sa solution, à diverses époques et sous différents points de vue a bien mérité de l'attention des Géomètres, parmi lesquels Poincaré [1] a obtenu de mémorables résultats qualitatifs, concernant surtout le problème restreint des trois corps.

D'autre part M. SUNDMAN [2] dans son célèbre et encore récent *Mémoire sur le problème des trois corps* en supposant que les trois constantes des aires ne soient pas nulles à la fois, a démontré que la plus petite des trois distances mutuelles est supérieure à une longueur fixe, dépendant des conditions initiales, et qu'un choc triple est par conséquent impossible, et il a prolongé analytiquement le mouvement, après l'instant, $t = 0$, d'un choc de deux corps, au moyen des séries entières en la racine cubique du temps, représentant les coordonnées

[1] Notamment : *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique céleste.*
[2] *Acta Mathématica*, XXXVI, 1913.

des trois corps avant l'instant du choc et il a ainsi obtenu la représentation, mémorable au point de vue de l'Analyse, des neuf coordonnées et du temps, de $-\infty$ à $+\infty$, par des fonctions d'une variable auxiliaire holomorphes dans un cercle du plan de cette variable.

M. CHAZY, pendant les douze dernières années a publié des recherches approfondies sur le problème général des trois corps. Son mémoire : « Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment [1] » a apporté une contribution à l'étude de ce problème. M. CHAZY, en supposant que le mouvement ne comporte aucun choc triple, et il suffit pour cela que les trois constantes des aires ne soient pas nulles à la fois, est parvenu à classer les différents mouvements possibles du problème, au point de vue des maxima des distances mutuelles, quand le temps tend vers $+\infty$, et à démontrer rigoureusement que le problème, le plus général, des trois corps comporte seulement sept sortes de mouvements, qu'il a appelés mouvements hyperboliques, hyperboliques-elliptiques, hyperboliques-paraboliques, paraboliques-elliptiques, paraboliques, mouvements dans lesquels les trois distances mutuelles sont bornées, et enfin mouvements oscillants, dans lesquels les mêmes distances sont tantôt bornées, et tantôt infiniment grandes. En complétant la classification précédente, M. CHAZY [2] a aussi indiqué la répartition des trajectoires en continua et a démontré que les trajectoires du problème des trois corps divisent l'espace à douze dimensions en cinq continua, qu'il a considérés systématiquement.

Dans un autre Mémoire [3], M. CHAZY, en considérant systématiquement les solutions, appelées par M. Wilczynski isocèles, du problème des trois corps, savoir les solutions où les trois corps forment à chaque instant un triangle isocèle, a démontré que dans le cas, où les deux masses, placées aux angles égaux du triangle isocèle, sont égales, le problème des trois corps n'admet que les trois solutions suivantes, abstraction faite des mouvements de Lagrange et d'Euler :

1° Le mouvement non rectiligne à un axe de symétrie ;

(1) *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* (3), XXXIX, 1922.
(2) Notamment : *Journal des Mathématiques pures et appliquées*, t. VIII, 1929.
(3) *Bulletin Astronomique*, t. I, fasc. III, 1921.

2° Le mouvement non plan admettant un plan de symétrie ;
3° Le mouvement plan admettant un axe de symétrie ;

Cette dernière solution se présente comme un cas limite de deux mouvements précédents, comporte une simplicité analytique nécessairement plus grande que le mouvement général du problème des trois corps et dépend en général de quatre paramètres en dehors desmasses.

M. Chazy a considéré dans un récent Mémoire [1] le mouvement rectiligne des trois corps.

Je m'occupe dans ce travail du mouvement plan des trois corps admettant un axe de symétrie et j'ai voulu faire une étude analogue au point de vue local et autant que possible compléter cette étude dans tout le plan et dans tout l'espace.

Après avoir écrit, dans le chapitre I, les équations classiques du mouvement et réduit notre problème à un système différentiel du second ordre et à une quadrature, nous considérons dans le chapitre II le cas où la constante des forces vives h est nulle. — Le problème se réduit alors à une équation différentielle du premier ordre, dont nous étudions les caractéristiques au voisinage de ses points singuliers et dans tout le plan, d'après la théorie classique de Poincaré sur les courbes définies par les équations différentielles. — Les trois constantes des aires sont nulles à la fois, et le problème admet effectivement des caractéristiques conduisant à un choc triple. La représentation des mouvements obtenus est en général analogue à celle obtenue par M. Chazy d'une autre manière pour le mouvement le plus général des trois corps et comporte comme figure-limite des trois corps le triangle équilatéral de Lagrange ou le mouvement rectiligne d'Euler. Nous obtenons enfin l'allure des caractéristiques dans tout le plan ; par là nous étudions le prolongement indéfini du mouvement et la succession des chocs entre les deux masses égales.

Dans le chapitre III nous traitons le cas où la constante des forces vives est positive et nous obtenons, outre les mouvements, au voisinage des points singuliers, conduisant à un choc triple sur les caractéristiques de choc, et à un choc entre les deux masses égales, trois autres sortes

[1] *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. LV, 1927, p. 222.

de trajectoires, soit selon la dénomination de M. CHAZY : les trajectoires hyperboliques, sur lesquelles se produit un seul choc entre les deux masses égales, les trajectoires hyperboliques-elliptiques, et les trajectoires hyperboliques-paraboliques, qui forment une surface séparant les deux sortes précédentes de trajectoires.

Dans le chapitre IV nous considérons le cas où la constante des forces vives h est négative. En outre de mouvements, analogues à ceux obtenus dans le chapitre III, nous obtenons des mouvements avec instant de vitesse nulle et rebroussement et nous démontrons que les trajectoires hyperboliques-elliptiques, qui peuvent exister dans le cas actuel, forment un continuum unique et toujours de même classe, continuum dont la frontière est formée dans la région intérieure $h < 0$ par des trajectoires paraboliques-elliptiques, et sur la surface $h = 0$ par une trajectoire parabolique à deux paramètres.

Enfin dans le chapitre V, nous mettons, d'après Levi-Civita, les équations différentielles de notre problème sous la forme canonique régulière au voisinage d'un choc des deux masses égales. Ces équations canoniques, ainsi débarrassées de toute singularité, pourront se prêter plus facilement comme point de départ à la recherche des solutions périodiques du problème.

M. Jean CHAZY a bien voulu s'intéresser au développement de ce travail : il ne m'a jamais cessé ses conseils et ses encouragements et a toujours accueilli mes résultats avec sa bienveillance accoutumée. Qu'il me soit permis de lui témoigner ici, très respectueusement, ma plus profonde gratitude.

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Supposons que le centre de gravité des trois corps soit fixe en G et désignons par m, m, M leurs masses, supposées positives, par $2z$ la distance entre les deux masses égales,qui est positive ou en particulier nulle dans un choc des deux ou des trois corps, par u l'abscisse, positive

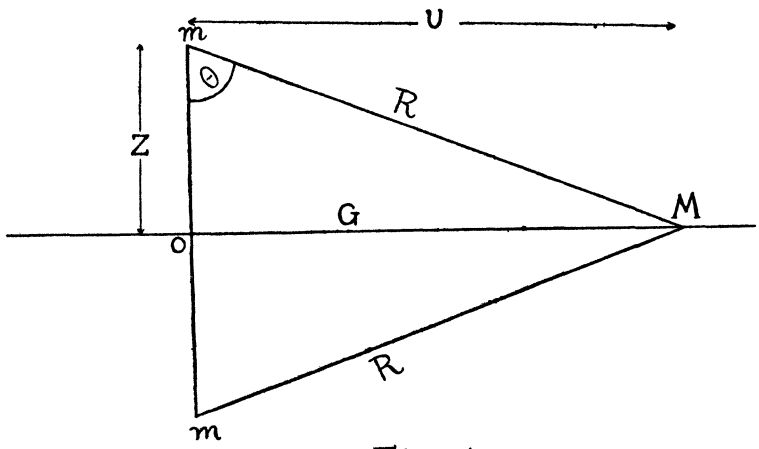


Fig. 1

négative ou nulle de la masse M par rapport au centre de gravité O des deux masses égales, et par ξ, o, o, les coordonnées cartésiennes rectangulaires de la masse M par rapport au centre de gravité commun G. Les distances mutuelles étant $2z$ et $(z^2 + u^2)^{1/2}$, si l'on tient compte de

la relation $\xi = \frac{2m}{2m + \mathrm{M}} u$, on obtient comme équations différentielles du mouvement les deux équations du second ordre :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\left[\frac{m}{4z^3} + \frac{\mathrm{M}}{(z^2 + u^2)^{3/2}}\right] z \tag{1}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{2m + \mathrm{M}}{(z^2 + u^2)^{3/2}} u \tag{2}$$

dont une intégrale première est donnée par l'équation des forces vives :

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{\mathrm{M}}{2m + \mathrm{M}}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{\mathrm{m}}{2z} + \frac{2\mathrm{M}}{(z^2 + u^2)^{1/2}} + h \tag{3}$$

h désignant la constante des forces vives.

Comme les équations (1), (2), et (3) ne contiennent pas explicitement le temps t, mais seulement la différentielle dt, les équations considérées se ramènent, par l'introduction des deux nouvelles variables $x = \frac{u}{z}$, $y = \frac{du}{dz}$, au système du second ordre :

$$\frac{dx}{y - x} = \frac{dy}{\dfrac{\left(1 + \frac{\mathrm{M}}{2m + \mathrm{M}} y^2\right)\left[y\left(\frac{m}{4} + \frac{\mathrm{M}}{(1 + x^2)^{3/2}}\right) - \frac{2m + \mathrm{M}}{(1 + x^2)^{3/2}} x\right]}{\frac{m}{2} + \frac{2\mathrm{M}}{(1 + x^2)^{1/2}} + hz}} = \frac{dz}{z} \tag{4}$$

et à une quadrature définie par l'équation :

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{\left[1 + \frac{\mathrm{M}}{2m + \mathrm{M}} y^2\right] z}{\frac{m}{2} + \frac{2\mathrm{M}}{(1 + x^2)^{1/2}} + hz}. \tag{5}$$

CHAPITRE II

CONSTANTE DES FORCES VIVES NULLE

Nous considérons d'abord le cas où la constante des forces vives h est nulle et qui se ramène à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et à deux quadratures. En effet, si $h = o$, le deuxième des rapports (4) ne contient plus la variable z, et en égalant ce rapport au précédent on obtient l'équation du premier ordre :

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(1 + \frac{M}{2m + M} y^2\right)\left[y\left(\frac{m}{4} + \frac{M}{(1 + x^2)^{3/2}}\right) - \frac{2m + M}{(1 + x^2)^{3/2}} x\right]}{\left[\frac{m}{2} + \frac{2M}{(1 + x^2)^{1/2}}\right](y - x)}.$$

Toute courbe décrite dans le plan xoy par un point de coordonnées cartésiennes rectangulaires x et y, est une caractéristique de l'équation différentielle (6), et par une telle caractéristique nous représenterons les mouvements correspondant aux équations différentielles (1), (2) et (3) où la constante des forces vives h est nulle. Réciproquement à une caractéristique de l'équation (6) correspondent en général une infinité de mouvements, dans lesquels les équations

$$(7) \qquad \frac{dx}{y - x} = \frac{dz}{z} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{\left[1 + \frac{M}{2m + M} y^2\right] z}{\frac{m}{2} + \frac{2M}{(1 + x^2)^{1/2}}} \qquad (8)$$

déterminent la distance z et le temps t par deux quadratures successives.

D'autre part, pour simplifier nos formules, nous négligerons les deux

constantes arbitraires, introduites par ces deux quadratures, et l'ambiguïté dans le sens du mouvement, introduite par l'équation (8) : ce qui revient à changer l'unité de longueur et en même temps l'unité du temps ou celle de la masse pour conserver dans les équations (1) et (2) la valeur 1 à la constante de l'attraction universelle, l'origine du temps et éventuellement le sens dans lequel est compté le temps. Au contraire, la constante arbitraire, introduite par l'intégration de l'équation (6), est une constante essentielle, dont la variation change l'allure du mouvement. En outre dans l'étude, qui va suivre, on désignera par $P_n(x)$, $P_n(x, y)$, $P_n(x, y, z)$ des séries entières en x ou en x, y, ou en x, y, z, représentant des fonctions holomorphes pour $x = y = z = o$ et qui commencent par des termes de degré n au moins. D'autre part, nous désignerons par $P(x)$, $P(x, y)$... des séries entières en x, ou en x, y, ou en x, y, z, représentant des fonctions holomorphes et différentes de zéro pour $x = y = z = 0$.

La forme du second membre de l'équation (6) nous montre que la courbe représentée par l'équation :

$$y\left[\frac{m}{4} + \frac{M}{(1 + x^2)^{3/2}}\right] - \frac{2m + M}{(1 + x^2)^{3/2}}\, x = 0 \tag{9}$$

est le lieu géométrique des points de contact des tangentes aux caractéristiques parallèles à ox, de même que la droite $y = x$ est le lieu des points de contact des tangentes parallèles à oy. Les points d'intersection de la droite $y = x$ et de la courbe (9), qui possède une branche infinie ayant l'axe ox comme asymptote, savoir les points $x = y = o$ et $x = y = \pm\sqrt{3}$, sont des points singuliers de l'équation (6), à l'étude desquels nous passons immédiatement.

A. — Le point singulier $x = y = 0$

Pour $x = y = 0$, le second membre de l'équation (6) se présente sous la forme : $\frac{0}{0}$. Pour étudier la nature de ce point, on met cette équation, au voisinage de ce point, sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + \frac{1}{2}y + P_3(x, y)}{-x + y} \qquad \text{où} \qquad a = -\frac{4m + 2M}{m + 4M}. \tag{10}$$

Comme les deux racines de l'équation caractéristique en S, relative à ce point, sont données par la formule :

$$S = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{4M - 55m}{64M + 16m}},$$

il en résulte que ces deux racines seront : distinctes, réelles et négatives, si l'on a : $4M > 55m$; ou imaginaires conjuguées si l'on a $4M < 55m$, ou confondues et égales à $-\frac{1}{4}$, pour $4M = 55m$; le point considéré est un *nœud* dans le premier cas, et un *foyer* dans les deux autres.

1° $4M > 55m$. **Les trois corps s'éloignent à l'infini.** — Quand on n'attribue aux variables x et y que des valeurs réelles et que l'on cherche à construire les courbes intégrales de l'équation (10), il est très important de connaître la forme de cescourbes dans le voisinage du point $x = y = 0$ qui dans le cas où $4M > 55m$ est un nœud. Pour cela, on peut intégrer l'équation (10) d'une façon symétrique en la remplaçant par le système :

$$\frac{dx}{y - x} = \frac{dy}{ax + \frac{1}{2}y + P_3(x, y)} = d\varphi \tag{11}$$

φ étant une nouvelle variable auxiliaire, introduite pour la symétrie. Ensuite par les deux combinaisons linéaires :

$$X = y - (1 + S_2)x + \cdots, \qquad Y = y - (1 + S_1)x + \cdots$$

on peut ramener ce dernier système à une forme canonique [1] :

$$\frac{dX}{S_1 X} = \frac{dY}{S_2 Y} = d\varphi \tag{12}$$

où S_1 et S_2 désignent les deux racines négatives de l'équation caractéristique. L'intégration étant maintenant immédiate on tire :

$$Y = CX^{\frac{S_2}{S_1}} \tag{13}$$

et on constate que, puisque S_1 et S_2 sont de même signe, Y tend vers zéro en même temps que X. Par conséquent une infinité de courbes

[1] Goursat, *Cours d'Analyse*, 5e éd., t. II, p. 530.

intégrales vont passer par l'origine et leur expression en x et y peut s'écrire

$$(14) \qquad y = (1 + S_1)x + P_3(x, y) + C[y - (1 + S_2)x + P_3(x, y)]^{\frac{S_2}{S_1}},$$

C désignant une constante arbitraire positive ou négative. Dans cette expression les deux développements en séries entières $P_3(x, y)$ qui commencent par des termes de degré 3, ont des coefficients bien déterminés mais différents les uns des autres. Si la constante d'intégration C prend la valeur zéro ou toute autre valeur sauf celle de l'infini on voit que les courbes intégrales sont toutes à l'origine tangentes à la droite $y = (1 + S_1)x$, dont le coefficient angulaire est positif quelles que soient les valeurs des masses.

Suivons maintenant l'une de ces caractéristiques dans le sens où elle s'approche du nœud considéré et étudions le mouvement correspondant en supposant d'abord que la constante C soit différente de zéro et de l'infini. De l'équation (14) on déduit pour la fonction $y(x)$ un développement de la forme :

$$y = xP(x)$$

et pour cette expression de y on obtient de l'équation (7) :

$$z = x^{\frac{1}{S_1}} P(x).$$

Ensuite l'équation (8) donne :

$$\frac{dt}{dx} = x^{\frac{3-2S_1}{2S_1}} P(x) \qquad \text{d'où :} \qquad t = x^{\frac{3}{2S_1}} P(x)$$

et par inversion on forme :

$$x = t^{\frac{2S_1}{3}} P\left(t^{\frac{2S_1}{3}}\right).$$

Par suite on obtient :

$$z = t^{\frac{2}{3}} P\left(t^{\frac{2S_1}{3}}\right) \qquad \text{et} \qquad u = xz = t^{\frac{2+2S_1}{3}} P\left(t^{\frac{2S_1}{3}}\right).$$

Comme $\frac{2S_1}{3} < 0$ et $\frac{2 + 2S_1}{3} > 0$, il résulte des développements obtenus que quand le temps t tend vers l'infini par des valeurs posi-

tives ou négatives, les coordonnées x et y tendent vers zéro, tandis que les trois distances mutuelles $2z$ et $R = z\sqrt{1 + x^2}$ deviennent des infiniment grands d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps. Les mouvements correspondants, qui dépendent de trois paramètres, sont ceux que M. CHAZY a appelé mouvements paraboliques des trois corps. En outre puisque $\operatorname{tang} \theta = x$ (fig. 1), il s'ensuit que quand le point représentatif x, y, s'approche de l'origine les trois corps tendent à l'infini et leur configuration tend vers une *figure-limite* [1] *rectiligne*, où une certaine relation, connue depuis Euler, existe entre les distances et les masses.

