THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

MIÉCISLAS BIERNACKI

Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__86__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

N° D'ORDRE :
1986

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR MIÉCISLAS BIERNACKI

Licencie ès-Sciences

1re **THÈSE.** — SUR LES ÉQUATIONS ALGEBRIQUES CONTENANT DES PARAMÈTRES ARBITRAIRES.
2e **THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1928 devant la Commission d'Examen.

MM. PAUL MONTEL, *Président*
ARNAUD DENJOY, } *Examinateurs.*
JEAN CHAZY }

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1928

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

MM.

Doyen . . . . . C. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.

Doyens honoraires . . . APPELL, MOLLIARD

Professeurs honoraires. P. PUISEUX, BOUSSINESQ, JOANNIS, LE CHATELIER, LEBESGUE, FERNBACH, LEDUC, SAGNAC.

Professeurs . . . . . .

E. PICARD . . Analyse supérieure et algèbre supérieure.
KOENIGS . . . . . Mécanique physique et expérimentale.
GOURSAT . . . . . Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET . . . . . Electrotechnique générale.
WALLERANT . . Minéralogie
ANDOYER . . . . . Astronomie.
PAINLEVÉ . . . . . Mécanique analytique et mécanique céleste.
HAUG . . . . . Géologie.
GABRIEL BERTRAND Chimie biologique.
Mme P. CURIE . . Physique générale et radioactivité.
CAULLERY . . . . Zoologie, évolution des êtres organisés.
C. CHABRIE . . . Chimie appliquée.
S. URBAIN . . . . Chimie minérale.
E. BOREL . . . . . Calcul des probabilités et physique mathématique.
MARCHIS . . . . . Aviation
JEAN PERRIN . . . Chimie physique.
R. PERRIER . . . Zoologie (Enseignement P. C. N.).
ABRAHAM . . . . . Physique.
MOLLIARD . . . . Physiologie végétale.
CARTAN . . . . . Géométrie supérieure.
LAPICQUE . . . . Physiologie générale.
VESSIOT . . . . . Théorie des groupes et calcul des variations.
COTTON . . . . . Physique générale.
DRACH . . . . . Application de l'Analyse à la Géométrie.
FABRY . . . . . Physique.
PEREZ . . . . . Zoologie.
LÉON BERTRAND. Géologie appliquée et géologie régionale.
LESPIEAU . . . . Théories chimiques.

Professeurs	RABAUD	Biologie expérimentale.
	PORTIER	Physiologie comparée.
	BLAISE	Chimie organique.
	DANGEARD	Botanique.
	MONTEL	Mécanique rationnelle.
	WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	DUBOSCQ	Biologie maritime.
	JULIA	Mathématiques générales.
	JOB	Chimie générale.
	MAILHE	Etude des combustibles.
	L. LUTEAUD	Géographie physique.
	EUGÈNE BLOCH	Physique théorique et physique céleste.
	HEROUARD	Zoologie.
	PECHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	AUGER	Chimie analytique.
	M. GUICHARD	Chimie minérale.
	GUILLET	Physique.
	MAUGUIN	Minéralogie.
	BLARINGHEM	Botanique.
	MICHEL LÉVY	Pétrographie.
	DEREIMS	Géologie.
	DONGIER	Physique du globe.
	DENJOY	Calcul différentiel et calcul intégral.
	BENARD	Physique (P. C. N.).
	DARMOIS	Physique.
	BRUHAT	Physique théorique et physique céleste.
	MOUTON	Chimie physique.
	JOLEAUD	Paléontologie
	JAVILLIER	Chimie biologique.
	A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
	FRANÇOIS PICARD	Zoologie (évolution des êtres organisés).
	ROBERT LEVY	Zoologie.
	DUNOYER	Optique appliquée.
	GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
	DEBIERNE	Radioactivité.
Secrétaire	D. TOMBECK.	

A

M. PAUL MONTEL

PROFESSEUR À LA SORBONNE

Hommage de profonde admiration.

Extrait du Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres
Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles — Série *A*. Sciences Mathématiques
1927

PREMIÈRE THÈSE

Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires.

Introduction.

M. Landau a donné [1]) le premier exemple de la détermination d'une région du plan complexe contenant toujours une racine d'une équation algébrique, indépendamment de la valeur des paramètres arbitraires qui y figurent.

M. Montel, dans son mémoire „Sur les modules des zéros des polynomes" [2]) a développé une théorie dont le point de départ est le problème posé par M. Landau; il a mis nettement en évidence la liaison étroite de cette partie de l'Algèbre avec le théorème de Picard-Landau dans la théorie des fonctions. Nul doute que dans l'avenir cette liaison ne s'affermisse davantage encore et que l'étude algébrique conduise à des propriétés importantes des fonctions entières et méromorphes, entre autres à une démonstration d'un caractère réellement algébrique du théorème de Picard-Landau, peut-être même de celui de M. Julia [3]).

Ce sont différents problèmes du type de celui traité par M. Landau que je tâche de résoudre dans ce travail, en me bor-

[1]) Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3e série, t. 24 (1907) pp. 179—201

[2]) Ibidem, 3e série t 40 (1923) pp. 1—34.

[3]) On consultera à ce sujet d'intéressantes suggestions de M. André Bloch dans son livre: „Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité" de la collection: Mémorial des Sciences Mathématiques, pp. 43—45.

nant d'ailleurs au cas où les paramètres entrent *linéairement* dans l'équation.

Un de mes buts principaux a été de développer, ou au moins d'amorcer, le plus grand nombre possible de *méthodes* pour traiter les problèmes de ce genre nouveau. C'est pourquoi je me suis contenté, dans quelques cas, d'esquisser les démonstrations ou même simplement d'indiquer les énoncés, tandis que, dans d'autres cas, je n'ai point hésité à développer plusieurs démonstrations d'un même théorème.

Le premier Chapitre a été écrit sous l'influence de la lecture du mémoire déjà cité de M. Montel et se trouve en liaison étroite avec ce travail. J'y étudie d'abord l'équation

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k} = 0 \qquad (p < n_1 < \ldots < n_k).$$

Je montre qu'elle a p racines de module inférieur ou égal à

$$\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p}}.$$

Si l'on remplace $1 + x^p$ par un polynome arbitraire de degré p, ayant tous ses zéros dans le cercle unité, on a une limite supérieure de module de p racines en supprimant le radical dans l'expression précédente. Je précise un résultat de M. Van Vleck[1]), en indiquant une limite supérieure analogue dans le cas où la suite des coefficients donnés est discontinue. J'entreprends ensuite une étude détaillée de l'équation trinome en retrouvant les résultats obtenus antérieurement par M. Herglotz par une méthode différente[2]). Je termine ce Chapitre par un examen complet de l'équation quadrinome en m'occupant non seulement des modules des racines, mais aussi de leurs arguments. Dans certains cas, je parviens à délimiter les secteurs circulaires de sommet origine qui sont les plus petits possibles contenant toujours une racine de l'équation.

Dans le deuxième Chapitre, j'amorce l'étude des équations du type

$$a_1 P_1(x) + \ldots + a_k P_k(x) = 0$$

où les polynomes $P_1(x) \ldots P_k(x)$ ne sont plus complètement déter-

[1]) Bulletin de la Société Mathématique de France. Décembre 1925.

[2]) Leipz. Berichte t. 74. (16 janvier 1922).

minés comme dans le Chapitre précédent; on ne suppose connus que leurs degrés et les régions $R_1, \ldots R_k$, qui contiennent respectivement tous leurs zéros. Le principal résultat obtenu est le suivant: *Si un polynome $P(x)$ de degré p a tous ses zéros contenus dans le cercle de rayon P, un polynome $Q(x)$ de degré $q > p$ a tous ses zéros contenus dans le cercle concentrique au précédent et de rayon Q, chaque polynome $P(x) + a\,Q(x)$ a p zéros dans le cercle concentrique aux précédents de rayon égal au plus grand des nombres*

$$Q \quad \text{et} \quad \frac{pQ + qP}{q - p},$$

la limite pouvant être effectivement atteinte.

Comme application j'obtiens l'énoncé: *un polynome de degré n qui prend p fois une valeur au point a et qui ne prend cette valeur en aucun autre point du cercle $x - a < R$ est nécessairement p-valent dans le cercle $|x - a < \frac{p}{n}.R$; le coefficient $\frac{p}{n}$ est le plus grand possible.*

Je termine le Chapitre en établissant la proposition: *Le produit de k polynomes de la forme $b_i x^{p_i} + a_i x^{n_i}$ $(i = 1, 2, .. k)$ resp. $p_1, p_2, \ldots p_k$ valents dans le cercle $x < R$ est $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$ valent dans le même cercle.*

Le troisième Chapitre est consacré à l'étude des relations qui existent entre les zéros des polynomes et des fractions rationnelles et ceux de leurs dérivées.

J'établis d'abord des lemmes fixant les limites supérieures exactes des modules de tous les zéros des expressions

$$P(x)\,P''(x) - 2\,P'^2(x) \quad \text{et} \quad P(x)\,P''(x) - P'^2(x)$$

lorsqu'on sait que tous les zéros du polynome $P(x)$, de degré donné, sont contenus dans le cercle unité.

M. Szegö a démontré [1]) le théorème suivant: Si un polynome $P(x)$ de degré n a tous ses zéros dans le cercle unité, les racines de l'équation $P(x) + a\,P'(x) = 0$ sont contenues, ou bien dans le cercle unité, ou bien dans le cercle $x + na \leqq 1$ En m'attachant systématiquement à formuler des énoncés dans lesquels les valeurs

[1]) Mathematische Zeitschrift t 13 (1922) Cette proposition a été généralisée depuis.

des paramètres n'interviennent pas, je suis arrivé à la conclusion que *toutes les racines de l'équation précédente, sauf une au plus, sont contenues dans le cercle* $x \leqslant \sqrt{2}$ *si* n *est pair et*

$$|x| \leqslant \left[\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}\right] \cdot \sqrt{2}$$

si n *est impair, les nombres que j'ai indiqués étant les plus petits possibles.*

M. Kakeya a établi [1]) une proposition que l'on peut regarder comme une généralisation d'un théorème classique de Gauss et de Lucas. Si un polynome de degré n contient p zéros dans un cercle de rayon R, le polynome dérivé en contient au moins $(p-1)$ dans le cercle concentrique au précédent et de rayon $\psi(n, p) . R$. M. Kakeya a d'ailleurs établi que

$$\psi(n, 2) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

J'ai étudié en détail le cas de $p = n - 1$ et j'ai abouti à l'inégalité

$$\psi(n, n-1) \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

l'égalité ayant lieu lorsque n est impair. J'aborde ensuite l'étude des fractions rationnelles; cette partie de mon travail se rattache aux travaux récents de M. Walsh [2]). M. Walsh suppose que les zéros d'une fraction rationnelle sont contenus dans un domaine circulaire C, que les pôles sont contenus dans un autre domaine circulaire K et il délimite alors les régions contenant les zéros de la dérivée. Je me suis proposé de résoudre dans quelques cas simples le même problème, en supposant toujours que les zéros de la fraction sont contenus dans un cercle C, mais en ne faisant aucune hypothèse sur la situation des pôles dont le nombre seulement et évent. les ordres de multiplicités restent fixés. Dans ces conditions, il est visiblement impossible de délimiter les régions contenant tous les zéros de la fraction dérivée, mais on peut se proposer de recher-

[1]) The Tohoku Math. Journal t 11 (1917).

[2]) Transactions of the American Mathematical Society t. 22 (1921).

cher les rayons de cercles $C_1, C_2, \ldots$ concentriques à C qui en contiendraient toujours un certain nombre. Il est curieux que, dans certains cas du moins, le cercle C lui-même contienne un certain nombre de ces zéros.

En terminant ce Chapitre, je démontre un lemme qui sera peut-être susceptible d'applications algébriques. Etant donnés n points distincts, tous sur la périphérie ou à l'intérieur d'un cercle, il existe toujours une transformation conforme du cercle en lui-même, telle que le centre de gravité des transformés des points considérés occupe une position arbitrairement choisie à l'intérieur de ce cercle.

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici mes sentiments de reconnaissance à M. Emile Borel qui a bien voulu s'intéresser à mon premier travail scientifique. Je remercie aussi MM. Jacques Hadamard et Henri Lebesgue de l'accueil bienveillant qu'ils ont fait à mes notes (résumant les résultats de ce travail) en les présentant à l'Académie des Sciences. Mais je tiens surtout à exprimer à mon cher maître, M. Paul Montel, ma profonde gratitude pour tout ce que je lui dois et, en particulier, pour les conseils très précieux qu'il m'a prodigués et l'effort qu'il n'a pas hésité à me consacrer.

CHAPITRE I.

Les théorèmes de M. Montel et leurs analogues.

1. Le théorème de Landau: L'équation

$$1 + x + ax^n = 0$$

a toujours une racine de module inférieur ou égal à 2, cette limite n'étant atteinte que pour l'équation

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 0$$

— a été généralisé par différents auteurs parmi lesquels il faut citer particulièrement MM. Montel, Fejér, Herglotz et Van Vleck. MM. Montel et Fejér ont établi, indépendamment l'un de l'autre, que l'équation à $(k+2)$ termes:

$$1 + x + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k} = 0 \qquad (n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$$

a toujours une racine de module ne dépassant pas $(k+1)$ et que

cette limite est atteinte. M. Fejér a démontré en même temps que l'équation:

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k} = 0 \qquad (p < n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$$

a toujours *une* racine de module ne dépassant pas

$$\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p}} \leqslant \sqrt[p]{C_{p+k}^k}.$$

M. Montel a établi que l'équation:

$$1 + x^2 + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k} = 0$$

a toujours *deux* racines de module ne dépassant pas $\sqrt{C_{k+2}^k}$, et il a démontré de plus que l'équation générale:

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k} = 0$$

a toujours p racines dont les modules ne dépassent pas *un nombre qui ne dépend que du nombre des termes de l'équation. Il a ajouté que cette limite est probablement égale à* $\sqrt[p]{C_{p+k}^k}$. Nous appellerons dans la suite ce théorème: „le premier théorème de M. Montel".

M. Montel a généralisé davantage encore en faisant voir que l'équation:

$$1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{n_{p+1}} + \ldots + a_{p+k-1} x^{n_{p+k-1}} = 0$$

$$(a_p \neq 0 \quad p < n_{p+1} < \ldots < n_{p+k-1})$$

dans laquelle $a_1, \ldots a_p$ sont des nombres fixes a toujours p racines dont le module est inférieur à un nombre fixe $\varphi(a_1, \ldots, a_p, k)$ *ne dépendant que de* $a_1, a_2, \ldots, a_p$ *et du nombre des termes du polynome* [1]).

Nous appellerons cette proposition „le deuxième théorème de M. Montel".

La lecture du mémoire de M. Montel contenant les résultats cités [2]) a été l'origine d'un travail de M. Van-Vleck, inséré au Bulletin de la Société Mathématique de France (Décembre 1925). Dans ce travail, M. Van Vleck a établi „le premier théorème de M. Montel" dans le cas particulier où la suite $p, n_1, n_2, \ldots n_k$ ne

[1]) M. Montel a d'ailleurs établi un théorème encore plus général dont nous ne nous occuperons pas dans ce travail

[2]) Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, janvier 1923, pp. 1—34.

présente pas de lacunes (elle se réduit donc à $p, p+1, \ldots, p+k$). Il a attiré l'attention sur l'existence de théorèmes analogues lorsque la suite des coefficients donnés n'est plus une suite continue: $a_1, a_2, \ldots a_p$, mais est de la forme: $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}, a_{p+m}$ $(a_{p+m} \neq 0)$ [1]. Il a établi notamment l'existence, dans ce cas, d'une limite supérieure du module de p racines ne dépendant que des coefficients donnés et *du degré* de l'équation Cependant, en réalité il y a ici aussi une limite ne dépendant que des coefficients donnés, de m et du *nombre des termes* de l'équation [2].

Dans ce Chapitre nous nous occuperons d'abord des trois propositions qui rentrent respectivement dans l'ordre d'idées du premier et du deuxième théorème de M. Montel et du problème posé par M. Van-Vleck.

Après avoir esquissé la démonstration de ces théorèmes généraux, j'étudierai en détail l'équation trinome

$$1 + x^p + a\,x^n = 0$$

et l'équation quadrinome

$$1 + x^p + a_1\,x^{n_1} + a_2\,x^{n_2} = 0 \qquad (p < n_1 < n_2)$$

en précisant encore davantage l'énoncé de la première proposition.

2. L'équation $1 + x^p + a_1\,x^{n_1} + \ldots + a_k\,x^{n_k} = 0$ $(p < n_1 < \ldots < n_k)$ *a toujours p racines de modules ne dépassant pas le nombre*

$$\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p}} \leqslant \sqrt[p]{C_{p+k}^{k}} \leqslant k + 1 \text{ [3]}.$$

Nous verrons, en étudiant l'équation trinome $1 + x^p + a\,x^n = 0$, que cette équation a toujours p racines de modules ne dépassant pas $\sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$ et que ces racines varient d'une manière continue lorsque a décrit, dans son plan, une demi-droite passant par l'origine

[1]) Cependant M. Montel a aussi établi un théorème dans cet ordre d'idées. Cf. le mémoire cité p. 7.

[2]) On peut l'établir par la voie indiquée par M. Montel; cf. p. 21 de son Mémoire cité.

