THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

FÉLIX VANEY

Le parallélisme absolu dans les espaces elliptiques réels à 3 et à 7 dimensions et le principe de trialité dans l'espace elliptique à 7 dimensions

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1929

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1929__101__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

H.F u f.172 (33)

N° D'ORDRE :
210

THÈSES

PRESENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Par M. Félix VANEY
PROFESSEUR AU COLLEGE CANTONAL
LAUSANNE (SUISSE).

1re THÈSE. — Le parallélisme absolu dans les espaces elliptiques réels a 3 et a 7 dimensions et le principe de trialité dans l'espace elliptique a 7 dimensions.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 1929 devant la Commission d'Examen.

MM. Elie CARTAN, *Président.*
Arnaud DENJOY, Jean CHAZY } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1929

D.S 1929

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen..... C. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.

Doyens honoraires..... P. APPELL, M. MOLLIARD.

Professeurs honoraires... V. BOUSSINESQ, A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, R. DONGIER, E. HEROUARD.

Professeurs.....

E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
GOURSAT..... ...	Calcul différentiel et Calcul intégral.
JANET.....	Electrotechnique générale.
WALLERANT.....	Minéralogie.
ANDOYER.....	Astronomie.
PAINLEVÉ.....	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
GABRIEL BERTRAND..	Chimie biologique.
Mme P. CURIE.....	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
G. URBAIN.....	Chimie générale.
EMILE BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
MARCHIS.....	Aviation.
JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
REMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
ABRAHAM.....	Physique.
M. MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
E. CARTAN.....	Géométrie supérieure.
LAPICQUE.....	Physiologie générale.
VESSIOT.	Théorie des fonctions, théorie des transform.
COTTON.....	Physique générale.
DRACH.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
C. FABRY..	Physique.
C. PEREZ.....	Zoologie.
LÉON BERTRAND.....	Géologie appliquée et Géologie structurale.
R. LESPIEAU.....	Théories chimiques.
E. RABAUD.....	Biologie expérimentale.
P. PORTIER.....	Physiologie comparée.
E. BLAISE.....	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD....	Botanique.
P. MONTEL.....	Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT.....	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ.....	Biologie maritime.
G. JULIA.....	Mathématiques générales.
A. MAILHE..... .	Etude des Combustibles.
L. LUTAUD.....	Géographie physique et géologie dinamique.
EUGÈNE BLOCH.....	Physique théorique et Physique céleste.
HENRI VILLAT.....	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB.....	Géologie.
P. PASCAL.....	Chimie appliquée.
N.....	Chimie minérale.

E. PECHARD.....	Chimie (Enseignnt P.C.N.)	G. BRUHAT.....	Physique.
V. AUGER.....	Chimie analytique.	H. MOUTON..	Chimie physique.
M. GUICHARD.....	Chimie minérale.	L. JOLEAUD... ...	Paléontologie
A. GUILLET.....	Physique.	M. JAVILLIER.....	Chimie biologique.
C. MAUGUIN.....	Minéralogie.	A. DUFOUR... ,..	Physique (P. C. N.).
L. BLARINGHEM..	Botanique.	F. PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
A. MICHEL-LÉVY.	Pétrographie.		
A. DEREIMS	Géologie	ROBERT-LÉVY . ..	Zoologie.
A. DENJOY.....	Calcul différentiel et intégral.	L. DUNOYER.....	Optique appliquée.
H. BENARD.....	Physique (P. C. N.).	A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
E. DARMOIS.....	Physique.	A. DEBIERNE.....	Radioactivité.

Secrétaire..... D. TOMBECK.

86319 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

A

MONSIEUR ÉLIE CARTAN

Hommage de respectueuse reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE

LE

PARALLÉLISME ABSOLU

DANS

LES ESPACES ELLIPTIQUES RÉELS A 3 ET A 7 DIMENSIONS

ET LE

PRINCIPE DE TRIALITÉ

DANS

L'ESPACE ELLIPTIQUE A 7 DIMENSIONS

PRÉAMBULE.

Dans l'espace euclidien, les définitions de deux droites parallèles peuvent être classées en trois groupes [1]. Les droites parallèles peuvent être considérées comme des droites situées dans le même plan et qui ne se coupent pas ou bien qui ont la même direction ou aussi qui sont également distantes.

La définition la plus usitée est certainement la première; dans ce groupe, on peut comprendre les définitions qui envisagent les parallèles comme limites de droites concourantes ou comme des droites se coupant à l'infini.

La seconde définition peut être précisée en ajoutant qu'une droite, coupant deux droites parallèles, forme avec elles des angles égaux.

A la définition du troisième groupe se rattache celle plus étendue où les parallèles sont considérées comme les trajectoires d'une trans-

(1) ZACHARIAS, *Enzyklopadie der math. Wissensch.*, Band III, 1, Heft 5.

lation rectiligne, c'est-à-dire d'un déplacement où tous les points décrivent des segments rectilignes égaux.

Dans l'espace hyperbolique réel, il passe par un point A une infinité de droites, situées dans le même plan et qui ne coupent pas une droite donnée *d*. Parmi celles-ci, deux d'entre elles sont des droites limites, ce sont les deux parallèles de Lobatschewsky, qui joignent le point A aux deux points d'intersection de la droite *d* et de l'absolu. C'est la première définition que l'on applique, mais toutes les élégantes propriétés des parallèles de l'espace euclidien s'évanouissent.

Dans l'espace elliptique réel, par deux points quelconques passe toujours une droite et une seule et inversement deux droites se coupent toujours en un seul point, par suite il n'existe pas de droites parallèles à une droite donnée. Mais Clifford a découvert des droites gauches également distantes, qui possèdent en outre la plupart des propriétés des parallèles de l'espace euclidien.

Clifford a montré que par un point passent deux droites gauches parallèles à une droite donnée et que l'ensemble de ces parallèles à une même droite forme deux congruences dont les supports respectifs sont deux génératrices imaginaires conjuguées de même système de l'absolu.

MM. Élie Cartan et J.-A. Schouten (1) envisagent l'ensemble des propriétés dont jouissent les droites parallèles comme une loi qui constitue le parallélisme.

Le but de ce travail est l'étude du parallélisme dans les espaces elliptiques réels à 3 et à 7 dimensions. Une introduction rappelle les propriétés fondamentales de l'espace elliptique; le premier Chapitre, consacré au parallélisme dans l'espace elliptique à 3 dimensions, comprend quatre parties. Dans la première partie, les génératrices rectilignes de l'absolu sont déterminées à l'aide des quaternions, ce qui permet d'introduire dans la seconde partie une représentation analytique très simple des congruences de Clifford.

Dans la troisième partie, après avoir défini analytiquement le

---

(1) E. Cartan and J.-A. Schouten. *On Riemannian Geometries admitting an absolute parallelism* (*Proceedings Koninkliike Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, vol. XXIX, 1926).

parallélisme, selon la méthode de MM. E. Cartan et J.-A. Schouten, je démontre que les congruences de Clifford jouissent des propriétés du parallélisme. Enfin l'objet de la quatrième partie est une interprétation cinématique des deux espèces de parallélisme en considérant l'espace elliptique à trois dimensions comme l'espace du groupe des rotations.

Le second Chapitre généralise en partie le parallélisme dans l'espace à sept dimensions. L'octave remplace le quaternion, à cette différence près qu'il n'est pas associatif; d'où l'impossibilité de représenter les déplacements au moyen d'octaves.

L'absolu dans cet espace contient deux familles de plans générateurs à trois dimensions, qu'on peut représenter au moyen d'octaves par des équations très simples. Il en résulte une élégante représentation analytique des congruences qui généralisent celles de Clifford; toute cette étude fait l'objet des n°s 9, 10, 11 et 12.

Dans le n° 13, j'introduis les expressions analytiques qui définissent les deux espèces de parallélisme et je démontre qu'à un point donné correspond un parallélisme et réciproquement. Comme le point, il constitue donc un élément de cet espace et l'on en déduit le principe de trialité, exposé au n° 15. Il a donc été possible de déterminer au n° 16 la distance de deux parallélismes de même espèce.

C'est sur le conseil et d'après les indications bienveillantes de M. Élie Cartan que j'ai entrepris ce travail; qu'il me soit permis de lui témoigner ici, très respectueusement, ma profonde reconnaissance.

INTRODUCTION.

1. *L'espace elliptique.* — D'après les principes de la métrique cayleyenne pour la représentation métrique de l'espace elliptique, on se donne *a priori* une quadrique imaginaire, non dégénérée, à coefficients réels, que l'on appelle *l'absolu*.

Les définitions de distance et d'angle reposent uniquement sur l'emploi du rapport anharmonique qui est un invariant pour toute transformation homographique.

Étant donnés deux points réels ou imaginaires M et M′, joignons

ces deux points par une droite qui coupera l'absolu en deux autres points P et Q, la distance, au sens de Cayley, de ces deux points M et M′ est définie par le produit par $\frac{1}{2i}$ du logarithme du rapport anharmonique des quatre points

$$MM' = \frac{1}{2i} \log(M, M', P, Q).$$

Étant donnés deux plans R et R′ dont l'intersection est une droite D, menons les deux plans Q et Q′ tangents à l'absolu et passant par D; l'angle des deux plans R et R′ est défini par l'expression

$$RR' = \frac{1}{2i} \log(R, R', Q, Q'),$$

où (R, R′, Q, Q′) désigne le rapport anharmonique des quatre plans.

Enfin, étant données deux droites D et D′ qui se coupent en un point O, traçons dans le plan de ces deux droites les deux tangentes à l'absolu $O\mu$ et $O\mu'$, l'angle des deux droites est alors déterminé par l'expression

$$DD' = \frac{1}{2i} \log(D, D', O\mu, O\mu'),$$

où $(D, D', O\mu, O\mu')$ représente le rapport anharmonique des quatre droites.

Dans l'espace elliptique, il y a donc dualité complète entre les notions d'angle et de distance. Celles-ci sont indépendantes de toute transformation homographique qui conserve l'absolu ainsi que de toute transformation par polaires réciproques par rapport à l'absolu. Il en résulte la correspondance suivante entre les éléments de cet espace :

A tout point correspond son plan polaire; à tout plan correspond son pôle. Lorsqu'un point décrit une droite, son plan polaire tourne autour d'une seconde droite fixe, et inversement si un plan tourne autour de la première droite, son pôle décrit la seconde; ces deux droites sont dites réciproques ou polaires par rapport à l'absolu.

Deux points sont conjugués si le plan polaire de l'un passe par

l'autre; de même, deux plans sont conjugués si l'un d'eux passe par le pôle de l'autre. Deux droites sont conjuguées lorsque l'une des deux, choisie arbitrairement, rencontre la polaire de l'autre.

Sur chaque droite se trouve une involution elliptique de points conjugués dont les éléments doubles sont les points imaginaires conjugués où la droite perce l'absolu. Comme une involution elliptique ne possède aucun couple d'éléments imaginaires conjugués, il en résulte qu'aucun couple de points conjugués ne peut être imaginaire conjugué. De plus, deux droites gauches imaginaires conjuguées sont coupées par une droite réelle en deux points imaginaires conjugués, mais à un point d'une des premières droites correspond un point situé sur la droite polaire; par suite, il n'existe aucune paire de droites polaires qui soient imaginaires conjuguées.

Toute droite de l'espace elliptique est finie et fermée; pour que la dualité soit complète entre la distance et la grandeur de l'angle, nous prenons la longueur d'une droite égale à π. Deux points A et B partagent la droite en deux parties dont le total est π. L'angle de deux plans ou de deux droites concourantes ne devient égal à $\frac{\pi}{2}$ que si les deux plans sont conjugués ou si les deux droites sont conjuguées. Deux plans conjugués sont appelés « perpendiculaires » et deux droites concourantes conjuguées sont dites aussi « perpendiculaires ».

Le lieu des droites ou des plans perpendiculaires à un plan α est le faisceau de droites ou de plans qui passent par le pôle A′ du plan α.

Le lieu des plans perpendiculaires à une droite a est le faisceau de plans passant par la droite commune a', polaire de a. Le lieu des droites perpendiculaires à la droite a est l'ensemble des droites qui coupent la polaire a'. Enfin le lieu des points situés à une distance $\frac{\pi}{2}$ soit d'un point A, soit d'une droite a ou soit d'un plan α est respectivement le plan polaire α', la droite polaire a', le pôle A′.

L'espace elliptique à n dimensions peut être réalisé dans l'espace euclidien à $(n+1)$ dimensions sur une hypersphère, en représentant un point de l'espace elliptique par une paire de points antipodes sur l'hypersphère. L'inverse du carré du rayon de l'hypersphère donne la courbure de l'espace elliptique, que nous choisirons égale à l'unité.

Un point est défini par l'ensemble des $(n+1)$ valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$

qui satisfont à la relation

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1. \tag{1}$$

Celles-ci peuvent s'obtenir en multipliant les $(n+1)$ coordonnées projectives de ce point par une constante quelconque. D'une manière générale, un point analytique est un ensemble de $(n+1)$ coordonnées, non toutes nulles, mais deux points analytiques dont les coordonnées sont proportionnelles, mais non égales, sont regardés comme distincts, tout en occupant la même position dans l'espace.

Le carré scalaire d'un point analytique est représenté par la somme des carrés des coordonnées $\sum_0^n x_i^2$ et le produit scalaire de deux points analytiques $A(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $B(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ est donné par la quantité $\sum_0^n a_i b_i$. Multiplions respectivement par λ et μ les coordonnées des points A et B et additionnons, nous obtenons un nouveau point $\lambda A + \mu B$ dont le carré scalaire est égal à

$$\lambda^2 A^2 + 2\lambda\mu AB + \mu^2 B^2.$$

Deux points dont le produit scalaire est nul sont conjugués l'un de l'autre par rapport à l'absolu. Par suite, les points qui appartiennent à l'absolu sont leurs propres conjugués.

L'équation de l'absolu peut toujours se ramener à la forme

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0.$$

Prenons un point M dont les coordonnées x_i satisfont à la relation (1); un point infiniment voisin du point M aura ses coordonnées liées par la relation

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

qu'il est possible d'interpréter géométriquement de la manière suivante : dx_i sont les composantes d'un vecteur infiniment petit issu du point M; elles peuvent être considérées comme les coordonnées d'un point analytique situé dans le plan polaire du point M par rapport à l'absolu, dont le carré scalaire est égal au carré de la lon-

gueur ds du vecteur

$$\sum_{0}^{n} dx_i^2 = ds^2.$$

En passant à un vecteur de grandeur finie, on obtient la proposition ci-après :

Tout vecteur d'origine M peut être représenté par un point analytique V dont le carré scalaire est le carré de la longueur du vecteur, ce point V étant situé dans le plan polaire du point M par rapport à l'absolu et sur la droite issue de M dans la direction du vecteur. En outre, le produit scalaire de deux vecteurs issus de M est égal au produit scalaire de leurs points représentatifs.

2. *Parallélisme absolu.* — Dans l'espace elliptique, deux droites gauches ont deux perpendiculaires communes qui sont polaires l'une de l'autre.

Soient aa_1 et bb_1 les deux perpendiculaires communes; si l'on étudie la variation de la distance de deux points pris sur les deux droites gauches, on trouve que cette distance est maximum par exemple pour la position aa_1 et minimum pour la position bb_1.

Certaines droites gauches possèdent la propriété d'avoir plus de deux perpendiculaires communes; elles sont alors équidistantes et jouissent de propriétés analogues à celles des parallèles de l'espace euclidien. Ces droites gauches sont appelées les parallèles de Clifford, du nom du savant mathématicien qui les a signalées le premier en 1873; Study a suggéré le nom de droites *paratactiques*.

Pour étudier ces droites parallèles, j'emploierai la méthode de MM. E. Cartan et Schouten.

Le parallélisme est considéré comme une loi à laquelle satisfont les couples de droites qui jouissent des propriétés suivantes :

1° *Toute droite est parallèle à elle-même;*

2° *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles;*

3° *Par un point pris hors d'une droite, il passe une droite parallèle à la première et une seule;*

4° *Si deux droites se coupent suivant un angle* α, *les deux droites*

parallèles menées par un point quelconque se coupent sous le même angle α.

Dans l'espace elliptique à trois dimensions, Clifford a montré l'existence de deux espèces de parallélisme. Les droites parallèles à une droite donnée forment une congruence de droites réelles s'appuyant sur deux génératrices imaginaires conjuguées de même système de l'absolu.

MM. E. Cartan et J.-A. Schouten ont montré que, dans tous les espaces de groupes, il existe deux espèces de parallélisme, et que, dans l'espace elliptique à sept dimensions, il y a une infinité de parallélismes se partageant en deux espèces distinctes.

Dans le présent travail, j'étudie les parallélismes dans l'espace elliptique à sept dimensions; dans chaque parallélisme, les droites parallèles à une droite donnée forment une congruence de droites réelles qui s'appuient sur deux plans générateurs imaginaires conjugués de la même famille de l'absolu.

CHAPITRE I.

LE PARALLÉLISME DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

3. *Détermination des génératrices rectilignes de l'absolu.* — En coordonnées ponctuelles et homogènes, l'absolu a pour équation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \tag{2}$$

il possède deux familles de génératrices rectilignes imaginaires.

En effet, introduisons les coordonnées isotropiques

$$u_1 = x_0 + ix_1, \qquad v_1 = x_0 - ix_1, \qquad u_2 = x_2 + ix, \qquad v_2 = x_2 - ix_3,$$

dans l'équation de la quadrique, il vient

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0.$$

Les paramètres des génératrices de chaque famille sont respectivement

$$\lambda = -\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_2}{v_1} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{u_1}{v_2} = -\frac{u_2}{v_1},$$

les équations des génératrices de la première famille sont

$$x_0 + ix_1 = -\lambda(x_2 + ix_3),$$
$$x_0 - ix_1 = \frac{1}{\lambda}(x_2 - ix_3);$$

et celles des génératrices de la seconde famille

$$x_0 + ix_1 = \mu(x_2 - ix_3),$$
$$x_2 + ix_3 = -\mu(x_0 - ix_1).$$

Posons

$$\lambda = re^{i\varphi},$$

où r et φ sont des constantes, les équations des génératrices de la première famille deviennent

$$(3) \qquad \begin{cases} x_0 + ix_1 = -re^{i\varphi}(x_2 + ix_3), \\ re^{i\varphi}(x_0 - ix_1) = x_2 - ix_3. \end{cases}$$

Les génératrices conjuguées ont pour équations

$$x_0 - ix_1 = -re^{-i\varphi}(x_2 - ix_3),$$
$$re^{-i\varphi}(x_0 + ix_1) = x_2 + ix_3;$$

celles-ci peuvent s'écrire

$$(4) \qquad \begin{cases} x_0 + ix_1 = \frac{1}{r}e^{i\varphi}(x_2 + ix_3), \\ -\frac{1}{r}e^{i\varphi}(x_0 - ix_1) = x_2 - ix_3; \end{cases}$$

elles ne diffèrent de (3) que par leurs paramètres r et $-\frac{1}{r}$ qui sont inverses et opposés. Par conséquent, deux génératrices imaginaires conjuguées appartiennent à la même famille. On en déduit que deux génératrices de la même famille ne peuvent pas se rencontrer, sans quoi les génératrices imaginaires conjuguées auraient un point commun réel sur l'absolu, or celui-ci ne possède aucun point réel.