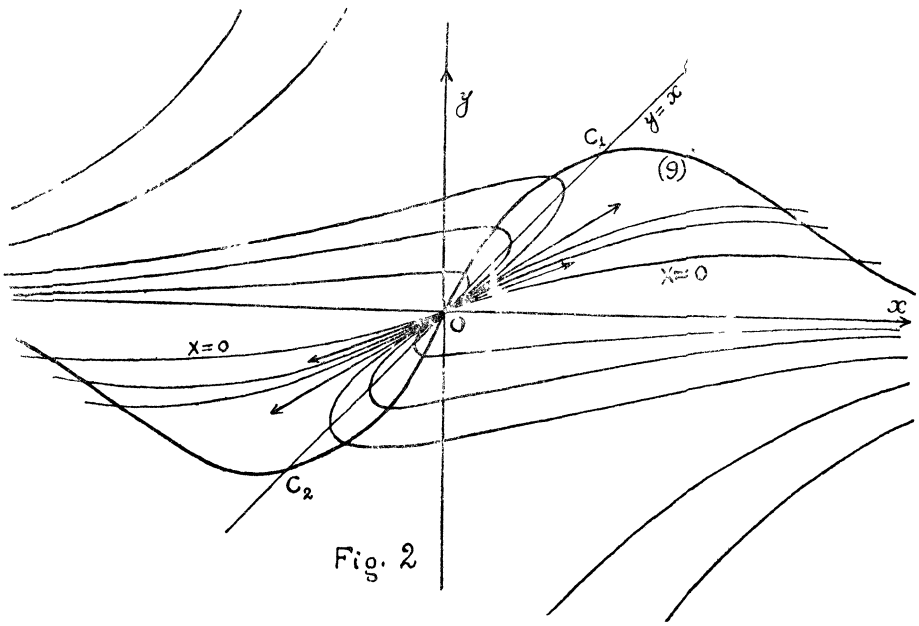


Fig. 2

Suivons de même la caractéristique exceptionnelle et isolée $X = 0$ correspondant à la valeur de la constante $C = \mp \infty$ dans le sens où cette caractéristique s'approche du point singulier considéré. Cette caractéristique est à l'origine tangente à la droite $y = (1 + S_2)x$, située au-dessous de la tangente correspondant aux caractéristiques précédemment étudiées, et ayant comme coefficient angulaire la quantité

[1] Cf. CHAZY, *Bulletin Astronomique*, t. 35, 1918, p. 375.

positive $(1 + S_2)$. Pour étudier le mouvement correspondant sur cette caractéristique on déduit de l'équation (14) pour $C = \infty$ un développement de la forme : $y = (1 + S_2)x + \ldots$ et de l'équation (7) on obtient :

$$z = x^{\frac{1}{S_2}} P(x).$$

Puis l'équation (8) donne :

$$\frac{dt}{dx} = x^{\frac{3 - 2S_2}{2S_2}} P(x) \qquad \text{d'où :} \qquad t = x^{\frac{3}{2S_2}} P(x).$$

Par inversion on tire :

$$x = t^{\frac{2S_2}{3}} P\left(t^{\frac{2S_2}{3}}\right)$$

et successivement en forme :

$$z = t^{\frac{2}{3}} P\left(t^{\frac{2S_2}{3}}\right) \qquad \text{et} \qquad u = xz = t^{\frac{2 + 2S_2}{3}} P\left(t^{\frac{2S_2}{3}}\right).$$

Comme ici encore $\frac{2S_2}{3} < 0$ et $\frac{2 + 2S_2}{3} > 0$, il résulte des développements obtenus que quand le point représentatif s'approche de l'origine, le temps croît indéfiniment, les trois corps s'éloignent à l'infini, leur figure-limite est la ligne droite et les mouvements correspondants, qui dépendent de même de trois paramètres, sont les mouvements paraboliques. Ajoutons enfin que le cas où la constante $C = 0$, rentre dans le cas précédemment étudié pour lequel cette constante était différente de l'infini, et par conséquent on peut tirer pour son compte des développements et des résultats analogues à ceux qu'on a obtenus pour le cas général.

2° $4M < 55m$. Les trois corps s'éloignent aussi à l'infini. — Quand on a : $4M < 55m$, l'équation caractéristique de l'équation (10) ayant deux racines imaginaires et conjuguées, pour construire les courbes intégrales au voisinage du point singulier $x = 0$, $y = 0$, on remplace l'équation (10) par un système de la forme (11), qui se ramène à la forme canonique :

$$(15) \qquad \frac{d(X + iY)}{\left(-\frac{1}{4} + Ki\right)(X + iY)} = \frac{d(X - iY}{\left(-\frac{1}{4} - Ki\right)(X - iY)} = d\varphi$$

où :

$$X = x + \frac{3}{4a} y, \qquad Y = \frac{K}{a} y, \qquad K = \sqrt{\frac{55m - 4M}{16m + 64M}} \tag{16}$$

et φ représente une nouvelle variable auxiliaire introduite pour la symétrie. L'intégration du système (15) étant immédiate on obtient comme expression des courbes intégrales considérées :

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = ce^{-\lambda \text{ arc tang } \frac{Y}{X}}, \qquad \lambda = \frac{1}{4K} \tag{17}$$

c désignant une constante arbitraire positive ou négative, et on voit que toutes ces courbes ont la forme de spirales se rapprochant indéfiniment de l'origine, qui constitue un point asymptote et s'appelle un *foyer*.

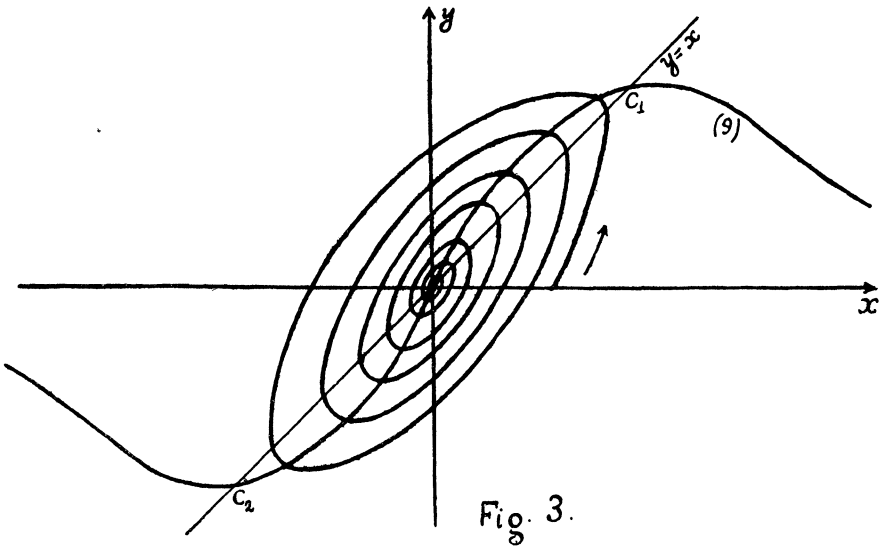


Fig. 3.

Cherchons la loi du mouvement correspondant sur l'une de ces caractéristiques dans le sens où elle s'approche de l'origine et en supposant que la constante c soit finie et différente de zéro. D'abord en posant : $\frac{1}{\omega} = \text{arc tang } \frac{Y}{X}$, où ω tend vers zéro, et en tenant compte des relations (16), et de l'équation (17) on tire :

$$x = ce^{-\frac{\lambda}{\omega}} \left[\cos \frac{1}{\omega} - 3\lambda \sin \frac{1}{\omega}\right], \qquad y = c \frac{a}{K} \sin \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\lambda}{\omega}}$$

et de l'équation (7), on ontient :

$$z = \beta e^{\frac{4\lambda}{\omega}}$$

β désignant une constante d'intégration, et on constate que quand ω tend vers zéro par des valeurs positives, x et y tendent vers zéro tandis que la distance z tend vers l'infini, puisque $\lambda > 0$. Par substitution de ces dernières expressions dans l'équation (8) on tire :

$$\frac{dt}{d\frac{1}{\omega}} = e^{\frac{6\lambda}{\omega}} \mathrm{P}\left[\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]$$

où l'on a mis pour abréger les formules

$$\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right) = \cos\frac{1}{\omega} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} \qquad \text{et} \qquad \sigma\left(\frac{1}{\omega}\right) = \sin\frac{1}{\omega} e^{-\frac{\lambda}{\omega}},$$

la série P contenant ces expressions à partir de la puissance 2. Puis on obtient par intégration :

$$t = e^{\frac{6\lambda}{\omega}} \mathrm{P}\left[\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]$$

et on forme :

$$t^{-\frac{1}{6}} = e^{-\frac{\lambda}{\omega}} \mathrm{P}\left[\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)\right], \qquad \text{et} \qquad \xi \log t = \frac{1}{\omega} + \mathrm{P}_1\left[\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]$$

où $\xi = \frac{1}{6\lambda}$. Des deux dernières équations on obtient :

$$t^{-1/6} \cos[\xi \log t] = \left[\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right) \cos \mathrm{P}_1 - \sigma\left(\frac{1}{\omega}\right) \sin \mathrm{P}_1\right] \mathrm{P}\left[\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]$$

et :

$$t^{-1/6} \sin[\xi \log t] = \left[\sigma\left(\frac{1}{\omega}\right) \cos \mathrm{P}_1 + \varphi\left(\frac{1}{\omega}\right) \sin \mathrm{P}_1\right] \mathrm{P}\left[\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]$$

En résolvant ces dernières expressions, considérées comme implicites, par rapport aux variables $e^{-\frac{\lambda}{\omega}}$, $\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right)$ et $\sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)$, on trouve :

$$e^{-\frac{\lambda}{\omega}} = \frac{1}{t^{1/6}} \cdot \mathrm{P}\left[\frac{\cos(\xi \log t)}{t^{1/6}}, \quad \frac{\sin(\xi \log t)}{t^{1/6}}\right], \qquad \varphi\left(\frac{1}{\omega}\right) = \mathrm{P}_1\left[\frac{\cos(\xi \log t)}{t^{1/6}}, \quad \frac{\sin(\xi \log t)}{t^{1/6}}\right]$$

et :

$$\sigma\left(\frac{1}{\omega}\right) = P_1\left[\frac{\cos(\xi \log t)}{t^{1/6}}, \quad \frac{\sin(\xi \log t)}{t^{1/6}}\right].$$

Puis successivement on tire :

$$z = t^{2/3}P\left[\frac{\cos(\xi \log t)}{t^{1/6}}, \quad \frac{\sin(\xi \log t)}{t^{1/6}}\right], \qquad x = P_1\left[\frac{\cos(\xi \log t)}{t^{1/6}}, \quad \frac{\sin(\xi \log t)}{t^{1/6}}\right]$$

et

$$u = xz = t^{2/3}P_1\left[\frac{\cos(\xi \log t)}{t^{1/6}}, \quad \frac{\sin(\xi \log t)}{t^{1/6}}\right].$$

Les séries entières en $\frac{\cos(\xi \log t)}{t^{1/6}}$, et $\frac{\sin(\xi \log t)}{t^{1/6}}$ étant convergentes pour les valeurs assez grandes du temps, il résulte des développements obtenus que quand le point représentatif x, y s'approche du point singulier considéré, le temps t croît indéfiniment, les trois distances mutuelles deviennent des infiniment grands d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps, le mouvement correspondant, qui dépend de même des trois paramètres, est encore ici un mouvement parabolique et les trois corps en s'éloignant à l'infini tendent à se placer sur une ligne droite comme dans le cas précédent. Ajoutons enfin qu'à la valeur $c = 0$ de la constante de l'équation (17) ne correspond aucun mouvement.

3° $4M = 55m$. **Le point singulier** $x = 0$, $y = 0$ **est encore un foyer.** — Dans ce cas, l'équation caractéristique ayant une racine double et égale à $-\frac{1}{4}$, on remplace encore l'équation (10) par un système différentiel de la forme (11), qui après s'être ramené à une forme canonique par les deux combinaisons

$$X = x + \frac{3}{4a}y, \qquad Y = x + \frac{1}{2a}y \tag{18}$$

donne comme expression des courbes intégrales au voisinage de l'origine la formule :

$$Y = CX + X \log X, \tag{19}$$

C désignant une constante d'intégration arbitraire positive ou négative. La forme de cette équation montre que les caractéristiques de

l'équation différentielle (10) sont des spirales se rapprochant indéfiniment de l'origine, comme on peut s'en rendre compte facilement en posant $X = e^{\theta}$, où θ est une nouvelle variable auxiliaire. Par conséquent le point considéré est encore ici, comme dans le cas précédent, un foyer. — Etudions le mouvement correspondant sur l'une de ces caractéristiques dans le sens où elle s'approche du point singulier. Comme dans le cas actuel $a = -\frac{9}{16}$, on tire de l'équation (7) en tenant compte des relations (18) et (19).

$$z = \beta X^{-4}$$

où β représente une nouvelle constante arbitraire. L'équation (8) donne ensuite :

$$\frac{dt}{dX} = X^{-7}P(X, X \log X), \qquad \text{d'où :} \qquad t = X^{-6}P(X, X \log X).$$

Par suite :

$$t^{-1/6} = XP(X, X \log X), \qquad \log t = -6 \log X + P_1(X, X \log X)$$

et

$$\frac{\log t}{t^{1/6}} = -X \log XP(X, X \log X) + XP_1(X, X \log X).$$

Les expressions de $\frac{1}{t^{1/6}}$ et $\frac{\log t}{t^{1/6}}$ peuvent être considérées comme deux équations implicites en X et XlogX et résolues par rapport à ces deux variables sous la forme :

$$X = \frac{1}{t^{1/6}} P\left(\frac{1}{t^{1/6}}, \frac{\log t}{t^{1/6}}\right), \qquad X \log X = P_1\left(\frac{1}{t^{1/6}}, \frac{\log t}{t^{1/6}}\right).$$

Par conséquent, on forme successivement :

$$x = \frac{1}{t^{1/6}} P\left(\frac{1}{t^{1/6}}, \frac{\log t}{t^{1/6}}\right), \qquad z = t^{2/3}P\left(\frac{1}{t^{1/6}}, \frac{\log t}{t^{1/6}}\right)$$

et enfin :

$$u = xz = t^{1/2}P\left(\frac{1}{t^{1/6}}, \frac{\log t}{t^{1/6}}\right).$$

Les séries entières en $t^{-\frac{1}{6}}$, $t^{-\frac{1}{6}} \log t$, représentées par ces derniers

développements, sont convergentes pour les valeurs assez grandes du temps. On voit donc que quand le point représentatif x, y, s'approche du point singulier, le temps t croît indéfiniment et les trois distances mutuelles deviennent des infiniment grandes d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps et les trois corps s'éloignent à l'infini en tendant quant à leur configuration à se placer sur une ligne droite. Le mouvement considéré est le mouvement parabolique et dépend, comme dans les deux cas précédents, de trois paramètres.

Le col C. **Choc des trois corps et mouvement parabolique.** — Passons maintenant à l'étude de l'autre point singulier à distance finie de l'équation (6), savoir du point $x = y = \pm\sqrt{3}$, et considérons d'abord la valeur positive $\sqrt{3}$ des coordonnées x et y, pour laquelle l'équation (6) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ et peut se mettre, au voisinage de ce point, sous la forme :

$$\frac{dx_1}{y_1 - x_1} = \frac{dy_1}{\beta x_1 + \frac{1}{2} y_1 + P_2(x_1, y_1)} = d\varphi \tag{20}$$

où

$$\beta = \frac{5m - 2M}{8m + 4M}, \qquad x_1 = x - \sqrt{3}, \qquad y_1 = y - \sqrt{3},$$

φ désignant une nouvelle variable auxiliaire, introduite pour la symétrie. Comme l'équation caractéristique en S du deuxième degré donne deux racines, distinctes, réelles et de signe contraire $S_1 > 0$ et $S_2 < 0$, il en résulte que le point considéré est un *col*.

Ensuite par les deux combinaisons :

$$X = y_1 - (1 + S_2)x_1 + \cdots, \qquad Y = y_1 - (1 + S_1)x_1 + \cdots$$

en ramenant le système (20) à une forme canonique, analogue à celle du système (12), on obtient comme expression des courbes intégrales

$$Y = C_1 X^{\frac{S_2}{S_1}}$$

C_1, désignant une constante arbitraire, positive ou négative.

Par le col C, passent alors deux courbes, divisant le plan, dans

lequel sont tracées les courbes intégrales, en quatre régions, et ayant comme tangentes en ce point les deux droites :

$$y_1 - (1 + S_1)x_1 = 0 \tag{21}$$

et

$$y_1 - (1 + S_2)x_1 = 0 \tag{22}$$

dont la première a comme coefficient angulaire $(1 + S_1)$, qui est toujours positif quelles que soient les masses des trois corps, tandis que la seconde a comme coefficient angulaire $(1 + S_2)$, qui est positif, quand on a $M > \frac{5}{2}m$.