[3]) J'ai énoncé cette proposition dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 3 Décembre 1923.

ou, en d'autres termes, que le cercle

$$x \leqslant \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$$

contient p régions simplement connexes, n'empiétant pas l'une sur l'autre, chacune d'elles correspondant, en vertu de l'équation

$$1 + x^p + a\, x^n = 0$$

biunivoquement au plan des a découpé suivant une certaine demi-droite passant par l'origine. La limite est atteinte pour p équations et pour p seulement qui ont une racine double

$$x = \tilde{\omega} \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}} \quad (\tilde{\omega}^p = -1)$$

et $(p-1)$ racines de module moindre. Les autres racines ont leurs modules supérieurs.

Supposons démontré que l'équation:

$$1 + x^p + a_1\, x^{n_1} + \ldots + a_{k-1}\, x^{n_{k-1}} = 0 \qquad (p < n_1 < \ldots < n_{k-1})$$

ait toujours p racines de modules ne dépassant pas

$$\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdots \frac{n_{k-1}}{n_{k-1} - p}},$$

variant continûment lorsque, si $a_s = a_s' + i\, a_s''$ $(s = 1, 2, \ldots k-1)$ le point M $(a_1', a_1'', \ldots a_{k-1}', a_{k-1}'')$ décrit une demi-droite passant par l'origine de l'espace à $(2k-2)$ dimensions des coefficients a_s', a_s'' et faisons voir que l'on peut remplacer $(k-1)$ par k.

En posant $a_k = \varrho\, e^{i\lambda}$, λ réel, nous allons considérer les courbes Γ décrites par les racines de l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 1 + x^p + a_1\, x^{n_1} + \ldots + a_k\, x^{n_k} = 0$$

lorsque, $a_1, \ldots a_{k-1}$ restant constants, λ ne prend que deux valeurs déterminées: λ et $\lambda + \pi$ et ϱ varie arbitrairement $(\varrho > 0)$.

En posant $x = r\, e^{i\theta}$, égalant à zéro la partie réelle et imaginaire dans l'équation (1) et en éliminant ϱ, on obtient l'équation des courbes Γ en coordonnées polaires:

$$(2) \begin{cases} P(r, \theta, \lambda, a_1', \ldots a_{k-1}'') = \sin\left[(n_n - p)\,\theta + \lambda\right] r^p + \sin\left[n_k\,\theta + \lambda\right] + \\ + \sum_{i=1}^{k-1} r^{n_i} \left\{a_i' \sin\left[(n_k - n_i)\,\theta + \lambda\right] - a_i'' \cos\left[(n_k - n_i)\,\theta + \lambda\right]\right\} = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème de M Montel, si $a_1, a_2\ a_{k-1}, \lambda$ restent fixes et si ϱ varie de 0 à $+\infty$, il y a p racines qui restent en module plus petits qu'un nombre fixe K (ne dépendant que de k) et décrivent des arcs de courbes continus allant des affixes des racines de l'équation

$$1 + x^p + a_1 x^{m_1} + \ldots + a_{k-1} x^{m_{k-1}} = 0$$

à l'origine. Pour quelles valeurs de $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$ les modules de ces racines sont-ils les plus grands possibles?

Regardons pour un moment λ et θ comme fixes. L'équation (2) définit alors le module r des racines comme une fonction bien déterminée dans l'espace $(2k-2)$-dimensionnel des paramètres $a'_1, a''_1 \ldots a'_{k-1}, a''_{k-1}$ tant que l'on ne traverse pas l'hypersurface $\Delta = 0$ obtenue en éliminant r entre $P = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$. *Ces fonctions atteignent leurs plus grandes valeurs* (celles au moins qui nous intéressent) *sur l'hypersurface* $\Delta = 0$.

En effet, si l'on avait un maximum pour r, on devrait avoir $\frac{\partial P}{\partial a'_1} = \frac{\partial P}{\partial a''_1} = \ldots = \frac{\partial P}{\partial a''_{k-1}} = 0$ ce qui n'est pas possible. Il n'est pas possible non plus qu'une telle valeur soit approchée lorsque le point de coordonnées $(a'_1, a''_1, \ldots a''_{k-1})$ s'éloigne indéfiniment sur une courbe ne coupant pas Δ, car il existerait alors un maximum relatif sur l'hypersphère:

$$\sum_{i=1}^{k-1} |a_i|^2 = R^2.$$

On devrait avoir

$$\frac{\partial P}{\partial a'_1} da'_1 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial a''_{k-1}} da''_{k-1} = 0$$

en tenant compte de

$$a'_1 da'_1 + \ldots + a''_{k-1} da''_{k-1} = 0 \qquad \text{c. à d.}$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial a'_1}}{a'_1} = \frac{\frac{\partial P}{\partial a''_1}}{a''_1} = \ldots = \frac{\frac{\partial P}{\partial a''_{k-1}}}{a''_{k-1}} = \pm \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} r^{2m_i}}}{R}.$$

L'équation (2) devient alors:

$$\sin[(n_k-p)\theta+\lambda]\,r^p+\sin(n_k\theta+\lambda)\pm R r^{n_1}\sqrt{1+r^{2(n_2-n_1)}+\ldots+r^{2(n_{k-1}-n_1)}}=0,$$

égalité impossible si $r \geqslant 1$ et R suffisamment grand.

Ainsi, les plus grandes valeurs de r sont atteintes lorsqu'on a aussi $\frac{\partial P}{\partial r}=0$. Revenons aux courbes décrites par les racines, lorsque $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$, λ sont constants et que ϱ varie de 0 à $+\infty$; si $\frac{\partial P}{\partial \theta} \neq 0$ nous aurons un point ordinaire de la courbe avec $\frac{d\theta}{dr}=0$ qui ne peut évidemment pas fournir un maximum. Si $\frac{\partial P}{\partial \theta}=0$ on a un point multiple de la courbe [1]) et ceci entraîne $f'(r)=0$.

En définitive, les plus grandes valeurs des modules sont atteintes pour les x satisfaisant à une des équations:

$$\varphi_{k-1}(x)=1+x^p+\sum_{i=1}^{k-1} a_i x^{n_i}=0 \tag{3}$$

$$\psi_{k-1}(x)=n_k f(x)-x f'(x)=n_k+(n_k-p)x^p+\sum_{i=1}^{k-1}(n_k-n_i)a_i x^{n_i}=0 \tag{4}$$

et ces deux équations ont toujours, d'après l'hypothèse, p racines de modules non supérieurs au nombre

$$R=\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1-p}\cdots\frac{n_k}{n_k-p}}.$$

L'élimination de x entre $\varphi_{k-1}(x)=0$ et $\varphi'_{k-1}(x)=0$, resp. $\psi_{k-1}(x)=0$ et $\psi'_{k-1}(x)=0$ définit dans l'espace $(2k-2)$ dimensionnel des paramètres réels $a'_1, a''_1, \ldots, a''_{k-1}$ une multiplicité à $(2k-4)$ dimensions que nous appellerons D_{k-1}. Soit M le point représentatif du système des valeurs des paramètres $a'_1, a''_1, \ldots a''_{k-1}$. pour lequel le maximum du module de p racines est atteint et supposons d'abord que le seg-

[1]) Nos courbes ont des propriétés analogues aux courbes „trajectoires" étudiées par M. de la Vallée Poussin (Annales de la Société Scientifique de Bruxelles 1902) Par un point multiple d'ordre n il passe toujours n branches de la courbe se coupant sous des angles tous égaux à $\frac{\pi}{n}$.

ment rectiligne OM (ouvert en O, fermé en M) ne contienne aucun point de D_{k-1}. La racine x de module maximum est, d'après ce qui précède, en même temps racine de l'une des équations (3) et (4). Déplaçons M vers l'origine sur le segment OM. A chaque position de M correspond une racine commune de l'équation étudiée $f(x) = 0$ et de (3) resp. (4) qui décrira un arc continu et d'autre part restera à l'intérieur du cercle C_k de rayon K. Il s'ensuit que l'arc en question aboutira à une des racines de l'équation $1 + x^p = 0$ resp $n_k + (n_k - p)x^p = 0$ et pénétrera par conséquent, à partir d'un certain moment, dans le cercle C_R de rayon R Au contraire, les racines de (3) resp. (4) ne faisant pas partie du système de p racines défini p. 548 sont sûrement en dehors de C_k, si M est suffisamment rapproché de l'origine. Donc, notre racine x fera partie du système des p racines dont il a été question. Il ne pourrait pas y avoir, pendant le trajet de M, d'échanges entre les différentes racines puisque OM ne contient pas de points de D_{k-1}. On en conclut donc, conformément à l'hypothèse que, même dans sa position primitive, la racine x a son module moindre que R.

Supposons maintenant que OM contienne des points de D_{k-1}. Soit N le point de D_{k-1} situé sur OM et le plus éloigné à l'origine. Nous déplacerons M jusqu'à la position N et nous remarquerons que x satisfait alors à l'une des équations ne contenant plus que $(k-2)$ paramètres:

$$(5) \qquad \varphi_{k-2}(x) = n_{k-1}\varphi_{k-1}(x) - x\varphi'_{k-1}(x) =$$
$$= n_{k-1} + (n_{k-1} - p)x^p + \sum_{i=1}^{k-2}(n_{k-1} - n_i)a_i x^{n_i} = 0$$

$$(6) \qquad \psi_{k-2}(x) = n_{k-1}\psi_{k-1}(x) - x\psi'_{k-1}(x) =$$
$$= n_k n_{k-1} + (n_k - p)(n_{k-1} - p)x^p + \sum_{i=1}^{k-2}(n_k - n_i)(n_{k-1} - n_i)a_i x^{n_i} = 0.$$

Nous considérerons maintenant le point N' de l'espace à $(2k-4)$ dimensions qui correspond au système des valeurs $(a'_1, a''_1 \ldots a''_{k-2})$ vérifiées aussi au point N, et nous supposerons encore d'abord que le segment ON' de cet espace ne contient aucun point de la multiplicité D_{k-2} qui s'obtient en éliminant x entre $\varphi_{k-2}(x) = 0$ et $\varphi'_{k-2}(x) = 0$ et entre $\psi_{k-2}(x) = 0$ et $\psi'_{k-2}(x) = 0$.

On déplacera alors N' vers l'origine, en déterminant à chaque instant a_{k-1} et a_k de manière que $\varphi_{k-1}(x) = 0$ resp $\psi_{k-1}(x) = 0$ et

$f(x) = 0$ soient vérifiées. La racine x décrira encore un arc continu restant à l'intérieur de C_k et pénétrant à partir d'un certain moment dans C_k. On voit donc en répétant deux fois le raisonnement précédent que, d'abord dans la position correspondant au point N (ou N') et puis, même dans la position correspondant au point M, le module de x ne dépassait pas R [1]).

On voit clairement comment on continuera, en aboutissant au besoin à l'espace des paramètres a_1', a_1'', à deux dimensions seulement. Or nous verrons directement en étudiant l'équation trinome que lorsque le point (a_1', a_1'') décrit dans la direction de l'origine une demi-droite passant par l'origine rencontrant ou non D_1 qui se réduit à un nombre fini de points, la racine augmente indéfiniment, si primitivement son module était supérieur à R.

La marche de nos raisonnements montre que les p racines de modules moindres que R varient continûment lorsque le point M de coordonnées $a_1', a_1'', \ldots a_k', a_k''$ décrit une droite passant par l'origine

Remarquons encore qu'il résulte des raisonnements qui précèdent et de l'étude de l'équation trinome que dans le cas particulier où il n'y a pas de lacunes ($n_i = p + i$) une seule racine au plus parmi les p premières (les racines étant numérotées dans l'ordre des modules croissants) peut atteindre la limite qui a été déterminée qui se réduit dans le cas particulier considéré à $\sqrt[p]{C_{p+k}^k}$.

Si l'on considère les degrés n_i comme arbitraires, la limite

$$\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p}}$$

atteint sa plus grande valeur pour le système $n_1 = p + 1, \ldots, n_k = p + k$ et se réduit alors à $\sqrt[p]{C_{p+k}^k} \leqslant k + 1$ [2]).

Nous allons voir que la limite $\sqrt[p]{C_{p+k}^k}$ est toujours atteinte pour p polynomes et pour p seulement.

[1]) On suppose la proposition déjà établie non seulement pour $(k-1)$ paramètres mais aussi pour $(k-2)$, $(k-3)$,.. paramètres

[2]) M. Walsh a établi dans une Note du t. 176 des C. R. que l'équation a toujours p racines moindres en module qu'un nombre $\varphi(k+1)$ indépendant de p.

On a donc $\varphi(k) = k$.

Au lieu de commencer par établir l'existence des polynomes pour lesquels la limite est effectivement atteinte, j'admettrai par contre *a priori* cette existence, j'en déduirai les propriétés et la forme nécessaire de ces polynomes et je vérifierai ensuite que, pour eux, la limite est bien atteinte.

J'appellerai, dans la suite, le polynome de la forme

$$1 + x^p + a_1 x^{p+1} + \ldots + a_k x^{p+k}$$

dont le p-ème zéro a $\sqrt[p]{C_{p+k}^k}$ pour module le „polynome au module maximum" et je le désignerai par $P_{p,k}(x)$.

Si une racine x atteint la limite elle sera aussi, d'après ce qui précède, une racine de l'équation $\psi_{k-1}(x) = (p+k) f(x) - x f'(x) = 0$. En reprenant le même raisonnement avec $\psi_{k-1}(x)$ on voit que x doit être aussi une racine de

$$\psi_{k-2}(x) = (p + k - 1)\psi_{k-1}(x) - x\psi'_{k-1}(x) = 0 \ldots$$

... et ainsi de suite. Par conséquent x doit être une racine $(k+1)$-ple (mais non pas $(k+2)$-ple) de l'équation. En combinant ce résultat avec la remarque de la p 552 on voit que le polynome au module maximum $P_{p,k}(x)$ doit avoir les propriétés suivantes:

il existe une racine $(k+1)$-ple de module $\sqrt[p]{C_{p+k}^k}$, les $(p-1)$ racines restantes ont leur module moindre. Ceci posé, on voit bien maintenant que l'équation $\psi_{k-1}(x) = 0$ doit être elle-même, après le changement de variable

$$x = \sqrt[p]{\frac{p+k}{k}} \cdot u$$

la ramenant à la forme canonique, une „équation au module maximum". Nous obtenons par conséquent la relation suivante:

$$(7) \qquad P_{p,k}(x) - \frac{x}{p+k} P'_{p,k}(x) = P_{p,k-1}\left(\sqrt[p]{\frac{k}{p+k}}\, x\right)$$

qui, conjointement avec la condition $P_{p,k}(0) = 1$ détermine sans ambiguité $P_{p,k}(x)$ si l'on connaît $P_{p,k-1}(x)$.

D'ailleurs dans le § consacré à l'équation trinome nous verrons qu'il y a p et p seulement $P_{p,1}(x)$ et nous les calculerons facilement. L'équation différentielle (7) permet de former les relations

de récurrence entre les coefficients des $P_{p,k}(x)$ successifs. Le coefficient de la plus haute puissance x^{p+k} n'est pas donné par ces formules, mais il est aisé de le calculer directement.

Après avoir ainsi formé $P_{p,2}(x)$, $P_{p,3}(x), \ldots$ je me suis aperçu que la forme générale des $P_{p,k}(x)$ doit être la suivante:

$$P_{p,k}(x) = \left(1 - \frac{x}{\tilde{\omega}\varphi}\right)^{k+1} \left[1 + C_{k+1}^{2} \frac{x}{\tilde{\omega}\varphi} + C_{k+2}^{2} \frac{x^2}{\tilde{\omega}^2\varphi^2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + C_{k+s}^{s} \frac{x^s}{\tilde{\omega}^s\varphi^s} + \ldots + C_{k+p-1}^{p-1} \frac{x^{p-1}}{\tilde{\omega}^{p-1}\varphi^{p-1}}\right].$$

On a posé ici $\varphi = \sqrt[p]{C_{p+k}^{k}}$, $\tilde{\omega}$ désigne une racine p-ème de (-1) [1]. La vérification est immédiate.

Les coefficients de $x, x^2, \ldots, x^{p-1}$ doivent être nuls, celui de x^p égal à l'unité en vertu des relations connues entre les coefficients binomiaux. Si l'on pose

$$\frac{x}{\tilde{\omega}\varphi} = u$$

le polynome entre crochets devient:

$$1 + C_{k+1}^{1} u + C_{k+2}^{2} u^2 + \ldots + C_{k+p-1}^{p-1} u^{p-1}.$$

Ce polynome en u à coefficients positifs et croissants a, d'après un théorème de M. Kakéya, tous ses zéros moindres que 1 en module. Donc le polynome entre les crochets a tous ses zéros moindres que $\sqrt[p]{C_{p+k}^{k}}$ en module.

On peut aussi considérer dans l'équation

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k} = 0$$

les degrés n_i comme fixés et se demander si la limite

$$\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p}}$$

est toujours atteinte? Il en est bien ainsi dans le cas de l'équation trinome, mais déjà dans le cas de l'équation quadrinome nous

[1]) Cette forme de $P_{p,k}(x)$ a été obtenue par une voie différente dans l'article cité de M. Van Vleck.

verrons des exemples où la limite exacte est inférieure. D'ailleurs, on peut voir indirectement que cette limite ne peut pas être atteinte dans tous les cas, de la manière suivante: M. Montel a démontré le théorème:

L'équation

$$1 + x^p + a_1 x^{p+q} + \dots + a_{k-1} x^{p+(k-1)q} = 0$$

a toujours p racines dont le module ne dépasse pas un nombre fixe indépendant du q et du nombre des termes du polynome lorsque q ne divise pas p.