Une étude générale de ces génératrices peut être faite grâce à l'introduction des quaternions.

Étant données trois unités complexes e_1, e_2, e_3 qui satisfont aux lois

suivantes de la multiplication

$$e_k^2 = -1,$$
$$e_k = e_{k+1} e_{k+2} = -e_{k+2} e_{k+1} \qquad \text{où } e_k = e_{k+3} \qquad (k = 1, 2, 3),$$

le quaternion est une expression de la forme

$$A = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

a_0, a_1, a_2, a_3 désignent des quantités réelles ou complexes.

Le module du quaternion est donné par

$$|A| = \sqrt{\Sigma a_i^2} \qquad (k = 0, 1, 2, 3),$$

et le quaternion conjugué se définit par l'expression

$$\overline{A} = a_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3,$$

de telle sorte que

$$A\overline{A} = \overline{A}A = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Deux quaternions sont inverses l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à l'unité. En désignant l'inverse de A par A^{-1}, on a simultanément les équations

$$AA^{-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad A^{-1}A = 1$$

et

$$A^{-1} = \frac{a_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Si le quaternion A est unimodulaire, les quaternions inverse et conjugué sont alors identiques.

Le caractère propre de l'Algèbre des quaternions est l'absence de la propriété commutative de la multiplication, tandis que les propriétés distributive et associative subsistent, ce qui résulte des lois de la multiplication des unités e_i.

Soit X un point de coordonnées homogènes x_i où $k = 0, 1, 2, 3$; il peut être représenté par le quaternion

$$X = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x^3 e_3.$$

Prenons sur l'absolu un point quelconque A, qui sera représenté par un quaternion de module nul. A ce point A correspondent deux

génératrices rectilignes de l'absolu, qui sont déterminées au moyen du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les deux familles de génératrices rectilignes de l'absolu sont représentées respectivement par les équations suivantes :*

$$AX = 0 \quad \text{(pour la premiere famille de génératrices)},$$
$$XA = 0 \quad \text{(pour la deuxieme famille de génératrices)},$$

où

$$|A|^2 = \sum_{k=0}^{3} a_k^2 = 0$$

et où les produits doivent être effectués en tenant compte de l'ordre des facteurs.

Nous voulons démontrer que le point X ainsi défini par ces équations appartient à l'absolu.

En effet, si l'on développe ces produits et si l'on annule les coefficients respectifs des unités 1 et e_k, il vient :

$$(5)\ \text{génératrices}\ AX = 0 \quad \begin{cases} a_0x_0 - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 = 0, \\ a_1x_0 + a_0x_1 - a_3x_2 + a_2x_3 = 0, \\ a_2x_0 + a_3x_1 + a_0x_2 - a_1x_3 = 0, \\ a_3x_0 - a_2x_1 + a_1x_2 + a_0x_3 = 0; \end{cases}$$

$$(6)\ \text{génératrices}\ XA = 0 \quad \begin{cases} a_0x_0 - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 = 0, \\ a_1x_0 + a_0x_1 + a_3x_2 - a_2x_3 = 0, \\ a_2x_0 - a_3x_1 + a_0x_2 + a_1x_3 = 0, \\ a_3x_0 + a_2x_1 - a_1x_2 + a_0x_3 = 0. \end{cases}$$

Chaque système formé de quatre équations linéaires et homogènes représente quatre plans possédant une droite commune qui est précisément une génératrice de l'absolu.

Le déterminant des coefficients de chaque système est égal à $(\Sigma a_k^2)^2$, qui est, par hypothèse, nul, puisque le point A a été choisi sur l'absolu. Donc ces équations homogènes et linéaires admettent au moins une solution autre que $x_k = 0$.

De plus, tous les déterminants d'ordre trois sont nuls tandis que le déterminant d'ordre deux que l'on forme en prenant, par exemple,

les deux premières lignes et les deux premières colonnes est égal à $a_0^2 + a_1^2$, que nous supposons différent de zéro; si, du reste, celui-ci était nul, on pourrait toujours choisir deux autres lignes et deux autres colonnes telles que le déterminant d'ordre deux des coefficients ne soit pas nul. Par suite, ces plans ont une droite commune; celle-ci est entièrement située sur l'absolu. En effet, supposons le point X donné et les coordonnées a_k du point A inconnues. Or ces coordonnées a_k ne peuvent être différentes de zéro que si le déterminant des coefficients x_k est nul; ce déterminant étant égal à $(\Sigma x_k^2)^2$, on doit avoir

$$\Sigma x_k^2 = |X|^2 = 0,$$

donc tous les points de cette droite commune sont sur l'absolu.

Comme les déterminants d'ordre supérieur à deux sont nuls, deux des premiers membres des équations de chaque système sont une conséquence des deux autres. Dans le premier système, désignons respectivement par X_0, X_1, X_2 et X_3 les premiers membres de chacune des équations, il vient

$$(7)\quad \begin{cases} X_0 + iX_1 = (a_0 + ia_1)(x_0 + ix_1) - (a_2 + ia_3)(x_2 - ix_3), \\ X_0 - iX_1 = (a_0 - ia_1)(x_0 - ix_1) - (a_2 - ia_3)(x_2 + ix_3), \\ X_2 + iX_3 = (a_2 + ia_3)(x_0 - ix_1) + (a_0 + ia_1)(x_2 + ix_3), \\ X_2 - iX_3 = (a_2 - ia_3)(x_0 + ix_1) + (a_0 - ia_1)(x_2 - ix_3). \end{cases}$$

On en tire immédiatement la relation

$$(8)\quad (X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) + (X_2 + iX_3)(X_2 - iX_3) = \sum_0^3 a_k^2 . \sum_0^3 x_k^2 = 0.$$

La même relation s'obtiendrait au moyen des équations du second système.

Au point de vue géométrique, cette décomposition (8) correspond à la construction d'un tétraèdre dont les arêtes sont conjuguées deux à deux par rapport à l'absolu.

Toute génératrice de l'absolu peut se représenter paramétriquement au moyen de deux équations. Dans les deux premières équations du système (5), considérons x_2 et x_3 comme variables arbitraires et résol-

vons par rapport à x_0 et x_1,

$$(9)\qquad \begin{cases} (a_0^2+a_1^2)x_0=(a_0a_2+a_1a_3)x_2+(a_0a_3-a_1a_2)x_3, \\ (a_0^2+a_1^2)x_1=(a_0a_3-a_1a_2)x_2-(a_0a_2+a_1a_3)x_3. \end{cases}$$

Le système (6) donne de même

$$(10)\qquad \begin{cases} (a_0^2+a_1^2)x_0=(a_0a_2-a_1a_3)x_2+(a_0a_3+a_1a_2)x_3, \\ (a_0^2+a_1^2)x_1=-(a_0a_3+a_1a_3)x_2+(a_0a_2-a_1a_3)x_3. \end{cases}$$

Les coordonnées x_h du point X situé sur l'une des génératrices sont des fonctions continues des coordonnées a_h du point A. Mais deux génératrices (5) et (6) qui correspondent à un point A déterminé sont distinctes. En effet, chaque système composé de deux équations linéaires à deux variables, constitue une transformation orthogonale permettant de passer des variables x_2, x_3 aux variables x_0, x_1, en conservant l'identité $\sum_0^3 x_h^2 = 0$.

Or toute substitution orthogonale est caractérisée par le déterminant des coefficients qui est un invariant. Soient D_1 et D_2 les déterminants respectifs qui ont pour valeurs

$$D_1=-\frac{(a_0^2+a_1^2)(a_2^2+a_3^2)}{(a_0^2+a_1^2)^2}=+1,$$

$$D_2=\frac{(a_0^2+a_1^2)(a_2^2+a_3^2)}{(a_0^2+a_1^2)^2}=-1.$$

Par suite, à un point représenté par le quaternion A correspondent deux génératrices distinctes; celle de la première famille est caractérisée par le déterminant $+1$ de ses coefficients, son équation est $AX=0$; celle de la seconde famille a le déterminant de ses coefficients égal à -1 et son équation est $XA=0$.

4. *Congruences de Clifford.* — L'ensemble des droites s'appuyant sur deux génératrices de la même famille forme une congruence de Clifford. Il est possible de représenter toute congruence de Clifford au moyen des quaternions de la manière suivante.

Soient deux points conjugués X et Y, situés dans le domaine réel;

leurs coordonnées satisfont aux relations suivantes :

$$|X|^2 = \sum_{k=0}^{3} x_k^2 = 1, \qquad |Y|^2 = \sum_{0}^{3} y_k^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad X|Y = 0.$$

La droite réelle joignant ces deux points rencontre l'absolu en deux points imaginaires conjugués $X + iY$ et $X - iY$, situés sur deux génératrices différentes de la même famille. Celles-ci ont pour équations

$$(11) \qquad (A \pm iB)(X \pm iY) = 0,$$

si elles font partie de la première famille.

Les points $A \pm iB$ sont situés sur l'absolu et ont par conséquent leurs modules nuls,

$$|A \pm iB|^2 = A^2 - B^2 \pm 2iA|B = 0.$$

Or cette relation est satisfaite si A et B sont deux points réels et conjugués de module unité, c'est-à-dire tels que l'on a

$$|A| = 1, \qquad |B| = 1 \qquad \text{et} \qquad A|B = 0.$$

A la congruence des droites XY s'appuyant sur deux génératrices de la même famille correspond donc une droite AB, déterminée par deux points A et B réels et conjugués. Cette congruence est définie par l'équation (11) que l'on peut remplacer par l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$(12) \qquad AX = BY \qquad \text{ou} \qquad -BX = AY,$$

qui sont équivalentes entre elles. En effet, les points A et B étant conjugués, les quaternions qui les représentent vérifient la relation

$$A^{-1}B + B^{-1}A = 0.$$

De la première des équations (12), on tire en multipliant à gauche par B^{-1}

$$B^{-1}AX = Y,$$

or le produit $B^{-1}A$ peut être remplacé par $-A^{-1}B$; par suite

$$-A^{-1}BX = Y,$$

et en multipliant à gauche par A, il vient

$$-BX = AY.$$

Aux mêmes points $A \pm \iota B$ correspondent aussi deux génératrices conjuguées de la seconde famille dont les équations sont

$$(X \pm \iota Y)(A \pm \iota B) = 0, \tag{13}$$

qui déterminent une congruence de droites définie par l'une des relations

$$XA = YB \quad \text{ou} \quad XB = -YA, \tag{14}$$

équivalentes entre elles.

Il en résulte les théorèmes suivants :

Theorème I. — *Dans l'espace elliptique à trois dimensions, toute congruence de Clifford peut être définie par l'équation* $AX = BY$, *si les supports sont les génératrices de la première famille, ou par l'équation* $XA = YB$, *si les supports sont les génératrices de la seconde famille.*

Theoreme II. — *A toute droite définie par deux points* A *et* B, *réels et conjugués, correspondent deux congruences de Clifford, ayant respectivement comme supports les génératrices de la première ou de la seconde famille.*

Exprimons maintenant les coordonnées du point Y situé sur une droite d'une congruence donnée et conjugué à un point X donné aussi. Soit AB la droite à laquelle correspond la congruence de Clifford définie par l'équation

$$AX = BY.$$

Fixons le point X, alors les coordonnées du point Y conjugué de X sont déterminées au moyen de l'expression

$$Y = B^{-1}AX. \tag{15}$$

Afin de développer cette expression, remplaçons A, B, X par leurs quaternions

$$Y = (b_0 - b_1 e_1 - b_2 e_2 - b_3 e_3)(a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3),$$

et introduisons les coordonnées pluckériennes de la droite AB en posant

$$p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i \tag{16}$$

liées par la relation

$$p_{ij} p_{kh} + p_{ik} p_{hj} + p_{ih} p_{jk} = 0. \tag{17}$$

Les coordonnées du point Y s'écrivent alors

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 = \quad \star \quad (p_{01}+p_{32})x_1 + (p_{02}+p_{13})x_2 + (p_{03}+p_{21})x_3, \\ y_1 = -(p_{01}+p_{32})x_0 \quad \star \quad + (p_{03}+p_{21})x_2 - (p_{02}+p_{13})x_3, \\ y_2 = -(p_{02}+p_{13})x_0 - (p_{03}+p_{21})x_1 \quad \star \quad + (p_{01}+p_{32})x_3, \\ y_3 = -(p_{03}+p_{21})x_0 + (p_{02}+p_{13})x_1 - (p_{01}+p_{32})x_2 \quad \star \end{array}\right. \tag{18}$$

Par un calcul analogue, on peut exprimer les coordonnées d'un point Z, situé sur une droite d'une congruence de Clifford, dont les supports sont deux génératrices conjuguées de la seconde famille. Soit X le point donné, on a

$$Z = XAB^{-1},$$

d'où l'on tire

$$\left\{\begin{array}{l} z_0 = \quad \star \quad (p_{01}+p_{23})x_1 + (p_{02}+p_{31})x_2 + (p_{03}+p_{12})x_3, \\ z_1 = -(p_{01}+p_{23})x_0 \quad \star \quad - (p_{03}+p_{12})x_2 + (p_{02}+p_{31})x_3, \\ z_2 = -(p_{02}+p_{31})x_0 + (p_{03}+p_{12})x_1 \quad \star \quad - (p_{01}+p_{23})x_3, \\ z_3 = -(p_{03}+p_{12})x_0 - (p_{02}+p_{31})x_1 + (p_{01}+p_{23})x_2 \quad \star \end{array}\right. \tag{19}$$

Les coordonnées des points Y et Z dépendent donc d'un système de bivecteurs qui s'exprime linéairement au moyen des coordonnées p_{ij} d'une droite AB.

Pour le point Y, le système de bivecteurs a pour coordonnées les trois valeurs suivantes :

$$p_{01} + p_{32} = t_1,$$
$$p_{02} + p_{13} = t_2,$$
$$p_{03} + p_{21} = t_3$$

et, pour le point Z, on a

$$p_{01} + p_{23} = t'_1,$$
$$p_{02} + p_{31} = t'_2,$$
$$p_{03} + p_{12} = t'_3.$$

Etant données les trois coordonnées d'un de ces systèmes de bivecteurs, il est possible de déterminer une infinité de valeurs des coordonnées p_{ij} satisfaisant à la relation fondamentale (17).

Donc à une droite donnée AB, on peut faire correspondre une et une seule congruence de Clifford dont les supports sont les génératrices de l'une ou l'autre famille. Mais à une congruence de Clifford correspondent une infinité de droites AB.

5. *Parallélisme des droites d'une congruence de Clifford.* — Pour définir le parallélisme, considérons deux points représentés respectivement par les quaternions X et Y, appelons vecteur $\overrightarrow{XY}$ l'ensemble de ces deux points, dont l'un X par exemple est le point origine et l'autre Y est le point extrémité. Le vecteur est nul si les deux points coïncident.

Deux vecteurs $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{X'Y'}$ sont dits équipollents de première espèce si l'on a

$$YX^{-1} = Y'X'^{-1}; \tag{20}$$

ils sont équipollents de seconde espèce, si l'on a

$$X^{-1}Y = X'^{-1}Y'. \tag{21}$$

En prenant les inverses de chaque membre, on trouve des égalités équivalentes

$$XY^{-1} = X'Y'^{-1} \tag{20'}$$

et

$$Y^{-1}X = Y'^{-1}X'. \tag{21'}$$

De ces définitions, on déduit pour chaque espèce d'équipollence différentes propriétés analogues à celles qui proviennent de l'équipollence ordinaire de deux vecteurs.

1° Tout vecteur équipollent à un vecteur nul est nul;

2° Tout vecteur est équipollent à lui-même;

3° Si un vecteur est équipollent à un second vecteur, le second équipollent au premier;

4° Si deux vecteurs sont équipollents, les vecteurs opposés le sont aussi;

5° Tout point de l'espace est l'origine d'un vecteur et d'un seul équipollent à un vecteur donné;

6° Deux vecteurs équipollents a un troisième sont équipollents entre eux;

7° Si $\overrightarrow{XY}$ est équipollent à $\overrightarrow{X'Y'}$ et $\overrightarrow{YZ}$ équipollent à $\overrightarrow{Y'Z'}$, le vecteur $\overrightarrow{XZ}$ est équipollent à $\overrightarrow{X'Z'}$.

En effet, on a, par hypothèse,

$$YX^{-1} = Y'X'^{-1} \qquad \text{et} \qquad ZY^{-1} = Z'Y'^{-1};$$

multiplions membre à membre, il vient

$$ZX^{-1} = Z'X'^{-1}.$$

Enfin, entre deux équipollences d'espèces différentes, on peut établir le théorème suivant :

Si $\overrightarrow{XY}$ est équipollent de premiere espece à $\overrightarrow{X'Y'}$, le vecteur $\overrightarrow{XX'}$ est équipollent de deuxième espèce à $\overrightarrow{YY'}$, et réciproquement.

En effet, par hypothèse, on a

$$YX^{-1} = Y'X'^{-1};$$

multiplions à gauche chaque membre par Y^{-1} et à droite par X', il vient

$$X^{-1}X' = Y^{-1}Y'$$

qui définit l'équipollence de seconde espèce des deux vecteurs $\overrightarrow{XX'}$ et $\overrightarrow{YY'}$.

De la définition de l'équipollence de deux vecteurs, on déduit la notion de droites parallèles.

Remarquons d'abord qu'une droite peut être définie de la manière suivante :

Si l'on prend trois points quelconques X, Y et X' sur une droite, le

vecteur $\overrightarrow{X'Y'}$ équipollent à $\overrightarrow{XY}$ a encore son extrémité Y' sur la droite.

Les deux espèces d'équipollence de vecteurs ne fournissent qu'une seule espèce de droites; en effet, si l'on admet que $\overrightarrow{X'Y'}$ est équipollent de première espèce à $\overrightarrow{XY}$, on a vu que $\overrightarrow{YY'}$ est équipollent de seconde espèce à $\overrightarrow{XX'}$, et réciproquement.

Soit maintenant une droite d passant par le point X; menons par le point X', extérieur à d, les vecteurs équipollents de première espèce aux différents vecteurs portés sur d, nous obtenons les vecteurs $\overrightarrow{X'Y'}$ équipollents de première espèce aux vecteurs $\overrightarrow{XY}$, dont l'extrémité Y' décrira une autre droite d'.

La droite d' est appelée *parallèle de première espèce* à la droite d; elle est telle que tout vecteur porté sur d' est équipollent de première espèce à un vecteur porté sur d.

Les droites *parallèles de seconde espèce* à une droite donnée se définissent de la même manière.

Il en résulte qu'il existe deux espèces de parallélisme pour les droites et que, pour chacune de ces espèces, on a les propriétés suivantes :

1° Toute droite est parallèle à elle-même;

2° Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles;

3° Par tout point pris hors d'une droite, il passe une droite parallèle et une seule.

Une quatrième propriété sera établie dans la suite.

Theorème. — *Dans une congruence de Clifford, les droites sont parallèles de première espèce si elles s'appuient sur deux génératrices de la première famille, et elles sont parallèles de seconde espèce si elles s'appuient sur deux génératrices de la seconde famille.*

En effet, une congruence de Clifford, composée de droites s'appuyant sur des génératrices de première espèce, a pour équation

$$AX = BY.$$

Multiplions chaque membre à gauche par B^{-1} et à droite par X^{-1}, il vient

$$YX^{-1} = B^{-1}A. \tag{22}$$

Cette équation permet de déterminer les coordonnées du point Y sur la droite de la congruence passant par le point X; le point Y étant conjugué du point X.