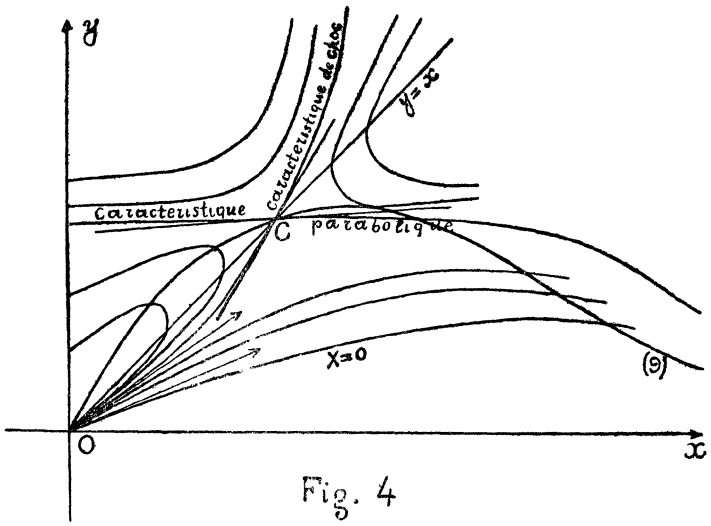


Fig. 4

Cherchons maintenant la loi du mouvement correspondant aux deux caractéristiques, passant au col C. D'abord de l'équation de la caractéristique, dont la tangente est la droite (21), on tire :

$$y_1 = (1 + S_1)x_1 + \cdots$$

et de l'équation (7) on obtient :

$$z = x_1^{\frac{1}{S_1}} P(x_1).$$

Puis l'équation (8), par substitution de y_1 et z par leurs expressions en x_1, donne :

$$\frac{dt}{dx_1} = x_1^{\frac{3-2S_1}{2S_1}} P(x_1), \qquad \text{d'où :} \qquad t = x_1^{\frac{3}{2S_1}} P(x_1).$$

et par inversion :

$$x = \sqrt{3} + t^{\frac{2S_1}{3}} P\left(t^{\frac{2S_1}{3}}\right).$$

Par suite on forme :

$$z = t^{\frac{2}{3}} P\left(t^{\frac{2S_1}{3}}\right) \qquad \text{et} \qquad u = t^{\frac{2}{3}} P\left(t^{\frac{2S_1}{3}}\right).$$

Il résulte donc des développements précédents que quand le point x, y s'approche du col C sur cette caractéristique, dans l'un ou l'autre sens, les deux distances u et z, tendent vers zéro et le temps t croît ou décroît jusqu'à une certaine valeur limite $t = 0$. Donc à l'instant $t = 0$ se produit un choc des trois corps, et nous appellerons cette caractéristique, conduisant au choc, la *caractéristique de choc* des trois corps.

Si l'on considère le cas où le point représentatif s'approche du col C, sur la seconde caractéristique passant par le col, et dont la tangente en ce point est la droite (22), on déduit un développement :

$$y_1 = (1 + S_2)x_1 + \cdots$$

et on tire de l'équation (7) l'expression :

$$z = x_1^{\frac{1}{S_2}} P(x_1).$$

Puis moyennant l'équation (8) on forme de la même façon les développements :

$$x = \sqrt{3} + t^{\frac{2S_2}{3}} P\left(t^{\frac{2S_2}{3}}\right), \qquad z = t^{\frac{2}{3}} P\left(t^{\frac{2S_2}{3}}\right)$$

$$u = xz = t^{\frac{2}{3}} P\left(t^{\frac{2S_2}{3}}\right).$$

Comme $\frac{2S_2}{3} < 0$, on constate que quand le point x, y, s'approche du col C, le temps t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et que les distances u et z

et par suite les trois distances mutuelles, sont des infiniment grands d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps. Nous appellerons par conséquent cette caractéristique la *caractéristique parabolique*, et le mouvement correspondant, qui dépend de 2 paramètres comme le mouvement correspondant au choc, *le mouvement parabolique*. Remarquons enfin que comme il résulte de la formule $R = z\sqrt{1 + x^2}$, quand le point représentatif s'approche du col C sur l'une ou l'autre de deux caractéristiques considérées, la distance R de chacune des deux masses égales à la troisième masse M tend à devenir égale à la distance entre les deux masses égales. Par suite $\cos \theta = \frac{z}{R}$ tend vers $\frac{1}{2}$, et l'angle θ (fig 1) tend vers 60°. On en conclut que les trois masses se choquent sur la caractéristique de choc ou s'éloignent à l'infini sur la caractéristique parabolique en tendant, quant à leur figure, à former un triangle équilatéral, obtenu par Lagrange. Le point $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$ est aussi un col, symétrique au col déjà considéré, par rapport à l'origine et on peut obtenir facilement d'une façon analogue pour ce point les mêmes développements des distances u et z.

Le nœud $x = \infty$, $y = 0$. Choc des deux masses égales. — Un autre point singulier de l'équation (6) est le point $x = \infty$, $y = 0$. Pour ces valeurs de x et y, elle se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ et par la transformation $x = \frac{1}{X}$, où $X = 0$, elle peut se mettre sous la forme :

$$(23) \qquad \frac{dy}{dX} = \frac{\left(1 + \frac{M}{2m + M} y^2\right)\left[y\left(\frac{m}{4} + \frac{MX^3}{(X^2 + 1)^{3/2}}\right) - \frac{2m + M}{(X^2 + 1)^{3/2}} \cdot X^2\right]}{\left[\frac{m}{2} + \frac{2MX}{(X^2 + 1)^{1/2}}\right](X - yX^2)}$$

ou au voisinage du point $X = y = 0$, sous la forme :

$$(24) \qquad \frac{dy}{dX} = \frac{y + P_2(X, y)}{2X}.$$

Comme les deux racines de l'équation caractéristique, relative à cette dernière équation, sont les nombres 1 et 2, il en résulte que le point considéré est un *nœud*, au voisinage duquel les courbes carac-

téristiques de l'équation (24) sont représentées par une expression de la forme :

$$[y + P_2(X, y)]^2 = CX, \tag{25}$$

C désignant une constante arbitraire, positive ou négative. — Par conséquent toutes les caractéristiques passant par le nœud considéré sont tangentes à l'axe oy, sauf celle qui correspond à la valeur $C = 0$.

Suivons maintenant l'une des caractéristiques précédentes dans le sens où elle s'approche du point singulier et étudions le mouvement correspondant. On voit de suite d'après l'équation (7) que la variable z tend vers zéro et que le temps t d'après l'équation (8) tend aussi vers la valeur-limite zéro. Donc au nœud $x = \infty$, $y = 0$ correspond un choc des deux masses égales.

Cherchons la loi du mouvement au voisinage de ce choc et supposons d'abord différente de zéro la constante C, correspondant à la caractéristique considérée. De l'équation (25) on déduit pour la fonction y (X) un développement de la forme :

$$y = \sqrt{X}\, P(\sqrt{X}),$$

la série $P(\sqrt{X})$ commençant par un terme constant et contenant la variable X à partir de la puissance $\frac{3}{2}$. Puis l'équation (7) donne :

$$z = XP(\sqrt{X})$$

et de l'équation (8), par substitution de y et z par leurs expressions, on obtient :

$$\frac{dt}{dX} = \sqrt{X}\, P(\sqrt{X}), \qquad \text{d'où} \qquad t = X^{3/2} P(\sqrt{X}),$$

le terme constant de la dernière fonction P ayant le signe avec lequel le temps t tend vers sa limite zéro. Par inversion on tire :

$$X = t^{2/3} P\left(t^{1/3}\right)$$

et on forme successivement :

$$z = t^{2/3} P\left(t^{1/3}\right) \qquad \text{et} \qquad u = xz = P\left(t^{1/3}\right).$$

Ce sont pour les distances z et u les développements au voisinage de

l'instant d'un choc des deux corps, dont les masses sont égales, et particulièrement en ce qui concerne le développement de la distance u, il ne contient $t^{1/3}$ qu'à partir de la puissance 3. Si au moyen des séries entières en $t^{1/3}$ obtenues, on prolonge analytiquement le mouvement considéré, quand le temps dépassant l'instant $t = 0$, change de signe, les développements précédents sont encore valables dans le nouveau mouvement et le radical $\sqrt{X}$ change de signe comme t, tandis que la constante C a la même valeur après qu'avant le choc. En particulier dans le prolongement considéré, l'arc de caractéristique aboutissant au nœud $X = y = 0$, tangentiellement à l'axe oy, se trouve prolongé par un arc, issu du même point qui ressemble à un point de rebroussement.

Donc sur cette caractéristique, à l'instant $t = 0$, correspond un choc des deux masses égales.

Supposons maintenant que la constante $C = 0$, et suivons de même la caractéristique correspondante en nous approchant du nœud considéré. Dans ce cas l'équation (25) donne le développement :

$$y = X^2 P(X)$$

et la caractéristique considérée aboutit au nœud normalement à l'axe oy, c'est-à-dire à toutes les autres caractéristiques. — L'équation (7) donne :

$$z = XP(X),$$

et de l'équation (8) on tire par intégration :

$$t = X^{3/2}P(X), \qquad \text{d'où par inversion :} \qquad X = t^{2/3}P\left(t^{2/3}\right).$$

Par suite on obtient :

$$z = t^{2/3}P\left(t^{2/3}\right), \qquad u = xz = P\left(t^{2/3}\right).$$

Il résulte de ces développements, qui dépendent de deux paramètres, que quand le temps t tend vers sa valeur-limite zéro, le point représentatif s'approche du point singulier étudié, la distance z tend aussi vers zéro, tandis que la distance u tend à une certaine valeur-limite, différente de zéro, car la série $P(t^{2/3})$, qui la représente, est en général différente de zéro pout $t = 0$, et contient la variable $t^{2/3}$ à partir de la

puissance 3. Donc sur cette caractéristique, à l'instant $t = 0$, se produit un choc entre les deux masses égales, tandis que en même temps la vitesse de la troisième masse M devient nulle, ce qui est la condition qui caractérise, dans le problème général des trois corps, les chocs symétriques de deux corps [1]. Il y a donc des chocs symétriques des deux masses égales et en particulier dans le prolongement analytique du mouvement au delà d'un tel choc, le point représentatif x, y, qui arrive au nœud considéré normalement à l'axe oy, rebrousse chemin au nœud et suit au retour le même arc de courbe en sens inverse.

Si enfin la constante $C = \infty$, de l'équation (25) on tire $X = 0$ et on constate de suite que à cette caractéristique ne correspond aucun mouvement.

Branches infinies. — Pour compléter et mieux concevoir l'ensemble des caractéristiques de l'équation (6) il est utile d'étudier leur allure à l'infini et d'abord dans la direction oy. Pour qu'une caractéristique ait une branche infinie dans cette direction, il faut que quand x tend vers une certaine valeur, soit x_0, y tende vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Or. par le changement de variable $y = \frac{1}{Y}$, on met l'équation (6) sous la forme :

$$(26) \qquad \frac{dx}{dY} = -\frac{\left[\frac{m}{2} + \frac{2M}{(1+x^2)^{1/2}}\right](1 - xY)}{\left(Y^2 + \frac{M}{2m+M}\right)\left[\frac{m}{4} + \frac{M}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{2m+M}{(1+x^2)^{3/2}} \cdot Yx\right]}.$$

La forme de cette équation montre que les valeurs initiales $x = x_0$ $Y = 0$ déterminent une caractéristique unique. En effet, on tire de cette équation le développement :

$$x = x_0 + YP(Y)$$

où le terme constant par lequel commence la série entière $P(Y)$ est négatif. Puis l'équation (7) donne :

$$(27) \qquad \frac{dz}{z} = YP(Y)dY$$

[1] Jean Chazy, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1927, t. **55**.

d'où :

$$z = z_0 + Y^2 P(Y)$$

z_0 désignant la valeur de z correspondant aux valeurs $x = x_0$, $Y = 0$. Ensuite de l'équation (8) on obtient :

$$\left(\frac{dt}{dY}\right)^2 = P(Y).$$

Donc :

$$t = YP(Y) \qquad \text{et par inversion :} \qquad Y = tP(t).$$

Par suite :

$$z = z_0 + t^2 P(t).$$

On voit donc qu'à la valeur finie du temps correspond une valeur infinie de y et un maximum ou un minimum de la distance z. Puisque la dérivée seconde $\frac{d^2z}{dt^2}$ est toujours négative, comme on constate dès l'équation (1), il en résulte que la distance z ne peut avoir de minimum à un instant où la dérivée première $\frac{dz}{dt}$ est finie. Par conséquent on obtient ici un maximum de la distance z et l'on vérifie en effet, d'après l'équation (26), que le terme constant de la série entière $P(Y)$ figurant dans l'équation (27) est négatif. En outre, les développements obtenus donnent immédiatement le prolongement analytique du mouvement et de la caractéristique représentant ce mouvement, quand le temps croît ou décroît au delà de l'instant correspondant à la valeur infinie de y : le signe de y change comme celui de t. La caractéristique ainsi prolongée a passé par l'infini et y a un point ordinaire étant pour y positif à gauche et pour y négatif à droite de son asymptote, comme on peut le voir facilement de l'équation (6) et des développements obtenus.

Voyons maintenant si les mêmes caractéristiques possèdent une branche infinie dans la direction ox. Pour qu'une caractéristique ait une telle branche, il faut que quand y tend vers une certaine valeur $y_0 \neq 0$, x devienne infiniment grand. Or par le changement de variable $x = \frac{1}{X}$ où X tend vers zéro, l'équation (6) devient :

$$(28) \qquad \frac{dX}{dy} = X \frac{\left[\frac{m}{2} + \frac{2MX}{(X^2+1)^{1/2}}\right](1 - yX)}{\left(1 + \frac{M}{2m+M}y^2\right)\left[y\left(\frac{m}{4} + \frac{MX^3}{(X^2+1)^{3/2}}\right) - \frac{2m+M}{(X^2+1)^{3/2}}X^2\right]}$$

La fonction représentée par la fraction du second membre étant holomorphe pour $X = 0$, $y = y_0$ à moins que y_0 soit différent de zéro, il résulte d'un raisonnement, bien connu [1], de Briot et Bouquet que la seule intégrale holomorphe tendant vers zéro, qui satisfait à l'équation (28) est $X = 0$. Donc les caractéristiques considérées ne possèdent pas d'autres asymptotes parallèles à l'axe ox, sauf l'axe ox lui-même. Enfin par la transformation $y = \lambda x$, $x = \frac{1}{X}$ l'équation (6) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dX}{d\lambda} = X^3\varphi(X, \lambda)$$

où la fonction $\varphi(X, \lambda)$ est holomorphe pour $X = 0$, $\lambda = \lambda_0$, à moins que λ_0 soit différent de zéro. La seule intégrale holomorphe convenant à cette dernière équation étant $X = 0$, on en conclut que les caractéristiques de l'équation (6) n'admettent non plus des asymptotes obliques.

Trajectoires particulières avec figure-limite rectiligne. — Cherchons maintenant les solutions du système des équations différentielles (1) et (2), qui sont de la forme :

$$z = at^{2/3}, \qquad u = ct^{2/3} \tag{29}$$

a et c désignant des constantes réelles, déterminées par le système :

$$\frac{2}{9}a = \frac{m}{4a^2} + \frac{Ma}{(a^2 + c^2)^{3/2}}, \qquad \frac{2}{9} = \frac{2m + M}{(a^2 + c^2)^{3/2}}, \tag{30}$$

qu'on obtient, si l'on substitue les expressions (29) aux équations (1) et (2). A toute solution réelle du système (30) correspond une trajectoire de la forme cherchée, sur laquelle les trois corps ont des mouvements rectilignes et forment à chaque instant une figure homothétique à la figure formée par les trois points de coordonnées o, o, a, o, o, $-a$, et c, o, o. —, le centre d'homothétie étant l'origine des coordonnées et le rapport d'homothétie $t^{2/3}$. Quand t tend vers zéro, les trois corps se choquent, et quand t croît indéfiniment, ils s'éloignent

[1] Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, 5e éd., p. 369.

indéfiniment les uns des autres. — Si l'on étudie à l'aide des équations aux variations les solutions du système différentiel des équations (1) et (2), voisines de l'une des solutions precédentes, on peut obtenir facilement de nouvelles trajectoires sur lesquelles les trois corps se choquent ou s'éloignent indéfiniment les uns des autres et dans les deux cas forment une figure, qui tend à être homothétique dans le rapport $t^{2/3}$ à la figure formée par les points $a, -a, c$. M. Chazy [1] a appelé les figures représentant les solutions du système algébrique (30), *figures-limites* et démontré que le problème des trois corps admet seulement deux figures-limites, savoir le triangle équilatéral et la ligne droite où les distances et les masses satisfont à une certaine relation.

Nous nous occuperons ici particulièrement de la figure-limite rectiligne en prenant la ligne droite contenant cette figure-limite comme axe des z avec la masse M au milieu et entre les deux masses égales. Comme dans ce cas u et par suite c sont nuls, il en résulte que le système algébrique (30) se réduit à l'équation

$$\frac{2}{9}a = \frac{m + 4M}{4a^2},$$

et par conséquent, en prenant la constante de Gauss f égale à 1 et en tenant compte que la racine positive donnant l'irrationnelle du cinquième degré, introduite par Euler, est aussi égale à 1, on peut décomposer l'équation caractéristique, relative au système considéré en deux groupes :

$$\text{(I)} \qquad \lambda\left(\lambda + \frac{1}{3}\right) = 0, \qquad \lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + \frac{14m}{9m + 36M} = 0 \tag{31}$$

pour les coefficients β_i, γ_i, et :

$$\text{(II)} \qquad (\lambda + 1)\left(\lambda - \frac{2}{3}\right) = 0, \qquad \lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda - \frac{34m + 24M}{9m + 36M} = 0 \tag{32}$$

pour les coefficients α_i, les α_i, β_i, γ_i figurant dans les équations aux variations. Si l'on appelle par λ^{I} et λ^{II} les deux racines de l'équa-

[1] J. Chazy, *Sur certaines trajectoires du problème des n corps. Bulletin Astronomique*, t. 35, 1918.

tion (31), on constate facilement qu'elles sont négatives toutes les deux si $4M > 55m$, imaginaires et conjuguées avec une partie réelle égale à $-\frac{1}{6}$ si $4M < 55m$, et se confondent en une racine double et égale à $-\frac{1}{6}$ si $4M = 55m$. Au contraire les racines λ^{III} et λ^{IV} de l'équation (32) sont de signe contraire $\lambda^{III} > 0$ et $\lambda^{IV} < 0$ quelles que soient les valeurs des masses et le rapport entre elles. — Si l'on écarte les racines $\lambda = 0$ du groupe (I) et $\lambda = -1$ du groupe (II), les trajectoires avec choc sont représentées par des développements formés avec les racines positives $\lambda = \frac{2}{3}$, $\lambda = \lambda^{III}$

$$z = at^{\frac{2}{3}} + \alpha t^{\frac{4}{3}} + \alpha' t^{\frac{2}{3}+\lambda^{III}} + \cdots, \qquad u = 0. \tag{33}$$

Je dis que dans ce développement de z, les coefficients α et α' sont nuls. — En effet, comme $u = 0$, de l'équation des forces vives on tire :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{z}}, \qquad \text{où} \qquad A = \frac{m + 4M}{2}$$

et par intégration on obtient : $z = \left(\frac{3}{2}\sqrt{A}\right)^{2/3}(t - t_0)^{2/3}$. Le développement de z contenant donc des termes seulement en puissance $\frac{2}{3}$, on en conclut que pour que le développement (33) soit de cette dernière forme, il faut et il suffit que $\alpha' = \alpha = \ldots = 0$. Le mouvement correspondant dépend donc de deux constantes, dont l'une est la constante fixant l'origine du temps.