Le produit infini

$$\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p} \cdots$$

étant divergent dans le cas actuel, on voit bien que ce théorème est incompatible avec l'hypothèse suivant laquelle notre limite serait toujours atteinte.

J'ignore la valeur exacte de la limite dans le cas général: probablement il y a beaucoup de cas à distinguer suivant la largeur des lacunes et peut-être aussi les propriétés arithmétiques de la suite des n_i. La proposition qui suit sera probablement utile dans la recherche de cette limite.

Remarquons d'abord que, si la limite

$$R = \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p}}$$

est atteinte, on est en présence d'une racine $(k+1)$-ple de module R de l'équation proposée. (On le voit exactement comme à la page 553). Au contraire, si la limite exacte de module, soit Q, est inférieure à R il n'y a plus de racine $(k+1)$-ple de module Q, car on vérifie sans peine qu'une telle racine est nécessairement de module R. On peut cependant montrer que:

Si Q est la limite supérieure exacte des modules de $1, 2, \dots (p-1)$ *ou p racines de l'équation*

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + \dots + a_k x^{n_k} = 0 \qquad (p < n_1 < \dots < n_k)$$

lorsque les a_i sont arbitraires et les degrés n_i fixés, il existe toujours une équation de cette forme pour laquelle la limite est atteinte et qui

a au moins $(k+1)$ *racines de module* Q [1]), *à moins que, pour une telle équation, l'on ait* $a_k = 0$ [2]).

Supposons le contraire et d'abord, pour simplifier l'exposé, que les racines $x_1, x_2, \ldots, x_{k-q}$ $(q \geqslant 0)$ de module Q soient toutes distinctes Considérons en outre q autres racines quelconques $x_{k-q+1}, \ldots x_{k-1}, x_k$. Si le déterminant:

$$\begin{vmatrix} x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_k} \\ \ldots\ldots \\ x_k^{n_1} \ldots x_k^{n_k} \end{vmatrix}$$

était différent de zéro on pourrait résoudre le système des équations:

$$(8) \qquad \begin{cases} 1 + x_1^p + a_1 x_1^{n_1} + \ldots + a_k x_1^{n_k} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 + x_k^p + a_1 x_k^{n_1} + \ldots + a_k x_k^{n_k} = 0 \end{cases}$$

par rapport aux a_i et l'on pourrait donc imprimer aux $x_1, x_2, \ldots, x_{k-q}$ de petits déplacements de manière que $|x_1| > Q, \ldots |x_{k-q}| > Q$: la limite serait plus grande que Q.

Ce déterminant est donc nécessairement nul.

Il faut en plus que le rang r de la matrice:

$$(M) \qquad \left\| \begin{matrix} 1 + x_1^p & x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_k} \\ \ldots & \ldots \\ 1 + x_k^p & x_k^{n_1} \ldots x_k^{n_k} \end{matrix} \right\|$$

soit inférieur à k, autrement le système (8) fournirait des valeurs infinies pour certains coefficients a_i, l'équation proposée aurait donc n_1 racines nulles au moins, ce qui n'est pas le cas. Alors les r premières équations (8) p. ex. entraînent les $(k-r)$ suivantes, quelles que soient les valeurs des a_i. D'ailleurs les matrices:

$$(P) \left\| \begin{matrix} x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_k} \\ \ldots\ldots \\ x_k^{n_1} \ldots x_k^{n_k} \end{matrix} \right\| \quad \text{et} \quad (N) \left\| \begin{matrix} x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_k} \\ \ldots\ldots \\ x_r^{n_1} \ldots x_r^{n_k} \end{matrix} \right\|$$

sont aussi de rang r [3]), il existe donc une équation en y de la forme:

[1]) Les racines sont comptées avec leurs degrés de multiplicités.

[2]) La proposition pourra vraisemblablement être complétée, cf. page 579.

[3]) Cf. Kowalewski, Déterminants.

$$D(y) = \begin{vmatrix} x_1^{n_1} & x_1^{n_{\mu_1}} & \dots & x_1^{n_{\mu_r}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r^{n_1} & x_r^{n_{\mu_1}} & \dots & x_r^{n_{\mu_r}} \\ y^{n_1} & y^{n_{\mu_1}} & \dots & y^{n_{\mu_r}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1 < \mu_1 < \dots < \mu_r \leqslant k)$$

qui n'est pas identiquement nulle. Cette équation a au plus $(n_{\mu_r} - n_1 - k)$ racines différentes de 0 et de $x_1, \dots x_k$. Or l'équation étudiée

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + \dots + a_k x^{n_k} = 0$$

a $(n_k - k)$ de telles racines et $n_k - k > n_{\mu_r} - n_1 - k$. Il existe donc une racine x_j, $|x_j| \neq Q$, de cette équation telle que $D(x_j) \neq 0$. Alors la matrice:

$$(R) \quad \left\| \begin{matrix} 1 + x_1^p & x_1^{n_1} & \dots & x_1^{n_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 + x_r^p & x_r^{n_1} & \dots & x_r^{n_k} \\ 1 + x_j^p & x_j^{n_1} & \dots & x_j^{n_k} \end{matrix} \right\|$$

est de rang $(r + 1)$. Le système

$$(9) \quad \left\{ \begin{matrix} 1 + x_1^p + a_1 x_1^{n_1} + \dots + a_k x_1^{n_k} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 + x_r^p + a_1 x_r^{n_1} + \dots + a_k x_r^{n_k} = 0 \\ 1 + x_j^p + a_1 x_j^{n_1} + \dots + a_k x_j^{n_k} = 0 \end{matrix} \right\}$$

est résoluble par rapport aux a_i: on peut imprimer aux x_i de petits déplacements arbitraires et déterminer les a_i correspondants variant d'une manière continue. Nous pourrons alors, en maintenant fixées les racines $x_1, x_2, \dots, x_r$ (et par conséquent aussi $x_{r+1}, \dots x_k$) déplacer continûment x_j vers la circonférence $|x| = Q$ en évitant les racines de $D(y) = 0$ et en déterminant à chaque instant les a_i correspondants par le système (9) de manière qu'ils varient aussi d'une manière continue Si pendant ce déplacement une autre racine x_i acquiert le module Q nous nous arrêterons là, dans le cas contraire nous ne nous arrêterons que lorsque $|x_j| = Q$ De toute façon nous obtenons une équation pour laquelle la limite est également atteinte et pour laquelle le nombre q est diminué d'une unité. En répétant au besoin l'opération on arrive au cas $q = 0$ et enfin au cas où il y a $(k + 1)$ racines de module Q.

Les raisonnements sont à peu près les mêmes si quelques unes des racines de l'équation étudiée sont multiples, il faut seulement remplacer un groupe de i équations identiques correspondantes à une racine multiple x_s d'ordre i: $1 + x_s^p + a_1 x_s^{n_1} + \ldots + a_k x_s^{n_k} = 0$ par cette équation à laquelle on adjoint ses $(i-1)$ premières dérivées:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + x_s^p + a_1 x_s^{n_1} + \ldots + a_k x_s^{n_k} = 0 \\ p\, x_s^p + n_1 a_1 x_s^{n_1} + \ldots + n_k a_k x_s^{n_k} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p(p-1)\ldots(p-i+2)x_s^p + n_1(n_1-1)\ldots(n_1-i+2)x_s^{n_1} + \ldots \\ \quad + n_k(n_k-1)\ldots(n_k-i+2)a_k x_s^{n_k} = 0. \end{array}\right.$$

Il semble d'ailleurs probable qu'en général le nombre des racines de module Q est précisément $(k+1)$; cependant il peut lui être supérieur: tel est le cas de l'équation

$$1 + x + a_1 x^3 + a_2 x^4 = 0.$$

Le résultat que nous venons d'obtenir permet de démontrer presque immédiatement le premier théorème de M. Montel *dans le cas particulier où il n'y a pas de lacunes* [1]). Je me contenterai d'indiquer rapidement le principe de cette méthode qui s'apparente à celle de M. Van Vleck de près et qui est, comme cette dernière, impuissante à établir la proposition dans le cas plus difficile où il y a des lacunes. L'élimination des a_i entre les $(k+1)$ équations:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + x_1^p + a_1 x_1^{n_1} + \ldots + a_k x_1^{n_k} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 + x_{k+1}^p + a_1 x_{k+1}^{n_1} + \ldots + a_k x_{k+1}^{n_k} = 0 \end{array}\right. \qquad |x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{k+1}| = Q$$

fournit

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^{n_1} \ldots x_1^{n_k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 & x_{k+1}^{n_1} \ldots x_{k+1}^{n_k} \end{vmatrix} + (x_1, x_2 \ldots x_{k+1})^p \begin{vmatrix} 1 & x_1^{n_1-p} \ldots x_1^{n_k-p} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 & x_{k+1}^{n_1-p} \ldots x_{k+1}^{n_k-p} \end{vmatrix} = 0.$$

En divisant le 1er membre par le déterminant de Vandermonde, il vient:

$$(10) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) + (x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})^p \,.\, \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = 0$$

[1]) Cette locution signifiera toujours dans la suite: il n'y a pas de lacunes après le terme x^p.

F étant une forme homogène de degré

$$\left[\sum_{i=1}^{k} n_i - \frac{k(k+1)}{2}\right]$$

et Φ une forme homogène de degré

$$\left[\sum_{i=1}^{k} n_i - \frac{k(k+1)}{2} - kp\right].$$

Si, en particulier, $n_1 = p+1, \ldots n_k = p+k$, $\Phi \equiv 1$, F est de degré kp. Appelons $S_p(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ la fonction homogène symétrique complète de degré p de $x_1, x_2, \ldots, x_s$, dont tous les coefficients sont égaux à 1, posons par ailleurs $S_0 = 1$, $S_{-l} = 0$ si $l > 0$. Si p. ex. $k = 2$ il vient:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} S_p(x_1, x_2) & S_{p+1}(x_1, x_2) \\ S_{p-1}(x_1, x_2, x_3) & S_p(x_1, x_2, x_3) \end{vmatrix}.$$

On voit immédiatement que chacun des $\frac{p(p+1)}{2} \cdot (p+2)$ termes de $S_{p+1}(x_1, x_2) \cdot S_p(x_1, x_2, x_3)$ est représenté aussi parmi les

$$\frac{(p+1)(p+2)}{2} \cdot (p+1)$$

termes de $S_p(x_1, x_2) \cdot S_p(x_1, x_2, x_3)$ donc F contient $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ termes dont tous les coefficients sont égaux à 1 et où chaque variable entre avec la puissance p au plus (p. ex. si

$$p = 1 \quad F = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

Donc,

$$|F| \leqslant C_{p+2}^2 Q^{2p} \quad \text{et} \quad Q \leqslant \sqrt[p]{C_{p+2}^2}.$$

De même l'on a généralement:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = \begin{vmatrix} S_p(x_1, x_2), & S_{p+1}(x_1, x_2), & \ldots, & S_{p+k-1}(x_1, x_2) \\ S_{p-1}(x_1, x_2, x_3), & S_p(x_1, x_2, x_3), & \ldots, & S_{p+k}(x_1, x_2, x_3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{p-k+1}(x_1, \ldots x_{k+1}). & S_{p-k+2}(x_1, \ldots x_{k+1}) & \ldots & S_p(x_1, \ldots x_{k+1}) \end{vmatrix}.$$

C'est une forme homogène de degré kp où chaque variable entre avec la puissance p au plus et où tous les coefficients sont 1. On en

tire comme précédemment

$$Q \leqslant \sqrt[p]{C_{p+k}^{k}}.$$

S'il y a des lacunes. Φ contient effectivement des variables et l'équation (10) peut s'annuler pour des systèmes de variables x_i satisfaisant aux conditions $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{k+1}| = Q$, Q étant aussi grand que l'on veut la méthode ne peut donc donner aucun résultat [1]).

La proposition du début de ce § entraîne évidemment immédiatement quelques conséquences pour les fonctions transcendantes [2]).

Ainsi, *la fonction entière transcendante*

$$a_0 + a_p x^p + a_{n_1} x^{n_1} + a_{n_2} x^{n_2} + \ldots \qquad (p < n_1 < n_2 < \ldots)$$

où $a_p \neq 0$ *et la somme* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$ *converge et a la valeur* S, *prend toute valeur* c p *fois au moins dans le cercle de centre à l'origine et de rayon* $\sqrt[p]{\frac{|c - a_0|}{|a_p|}} \cdot e^{(p+1) \cdot S}$.

3. La méthode de démonstration exposée au § précédent permet aussi d'obtenir un résultat dans l'ordre d'idées du „deuxième théorème de M. Montel" (cf. p. 546). Il résulte d'un théorème plus général qui sera établi au Chapitre II de ce travail que, si tous les zéros d'un polynome de degré p : $P(x)$ sont contenus dans le cercle unité, le polynome $P(x) + ax^n$ $(p < n)$ a toujours p zéros dans le cercle $|x| \leqslant \frac{n}{n-p}$. Remarquons seulement qu'ici aussi, les p zéros varient d'une manière continue lorsque a décrit une demi-droite dans son plan de 0 à ∞. En effet, il résulte de la démonstration du chapitre cité que, si x décrit la circonférence $|x| = \frac{n}{n-p}$ dans le sens direct $\arg \left\{\frac{P(x)}{x^n}\right\}$ décroît sans cesse et $\left\{\frac{P(x)}{x^n}\right\}$ tourne

[1]) Le travail de M Pellet inséré au t. 48 du Bulletin des Sciences Mathématiques contient d'intéressants rapprochements entre les équations possédant des lacunes et celles qui en sont dépourvues.

[2]) Pour $p = 1$ elles ont été signalées par M. Fejér.

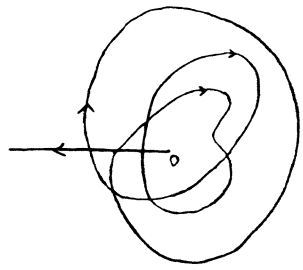

Fig. 1.

donc $(n-p)$ fois autour de l'origine constamment dans le sens négatif en décrivant une courbe C. Si le point d'affixe a décrit une demi-droite en partant de l'origine le nombre de fois que la courbe C l'entoure ne peut que diminuer c. à. d qu'il y a des racines qui entrent dans le cercle $|x| = \frac{n}{n-p}$ mais aucune qui en sorte.

Dès lors, pour trouver une limite supérieure de module de p racines de l'équation

$$P(x) + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_k x^{n_k} = 0 \qquad (p < n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$$

où tous les zéros de $P(x)$ soient contenus dans le cercle unité, on n'a qu'à reprendre les raisonnements du § précédent.

Si

$$f(x) = P(x) + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k}$$

on formera donc l'équation

$$n_k f(x) - x f'(x) = 0$$

qui sera de la forme:

$$[n_k P(x) - x P'(x)] + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}} = 0.$$

Une transformation homographique permet de constater que tous les zéros de $n_k P(x) - x P'(x)$ ne dépassent pas $\frac{n_k}{n_k - p}$ en module. Dès lors on procède par induction et l'on obtient le résultat suivant:

L'équation:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + a_{n_1} x^{n_1} + \ldots + a_{n_k} x^{n_k} = 0$$
$$(a_p \neq 0,\ p < n_1 < \ldots < n_k)$$

a toujours p racines dont le module ne dépasse pas le nombre

$$R \cdot \frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p} \leqslant R \cdot C_{p+k}^{p}$$

où R est module de la racine du plus grand module de l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p = 0.$$

(Si $p > 1$ et $k > 1$ aucune des limites de l'énoncé n'est atteinte).

Ceci est à rapprocher du résultat de M. Van Vleck:

L'équation:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots a_n x^n = 0 \qquad (a_p \neq 0)$$

a toujours p racines dont le module ne dépasse pas la racine positive de l'équation:

$$C_n^p |a_0| + C_{n-1}^{p-1} |a_1| x + \ldots + C_{n-p+1}^{1} |a_{p-1}| x^{p-1} - |a_p| x^p = 0.$$

La proposition que nous venons d'obtenir permet d'énoncer un résultat relatif à la théorie des fonctions entières transcendantes:

Une fonction entière transcendante de la forme

$$a_0 + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots \qquad (n_1 < n_2 < \ldots)$$

où la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$ *converge prend, une infinité de fois, toute valeur* (c. à. d. ne possède pas la valeur exceptionnelle de M. Picard) [1]).

Soit c une valeur quelconque et m un entier positif arbitrairement grand. Choisissons un indice s assez grand pour que $n_s > m$. Si R désigne la limite supérieure du module des racines de l'équation:

$$-c + a_0 + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_s x^{n_s} = 0$$

et P la valeur du produit infini convergent

$$\frac{n_{s+1}}{n_{s+1} - n_s} \cdot \frac{n_{s+2}}{n_{s+2} - n_s} \cdot \frac{n_{s+3}}{n_{s+3} - n_s} \cdots$$

[1]) Il résulte des recherches de MM. Borel et Lindelöf que, si

$$\varliminf_{i=\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} > 1$$

le cas d'exception de M Picard et même celui de M. Borel ne se présentent pas Notre condition est plus générale Il y a lieu aussi de rapprocher cet énoncé de quelques résultats récents de M. Saxer.

une équation de la forme:

$$[a_0 - c + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_s x^{n_s}] + a_{s+1} x^{n_{s+1}} + \ldots + a_k x^{n_k} = 0$$

aura m racines au moins de module non supérieur à RP, quelle que soit la valeur de k. En faisant augmenter k indéfiniment on conclut à l'exactitude de l'énoncé.