Nous voulons montrer que les droites de cette congruence jouissent des quatre propriétés du parallélisme.

1° Toute droite est parallèle à elle-même.

Sur la droite déterminée par les points X et Y, un troisième point quelconque X′ peut être déterminé par la relation

$$X' = \lambda X + \mu Y.$$

où λ et μ sont des constantes.

En exprimant Y en fonction de X, d'après (22), l'expression devient

$$X' = \lambda X + \mu B^{-1}AX. \tag{23}$$

Portons à partir de X′ un vecteur $\overrightarrow{X'Y'}$ équipollent à $\overrightarrow{XY}$; celui-ci doit satisfaire à la relation

$$Y'X'^{-1} = B^{-1}A$$

ou

$$Y' = B^{-1}AX',$$

et en remplaçant X′ par son expression (23), on a

$$Y' = \lambda B^{-1}AX + \mu B^{-1}A(B^{-1}AX).$$

Introduisons le quaternion inverse du produit $B^{-1}A$, en posant

$$B^{-1}A + A^{-1}B = \text{une constante } c;$$

par suite,

$$Y' = \lambda B^{-1}AX + \mu(c - A^{-1}B)(B^{-1}AX) = (\lambda + \mu c)Y - \mu X$$

Ainsi, l'extrémité Y′ du vecteur $\overrightarrow{X'Y'}$ équipollent à $\overrightarrow{XY}$ est située sur la même droite XY que son origine X′.

2° Par un point X′, pris hors d'une droite d, passent deux parallèles à d, l'une d' est parallèle de première espèce et l'autre d'' est parallèle de seconde espèce.

A la droite AB correspondent deux congruences de Clifford définies respectivement par les équations

$$AX = BY \qquad \text{et} \qquad XA = YB.$$

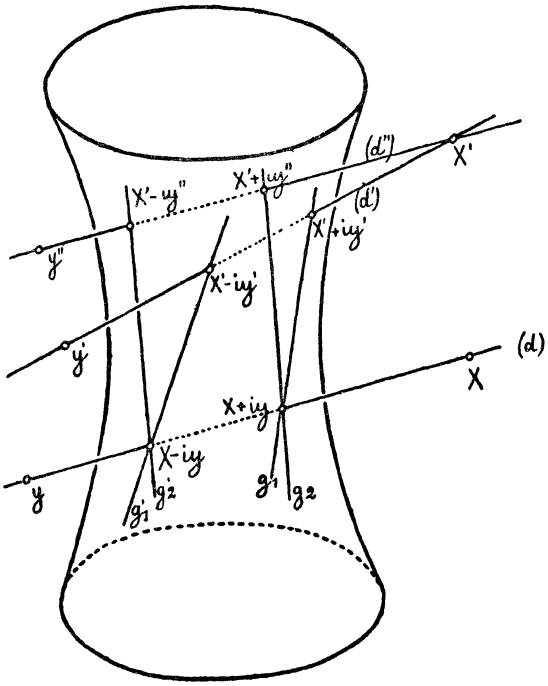
Par un point X, traçons une droite déterminée par un second point Y, conjugué de X, dont les coordonnées sont données par

$$YX^{-1} = B^{-1}A,$$

ou par

$$X^{-1}Y = AB^{-1},$$

Fig. 1.



suivant que l'on considère cette droite comme appartenant à la première ou à la seconde des congruences (*fig.* 1).

Par le point X′ pris en dehors de XY, portons un vecteur X′Y′

équipollent de première espèce au vecteur XY, l'extrémité Y' est déterminée par

$$YX^{-1} = Y'X'^{-1} = B^{-1}A.$$

Cette droite d', parallèle de première espèce à la droite d, appartient à la congruence de Clifford

$$AX = BY.$$

Par le même point X', portons un vecteur $\overrightarrow{X'Y''}$ équipollent de seconde espèce au vecteur $\overrightarrow{XY}$; son extrémité Y'' sera définie par l'expression

$$X^{-1}Y = X'^{-1}Y'' = AB^{-1}.$$

Cette nouvelle droite d'', déterminée par les deux points X' et Y'' est donc parallèle de seconde espèce à d, elle appartient à la congruence de Clifford

$$XA = YB.$$

En outre, par un point quelconque ne passe qu'une seule droite appartenant à l'une des congruences.

3° Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

Par le point X, menons la droite XY qui appartient à la congruence de Clifford

$$AX = BY.$$

Menons par le point X' pris en dehors de XY la droite X'Y' dont le second point Y', conjugué de X', est déterminé par la relation

$$Y' = B^{-1}AX'.$$

Cette droite X'Y' est parallèle de première espèce à XY, car l'on a

$$YX^{-1} = Y'X'^{-1} = B^{-1}A.$$

Enfin, par le point X'' pris hors des deux droites précédentes, menons une troisième droite X''Y'' dont le second point Y'' est donné par

$$Y'' = B^{-1}AX'',$$

cette droite est parallèle de première espèce à XY, car

$$Y''X''^{-1} = YX^{-1} = B^{-1}A,$$

mais elle est aussi parallèle de première espèce à X′Y′, puisque

$$Y''X''^{-1} = Y'X'^{-1}.$$

4° Deux congruences de droites parallèles de même espèce sont isogonales.

Par le même point X, faisons passer deux droites, l'une appartenant à la congruence de Clifford correspondant à la droite AB, l'autre à la congruence qui correspond à A′B′.

La première droite XY est déterminée par le point X et par le point

$$Y = B^{-1}AX,$$

et la seconde droite XY′ par le second point

$$Y' = B'^{-1}A'X.$$

L'angle des deux droites est donné par le produit scalaire

$$2\cos(XY, X'Y') = YY'^{-1} + Y'Y^{-1}.$$

Or

$$YY'^{-1} = B^{-1}AXX^{-1}A'^{-1}B' \qquad \text{et} \qquad Y'Y^{-1} = B'^{-1}A'XX^{-1}A^{-1}B.$$

Comme le produit XX^{-1} est égal à l'unité, il vient

$$YY'^{-1} + Y'Y^{-1} = B^{-1}AA'^{-1}B' + B'^{-1}A'A^{-1}B.$$

Cette expression étant indépendante de X, on en conclut que l'angle des deux droites ne dépend pas du choix du point X; par suite, les deux congruences sont isogonales.

Il est facile de calculer la valeur de cet angle

$$2\cos(XY, X'Y') = YY'^{-1} + Y'Y^{-1} = 2(y_0y'_0 + y_1y'_1 + y_2y'_2 + y_3y'_3).$$

Remplaçons les coordonnées y_i par leurs valeurs (18) exprimées au moyen des x_i, il vient

$$\cos(XY, X'Y') = (p_{01} + p_{32})(p'_{01} + p'_{32}) + (p_{02} + p_{13})(p'_{02} + p'_{13}) + (p_{03} + p_{21})(p'_{03} + p'_{21}).$$

puisque tous les coefficients de $x_i x_j$ sont identiquement nuls et que

$$\sum_0^3 x_i^2 = 1.$$

6. *L'espace elliptique à trois dimensions, considéré comme espace du groupe des rotations de l'espace euclidien.* — Considérons dans l'espace euclidien un corps solide S mobile autour d'un point fixe O; il a donc trois degrés de liberté.

Soit un point M de ce solide, ses coordonnées x, y, z sont rapportées à un trièdre T_0 dont le sommet coïncide avec le point fixe O. Par rotation, le point M vient en $M'(x', y', z')$; sa distance à l'origine étant conservée, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Cette relation peut aussi s'écrire

$$(24) \qquad (x' - x)(x' + x) + (y' - y)(y' + y) + (z' - z)(z' + z) = 0.$$

Parmi ces six formes linéaires, considérons $x' + x$, $y' + y$, $z' + z$ comme indépendantes; les trois autres peuvent s'exprimer linéairement au moyen de ces trois quantités. Les coefficients se déterminent en portant les expressions de $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ dans (24); il vient

$$\begin{aligned} x' - x &= b(z' + z) - c(y' + y), \\ y' - y &= c(x' + x) - a(z' + z), \\ z' - z &= a(y' + y) - b(x' + x), \end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' - bz' + cy' &= x + bz - cy, \\ y' - cx' + az' &= y + cx - az, \\ z' - ay' + bx' &= z + ay - bx. \end{aligned} \right.$$

Cette transformation représente une rotation du corps solide autour du point fixe O.

En effet, le déterminant des coefficients de x', y', z' est

$$1 + a^2 + b^2 + c^2$$

différent de zéro; par suite, les coordonnées x', y', z' s'expriment au

moyen des coordonnées initiales x, y, z; de plus, on vérifie que la distance au point fixe n'a pas varié.

Introduisons les coordonnées homogènes dans cette transformation et posons

$$(26) \qquad \rho = \cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \lambda = a\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \mu = b\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \nu = c\cos\frac{\alpha}{2};$$

λ, μ, ν sont les composantes du vecteur $\sin\frac{\alpha}{2}$ porté sur l'axe de la rotation Δ; la transformation (25) s'écrit alors

$$(27) \qquad \begin{cases} \rho x' - \mu z' + \nu y' = \rho x + \mu z - \nu y, \\ \rho y' - \nu x' + \lambda z' = \rho y + \nu x - \lambda z, \\ \rho z' - \lambda y' + \mu x' = \rho z + \lambda y - \mu z, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1. \end{cases}$$

Si ρ change de signe, la rotation reste la même. λ, μ, ν, ρ peuvent être considérés comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace elliptique à trois dimensions. Le point O correspond à la fois à la position initiale S_0 du solide et à la transformation identique. A chaque position S du solide, on fait correspondre une rotation R qui amène S_0 en coïncidence avec S et par suite un point représentatif dans l'espace elliptique. Donc *l'espace elliptique à trois dimensions peut être regardé comme l'espace du groupe des rotations.*

Les formules (27) se simplifient à l'aide des quaternions; posons à cet effet

$$\begin{aligned} X &= x e_1 + y e_2 + z e_3, \\ X' &= x' e_1 + y' e_2 + z' e_3, \\ A &= \rho + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3, \qquad \text{ou} \qquad |A| = 1. \end{aligned}$$

La transformation (27) s'écrit alors

$$(28) \qquad X'A = AX,$$

cette égalité représente donc l'effet d'une rotation sur le corps solide S.

L'égalité supplémentaire fournie par les parties scalaires

$$\lambda x' + \mu y' + \nu z' = \lambda x + \mu y + \nu z$$

signifie que l'axe de rotation est perpendiculaire à la droite de jonction des positions extrêmes du point transformé.

La composition des rotations peut alors s'effectuer simplement au moyen des quaternions. Soit à composer les deux rotations A et B qui donnent les transformations

$$X'A = AX,$$
$$X''B = BX'.$$

Dans la dernière relation, multiplions à droite chaque membre par A, il vient

$$X''BA = BX'A = BAX,$$

puis posons $BA = C$; C est la rotation résultante des deux premières, elle fournit en effet la transformation

$$X''C = CX.$$

Suivant les axes de rotation, on distingue dans la représentation analytique des rotations entre la rotation absolue et relative. Remplaçons le solide considéré précédemment par le trièdre mobile T dont la position origine est T_0. On peut représenter le trièdre T par le quaternion U qui définit la rotation permettant de passer du trièdre T_0 au trièdre T. Faisons subir au trièdre T la rotation A pour l'amener en T'; d'après la règle de composition des rotations, la rotation résultante est

$$U' = AU, \tag{29}$$

A est le quaternion qui définit analytiquement par rapport aux axes du trièdre fixe T_0 la rotation subie par le trièdre T. On peut donc regarder A comme *le symbole d'une rotation absolue*.

Mais si la rotation est définie analytiquement par rapport aux axes mobiles du trièdre T, au moyen du quaternion B, le passage de U à U' se fait d'une autre manière. Il existe une rotation d'ensemble qui amène T en T_0 et en même temps T' dans une autre position T_1, de façon que

$$U^{-1}U' = B,$$

d'où

$$U' = UB; \tag{30}$$

B est *le symbole d'une rotation relative*.

Effectuons une rotation absolue A suivie d'une rotation relative B, U devient par la rotation absolue A

$$U' = AU,$$

U′ subit ensuite la rotation relative B

$$U'' = U'B = AUB. \tag{31}$$

Le même résultat s'obtient en commençant par donner à U une rotation relative.

7. *Interprétation cinématique des deux espèces de parallélisme de Clifford.* — Un point de l'espace elliptique à trois dimensions correspond à l'une des positions d'un solide S mobile autour d'un point fixe O dans l'espace euclidien; une droite est l'ensemble des points qui correspondent aux différentes positions du solide se déduisant d'une position donnée par une rotation continue autour d'un axe donné. Toute droite XY peut être représentée par la position (X) du solide, qui correspond à l'un des points X de la droite, et par l'axe OR de la rotation qui donne les autres positions (Y) correspondant aux autres points Y de la droite.

La distance de deux points X et Y est déterminée par le module du quaternion représentant le vecteur OR dont la longueur est la moitié de l'angle de la rotation qui amène (X) en (Y). Par suite, l'angle de deux droites issues de X est égal à l'angle des axes de rotation correspondants.

Soient S_X et S_Y deux positions du solide S; X et Y leurs points représentatifs et soit A la rotation absolue qui permet d'amener S_X sur S_Y; d'après (29), on a

$$YX^{-1} = A.$$

Or deux vecteurs $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{X'Y'}$ sont équipollents de première espèce si l'on a la relation (20)

$$YX^{-1} = Y'X'^{-1},$$

on en déduit que c'est la même rotation qui permet d'amener S_X sur S_Y et $S_{X'}$ sur $S_{Y'}$. Donc deux droites sont parallèles de première espèce si les axes des rotations correspondantes occupent la même position dans

l'espace. Par suite, la rotation absolue A représente toutes les translations

$$Y = AX,$$

de première espèce dans l'espace elliptique à trois dimensions, c'est-à-dire tous les déplacements qui transforment les droites d'un faisceau parallèle de première espèce en elles-mêmes.

Supposons maintenant que S_Y se déduise de S_X par la rotation relative B; on a alors la relation (30)

$$Y = XB \qquad \text{ou} \qquad X^{-1}Y = B.$$

Or les deux vecteurs $\overrightarrow{XY}$ *et* $\overrightarrow{X'Y'}$ sont équipollents de seconde espèce si leurs extrémités sont liées par (21)

$$X^{-1}Y = X'^{-1}Y'.$$

Comme on sait que $\overrightarrow{XX'}$, $\overrightarrow{YY'}$ sont équipollents de première espèce, il en résulte que c'est la même rotation qui amène à la fois S_X sur $S_{X'}$ et S_Y sur $S_{Y'}$; donc S_X est placé par rapport à S_Y de la même manière que $S_{X'}$ par rapport à $S_{Y'}$. Les deux rotations qui amènent la première S_X sur S_Y et la seconde $S_{X'}$ sur $S_{Y'}$ sont bien égales, mais leurs axes sont différents; l'axe Δ de la première a par rapport à S_Y la même position relative que l'axe Δ' possède par rapport à $S_{Y'}$. Imaginons deux observateurs dont l'un est placé par rapport à S_X ou à S_Y de la même manière que l'autre par rapport à $S_{X'}$ ou à $S_{Y'}$; les deux rotations qui amènent d'une part S_X sur S_Y et d'autre part $S_{X'}$ sur $S_{Y'}$ sont égales pour ces observateurs.

Deux droites seront donc parallèles de seconde espèce si les axes Δ et Δ' des rotations correspondantes occupent la même position dans le corps solide. Par suite, l'expression

$$Y = XB$$

représente dans l'espace elliptique toutes les translations de seconde espèce, qui sont les déplacements de l'espace transformant les parallèles de seconde espèce en elles-mêmes.

D'une manière générale, tout déplacement dans l'espace elliptique peut être considéré comme la résultante d'une translation de première

espèce et d'une translation de seconde espèce; cette résultante est indépendante de l'ordre de combinaison des deux translations et elle s'exprime au moyen de la relation

$$Y = AXB.$$

CHAPITRE II.

LE PARALLELISME DANS L'ESPACE A SEPT DIMENSIONS.

8. *Les éléments de cet espace.* — Dans l'espace projectif à sept dimensions, chaque système de valeurs $mx_0, mx_1, \ldots, mx_7$, à l'exception de celui où toutes les valeurs s'annulent à la fois, désigne un point. Le facteur m étant une constante arbitraire, on peut le choisir de façon à avoir la relation $\sum_0^7 x_i^2 = 1$ entre les coordonnées du point.

Les systèmes de valeurs qui satisfont à l'équation linéaire et homogène

$$\sum_0^7 a_i x_i = 0,$$

dont les coefficients a_i ne s'annulent pas tous en même temps, représentent un hyperplan ou une variété plane à six dimensions; cette relation contient au plus 7 paramètres. Si deux équations linéaires et homogènes ou deux hyperplans possèdent ∞^5 systèmes de valeurs communes, elles représentent alors une variété plane à cinq dimensions. On définirait de même des variétés planes à 4, 3, 2 dimensions. Six équations linéaires et homogènes déterminent une droite, qui dépend de 12 paramètres. D'une manière générale, une variété plane à p dimensions est définie par $(7-p)$ équations linéaires, contenant $(p+1)(7-p)$ paramètres. Aussi la variété plane à trois dimensions est déterminée par quatre équations linéaires contenant 16 paramètres. L'absolu de cet espace elliptique est une quadrique imaginaire à coefficients réels, qui peut être engendrée par une variété plane. On sait que la dimension maximum des variétés planes qui se trouvent sur une quadrique de l'espace à n dimensions est $\frac{n-1}{2}$ si n est impair et $\frac{n-2}{2}$

si n est pair [1]. Donc, dans l'espace à sept dimensions, les plans générateurs de l'absolu sont au plus à trois dimensions.

On peut aussi s'en rendre compte de la manière suivante : soit p le nombre de dimensions de plans générateurs, l'équation de ces plans contient p variables indépendantes et $(p+1)(7-p)$ paramètres. Ceux-ci se déterminent par identification au moyen des $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ coefficients de la quadrique. Pour avoir des solutions différentes de zéro, il suffit que le nombre d'équations soit inférieur au nombre de paramètres à déterminer, par suite

$$\frac{1}{2}(p+1)(p+2) < (p+1)(7-p),$$

d'où

$$p < 4.$$

9. *Plans generateurs a trois dimensions de l'absolu.* — En coordonnées ponctuelles et homogènes, l'équation de l'absolu peut s'écrire en annulant une somme de huit carrés

$$\sum_0 x_i^2 = 0, \tag{32}$$

qui devient, si l'on introduit les coordonnées isotropes,

$$\left\{\begin{array}{llll} u_1 = x_0 + ix_1, & u_2 = x_2 + ix, & u_3 = x_4 + ix_5, & u_4 = x_6 + ix_7, \\ v_1 = x_0 - ix_1, & v_2 = x_2 - ix_3, & v_3 = x_4 - ix_3, & v_4 = x_6 - ix_7; \end{array}\right. \tag{33}$$

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4 = 0. \tag{34}$$

Pour déterminer toutes les variétés planes à trois dimensions qui se trouvent sur l'absolu, nous distinguerons cinq cas suivant les relations qui lient les coordonnées des points de l'absolu.