D'autre part, les trajectoires paraboliques sur lesquelles les trois corps s'éloignent à l'infini sont représentées par des développements formés avec les racines négatives $-\frac{1}{3}$, λ^{I}, λ^{II}, λ^{IV}, de l'équation caractéristique :

$$\left\{\begin{aligned} z &= at^{\frac{2}{3}} + \alpha^{II} t^{\frac{2}{3}+\lambda^{IV}} + \cdots \\ u &= c_1 t^{\frac{2}{3}+\lambda^{I}} + c_2 t^{\frac{2}{3}+\lambda^{II}} + \gamma t^{\frac{1}{3}} + \cdots \end{aligned}\right. \tag{34}$$

quand on a : $4M > 55m$.

Je dis que dans ces derniers développements les coefficients α^{II} et γ sont nuls. Pour démontrer cela substituons les développements (34) dans l'équation (2). Si l'on écrit seulement les termes prépondérants des puissances des développements précédents et si l'on fait passer le dénominateur du second membre de l'expression trouvée au numérateur, il vient après quelques réductions, tout calcul fait :

$$(35)\quad \left(\mathrm{H}-\frac{2}{9}\right)\gamma t^{-\frac{1}{3}}-\frac{3\alpha^{\text{II}}}{a}\mathrm{H}\left[c_1 t^{\lambda^{\text{I}}+\lambda^{\text{IV}}}+c_2 t^{\lambda^{\text{II}}+\lambda^{\text{IV}}}+\gamma t^{-\frac{1}{3}+\lambda^{\text{IV}}}+\cdots\right]-\cdots=0$$

où $\mathrm{H}=\dfrac{2m+\mathrm{M}}{a^3}$, étant donné que les coefficients des termes en $t^{\lambda^{\text{I}}}$ et en $t^{\lambda^{\text{II}}}$ sont identiquement nuls. Pour que cette équation soit vérifiée il faut et il suffit que $\gamma=\alpha^{\text{II}}=0$, puisque $\mathrm{H}-\dfrac{2}{9}$ et H sont différents de zéro. Comme d'autre part les coefficients des termes suivants de l'équation (35) se compensent mutuellement après la réduction des puissances semblables ou sont annulés par γ ou α^{II} entrant comme facteurs dans ces coefficients, on en conclut que l'équation (35) sera complètement établie si $\gamma=\alpha^{\text{II}}=0$. Par conséquent les développements (34) se réduisent à la forme :

$$(36)\qquad z=at^{\frac{2}{3}}+\cdots,\qquad u=c_1 t^{\frac{2}{3}+\lambda^{\text{I}}}+c_2 t^{\frac{2}{3}+\lambda^{\text{II}}}+\cdots$$

où l'on a écrit seulement les premiers termes. Ces trajectoires dépendent de trois paramètres, savoir de c_1, c_2, et un paramètre fixant l'origine du temps et on constate que les développements ainsi obtenus sont ceux qu'on avait obtenus en étudiant le point singulier $x=y=0$, dans le cas où il est un nœud, car on vérifie facilement que

$$\frac{2+2\mathrm{S}_1}{3}=\frac{2}{3}+\lambda^{\text{I}}\qquad\text{et que}\qquad\frac{2+2\mathrm{S}_2}{3}=\frac{2}{3}+\lambda^{\text{II}},$$

S_1 et S_2 étant les racines de l'équation caractéristique relative à ce point singulier.

Considérons maintenant le cas où $4\mathrm{M}<55m$. Les deux racines de l'équation (31) sont imaginaires et conjuguées avec une partie réelle égale à $-\dfrac{1}{6}$. Les développements (36) peuvent se mettre alors sous la forme :

$$z=at^{2/3}+\cdots,\qquad u=t^{1/2}\left[\mathrm{A}\cos(\mathrm{K}\log t)+\mathrm{B}\sin(\mathrm{K}\log t)\right]+\cdots$$

A, B et K désignant des constantes.

Si enfin $4M = 55m$, les développements des trajectoires paraboliques peuvent s'écrire :

$$z = at^{2/3} + \cdots, \qquad u = c_1 t^{1/2} + c_2 t^{1/3} \log t + \cdots$$

puisque $\lambda^{\text{I}} = \lambda^{\text{II}} = -\frac{1}{6}$. De même dans ces deux cas derniers les développements des trajectoires paraboliques, ainsi obtenus, sont identiques à ceux qu'on a trouvés, quand on a considéré particulièrement l'origine $x = y = 0$ comme point singulier des caractéristiques de l'équation (6) dans le cas d'un foyer.

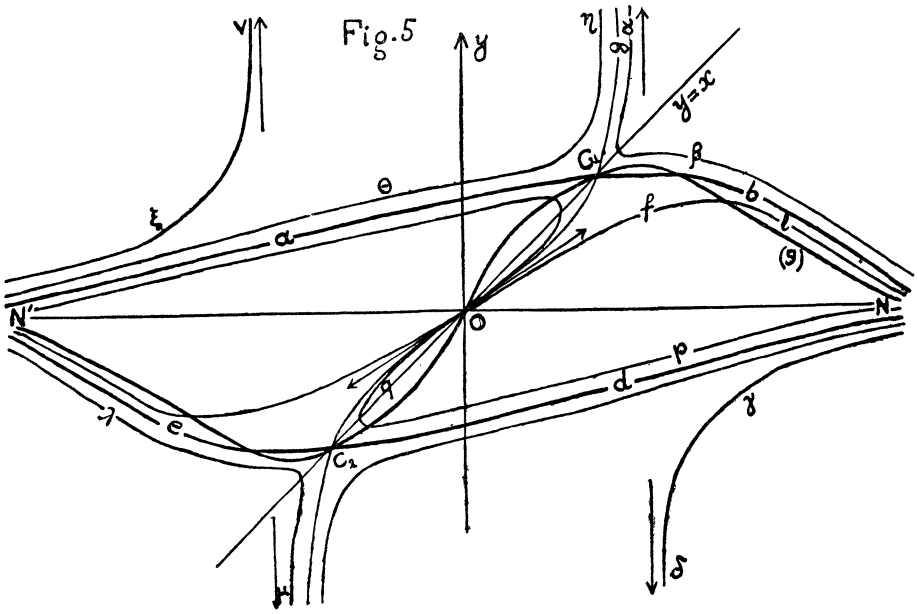
Répartition des trajectoires dans le plan. — D'après l'étude antérieure, la caractéristique parabolique passant aux deux cols symétriques C_1 et C_2, savoir aux points de coordonnées $x = y = \pm\sqrt{3}$, et aux deux nœuds symétriques $x = \pm\infty$, $y = 0$, que nous appellerons désormais par N et N^{I}, représente un mouvement parabolique à deux paramètres, satisfaisant aux équations différentielles (1), (2), et (3) où la constante des forces vives h est nulle, mouvement qui comporte comme figure-limite des trois corps le triangle équilatéral et dure de $t = -\infty$ à $t = +\infty$. Ainsi si le point mobile x, y, se trouve au col C_1 à l'instant $t = -\infty$, quand le temps croît il décrira la branche $C_1 b N$ et arrivera au col symétrique C_2 à l'instant $t = +\infty$ par la branche $N d C_2$ (fig. 5); au col C_2 le mouvement cesse. De même pour l'autre moitié symétrique $C_2 e N^{\text{I}} a C_1$ de la caractéristique parabolique, le mouvement commence à l'instant $t = -\infty$ par l'un des deux cols C_1 ou C_2 et cesse au col symétrique à l'instant $t = +\infty$, le point mobile passant à l'instant $t = 0$ par le nœud N^{I}. Il en résulte donc que la caractéristique parabolique $N^{\text{I}} a C_1 b N d C_2 e N^{\text{I}}$, sur laquelle se passe un seul choc entre les deux masses égales à chacun des deux nœuds symétriques N et N^{I}, divise le plan xoy en deux régions distinctes. Dans la région intérieure comprenant l'origine sont tracées les caractéristiques de l'équation (6) représentant les trajectoires paraboliques à trois paramètres du problème des trois corps avec figure-limite rectiligne, tandis que la région, extérieure à la région déjà considérée, est sillonnée par des caractéristiques représentant des trajectoires, sur lesquelles la distance z reste bornée et atteint

un maximum et u peut devenir un infiniment grand d'ordre 1 par rapport au temps. Ces dernières trajectoires sont appelées *hyperboliques-elliptiques*. Comme, d'autre part, les caractéristiques possèdent une branche infinie dans la direction oy et n'admettent des asymptotes, ni obliques, ni parallèles à l'axe ox, sauf cet axe même, et comme par chaque point ordinaire du plan passe une caractéristique, et une seule, une infinité d'autres se croisent à l'origine si $4M > 55m$ et aux deux nœuds symétriques N et N^1, puisque enfin par les deux cols symétriques C_1 et C_2 passent deux seulement caractéristiques holomorphes, il en résulte que les caractéristiques de l'équation (6) ont nécessairement la disposition de la figure 5.

Sur toutes ces caractéristiques le mouvement dure de $t = -\infty$ à $t = +\infty$ et dépend des conditions initiales du problème. Ainsi sur les trajectoires paraboliques le point représentatif mobile x, y, part de l'origine à l'instant $t = -\infty$, il décrit la courbe OβN aussi près que l'on veut de la caractéristique parabolique, précédemment considérée, arrive au nœud N où à l'instant $t = 0$ se produit un choc entre les deux masses égales, et par la branche NpqO arrive à l'origine, où il se trouve à l'instant $t = +\infty$ et où le mouvement cesse. Toute la région limitée par la courbe fermée OβNpq0 est sillonnée par des trajectoires de même genre, décrites dans un sens ou dans l'autre. Il en résulte que les trajectoires paraboliques à trois paramètres sont des courbes fermées, sur lesquelles se produit un choc binaire et un seul. Le mouvement est exactement pareil dans la région symétrique à la région déjà considérée, à gauche de l'axe oy.

Supposons maintenant que les conditions initiales soient telles que le point représentatif se trouve à un certain instant hors de la région, que nous venons de considérer, par exemple en α. Dans ce cas sa trajectoire sera forcément hyperbolique-elliptique. Le point mobile décrira la courbe $\alpha\beta$N, aussi près que l'on veut de la caractéristique parabolique, il arrivera au nœud N, où se produira un choc entre les deux masses égales à l'instant $t = 0$, et décrira ensuite la branche N$\gamma\delta$ pour les valeurs positives du temps. Arrivé au point δ, extrémité négative de l'asymptote ordinaire de la caractéristique considérée, le point mobile sautera à l'extrémité positive de l'asymptote, parallèle à l'axe oy, et décrira dans le même sens, comme précé-

demment, une courbe infiniment voisine à sa trajectoire précédente, à gauche de l'asymptote, et ainsi de suite. Bien entendu, chaque fois que le point mobile saute de l'extrémité négative à l'extrémité positive de l'asymptote ou inversement, suivant les conditions initiales, il décrit une nouvelle trajectoire et ne revient pas sur celle précédemment parcourue, car dans le cas contraire son mouvement serait



périodique et on sait qu'un tel mouvement ne pourrait exister, quand la constante des forces vives est nulle, d'après les travaux de M. Chazy.

Si, d'autre part, à l'instant initial du mouvement le point représentatif se trouve en un point de la caractéristique de choc gC_1OC_2, quand le temps croît ou décroît, il décrira cette caractéristique et s'arrêtera à l'un des deux cols C_1 ou C_2, où se produira un choc triple à l'instant $t = 0$, avec figure-limite le triangle équilatéral. Au contraire, si à l'instant initial le point mobile se trouve à gauche de la caractéristique de choc, en η, le mouvement dure indéfiniment et ne s'arrête pas. Il décrira forcément la courbe $\eta\theta N^1\lambda\mu$, sautera de μ en ν à gauche de l'asymptote, suivra la branche $\nu\xi N^1$ et son mouvement sera prolongé par une nouvelle trajectoire, aussi voisine, que

l'on veut, à la branche $N^{1}\nu\mu$ et ainsi de suite. Par conséquent toute la région extérieure considérée est sillonnée par une infinité de trajectoires *hyperboliques-elliptiques*, non fermées à elles-mêmes, sur lesquelles se produisent une infinité de chocs binaires.

CHAPITRE III

CONSTANTE DES FORCES VIVES POSITIVE

Supposons maintenant que la constante des forces vives h, figurant dans l'équation (3), soit différente de zéro et positive. Le problème se réduit alors à l'intégration du système différentiel (4), suivie de la quadrature, définie par l'équation (5). Nous représenterons les mouvements satisfaisant aux équations (1), (2), (3) par les courbes décrites dans l'espace à trois dimensions par un point de coordonnées x, y, z, courbes qui sont les caractéristiques du système (4). Réciproquement pour une caractéristique du système (4), on obtient de l'équation (5) une infinité de mouvements, différant l'un de l'autre par l'origine et le sens du temps. D'autre part, quand on multiplie la constante h par un facteur positif, soit μ, le système (4) et l'équation (5) ne changent pas, si l'on multiplie en même temps la distance z par le facteur $\frac{1}{\mu}$, et le temps t par le facteur $\frac{1}{\mu^{3/2}}$. Par conséquent il suffit de construire les caractéristiques du système (4) pour une valeur positive, puis pour une valeur négative de la constante h, pour en déduire l'allure de toutes les caractéristiques et de tous les mouvements correspondant aux valeurs positives ou négatives de h.

Si dans le système (4) on annule la variable z, le rapport $\frac{dz}{z}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ et en égalant les deux premiers rapports de ce système on obtient la même équation (6), qu'on avait obtenue dans le chapitre II, en annulant la constante h. Cela veut dire que

les caractéristiques précédemment tracées dans le plan xoy font partie des caractéristiques du système (4), mais, quand $h \neq 0$, ne correspond aucun mouvement à ces caractéristiques, tracées sur le plan $z = 0$. Cependant elles nous sont encore utiles pour compléter et mieux concevoir l'ensemble des caractéristiques du système (4). D'ailleurs, comme d'après l'équation des forces vives, le facteur

$$\frac{m}{2} + \frac{2M}{(1 + x^2)^{1/2}} + hz$$

ne peut être jamais négatif, il en résulte que le signe dú quotient $\frac{dy}{dx}$, tiré du système différentiel (4), ne dépend que des valeurs des deux variables x et y. Par conséquent, la courbe (9) et la bissectrice $y = x$ sont les lieux géométriques des points, où les tangentes aux projections sur le plan xoy des caractéristiques du système (4) sont parallèles à ox et à oy. En outre les pentes de ces projections sont dirigées dans le même sens que les pentes des caractéristiques tracées pour $h = 0$, mais ont des valeurs absolues d'autant moindres que z est plus grand si $h > 0$, et au contraire des valeurs absolues d'autant plus grandes que z est plus grand si $h < 0$.

Le point singulier $x = y = z = 0$. — Les trois dénominateurs des rapports (4) s'annulent à la fois, si l'on y fait $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Donc le point $x = 0$, $y = 0$ du plan xoy est un point singulier des caractéristiques du système (4), qui au voisinage de ce point peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dx}{y - x} = \frac{dy}{ax + \frac{1}{2}y + P_2(x, y, z,)} = \frac{dz}{z} \tag{37}$$

où

$$a = -\frac{4m + 2M}{m + 4M}:$$

Comme les trois racines de l'équation caractéristique du troisième degré sont les deux quantités :

$$-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{4M - 55m}{16m + 64M}}$$

et le nombre 1, il en résulte que :

1° Si l'on a $4M > 55m$, l'équation caractéristique a toutes ses racines réelles, distinctes mais non de même signe. Le point considéré est alors *un col* isolé des caractéristiques du système (4). Dans ce cas une infinité de caractéristiques situées sur la surface $z = 0$ et précédemment tracées pour $h = 0$ viennent passer par le point singulier. A ces caractéristiques ne correspond aucun mouvement pour $h \neq 0$. En outre, l'axe oz est une autre caractéristique passant par le col, à laquelle ne correspond non plus aucun mouvement.

2° Si l'on a $4M < 55\ m$, l'équation caractéristique a une racine réelle, le nombre 1, et deux autres imaginaires et conjuguées, dont la somme est de signe contraire à la racine réelle. Le point singulier est alors un *col-foyer*. Une caractéristique, savoir l'axe oz, va passer par ce point, et une infinité d'autres, tracées sur le plan $z = 0$, sont des spirales logarithmiques, tournant autour de ce point et se rapprochant asymptotiquement de l'origine. De l'équation (5) on constate immédiatement que à ces caractéristiques aussi ne correspond aucun mouvement. Les autres restent à une distance finie.

3° Si enfin $4M = 55m$, l'équation caractéristique a une racine positive égale à 1, et une autre négative et double égale à $-\frac{1}{4}$. Dans ce cas on a affaire à un point singulier isolé, qu'on appelle tantôt un *col*, tantôt un *col-foyer*. Par ce point passent aussi la caractéristique $x = 0$, $y = 0$, c'est-à-dire l'axe oz, et une infinité d'autres situées sur la surface $z = 0$. Comme on l'a déjà dit, à toutes ces caractéristiques ne correspond aucun mouvement pour $h \neq 0$.