4. M. Van Vleck a démontré, dans le mémoire cité au § 1, la proposition suivante:

L'équation:

$$1 + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_{p+m-1} x^{p+m-1} + x^{p+m} + a_{p+m+1} x^{p+m+1} + \ldots + a_n x^n = 0$$

a toujours p racines dont le module n'est pas supérieur au nombre $\sqrt[p+m]{C_{m+p-1}^{p-1} C_n^{m+p}}$ *et cette limite est d'ailleurs atteinte.*

Je me propose de préciser cette proposition:

1° en faisant voir que la limite ne dépend que du nombre des termes de l'équation, de p et de m et non pas du degré n,

2° en indiquant une limite supérieure moins élevée lorsqu'il y a des lacunes.

En reprenant notamment avec quelques modifications de détail la méthode de démonstration du § 2, on obtient l'énoncé suivant:

L'équation:

$$1 + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_m x^m + b_1 x^{q_1} + \ldots + b_s x^{q_s} + x^{p+m} + c_1 x^{n_1} + c_2 x^{n_2} + \ldots + c_k x^{n_k} = 0$$

$$(p < m < q_1 < \cdot \quad < q_s < p + m < n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$$

a toujours p racines de module non supérieur au nombre:

$$\sqrt[p+m]{\frac{q_1}{(p+m)-q_1} \cdot \frac{q_2}{(p+m)-q_2} \cdots \frac{q_s}{(p+m)-q_s} \cdot \frac{n_1}{n_1-(p+m)} \cdots \frac{n_k}{n_k-(p+m)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p+m]{C_{m+p-1}^{p-1} \cdot C_{p+m+k}^{p+m}} \leqslant (k+1)\sqrt{2p}\ ^{1)}.$$

Si $m \leqslant p$ on considère l'équation:

$$1 + a_p x^p + b_1 x^{q_1} + \ldots + b_s x^{q_s} + x^{p+m} + c_1 x^{n_1} + c_2 x^{n_2} + \ldots + c_k x^{n_k} = 0$$

[1]) cf. le renvoi [1]) de la p. suivante.

et la limtte est

$$\sqrt[p+m]{\frac{p}{m}\cdot\frac{q_1}{(p+m)-q_1}\cdots\frac{q_s}{(p+m)-q_s}\cdot\frac{n_1}{n_1-(p+m)}\cdots\frac{n_k}{n_k-(p+m)}}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt[p+m]{C_{m+p-1}^{p-1}\cdot C_{p+m+k}^{p+m}}<3(k+1)\sqrt{m}\ ^{1)}.$$

En particulier, si tous les coefficients c_i et b_i sont nuls on obtient la proposition suivante:

L'équation:

$$a_0+a_p x^p+a_{p+1}x^{p+1}+\ldots+a_m x^m+a_{p+m}x^{p+m}=0$$
$$(p<p+1<\ldots<m<m+p)$$

où $|a_0|=|a_{p+m}|$ *a toujours* p *racines de modules non supérieurs à un et elle a aussi toujours* p *racines de modules non inférieurs à un*[2].

La dernière proposition peut d'ailleurs aussi être établie très simplement à l'aide de la règle suivante indiquée par M. Cohn[3] dont nous nous servirons encore à plusieurs reprises au cours de ce travail. Posons

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

$\overset{+}{f}(x)=\bar{a}_n+\bar{a}_{n-1}x+\ldots+\bar{a}_1x^{n-1}+\bar{a}_0x^n$ ($\bar{a}_i$ désigne le nombre conjugué de a_i); alors, si $|a_0|<|a_n|$, l'équation $f(x)=0$ a à l'intérieur

[1]) Les dernières limitations sont indiquées uniquement à cause de leur simplicité et pourraient être facilement améliorées. Il est intéressant que la limite ne dépende que de p et du nombre k des termes qui suivent x^{p+m}.

[2]) Pour $p=1$ l'énoncé est banal.

[3]) Mathematische Zeitschrift t. 13 (1922). Je profite de l'occasion pour faire remarquer que la démonstration du lemme du N° 4, § 2, Chapitre I du travail de M. Cohn peut être simplifiée: il s'agit de montrer que, si $\xi>0$ est assez petit le polynome $\varphi_\xi(x)=\varphi(x)-\xi x\varphi'(x)$ a autant de zéros *à l'intérieur* du cercle unité que le polynome $\varphi(x)$. Soit α un zéro d'ordre ν de $\varphi(x)$ situé sur la périphérie, posons avec M. Cohn $\varphi(x)=(x-\alpha)^\nu\psi(x)$, $\psi(\alpha)\neq 0$ et

$$\varphi_\xi(x)=(x-\alpha)^{\nu-1}h(x).$$

$h(x)$ est une fonction de x et de ξ qui s'annule pour $\xi=0$, $x=\alpha$. Pour étudier les variations des racines de $h(x)=0$ il suffit d'écrire $\frac{\partial h}{\partial x}dx+\frac{\partial h}{\partial\xi}d\xi=0$. En y posant $\xi=0$, $x=\alpha$ et en supprimant le facteur non nul $\psi(\alpha)$ il vient: $\underset{\alpha}{dx}=\nu\,d\xi$, ceci montre immédiatement que, si $d\xi>0$ la ν-ème racine se trouve à l'extérieur du cercle unité.

du cercle unité une racine de plus que l'équation de degré $(n-1)$: $\bar{a}_n \frac{f(x) - a_0 \overset{+}{f}(x)}{x} = 0$; si $|a_0| > |a_n|$ l'équation $f(x) = 0$ a autant de racines à l'intérieur du cercle unité que l'équation de degré $(n-1)$: $\bar{a}_0 f(x) - a_n \overset{+}{f}(x) = 0$. M. Cohn donne aussi une règle pour le cas $|a_0| = |a_n|$ mais elle est plus compliquée et nous n'en aurons pas besoin.

On peut évidemment supposer $a_0 = a_{p+m} = 1$ et se borner à la première partie de la proposition, la deuxième résultant de la substitution $x = \frac{1}{y}$. Posons dans ce but $x = qt$ où q est un nombre fixe > 1 et d'ailleurs très voisin de l'unité. L'équation dévient:

$$f(t) = 1 + a'_p t^p + a'_{p+1} t^{p+1} + \ldots + a'_m t^m + q^{p+m} t^{p+m} = 0,$$

on est ici dans le premier cas de la règle de M. Cohn indiquée ci-dessus: $f(t) = 0$ a autant de racines à l'intérieur du cercle $|t| < 1$ que

$$q^{p+m} f(t) - \overset{+}{f}(t) \equiv t^p \varphi(t)$$

$\varphi(t)$ étant un polynome, donc p au moins; il en résulte que l'équation

$$1 + a_p x^p + \ldots + a_m x^m + x^{m+p} = 0$$

a p racines au moins à l'intérieur du cercle $|x| < q$; q étant aussi voisin que l'on veut de l'unité, la proposition est donc démontrée. Moyennant un changement de variable, on en déduit encore:

L'équation:

$$a_0 + a_p x^p + \ldots + a_{n-p} x^{n-p} + a_n x^n = 0$$

a p racines de modules non supérieurs à $\sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}$ *et aussi p racines de modules non inférieurs à ce nombre* [1])

5. L'équation trinome.

Nous commencerons par l'équation

$1 + x^p + a x^n = 0$ ($p < n$, nous supposons aussi p premier avec n).

[1]) On peut remarquer que $\sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}$ représente la moyenne géométrique des modules de toutes les racines.

Le premier travail où cette équation ait été étudiée, *à notre point de vue* [1]), semble être celui de M. P. Nekrasoff [2]) qui a établi que, si $|a| < \frac{p^{\frac{p}{n}}(n-p)^{\frac{n-p}{n}}}{n}$, l'équation a toujours p racines de module ne dépassant pas $\sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$; il a en outre effectué une division du plan en n secteurs égaux d'ouverture $\frac{2\pi}{n}$ (qui commencent à l'origine mais dont la position dépend de l'argument de a) dont chacun contient une racine de l'équation. Parmi les travaux plus récents. citons celui de M. Kempner [3]) qui, par une méthode nouvelle, délimite également des secteurs contenant une racine de l'équation [4]) et avant tout l'étude approfondie de M. Herglotz [5]).

En étudiant la correspondance biunivoque établie par l'équation entre le plan simple des x et la surface de Riemann à n feuillets étalée sur le plan des a, M. Herglotz divise le plan des x en $2pn$ régions telles que, la valeur de a étant fixée, on peut indiquer de suite n d'entre elles contenant chacune une et une seule racine de l'équation [6]). Si on range les racines dans l'ordre de module croissant: $|x_1| < |x_2| < \ldots < |x_n|$ et que a varie, cet ordre ne change pas tant qu'aucune racine ne quitte pas les n régions dont il a été question, en d'autres termes si $|x_i| = |x_k|$ les racines x_i et x_k sont sur les frontières des dites régions Il est clair que les limites géométriques de celles des régions qui restent à distance finie donnent les limites exactes de module de $1, 2, \ldots, p$ racines de l'équation.

Nous retrouverons, par une méthode assez différente, les limites de modules des racines indiquées par M. Herglotz; j'insisterai en outre un peu plus que ne l'a fait cet auteur sur le problème de la détermination des secteurs contenant toujours une racine de l'équation.

[1]) c. à. d. celui de M. Landau.

[2]) Recueil de la Société Mathématique de Moscou, Tome 11, Fasc. I (1883) Mathematische Annalen t 29 (1887).

[3]) Math. Annalen t. 85 (1922) pp. 49—59.

[4]) Citons aussi une note récente de M. Sergesco (C. R., 23 novembre 1925) qui traite un problème dont nous ne nous occuperons pas ici.

[5]) Über die Wurzeln trinomischer Gleichungen. Leipzig. Berichte B. 74 (16 Janvier 1922).

[6]) En supposant que les modules des racines sont tous différents.

La limite de module de p racines restant à distance finie s'obtient, je crois, le plus rapidement à l'aide du „principe de variation de l'argument" dont nous nous servirons encore plusieurs fois dans ce travail. Il est évident que, si x décrit dans le sens direct une circonférence $|x| = R$ où R soit très grand, l'argument de $\frac{1+x^p}{x^n}$ varie *toujours* dans le sens négatif. Un calcul élémentaire montre tout de suite que cette propriété se conserve tant que $R > \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$ et qu'elle cesse d'être vraie pour $R = \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$ [1]. On voit immédiatement que, si $R > \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$ la courbe décrite par $\frac{1+x^p}{x^n}$ ne peut entourer aucun point plus de $(n-p)$ fois dans le sens négatif. Dès lors il suffit d'écrire l'équation sous la forme:

$$x^n\left[\frac{1+x^p}{x^n} - (-a)\right] = 0$$

pour apercevoir qu'elle a *toujours p racines de module non supérieur à* $\sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$.

Une étude un peu plus approfondie sera nécessaire pour montrer que cette limite est atteinte et pour indiquer les limites exactes des modules de $1, 2, \ldots, (p-1)$ racines.

Posons $x = re^{i\theta}$ $a = \varrho e^{i\lambda}$, étudions les courbes Γ décrites par les racines de l'équation lorsque λ ne prend que les valeurs déterminées λ et $\lambda + \pi$ et ϱ varie arbitrairement.

Leur équation s'écrit:

$$\sin(\lambda + n\theta) + r^p \sin[\lambda + (n-p)\theta] = 0.$$

Une courbe Γ ne coupe donc qu'en un seul point une demi-droite issue de l'origine, à moins qu'elle ne se confonde avec cette demi-droite, ce qui exige que l'on ait: $\lambda + n\theta \equiv 0$ et $\lambda + (n-p)\theta \equiv 0$

[1]) En les seuls points $x = \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}} \cdot \tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}$ étant une racine p-ème de -1.

(mod. π), d'où $\theta = \frac{k\pi}{p}$, k entier. Les points doubles des courbes Γ s'obtiennent en éliminant a entre $1 + x^p + ax^n = 0$ et sa dérivée, ils sont $x = \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}} \cdot \tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}$ désignant une racine p-ème de -1. Si Γ n'a pas de points doubles, ses branches doivent évidemment ou

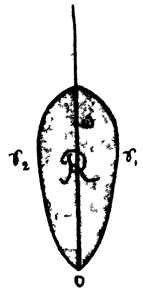

Fig 2.

bien partir de l'origine et y revenir après avoir passé par un point $\tilde{\omega}$ ou bien s'étendre de l'origine à l'infini. Si λ est égal à l'argument de $\tilde{\omega}^{-n}$, Γ a le point double $x = \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}} \cdot \tilde{\omega}$, elle contient la demi-droite passant par l'origine et $\tilde{\omega}$. Les deux autres branches γ_1, γ_2, issues du point double [1]), doivent nécessairement aboutir à l'origine car $\varrho = |a|$ commence par augmenter le long de ces branches et elles ne peuvent passer par un autre point double, les $2p$ nombres $\tilde{\omega}^{-n}$ et $-\tilde{\omega}^{-n}$ étant tous distincts. Elles doivent d'ailleurs en aboutissant à l'origine faire des angles égaux à $\frac{\pi}{n}$ avec $o\tilde{\omega}$: autrement on serait en désaccord avec la propriété des Γ de n'être rencontrées que par une seule demi-droite issue de l'origine. En vertu de la même propriété elles doivent à l'origine tourner leur concavité du côté de la demi-droite $o\tilde{\omega}$ [2]) et rester constamment

[1]) Orthogonalement à la demi-droite.

[2]) Cette propriété appartient d'ailleurs à tous les segments de Γ dont les tangentes à l'origine font un angle moindre que $\frac{\pi}{p}$ avec le segment $o\tilde{\omega}$.

à l'intérieur de l'angle A de sommet à l'origine, d'ouverture $\frac{2\pi}{n}$ ayant $o\tilde{\omega}$ comme bissectrice. Je dis qu'elles restent aussi dans le cercle $|x| < \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$ [1]. En effet, autrement il existerait en dehors de ce cercle ou sur sa périphérie un point de γ_1 ou γ_2 où l'on aurait $\frac{dr}{d\theta} = 0$, ceci serait manifestemment en désacord avec la propriété de l'argument de $\frac{1+x^p}{x^n}$ signalée p 567. γ_1, γ_2 délimitent une région R qui, étant munie d'une coupure s'étendant du point $\tilde{\omega}$ au point double de Γ est représentée conformément par l'équation $1 + x^p + ax^n = 0$ sur le plan des a coupé suivant la demi-droite de l'argument de $\tilde{\omega}^{-n}$.

Nous aboutissons donc à préciser de la façon suivante la propriété établie p. 567:

Construisons p secteurs circulaires de sommets à l'origine, d'ouverture $\frac{2\pi}{n}$, symétriques par rapport aux p segments $o\tilde{\omega}$ respectivement et limités par les arcs de la circonférence $|x| = \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$. L'équation $1 + x^p + ax^n = 0$ a toujours une racine au moins dans chacun de ces secteurs. Dans cet énoncé l'angle $\frac{2\pi}{n}$ ne peut pas être remplacé par un plus petit [2]; *il en est de même avec le nombre $\sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$.*

Il est évident aussi que la limite de module de p racines ne peut être atteinte que si une racine se trouve au point double de I, donc pour les p équations suivantes:

$$(1) \qquad 1 + x^p + \frac{p(n-p)^{\frac{n}{p}-1}}{\tilde{\omega}^n n^{n/p}} x^n = 0 \text{ [3]}$$

$\tilde{\omega}$ est une racine p ème de -1.

[1]) Abstraction faite, bien entendu, du point double.

[2]) C'est évident.

[3]) D'après une remarque de M. Montel, le coefficient de x^n ne dépend que de $\frac{n}{p}$ et, pour n très grand, il est égal asymptotiquement à $\frac{p}{en}$.

Il est aisé de montrer que pour ces p équations la limite est effectivement atteinte. Nous aurons évidemment, outre la racine double, $x = \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}} . \tilde{\omega}$ $(p-1)$ racines de module moindre que $\sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$ situées dans $(p-1)$ régions analogues à R. Les autres racines doivent se trouver sur les branches infinies de Γ; or ces branches ne coupent la circonférence $|x| = \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$ qu'en un seul point forcément différent des p points de la forme $\sqrt[p]{\frac{n}{n-p}} . \tilde{\omega}$. On voit immédiatement qu'en un tel point le module $|a| = \varrho = \left|\frac{1+x^p}{x^n}\right|$ est supérieur à sa valeur dans l'équation (1), il est *a fortiori* supérieur à cette valeur aux points des branches infinies de Γ situés à l'intérieur de $|x| < \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$. Ainsi donc les racines restantes ont effectivement leurs modules supérieurs à $\sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$.