Premier cas. — *Les u_i ne sont liés par aucune relation.* — Les quatre

---

[1] E. Bertini. *Einfuhrung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Raume* (Wien, 1924).

équations de la variété plane à trois dimensions la plus générale sont :

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4,\\
v_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4,\\
v_3 &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 + a_{34}u_4,\\
v_4 &= a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + a_{43}u_3 + a_{44}u_4.
\end{aligned}$$

Les 16 paramètres a_{ij} peuvent être déterminés par la condition que les coordonnées v_i vérifient l'équation de l'absolu

$$\Sigma u_i(a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 + a_{i4}u_4) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On en déduit

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{ij} + a_{ji} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Introduisons un paramètre d'homogénéité en écrivant $\frac{a_{ij}}{c}$ au lieu de a_{ij}; les équations deviennent

$$(35) \qquad \begin{cases}
cv_1 = \star \quad a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4,\\
cv_2 = a_{21}u_1 \quad \star \quad + a_{23}u_3 + a_{24}u_4,\\
cv_3 = a_{31}u_1 + a_{32}u_2 \quad \star \quad + a_{34}u_4,\\
cv_4 = a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + a_{43}u_3 + \star \quad .
\end{cases}$$

Par addition des trois dernières relations, après multiplication par des constantes appropriées, il vient

$$c(a_{34}v_2 + a_{42}v_3 + a_{23}v_4) = (a_{21}a_{34} + a_{31}a_{42} + a_{41}a_{23})u_1,$$

et si l'on introduit un nouveau paramètre c' au moyen de la relation

$$(36) \qquad a_{21}a_{34} + a_{31}a_{42} + a_{41}a_{23} = -cc',$$

on obtient l'expression d'une variable u en fonction de trois des variables v,

$$(37) \qquad -c'u_1 = a_{34}v_2 + a_{42}v_3 + a_{23}v_4.$$

Pour simplifier l'écriture de ces huit paramètres, posons

$$\begin{aligned}
a_{23} &= a_1, & a_{31} &= a_2, & a_{12} &= a_3, & c &= a_4,\\
a_{14} &= b_1, & a_{24} &= b_2, & a_{34} &= b_3, & -c' &= b_4.
\end{aligned}$$

Ces paramètres sont liés par la relation (36), qui s'écrit alors

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0. \tag{38}$$

Combinons trois à trois les équations (35) comme nous l'avons fait pour obtenir la relation (37), introduisons ensuite les nouvelles notations pour les paramètres, nous obtenons les huit équations suivantes qui représentent un plan générateur de l'absolu :

$$\left\{\begin{array}{l} -a_4 v_1 + a_3 u_2 - a_2 u_3 + b_1 u_4 = 0, \\ -a_4 v_2 - a_3 u_1 + a_1 u_3 + b_2 u_4 = 0, \\ -a_4 v_3 + a_2 u_1 - a_1 u_2 + b_3 u_4 = 0, \\ \quad a_4 v_4 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 = 0, \\ -b_4 u_1 + b_3 v_2 - b_2 v_3 + a_1 v_4 = 0, \\ -b_4 u_2 - b_3 v_1 + b_1 v_3 + a_2 v_4 = 0, \\ -b_4 u_3 + b_2 v_4 - b_1 v_2 + a_3 v_4 = 0, \\ \quad b_4 u_4 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0. \end{array}\right. \tag{39}$$

Les paramètres a_i et b_i sont liés par la relation (38). Les quatre dernières équations se déduisent des quatre premières par le changement des a_i en b_i et des u_i en v_i.

Deuxième cas. — *Les u_i sont liés par une relation.* — Dans ce cas, la variété plane peut se représenter par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} c u_4 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3, \\ c v_1 = b_{11} u_1 + b_{12} u_2 + b_{13} u_3 + a_4 v_4, \\ c v_2 = b_{21} u_1 + b_{22} u_2 + b_{23} u_3 + a_5 v_4, \\ c v_3 = b_{31} u_1 + b_{32} u_2 + b_{33} u_3 + u_6 v_4. \end{array}\right. \tag{40}$$

Pour déterminer les paramètres, substituons ces valeurs dans l'équation (34) de l'absolu, il vient

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0,} \\ b_{12} + b_{21} = 0, & a_4 + a_1 = 0, \\ b_{13} + b_{31} = 0, & a_5 + a_2 = 0, \\ b_{23} + b_{32} = 0, & a_6 + a_3 = 0. \end{array}$$

Les équations (40) se ramènent aux suivantes :

$$\begin{aligned} cu_4 &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3, \\ c\varphi_1 &= b_{12} u_2 + b_{13} u_3 - a_1 \varphi_4, \\ c\varphi_2 &= - b_{12} u_1 + b_{23} u_3 - a_2 \varphi_4, \\ c\varphi_3 &= - b_{13} u_1 - b_{23} u_2 - a_3 \varphi_4. \end{aligned}$$

Combinons deux à deux les trois dernières relations et posons

(41). $$a_1 b_2 + a_2 b_{31} + a_3 b_{12} = - cc',$$

il vient

$$\begin{aligned} a_2 \varphi_1 - a_1 \varphi_2 - b_{12} u_4 - c' u_3 &= 0, \\ a_3 \varphi_1 - a_1 \varphi_3 - b_{13} u_4 + c' u_2 &= 0, \\ a_3 \varphi_2 - a_2 \varphi_3 - b_{23} u_4 - c' u_1 &= 0. \end{aligned}$$

De ces trois nouvelles équations, on déduit encore une relation ne contenant que les φ_i :

$$b_{23} \varphi_1 + b_{31} \varphi_2 + b_{12} \varphi_3 - c' \varphi_4 = 0.$$

Introduisons comme nouvelles notations des paramètres

$$c = a_4, \qquad b_{23} = b_1, \qquad b_{31} = b_2, \qquad b_{12} = b_3 \qquad \text{et} \qquad c' = b_4;$$

par suite, la relation (41) s'écrit alors

(42) $$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0.$$

Finalement, le plan générateur est représenté par les huit équations suivantes :

(43) $$\left\{ \begin{aligned} a_4 u_4 - a_1 u_1 - a_2 u_2 - a_3 u_3 &= 0, \\ a_4 \varphi_1 - b_3 u_2 + b_2 u_3 + a_1 \varphi_4 &= 0, \\ a_4 \varphi_2 + b_3 u_1 - b_1 u_3 + a_2 \varphi_4 &= 0, \\ a_4 \varphi_3 - b_2 u_1 + b_1 u_2 + a_3 \varphi_4 &= 0, \\ a_2 \varphi_1 - a_1 \varphi_2 - b_3 u_4 - b_4 u_3 &= 0, \\ - a_3 \varphi_1 + a_1 \varphi_3 - b_2 u_4 - b_4 u_2 &= 0, \\ a_3 \varphi_2 - a_2 \varphi_3 - b_1 u_4 - b_4 u_1 &= 0. \\ b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 \varphi_3 - b_4 \varphi_4 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Remarquons que, pour passer des équations (39) aux équations (43), c'est-à-dire d'un plan générateur à l'autre, il suffit de remplacer φ_4 par $-u_4$ et u_4 par $-\varphi_4$, en outre a_1, a_2, a_3 respectivement par b_1, b_2, b_3.

Troisieme cas. — *Les u_i sont liés par deux relations.* — Les équations générales de la variété plane sont alors

$$\begin{aligned}
u_3 &= a_{31} u_1 + a'_{32} u_2, \\
u_4 &= a'_{41} u_1 + a_{42} u_2, \\
v_1 &= a'_{11} u_1 + a'_{12} u_2 + a_{13} v_3 + a'_{14} v_4, \\
v_2 &= a'_{21} u_1 + a'_{22} u_2 + a'_{23} v_3 + a'_{24} v_4.
\end{aligned}$$

Pour que le plan soit sur l'absolu, il faut que

$$a_{11} = a_{22} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{ij} + a_{ji} = 0$$

Les équations se réduisent alors aux suivantes :

$$(44) \qquad \left\{ \begin{aligned}
u_3 &= \quad a_{31} u_1 + a'_{32} u_2, \\
u_4 &= \quad a'_{41} u_1 + a'_{42} u_2, \\
v_1 &= \quad a'_{12} u_2 - a'_{31} v_3 - a'_{41} v_4, \\
v_2 &= - a'_{12} u_1 - a'_{32} v_3 - a'_{42} v_4.
\end{aligned} \right.$$

dont on pourrait déduire quatre autres équations.

Mais ce plan n'est qu'un cas particulier du plan obtenu dans le premier cas. En effet, dans les équations (39), faisons $a_4 = 0$, il vient, en ne considérant que les quatre équations qui se trouvent au milieu du système,

$$\begin{aligned}
a_2 u_1 - a_1 u_2 + b_3 u_3 &= 0, \\
b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_4 &= 0, \\
- b_4 u_1 + b_3 v_2 - b_2 v_3 + a_1 v_4 &= 0, \\
- b_4 u_2 - b_3 v_1 + b_1 v_3 + a_2 v_4 &= 0.
\end{aligned}$$

En supposant $b_3 \neq 0$, résolvons ces équations respectivement par rapport à u_4, u_3, v_2, v_1, puis rangeons-les dans le même ordre que les équations (44),

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned}
u_3 &= - \frac{b_1}{b_3} u_1 - \frac{b_2}{b_3} u_2, \\
u_4 &= - \frac{a_2}{b_3} u_1 + \frac{a_1}{b_3} u_2, \\
v_1 &= - \frac{b_4}{b_3} u_2 + \frac{b_1}{b_3} v_3 + \frac{a_2}{b_3} v_4, \\
v_2 &= \frac{b_4}{b_3} u_1 + \frac{b_2}{b_3} u_2 - \frac{a_1}{b_3} v_4.
\end{aligned} \right.$$

Or, ces équations (45) sont identiques aux équations (44), dans

lesquels on a posé

$$a'_{12} = -\frac{b_4}{b_3}, \qquad a_{31} = -\frac{b_1}{b_3}, \qquad a'_{32} = -\frac{b_2}{b_3}, \qquad a'_{41} = -\frac{a_2}{b_3}, \qquad a'_{42} = \frac{a_1}{b_3}.$$

Quatrieme cas. — *Les u_i sont liés par trois relations.* — Les équations d'une variété plane à trois dimensions sont alors

$$\begin{aligned} u_2 &= a_{12} u_1, \\ u_3 &= a'_{31} u_1, \\ u_4 &= a'_{41} u_1, \\ v_1 &= a'_{11} u_1 + a'_{12} u_2 + a_{13} v_3 + a'_{14} v_4; \end{aligned}$$

pour que le plan soit situé sur l'absolu, il faut que les paramètres satisfassent aux conditions

$$a_{11} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{ij} + a_{ji} = 0.$$

Les équations se réduisent à

$$(46) \qquad \begin{cases} u_2 = & a_{21} u_1, \\ u = & a_{31} u_1, \\ u_4 = & a'_{41} u_1, \\ v_1 = & -a'_{21} v_2 - a_{31} v_3 - a'_{41} v_4. \end{cases}$$

Mais ce plan générateur n'est qu'un cas particulier du plan obtenu dans le deuxième cas. En effet, donnons aux paramètres des équations (43) les valeurs particulières suivantes

$$a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0,$$

et supposons $b_1 \neq 0$, les équations (43) s'écrivent alors

$$(47) \qquad \begin{cases} u_3 = & \frac{b_3}{b_1} u_1, \\ u_2 = & \frac{b_2}{b_1} u_1, \\ u_4 = & -\frac{b_4}{b_1} u_1, \\ v_1 = & -\frac{b_2}{b_1} v_2 - \frac{b_3}{b_1} v_3 + \frac{b_4}{b_1} v_4, \end{cases}$$

d'où l'on déduit les autres équations. Si l'on pose maintenant

$$a_{21} = \frac{b_3}{b_1}, \qquad a_{31} = \frac{b_2}{b_1}, \qquad a'_{41} = -\frac{b_4}{b_1},$$

on voit immédiatement que les deux systèmes d'équations (46) et (47) sont équivalents.

Cinquieme cas. — *Les u_i sont liés par quatre relations.* — La variété plane a dans ce cas pour équations

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0; \tag{48}$$

l'équation se trouve alors vérifiée, quelles que soient les valeurs attribuées aux v_i.

Or le plan générateur du cinquième cas n'est qu'un cas particulier du plan du premier cas; en effet, annulons dans les équations (39) tous les coefficients sauf b_4 différent de zéro, elles se réduisent aux équations (48).

De cette étude, il résulte que tous les plans générateurs de l'absolu se déduisent de deux cas généraux qui sont les deux premiers cas étudiés et représentés respectivement par les équations (39) et (43). Désignons le premier plan par P_3^+ et le second par P_3^- et introduisons maintenant dans leurs équations les coordonnées x_i.

Considérons le système d'équations (39) qui représente P_3^+, additionnons et soustrayons les membres de gauche des première et cinquième équations, des deuxième et sixième équations, etc., il vient

$$\left\{\begin{array}{l}
-a_4v_1 - b_4u_1 + a_3u_2 + b_3v_2 - a_2u_3 - b_2v_3 + b_1u_4 + a_1v_4 = 0,\\
-a_4v_1 + b_4u_1 + a_3u_2 - b_3v_2 - a_2u_3 + b_2v_3 + b_1u_4 - a_1v_4 = 0,\\
-a_4v_2 - b_4u_2 - a_3u_1 - b_3v_1 + a_1u_3 + b_1v_3 + b_2u_4 + a_2v_4 = 0,\\
-a_4v_2 + b_4u_2 - a_3u_1 + b_3v_1 + a_1u_3 - b_1v_3 + b_2u_4 - a_2v_4 = 0,\\
-a_4v_3 - b_4u_3 + a_2u_1 + b_2v_1 - a_1u_2 - b_1v_2 + b_3u_4 + a_3v_4 = 0,\\
-a_4v_3 + b_4u_3 + a_2u_1 - b_2v_1 - a_1u_2 + b_1v_2 + b_3u_4 - a_3v_4 = 0,\\
a_4v_4 + b_4u_4 + b_1u_1 + a_1v_1 + b_2u_2 + a_2v_2 + b_3u_3 + a_3v_3 = 0,\\
a_4v_4 - b_4u_4 + b_1u_1 - a_1v_1 + b_2u_2 - a_2v_2 + b_3u_3 - a_3v_3 = 0.
\end{array}\right. \tag{49}$$

A ces équations, il faut encore ajouter

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = 0. \tag{50}$$

Remplaçons maintenant u_i et v_i par leurs expressions (33) et posons

$$\left\{\begin{array}{llll}
a_1 = \alpha_0 + i\alpha_1, & a_2 = \alpha_2 + i\alpha_3, & a_3 = \alpha_4 + i\alpha_5, & a_4 = \alpha_6 + i\alpha_7,\\
b_1 = \alpha_0 - i\alpha_1, & b_2 = \alpha_2 - i\alpha_3, & b_3 = \alpha_4 - i\alpha_5, & b_4 = \alpha_6 - i\alpha_7.
\end{array}\right. \tag{51}$$

La relation (50) devient

$$(52)\qquad \alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\alpha_5^2+\alpha_6^2+\alpha_7^2=0,$$

et les équations (49) du plan générateur P_3^+ s'écrivent alors après avoir séparé la partie réelle de la partie imaginaire :

$$(P_3^+)\ (53)\quad \left\{\begin{array}{l}
\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4+\alpha_5x_5+\alpha_6x_6+\alpha_7x_7=0,\\
-\alpha_1x_0+\alpha_0x_1-\alpha_3x_2+\alpha_2x_3-\alpha_5x_4+\alpha_4x_5+\alpha_7x_6-\alpha_6x_7=0,\\
\alpha_2x_0-\alpha_3x_1-\alpha_0x_2+\alpha_1x_3-\alpha_6x_4-\alpha_7x_5+\alpha_4x_6+\alpha_5x_7=0,\\
\alpha_3x_0+\alpha_2x_1-\alpha_1x_2-\alpha_0x_3-\alpha_7x_4+\alpha_6x_5-\alpha_5x_6+\alpha_4x_7=0,\\
-\alpha_4x_0+\alpha_5x_1-\alpha_6x_2-\alpha_7x_3+\alpha_0x_4-\alpha_1x_5+\alpha_2x_6+\alpha_3x_7=0,\\
-\alpha_5x_0-\alpha_4x_1-\alpha_7x_2+\alpha_6x_3+\alpha_1x_4+\alpha_0x_5-\alpha_3x_6+\alpha_2x_7=0,\\
-\alpha_6x_0-\alpha_7x_1+\alpha_4x_2-\alpha_5x_3-\alpha_2x_4+\alpha_3x_5+\alpha_0x_6+\alpha_1x_7=0,\\
-\alpha_7x_0+\alpha_6x_1+\alpha_5x_2+\alpha_4x_3-\alpha_3x_4-\alpha_2x_5-\alpha_1x_6+\alpha_0x_7=0.
\end{array}\right.$$

Opérant d'une manière analogue sur le système (43), on obtient les équations du plan générateur P_3^-.

$$(P_3^-)\ (54)\quad \left\{\begin{array}{l}
-\alpha_0x_0+\alpha_1x_1-\alpha_2x_2+\alpha_3x_3-\alpha_4x_4+\alpha_5x_5+\alpha_6x_6-\alpha_7x_7=0,\\
-\alpha_1x_0-\alpha_0x_1-\alpha_3x_2-\alpha_2x_3-\alpha_5x_4-\alpha_4x_5+\alpha_7x_6+\alpha_6x_7=0,\\
-\alpha_2x_0-\alpha_3x_1+\alpha_0x_2+\alpha_1x_3+\alpha_6x_4+\alpha_7x_5+\alpha_4x_6+\alpha_5x_7=0,\\
\alpha_3x_0-\alpha_2x_1-\alpha_1x_2+\alpha_0x_3+\alpha_7x_4-\alpha_6x_5+\alpha_5x_6-\alpha_4x_7=0,\\
\alpha_4x_0+\alpha_5x_1+\alpha_6x_2+\alpha_7x_3-\alpha_0x_4-\alpha_1x_5+\alpha_2x_6+\alpha_3x_7=0,\\
-\alpha_5x_0+\alpha_4x_1+\alpha_7x_2-\alpha_6x_3+\alpha_1x_4-\alpha_0x_5+\alpha_3x_6-\alpha_2x_7=0,\\
\alpha_6x_0+\alpha_7x_1-\alpha_4x_2-\alpha_5x_3+\alpha_2x_4+\alpha_3x_5+\alpha_0x_6+\alpha_1x_7=0,\\
\alpha_7x_0-\alpha_6x_1+\alpha_5x_2-\alpha_4x_3-\alpha_3x_4+\alpha_2x_5+\alpha_1x_6-\alpha_0x_7=0.
\end{array}\right.$$

Si l'on fait varier les paramètres de ces plans, on obtient ainsi deux familles continues de plans générateurs; il reste à montrer que ces deux familles sont distinctes. Il sera possible de les distinguer à cause du signe des coefficients des variables x_i dans les formes linéaires tirées des équations du plan générateur.