Le col C. **Choc des trois corps.** — De même les trois dénominateurs des rapports (4) s'annulent à la fois si l'on y fait $x = \pm\sqrt{3}$, $y = \pm\sqrt{3}$, $z = 0$, où $\pm\sqrt{3}$ désigne la valeur des coordonnées x, y, du point d'intersection de la courbe (9) et de la droite $y = x$. Donc le point $x = \pm\sqrt{3}$, $y = \pm\sqrt{3}$ du plan xoy est un point singulier des caractéristiques du système (4). Considérons d'abord la valeur positive $\sqrt{3}$, et mettons ce système, au voisinage de ce point sous la forme :

$$(38) \qquad \frac{dx}{(y-\sqrt{3})-(x-\sqrt{3})} = \frac{dy}{\beta(x-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(y-\sqrt{3})+P_2(x-\sqrt{3}, y-\sqrt{3}, z)} = \frac{dz}{z}$$

où :

$$\beta = \frac{5m - 2M}{8m + 4M}.$$

L'équation caractéristique du troisième degré, relative à ce point singulier, étant :

$$(1 - S)\left[(1 + S)\left(\frac{1}{2} - S\right) + \beta\right] = 0, \tag{39}$$

on voit que toutes ses racines sont réelles, distinctes et non de même signe, deux étant positives et la troisième négative. Donc le point considéré est *un col* des caractéristiques du système (4). Etudions les caractéristiques aboutissant à ce col et situées à l'exception d'une caractéristique isolée sur une surface, mise en évidence par Poincaré [1]. D'abord le système (4), si l'on y fait $z = 0$, se réduit à l'équation (6). Deux caractéristiques de ce système sont dans le plan xoy, les deux caractéristiques holomorphes obtenues pour $h = 0$ et passant au col C, savoir la caractéristique de choc

$$z = 0, \qquad y - \sqrt{3} = (1 + S_1)(x - \sqrt{3}) + \cdots$$

et la caractéristique parabolique

$$z = 0, \qquad y - \sqrt{3} = (1 + S_2)(x - \sqrt{3}) + \cdots$$

Ces deux caractéristiques pour $h \neq 0$ ne représentent aucun mouvement.

La seconde caractéristique, correspondant pour $h = 0$ au mouvement parabolique, est pour $h \neq 0$ la caractéristique isolée, passant au col C, tandis que la première sur laquelle, pour $h = 0$, se produit le choc des trois corps est, pour $h \neq 0$, la section par le plan $z = 0$ de la surface de Poincaré, dont on peut écrire l'équation :

$$S(x - \sqrt{3}, \quad y - \sqrt{3}, \quad z) = 0 \tag{40}$$

et qui est le lieu des autres caractéristiques aboutissant au col considéré.

Sur cette surface (40) une troisième caractéristique du système (4) est la droite $x = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$, holomorphe aussi et passant au col.

[1] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, *Œuvres*, t. I.

Sur cette surface l'étude des caractéristiques aboutissant au col se ramène à une équation différentielle du premier ordre, dont l'équation caractéristique a pour racines les deux racines positives 1 et S_1 de l'équation (39). Les caractéristiques considérées sont donc représentées par les deux développements :

$$(41) \qquad x - \sqrt{3} = cz^{S_1}P(z, cz^{S_1}), \qquad y - \sqrt{3} = cz^{S_1}P(z, cz^{S_1}),$$

c désignant une constante arbitraire. On remarque que pour les valeurs des masses pour lesquelles l'exposant S_1 est entier ou est l'inverse d'un nombre entier, ces développements peuvent aboutir en des développements contenant, outre la fraction z^{S_1}, la fonction $\log z$.

Les développements (41) renferment l'expression cz^{S_1} en facteur afin de représenter pour $c = 0$ la caractéristique $x = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$. Sur les autres caractéristiques la constante c est positive ou négative mais bien déterminée pour chacune d'elles, puisque nous ne considérons de chacune que l'arc où la cote z est positive. Les mouvements correspondant à ces caractéristiques, suivies dans le sens où elles s'approchent du col C, aboutissent à un choc des trois corps. En effet, de l'équation (5) si l'on y remplace $x - \sqrt{3}$, et $y - \sqrt{3}$ par leurs développements (41) on tire :

$$\frac{dt}{dz} = z^{1/2}P(z, cz^{S_1}), \qquad \text{d'où} \qquad t = z^{3/2}P(z, cz^{S_1})$$

Donc :

$$t^{2/3} = zP(z, cz^{S_1}), \qquad \text{et} \qquad ct^{\frac{2S_1}{3}} = cz^{S_1}P(z, cz^{S_1}).$$

Ensuite par inversion :

$$z = t^{2/3}P\left(t^{2/3}, ct^{\frac{2S_1}{3}}\right), \qquad \text{et} \qquad cz^{S_1} = ct^{\frac{2S_1}{3}}P\left(t^{2/3}, ct^{\frac{2S_1}{3}}\right)$$

Par suite :

$$x = \sqrt{3} + ct^{\frac{2S_1}{3}}P\left(t^{2/3}, ct^{\frac{2S_1}{3}}\right)$$

et enfin :

$$u = xz = t^{2/3}P\left(t^{2/3}, ct^{\frac{2S_1}{3}}\right).$$

Ce sont les développements connus des distances z et u au voisinage de l'instant d'un choc des trois corps [1]. La condition d'un tel choc est donc la relation analytique (40) prolongée s'il y a lieu. Nous appellerons *surface de choc* (fig. 6) la surface définie par l'équation (40) et *caractéristiques de choc*, les caractéristiques aboutissant au col C et nécessairement situées sur la surface de choc, en excluant toutefois

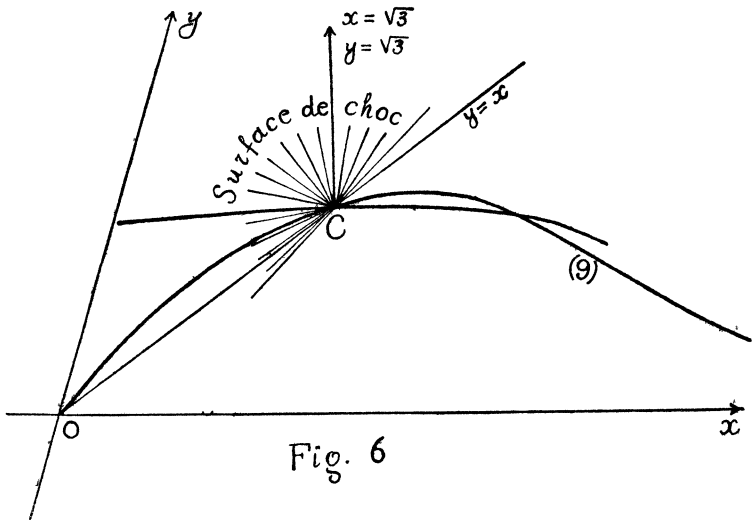


Fig. 6

la caractéristique située dans le plan $z = 0$ et qui était pour $h = 0$ la caractéristique de choc. Parmi ces caractéristiques de choc, la droite $x = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$ correspond au mouvement considéré par Lagrange dans le cas où les trois corps forment un triangle équilatéral. L'instant du choc correspondant, $t = 0$, est un instant de symétrie du mouvement, au voisinage duquel les distances z et u sont des séries entières en $t^{2/3}$, comme dans le problème des deux corps et au delà duquel le prolongement du mouvement est immédiat. Ajoutons enfin que toute l'étude précédente est aussi valable pour le point $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$, $z = 0$, le col symétrique.

Les caractéristiques du système différentiel (4) n'ont à distance finie d'autres points singuliers que les deux cols symétriques C et

[1] Jean CHAZY, *Bulletin Astronomique*, t. **35**, 1918.

le point $x = y = z = 0$. Elles en ont encore un dont l'abscisse est infiniment grande et à l'étude duquel nous passons immédiatement :

Le nœud $x = \pm\infty$, $y = 0$, $z = 0$. **Choc des deux masses égales.** — Si dans le système différentiel (4) on fait le changement de variable $x = \frac{1}{X}$, où X tend vers zéro, il vient :

$$(42)\qquad \frac{dX}{X - yX^2} = \frac{dy}{\dfrac{\left(1 + \dfrac{M}{2m+M}y^2\right)\left[y\left(\dfrac{m}{4} + \dfrac{MX^3}{(X^2+1)^{3/2}}\right) - \dfrac{2m+M}{(X^2+1)^{3/2}}X^2\right]}{\dfrac{m}{2} + \dfrac{2MX}{(X^2+1)^{1/2}} + hz}} = \frac{dz}{z}$$

Les trois dénominateurs de ce système s'annulent à la fois, si l'on y fait $X = y = z = 0$. Il s'ensuit que le point $x = \pm\infty$, $y = 0$ du plan xoy est un point singulier des caractéristiques du système (4), au voisinage duquel le système transformé (42) peut se mettre sous la forme :

$$(43)\qquad \frac{dX}{X - yX^2} = \frac{dy}{\frac{1}{2}y + P_2(X, y, z)} = \frac{dz}{z}.$$

Comme, d'autre part, l'équation caractéristique du troisième degré, relative à ce point, est $\left(S - \frac{1}{2}\right)(S - 1)^2 = 0$, il en résulte que ce point est *un nœud isolé* des caractéristiques considérées. Pour obtenir la représentation de ces caractéristiques au voisinage du point singulier mettons : $X = \omega^2$ et $z = \varphi^2$. Le système (43) peut s'écrire alors :

$$(44)\qquad \varphi\frac{d\omega}{d\varphi} = \omega - y\omega^3 \quad \text{et} \quad \varphi\frac{dy}{d\varphi} = y + P_2(\omega, y, \varphi).$$

Comme les trois racines de l'équation caractéristique relative à ce dernier système sont toutes égales à 1, il s'ensuit qu'on se trouve en présence d'un cas général d'équations différentielles, considéré par J. Horn et on sait [1] que, dans ce cas, il existe pour ces équations différentielles des intégrales holomorphes de la forme :

$$(45)\qquad \begin{cases} \omega = a\varphi + b\varphi\log\varphi + d\varphi\log^2\varphi + \cdots \\ y = \alpha\varphi + \beta\varphi\log\varphi + \gamma\varphi\log^2\varphi + \cdots \end{cases}$$

[1] *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, vol. 3, t. II, fasc. I, p. 52.

où a, b, d, ..., α, β, γ,... sont des constantes qu'on détermine par substitution de ces développements aux équations différentielles (44) et par identification des coefficients des puissances semblables. On vérifie alors facilement que, pour que les développements (45) soient les solutions holomorphes des équations différentielles considérées, il faut et il suffit que les constantes a, b, d, ... α, β, γ, ... satisfassent aux conditions suivantes :

$$a \neq 0, \quad b = d = \cdots = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta = \gamma = \cdots = 0.$$

Par conséquent les développements considérés de ω et y se réduisent à des développements ne contenant pas des termes en logarithmes, mais seulement en φ, et on peut écrire : $\omega = \varphi\, \mathrm{P}\,(\varphi)$ et $y = \varphi\, \mathrm{P}\,(\varphi)$, et en revenant aux variables X et z, on tire les développements :

$$\mathrm{X} = z\mathrm{P}(\sqrt{z}) \qquad \text{et} \qquad y^2 = z\mathrm{P}(\sqrt{z}) \tag{46}$$

qui représentent les caractéristiques considérées aboutissant au nœud. Les mouvements correspondant à ces caractéristiques, suivies vers le nœud considéré, aboutissent à un choc des deux masses égales. En effet, par substitution des développements (46) l'équation (5) donne :

$$\frac{dt}{dz} = z^{1/2}\mathrm{P}(\sqrt{z}) \qquad \text{d'où :} \qquad t = z^{3/2}\mathrm{P}(\sqrt{z}).$$

Puis par inversion on tire :

$$\sqrt{z} = t^{1/3}\mathrm{P}\left(t^{1/3}\right) \qquad \text{et} \qquad z = t^{2/3}\mathrm{P}\left(t^{1/3}\right)$$

et par conséquent on forme successivement :

$$\mathrm{X} = t^{2/3}\mathrm{P}\left(t^{1/3}\right) \qquad \text{et} \qquad u = \frac{z}{\mathrm{X}} = u_0 + t\mathrm{P}\left(t^{1/3}\right).$$

Il résulte des développements obtenus que, comme quand la constante des forces vives h est nulle, les deux masses égales se choquent à l'instant $t = 0$. Et l'on vérifie facilement qu'à l'instant du choc la distance de la troisième masse M au centre de gravité des deux autres tend à une certaine limite et que sa vitesse tend aussi à une certaine limite différente de zéro et de l'infini. Au contraire, la vitesse de chacune des deux masses égales croît indéfiniment au voisinage

de l'instant de choc pour devenir infiniment grande à l'instant $t = 0$, comme on peut constater aussi de l'équation (3) des forces vives. Les développements obtenus ci-dessus nous permettent de prolonger le mouvement au delà de l'instant de choc et de prolonger chaque arc de caractéristique aboutissant au nœud considéré par l'arc, issu du même point, et dont la projection sur le plan xoy se trouve de l'autre côté que celle de l'arc conduisant au choc par rapport à l'axe ox.

Branches infinies sur lesquelles z reste fini. — Etudions maintenant les branches infinies des caractéristiques et d'abord celles de ces branches sur lesquelles la cote z reste finie. Comme quand la constante des forces vives h est nulle, il est nécessaire que sur de telles branches infinies y tende vers l'infini quand x tend vers une valeur quelconque x_0.

Or, par le changement de variable $y = \frac{1}{Y}$, le système (4) devient :

$$(47)\quad \frac{dx}{1 - xY} = \frac{-dY}{\dfrac{\left(Y^2 + \dfrac{M}{2m + M}\right)\left[\dfrac{m}{4} + \dfrac{M}{(1 + x^2)^{3/2}} - \dfrac{2m + M}{(1 + x^2)^{3/2}} \cdot xY\right]}{\dfrac{m}{2} + \dfrac{2M}{(1 + x^2)^{1/2}} + hz}} = \frac{dz}{Yz}.$$

Supposons que la valeur de z correspondant aux valeurs $x = x_0$, $Y = 0$ soit positive et égale à z_0. Cherchons la loi du mouvement correspondant sur la caractéristique unique définie par les valeurs initiales $x = x_0$, $Y = 0$, $z = z_0$. Prenant Y comme variable indépendante on tire des équations (47) les développements :

$$x = x_0 + YP(Y) \qquad \text{et} \qquad z = z_0 + Y^2P(Y)$$

où les termes constants par lesquels commencent les deux séries entières $P(Y)$ sont négatifs mais différents l'un de l'autre.

Puis de l'équation (5) on obtient :

$$\left(\frac{dt}{dY}\right)^2 = P(Y) \qquad \text{d'où :} \qquad t = YP(Y),$$

Ensuite par inversion :

$$Y = tP(t)$$

et enfin :

$$z = z_0 + t^2 P(t).$$

Il résulte des développements précédents que, comme dans le cas où $h = 0$, quand sur une caractéristique l'ordonnée y croît indéfiniment, la cote z restant finie, cette caractéristique possède à l'infini un point ordinaire et une asymptote parallèle à oy. Le prolongement analytique de la caractéristique et du mouvement est immédiat, quand le temps croît ou décroît au delà de l'instant correspondant à la valeur infinie de y. Le signe de y change comme celui de t. Aux deux extrémités de l'asymptote le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la projection de la caractéristique sur le plan xoy est positif et la caractéristique est dans l'espace au-dessous de son asymptote, car on pourrait voir facilement que la cote z présente un maximum.

Enfin, par des procédés analogues à ceux qu'on a employés dans le chapitre précédent, on peut démontrer facilement que les caractéristiques du système différentiel (4) n'admettent pas des asymptotes obliques correspondant à des valeurs finies de z, et ne possèdent pas des branches infinies dans la direction ox, autres que celles qui ont l'axe ox lui-même comme asymptote et sur lesquelles z devient zéro à l'instant où se produit un choc entre les deux masses égales, comme on a établi précédemment.

Branches infinies sur lesquelles z tend vers l'infini. Mouvements hyperboliques. — Passons maintenant à l'étude des branches infinies des caractéristiques sur lesquelles la cote z croît indéfiniment. Il résulte immédiatement de l'équation : $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{y - x}$, que, si sur un arc de caractéristique partant d'un point à distance finie la cote z croît indéfiniment, l'intégrale $\int \frac{dx}{y - x}$ doit croître aussi indéfiniment. Or, la projection de l'arc de caractéristique considéré sur le plan xoy a même allure et des pentes de même sens que les caractéristiques, tracées précédemment pour $h = 0$ dans le même plan. Il s'ensuit qu'il est impossible que sur cet arc y tende vers l'infini en même temps que z, car l'intégrale, ci-dessus, tendrait alors vers une limite

finie. Si donc y ne devient pas infini quand z croît indéfiniment, la projection de l'arc de caractéristique considéré ne peut que tendre vers un point limite, situé nécessairement sur la bissectrice $y = x$. En second lieu, il faut, d'après le sens des pentes dans le plan xoy, que la différence $y - x$ et les deux différentielles dx et dy finissent par avoir des signes constants, et par suite aussi la différentielle dz : ainsi dz est nécessairement positif et la cote z tend vers $+\infty$, et par conséquent on peut prendre indifféremment chacune des trois variables x, y, z comme variable indépendante.

Considérons maintenant un tel arc de caractéristique sur lequel z tend vers $+\infty$, et x et y vers une même limite, soit x_0. Par la transformation $z = \frac{1}{Z}$, où Z est positif et tend vers zéro en décroissant constamment, le système différentiel (4) devient :

$$(48)\quad \frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{\dfrac{\left(1+\dfrac{M}{2m+M}y^2\right)\left[y\left(\dfrac{m}{4}+\dfrac{M}{(1+x^2)^{3/2}}\right)-\dfrac{(2m+M)x}{(1+x^2)^{3/2}}\right]Z}{h+\left(\dfrac{m}{2}+\dfrac{2M}{(1+x^2)^{1/2}}\right)Z}} = -\frac{dZ}{Z}.$$

Pour ce système la ligne $y = x$, $Z = 0$ projetée sur le plan xoy est une ligne de points singuliers. Soit N un point de coordonnées x_0, auquel aboutit la projection sur le plan xoy de l'arc considéré. Pour faciliter l'étude des caractéristiques du système (48) au voisinage des valeurs $x = x_0$, $y = x_0$, $Z = 0$, introduisons la nouvelle variable $v = x - y$. Il vient :

$$(49)\quad \frac{dv}{v + f(x_0)Z + ZP_1(Z, v, y - x_0)} = \frac{dy}{-f(x_0)Z - ZP_1(Z, v, y - x_0)} = \frac{dZ}{Z}$$

où :

$$f(x_0) = \frac{\left(1+\dfrac{M}{2m+M}x_0^2\right)\left[\dfrac{m}{4}-\dfrac{2m}{(1+x_0^2)^{3/2}}\right]x_0}{h}.$$

La quantité $f(x_0)$, si $h > 0$, est négative quand le point N est situé sur le segment OC_1, et positive quand ce point est situé sur la même bissectrice, mais au delà de C_1. Au contraire, elle est positive quand N est situé sur le segment OC_2 et négative pour toutes les autres

positions de N au delà de C_2. Enfin la quantité $f(x_0)$ s'annule dans les points O, C_1 et C_2 (fig. 7).