On pourrait aussi se poser *le problème: indiquer un angle de sommet origine contenant toujours une racine au moins de l'équation de quelque façon qu'on le tourne autour de l'origine.*

Il résulte immédiatement des propriétés établies ci-dessus des courbes Γ qu'en tout cas *le secteur d'ouverture angulaire* $\frac{4\pi}{n}$ *jouit bien de cette propriété* Ceci résulte d'ailleurs aussi des résultats de M. Nekrasoff cités p. 566.

Cherchons maintenant la limite exacte de module de $1, 2, \ldots, (p-1)$ racines de l'équation. Dans ce but nous étudierons les courbes Σ, trajectoires orthogonales des Γ, définies par $\left|\frac{1+x^p}{x^n}\right| = \text{Const.}$, leur équation peut s'écrire, en posant maintenant $|a| = \alpha$:

$$Q(r, \theta) = \alpha^2 r^{2n} - r^{2p} - 2\cos(p\theta) . r^p - 1 = 0.$$

On trouve $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial r} = n\alpha^2 r^{2n-1} - p r^{2p-1} - p\cos(p\theta) r^{p-1}$. En posant

$r = 1$ et $Q = 0$ $\frac{\partial Q}{\partial r} = 0$ il vient:

$$a^2 - 2[1 + \cos(p\theta)] = 0, \qquad n a^2 - p[1 + \cos(p\theta)] = 0.$$

Ceci entraîne ou bien $2 = \frac{p}{n}$ ce qui est impossible, ou bien

$$1 + \cos(p\theta) = 0 \quad \text{et} \quad a = 0.$$

Donc l'argument de $\frac{1 + x^p}{x^n}$ varie toujours dans le même sens lorsque x décrit la circonférence $|x| = 1$. On constate facilement, d'après ce qui précède, qu'il existe une seule courbe $\Sigma : \Sigma_0$ passant par les racines doubles. Cette courbe Σ_0 délimite p régions entourant les p-èmes racines de (-1) où les courbes Σ entourent aussi ces racines, une région contenant l'origine où les courbes Σ entourent l'origine et une région extérieure où les courbes Σ entourent à la fois l'origine et toutes les racines p-èmes de (-1) Quelle que soit la valeur de $|a|$, il existe une courbe Σ de la 1-re ou de la 2-ème catégorie correspondante.

Soit N une racine p-ème de (-1), BMA un arc d'une courbe Σ

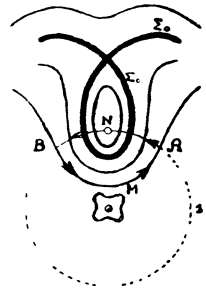

Fig 3.

quelconque, coupant la circonférence $|x| = 1$ en B et A. $\left(\text{Les courbes } \Sigma \text{ extérieures à } \Sigma_0 \text{ restent à l'extérieur du cercle } |x| < \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}\right)$.

Lorsque x décrit la courbe fermée $ANBMA$, $a = -\frac{1 + x^p}{x^n}$ décrit une courbe fermée $A'N'B'M'A'$ de la forme ci-contre. $B'M'A'$

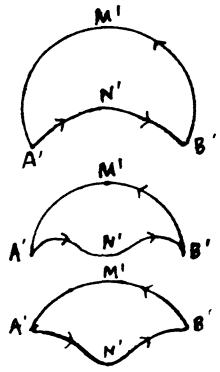

Fig. 4.

est un arc de cercle de centre au point N'. Les angles curvilignes aux points A' et B' sont aigus [1]). Si l'on prend N' pour l'origine l'argument du point décrivant $A'N'$ ou $N'B'$ varie constamment dans le même sens. Il en résulte immédiatement que la variation de l'argument de a le long de l'arc BMA dépasse π (cf. la Fig. 4).

Posons

$$0 \,.\, n \equiv T_0, \quad n \equiv T_1, \quad 2n \equiv T_2, \ldots (p-1)\, n \equiv T_{p-1} \,(\text{mod. } p)$$
$$0 \leqslant T_k \leqslant (p-1) \qquad [k = 0.\, 1, \ldots (p-1)]$$

n et p étant premiers entre eux, on constate sans peine que la suite $T_0, T_1, \ldots, T_{p-1}$ est une permutation de la suite $0, 1, \ldots, (p-1)$. Faisons dans l'équation proposée successivement les p substitutions: $x = \varepsilon^k y_k$ où $\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{p} i}$ $k = 0.\, 1, \ldots, (p-1)$. Il vient:

$$1 + y_k^p + a\, \varepsilon^{T_k}\, y_k^n = 0. \tag{2}$$

La variation de a le long de l'arc BMA dépassant π, il est clair que $E\left(\frac{p}{2}\right)$ [2]) des équations (2) ont une racine sur cet arc. BMA étant contenu dans un secteur de centre à l'origine d'ouverture

[1]) Ils le sont certainement pour les courbes Σ voisines de celles qui sont tangentes à la circonférence $|x| = 1$ et d'autre part ils ne peuvent pas être droits, car l'on aurait $Q = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial r} = 0$ en un point de cette circonférence.

[2]) $E(x)$ désigne la partie entière de x.

$\frac{2\pi}{p}$, il s'ensuit que l'équation proposée a $E\left(\frac{p}{2}\right)$ racines de module inférieur à 1.

Ainsi : *La limite exacte de module de* $E\left(\frac{p}{2}\right)$ *racines de l'équation est égale à un, elle n'est atteinte que pour* $1 + x^p = 0$.

Il reste à déterminer la limite exacte R_m de module de m racines lorsque $E\left(\frac{p}{2}\right) < m < p$. L'on a $1 < R_m < \sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$.

Considérons encore les arcs des courbes Σ symétriques par rap-

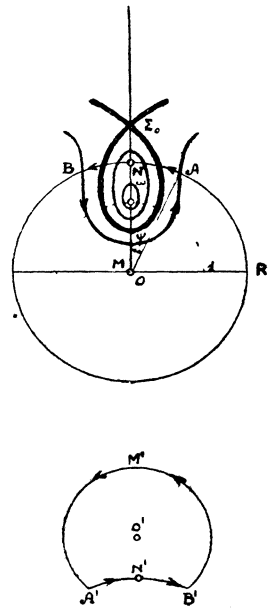

Fig. 5.

port aux segments $O\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}$ étant une racine p-ème de (-1), posons $\tilde{\omega} = e^{\frac{\pi i}{p}}$ pour fixer les idées. une circonférence $|x| = R$, $R > 1$, un arc ANB de cette circonférence et un arc BMA d'une courbe Σ, cet arc est toujours compris dans le secteur d'ouverture $\frac{2\pi}{p}$, de som-

met à l'origine, symétrique par rapport à $O\bar{\omega}$. Si la variation de l'argument de $-a = \frac{1+x^p}{x^n}$ le long de l'arc BMA est V, on voit exactement comme précédemment que l'équation a $E\left(\frac{pV}{2\pi}\right)$ racines de module ne dépassant pas R. Si donc $R = R_m$ il faut évidemment qu'il existe un arc BMA de Σ tel que l'on ait $\frac{pV}{2\pi} = m$ c. à. d. $V = 2\pi \cdot \frac{m}{p}$ et d'autre part que pour $R > R_m$ un tel arc n'existe plus [1]). Ces conditions sont aussi suffisantes. Or, en appelant ψ l'angle que fait OA avec ON $\left(o \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{p}\right)$ un calcul élementaire fournit la relation:

$$R = \sqrt[p]{\frac{\sin\left[n\psi - \frac{V}{2}\right]}{\sin\left[(n-p)\psi - \frac{V}{2}\right]}}.$$

Supposons V fixé et égal à $2\pi \cdot \frac{m}{p}$; pour $\psi = 0$ la formule précédente fournit $R = 1$, si ψ croît, R commence par croître puis décroît pour s'annuler si $\psi = \frac{m}{n}\frac{\pi}{p}$; il est facile de voir qu'il y a un seul maximum de la fonction

$$\sqrt[p]{\frac{\sin\left[n\psi - \frac{m}{p}\pi\right]}{\sin\left[(n-p)\psi - \frac{m}{p}\pi\right]}}$$

dans l'intervalle $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{m}{np} \cdot \pi$. En définitive, il vient:

Si $E\left(\frac{p}{2}\right) < m < p$

$$R_m = \text{Max.} \sqrt[p]{\frac{\sin\left[n\psi - \frac{m}{p} \cdot \pi\right]}{\sin\left[(n-p)\psi - \frac{m}{p} \cdot \pi\right]}} \qquad \left(0 \leqslant \psi \leqslant \frac{m}{np} \cdot \pi\right).$$

[1]) Pour une courbe Σ déterminée V augmente avec R.

On peut remarquer encore que, si ψ_0 correspond au maximum, l'on aura: $\cos(p\psi_0) = \dfrac{(n-p)R_m^{2p}+n}{(2n-p)R_m^p}$, géométriquement cette relation signifie que lorsque la limite est atteinte la courbe Σ correspondante coupe orthogonalement la circonférence $|x| = R_m$.

Voici maintenant une démonstration d'un caractère moins géométrique du fait que *l'équation* $1 + x^p + ax^n = 0$ *où* n *n'est pas un multiple de* p *a toujours une racine ne dépassant pas en module* 1 [1]).

Appliquons la règle déjà mentionnée de M. Cohn.

Si $|a| \geqslant 1$ la proposition est évidente, supposons donc $|a| < 1$.

Si $f(x) = 1 + x^p + ax^n$, $\overset{+}{f}(x) = \bar{a} + x^{n-p} + x^n$, formons

$$f_1(x) = f(x) - a\overset{+}{f}(x) = 1 - |a|^2 + x^p - ax^{n-p}.$$

Si $n < 2p$ l'on a $n - p < p$ et la proposition est évidente; si $n > 2p$ il faut supposer $|a| < 1 - |a|^2$, en continuant d'appliquer la règle on forme:

$$f_2(x) = (1-|a|^2)f_1(x) + a\overset{+}{f_1}(x) = \{(1-|a^2|)^2 - |a|^2\} + (1-|a|^2)x^p + ax^{n-2p}.$$

Si $n < 3p$ l'on a $n - 2p < p$ et le théorème est évident; si $n > 3p$ on suppose $|a| < (1-|a|^2)^2 - |a|^2$ et l'on continue le procédé. On obtient généralement des fonctions de la forme:

$$f_k(x) = A_k + B_k x^p + C_k x^{n-kp}.$$

Je dis que tant que $n > kp$ l'on a $A_k > 0$ et $|B_k| > A_k$, ceci étant exact pour $k=1$, supposons que ce soit vrai pour $(k-1)$, l'on a donc $f_{k-1}(x) = A_{k-1} + B_{k-1}x^p + C_{k-1}x^{n-(k-1)p}$ $\quad (|C|_{k-1} < A_{k-1} < |B_{k-1}|)$.

Puisque $n - (k-1)p > p$ l'on trouve:

$$f_k(x) = A_{k-1}f_{k-1}(x) - C_{k-1}\overset{+}{f}_{k-1}(x) = A_{k-1}^2 - |C_{k-1}|^2 + A_{k-1}B_{k-1}x^p - C_{k-1}\bar{B}_{k-1}x^{n-kp},$$

d'où immédiatement $A_k > 0$, $A_k < |B_k|$. Il existe un entier s tel que $sp < n < (s+1)p$: nous pousserons au besoin les calculs jusqu'à former $f_s(x) = A_s + B_s x^p + C_s x^{n-sp}$, puisque $n - sp < p$ et $A_s < |B_s$ l'équation $f_s(x) = 0$ a bien une racine dans le cercle unité et l'équation proposée aussi.

[1]) M. Szegö dans son article de la Math. Zeitschrift t 13 (1922) indique aux §§ 7 et 9 des régions contenant une racine de l'équation trinome. Sa méthode ne semble pas conduire au résultat dont nous nous occupons. Cf. aussi le travail de M. Fejér. Jahresberichte d. deut. Mat. Ver. t. 26 (1917).

Si n est multiple de p, $n = mp$, la limite exacte de module de la plus petite racine est évidemment $\sqrt[m]{2}$; ainsi donc *les limites des modules des racines peuvent dépendre non seulement des largeurs des lacunes entre les degrés mais encore des propriétés arithmétiques des degrés.*

Etudions encore *l'équation trinome* $1 + ax^p + x^{p+m} = 0$, cas particulier de l'équation considérée par M. Van Vleck. Nous supposerons p et m premiers entre eux. Si d'abord $m > p$ nous sommes dans un cas particulier du théorème de la p. 564: *la limite exacte de module de* $1, 2, \ldots, p$ *racines de l'équation est égale à un.* Ce résultat peut être obtenu soit à l'aide de la règle de M. Cohn, comme à la p. 565, soit par une méthode géométrique identique à celle développée ci-dessous dans le cas $m < p$ On peut remarquer que la racine du plus petit module n'atteint cette limite que dans le cas de l'équation $1 + x^{p+m} = 0$; en effet, le produit de modules des racines est 1, donc toutes les racines doivent être de module 1: ceci est impossible si $a \neq 0$.

Si $m < p$ le résultat est différent:

L'équation $1 + ax^p + x^{p+m} = 0$ *a toujours* p *racines de module ne dépassant pas* $\sqrt[p+m]{\frac{p}{m}}$ *et cette limite est effectivement atteinte.*

Le „principe de variation de l'argument" permet de montrer immédiatement, comme à la p. 567. que la limite ne saurait dépasser ce nombre et que les p racines de module moindre que $\sqrt[m+p]{\frac{p}{m}}$ varient continûment lorsque a décrit une droite passant par l'origine de son plan.

Pour examiner si cette limite peut être atteinte et dans quelles conditions, nous nous servirons des courbes Σ:

$$\left|\frac{1 + x^{p+m}}{x^p}\right| = \text{Const.} = \alpha.$$

Il y a encore une seule courbe $\Sigma : \Sigma_0$ ayant des points doubles:

$$x = \sqrt[p+m]{\frac{p}{m}} \cdot \zeta,$$

ζ étant une racine $(p + m)$-ème de $+1$. Leur équation en coor-

données polaires s'écrit:

$$Q(r, \theta) = 1 + 2\, r^{m+p} \cos(m + p)\, \theta + r^{2m+2p} - a^2 r^{2p} = 0.$$

On en déduit immédiatement que les seuls maxima et minima des rayons vecteurs le long de ces courbes se trouvent dans les directions des racines $(p + m)$-ème de (-1) et de $(+1)$. Σ_0 partage le plan en une région intérieure contenant l'origine, située tout entière dans le cercle $|x| < \sqrt[p+m]{\frac{p}{m}}$. $(p + m)$ régions contenant les racines $(p + m)$-èmes de (-1) (sur la figure $e^{\frac{\pi i}{p+m}}$) et une région extérieure située complètement en dehors du cercle $|x| < \sqrt[p+m]{\frac{p}{m}}$.

Il est clair que les courbes Σ contenues dans les $(p + m)$ ré-

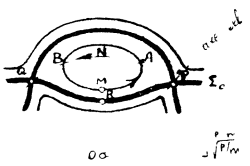

Fig. 6.

gions peuvent seules nous intéresser; considérons un arc BMA d'une courbe coupant aux points A et B la circonférence $|x| = \sqrt[p+m]{\frac{p}{m}}$. Quand on suit cette circonférence du point double P au point double Q l'argument de $a = -\frac{(1 + x^{p+m})}{x^p}$ varie toujours dans le même sens, on voit d'ailleurs immédiatement pour des raisons de symétrie que cette variation est égale à $\frac{m}{m+p} . 2\pi$. Donc, la variation de cet argument le long de l'arc de cercle ANB est moindre que $\frac{m}{m+p} . 2\pi$. La variation totale le long de la courbe fermée $ANBMA$ étant évidemment égale à 2π, il s'ensuit que le long de l'arc BMA l'argument de a varie toujours dans le même sens de plus de $\frac{p}{m+p} . 2\pi$.

Dès lors on n'a qu'à reprendre les considérations de la p. 572; en y remplaçant n par p et p par $(m+p)$ pour apercevoir que, si la limite est atteinte les racines ne peuvent être situées sur une telle courbe Σ. Elles sont donc nécessairement situées sur Σ_0. La variation de l'argument de a sur l'arc PRQ est exactement $\frac{2\pi}{m+p}.p$; on voit comme précédemment que, pour que la limite puisse être atteinte, il est nécessaire qu'une racine vienne au point double P ou Q. S'il en est ainsi, l'équation n'a que $(p-1)$ racines de module moindre que $\sqrt[p+m]{\frac{p}{m}}$ et une racine double de ce module. Les autres racines ont leurs modules supérieurs, car un nombre de la forme $\frac{2\pi}{m+p}.pk$ où k est un entier variant de 1 à $(p+m-1)$ ne peut pas être un multiplè de 2π. La limite n'est atteinte que pour les $(p+m)$ équations suivantes:

$$1-\frac{m+p}{\zeta^p.\,p^{\frac{p}{m+p}}.\,m^{\frac{m}{m+p}}}\,x^p+x^{p+m}=0$$

ζ étant une racine $(p+m)$-ème de $+1$.

Il est clair que la détermination de la limite exacte de module de $1, 2, \ldots, (p-1)$ racines de l'équation par la méthode de M. Herglotz ou bien par la nôtre ne présentera pas de difficultés. Sans m'arrêter à cette question, je remarque seulement qu'il résulte immédiatement du théorème de la p. 564 que l'équation a toujours m racines de modules non supérieurs à un.