Chacun de ces plans est défini par quatre équations linéaires en x_0, x_1, ..., x_7 à coefficients imaginaires. Soient

$$(55)\qquad U_1=0,\qquad U_2=0,\qquad U_3=0,\qquad U_4=0$$

ces quatre équations. Désignons par $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, $\overline{U}_3$, $\overline{U}_4$ les formes linéaires obtenues en remplaçant les coefficients de x_i par leurs con-

jugués. Considérons le déterminant Δ formé par les coefficients de x dans les formes

$$U_1,\quad U_2,\quad U_3,\quad U_4,\quad \overline{U}_1,\quad \overline{U}_2,\quad \overline{U}_3,\quad \overline{U}_4,$$

prises dans l'ordre indiqué. Ce déterminant est réel; en effet, le déterminant $\overline{\Delta}$, imaginaire conjugué à Δ, est égal à Δ, car il provient de celui-ci en échangeant la première ligne avec la cinquième, la deuxième avec la sixième, la troisième avec la septième, la quatrième avec la huitième ligne, donc

$$\Delta = \overline{\Delta}.$$

Cette égalité n'a lieu que si la partie imaginaire est nulle.

Théorème. — *Le signe du déterminant Δ est un invariant pour le plan générateur.*

Remplaçons les équations (55) par quatre équations équivalentes quelconques

$$(56)\qquad V_1 = 0,\qquad V_2 = 0,\qquad V_3 = 0,\qquad V_4 = 0.$$

Elles représentent le même plan générateur, c'est pourquoi les formes linéaires V_i s'expriment linéairement au moyen des formes U_i

$$(57)\qquad \left\{\begin{array}{l} V_1 = c_{11}U_1 + c_{12}U_2 + c_{13}U_3 + c_{14}U_4, \\ V_2 = c_{21}U_1 + c_{22}U_2 + c_{23}U_3 + c_{24}U_4, \\ V_3 = c_{31}U_1 + c_{32}U_2 + c_{33}U_3 + c_{34}U_4, \\ V_4 = c_{41}U_1 + c_{42}U_2 + c_{43}U_3 + c_{44}U_4, \\ \text{d'où l'on déduit} \\ \overline{V}_1 = \overline{c}_{11}\overline{U}_1 + \overline{c}_{12}\overline{U}_2 + \overline{c}_{13}\overline{U}_3 + \overline{c}_{14}\overline{U}_4, \\ \overline{V}_2 = \overline{c}_{21}\overline{U}_1 + \overline{c}_{22}\overline{U}_2 + \overline{c}_{23}\overline{U}_3 + \overline{c}_{24}\overline{U}_4, \\ \overline{V}_3 = \overline{c}_{31}\overline{U}_1 + \overline{c}_{32}\overline{U}_2 + \overline{c}_{33}\overline{U}_3 + \overline{c}_{34}\overline{U}_4, \\ \overline{V}_4 = \overline{c}_{41}\overline{U}_1 + \overline{c}_{42}\overline{U}_2 + \overline{c}_{43}\overline{U}_3 + \overline{c}_{44}\overline{U}_4. \end{array}\right.$$

Or, le déterminant Δ_1 de ces nouvelles formes linéaires s'obtient en multipliant le déterminant des formes U_i par le déterminant des coef-

cients de la substitution (57); ce dernier s'écrit

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{c_{11}} & \overline{c_{12}} & \overline{c_{13}} & \overline{c_{14}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{c_{21}} & \overline{c_{22}} & \overline{c_{23}} & \overline{c_{24}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{c_{31}} & \overline{c_{32}} & \overline{c_{33}} & \overline{c_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{c_{41}} & \overline{c_{42}} & \overline{c_{43}} & \overline{c_{44}} \end{vmatrix} = \delta\overline{\delta} > 0.$$

Donc

$$\Delta_1 = \Delta . \delta\overline{\delta}.$$

Puisque le facteur $\delta\overline{\delta}$ est positif, Δ_1 a le même signe que Δ; ce signe est donc bien un invariant pour le plan générateur.

Théorème II. — *Le signe du déterminant* Δ *est positif pour le plan générateur* P_1^+ *et négatif pour* P_1^-.

Dans chaque famille, le signe du déterminant Δ ne peut pas varier par raison de continuité; il suffit donc d'examiner le signe du déterminant pour chaque famille dans un cas particulier très simple.

Prenons, par exemple, les équations (48)

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0,$$

qui définissent un plan générateur de la première famille

$$U_1 = x_0 + ix_1 = 0, \quad U_2 = x_2 + ix_3 = 0, \quad U_3 = x_4 + ix_5 = 0, \quad U_4 = x_6 + ix_7 = 0,$$
$$\overline{U_1} = x_0 - ix_1 = 0, \quad \overline{U_2} = x_2 - ix_3 = 0, \quad \overline{U_3} = x_4 - ix_5 = 0, \quad \overline{U_4} = x_6 - ix_7 = 0.$$

Le déterminant Δ s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i \end{vmatrix} = +16.$$

Le déterminant Δ des plans générateurs de la première famille est donc positif, d'où la notation P_3^+.

Choisissons comme plan générateur de la seconde famille celui que l'on obtient en annulant les paramètres a'_{21}, a'_{31} et a'_{41} dans les équations (46). Celles-ci deviennent

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0, \qquad u_3 = 0, \qquad u_4 = 0.$$

Les formes linéaires sont

$$\begin{array}{llll} U_1 = x_0 - ix_1, & U_2 = x_2 + ix_3, & U_3 = x_4 + ix_5, & U_4 = x_6 + ix_7, \\ \overline{U_1} = x_0 + ix_1, & \overline{U_2} = x_2 - ix_3, & \overline{U_3} = x_4 - ix_5, & \overline{U_4} = x_6 - ix_7. \end{array}$$

et le déterminant des coefficients est égal à

$$\Delta = -16.$$

Tout plan générateur de la seconde famille est donc caractérisé par un déterminant Δ négatif, ce qui explique la notation P_3^-.

10. *Représentation des plans générateurs au moyen des octaves de Graves-Cayley.* — L'expression analytique des plans générateurs se simplifie grâce à l'introduction des octaves de Graves-Cayley.

Les octaves constituent un système de nombres complexes d'ordre huit, qui généralise les quaternions. La multiplication des octaves, comme celle des quaternions, n'est pas commutative, mais elle n'est pas non plus associative.

Considérons huit unités $1, e_1, e_2, \ldots, e_7$ qui satisfont aux règles suivantes de la multiplication :

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{c} e_i^2 = -1, \\ e_i = e_{i+1}e_{i+3} = -e_{i+3}e_{i+1} = e_{i+2}e_{i+6} = -e_{i+6}e_{i+2} = e_{i+4}e_{i+5} = -e_{i+5}e_{i+4} \\ \text{ou } e_i = e_{i+7} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). \end{array} \right.$$

Un octave est un nombre complexe de la forme

$$A = a_0 + \Sigma a_i e_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),$$

où a_0 et a_i sont des quantités réelles ou complexes.

Le module de cet octave a pour expression

$$|A| = \sqrt{a_0^2 + \Sigma a_i^2}.$$

Le produit des deux octaves

$$X = x_0 + \sum_1^7 x_i e_i \qquad \text{et} \qquad Y = y_0 + \sum_1^7 y_i e_i$$

est un octave

$$Z = z_0 + \sum_1^7 z_i e_i$$

qui a pour module le produit des modules des deux facteurs

$$z_0^2 + z_1^2 + \ldots + z_7^2 = (x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_7^2)(y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_7^2).$$

L'octave conjugué est défini par la relation

$$\overline{A} = a_0 - \sum_1^7 a_i e_i,$$

de telle sorte que

$$A\overline{A} = \overline{A}A = a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_7^2.$$

Deux octaves sont inverses l'une de l'autre lorsque leur produit est égal à l'unité.

Soit A^{-1} l'inverse de l'octave A, on a simultanément les équations

$$AA^{-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad A^{-1}A = 1,$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{a_0 - \sum_1^7 a_i e_i}{\sum_1^7 a_i^2}.$$

Si l'octave est unimodulaire, son conjugué est identique à son inverse.

La règle de la multiplication des unités e_i montre qu'un produit de plusieurs octaves n'est ni commutatif, ni associatif; en effet

$$(e_3 e_5)e_7 = e_2 e_7 = -e_6,$$

tandis que

$$e_3(e_5 e_7) = e_3 e_4 = e_6$$

Cependant, l'association de deux facteurs est possible dans le produit suivant de trois facteurs

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B.$$

Un point X, qui a pour coordonnées homogènes x_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, 7$), peut être représenté par l'octave

$$X = x_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_7 e_7 = x_0 + \sum_{k=1}^{7} x_k e_k.$$

THEORÈME. — *A tout point* A *pris sur l'absolu, dont les coordonnées seront considérées comme paramètres, correspondent deux plans générateurs à trois dimensions et de familles différentes. Leurs équations sont*

$$XA = 0, \quad \textit{pour le plan de la première famille;}$$
$$AX = 0, \quad \textit{pour le plan de la seconde famille :}$$

les produits doivent être effectués en tenant compte de l'ordre des facteurs.

En effet, chacun de ces produits effectués et annulés donne lieu à huit équations linéaires et homogènes dont les solutions x_k déterminent un point sur l'absolu.

Posons

$$A = a_0 + \sum_{1}^{7} a_k e_k \qquad (\text{mod } A = 0),$$

et

$$X = x_0 + \sum_{1}^{7} x_k e_k,$$

effectuons les produits XA et AX et annulons les coefficients respectifs des unités e_k, il vient

$$(P_3^+)\ XA = 0 \quad (59) \quad \left\{ \begin{array}{l}
a_0x_0 - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - a_4x_4 - a_5x_5 - a_6x_6 - a_7x_7 = 0, \\
a_1x_0 + a_0x_1 + a_4x_2 + a_7x_3 - a_2x_4 + a_6x_5 - a_5x_6 - a_3x_7 = 0, \\
a_2x_0 - a_4x_1 + a_0x_2 + a_5x_3 + a_1x_4 - a_3x_5 + a_7x_6 - a_6x_7 = 0, \\
a_3x_0 - a_7x_1 - a_5x_2 + a_0x_3 + a_6x_4 + a_2x_5 - a_4x_6 + a_1x_7 = 0, \\
a_4x_0 + a_2x_1 - a_1x_2 - a_6x_3 + a_0x_4 + a_7x_5 + a_3x_6 - a_5x_7 = 0, \\
a_5x_0 - a_6x_1 + a_3x_2 - a_2x_3 - a_7x_4 + a_0x_5 + a_1x_6 + a_4x_7 = 0, \\
a_6x_0 + a_5x_1 - a_7x_2 + a_4x_3 - a_3x_4 - a_1x_5 + a_0x_6 + a_2x_7 = 0, \\
a_7x_0 + a_3x_1 + a_6x_2 - a_1x_3 + a_5x_4 - a_4x_5 - a_2a_6 + a_0x_7 = 0,
\end{array} \right.$$

et, pour le second produit,

$$
(P_3^-)\quad AX = 0 \quad (60)\quad \left\{
\begin{array}{l}
a_0x_0 - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - a_4x_4 - a_5x_5 - a_6x_6 - a_7x_7 = 0,\\
a_1x_0 + a_0x_1 - a_4x_2 - a_7x_3 + a_2x_4 - a_6x_5 + a_5x_6 + a_3x_7 = 0,\\
a_2x_0 + a_4x_1 + a_0x_2 - a_5x_3 - a_1x_4 + a_3x_5 - a_7x_6 + a_6x_7 = 0,\\
a_3x_0 + a_7x_1 + a_5x_2 + a_0x_3 - a_6x_4 - a_2x_5 + a_4x_6 - a_1x_7 = 0,\\
a_4x_0 - a_5x_1 + a_1x_2 + a_6x_3 + a_0x_4 - a_3x_5 - a_2x_6 + a_5x_7 = 0\\
a_5x_0 - a_6x_1 - a_4x_2 + a_2x_3 + a_3x_4 + a_0x_5 - a_1x_6 - a_4x_7 = 0\\
a_6x_0 - a_4x_1 + a_7x_5 - a_5x_2 + a_2x_5 + a_1x_6 + a_0x_6 - a_5x_7 = 0\\
a_7x_0 - a_3x_1 - a_6x_2 + a_1x_3 - a_4x_4 + a_4x_5 + a_2x_6 + a_0x_7 = 0
\end{array}
\right.
$$

Si l'on peut identifier chacun de ces systèmes d'équations à l'un des systèmes (53) ou (54), il sera ainsi prouvé qu'ils représentent les deux familles de plans générateurs de l'absolu.

On passe des formules (53) aux formules (59) en remplaçant

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad \alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7$$

par

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad \alpha_0 \quad -\alpha_1 \quad -\alpha_2 \quad -\alpha_3 \quad -\alpha_4 \quad -\alpha_5 \quad \alpha_6 \quad -\alpha_7$$

La substitution effectuée sur les x a pour déterminant $+1$; donc le determinant Δ du système (59) est positif comme celui du système (53). Par suite, (59) représente un plan générateur P_4 de l'absolu.

On passe de (54) à (60) en remplaçant

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad \alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7$$

par

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad -x_3 \quad x_4 \quad -x_5 \quad -x_6 \quad x_7 \quad -\alpha_0 \quad -\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7$$

Le déterminant de la substitution sur les x est encore $+1$; le système (60) conduit donc à un déterminant Δ qui a le même signe que celui du système (54); il représente un plan générateur P_3 de l'absolu.

Comme exemple, choisissons une valeur particulière du paramètre A en prenant le point représenté par l'octave

$$A = e_0 + \iota e_1$$

A ce point correspondent les plans générateurs suivants :

$$X(e_0 + \iota e_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad (e_0 + \iota e_1)X = 0,$$

dont les développements fournissent les quatre équations

$$(61)\qquad XA = 0(P_3^+)\begin{cases} U_1 = x_0 - \iota x_1 = 0, \\ U_2 = x_2 + \iota x_4 = 0, \\ U_3 = x_3 + \iota x_7 = 0, \\ U_4 = x_5 + \iota x_6 = 0, \end{cases}$$

et

$$(62)\qquad AX = 0(P_3^-)\begin{cases} U_1 = x_0 - \iota x_1 = 0, \\ U_2 = x_2 - \iota x_4 = 0, \\ U_3 = x_3 - \iota x_7 = 0, \\ U_4 = x_5 - \iota x_6 = 0. \end{cases}$$

Le déterminant Δ des formes U_1, U_2, U_3, U_4, $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, $\overline{U}_3$, $\overline{U}_4$ de $XA = 0$ s'écrit

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +16$$

et celui de la forme $AX = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

Cet exemple confirme que le plan générateur $XA = 0$ appartient à la première famille P_3^+ et le plan $AX = 0$ à la seconde famille P_3^-.

11. *Propriétes des plans générateurs. Premiere propriété.* — Deux plans générateurs P_3 de la même famille n'ont en général aucun point commun. Ils ont une droite commune si les points correspondants qui les définissent sont conjugués.

En effet, soient deux points A et B différents auxquels correspondent deux plans différents P_3^+ de la première famille,

$$XA = 0 \qquad \text{et} \qquad XB = 0.$$

Supposons le point X_0 commun à ces deux plans, il vérifie alors les deux équations

$$X_0 A = 0 \qquad \text{et} \qquad X_0 B = 0.$$

Ces équations montrent que les points A et B sont dans le même plan générateur de la seconde famille, défini par le point X_0. La droite A et B est tout entière sur l'absolu, par suite

$$(A + \lambda B)(\bar{A} + \lambda \bar{B}) = 0,$$

ou

$$A\bar{A} + \lambda^2 B\bar{B} + \lambda(B\bar{A} + A\bar{B}) = 0.$$

Les points A et B étant sur l'absolu, les deux premiers termes s'annulent, il reste

$$B\bar{A} + A\bar{B} = 0,$$

ou

$$\sum_{i=0}^{7} a_i b_i = 0;$$

donc les deux points A et B sont situés dans le même hyperplan tangent à l'absolu et ils sont conjugués.

D'une manière générale, les propriétés des plans générateurs peuvent se démontrer en se basant sur la remarque que toutes les propriétés des plans générateurs ne changent pas si l'on effectue une substitution orthogonale quelconque qui conserve l'absolu. Ainsi tout plan de la première famille peut par cette substitution être ramené à un plan particulier quelconque de cette famille. Comme plan particulier, prenons P_3^+, obtenu dans le cinquième cas et représenté par les équations (48) :

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0, \quad \text{les } v_i \text{ etant arbitraires.}$$

Déterminons son intersection avec un plan quelconque de la même

famille P_3^+, donné par les équations (39). Il vient

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} a_4 v_1 &= 0,\\ a_4 v_2 &= 0\\ a_4 v_3 &= 0,\\ a_4 v_4 &= 0,\\ b_3 v_2 - b_2 v_3 + a_1 v_4 &= 0,\\ -b_3 v_1 + b_1 v_3 + a_2 v_4 &= 0,\\ b_2 v_1 - b_1 v_2 + a_3 v_4 &= 0,\\ a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Si $a_4 \neq 0$, ces équations admettent seulement la solution triviale $v_4 = 0$. Il n'existe donc aucun point commun aux deux plans générateurs, si leurs paramètres sont quelconques.

Si $a_4 = 0$, les quatre premières équations sont vérifiées quelles que soient les valeurs attribuées à v_4. Multiplions alors chaque membre des 5e, 6e et 7e équations, respectivement par v_1, v_2 et v_3 et additionnons, il vient

$$(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3)\, v_4 = 0$$

En vertu de la dernière équation, le premier facteur est nul, donc v_4 peut être quelconque.

Toutes les autres variables v s'expriment linéairement en fonction de v_4; il reste alors

$$\begin{aligned} b_3 v_2 - b_2 v_3 &= -a_1 v_4,\\ -b_3 v_1 + b_1 v_3 &= -a_2 v_4,\\ b_2 v_1 - b_1 v_2 &= -a_3 v_4,\\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Mais en combinant les deux premières équations, on en déduit la troisième; il n'y a donc que deux équations linéairement indépendantes. L'intersection des deux plans générateurs est définie par les équations

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 = u_2 = u_3 = u_4 &= 0,\\ b_3 v_1 &= b_1 v_3 + a_2 v_4,\\ b_3 v_2 &= b_2 v_3 - a_1 v_4, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles les paramètres sont liés par la relation

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

Soit $b_3 \neq 0$; introduisons les coordonnées homogènes x_i; deux variables restent arbitraires, l'intersection est une droite.

Soit $b_3 = 0$, tous les x_i deviennent arbitraires, les deux plans générateurs sont confondus.

Dans le cas où l'intersection est une droite, les coordonnées isotropiques du point B, qui définit le second plan P_3^+, sont a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_4, auxquelles on peut donner des valeurs quelconques, $b_3 \neq 0$ et $a_4 = 0$. Celles (a_i, b_i) du point A définissant le premier plan sont toutes nulles, sauf $b_1 = 0$. On remarque que la relation

$$\Sigma(a_i b_i + a_i b_i) = 0$$

est vérifiée, c'est-à-dire que les deux points A et B sont conjugués.