Par le dernier changement de variable $y + f(x_0)\,Z = Y$, on obtient un système différentiel :

$$(50) \qquad \frac{d\rho}{\rho + f(x_0)Z + ZP_1(Z, \rho, Y - x_0)} = \frac{dY}{-ZP_1(Z, \rho, Y - x_0)} = \frac{dZ}{Z}$$

où le dénominateur du rapport intermédiaire n'a plus de termes du premier degré. Comme l'équation caractéristique, relative au point x_0, donne une racine égale à zéro et les deux autres égales à l'unité il en résulte que pour le système (50) la ligne $v = 0$, $Z = 0$ est une ligne de cette sorte de points singuliers, dont l'équation caractéristique a une racine double, et qu'on fait rentrer tantôt dans les nœuds et tantôt dans les foyers. Sauf cette ligne singulière elle-même à laquelle ne correspond aucun mouvement, toutes les autres caractéristiques du système (50) aboutissant au point x_0 de cette ligne sont situées sur la surface de Poincaré.

$$Y - x_0 = ZP_1(Z, \rho).$$

Sur cette surface, l'étude de ces caractéristiques se ramène à l'étude d'une équation différentielle du premier ordre, à deux variables, dont l'équation caractéristique a pour racine double l'unité, et leur expression est donnée par un développement de la forme :

$$(51) \qquad \rho = CZ + f(x_0)Z \log Z + ZP_1(CZ, Z \log Z, Z),$$

C désignant une constante arbitraire. La seule caractéristique holomorphe est obtenue pour $C = \infty$, d'où $Z = 0, y = x_0$ et ne représente aucun mouvement. Il résulte donc des relations précédentes, que les caractéristiques considérées du système différentiel (48) dépendent d'une constante arbitraire C et peuvent être représentées par deux équations de la forme :

$$(52) \quad \begin{cases} y = Y - f(x_0)Z = x_0 - f(x_0)Z + ZP_1(CZ, Z \log Z, Z), \\ x = \rho + y = x_0 + CZ + f(x_0)\,(Z \log Z - Z) + ZP_1(CZ, Z \log Z, Z). \end{cases}$$

Si maintenant la quantité $f(x_0)$ est différente de zéro, sur toutes ces caractéristiques le quotient $\dfrac{y - x_0}{x - x_0}$ tend vers zéro, quand la projec-

tion x, y du point représentatif tend vers l'extrémité N, et la différence $y - x = -v$ finit par avoir le signe de $f(x_0)$: par suite, d'après une discussion antérieure, cette projection est située au-dessous de la droite $y = x$ de O en C_1 et au delà de C_2, tandis qu'elle est au-dessus de la même bissectrice de O en C_2 et au delà de C_1. Par conséquent, d'après le sens des pentes sur le plan xoy les projections des caractéristiques ont nécessairement la disposition de la figure 7. Remarquons aussi que le rayon de courbure en un point de la projection tend vers zéro, quand ce point tend vers l'extrémité N.

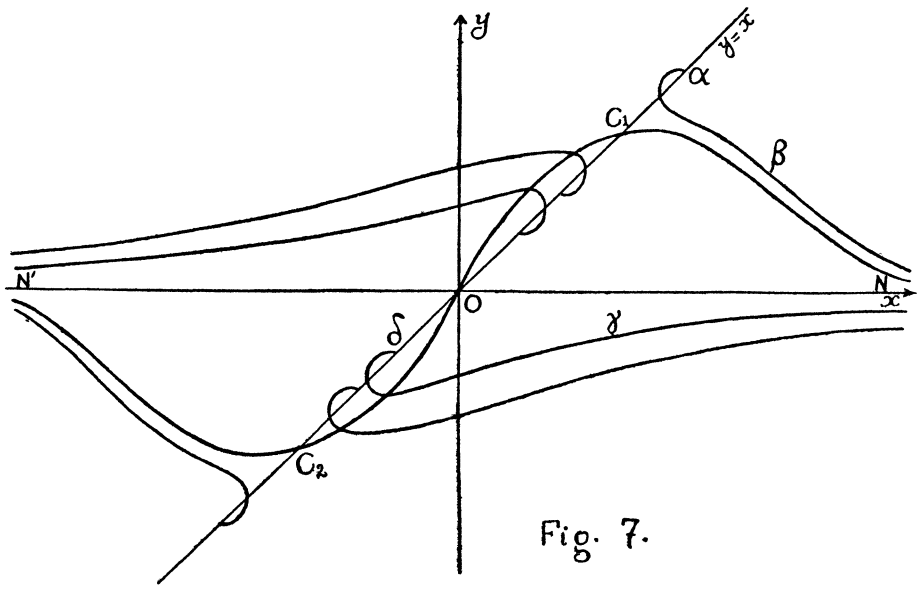


Fig. 7.

Comme, d'autre part, la quantité $f(x_0)$ s'annule en O, il résulte que pour $x_0 = 0$ les développements (51, 52) se réduisent à des développements holomorphes pour $Z = 0$

$$v = CZ + P_2(Z), \qquad y = P_2(Z) \qquad \text{et} \qquad x = CZ + P_2(Z)$$

représentant un mouvement, pendant lequel les trois corps tendent à se placer sur une ligne droite. Si le point N coïncide avec les cols symétriques C_1 et C_2, $f(x_0)$ devient aussi nulle et des équations (51) et (52) on tire les développements holomorphes pour $Z = 0$

$$v = CZ + P_2(Z), \qquad y = \pm\sqrt{3} + P_2(Z), \qquad x = \pm\sqrt{3} + CZ + P_2(Z),$$

Les projections des caractéristiques correspondantes aboutissent aux points considérés de part et d'autre de la droite $y = x$ tangentiellement à une parallèle à ox et avec un rayon de courbure quelconque, ni nul ni infini. Pour la valeur particulière $C = 0$ la caractéristique obtenue se réduit à la caractéristique $x = \pm\sqrt{3}$, $y = \pm\sqrt{3}$, représentant le mouvement obtenu par Lagrange dans le problème des trois corps formant un triangle équilatéral.

Ecartons ce mouvement, et considérons les mouvements correspondant aux caractéristiques dont nous venons de tracer les projections sur le plan xoy. Or par substitution des développements (52) dans son second membre l'équation (5), se réduit, pour $Z = 0$, à une équation de la forme :

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{1 + \frac{M}{2m + M} \cdot x_0^2}{h}$$

dont le second membre est toujours positif pour $h > 0$ et peut être égalé à 1, si l'on change au besoin les unités de longueur et de temps. Il s'ensuit que l'équation (5) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dt}{dZ} = \frac{-1 - \frac{\varphi(x_0)}{2} Z + P_2(Z, Z \log Z)}{Z^2}, \tag{53}$$

si le temps t croît avec la cote z et où :

$$\varphi(x) = -\frac{\left(1 + \frac{M}{2m + M} x^2\right)}{h} \cdot \left[\frac{m}{2} + \frac{2M}{(1 + x^2)^{3/2}}\right],$$

la fonction $\varphi(x)$ étant négative pour toute valeur de x.

L'équation (53) donne ensuite par intégration :

$$t = \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{2} Z \log Z + P_2(Z, Z \log Z)}{Z}.$$

Donc le temps t croît indéfiniment sur la caractéristique considérée avec la cote z. On tire de la dernière équation :

$$\frac{1}{t} = ZP(Z, Z \log Z)$$

et on constate que l'expression log Z figure toujours dans l'expression précédente même si x_0 est égal à $\pm\sqrt{3}$ ou à zéro, car pour ces valeurs de x_0 la quantité $\varphi(x_0)$ est en général différente de zéro. Puis successivement on forme :

$$\log t = -\log Z + P_1(Z, Z \log Z)$$

et

$$\frac{\log t}{t} = -Z \log Z P(Z, Z \log Z) + Z P_1(Z, Z \log Z).$$

On peut considérer les expressions $\frac{1}{t}$, et $\frac{\log t}{t}$, comme deux équations implicites en Z et Z log Z, et en les résolvant par rapport à ces deux variables on obtient :

$$Z = \frac{1}{t} P\left(\frac{1}{t}, \frac{\log t}{t}\right) \qquad \text{et} \qquad Z \log Z = P_1\left(\frac{1}{t}, \frac{\log t}{t}\right).$$

Par suite :

$$z = \frac{1}{Z} = tP\left(\frac{1}{t}, \frac{\log t}{t}\right)$$

et

$$u = xz = zP(Z, Z \log Z) = tP\left(\frac{1}{t}, \frac{\log t}{t}\right).$$

Il résulte de ces derniers développements que, quand sur la projection de la caractéristique considérée le point x, y s'approche de l'extrémité N, le temps croît indéfiniment et les distances u et z sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps. Nous retrouvons donc ici la représentation des coordonnées, valable dans le mouvement hyperbolique général des trois corps considéré par M. Chazy [1], qui a appelé un tel mouvement *mouvement hyperbolique* et les caractéristiques correspondant à ce mouvement *caractéristiques hyperboliques*, dont les projections aboutissent à des points d'arrêt N, situés sur toute la droite $y = x$. Les mouvements hyperboliques considérés dépendent de quatre paramètres et leur prolongement analytique au delà de la valeur infinie du temps est immédiat au moyen des expressions obtenues des distances u et z, dans lesquelles les deux séries entières P en $\frac{1}{t}$, et $\frac{\log t}{t}$, sont convergentes pour les grandes valeurs du temps.

[1] *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3e série, t. **39**, 1922, p. 44-59.

M. Chazy a considéré systématiquement un tel prolongement du mouvement et démontré que pour que les expressions de u et z conservent des valeurs réelles, il est nécessaire, arrivant au point $t = \infty$ par la partie positive de l'axe réel du plan complexe, de partir du point $t = \infty$, non pas par la partie négative de l'axe réel, mais par l'une d'entre une infinité de droites parallèles à cet axe. Comme après le prolongement du mouvement, u et z deviennent négatifs, il en résulte que les valeurs absolues de ces distances satisfont à deux équations différentielles de la forme (1) et (2), mais où les coefficients m et M sont négatifs. Donc les nouvelles trajectoires correspondent non plus à des attractions, mais à des répulsions en raison inverse du carré de la distance, et par conséquent le mouvement attractif hyperbolique admet comme prolongement analytique un mouvement répulsif correspondant à des valeurs imaginaires du temps.

Mouvements hyperboliques-paraboliques. — Il reste à étudier une classe des caractéristiques du système (4) sur lesquelles z tend vers l'infini en même temps que x et y. Or, par le changement de variables $x = \frac{1}{X}$, où X tend vers zéro, $y = wx$ et $z = vx^2$, le système dfférentiel (4) peut se mettre sous la forme :

$$(54)\quad \frac{dX}{-X+wX} = \frac{dw}{-w+w^2-\dfrac{(X^2+\alpha w^2)\left[w\left(\dfrac{m}{4}+\dfrac{MX^3}{(X^2+1)^{3/2}}\right)-\dfrac{2m+M}{(X^2+1)^{3/2}}\cdot X^3\right]}{X^2\left[\dfrac{m}{2}+\dfrac{2MX}{(X^2+1)^{1/2}}\right]+hv}} = \frac{dv}{-3v+2vw}$$

où

$$\alpha = \frac{M}{2m+M}.$$

Les trois dénominateurs de ce système s'annulent à la fois si l'on y fait : $X = 0$, $w = \frac{3}{2}$, et $v = \frac{9\alpha m}{8h}$. Donc au voisinage de ces valeurs le système considéré peut s'écrire :

$$(55)\qquad \frac{dX}{X} = \frac{dw_1}{w_1 + \beta v_1 + P_2(w_1, v_1, X)} = \frac{dv_1}{\frac{6}{\beta}w_1 + P_2(w_1, v_1)}$$

où

$$\beta = \frac{4h}{3\alpha m}, \qquad w_1 = w - \frac{3}{2}, \qquad v_1 = v - \frac{9\alpha m}{8h}.$$

Comme l'équation caractéristique du troisième degré, relative au point $X = w_1 = v_1 = 0$ est : $(S - 1)(S + 2)(S - 3) = 0$, il en résulte que ce point singulier est *un col*. Etudions les caractéristiques qui y aboutissent. Le système (55), si l'on y fait $X = 0$, se réduit à une équation du premier ordre, dont l'équation caractéristique a pour racines -2, et 3. Donc dans le plan $X = 0$, au point $w = \frac{3}{2}$, $v = \frac{9\alpha m}{8h}$ passent seulement deux caractéristiques, qui sont holomorphes et auxquelles ne correspond aucun mouvement. L'une de ces caractéristiques est nécessairement la caractéristique isolée aboutissant au col considéré, et l'autre est la section par le plan $X = 0$ de la surface de Poincaré

$$F\left(X,\ w - \frac{3}{2},\ v - \frac{9\alpha m}{8h}\right) = 0, \tag{56}$$

lieu des autres caractéristiques aboutissant à ce col. Sur cette surface l'étude de ces caractéristiques se ramène à l'étude d'une équation différentielle du premier ordre, dont l'équation caractéristique a pour racines 1 et 3. Pour étudier donc ces caractéristiques, ramenons le système (55), par les deux combinaisons :

$$\omega = \frac{3}{\beta} w_1 + v_1, \qquad \varphi = -\frac{2}{\beta} w_1 + v_1$$

à la forme canonique :

$$\frac{dX}{X} = \frac{d\omega}{3\omega + P_2(\omega, \varphi, X)} = \frac{d\varphi}{-2\varphi + P_2(\omega, \varphi, X)} \tag{57}$$

où les deux séries entières P_2, figurant aux dénominateurs du deuxième et du troisième rapport, sont différentes l'une de l'autre avec des coefficients bien déterminés et contiennent la variable X à partir de la puissance 3. — Comme, d'autre part, la surface (56) admet dans les nouvelles variables l'expression :

$$\varphi = P_2(\omega, X),$$

il en résulte que les caractéristiques considérées sur cette surface sont représentées par une équation différentielle à deux variables, satisfaisant à la condition posée précédemment, et qui par la dernière transformation : $\omega = X^2 Z$ peut s'écrire :

$$X \frac{dZ}{dX} = \frac{3\alpha(M + 20m)}{2h} X + Z + P_4(X, Z). \tag{58}$$

L'équation (58), de la forme étudiée par Briot et Bouquet, montre immédiatement que, pour X assez petit, la variable Z sera représentée par un développement non holomorphe, de la forme :

$$Z = P_1(CX, X \log X),$$

C désignant une constante arbitraire. Prenant donc X comme variable indépendante et en tenant compte des changements précédents, on parvient à représenter les caractéristiques considérées par les deux développements :

$$(59) \qquad y = \frac{P(X^3, X^3 \log X)}{X}, \qquad \text{et} \qquad z = \frac{P(X^3, X^3 \log X)}{X^2}.$$

Etudions enfin les mouvements correspondant aux caractéristiques obtenues. Si l'on substitue les développements (59) dans l'équation (5) et si l'on y fait $x = \frac{1}{X}$, on obtient :

$$\frac{dt}{dX} = \frac{P(X, X^3 \log X)}{X^4}$$

si le temps t croît avec l'abscisse x et où le terme constant de la série P du numérateur peut être égalé à 1, si l'on change au besoin les unités de longueur et de temps. De cette dernière équation on déduit:

$$t = \frac{P(X, X^3 \log X)}{X^3}$$

et immédiatement les développements :

$$\frac{1}{t} = X^3 P(X, X^3 \log X), \qquad \frac{1}{t^{1/3}} = XP(X, X^3 \log X)$$

$$\log t = -3 \log X + P_1(X, X^3 \log X),$$

d'où :

$$\frac{\log t}{t} = -X^3 \log XP(X, X^3 \log X) + X^3 P_1(X, X^3 \log X).$$

Par inversion des deux équations en $\frac{1}{t^{1/3}}$ et $\frac{\log t}{t}$, on obtient :

$$X = \frac{1}{t^{1/3}} P\left(\frac{1}{t^{1/3}}, \frac{\log t}{t}\right) \qquad \text{et} \qquad X^3 \log X = P_1\left(\frac{1}{t^{1/3}}, \frac{\log t}{t}\right)$$

d'où il vient :

$$z = \frac{v}{X^2} = t^{2/3}P\left(\frac{1}{t^{1/3}}, \frac{\log t}{t}\right) \quad \text{et} \quad u = \frac{z}{X} = tP\left(\frac{1}{t^{1/3}}, \frac{\log t}{t}\right).$$

Donc sur les caractéristiques considérées, quand le point représentatif s'approche du col considéré, le temps t croît indéfiniment, la distance entre les deux masses égales est un infiniment grand d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps et la distance de la troisième masse M au centre de gravité des deux autres est un infiniment grand d'ordre 1 M. Chazy [1] a appelé un tel mouvement, *hyperbolique-parabolique* et on retrouve ici la représentation des coordonnées, valable dans le mouvement hyperbolique-parabolique le plus général des trois corps, considéré par lui. Nous appellerons *caractéristiques hyperboliques-paraboliques* les caractéristiques que nous venons d'étudier, et *surface hyperbolique-parabolique*, la surface engendrée par ces caractéristiques et dont l'équation est la rélation :

$$F\left[\frac{1}{x}, \frac{y}{x} - \frac{3}{2}, \frac{z}{x^2} - \frac{9\alpha m}{8h}\right] = 0$$

que doivent vérifier les conditions initiales pour produire un mouvement hyperbolique-parabolique. — Les représentations obtenues donnent immédiatement le prolongement analytique des caractéristiques et des mouvements hyperboliques-paraboliques, comme les représentations des caractéristiques et des mouvements hyperboliques.