En ce qui concerne le problème de la détermination des angles ou des secteurs contenant toujours une racine de l'équation, la méthode de M. Nekrasoff (mémoire cité) fournit le résultat suivant: Chacun des $(p+m)$ angles de sommet origine, d'ouverture $\frac{2\pi}{p+m}$ et symétriques par rapport à la droite joignant l'origine à une des racines $(p+m)$-ès de (-1) contient toujours une racine de l'équation. Dans cet énoncé, l'ouverture angulaire $\frac{2\pi}{p+m}$ ne peut évidemment pas être remplacée par une autre plus petite. Au contraire, un secteur fini contenant toujours une racine de l'équation devra être évidemment d'une ouverture angulaire supérieure ou égale à $\frac{2\pi}{p}$.

6. L'équation quadrinome.

L'équation quadrinome

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_n x^{n_2} = 0 \qquad (p < n_1 < n_2)$$

est à ma connaissance beaucoup moins bien étudiée jusqu'à présent que l'équation trinome. D'ailleurs le nombre des différents cas possibles et la complication du problème sont déjà beaucoup plus considérables. M. Kempner a appliqué sa méthode, dans le travail cité au § 5, pour délimiter dans quelques cas les angles contenant toujours une racine de l'équation.

Sans prétendre en faire une étude complète, je tâcherai d'indiquer les méthodes qui permettent, dans certains cas, de délimiter avec une assez grande précision des régions contenant des racines.

La limite supérieure des modules de p racines

$$R = \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}},$$

sûrement atteinte lorsqu'il n'y a pas de lacunes, peut être atteinte ou non dans le cas où il y a des lacunes. Ainsi, p. ex., elle est atteinte pour

$$1 + x + a_1 x^2 + a_2 x^4 = 0 \quad \text{et} \quad 1 + x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^5 = 0,$$

ces équations ont alors une racine triple de module R; elle est aussi atteinte pour l'équation

$$1 + x + a_1 x^3 + a_2 x^4 = 0$$

dont les quatre racines ont alors le module R; au contraire pour

$$1 + x^2 + a_1 x^4 + a_2 x^5 = 0$$

la limite R n'est pas atteinte.

Le théorème général de la p. 555 peut être, dans le cas de l'équation quadrinome, précisé de la manière suivante:

Lorsque la limite exacte Q de module de $1, 2, \ldots, (p-1)$ ou p racines de l'équation $1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0$ $(p < n_1 < n_2)$ est atteinte il y a nécessairement trois racines au moins de module Q [1].

[1]) Les racines comptées avec leurs degrés de multiplicité.

Supposons qu'il n'y en ait que deux: x_1, x_2 et d'abord distinctes. Si

$$\begin{vmatrix} x_1^{n_1} & x_1^{n_2} \\ x_2^{n_1} & x_2^{n_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

on pourra résoudre la système:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 1 + x_1^p + a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_1^{n_2} = 0 \\ 1 + x_2^p + a_1 x_2^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} = 0 \end{array} \right\}$$

par rapport aux a_i et imprimer à ces variables des petits acroissements tels que l'on aurait $|x_1| > Q$, $|x_2| > Q$: la limite serait donc plus grande que Q. Si

$$\begin{vmatrix} x_1^{n_1} & x_1^{n_2} \\ x_2^{n_1} & x_2^{n_2} \end{vmatrix} = 0$$

il faut supposer aussi

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1^p & x_1^{n_1} \\ 1 + x_2^p & x_2^{n_1} \end{vmatrix} = 0,$$

car autrement le système (1) fournirait pour a_1 et a_2 des valeurs infinies, l'équation aurait n_1 racines nulles au moins. L'on a donc

$$\frac{1 + x_1^p}{1 + x_2^p} = \frac{x_1^{n_1}}{x_2^{n_1}} = \frac{x_1^{n_2}}{x_2^{n_2}}$$

il en résulte que la première équation du système (1) entraîne la deuxième, quelles que soient les valeurs de a_1 et a_2.

Maintenant fixé p. ex. a_1 donnons à a_2 un acroissement da_2, en posant

$$f(x) = 1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2},$$

on aura:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_1)\, dx_1 + x_1^{n_2}\, da_2 = 0 \\ f'(x_2)\, dx_2 + x_2^{n_2}\, da_2 = 0 \end{array} \right.$$

d'où l'on tire:

$$(2) \qquad \left[\frac{x_1 f'(x_1)}{x_1^{n_2}}\right] \left(\frac{dx_1}{x_1}\right) = \left[\frac{x_2 f'(x_2)}{x_2^{n_2}}\right] \left(\frac{dx_2}{x_2}\right).$$

Si l'on n'a pas:

$$(3) \qquad \arg\left\{\frac{x_1 f'(x_1)}{x_1^{n_2}}\right\} = \arg\left\{\frac{x_2 f'(x_2)}{x_2^{n_2}}\right\} + \pi$$

on pourrait choisir dx_1, dx_2, satisfaisant à (2) et tels que $R\left(\frac{dx_1}{x_1}\right) > 0$,

$R\left(\frac{dx_2}{x_2}\right) > 0$ [1]), l'on aurait donc $|x_1 + dx_1| > Q$, $|x_2 + dx_2| > Q$, ce qui est impossible; l'équation (3) doit être vérifiée. Or, on trouve que, si $f(x) = 0$

$$-xf'(x) = n_1 + (n_1 - p)x^p + (n_1 - n_2)a_2 x^{n_2},$$

donc (3) peut s'écrire tout aussi bien sous la forme

$$(3') \qquad \frac{\dfrac{n_1 + (n_1 - p)x_1^p}{x_1^{n_2}} + (n_1 - n_2)a_2}{\dfrac{n_1 + (n_1 - p)x_2^p}{x_2^{n_2}} + (n_1 - n_2)a_2} < 0.$$

Nous pourrons cependant déplacer a_2 arbitrairement (dans un cercle suffisamment petit autour de la valeur primitivement donnée) et déterminer a_1 de manière que l'équation

$$1 + x_1^p + a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_1^{n_2} = 0$$

et par conséquent aussi

$$1 + x_2^p + a_1 x_2^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} = 0$$

reste constamment vérifiée. On voit donc qu'il serait nécessaire que (3') subsiste pour toute valeur de a_2 voisine de la valeur primitivement donnée, donc la fonction linéaire de a_2 figurant au premier membre de l'inégalité (3') devrait se réduire à une constante négative. C'est cependant impossible car pour a_2 infini cette fonction a la valeur 1.

Supposons en second lieu que lorsque la limite Q est atteinte il y ait une racine double x de module Q, nous aurions les deux équations:

$$\varphi_1(x) = n_1 f(x) - xf'(x) = n_1 + (n_1 - p)x^p + (n_1 - n_2)a_2 x^{n_2} = 0$$
$$\varphi_2(x) = n_2 f(x) - xf'(x) = n_2 + (n_2 - p)x^p + (n_2 - n_1)a_1 x^{n_1} = 0.$$

Réciproquement d'ailleurs: $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$ entraînent, si $x \neq 0$, $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$. On voit immédiatement qu'en donnant aux a_1 et a_2 des petits accroissements convenables on aurait une équation ayant une racine double de module plus grand que Q: la limite serait plus grande que Q.

[1]) $R(x)$ désigne la partie réelle de x.

Avant d'aborder notre sujet faisons encore quelques remarques d'un caractère général.

Pour que l'équation ait deux racines symétriques par rapport à la droite joignant l'origine à une racine p-ème de (-1): $\tilde{\omega}$ *il faut et il suffit que l'on ait:* $a_1 \tilde{\omega}^{n_1} =$ *réel,* $a_2 \tilde{\omega}^{n_2} =$ *réel.*

En faisant le changemet de variable $x = \tilde{\omega} z$, il vient:

$$1 - z^p + a_1 \tilde{\omega}^{n_1} z^{n_1} + a_2 \tilde{\omega}^{n_2} z^{n_2} = 0$$

la condition est donc assurément suffisante. Elle est aussi nécessaire car, si x_1, x_2 sont les racines symétriques on pourra poser: $x_1 = \tilde{\omega} z$ $x_2 = \tilde{\omega} \bar{z}$, $\bar{z}$ étant conjugué de z et l'on aura:

$$a_1 \tilde{\omega}^{n_1} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 - z^p & z^{n_2} \\ 1 - \bar{z}^p & \bar{z}^{n_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z^{n_1} & z^{n_2} \\ \bar{z}^{n_1} & \bar{z}^{n_2} \end{vmatrix}}, \quad a_2 \tilde{\omega}^{n_2} = \frac{-\begin{vmatrix} z^{n_1} & 1 - z^p \\ \bar{z}^{n_1} & 1 - \bar{z}^p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z^{n_1} & z^{n_2} \\ \bar{z}^{n_1} & \bar{z}^{n_2} \end{vmatrix}}.$$

Le rapport des déterminants est évidemment réel.

La condition $a_1 \tilde{\omega}^{n_1} =$ réel, $a_2 \tilde{\omega}^{n_2} =$ réel entraîne évidemment celle-ci: $a_1^p =$ réel, $a_2^p =$ réel [1]).

Il résulte de ce qui précède que *si l'équation a deux racines symétriques par rapport à la droite joignant l'origine à* $\tilde{\omega}$, *toutes les racines sont symétriquement disposées par rapport à cette droite.*

M. Herglotz a démontré, dans le mémoire cité au § 5, que *si l'équation trinome* $1 + x^p + a x^n = 0$ $(p < n)$ *a deux racines de même module, l'on a nécessairement* $a^p =$ *réel.*

Cette propriété ne se généralise pas pour l'équation quadrinome, du moins dans ce sens que l'équation quadrinome peut avoir trois racines de même module, sans que l'on ait nécessairement $a_1^p =$ réel, $a_2^p =$ réel. Exemple:

$$(1 + x)(1 + e^{i\theta} x^2) = 1 + x + e^{i\theta} x^2 + e^{i\theta} x^3$$

où θ réel $\not\equiv 0$ (mod. π). Il existe cependant une propriété analogue à celle signalée par M. Herglotz:

Si l'équation $1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0$ $(p < n_1 < n_2)$ *a 3 racines de même module dont les arguments sont en progression arithmétique l'on a nécessairement* $a_1^p =$ *réel,* $a_2^p =$ *réel.*

[1]) Mais non pas réciproquement

Soient x_1, x_2, x_3 les 3 racines: en éliminant a_1, a_2 il vient

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1^p & x_1^{n_1} & x_1^{n_2} \\ 1 + x_2^p & x_2^{n_1} & x_2^{n_2} \\ 1 + x_3^p & x_3^{n_1} & x_3^{n_2} \end{vmatrix} = 0;$$

en posant $x_2 = t x_1$, $x_3 = \bar{t} x_1$, $t = 1$ ceci peut s'écrire:

$$x_1^p = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t^{n_1} & t^{n_2} \\ 1 & \bar{t}^{n_1} & \bar{t}^{n_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t^p & t^{n_1} & t^{n_2} \\ \bar{t}^p & \bar{t}^{n_1} & \bar{t}^{n_2} \end{vmatrix}}$$

donc x_1^p est réel; si $x_1^p > 0$. on posera $x = \zeta z$, ζ étant une racine p-ème de 1, si $x_1^p < 0$ $x = \tilde{\omega} z$, $\tilde{\omega}$ étant une racine p-ème de (-1) et l'on conclura comme p. 582 que les expressions $a_1 \zeta^{n_1}$, $a_2 \zeta^{n_2}$, éventuellement $a_1 \tilde{\omega}^{n_1}$, $a_2 \tilde{\omega}^{n_2}$ sont nécessairement réelles; il s'ensuit que a_1^p et a_2^p sont nécessairement réels.

Nous commencerons par le problème de la détermination du plus petit cercle de centre origine contenant toujours une racine de l'équation. Nous avons trouvé au § 5, en employant la règle de M. Cohn, que l'équation $1 + x^p + a x^n = 0$ $(n \not\equiv 0 \bmod. p)$ a toujours une racine dans le cercle unité. En essayant d'étendre cette même méthode, nous obtiendrons un énoncé analogue:

L'équation $1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0$ $(p < n_1 < n_2 < 2p)$ *a toujours une racine de module ne dépassant pas un* (limite évidemment atteinte pour $a_1 = a_2 = 0$).

Posons

$$f(x) = 1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2},$$

donc

$$\overset{+}{f}(x) = \bar{a}_2 + \bar{a}_1 x^{n_2 - n_1} + x^{n_2 - p} + x^{n_2}.$$

Si $|a_2| \geqq 1$, la proposition est évidente, on suppose donc $|a_2| < 1$ et l'on forme

$$f_1(x) = f(x) - a_2 \overset{+}{f}(x) = [1 - |a_2|^2] - a_2 \bar{a}_1 x^{n_2 - n_1} - a_2 x^{n_2 - p} + x^p + a_1 x^{n_1}$$

et l'on poursuit le procédé. Etudions d'abord les exposants de x qui figurent dans les fonctions $f_k(x)$ successives. Nous les écrirons à côté

des $f_k(x)$ correspondantes dans l'ordre croissant sans nous inquiéter, pour le moment, de la valeur des coefficients. On trouve ainsi:

$$\begin{array}{l} f_1(x) \\ \overset{+}{f_1}(x) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0,\ n_2 - n_1,\ n_2 - p,\ p,\ n_1 \\ 0,\ n_1 - p,\ n_1 - n_2 + p,\ 2n_1 - n_2,\ n_1. \end{array} \right.$$

Si $p < 2n_1 - n_2$ on formera $f_2(x)$:

$$\begin{array}{l} f_2(x) \\ \overset{+}{f_2}(x) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0,\ n_2 - n_1,\ n_1 - p, \ldots p,\ 2n_1 - n_2 \\ 0,\ 2n_1 - n_2 - p, \ldots n_1 - n_2 + p,\ 3n_1 - 2n_2,\ 2n_1 - n_2. \end{array} \right.$$

Si $p < 3n_1 - 2n_2$ on formera $f_3(x)$:

$$\begin{array}{l} f_3(x) \\ \overset{+}{f_3}(x) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0,\ n_2 - n_1,\ 2n_1 - n_2 - p, \ldots,\ p,\ 3n_1 - 2n_2 \\ 0,\ 3n_1 - 2n_2 - p, \ldots,\ n_1 - n_2 + p,\ 4n_1 - 3n_2,\ 3n_1 - 2n_2, \end{array} \right.$$

... et ainsi de suite. Il existe un entier s tel que:

$$sn_1 - (s-1)n_2 \leqq p < (s-1)n_1 - (s-2)n_2,$$

on poussera alors les calculs jusqu'à former $f_{s-1}(x)$:

$$\begin{array}{l} f_{s-1}(x) \\ \overset{+}{f_{s-1}}(x) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0,\ n_2 - n_1,\ (s-2)n_1 - (s-3)n_2 - p, \ldots,\ p,\ (s-1)n_1 - (s-2)n_2. \\ 0,\ (s-1)n_1 - (s-2)n_2 - p, \ldots, \\ \qquad n_1 - n_2 + p,\ sn_1 - (s-1)n_2,\ (s-1)n_1 - (s-2)n_2. \end{array} \right.$$

La dernière fonction formée sera $f_s(x)$:

$$f_s(x) \mid 0, \ldots, p.$$

Désignons maintenant par q le plus grand exposant qui figure dans chaque fonction $f_k(x)$ et posons généralement:

$$f_k(x) = A_k + \ldots + B_k x^p + \ldots + D_k x^{n_2 - n_1} + \ldots + C_k x^q$$

$$A_k \mid = \alpha_k,\quad B_k = \beta_k;\quad D_k \mid = \delta_k,\quad C_k \mid = \gamma_k.$$

Il faudra distinguer deux cas:

I. $\dfrac{n_2 - p}{n_2 - n_1}$ *n'est pas un entier.*

On aura:

$$sn_1 - (s-1)n_2 < p < (s-1)n_1 - (s-2)n_2.$$

En supposant, bien entendu, $\gamma_i < \alpha_i$ $[i = 1, \ldots, (s-1)]$ l'on constate de suite que les A_i sont tous positifs: car $A_i = \alpha_{i-1}^2 - \gamma_{i-1}^2$ et $A_1 > 0$.

Je dis que l'on a $\alpha_i < \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. En effet, si

$$f_{i-1}(x) = A_{i-1} + \ldots + B_{i-1} x^p + \ldots + D_{i-1} x^{n_2 - n_1} + \ldots + C_{i-1} x^q,$$

il vient

$$\overset{+}{f}_{i-1}(x) = \overline{C}_{i-1} + \ldots + \overline{A}_{i-1} x^q$$

et

$$f_i(x) = \overline{A}_{i-1} f_{i-1}(x) - C_{i-1} \overset{+}{f}_{i-1}(x) =$$
$$= \alpha_{i-1}^2 - \gamma_{i-1}^2 + \ldots + B_{i-1} A_{i-1} x^p + \ldots + D_{i-1} A_{i-1} x^{n_2 - n_1} + \ldots + C_i x^q$$

[ni p ni $(n_2 - n_1)$ ne figurent pas dans les exposants des $\overset{+}{f}_i(x)$: $i = 1, 2, \ldots, (s-1)$]. L'on a donc $D_i = D_{i-1} A_{i-1}$, $B_i = B_{i-1} A_{i-1}$ $\alpha_i = A_i = \alpha_{i-1}^2 - \gamma_{i-1}^2$; si $\alpha_{i-1} < \beta_{i-1}$ l'on a, a fortiori, $\alpha_{i-1}^2 - \gamma_{i-1}^2 < \beta_{i-1} \alpha_{i-1}$ c. à. d. $\alpha_i < \beta_i$, or évidemment $\alpha_1 < \beta_1$.