Deuxième propriété. — Deux plans générateurs, l'un P_3^+, l'autre P_3^-, c'est-à-dire de familles différentes, ont soit un point commun, soit un plan commun à deux dimensions.

Déterminons l'intersection du plan P_3^+ donné par les équations (48) avec le plan P_3^- représenté par le système (43); il vient

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned} & a_4 v_1 + a_1 v_4 = 0, \\ & a_4 v_2 + a_2 v_4 = 0, \\ & a_4 v_3 + a_3 v_4 = 0, \\ & a_2 v_1 - a_1 v_2 = 0, \\ & -a_3 v_1 + a_1 v_3 = 0, \\ & a_3 v_2 - a_2 v_3 = 0, \\ & b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 - b_4 v_4 = 0. \end{aligned}\right.$$

Si $a_4 \neq 0$, les coordonnées v_1, v_2, v_3 s'expriment au moyen de v_4; portons ces valeurs dans la dernière relation, celle-ci s'écrit

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4) v_4 = 0$$

Les paramètres a_i et b_i satisfont à la relation

$$\sum_{i=0}^{4} a_i b_i = 0,$$

par suite, v_4 peut prendre une valeur arbitraire.

L'intersection est déterminée par les équations

$$(66)\qquad \begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0, \\ v_1 = -\dfrac{a_1}{a_4} v_4, \quad v_2 = -\dfrac{a_2}{a_4} v_4, \quad v_3 = -\dfrac{a_3}{a_4} v_4. \end{cases}$$

Si l'on introduit les coordonnées homogènes x_i, on remarque que ces sept équations ne contiennent qu'une seule variable arbitraire, donc elles déterminent un point commun aux deux plans P_3^+ et P_3^-.

Si l'on a $a_4 = 0$, v_4 étant arbitraire, il faut aussi que l'on ait $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; l'intersection est définie par les équations

$$(67)\qquad \begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0, \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 - b_4 v_4 = 0. \end{cases}$$

Ces cinq équations contiennent deux variables indépendantes; par suite, elles déterminent un plan commun à deux dimensions.

Les coordonnées isotropiques du point A qui définit P_3^+ sont $a'_1 = b'_1 = a'_2 = b'_2 = a'_3 = b'_3 = a'_4 = 0$, et $b'_4 \neq 0$, celles du point B définissant P_3^- sont $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, et les b_i arbitraires. Par suite,

$$\Sigma(a'_i b_i + a_i b'_i) = 0,$$

les deux points sont donc conjugués.

12. *Congruences de Clifford.* — Une congruence de Clifford est une congruence de droites réelles rencontrant deux plans générateurs P_3 imaginaires conjugués de l'absolu.

Théorème I. — *Toute droite de la congruence définie par le plan générateur* P_3^+ *de paramètre* $A + iB$ *peut être considérée comme joignant deux points* X, Y *satisfaisant à l'équation*

$$(68)\qquad X\Lambda = YB.$$

En effet, soient les deux points conjugués $A \pm iB$ situés sur l'absolu, et dont les modules sont par conséquent nuls

$$|A \pm iB|^2 = A^2 - B^2 \pm 2iA|B = 0.$$

Cette relation peut être satisfaite en supposant les deux points A et B comme deux points réels et conjugués :

$$|A| = 1, \qquad |B| = 1 \qquad \text{et} \qquad A|B = 0.$$

A chaque point $A \pm iB$ correspond un plan générateur P_3^+ déter-

miné respectivement par les équations

$$(69) \qquad (X + iY)(A + iB) = 0, \qquad (X - iY)(A - iB) = 0.$$

Si l'on joint un point $X + iY$ du premier plan au point $X - iY$ du second plan, on obtient une droite dont les points satisfont à la relation

$$|X \pm iY|^2 = X^2 - Y^2 \pm 2iX|Y = 0.$$

Par suite, la droite qui s'appuie sur les deux plans P_3^+ passe par les deux points X et Y, situés dans le domaine réel à courbure unité; ces deux points sont en outre conjugués.

Des équations (69), on déduit

$$XA = YB \qquad \text{et} \qquad XB = -YA.$$

Ces deux relations sont équivalentes; en effet, dans le produit

$$(X + iY)(A + iB) = XA - YB + i(YA + XB),$$

si $XA = YB$, ce produit est purement imaginaire. Comme les deux points A et B sont conjugués, le module du second facteur est nul et celui du produit l'est aussi, ce qui entraîne

$$|YA + XB| = 0,$$

d'où

$$XB = -YA.$$

Ainsi toute congruence de Clifford, définie par les plans P_3^+ de paramètre $A + iB$, est déterminée par l'équation (68)

$$XA = YB$$

On établit de même que toute congruence de Clifford, définie par les plans P_3^- de paramètre $A + iB$ est déterminée par l'équation

$$(70) \qquad AX = BY.$$

Théorème II. — *A toute droite réelle déterminée par deux points réels et conjugués* A *et* B *correspondent deux congruences de Clifford, l'une définie par le plan* P_3^+, *l'autre par* P_3^-, *et réciproquement.*

Soient deux points A et B réels et conjugués; à la droite AB, on peut faire correspondre les deux congruences de Clifford, définies respectivement par les équations

$$XA = YB \qquad \text{et} \qquad AX = BZ.$$

Supposons le point X donné, déterminons les coordonnées du

point Y, conjugué de X, de la droite passant par X et appartenant à la première congruence, définie par le plan P_3^+,

$$Y = (XA)B^{-1}. \tag{71}$$

Remplaçons A, B, X et Y par leurs octaves correspondants, il vient

$$\left[y_0 + \sum_{i=1}^{7} y_i e_i\right] = \left\{\left[x_0 + \sum_{i=1}^{7} x_i e_i\right]\left[a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i\right]\right\}\left[b_0 - \sum_{i=1}^{7} b_i e_i\right].$$

Effectuons le produit du second membre en tenant compte de l'ordre des facteurs et de leur non-associativité; identifions ensuite dans les deux membres les coefficients des e_i, et, pour abréger, introduisons les 28 coordonnées plückériennes d'une droite dans l'espace à sept dimensions, en posant

$$p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i.$$

Ces coordonnées p_{ij} sont liées par les relations fondamentales

$$p_{ij}p_{kh} + p_{ik}p_{hj} + p_{ih}p_{jk} = 0.$$

Il en résulte alors pour les 8 coordonnées du point Y les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
y_0 = {} & \star\ (p_{01} - p_{42} - p_{65} - p_{73})x_1 + (p_{02} - p_{14} - p_{53} - p_{76})x_2 + (p_{03} - p_{17} - p_{25} - p_{64})x_3 \\
& + (p_{04} - p_{21} - p_{75} - p_{36})x_4 + (p_{05} - p_{16} - p_{32} - p_{47})x_5 + (p_{06} - p_{51} - p_{43} - p_{27})x_6 + (p_{07} - p_{31} - p_{62} - p_{54})x_7, \\
y_1 = {} & -(p_{01} - p_{42} - p_{65} - p_{73})x_0 + \star + (-p_{04} + p_{21} - p_{36} - p_{75})x_2 + (-p_{07} + p_{31} - p_{54} - p_{62})x_3 \\
& + (p_{02} - p_{14} + p_{53} + p_{76})x_4 + (-p_{06} + p_{51} - p_{27} - p_{43})x_5 + (p_{05} - p_{16} + p_{32} + p_{47})x_6 + (p_{03} - p_{17} + p_{25} + p_{64})x_7, \\
y_2 = {} & -(p_{02} - p_{14} - p_{53} - p_{76})x_0 + (p_{04} - p_{21} + p_{36} + p_{75})x_1 + \star + (-p_{05} - p_{16} + p_{32} - p_{47})x_3 \\
& + (-p_{01} + p_{42} - p_{65} - p_{73})x_4 + (p_{03} + p_{17} - p_{25} + p_{64})x_5 + (-p_{07} - p_{13} - p_{54} + p_{62})x_6 + (p_{06} + p_{51} - p_{27} + p_{43})x_7, \\
y_3 = {} & -(p_{03} - p_{17} - p_{25} - p_{64})x_0 + (p_{07} - p_{31} + p_{54} + p_{62})x_1 + (p_{05} + p_{16} - p_{32} + p_{47})x_2 + \star \\
& + (-p_{06} - p_{51} - p_{27} + p_{43})x_4 + (-p_{02} - p_{14} + p_{53} - p_{76})x_5 + (p_{04} + p_{21} - p_{36} + p_{75})x_6 + (-p_{01} - p_{42} - p_{65} + p_{73})x_7, \\
y_4 = {} & -(p_{04} - p_{21} - p_{75} - p_{36})x_0 + (-p_{02} + p_{14} - p_{53} - p_{76})x_1 + (p_{01} - p_{42} + p_{65} + p_{73})x_2 \\
& + (p_{06} + p_{51} + p_{27} - p_{43})x_3 + \star + (-p_{07} - p_{31} + p_{54} - p_{62})x_5 + (-p_{03} - p_{17} - p_{25} + p_{64})x_6 + (p_{05} + p_{16} + p_{32} - p_{47})x_7, \\
y_5 = {} & -(p_{05} - p_{16} - p_{32} - p_{47})x_0 + (p_{06} - p_{51} + p_{27} + p_{43})x_1 + (-p_{03} - p_{17} + p_{25} - p_{64})x_2 \\
& + (p_{02} + p_{14} - p_{53} + p_{76})x_3 + (p_{07} + p_{31} - p_{54} + p_{62})x_4 + \star + (-p_{01} - p_{42} + p_{65} - p_{73})x_6 + (-p_{04} - p_{21} - p_{36} + p_{75})x_7, \\
y_6 = {} & -(p_{06} - p_{51} - p_{43} - p_{27})x_0 + (-p_{05} + p_{16} - p_{32} - p_{47})x_1 + (p_{07} + p_{31} + p_{54} - p_{62})x_2 \\
& + (-p_{04} - p_{21} + p_{36} - p_{75})x_3 + (p_{03} + p_{17} + p_{25} - p_{64})x_4 + (p_{01} + p_{42} - p_{65} + p_{73})x_5 + \star + (-p_{02} - p_{14} - p_{53} + p_{76})x_7, \\
y_7 = {} & -(p_{07} - p_{31} - p_{62} - p_{54})x_0 + (-p_{03} + p_{17} - p_{25} - p_{64})x_1 + (-p_{06} - p_{51} + p_{27} - p_{43})x_2 \\
& + (p_{01} + p_{42} + p_{65} - p_{73})x_3 + (-p_{05} - p_{16} - p_{32} + p_{47})x_4 + (p_{04} + p_{21} + p_{36} - p_{75})x_5 + (p_{02} + p_{14} + p_{53} - p_{76})x_6 + \star .
\end{aligned}$$

Par le même point X, faisons passer une droite XZ appartenant à la seconde congruence P_3^-; le second point Z, conjugué de X, est déterminé par la relation

$$Z = B^{-1}(AX). \tag{72}$$

En remplaçant chaque octave par son développement, en effectuant le produit et en introduisant aussi les 28 coordonnées p_{ij} de la droite AB, on obtient les huit coordonnées suivantes du point Z :

$$\begin{aligned}
z_0 = {} & \star\ (p_{01}+p_{42}+p_{65}+p_{73})x_1 + (p_{02}+p_{14}+p_{53}+p_{76})x_2 + (p_{03}+p_{17}+p_{25}+p_{64})x_3 \\
& + (p_{04}+p_{21}+p_{36}+p_{75})x_4 + (p_{05}+p_{16}+p_{32}+p_{47})x_5 + (p_{06}+p_{51}+p_{27}+p_{43})x_6 + (p_{07}+p_{31}+p_{54}+p_{62})x_7, \\
z_1 = {} & -(p_{01}+p_{42}+p_{65}+p_{73})x_0 + \star\ + (p_{04}+p_{21}-p_{36}-p_{75})x_2 + (p_{07}+p_{31}-p_{54}-p_{62})x_3 \\
& + (-p_{02}-p_{14}+p_{53}+p_{76})x_4 + (p_{06}+p_{51}-p_{27}-p_{43})x_5 + (-p_{05}-p_{16}+p_{32}+p_{47})x_6 + (-p_{03}-p_{17}+p_{25}+p_{64})x_7, \\
z_2 = {} & -(p_{02}+p_{14}+p_{53}+p_{76})x_0 + (-p_{04}-p_{21}+p_{36}+p_{75})x_1 + \star\ + (p_{05}-p_{16}+p_{32}-p_{47})x_3 \\
& + (p_{01}+p_{42}-p_{65}-p_{73})x_4 + (-p_{03}+p_{17}-p_{25}+p_{64})x_5 + (p_{07}-p_{31}-p_{54}+p_{62})x_6 + (-p_{06}+p_{51}-p_{27}+p_{43})x_7, \\
z_3 = {} & -(p_{03}+p_{17}+p_{25}+p_{64})x_0 + (-p_{07}-p_{31}+p_{54}+p_{62})x_1 + (-p_{05}+p_{16}-p_{32}+p_{47})x_2 + \star \\
& + (p_{06}-p_{51}-p_{27}+p_{43})x_4 + (p_{02}-p_{14}+p_{53}-p_{76})x_5 + (-p_{04}+p_{21}-p_{36}+p_{75})x_6 + (p_{01}-p_{42}-p_{65}+p_{73})x_7, \\
z_4 = {} & -(p_{04}+p_{21}+p_{36}+p_{75})x_0 + (p_{02}+p_{14}-p_{53}-p_{76})x_1 + (-p_{01}-p_{42}+p_{65}+p_{73})x_2 \\
& + (-p_{06}+p_{51}+p_{27}-p_{43})x_3 + \star\ + (p_{07}-p_{31}+p_{54}-p_{62})x_5 + (p_{03}-p_{17}-p_{25}+p_{64})x_6 + (-p_{05}+p_{16}+p_{32}-p_{47})x_7, \\
z_5 = {} & -(p_{05}+p_{16}+p_{32}+p_{47})x_0 + (-p_{06}-p_{51}+p_{27}+p_{43})x_1 + (p_{03}-p_{17}+p_{25}-p_{64})x_2 \\
& + (-p_{02}+p_{14}-p_{53}+p_{76})x_3 + (-p_{07}+p_{31}-p_{54}+p_{62})x_4 + \star\ + (p_{01}-p_{42}+p_{65}-p_{73})x_6 + (p_{04}-p_{21}-p_{36}+p_{75})x_7, \\
z_6 = {} & -(p_{06}+p_{51}+p_{27}+p_{43})x_0 + (p_{05}+p_{16}-p_{32}-p_{47})x_1 + (-p_{07}+p_{31}+p_{54}-p_{62})x_2 \\
& + (p_{04}-p_{21}+p_{36}-p_{75})x_3 + (-p_{03}+p_{17}+p_{25}-p_{64})x_4 + (-p_{01}+p_{42}-p_{65}+p_{73})x_5 + \star\ + (p_{02}-p_{14}-p_{53}+p_{76})x_7, \\
z_7 = {} & -(p_{07}+p_{31}+p_{54}+p_{62})x_0 + (p_{03}+p_{17}-p_{25}-p_{64})x_1 + (p_{06}-p_{51}+p_{27}-p_{43})x_2 \\
& + (-p_{01}+p_{42}+p_{65}-p_{73})x_3 + (p_{05}-p_{16}-p_{32}+p_{47})x_4 + (-p_{04}+p_{21}+p_{36}-p_{75})x_5 + (-p_{02}+p_{14}+p_{53}-p_{76})x_6 + \star
\end{aligned}$$

On remarque que les coefficients des coordonnées x_i ou z_i sont des fonctions linéaires des coordonnées p_{ij} de la droite AB correspondant à la congruence; ils peuvent se grouper en 28 formes linéaires et indépendantes. Par conséquent, étant donnée une congruence, on pourra toujours déterminer à l'aide des coefficients précédents les 28 coordonnées de la droite AB qui correspond à cette congruence et l'on ne pourra en déterminer qu'une seule.

Théorème III. — *Toute congruence de Clifford correspond à une translation et réciproquement.*

Remarquons d'abord l'impossibilité de représenter les déplacements au moyen d'octaves.

En effet, faisons subir à un point X quelconque un déplacement représenté par l'octave O, ce qui l'amène à coïncider avec le point X',

$$X = OX.$$

Un nouveau déplacement fourni par l'octave O' fait passer X' en X'',

$$X'' = O'X' = O'(OX).$$

Mais si X subit le déplacement représenté par le produit OO', il ne viendra pas en général coïncider avec le point X''; on a

$$O'(OX) \neq (O'O)X,$$

les octaves n'étant pas associatifs. Par suite, les déplacements représentés par les octaves ne forment pas un groupe. L'octave ne peut donc pas généraliser le quaternion qui représente, grâce à sa propriété associative, tous les déplacements dans l'espace elliptique à trois dimensions.