Répartition générale des trajectoires dans l'espace. — D'après les résultats obtenus dans ce chapitre, le problème plan des trois corps avec axe de symétrie admet, quand la constante des forces vives est positive, des trajectoires hyperboliques, hyperboliques-paraboliques, et une troisième sorte de trajectoires sur lesquelles z atteint un maximum et reste borné, tandis que u peut devenir infiniment grand d'ordre 1 par rapport au temps, et qu'on appelle trajectoires *hyperboliques-elliptiques*. Ainsi les résultats énoncés par M. Chazy pour le mouvement le plus général du problème des trois corps se trouvent dans notre cas

[1] (*Loc. cit.*).

particulier entièrement vérifiés. D'après la discussion antérieure, la surface hyperbolique-parabolique sépare les trajectoires hyperboliques-elliptiques et les trajectoires hyperboliques. Comme, d'autre part, les trajectoires hyperboliques correspondent aux caractéristiques dont la projection sur le plan xoy a un point d'arrêt sur la droite $y = x$, et comme de tels points d'arrêt existent sur toute la longueur de la bissectrice, il en résulte que ces trajectoires remplissent tout l'espace au-dessus du plan $z = 0$, au voisinage immédiat des trajectoires paraboliques à trois paramètres, tracées précédemment quand $h = 0$ (fig. 5), et au-dessus de la surface séparatrice hyperbolique-parabolique au-dessous de laquelle les trajectoires hyperboliques-elliptiques, forment un continuum. Donc, ces dernières trajectoires sont comprises entre la surface hyperbolique-parabolique et le plan $z = 0$, quand $h > 0$, et sont celles auxquelles correspondent les branches infinies des caractéristiques dans la direction oy, sur lesquelles la cote z reste finie. Le mouvement correspondant à ces trajectoires n'admet aucun prolongement analytique où les trajectoires soient réelles et cela que le temps reçoive des valeurs réelles ou imaginaires. D'après la discussion antérieure, effectuée dans ce chapitre, les caractéristiques représentant les trajectoires hyperboliques convergent aux nœuds symétriques $x = \pm \infty$, $y = z = 0$, et puisque la distance de la troisième masse M aux deux autres égales tend à une certaine valeur différente de zéro à l'instant de leur choc, il résulte que sur les trajectoires considérées le mouvement dure de $t = -\infty$ à $t = +\infty$. Ainsi, si le point représentatif part à l'instant $t = -\infty$ du point, dont la projection sur le plan xoy est en α, quand le temps croît, il décrira la caractéristique, dont la projection sur le même plan est $\alpha\beta N\gamma\delta$ et arrivera au point, dont la projection est δ, à l'instant $t = +\infty$, où il s'arrêtera, le mouvement n'étant pas prolongeable au delà de la valeur infinie du temps par des valeurs réelles (fig. 7). Le passage du point mobile par le nœud isolé N entraîne un choc des deux masses égales à l'instant $t = 0$. Il en résulte que sur les trajectoires hyperboliques se produit un choc binaire et un seul.

CHAPITRE IV

CONSTANTE DES FORCES VIVES NÉGATIVE

Supposons enfin que la constante des forces vives h, figurant dans l'équation (3), soit négative. De même que dans le cas où h est positif, le problème se réduit à l'intégration du système différentiel (4), suivie de la quadrature définie par l'équation (5). Si l'on regarde encore ici x, y, z, comme les coordonnées d'un point dans l'espace à trois dimensions, on constate que les caractéristiques du système (4) admettent, comme dans le cas précédent, le point $x = y = z = 0$ comme *col isolé* quand on a $4M > 55m$, comme *col-foyer* si $4M < 55m$, et tantôt comme *col*, tantôt comme *col-foyer* si $4M = 55m$. Elles admettent aussi le point $x = y = \pm\sqrt{3}$, $z = 0$ comme *col* et le passage d'une caractéristique par ce col conduit à un choc des trois corps. Cette caractéristique est nécessairement située sur la surface de Poincaré, dont l'équation est aussi la condition de choc. Le même système (4) admet le point $x = \pm\infty$, $y = z = 0$ comme *nœud isolé* de ses caractéristiques et le passage d'une caractéristique par ce point singulier conduit à un choc des deux masses égales. Enfin pour $h < 0$, comme pour $h > 0$, les caractéristiques possèdent des branches infinies dans la direction oy correspondant à des maxima de la distance z.

Au contraire, les caractéristiques n'admettent pas des branches infinies parallèles à oz et conduisant à des mouvements hyperboliques ou hyperboliques-paraboliques. En effet, d'après l'équation des forces vives (3), l'expression qui figure dans son second membre ne peut devenir négative au cours d'un mouvement, et si cette expression

s'annule, les deux vitesses $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$ sont nulles aussi. Or, quand h était nul ou positif, le second membre de l'équation des forces vives était, en fonction de z, essentiellement positif quel que soit z ; au contraire, quand h est négatif, le même second membre peut s'annuler et devenir négatif si z est assez grand. Telle est la circonstance qui empêche l'existence de caractéristiques hyperboliques et hyperboliques-paraboliques et qui fait introduire, d'autre part, de nouveaux points singuliers des caractéristiques et des mouvements d'allure nouvelle.

Le cylindre de vitesse nulle. Mouvements avec instants de vitesse nulle et rebroussement. — Ainsi, il résulte de l'équation des forces vives que les caractéristiques ne peuvent avoir de points au-dessus de la surface :

$$z = -\frac{m}{2h} - \frac{2M}{h(1+x^2)^{1/2}}, \tag{60}$$

qui est la surface de vitesse nulle correspondant à la valeur de h considérée. On appelle cette surface *cylindre de vitesse nulle*, car c'est un cylindre de génératrices parallèles à oy. Dans l'intervalle la cote z présente un maximum pour $x = 0$, c'est-à-dire pour la valeur de l'abscisse du point d'intersection de la courbe (9) avec l'axe ox et elle reste toujours positive pour $h < 0$, ne pouvant devenir, ni zéro pour des valeurs finies de h, ni infini pour des valeurs réelles de x.

Considérons maintenant un point du cylindre de vitesse nulle, de coordonnées x_0, y_0, z_0, dont x_0 et z_0 vérifient l'équation (60). En prenant y comme variable indépendante, on voit que les valeurs initiales x_0, y_0, z_0 déterminent une caractéristique unique du système différentiel (4), qui se réduit à la droite $x = x_0$, $z = z_0$, excepté si la quantité

$$y_0\left(\frac{m}{4} + \frac{M}{(1+x_0^2)^{3/2}}\right) - \frac{2m+M}{(1+x_0^2)^{3/2}}\,x_0$$

est nulle. Et le résultat subsiste pour le système transformé du système (4), qui par le changement de variable $y = \frac{1}{Y}$ se présente sous la forme (47) et pour les valeurs initiales $x = x_0$, $Y = 0$, $z = z_0$. Il en résulte que les génératrices rectilignes du cylindre de vitesse nulle

sont des caractéristiques particulières, auxquelles ne correspond d'ailleurs aucun mouvement, et la courbe d'intersection du cylindre de vitesse nulle et du cylindre de génératrices parallèles à oz et dont la base dans le plan xoy est la courbe représentée par l'équation (9) et tracée dans le cas où $h = 0$, est une ligne de points singuliers.

Etudions les caractéristiques au voisinage d'un point de cette ligne. Par le changement de variables :

$$(61)\quad y = \frac{(8m + 4\mathrm{M})x}{m(1 + x^2)^{3/2} + 4\mathrm{M}} + \mathrm{Y}, \qquad z = -\frac{m(1 + x^2)^{1/2} + 4\mathrm{M}}{2h(1 + x^2)^{1/2}} - \mathrm{Z}$$

le système (4) devient :

$$(62)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{\left[\frac{\psi(x)}{\sigma(x)} - \mathrm{Y}\right]\mathrm{Z}} &= \frac{d\mathrm{Y}}{\left[1 + \frac{4\mathrm{M}}{\gamma}(\theta(x) + \mathrm{Y})^2\right]\frac{\sigma(x)\cdot\mathrm{Y}}{4h(1 + x^2)^{3/2}} - \theta'(x)\left[\frac{\psi(x)}{\sigma(x)} - \mathrm{Y}\right]\mathrm{Z}} \\ &= \frac{d\mathrm{Z}}{\left[\varphi(x)\frac{\psi(x)}{\sigma(x)} - f(x) - \varphi(x)\mathrm{Y} - \mathrm{Z}\right]\mathrm{Z}} \end{aligned} \right.$$

où :

$$\psi(x) = [m(1 + x^2)^{3/2} - 8m]x, \qquad \sigma(x) = m(1 + x^2)^{3/2} + 4\mathrm{M}, \qquad \gamma = 8m + 4\mathrm{M}$$

$$\theta(x) = \frac{\gamma x}{\sigma(x)}, \qquad \varphi(x) = \frac{2\mathrm{M}x}{h(1 + x^2)^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad f(x) = \frac{m}{2h} + \frac{2\mathrm{M}}{h(1 + x^2)^{1/2}}$$

Nous pouvons définir le point considéré sur l'intersection des deux cylindres par son abscisse x_0 ou encore par sa projection Q sur le plan xoy, projection située sur la courbe (9). Comme l'une des trois racines de l'équation caractéristique du système (62), relative au point x_0, est égale à zéro, et les deux autres sont les quantités :

$$\mathrm{S}_2 = \frac{4\mathrm{M}\gamma x_0^2 + \sigma^2(x_0)}{4h\sigma(x_0)\,(1 + x_0^2)^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_3 = -\frac{4\mathrm{M}\gamma x_0^2 + \sigma^2(x_0)}{2h\sigma(x_0)\,(1 + x_0^2)^{3/2}}$$

qui sont continues le long de la courbe (9), de signe contraire et l'une double de l'autre, il en résulte que la ligne $y = 0$, $z = 0$ d'intersection des deux cylindres est une *ligne de cols* pour le système des caractéristiques.

Par tout point x_0 de cette ligne passent, outre la ligne elle-même, deux caractéristiques holomorphes. L'une est évidemment la généra-

trice du cylindre de vitesse nulle, représentée par les équations $x = x_0$, $Z = 0$. Puisque la seconde caractéristique holomorphe ne peut être tangente au plan $Z = 0$, qui contient à la fois la première et la ligne singulière, sur cette caractéristique x et y sont des fonctions holomorphes de Z. Prenant donc Z comme variable indépendante, mettons le système (62) sous la forme :

$$\frac{dx}{dZ} = \lambda(x_0) + P_1(x - x_0, Y, Z)$$

$$Z\frac{dY}{dZ} = \left[-\frac{1}{2} + P_1(x - x_0, Y, Z)\right]Y + [q(x_0) + P_1(x - x_0, Y, Z)]Z$$

où :

$$\lambda(x) = \frac{\psi(x)}{S_3\sigma(x)} \qquad \text{et} \qquad q(x) = -\theta'(x)\cdot\lambda(x).$$

Par conséquent la troisième caractéristique passant au point x_0 est représentée par deux développements de la forme :

$$(63) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_0)Z + ZP_1(Z) \\ Y = \frac{2}{3}\, q(x_0)Z + ZP_1(Z) \end{cases}$$

où la variable Z prend seulement des valeurs positives. On constate facilement que la fonction $\lambda(x)$ s'annule pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{3}$ et a le signe de la fonction $\psi(x)$, puisque le dénominateur $S_3\sigma(x)$ est positif pour toutes les valeurs de $x$et pour $h < 0$. Ainsi la fonction $\lambda(x)$ est négative dans les intervalles $0 < x < \sqrt{3}$ et $-\sqrt{3} > x > -\infty$, et positive dans les intervalles $\sqrt{3} < x < +\infty$ et $0 > x > -\sqrt{3}$. Au contraire le signe de la fonction $q(x)$ dépend non seulement de la position du point considéré, mais aussi du rapport entre les masses m et M, sauf seulement dans le cas où x est compris dans l'intervalle $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour lequel $q(x)$ est positif quel que soit le rapport des masses. Donc d'après cette discussion, la projection de l'arc de caractéristique obtenu, aboutit au point Q au-dessus de la courbe (9) de l'origine jusqu'au point ayant comme abscisse $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et au-dessous de la même courbe de l'origine jusqu'au point symértuique dont l'abscisse est $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. En dehors de cet intervalle on ne peut

pas préciser si la projection de l'arc considéré aboutit au-dessus ou au-dessous de la courbe (9) sans savoir quel est le rapport entre les masses et par conséquent quel est le signe de la fonction $q(x)$. Quand le point Q varie le long de la courbe (9), les arcs des caractéristiques obtenues, engendrent une surface analytique :

$$F(x, Y, Z) = 0,$$

dont l'équation résulte de l'élimination de x_0 entre les deux développements (63), et sur laquelle on doit considérer de même seulement la région $Z \geqq 0$.

Dans le cas où la projection Q vient à l'origine, soit $x_0 = 0$, le système (62)peut s'écrire :

$$\frac{dx}{ZP_1(x, Y)} = \frac{dY}{Y[\beta + P_2(x, Y)] + ZP_1(x, Y)} = \frac{dZ}{Z[-2\beta + P_3(x, Y, Z)]}$$

où

$$\beta = \frac{m + 4M}{4h}.$$

Le point $x = 0$, $Y = Z = 0$ est encore *un col* ; les deux caractéristiques passant à ce point, outre la ligne de cols elle-même, sont la génératrice du cylindre de vitesse nulle $x = 0$, $Z = 0$ et la génératrice représentée par les équations (63) après passage à la limite, qui se réduit à $x = 0$, $y = 0$ et ne représente aucun mouvement. Si d'autre part la projection du point considéré sur le plan xoy vient au col C, on a : $x_0 = \pm\sqrt{3}$, et la troisième caractéristique se réduit évidemment d'après les mêmes développements (63), à $x = \pm\sqrt{3}$, $y = \pm\sqrt{3}$; le mouvement correspondant est le mouvement considéré par Lagrange dans le triangle équilatéral des trois corps. — Remarquons enfin que la troisième caractéristique cesse d'être holomorphe quand $x_0 = \pm\infty$, comme on peut s'en rendre compte immédiatement.

Etudions maintenant les mouvements correspondant aux autres positions du point Q à distance finie. Par substitution des développements (63) et en tenant compte des changements de variables (61), on obtient de l'équation (5) :

$$\frac{dt}{dZ} = \frac{P(Z)}{\sqrt{Z}}$$

d'où l'on déduit :

$$t = \sqrt{Z}P(Z) \qquad \text{et} \qquad t^2 = ZP(Z).$$

Puis par inversion on tire :

$$Z = t^2P(t^2)$$

et enfin on forme :

$$x = x_0 + t^2P(t^2) \qquad \text{et} \qquad Y = t^2P(t^2).$$

Donc la valeur $Z = 0$ et le point Q correspondent à une valeur finie du temps $t = 0$.

Il résulte de ces derniers développements que les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ et par conséquent les deux vitesses $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{du}{dt} = y\frac{dz}{dt}$ s'annulent à l'instant $t = 0$, comme il est nécessaire d'après le théorème des forces vives. Le prolongement du mouvement considéré au delà de l'instant $t = 0$ est immédiat. Ainsi quand le temps continue à varier dans le même sens, la variable Z ne peut devenir négative, mais reprend les valeurs positives en sens inverse. La forme des développements obtenus montre que, à deux valeurs de t égales et de signes contraires, correspondent les mêmes valeurs de x, Y, Z et par conséquent des distances u et z. Il y a donc symétrie du mouvement par rapport à l'instant $t = 0$ et le point représentatif rebrousse chemin lui aussi et décrit la même caractéristique en sens inverse.

On appelle la surface engendrée par les caractéristiques que nous venons d'étudier, *surface des caractéristiques avec instants de vitesse nulle*, dont l'équation peut s'écrire :

$$F\left[x, y - \frac{(8m + 4M)x}{m(1 + x^2)^{3/2} + 4M}, -\frac{m}{2h} - \frac{2M}{h(1 + x^2)^{1/2}} - Z\right] = 0,$$

prolongée analytiquement dans tout l'espace :

$$-\infty < x < +\infty, \qquad 0 \leqq z \leqq -\frac{m}{2h} - \frac{2M}{h(1 + x^2)^{1/2}}.$$

Disposition des trajectoires dans la région $h < 0$. — M. Chazy [1] dans ses travaux a considéré systématiquement la forme de la fonction I,

[1] Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps, quand le temps croît indéfiniment. *An. Ec. Norm.* (3), **39**, 1922.

définissant le moment d'inertie des trois corps par rapport au centre de gravité commun, et démontré rigoureusement que dans le mouvement le plus général et dans le cas, où la constante des forces vives h est négative, le problème des trois corps admet des mouvements hyperboliques-elliptiques et paraboliques-elliptiques quand la fonction I tend vers $+\infty$, et des trajectoires bornées et oscillantes, quand I est bornée, ou tantôt bornée, tantôt infiniment grande. — Il a appelé trajectoires *hyperboliques-elliptiques* les trajectoires correspondant aux mouvements, où l'une des trois distances mutuelles reste bornée, tandis que les deux autres deviennent des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps, et trajectoires *paraboliques-elliptiques* les trajectoires sur lesquelles l'une des trois distances mutuelle reste aussi bornée, tandis que les deux autres sont des infiniment grands d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps. — Ses résultats, établis pour le mouvement le plus général des trois corps, sont entièrement vérifiés dans notre cas particulier, car on peut établir aisément si $h < 0$ et si la fonction :

$$\text{(64)} \qquad \mathrm{I} = 2mz^2 + \frac{2m\mathrm{M}}{2m + \mathrm{M}} u^2$$

tend vers $+\infty$, que le mouvement est hyperbolique-elliptique dans le cas où la limite commune de la dérivée u' et du quotient $\frac{u}{t}$ est positive, et parabolique-elliptique dans le cas où cette limite est nulle.