Ainsi donc dans $f_s(x)$ le coefficient de la plus haute puissance de x c. à. d. de x^p est plus grand, en module, que le terme constant. L'équation $f_s(x) = 0$ a donc nécessairement une racine dans le cercle unité et l'équation proposée aussi.

II. $\dfrac{n_2 - p}{n_2 - n_1}$ *est un entier.*

Nous aurons maintenant:

$$s n_1 - (s-1) n_2 = p < (s-1) n_1 - (s-2) n_2.$$

Dans ce cas l'exposant p figure aussi bien dans $f_{s-1}(x)$ que dans $\overset{+}{f}_{s-1}(x)$: il s'ensuit que le coefficient B_s de x^p dans $f_s(x)$ n'est plus égal à $B_{s-1} A_{s-1}$ mais à $A_{s-1} B_{s-1} - C_{s-1} \overline{D}_{s-1}$.

Pour établir la proposition il suffit de faire voir [en supposant, bien entendu, $\alpha_i > \gamma_i$ $i = 1, 2, \ldots, (s-1)$] que $\alpha_s < \beta_s$ c. à. d. que $|A_{s-1} B_{s-1} - C_{s-1} D_{s-1}| > \alpha_{s-1}^2 - \gamma_{s-1}^2$. Il suffit d'établir que

$$\alpha_{s-1} \beta_{s-1} - \gamma_{s-1} \delta_{s-1} > \alpha_{s-1}^2 - \gamma_{s-1}^2;$$

nous ferons voir que l'on a généralement:

$$(4) \qquad \alpha_i \beta_i - \gamma_i \delta_i > \alpha_i^2 - \gamma_i^2 \qquad [i = 1, 2, \ldots, (s-1)].$$

Pour $i = 1$ ceci s'écrit:

$$[1 - |a_2|^2]^2 - |a_1|^2 < 1 - |a_2|^2 - |a_1|^2 |a_2|^2$$

ou

$$(1 - |a_2|^2)^2 < 1 - |a_2|^2 + (1 - |a_2|)\,|a_1|^2$$

ce qui est évident, puisque $|a_2| < 1$. Supposons démontré que:

$$(4') \qquad \alpha_i^2 + \gamma_i \delta_i < \gamma_i^2 + \alpha_i \beta_i$$

et faisons voir que ceci entraîne

$$(5) \qquad \alpha_{i+1}^2 + \gamma_{i+1}\,\delta_{i+1} < \gamma_{i+1}^2 + \alpha_{i+1}\,\beta_{i+1},$$

tant que $(i+1)$ ne dépasse pas $(s-1)$.

Dans ce but je démontrerai d'abord l'inégalité:

$$(6) \qquad \delta_i < \alpha_i + \gamma_i \qquad [i = 1, 2, \ldots, (s-1)].$$

Je m'appuie sur les formules de récurrence:

$$(7) \qquad A_{i+1} = A_i^2 - \gamma_i^2,\ B_{i+1} = A_i B_i,\ C_{i+1} = -C_i \bar{D}_i,\ D_{i+1} = D_i A_i,$$

valables tant que $(i+1)$ ne dépasse pas $(s-1)$.

Pour $i = 1$ (6) s'écrit:

$$|a_1 a_2| < 1 - |a_2|^2 + |a_1| \qquad \text{c. à. d.}$$

$$1 - |a_2|^2 + |a_1|(1 - |a_2|) > 0$$

ce qui est évident, car $|a_2| < 1$. Supposons établi que $\delta_i < \alpha_i + \gamma_i$ et faisons voir que ceci entraîne $\delta_{i+1} < \alpha_{i+1} + \gamma_{i+1}$ [tant que $(i+1)$ ne dépasse pas $(s-1)$] En vertu des formules de récurrence l'inégalité à établir s'écrit: $\delta_i \alpha_i < \alpha_i^2 - \gamma_i^2 + \gamma_i \delta_i$ ou $\delta_i(\alpha_i - \gamma_i) < \alpha_i^2 - \gamma_i^2$ ou, puisque $\gamma_i < \alpha_i$, $\delta_i < \alpha_i + \gamma_i$. L'inégalité (6) est donc établie. Pour établir l'inégalité (4) qui démontre la proposition, substituons dans (5) les valeurs (7). il vient: $(\alpha_i^2 - \gamma_i^2)^2 + \alpha_i \gamma_i \delta_i^2 < \gamma_i \delta_i^2 + \alpha_i \beta_i (\alpha_i^2 - \gamma_i^2)$ ou $\alpha_i^4 + \gamma_i^4 + \alpha_i \gamma_i \delta_i^2 + \alpha_i \beta_i \gamma_i^2 < \gamma_i \delta_i^2 + \alpha_i^3 \beta_i + 2\alpha_i^2 \gamma_i^2$ ce qui peut s'écrire:

$$(\alpha_i^2 - \gamma_i^2)(\alpha_i^2 + \gamma_i \delta_i) + \gamma_i \delta_i (\gamma_i^2 + \alpha_i \delta_i) < (\alpha_i^2 - \gamma_i^2)(\gamma_i^2 + \alpha_i \beta_i) + \gamma_i \delta_i (\alpha_i^2 + \gamma_i \delta_i).$$

L'on a par hypothèse $\alpha_i^2 + \gamma_i \delta_i < \gamma_i^2 + \alpha_i \beta_i$. d'autre part l'inégalité $\delta_i < \alpha_i + \gamma_i$ entraîne la suivante: $\delta_i(\alpha_i - \gamma_i) < \alpha_i^2 - \gamma_i^2$ c. à. d.

$$\gamma_i^2 + \alpha_i \delta_i < \alpha_i^2 + \gamma_i \delta_i.$$

Nous aboutissons donc bien à l'inégalité voulue.

Il est clair que, si n_1 ou n_2 est un multiple de p, la limite exacte de module de la plus petite racine est supérieure à *un*. mais cette circonstance peut se présenter même dans le cas où ni n_1 ni n_2

ne sont des multiples de p. Considérons par exemple l'équation

$$1 + x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^5 = 0;$$

la limite doit être nécessairement supérieure à *un*, car si elle était égale à l'unité, elle serait atteinte pour l'équation $1 + x^2 = 0$, en contradiction avec le théorème de la p. 579; d'ailleurs, on peut vérifier directement, à l'aide de la règle de M. Cohn que l'équation $1 + x^2 + p x^3 + q x^5 = 0$ où $\frac{2}{3} < q < p < 1$ a toutes ses racines extérieures au cercle unité.

On peut s'attendre à ce que les énoncés du genre de celui de la p. 583, étendus aux équations à un nombre quelconque de termes et convenablement développés, pourront conduire, au point de vue de la théorie des fonctions entières, à établir de nouveaux cas d'impossibilité de l'existence de la valeur exceptionnelle de M. Picard où, cette fois-ci, les propriétés arithmétiques des exposants entreront en jeu (cf. l'énoncé de la p. 562).

En joignant l'origine aux p racines p-èmes de (-1) par des segments de droites, et en prolongeant ces segments à l'infini nous obtenons p demi-droites: $L_1, L_2, \ldots, L_p$. Je pose le problème suivant:

Quel est le plus petit angle A formé par deux demi-droites issues de l'origine, ayant comme bissectrice une droite L_i et contenant toujours au moins une racine de l'équation $1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0$.

Nous allons voir que: si $n_2 \geqslant \frac{3}{2} n_1$ $A = \frac{2\pi}{n_1}$ (ainsi donc, tant que $n_2 \geqslant \frac{3}{2} n_1$ l'adjonction du terme $a_2 x^{n_2}$ n'exerce aucune influence sur la limite correspondante de l'équation trinome $1 + x^p + a_1 x^{n_1} = 0$ qui est précisément $\frac{2\pi}{n_1}$).

Il est d'abord évident que l'on a dans tous les cas $A \geqslant \frac{2\pi}{n_1}$: il suffit de prendre $a_2 = 0$, $|a_1|$ très grand et un argument de a_1 convenablement choisi, pour démontrer que si $n_2 \geqslant \frac{3}{2} n_1$, l'on a aussi $A \leqslant \frac{2\pi}{n_1}$; nous aurons besoin d'étudier les courbes Γ décrites par les racines de l'équation lorsque a_1 est fixé et l'argument de a_2 reste constant ou, plus exactement, lorsque cet argument est congru à $\lambda \pmod{\pi}$, λ étant constant. Elles sont définies par la relation

$$\arg \left\{ \frac{1 + x^p + a_1 x^{n_1}}{x^{n_2}} \right\} \equiv \lambda \pmod{\pi} \quad (a_1 \text{ fixe}).$$

On constate immédiatement que, abstraction faite de 0 et ∞, elles n'ont de points doubles que pour des valeurs particulières de λ; nous nous placerons dans le cas général où elles n'en ont pas. Le long d'une branche de Γ $|a_2|$ varie constamment dans le même sens, à moins qu'il ne s'annule ou ne devienne pas infini. A l'origine l'on a évidemment $|a_2| = \infty$, à l'infini $|a_2| = 0$. Par chacun des n_1 zéros de $1 + x^p + a_1 x^{n_1}$ il passe évidemment une branche de Γ et une telle branche doit nécessairement aboutir des deux côtés à l'origine. Cependant, dans le voisinage de l'origine

$$\arg\left\{\frac{1 + x^p + a_1 x^{n_1}}{x^{n_2}}\right\}$$

se comporte comme celui de $\frac{1}{x^{n_2}}$, il y a donc $2n_2$ segments de Γ issus de l'origine et dont $2n_1$ proviennent des branches passant par zéros de $1 + x^p + a_1 x^{n_1}$. Les $2(n_2 - n_1)$ autres doivent nécessairement s'étendre à l'infini. Il n'y a évidemment pas d'autres branches des courbes Γ.

En résumé, nous avons donc n_1 branches finies $K_1, K_2, \ldots, K_{n_1}$ issues de l'origine et y retournant après avoir passé par un zéro $0'$ de $1+x^p+a_1x^{n_1}$ et $2(n_2-n_1)$ branches infinies: $M_1, M_2, \ldots, M_{2(n_2-n_1)}$ issues de l'origine et aboutissant à l'infini [1]). En posant $x = re^{i\varphi}$, $a_1 = te^{i\mu}$ on obtient facilement l'équation des courbes Γ en coordonnées polaires, sous la forme suivante:

$$(8)\quad \sin(n_2\varphi+\lambda)+r^p\sin[(n_2-p)\varphi+\lambda]+tr^{n_1}\sin[(n_2-n_1)\varphi+\lambda-\mu]=0.$$

On en déduit une propriété de ces courbes fondamentale pour nos déductions: *une demi-droite issue de l'origine ne peut couper l'ensemble des courbes Γ qu'en deux points au plus à moins qu'elle ne se confonde elle-même avec une branche de Γ.*

φ étant argument de la demi-droite, ce dernier fait exige que l'on ait $n_2\varphi + \lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$, $(n_2 - p)\varphi + \lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$ donc $\varphi = \frac{k\pi}{p}$ et $\lambda \equiv \frac{kn_2}{p} \cdot \pi \pmod{\pi}$, k étant un entier. Les directions asymptotiques des branches infinies font entre elles les angles tous égaux à $\frac{\pi}{n_2 - n_1}$.

[1]) En réalité les M_i ne sont que des »demi-branches«; il nous sera cependant plus commode de conserver la nomenclature du texte.

Il est évident enfin que, dans le voisinage de l'origine, nos courbes se comportent approximativement comme celles qui sont définies par la relation

$$\arg\left\{\frac{1+x^p}{x^{n_2}}\right\} \equiv \lambda \pmod{\pi},$$

or ces dernières étaient étudiées dans le § consacré à l'équation trinome. On en déduit que *les branches dont les tangentes à l'origine font un angle moindre que* $\frac{\pi}{p}$ *en valeur absolue avec le segment* $0\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}$ *étant une racine p-ème de* (-1), *tournent toujours, dans le voisinage de l'origine, leur concavité vers ce segment.*

Pour démontrer que $A = \frac{2\pi}{n_1}$ nous supposerons que λ est choisi de manière que Γ n'aient pas de points doubles (outre 0 et ∞) et que $\lambda \not\equiv \frac{kn_2\pi}{p} \pmod{\pi}$, k entrer. Ces restrictions ne diminuent évidemment pas la généralité du résultat.

Si $n_2 \geqslant 2n_1$ la démonstration est très simple.

Soit $\tilde{\omega}$ une racine p-ème quelconque de (-1) p. ex. $\tilde{\omega} = e^{\frac{\pi i}{p}}$ Traçons des demi-droites D_1, D_2 issues de l'origine et faisant des

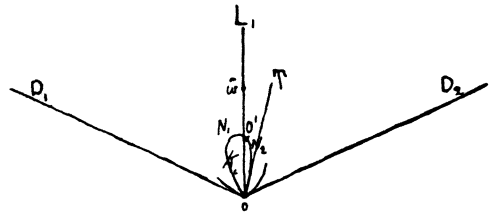

Fig. 7.

angles $\frac{2\pi}{n_2} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ arbitrairement petit) avec OL_1. Les angles que font entre eux les segments de Γ issus de l'origine étant tous égaux à $\frac{\pi}{n_2}$ les angles L_1OD_2 et D_1OL_1 contiennent chacun au moins deux de ces segments; d'ailleurs, en vertu de l'hypothèse faite au sujet de λ, aucun d'eux n'est tangent à OL_1. L'on a $n_2 \geqslant 2n_1 > 2p$,

donc $\frac{2\pi}{n_2} + \varepsilon < \frac{\pi}{p}$ si ε est assez petit: il en résulte que les segments en question tournent leur concavité vers L_1. Examinons en particulier les deux segments ON_1, ON_2 les plus rapprochés de L_1 (Fig. 7).

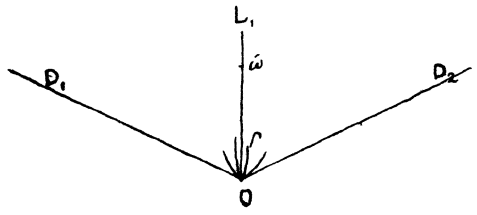

Fig. 8.

Si ces deux segments se réunissent dans une branche K_i, cette branche est contenue tout entière dans l'angle $D_1\,OD_2$: autrement on serait en contradiction avec la propriété fondamentale des courbes Γ, celle de n'être coupée qu'en deux points au plus par une demi-droite issue de l'origine, appliquée p. ex. à la tangente OT' au segment ON_2 de Γ. On en déduit que l'équation proposée aurait une racine dans l'angle $D_1\,OD_2$.

Supposons en second lieu qu'un des segments ON_1, ON_2 p. ex. ON_2 se réunisse en une branche finie K_i au segment voisin du côté

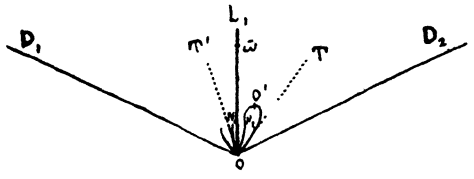

Fig. 9.

opposé à L_1 (Fig. 9). En appliquant la propriété fondamentale aux tangentes OT ou OT' on constate encore que la branche K_i doit être contenue tout entière dans l'angle $D_1\,OD_2$.

Il n'est point possible que le segment ON_2 se réunisse en une branche finie K_i à un segment non voisin dans le voisinage de l'origine, comme l'indique la figure 10 ci-contre ou bien la fig. 11, car K_i contiendrait à son intérieur une autre branche finie K_s et

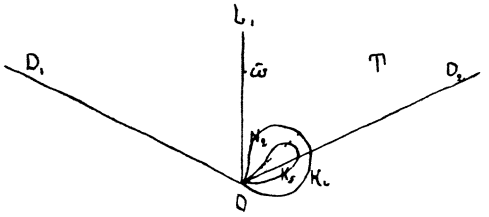

Fig 10

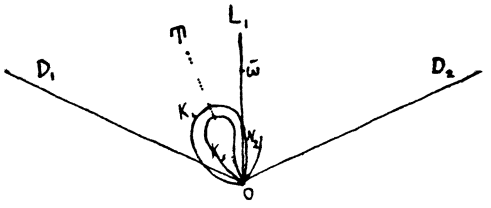

Fig. 11

en considérant la tangente OT à K_s on arrive de nouveau à une contradiction.

Il ne reste donc plus qu'à examiner l'hypothèse suivant laquelle

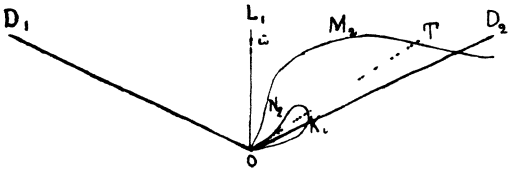

Fig. 12.