On sait qu'une translation est un déplacement dans lequel la vitesse est constante quel que soit le point. Afin de déterminer les trajectoires suivies par les points soumis à une translation, prenons un point quelconque X de coordonnées x_i et faisons-lui subir un déplacement dont les composantes v_k de la vitesse s'expriment au moyen du système de bivecteurs

$$a_{ij} = -a_{ji},$$

d'où

$$(73) \qquad v_i = \sum a_{ik} x_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, 7).$$

Pour que le déplacement soit une translation, il faut que

$$\sum v_i^2 = \lambda \sum x_i^2.$$

λ étant une constante. Posons

$$V^2 = \sum_{i=0}^{7} v_i^2 = 1,$$

par suite

$$\sum_i \left(\sum_k a_{ik} x_k \right)^2 = \sum_i x_i^2,$$

ce qui fournit les relations suivantes entre les paramètres :

$$(74) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_k a_{ik}^2 = 1, \\ \text{et} \\ \displaystyle\sum_k a_{ik} a_{jk} = 0 \qquad (\text{si } i \neq j). \end{array} \right.$$

Ce vecteur V peut être représenté par un point analytique dont le carré scalaire est l'unité et par suite égal à la longueur du vecteur; ce point V est situé dans le plan polaire du point X par rapport à l'absolu. La droite XV réelle coupe l'absolu en deux points imaginaires conjugués $V \pm iX$ dont l'un $Y = V + iX$ a pour coordonnées

$$(75) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_0 = \left(\displaystyle\sum_{k \neq 0} a_{0k} x_k \right) + i x_0, \\ y_1 = \left(\displaystyle\sum_{k \neq 1} a_{1k} x_k \right) + i x_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_7 = \left(\displaystyle\sum_{k \neq 7} a_{7k} x_k \right) + i x_7 \qquad (k = 0, 1, \dots, 7). \end{array} \right.$$

Les coordonnées y_i dépendent des 8 paramètres x_i, liés par la relation $\Sigma x_i^2 = 1$. Le point Y se trouve bien sur l'absolu; en effet,

$$|Y|^2 = |V + iX|^2 = |V|^2 - |X|^2 + 2i V|X = 0,$$

car

$$|V|^2 = |X|^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad V|X = 0.$$

Examinons le cas particulier où les paramètres donnés sont a_{01}, a_{23}, a_{45}, a_{67}; la vitesse du point quelconque X a pour composantes

$$v_0 = a_{01} x_1, \qquad v_1 = -a_{01} x_0, \qquad v_2 = a_{23} x_3, \qquad v_3 = -a_{23} x_2, \qquad v_4 = a_{45} x_5,$$
$$v_5 = -a_{45} x_4, \qquad v_6 = a_{67} x_7, \qquad v_7 = -a_{67} x_6.$$

Le déplacement étant une translation, la vitesse est constante et

satisfait à la relation

$$\Sigma v_i^2 = a_{01}^2(x_0^2 + x_1^2) + a_{23}^2(x_2^2 + x_3^2) + a_{45}^2(x_4^2 + x_5^2) + a_{67}^2(x_6^2 + x_7^2) = 1,$$

par suite

$$a_{01} = a_{23} = a_{45} = a_{67} = 1.$$

Donc les coordonnées du point V sont

$$v_0 = x_1, \quad v_1 = -x_0, \quad v_2 = x_3, \quad v_3 = -x_2,$$
$$v_4 = x_5, \quad v_5 = -x_4, \quad v_6 = x_7, \quad v_7 = -x_6,$$

et celles du point $Y = V + iX$,

$$(76) \left\{ \begin{array}{llll} y_0 = x_1 + ix_0, & y_1 = -x_0 + ix_1, & y_2 = x_3 + ix_2, & y_3 = -x_2 + ix_3, \\ y_4 = x_5 + ix_4, & y_5 = -x_4 + ix_5, & y_6 = x_7 + ix_6, & y_7 = -x_6 + ix_7. \end{array} \right.$$

Montrons maintenant que la trajectoire de tout autre point choisi sur la droite XV et soumis à la même translation perce l'absolu au même point Y. Soit le point X′ déterminé par la relation

$$X' = X\cos\alpha + V\sin\alpha,$$

où $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ sont des constantes, de telle sorte que $|X'| = 1$. La vitesse $V' = 1$ de ce point peut être aussi représentée par le point V′, conjugué à X′ par rapport à l'absolu. Or la vitesse de X′ peut s'écrire

$$V' = \cos\alpha . V + \sin\alpha\,(\text{vitesse de } V).$$

Comme $X' | V' = 0$, on a donc vitesse de $V = -X$ et

$$V' = \cos\alpha . V - \sin\alpha . X.$$

La droite X′V′ rencontre l'absolu en deux points dont l'un a pour expression

$$\begin{aligned} V' + iX' &= -X\sin\alpha + V\cos\alpha + i(X\cos\alpha + V\sin\alpha) \\ &= iX(\cos\alpha + i\sin\alpha) + V(\cos\alpha + i\sin\alpha) = e^{i\alpha}(V + iX). \end{aligned}$$

Les coordonnées de ce point ne diffèrent donc de celles du point Y que par le facteur constant $e^{i\alpha}$. Géométriquement, ce point se confond avec le point Y ; analytiquement, $e^{i\alpha}(V + iX)$ représente une partie des points analytiques imaginaires situés sur la droite XV.

Faisons passer par le point X une droite quelconque XX_1 réelle, et

démontrons que les trajectoires de tous les points de cette droite, animés du même mouvement de translation, coupent l'absolu suivant une même droite. Soit X_1 un point, pris en dehors de la droite XV, soumis à une translation dont la vitesse est égale à l'unité et que l'on représente au moyen du point V_1. La droite X_1V_1 rencontre l'absolu au point $Y_1 = V_1 + iX_1$. Tout autre point de cette droite X_1V_1, tel que

$$X'_1 = X_1 \cos\beta + V_1 \sin\beta,$$

animé d'un même mouvement de translation dont la vitesse est représentée par le point V'_1, décrit une trajectoire perçant l'absolu au point

$$Y'_1 = e^{i\beta}(V_1 + iX_1),$$

qui se confond géométriquement avec le point Y_1.

Sur la droite XX_1, considérons un troisième point X_2 déterminé par

$$X_2 = \lambda X + \mu X_1,$$

λ et μ étant des paramètres réels, tels que $|X_2| = 1$, par suite

$$|X_2|^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos\theta = 1,$$

θ étant la distance des deux points X et X_1.

Donnons à ce point X_2 une translation de vitesse un, dont le point représentatif V_2 a pour expression

$$V_2 = \lambda V + \mu V_1.$$

La trajectoire X_2V_2 coupe l'absolu en

$$\begin{aligned} Y_2 = V_2 + iX_2 &= \lambda V + \mu V_1 + i(\lambda X + \mu X_1) \\ &= \lambda(V + iX) + \mu(V_1 + iX_1) = \lambda Y + \mu Y_1, \end{aligned}$$

ou

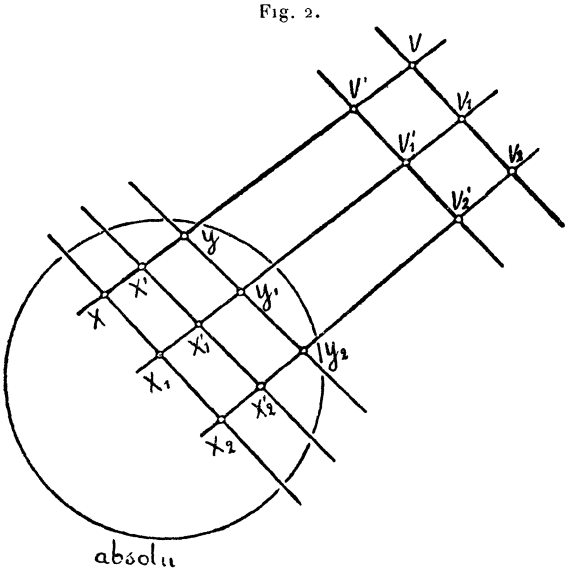
$$Y_2 = Y + \frac{\mu}{\lambda} Y_1.$$

Le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ est réel; le module de Y_2 est nul, donc le point Y_2 appartient à l'absolu de même que la droite YY_1. Par conséquent X_2 décrivant la droite XX_1, le point Y_2 décrit la droite YY_1 sur l'absolu.

De plus, tout point de la droite $X'X'_1$ animé de la même translation, décrit une trajectoire s'appuyant sur la droite YY_1. En effet, considé-

rons le point X_2 à l'intersection des droites $X'X'_1$ et X_2V_2 (voir *fig.* 2). Soumis à la même translation de vitesse V'_2, il décrit une trajec-

Fig. 2.



toire $X_2V'_2$ qui coupe l'absolu en un point $V'_2 + iX'_2$, dont l'expression est

$$V'_2 + iX'_2 = \lambda V' + \mu V'_1 + i(\lambda X' + \mu X'_1) = \lambda(V' + iX') + \mu(V'_1 + iX'_1),$$

ou

$$Y'_2 = \lambda e^{i\alpha} Y + \mu e^{i\beta} Y_1,$$

que l'on peut aussi écrire

$$Y'_2 = Y + \frac{\mu}{\lambda} e^{i(\beta-\alpha)} Y_1.$$

On en conclut que Y'_2 se confond avec Y_2 et que ce point Y'_2 se trouve sur la droite YY_1.

Dans ce qui précède, on a supposé que les trois points Y, Y_1 et Y_2 communs avec l'absolu étaient tous différents; autrement dit, que deux droites différentes telles que XV et X_1V_1 ne coupent pas l'absolu en un même point.

Supposons en effet que les deux points Y et Y_1 soient confondus, ils ne diffèrent alors que par un facteur constant $\rho + i\sigma$, par exemple, mais tel que $\rho^2 + \sigma^2 = 1$, car sur la droite réelle XV ne se trouvent en

effet que des points réels et des points imaginaires conjugués. Ces deux points Y et Y_1 sont donc liés par

$$V_1 + iX_1 = (\rho + i\sigma)(V + iX),$$

d'où l'on tire

$$V_1 = \rho V - \sigma X, \qquad |V_1| = 1,$$
$$X_1 = \sigma V + \rho X, \qquad |X_1| = 1.$$

Mais ces deux relations expriment que V_1 et X_1 se trouvent sur la même droite XV; par suite, la droite X_1V_1, contrairement à l'hypothèse, se confond avec XV. Donc si les droites sont différentes, les points Y et Y_1 sont aussi distincts.

Il en résulte que si tous les points d'une droite sont animés d'un même mouvement de translation, les trajectoires décrites par ces points sont des droites qui s'appuient sur la même droite isotrope de l'absolu. L'ensemble de toutes ces droites isotropes forme une variété plane représentée par les équations

$$(77)\quad \begin{cases} \star \quad a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{07}x_7 + ix_0 = 0, \\ a_{10}x_0 \quad \star \quad + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{17}x_7 + ix_1 = 0, \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 \quad \star \quad + a_{23}x_3 + \ldots + a_{27}x_7 + ix_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{70}x_0 + a_{71}x_1 + a_{72}x_2 + \ldots\ldots\ldots \quad \star \quad + ix_7 = 0. \end{cases}$$

Cette variété plane ne dépend que de 6 paramètres réels indépendants. En effet, les points de cette variété sont constitués par les points sur l'absolu des droites réelles XV, qui dépendent de 6 paramètres réels, donc les points de la variété plane dépendent aussi de 6 paramètres réels et, au point de vue complexe, le nombre de dimensions est égal à la moitié du nombre de paramètres, soit trois dimensions. Cette variété est un plan générateur P_3 de l'absolu.

Ainsi dans le cas particulier où les trajectoires coupent l'absolu au point de coordonnées (76), ces droites appartiennent à une congruence de Clifford s'appuyant sur les plans générateurs P_3^+ imaginaires conjugués

$$(78)\quad \begin{cases} x_1 \pm ix_0 = 0, \\ x_3 \pm ix_2 = 0, \\ x_5 \pm ix_4 = 0, \\ x_7 \pm ix_6 = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, à toute congruence de Clifford définie soit par l'équation $XA = YB$, soit par $AX = BY$, est associée une translation déterminée soit par le vecteur $V = (XA)B^{-1}$, soit par $V = B^{-1}(AX)$ et dont les droites de la congruence sont les trajectoires.

En effet, les droites de la congruence $XA = YB$ s'appuient sur deux plans générateurs P_1 imaginaires conjugués de paramètres $A \pm iB$. En vertu du théorème précédent, toutes ces droites sont les trajectoires d'une translation dont la vitesse en un point X est déterminée par les coordonnées du point conjugué à X. Ce point est précisément Y qui est défini par

$$V = Y = (XA)B^{-1}.$$

Or les composantes de cette vitesse sont données par les expressions de la page 50; le système de bivecteurs a_{ij} s'exprime donc linéairement au moyen des coordonnées pluckériennes p_{ij} d'une droite AB, par exemple dans le cas de la translation de première espèce

$$a_{01} = p_{01} - p_{23} - p_{45} - p_{67}, \ldots.$$

13. *Les deux espèces de parallélisme de l'espace elliptique à sept dimensions.* — Pour définir un parallélisme, il suffit de définir l'équipollence de deux vecteurs satisfaisant aux conditions du n° 5.

Soient deux points X et Y représentés respectivement par deux octaves; le vecteur $\overrightarrow{XY}$ est l'ensemble des deux points, dont l'un X est l'origine et l'autre Y l'extrémité.

Deux vecteurs $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{X'Y'}$ sont dits équipollents de première espèce si l'on a

$$X^{-1}Y = X'^{-1}Y' \tag{79}$$

et ils sont équipollents de seconde espèce si l'on a

$$YX^{-1} = Y'X'^{-1}. \tag{80}$$

Mais cette première définition peut être généralisée de la manière suivante :

Étant donné un octave unitaire A, les deux vecteurs $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{X'Y'}$

sont équipollents de première espèce si l'on a

$$X^{-1}(YA) = X'^{-1}(Y'A) \tag{81}$$

et ils sont équipollents de seconde espèce si l'on a

$$(AY)X^{-1} = (AY')X'^{-1}. \tag{82}$$

Si l'on pose $A = 1$, on retrouve les premières définitions (79) et (80) de l'équipollence de deux vecteurs.

De la définition d'équipollence de vecteurs se déduit celle du parallélisme de droites. Deux droites sont parallèles de première espèce (ou de seconde espèce) si tout vecteur porté sur l'une est équipollent de première espèce (ou de seconde espèce) à un vecteur porté sur l'autre.

Théorème. — *A chaque octave réel A, désignant un point fixé une fois pour toutes, correspondent un parallélisme de première espèce et un parallélisme de seconde espèce.*

Il suffit de montrer qu'il existe des droites jouissant des propriétés qui définissent le parallélisme de première espèce.

Soient deux points X, Y conjugués, par lesquels on fait passer une droite appartenant à la congruence de Clifford de paramètres A et U, s'appuyant sur P_3^1. L'équation de cette droite est

$$YA = XU.$$

Par deux autres points X', Y' conjugués, faisons passer une droite de la même congruence, elle est déterminée par l'équation

$$Y'A = X'U.$$

On en déduit

$$U = X^{-1}(YA) = X'^{-1}(Y'A);$$

ce qui montre que les deux vecteurs XY et X'Y' sont équipollents de première espèce. Par suite, toutes les droites de la congruence sont parallèles de première espèce. Il en résulte immédiatement que les droites de la congruence AU jouissent des trois premières propriétés des droites parallèles.

A ce même vecteur AU correspond aussi la congruence

$$AY = UX,$$

dont toutes les droites sont parallèles de seconde espèce.

Traçons par le même point A un autre vecteur U′, tel que l'extrémité U′ soit conjuguée à A. A ce vecteur correspondent les deux congruences de Clifford :

$$YA = XU' \qquad \text{et} \qquad AY = U'X,$$

formées la première de droites parallèles de première espèce, la seconde de droites parallèles de seconde espèce.

Il reste à déterminer les conditions pour que deux congruences de même espèce soient isogonales.

14. *Isogonalité de deux congruences de Clifford de même espèce.*

THÉORÈME. — *Deux congruences de Clifford de même espèce sont isogonales si les droites* AB *et* A′B′ *qui les définissent sont concourantes.*

Avant de démontrer ce théorème fondamental, établissons la condition pour qu'une combinaison linéaire des coordonnées de deux droites détermine une nouvelle droite.

LEMME. — *Si deux droites* AB *et* A′B′ *de coordonnées respectives* p_{ij} *et* p'_{ij} *sont concourantes et si* λ *et* μ *sont des constantes quelconques, les* 28 *combinaisons linéaires* $\lambda p_{ij} + \mu p'_{ij}$ *représentent aussi les coordonnées d'une nouvelle droite passant par l'intersection des droites* AB, A′B′.

La condition est nécessaire. En effet, les 28 coordonnées p_{ij} et p'_{ij} des droites AB et A′B′ satisfont aux relations fondamentales

$$F(p_{ij}) = p_{ij}p_{lk} + p_{ij}p_{hj} + p_{ih}p_{jk} = 0$$

et

$$F(p'_{ij}) = 0.$$

Si les expressions $\lambda p_{ij} + \mu p'_{ij}$ sont les coordonnées d'une droite, il faut qu'elles satisfassent à la relation fondamentale

$$F(\lambda p_{ij} + \mu p'_{ij}) = 0.$$

En développant, il vient

$$\lambda^2 F(p_{ij}) + \mu^2 F(p'_{ij}) + \lambda\mu(p'_{ij}p_{kh} + p_{ij}p'_{lh} + p'_{ij}p_{hj} + p_{ih}p'_{hj} + p'_{ih}p_{jk} + p_{ih}p'_{jk}) = 0.$$

Les coefficients de λ^2 et μ^2 s'évanouissent, il ne reste donc plus que la condition

$$p'_{ij}p_{kh}+p_{ij}p'_{kh}+p'_{ik}p_{hj}+p_{ik}p'_{hj}+p'_{ih}p_{jk}+p_{ih}p'_{jk}=0,$$

qui doit être remplie. C'est précisément celle que les coordonnées des deux droites AB et A'B' doivent vérifier lorsque celles-ci sont concourantes.

La condition est suffisante. — Si les droites sont concourantes, les 28 combinaisons $\lambda p_{ij}+\mu p'_{ij}$ représentent les coordonnées d'une droite qui passe par le point commun à AB et à A'B'.

Démonstration du théorème fondamental. — Aux droites AB et A'B' de coordonnées respectives p_{ij} et p correspondent deux congruences de même espèce, définies respectivement par les équations

$$XA=YB \qquad \text{et} \qquad XA'=ZB'.$$

Par un point quelconque X passe une seule droite de chacune des congruences, et, à l'aide des expressions de la page 50, il est possible de trouver un second point Y ou Z, conjugués à X, sur chacune de ces droites.

Pour que les deux congruences soient isogonales, il faut et il suffit que l'angle formé par deux droites de chaque congruence soit indépendant du point X. Le calcul direct de cet angle au moyen des expressions de la page 50 serait trop long; c'est pourquoi il est préférable d'utiliser la propriété que possèdent les droites de toute congruence de Clifford d'être les trajectoires d'une translation.

Soient donc deux congruences isogonales et θ l'angle de ces deux congruences, V et V' les vitesses de translation du point X suivant chacune des droites de la congruence (*fig.* 3),

$$V=\sum_{k\neq i} a_{ik}x_k, \qquad V'=\sum_{k\neq i} a'_{ik}x_k \qquad (k=0,1,\ldots,7).$$

Supposons en outre

$$V^2=V'^2=1.$$

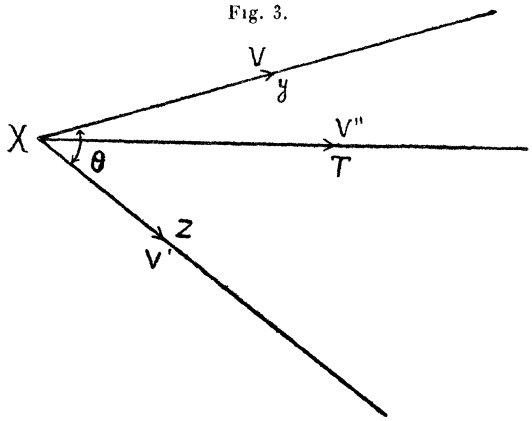
Soumettons ce point X à une translation de vitesse V'' donnée par

l'expression

$$V'' = \lambda V + \mu V' = \sum_{k \neq i} a''_{ik} x_k = \sum_{k \neq i} (\lambda a_{ik} + \mu a'_{ik}) x_k,$$

où λ et μ sont des constantes quelconques.

Fig. 3.



Le carré de cette vitesse de translation est constant, car on a

$$V''^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos\theta = \text{const.}.$$

$\cos\theta$ étant égal au produit scalaire des deux vecteurs V et V'. Le vecteur V'' représentant cette vitesse de translation est porté par une droite XV'' appartenant à une troisième congruence de même espèce que les deux autres. Cette nouvelle congruence est définie par une droite A''B'' de coordonnées p_{ij}, telle que l'on a

$$XA'' = TB''.$$

Or on sait, d'après le n° 12, que chaque système de bivecteurs a_{ik}, a'_{ik}, a''_{ik} s'exprime linéairement au moyen des coordonnées de la droite qui correspond à la congruence. De la relation

$$a''_{ik} = \lambda a_{ik} + \mu a'_{ik}$$

on déduit une relation semblable entre les coordonnées des trois droites

$$p''_{ij} = \lambda p_{ij} + \mu p'_{ij}.$$

Mais, en vertu du lemme, pour que les p''_{ij} représentent aussi les coordonnées d'une droite, quels que soient λ et μ, il faut et il suffit que les deux droites AB et A'B' soient concourantes. Deux congruences isogonales de même espèce correspondent donc à deux droites AB, A'B' concourantes.