Considérons maintenant une trajectoire *hyperbolique-elliptique*, décrite dans l'espace à quatre dimensions par un point de coordonnées z, u, z', u', quand le temps varie, sur laquelle la constante des forces vives est négative ou nulle, et supposons que sur cette trajectoire la masse M s'éloigne indéfiniment des deux autres, quand le temps croît indéfiniment. D'après les notations précédentes, comme z est borné et u un infiniment grand d'ordre 1 par rapport au temps, on peut développer la fonction $(z^2 + u^2)^{-3/2}$ suivant les puissances croissantes du quotient $\frac{z}{u}$ et en négligeant les termes de ce développement à partir du cinquième, comme infiniment petits, mettre l'équation (2) sous la forme :

$$\text{(65)} \qquad u'' = -\frac{2m + \mathrm{M}}{u^2}\left(1 + \frac{\delta}{u^2}\right),$$

δ désignant une quantité bornée supérieurement. De cette équation il résulte que la dérivée première u' finit par décroître et par conséquent par tendre vers une limite finie, positive ou nulle. Si cette limite était nulle, on déduirait de l'équation (65) une relation de la forme

$$u = \left[\frac{9}{2}(2m + \mathrm{M})\right]^{1/3} t^{2/3} + \cdots$$

et on en concluerait que la trajectoire correspondante serait *parabolique-elliptique*. Donc, sur la trajectoire considérée la dérivée u' tend vers une limite positive finie, soit μ, et le quotient $\frac{u}{t}$ tend nécessairement vers la même limite. Supposons aussi que sur la même trajectoire, pour les valeurs assez grandes du temps, soit $t \geqq t_1$, la dérivée u' soit supérieure à la quantité $\frac{4\mu}{5}$ et que la distance u soit supérieure à toute longueur L, fixée d'avance. Par suite pour $t = t_1$, la valeur de la dérivée u', soit u'_1, est au moins supérieure à $\frac{3\mu}{5}$, la distance correspondante $u_1 > \mathrm{L}$, et la distance entre les deux masses égales, $r = 2z$, est bornée sur toute trajectoire T, définie par des conditions initiales assez voisines à l'instant initial t_0 : car la continuité est assurée pour tout intervalle de temps fini.

Suivons donc le mouvement sur une telle trajectoire T, à partir de l'instant t_1, tant que $u' > \frac{\mu}{5}$ et $u > \mathrm{L}$. De l'équation des forces vives on tire l'inégalité :

$$\frac{m}{2z} + \frac{2\mathrm{M}}{(z^2 + u^2)^{1/2}} > \frac{\mathrm{M}}{2m + \mathrm{M}} \frac{\mu^2}{50}, \tag{66}$$

si $h \leqq 0$ sur la trajectoire considérée, ou s'il est positif, pourvu qu'il soit inférieur au second membre de cette inégalité. Par suite, à l'instant t_1, le second terme de l'inégalité précédente étant arbitrairement petit, si la longueur L a été choisie assez grande, on en déduit que la distance $r = 2z$ est inférieure à une longueur fixe et que le terme $\frac{m}{2z}$ est borné inférieurement au même instant. Comme ces conditions existent à l'instant t_1 et ne pourraient cesser dans le mouvement considéré que, s'il y avait échange de l'ordre de grandeur de la dis-

tance r et de l'une des deux autres distances mutuelles R et par conséquent, si les trois distances mutuelles devenaient bornées, d'après l'inégalité (66), et comme d'autre part cela est impossible, puisque $u > \mathrm{L}$ et si L a été choisi très grand, il en résulte que, tant que $u' > \frac{\mu}{5}$, la distance r est bornée. Puis en multipliant par $2u'$ l'équation (65), on tire par intégration dans l'intervalle de t_1 à $t (t_1 < t)$ et par application de la formule de la moyenne :

$$u'^2 - u_1'^2 = (4m + 2\mathrm{M}) \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_1}\right)\left[1 + \frac{\varepsilon}{u_1^2}\right],$$

ε désignant une quantité bornée. On peut, d'après cette équation, rendre u' aussi voisin que l'on veut de la valeur u'_1, supérieure à $\frac{3\mu}{5}$, si l'on retarde au besoin l'instant t_1 pour augmenter la distance u_1, et remplacer la trajectoire T par une autre plus voisine de la trajectoire primitive, et par conséquent en déduire l'inégalité : $u' > \frac{2\mu}{5}$. Donc, sur la trajectoire T, à partir de l'instant t_1, tant que $u' > \frac{\mu}{5}$, il est supérieur aussi à $\frac{2\mu}{5}$ et reste positif, quand le temps croît indéfiniment, ne pouvant franchir la valeur $\frac{2\mu}{5}$. D'autre part, puisque d'après l'équation (65) $u'' < 0$, u' tend nécessairement vers une limite positive finie, le quotient $\frac{u}{t}$ tend vers la même limite, et par conséquent la trajectoire T est une trajectoire *hyperbolique-elliptique*, sur laquelle c'est la masse M qui s'éloigne indéfiniment des deux autres, comme sur la trajectoire primitive : d'où la conclusion : *Dans l'espace à quatre dimensions les trajectoires hyperboliques-elliptiques forment un continuum où c'est toujours la même masse* M *qui s'éloigne indéfiniment des deux autres, quand* $h \leqq 0$.

Dans la région intérieure $h < 0$ la frontière de ce continuum est évidemment constituée par des trajectoires particulières, sur lesquelles, pour les valeurs assez grandes du temps, la dérivée u' est positive ou nulle, puisque sa valeur est aussi voisine, que l'on veut, des valeurs positives, correspondant aux trajectoires hyperboliques-

elliptiques voisines. Donc sur chacune de ces trajectoires particulières la distance u finit par être croissante et est arbitrairement grande pour les valeurs assez grandes du temps, tandis que la ditance z reste bornée, puisque z et u ne peuvent être à la fois arbitrairement grands, quand $h<0$, d'après l'équation des forces vives. L'équation (2) pouvant se mettre encore sous la forme (65), on en déduit facilement que u', sur une telle trajectoire particulière, tend nécessairement vers zéro, et que la trajectoire considérée est une trajectoire *parabolique-elliptique*, où c'est aussi la masse M qui s'éloigne indéfiniment des deux autres : d'où la conclusion suivante : *Dans la région $h<0$ la frontière du continuum unique des trajectoires hyperboliques-elliptiques est formée de trajectoires paraboliques-elliptiques de la même classe, qui engendrent une surface analytique, qu'on appelle surface parabolique-elliptique.*

Pour démontrer maintenant qu'une trajectoire hyperbolique-elliptique est de la même sorte, quand le temps croît indéfiniment par valeurs positives ou négatives, à moins qu'elle n'aboutisse à un choc des trois corps, et, par conséquent, que le mouvement sur cette trajectoire puisse être continué indéfiniment, écrivons les équations du mouvement sous la forme :

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dz}{dt}=z', \qquad \frac{du}{dt}=u' \\ &\frac{dz'}{dt}=-\frac{m}{4z^2}-\frac{Mz}{(z^2+u^2)^{3/2}}, \qquad \frac{du'}{dt}=-\frac{2m+M}{(z^2+u^2)^{3/2}}u. \end{aligned}\right.$$

Ce système admet comme dernier multiplicateur l'unité et, par conséquent, comme invariant intégral, l'expression :

$$I_1=\int dz\,du\,dz'du'.$$

Considérons dans la région $h<0$ un faisceau de trajectoires, sur lesquelles ne se passe aucun choc triple, et supposons que ces trajectoires, suivies dans un même sens, soient toutes des trajectoires bornées, c'est-à-dire sur lesquelles les distances z et u sont bornées. D'après l'équation des forces vives (3), quand z et u sont supérieurs à une longueur fixe, les deux vitesses z' et u' sont bornées aussi. On en conclut que le faisceau considéré ne quitte pas dans l'espace

à quatre dimensions une région finie, et l'intégrale I_1, étendue à cette région, est finie.

Supposons, au contraire, que sur le faisceau considéré z et u ne sont pas supérieurs à une longueur fixe. Comme on a écarté la possibilité d'un choc des trois corps, il résulte que, si sur les trajectoires considérées une des trois distances mutuelles s'annule, c'est toujours la distance entre les deux masses égales, $r = 2z$, qui devient nulle dans notre problème, mais quand le temps croît indéfiniment, r aussi ne peut s'annuler d'après un théorème de M. CHAZY. Considérons donc que pendant des intervalles de temps successifs r, et par suite z, s'annule ou devient arbitrairement petit. Il est clair que la fonction I, définie par l'équation (64), est bornée pendant ces intervalles, ne peut s'annuler, et par conséquent tend, quand le temps croît indéfiniment, vers une limite inférieure à une quantité donnée ; puisque d'autre part les deux autres distances mutuelles $(z^2 + u^2)^{1/2}$ sont supérieures à zéro, il résulte d'une proposition de M. CHAZY et de M. SUNDMAN que la vitesse de la masse M est bornée. Par suite, de l'équation des forces vives on peut tirer une égalité de la forme

$$zz'^2 = b, \qquad \text{d'où} \qquad z' = \frac{b}{\sqrt{z}},$$

b désignant une quantité bornée supérieurement. Dans ce cas, le faisceau de trajectoires considéré occupe une région infinie de l'espace à quatre dimensions, mais l'intégrale I_1, étendue à cette région, conserve encore une valeur finie. En effet, en écrivant cette intégrale sous la forme :

$$I_1 = \int du\,du' \int dz \int dz'$$

on voit que la première intégrale a une valeur de la forme $\frac{b}{z^{1/2}}$ et que la deuxième :

$$\int \frac{b\,dz}{z^{1/2}}$$

a d'après une règle classique une valeur finie. Comme enfin u et u' sont bornés, l'intégrale I_1 est elle aussi finie. Au contraire cette inté-

grale, étendue sur une région occupée exclusivement par des trajectoires hyperboliques-elliptiques, sur lesquelles u est un infiniment grand, devient infiniment grande.

Supposons maintenant qu'il existe un faisceau de trajectoires, qui soient hyperboliques-elliptiques dans un sens, disons dans le passé, et sur lesquelles les trois distances mutuelles soient bornées dans l'autre sens, disons dans le futur, et considérons dans ce faisceau une surface de section S_0. Au bout d'un intervalle de temps T, les points de la surface S_0 occuperont une autre surface S_1 ; si l'on considère le continuum limité par ces deux surfaces S_0, S_1, on aura deux suites infinies, l'une le long des trajectoires hyperboliques-elliptiques, l'autre le long des trajectoires bornées considérées, suites formées par les antécédents et conséquents successifs de ce continuum au bout des intervalles $\pm$ T, $\pm$ 2T,... Si l'on assimile le mouvement sur ces trajectoires, dans l'espace à quatre dimensions, au mouvement d'un fluide, comme l'a fait Poincaré, on voit qu'une quantité de fluide, dont le volume dans l'espace considéré, volume exprimé par l'intégrale I_1 correspondante, est aussi grand que l'on veut, devrait pénétrer dans une région de volume fini, puisque l'intégrale I_1, étendue à la région occupée par un faisceau de trajectoires bornées, a en général une valeur finie. De cette contradiction on tire la conclusion suivante :

Les trajectoires qui, dans la région $h < 0$, suivies dans un sens sont hyperboliques-elliptiques, sont aussi hyperboliques-elliptiques et toujours d'une seule classe dans le sens opposé.

On aboutit au même résultat, si l'on suppose que le faisceau de trajectoires, précédemment considéré dans la région $h < 0$, se compose dans un même sens de trajectoires oscillantes ou de trajectoires formant un mélange de trajectoires bornées et de trajectoires oscillantes. En effet, supposons que pendant des intervalles de temps successifs la distance z reste toujours bornée et que la masse M s'éloigne indéfiniment des deux autres masses égales, et puis se rapproche d'elles sans se choquer avec elles et ainsi de suite. Il est clair que la vitesse de la masse M est alors bornée. Si l'on considère que, pendant un intervalle quelconque, la distance u soit supérieure à une longueur fixe L, et si cette longueur L est assez grande, on peut mettre encore

l'équation (2) sous la forme (65) et en déduire une relation de la forme : $u' = \frac{b}{\sqrt{u}}$, où b représente une quantité bornée supérieurement.

En écrivant ensuite l'intégrale I_1, sous la forme :

$$I_1 = \int du \int du' \int dz \int dz'$$

on constate que le résultat des deux premières intégrations est borné, même dans le cas, où les deux masses égales se choquent, et que la dernière intégrale $\int du$ est de la forme : $b \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2b\sqrt{u}$ et par conséquent a une valeur infinie dans le domaine d'intégration. Donc, dans ce cas l'intégrale I_1 est infinie. Mais si l'on considère une fonction quelconque N de quatre variables z, u, z', u', et une nouvelle variable φ, telle que $d\varphi = N dt$, le système (67) transformé par l'introduction de cette nouvelle variable φ, admettra l'invariant intégral

$$I_2 = \int N dz' du dz' du'.$$

Si l'on pose enfin $N = \frac{1}{I^k}$, où I est la fonction définie par l'équation (64), on constate que la nouvelle intégrale I_2, ainsi formée, a une valeur finie dans tous les cas précédents, où l'intégrale I_1 a elle-même une valeur finie. En effet, comme on a écarté le cas d'un choc triple, la fonction I est supérieure à une quantité fixe et positive. En outre, si dans l'intégrale I_1 on multiplie par $\frac{1}{I^k}$, l'élément de l'intégrale en dz, la valeur de cette intégrale, d'après la formule de la moyenne, est multipliée par $\frac{1}{I^k}$, où figure une valeur moyenne $\overline{z}_m$ de la variable z, valeur moyenne qui est bornée. Ainsi on arrive à une intégrale de la forme :

$$b \int \frac{du}{u^{1/2}\left[2m\overline{z}_m^2 + \frac{2mM}{2m+M} u^2\right]^k}$$

qui, étendue à un domaine d'intégration infini, a une valeur finie, si l'exposant $k > \frac{1}{4}$. Il en résulte que dans ce second cas on peut

former un invariant intégral, qui, étendu à la région occupée par un faisceau de trajectoires bornées ou oscillantes, conserve une valeur finie, et par conséquent de l'existence d'un tel invariant intégral fini établir, d'après un raisonnement, bien connu, de Poincaré, *qu'il ne peut exister de faisceau où les trajectoires soient hyperboliques-elliptiques dans un sens, et bornées ou oscillantes dans le sens opposé.*

CHAPITRE V

RÉGULARISATION DU MOUVEMENT

Mettons enfin les équations différentielles de notre problème sous la forme canonique régulière au voisinage d'un choc entre les deux masses égales.

Comme les liaisons sont indépendantes du temps, dans le problème considéré, on aura la fonction caractéristique :

$$H = \frac{P_1^2}{4m} + \frac{(2m + M)P_2^2}{4mM} - \frac{m^2}{2z} - \frac{2mM}{(z^2 + u^2)^{1/2}} = h \tag{68}$$

où l'on a mis :

$$P_1 = 2mz' \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{2mM}{2m + M} u'.$$

Introduisons ensuite les transformations suivantes, analogues à celles de M. Levi-Civita :

$$dt = z d\tau, \quad \text{où} \quad \tau = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0, \quad z = \xi\omega^2, \quad P_1 = \frac{1}{\omega} \quad \text{et} \quad zP_1^2 = \xi.$$

Puis en tenant compte des équations (68) on forme la nouvelle fonction caractéristique :

$$H' = z(H - h) = 0$$

ou :

$$H' = -\frac{m^2}{2} + \frac{\xi}{4m} + \xi\omega^2\left[\frac{2m + M}{4mM} P_2^2 - \frac{2mM}{(\xi^2\omega^4 + u^2)^{1/2}} - h\right] \tag{69}$$

et on écrit les équations canoniques :

$$(70)\quad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{d\tau} = \dfrac{1}{4m} + \omega^2 \left[\dfrac{2m + M}{4mM} P_2^2 - \dfrac{2mMu^2}{(\xi^2\omega^4 + u^2)^{3/2}} - h \right] \\ \dfrac{d\xi}{d\tau} = -2\xi\omega \left[\dfrac{2m + M}{4mM} P_2^2 - \dfrac{2mMu^2}{(\xi^2\omega^4 + u^2)^{3/2}} - h \right] \\ \dfrac{du}{d\tau} = \dfrac{2m + M}{2mM} P_2 \xi\omega^2 \\ \dfrac{dP_2}{d\tau} = -\dfrac{2mM}{(\xi^2\omega^4 + u^2)^{3/2}} \xi\omega^2 u, \end{cases}$$

et l'on vérifie facilement que ces équations sont valables pour le nouveau système des variables :

$$\omega = \frac{1}{2mz'}, \quad \xi = 4m^2 z z'^2, \quad u, P_2 = \frac{2mM}{2m + M} u' \quad \text{et} \quad d\tau = \frac{dt}{z}.$$

Remarquons que, par rapport aux nouvelles variables, ξ et ω, un choc des deux masses égales est caractérisé par des valeurs nulles de ω, ξ étant différent de zéro. Bien entendu, on doit y associer des valeurs finies quelconques de u et P_2, soumises à la seule restriction :

$$(\xi^2\omega^4 + u^2)^{1/2} > 0.$$

Les formules, ci-dessus, montrent que dans le domaine d'un tel système des valeurs, l'ancienne variable z, ainsi que les quantités zP_1^2 et zP_1 sont des fonctions holomorphes des arguments ξ et ω, et on en déduit immédiatement qu'il en est de même pour la fonction caractéristique H'. La vitesse de la masse m croît indéfiniment lorsqu'on s'approche d'un choc, de façon toutefois que le produit zP_1^2 tend vers une limite positive, dépendant exclusivement des masses. Par conséquent, au voisinage d'un choc entre les deux masses égales, les transformations canoniques, comme ci-dessus, suffisent à rétablir la régularité du mouvement.

Le système primitif (67) admettant comme invariant intégral l'expression

$$I_1 = \int dz du dz' du',$$

on en déduit facilement que le nouveau système des équations canoniques (70) en admet l'expression

$$I_1' = -\frac{2m + M}{4m^2 M} \int d\xi \, d\omega \, du \, dP_2,$$

et étant régulier au voisinage d'un choc binaire pourra, peut-être, se prêter comme point de départ pour la recherche des solutions périodiques du problème.

VU ET APPROUVÉ
Paris, le 4 mai 1931
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Ch. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER
Paris, le 4 mai 1931
Le recteur de l'Académie de Paris,
S. CHARLÉTY.