Réciproque. — *Deux droites concourantes définissent deux congruences de même espèce qui sont isogonales.*

Soient deux droites AB et AB' dont le point commun A est conjugué aux deux autres B et B'. A la droite AB correspond la congruence de Clifford

$$XA = YB$$

et à AB' la congruence de même espèce que la première, dont l'équation est

$$XA = YB'.$$

Par un point X quelconque passe une droite de chaque congruence; la première est déterminée par le point Y, conjugué à X, ayant pour expression

$$Y = (XA)B^{-1}$$

et la seconde par le point Z, conjugué aussi à X,

$$Z = (XA)B'^{-1}.$$

Le produit XA commun peut être considéré comme une constante que je désigne par C.

Or, dans l'espace elliptique, la formule

$$U' = CU$$

définit un déplacement faisant passer du point U au point U'.

Par suite, les deux relations

$$Y = CB^{-1} \qquad \text{et} \qquad Z = CB'^{-1}$$

indiquent que B et B' subissent le même déplacement, et la distance des deux points B^{-1} et B'^{-1} est égale à celle des deux points transformés Y et Z. Puisque le point A est conjugué aux points B et B', la distance des points BB' est égale à l'angle $\widehat{BAB'}$, de même la

distance YZ est égale à l'angle $\widehat{YXZ}$; comme $BB' = YZ$, on en conclut que les angles $\widehat{BAB'}$ et $\widehat{YXZ}$ sont aussi égaux. Quel que soit le point X, les droites des deux congruences forment des angles égaux.

C. Q. F. D.

Il résulte des théorèmes précédents qu'à toutes les droites issues d'un point fixe A correspondent des congruences qui possèdent toutes les propriétés d'un parallélisme. On peut en outre énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *L'angle que font deux congruences de Clifford de même parallélisme est égal à l'angle des droites correspondantes.*

Ce théorème peut aussi être démontré par le calcul direct de l'angle.

Soient deux droites AB et AB' concourantes et de coordonnées respectives p_{ij} et p'_{ij}; leur angle θ est déterminé par

$$\cos\theta = \frac{\Sigma p_{ij} p'_{ij}}{\sqrt{\Sigma p_{ij}^2}\sqrt{\Sigma p'^2_{ij}}} \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, 7).$$

Les congruences de Clifford correspondant à ces droites sont isogonales. Choisissons le point X_0 de coordonnées

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = x_2 = \ldots = x_7 = 0,$$

et déterminons les droites $X_0 Y_0$ et $X_0 Z_0$ de chacune des congruences. Les coordonnées Y_0 et Z_0 de ces droites s'obtiennent au moyen des expressions de la page 50 :

$$y_0 = 0, \qquad z_0 = 0,$$
$$y_i = -q_{0i}, \qquad z_i = -q'_{0i}$$
$$(i = 1, \ldots, 7)$$

si l'on pose

$$q_{0i} = p_{0,i} - p_{i+3,i+1} - p_{i+6,i+2} - p_{i+5,i+4}$$

et

$$p_{0,i+7} = p_{0,i}.$$

Les q' se déduisent des mêmes expressions en accentuant les p.

Le module de chaque point étant l'unité, on peut écrire

$$\Sigma y_i^2 = \Sigma q_{0i}^2 = \Sigma p_{ij}^2 + 2\Sigma p_{ij} p_{kh} = 1.$$

Le second terme de cette relation s'annule, parce qu'il est formé par

les relations fondamentales entre les coordonnées p_{ij} d'une droite; il ne reste que

$$\Sigma p_{ij}^2 = 1 \qquad \text{et aussi} \qquad \Sigma p_{ij}'^2 = 1.$$

L'angle des deux droites X_0Y_0 et X_0Z_0 est donné par la relation

$$\cos(X_0Y_0,\ X_0Z_0) = \frac{\Sigma q_{0i} q'_{0i}}{\sqrt{\Sigma q_{0i}^2}\sqrt{\Sigma q_{0i}'^2}}.$$

Le dénominateur est égal à l'unité, tandis que le numérateur peut s'écrire

$$\Sigma q_{0i} q'_{0i} = \Sigma p_{ij} p'_{ij} + \Sigma p_{ij} p'_{kh}.$$

Or les droites correspondantes AB et AB′ étant concourantes, leurs coordonnées satisfont aux relations

$$\Sigma p_{ij} p'_{kh} = 0,$$

par suite

$$\cos\left(\widehat{X_0Y_0,\ X_0Z_0}\right) = \Sigma p_{ij} p'_{ij} = \cos\theta.$$

donc l'angle de deux droites quelconques appartenant à deux congruences de Clifford de même parallélisme est égal à l'angle des droites correspondantes.

15. *Le principe de trialité.* — En résumé, il existe, dans l'espace elliptique réel à sept dimensions, une infinité de parallélismes se partageant en deux espèces distinctes.

Sur deux plans générateurs P_3^+ de l'absolu imaginaires conjugués et de la première famille, ayant pour équation

$$(X + iY)(A \pm iB) = 0,$$

s'appuie une congruence de droites réelles. Cette congruence de Clifford définie par la droite AB, A et B étant deux points conjugués par rapport à l'absolu, a pour équation

$$XA = YB.$$

L'ensemble des congruences déterminées par toutes les droites réelles passant par le point A possède les propriétés du parallélisme +, défini par la relation

$$(\text{parallelisme } +) \qquad Y^{-1}(XA) = Y'^{-1}(X'A).$$

D'une manière analogue, deux plans générateurs P_3^- de l'absolu, imaginaires conjugués, de même paramètre $A + iB$, mais de la seconde famille

$$(A \pm iB)(X + iY) = 0,$$

définissent une congruence de droites réelles ayant pour équation

$$AX = BY.$$

L'ensemble des congruences de Clifford, qui correspondent à toutes les droites passant par un même point A, forme un parallélisme —, défini par la relation

$$\text{(parallelisme —)} \qquad (AX)\,Y^{-1} = (AX')\,Y'^{-1}.$$

Par suite, à tout point A de l'espace réel à sept dimensions ou d'un espace auxiliaire correspondent un parallélisme + et un parallélisme — et à toute droite AB (A conjugué de B) correspondent une congruence de Clifford définie par P_3^+ et une congruence de Clifford définie par P_3^-.

L'espace elliptique réel à sept dimensions peut donc être envisagé comme formé de trois espèces d'éléments différents; chacun d'eux comprenant tout l'espace

point, parallelisme +, parallelisme —,

ou bien

droite, congruence +, congruence —.

De chaque théorème de la géométrie projective de cet espace se déduisent cinq autres théorèmes qui peuvent ne pas être tous différents; ils proviennent des six transformations que l'on peut établir entre les trois éléments de l'espace.

Le principe de dualité de la géométrie projective est remplacé par le principe de trialité, à cette différence cependant que les nouvelles transformations ne sont plus des transformations de contact comme celles qui se déduisent du principe de dualité:

16. *Distance de deux parallélismes de même espèce.* — Le parallélisme étant considéré comme un élément de l'espace qui correspond au point, le principe de trialité pose donc le problème suivant :

De même qu'il existe une distance entre deux points, il doit y avoir aussi une distance entre deux parallélismes de même espèce; le problème à résoudre consiste à déterminer cette distance.

Lemme I. — *Il existe une congruence* (C) *et une seule commune à deux parallélismes de même espèce.*

Soient deux parallélismes de même espèce définis respectivement par les deux points A et A′ distincts. A chacun de ces points correspondent ∞^6 congruences appartenant au même parallélisme; chaque congruence est définie par une droite passant par l'un des points. A la droite commune AA′ correspond donc une congruence commune aux deux parallélismes et, comme il n'existe qu'une seule droite commune aux deux faisceaux de ∞^6 droites, il n'y a donc qu'une seule congruence (C) commune aux deux parallélismes.

Lemme II. — *Étant donnés deux parallelismes de même espèce ayant* (C) *comme congruence commune, il existe dans le second parallélisme une congruence* (Γ′) *orthogonale à* (C) *et isogonale à une congruence quelconque* (Γ) *orthogonale aussi à* (C) *et appartenant au premier parallélisme.*

A chaque parallélisme correspond un point que l'on peut considérer comme appartenant à un espace auxiliaire; cet espace étant aussi réel, elliptique à sept dimensions et rapporté à un absolu identique à celui du premier espace.

Au premier parallélisme que l'on peut supposer de première espèce, représenté par l'équation

$$X^{-1}(YA) = X'^{-1}(Y'A),$$

correspond le point A de l'espace auxiliaire; au second parallélisme

$$X^{-1}(YA') = X'^{-1}(Y'A')$$

correspond le point A′ de l'espace auxiliaire.

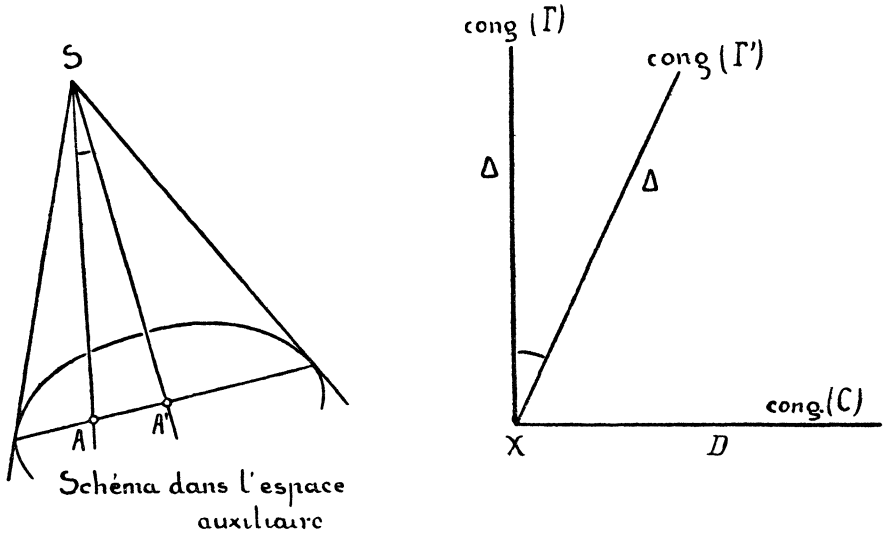
A la congruence commune (C) correspond donc la droite AA′ (*fig.* 4). Par le point A, passent une infinité de normales à la droite AA′, car on sait que le lieu des perpendiculaires à la droite AA′ est l'ensemble des droites coupant la variété plane, polaire de AA′ par rapport à

l'absolu. Soit SA l'une quelconque de ces perpendiculaires, à celle-ci correspond la congruence (Γ) orthogonale à (C), le point S étant conjugué à A, (Γ) a pour équation

$$YA = XS.$$

Par le point A′ passent aussi une infinité de normales à la droite AA′,

Fig. 4



qui s'appuient toutes sur la variété plane, polaire de AA′. Donc il existe une normale et une seule SA′ qui rencontre la droite SA. A cette droite SA′ correspond une congruence (Γ′)

$$YA' = XS$$

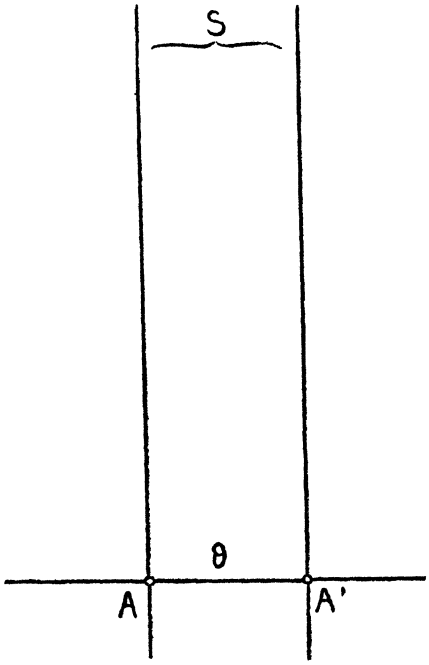
du second parallélisme, cette congruence (Γ′) est orthogonale à (C), puisque SA′ est perpendiculaire à AA′, et elle est aussi isogonale à (Γ) puisque SA′ rencontre SA.

Theorème. — *Dans deux parallélismes donnés, l'angle de deux congruences* (Γ) *et* (Γ′), *prises d'une manière quelconque, est constant.*

Soient deux parallélismes de même espèce définis respectivement par les points A et A′. La droite AA′ détermine la congruence com-

mune (C). Aux congruences Γ et Γ′ correspondent respectivement les normales SA et SA′ à la droite AA′. Ces deux congruences étant isogonales forment entre elles un angle θ qui est égal à celui des deux droites correspondantes SA et SA′ (*fig.* 5). Il a pour mesure la dis-

Fig. 5.



tance donnée entre les deux points A et A′, puisque AA′ est normale à SA et SA′.

Par suite, l'angle des deux congruences (Γ) et (Γ′) est constant, quelles que soient ces deux congruences (Γ) et (Γ′).

La distance de deux parallélismes se détermine donc de la manière suivante :

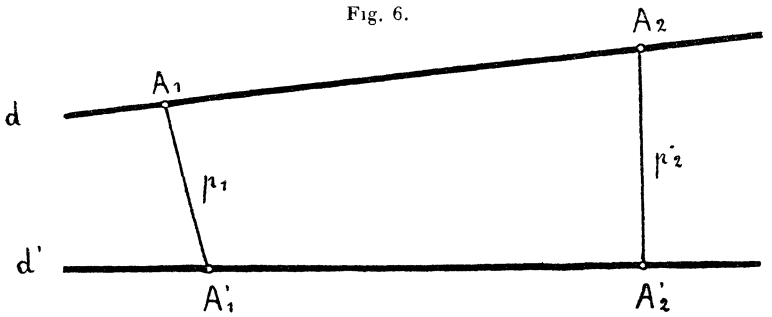
Dans l'un des parallélismes, on prend une congruence (Γ) orthogonale à la congruence commune (C), puis on détermine dans l'autre parallélisme la congruence (Γ′) isogonale à (Γ) et orthogonale à (C). L'angle des deux congruences (Γ) et (Γ′) mesure la distance des deux parallélismes.

Dès lors, il est possible de déterminer la variation de la distance de deux parallélismes de même espèce si les points qui les définissent décrivent deux droites gauches.

Théorème. — *Deux congruences de Clifford non isogonales ont soit deux congruences orthogonales, soit une infinité.*

Considérons en effet deux congruences Δ et Δ' définies respectivement par les droites gauches d et d' (*fig.* 6). Il existe une infinité de

Fig. 6.



congruences isogonales à chacune des congruences Δ et Δ', ce sont les congruences communes aux parallélismes définis par les points A et A', pris respectivement sur les droites d et d'.

En effet, chacune de ces congruences est définie par les droites joignant deux points des droites d et d' ; or, parmi ces droites, il existe deux perpendiculaires communes, auxquelles correspondent deux congruences orthogonales à Δ et Δ'.

Mais si les droites d et d' ont une infinité de perpendiculaires, c'est-à-dire si d et d' appartiennent à une même congruence de Clifford, il existe une infinité de congruences orthogonales à Δ et Δ'.

Theorème. — *Si les deux points qui définissent deux parallélismes de même espèce décrivent deux droites gauches, la distance des deux parallélismes a un maximum et un minimum. Mais si les deux droites font partie d'une congruence de Clifford, la distance des deux parallélismes reste constante.*

Soient deux parallélismes de même espèce définis respectivement

par les points A et A′, qui décrivent le premier la droite d, le second la droite d'. La variation de la distance de ces deux points est la même que celle de la distance des deux parallélismes, qui est mesurée par l'angle des deux congruences (Γ) et (Γ').

La plus longue et la plus courte distance sont données par les longueurs des deux perpendiculaires communes aux deux droites d et d' auxquelles correspondent le plus grand et le plus petit angle des congruences (Γ) et (Γ').

Si les deux droites d et d' appartiennent à une congruence de Clifford, elles sont également distantes; la distance des parallélismes qui correspondent respectivement à leurs points reste constante.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Clifford (W. K.). — *Papers*, p. 181, 236, 378, 385, 402 (Macmillan, London, 1882).

2. Barbarin (P.). — Etudes de géométrie analytique non euclidienne (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. LX, 1900).

3. Klein (F.). — Zur nicht-euklidischen Geometrie (*Gesammelte math. Abhandlungen*, Erster Band, 1921, p. 353).

4. Coolidge. — Elements of non euclidean Geometry (Oxford, 1909).

5. Vogt (W.). — Synthetische. Theorie der Cliffordschen Parallelen und der linearen Linienorter der elliptischen Raumes (*Habilitationschrift Karlsruhe*, 1909, Teubner, Leipzig).

6. Study (E). — Gruppen zweiseitiger Kollineationen (*Nachrichten von der Konigl. Gesellsch. der Wissensch. zu Gottingen. Math. Phys. Kl.*, 1912, p. 453).

7. Study (E.) — Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik (*Vortrag gehalten in der Berliner math. Gesellschaft*, 1913).

8. Bloch (A.). — Sur les cercles paratactiques et la cyclide de Dupin (*Journal de Mathématiques pures*, t. 3, 1924).

9. Klein (F.), Rosemann (W.). — Vorlesungen uber nicht-euklidische Geometrie (Springer, Berlin, 1928).

10. Cartan (E.). — Les récentes généralisations de la notion d'espace (*Bulletin Sc. math.*, t. 48, 1924, p. 294).

11. Cartan (E.). — Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples (*Bull. Sc. math.*, 1925).

12. Cartan (E). — La géométrie des groupes de transformation (*Journal de Mathématiques pures*, 1927).

13. Cartan (E) et Schouten (J. A.). — On Riemannian Geometries admitting. an absolute parallelism (*Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, vol. XXIX, 1926).

14. Cartan (E.). — Leçons de géométrie des espaces de Riemann (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

15. — Étude des espaces de Riemann. Cours professe par M. E. Cartan pendant le premier semestre 1926-1927 à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

Vu et approuvé :

Paris, le 8 janvier 1929.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 8 janvier 1929.

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

PARIS

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉAMBULE 1

INTRODUCTION 3

1. L'espace elliptique 3
2. Parallélisme absolu 7

CHAPITRE I.

LE PARALLÉLISME DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

3. Détermination des génératrices rectilignes de l'absolu 8
4. Congruences de Clifford 13
5. Parallélisme des droites d'une congruence de Clifford 17
6. L'espace elliptique à trois dimensions considéré comme espace du groupe des rotations de l'espace euclidien 24
7. Interprétation cinématique des deux espèces de parallélisme de Clifford 27

CHAPITRE II.

LE PARALLÉLISME DANS L'ESPACE A SEPT DIMENSIONS.

8. Les éléments de cet espace 29
9. Plans générateurs à trois dimensions de l'absolu 30
10. Représentation des plans générateurs au moyen des octaves de Graves-Cayley 40
11. Propriétés des plans générateurs 44
12. Congruences de Clifford 48
13. Les deux espèces de parallélisme de l'espace elliptique à sept dimensions 58
14. Isogonalité de deux congruences de Clifford de même espèce 60
15. Le principe de trialité 65
16. Distance de deux parallélismes de même espèce 66

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE 71

86319 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.