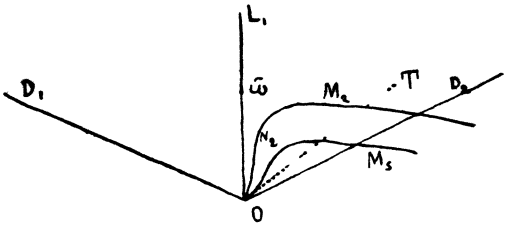

Fig. 13.

les deux segments voisins de L_1 : ON_2, ON_1 donnent naissance aux branches infinies M_i soit M_2 et M_1. Je dis que ces branches M_2 et

M_1 restent complètement dans l'angle $D_1 OD_2$: la supposition contraire n'est point compatible avec la propriété fondamentale, comme le montrent de suite les fig. 12 et 13 ci-contre. Or les deux branches $M_1 M_2$ étant voisines dans le voisinage de l'origine, elles correspondent visiblement aux valeurs de l'argument de a_2 différant de π; donc, l'équation considérée a assurément une racine dans $P_1 OD_2$. ε étant arbitrairement petit, nous arrivons donc à la conclusion: $A \leqslant \operatorname{Max}\left\{\frac{4\pi}{n_2} \cdot \frac{2\pi}{n_1}\right\}$, donc si $n_2 \geqslant 2n_1$, $A = \frac{2\pi}{n_1}$. On constate de plus que cette limite ne peut être atteinte si a_1 et a_2 sont finis.

La méthode de démonstration *s'étend au cas* $\frac{3}{2} n_1 \leqslant n_2 < 2n_1$. Nous allons considérer maintenant les droites OE_1, OE_2 faisant des angles $\frac{\pi}{n_1} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ et arbitrairement petit) avec L_1. L'on a d'après l'hypothèse $2 \cdot \frac{\pi}{n_2} > \frac{\pi}{n_1} \geqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{n_2}$, l'angle $E_1 OE_2$ renferme donc 3 ou 4 segments de Γ issus de l'origine, qui tournent tous à l'origine leur concavité vers L_1 car $\frac{\pi}{n_1} + \varepsilon < \frac{\pi}{p}$, si ε est assez petit. S'il y en avait 4, on voit immédiatement que chacun des angles $E_1 OL_1$ et $L_1 OE_2$ en renfermerait deux; on raisonnerait exactement comme dans le cas $n_2 \geqslant 2n_1$ déjà examiné.

Nous supposerons donc qu'il y a 3 segments de Γ issus de l'origine dans l'angle $E_1 OE_2$; d'ailleurs chacun des angles $E_1 OL_1$ et

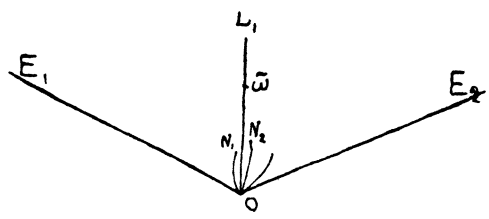

Fig. 14.

$E_2 OL_1$ renferme au moins un segment: donc il y en a deux dans un de ces angles p. ex. $L_1 OE_2$ et un seul dans $E_1 OL_1$; nous appelons encore ON_2. ON_1 ceux qui sont les plus rapprochés à L_1. En raisonnant exactement comme tout à l'heure on voit que ON_2 ne peut se réunir pour former des branches K_i finies qu'à des segments voisins et que, dans ce dernier cas, ces branches K_i seraient

complètement intérieures à $E_1 O E_2$, cet angle renfermerait donc une racine de l'équation. Si ON_2 donne naissance à une branche infinie M_i, on voit encore comme précédemment que cette branche M_i doit rester tout entière dans l'angle $E_1 O E_2$. D'ailleurs $E_1 O E_2 > \frac{2\pi}{n_1}$ donc nous savons, d'après les résultats relatifs à l'équation trinome, que $1 + x^p + a_1 x^{n_1}$ a certainement un zéro dans $E_1 O E_2$, donc une branche finie K_i y doit pénetrer. Si le zéro en question, représenté par le point O', se trouve sur une branche finie K_i contenant un

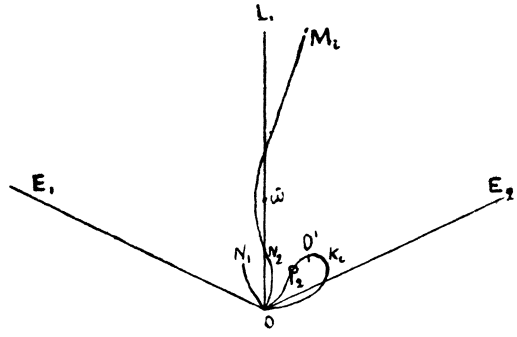

Fig 15.

des segments OP_2 ou ON_1 issus de l'origine et voisins de ON_2, la partie $OP_2 O'$ resp. $ON_1 O'$ de la branche K_i reste entièrement (en

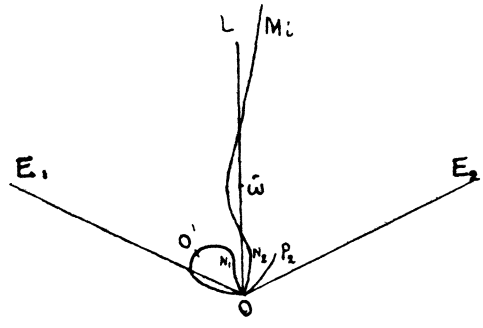

Fig 16.

vertu de la propriété fondamentale appliquée à OE_2 ou à OE_1) dans l'angle $E_1 O E_2$.

Or si, lorsque la racine de l'équation parcourt la branche M_i l'ar-

gument de a_2 reste constamment égal à λ, à l'arc OP_2O' resp. ON_1O' correspondra visiblement l'argument $\lambda + \pi$: de toute façon il y a bien une racine dans E_1OE_2.

Il ne reste à examiner que le cas où la branche finie K_i passant

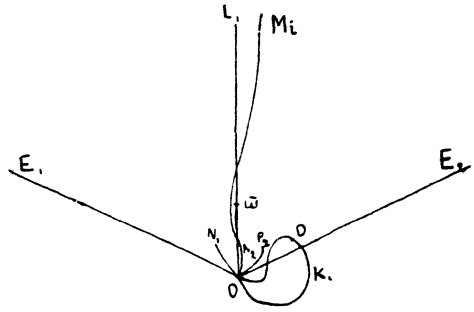

Fig. 17.

par O' ne contient ni ON_1 ni OP_2: or on se rend compte immédiatement, en appliquant la propriété fondamentale à OE_2 ou à OE_1,

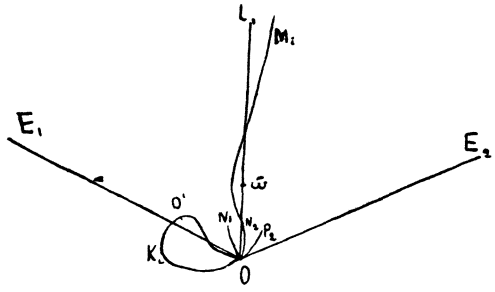

Fig. 18.

que les segments OP_2 ou ON_1 doivent donner naissance à une nouvelle branche infinie M_s et que cette branche M_s doit rester comme M_i à l'intérieur de E_1OE_2 Or les arguments de a_2 correspondants aux branches M_i et M_s diffèrent de π de nouveau nous avons une racine dans E_1OE_2

La proposition est donc démontrée

Si $n_2 < \frac{3}{2} n_1$ nous remplacerions dans les raisonnements de tout à l'heure l'angle E_1OE_2 par l angle F_1OF_2, L_1OF_1 et L_1OF_2 étant

d'ouverture $\frac{3\pi}{2n_2}+\varepsilon$ et nous aboutirions au résultat:

$$\frac{2\pi}{n_1}\leqslant A\leqslant 3\,.\,\frac{\pi}{n_2}\text{ [1]},$$

mais la recherche de la valeur exacte de A paraît plus difficile: nous verrons d'ailleurs sur un exemple que dans certains cas $A>\frac{2\pi}{n_1}$ [2]

Je me bornerai à étudier complètement, par une méthode différente, l'exemple simple de l'équation

$$1+x+a_1x^3+a_2x^4=0.$$

D'après ce qui précède nous avons ici $120^0\leqslant A\leqslant 135^0$. En réalité $A=\text{arc cos}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\theta_0$. $(A=125^0\,15'\,52'')$.

On peut évidemment, en posant $x=\frac{1}{y}$, étudier, à la place de l'équation proposée, celle aux inverses:

$$a_2+a_1y+y^3+y^4=0.$$

Les racines y_1, y_2, y_3, y_4 de cette équation vérifient les deux relations:

$$\sum_{i=1}^{4} y_i=-1 \tag{9}$$

$$\sum_{j\neq k} y_jy_k=0 \tag{10}$$

et réciproquement, à tout système des y_i vérifiant (9) et (10) correspond une équation du type étudié. En éliminant y_4 entre (9) et (13) il vient:

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3+y_1+y_2+y_3=0. \tag{11}$$

[1]) En supposant toutefois $n_2>\frac{3}{2}p$

[2]) Il convient aussi de faire remarquer que pour $p=1$ et $p=2$ l'on a évidemment, même pour l'équation à un nombre quelconque de termes $A\leqslant\frac{2\pi}{p}$; dans le cas de l'équation quadrinome ce résultat subsiste, d'après ce qui précède, pour $p=3$ et $p=4$. Peut-être est-il vrai généralement.

A chaque système de valeurs y_1, y_2, y_3 vérifiant (11) correspond une équation du type considéré ayant y_1, y_2, y_3 comme racines.

Nous allons démontrer successivement:

1° $A \geqslant 2\theta_0$

Traçons symétriquement à l'axe réel deux demi-droites OD_1, OD_2 faisant des angles égaux à θ où $60^0 < \theta < \theta_0$ avec l'axe réel né-

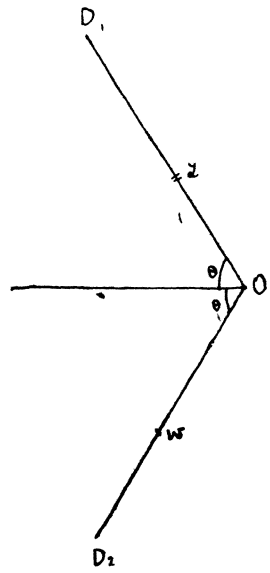

Fig. 19.

gatif. Je construirai une équation du type étudié n'ayant aucune racine à l'intérieur de l'angle D_1OD_2 ainsi formé. Dans ce but je poserai $y_1 = y_2 = z$, $y_3 = w$ z et w étant situés respectivement sur OD_1 et OD_2. Pour qu'il existe une équation ayant z comme racine double et w comme racine simple il faut et il suffit que w et z vérifient la relation:

$$(11') \qquad (3z^2 + w^2) + 2zw + 2z + w = 0,$$

ou en posant $z = -Ze^{-i\theta}$, $w = -We^{i\theta}$ $(Z = |z|, \quad W = |w|)$ que les deux relations:

$$(12) \qquad (3Z^2 + W^2)\cos 2\theta + 2ZW - (2Z + W)\cos\theta = 0$$

$$(13) \qquad (6Z^2 - W^2)\cos\theta + W - 2Z = 0$$

soient vérifiées. En éliminant entre (12) et (13) successivemeut Z^1 et W^2 on obtient un système équivalent

$$(14)\qquad Z = \frac{-4\cos\theta\cos 2\theta W^2 - (1 - 4\cos^2\theta)\, W}{2(-1 + 2\cos\theta\, W)}$$

$$(15)\qquad W = \frac{-12\cos\theta\cos 2\theta Z^2 - 2(1 - 4\cos^2\theta) Z}{-1 + 4\cos\theta\, Z}$$

Dans le plan (W, Z) (14) représente une hyperbole avec les directions asymptotiques: $W = 0$ et $Z = -\cos 2\theta\, W$, (15) une hy-

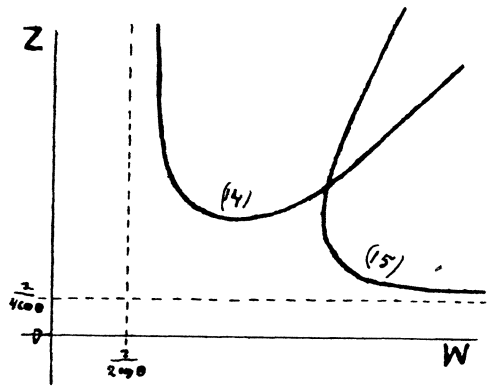

Fig. 20.

perbole avec les directions asymptotiques $Z = 0$ et $Z = \frac{1}{-3\cos 2\theta} W$. Or, puisque $\theta < \theta_0$, $|\cos 2\theta| < \frac{1}{|3\cos 2\theta|}$. On s'assure aisément que pour $W > \frac{1}{2\cos\theta}$ le deuxième membre de (14) reste constamment positif; de même pour $Z > \frac{1}{4\cos\theta}$ le deuxième membre de (15) reste constamment positif; ainsi donc les hyperboles (14) et (15) se coupent certainement en un point (W, Z) avec $W > \frac{1}{2\cos\theta}$, $Z > \frac{1}{4\cos\theta}$, l'on aura donc $(2Z + W)\cos\theta > 1$ c à d. $R(2z + w) < -1$ [1]).

La quatrième racine de l'équation y_4 se détermine par la relation (9):

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -1,$$

[1]) $R(x)$ désigne la partie réelle de x.

on aura donc

$$y_3 = -1 - (2z + w),$$

il s'ensuit $R(y_4) > 0$ ce qui établit visiblement notre assertion.

2^0 $A \leqslant 2\theta_0$.

Nous poserons maintenant $\theta = \theta_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit et nous allons voir que l'équation a nécessairement une racine dans l'angle $D_1 O D_2$. Supposons au contraire qu'il existe une équation de la forme

$$a_2 + a_1 y + y^3 + y^4 = 0$$

qui n'ait aucune racine dans cet angle. La relation (9):

$$\sum_{i=1}^{4}{}' y_4 = -1$$

montre, en tout cas, qu'il y a nécessairement une racine dans le de-

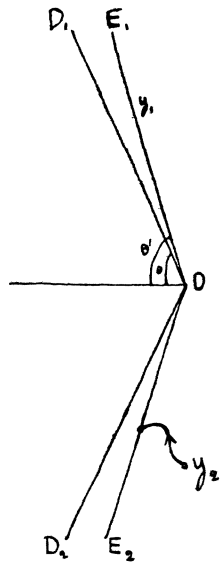

Fig. 21.

mi-plan gauche $R(y) < 0$ [1]). Soit y_1 une telle racine; s'il y en a plusieurs nous désignerons par y_1 celle dont l'écart angulaire avec

[1]) $R(x)$ désigne la partie réelle de x.

l'axe négatif est le plus petit. En supposant, par exemple $Y(y_1) > 0$ [1]) nous poserons

$$y_1 = -Y_1 e^{i\theta'} \quad (Y_1 = |y_1|) \quad \theta \leqslant \theta' < \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi l'angle $E_1 O E_2$ symétrique par rapport à l'axe réel, d'ouverture $2\theta'$, ne contient aucune racine à son intérieur.

Considérons encore une autre racine quelconque y_2, les deux relations:

$$a_2 + a_1 y_1 + y_1^3 + y_1^4 = 0, \quad a_2 + a_1 y_2 + y_2^3 + y_2^4 = 0$$

permettent de calculer a_1 et a_2, il vient:

$$a_1 = -[y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2 + y_2^3 + y_2^2 y_1 + \cdots + y_1^3],$$
$$a_2 = y_1 y_2 [y_1 + y_2 + y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2].$$

(Ces relations subsistent même pour $y_1 = y_2$). Fixons y_1 et ramenons y_2 vers

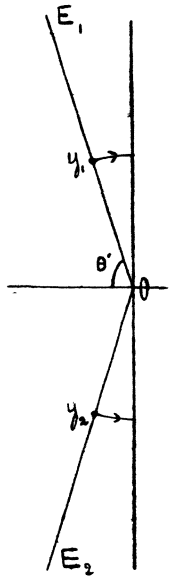

Fig 22.

OE_2 suivant une courbe continue quelconque (Fig. 21), en ayant toutefois soin de faire éviter les racines de l'équation en t: $t^2 + (1 + y_1) t + y_1 + y_1^2 = 0$

[1]) $Y(x)$ = coefficient i dans x.

et l'origine, en déterminant à chaque instant a_1 et a_2 correspondants, a_2 ne sera jamais nul, l'équation n'aura jamais de racine nulle. Si, au cours de cette opération, une autre racine (y_3 ou y_4) vient sur OE_2 ou sur OE_1 nous nous arrêterons là; en tout cas nous aboutirons finalement à une équation ayant la racine y_1 sur OE_1, une autre, soit y_2, sur OE_2 ou sur OE_1 et aucune à l'intérieur de l'angle E_1OE_2. Ceci posé nous déplacerons maintenant simultanément y_1 et y_2 vers l'axe imaginaire (Fig. 22), en maintenant leurs modules constants, en ayant soin que les droites OE_1, OE_2 passant toujours par y_1 et y_2 restent symétriques par rapport à l'axe réel et en déterminant de nouveau à chaque instant a_1 et a_2 par les formules déjà écrites. Or $\theta' > 60^0$, il s'ensuit, en posant $|y_i| = Y$:

$$(Y_1^2 + Y_2^2)\,|\cos 2\theta'| > Y_1\,Y_2$$

donc

$$R(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2 + y_1 + y_2) < 0$$

par conséquent a_2 ne peut s'annuler au cours de cette opération et

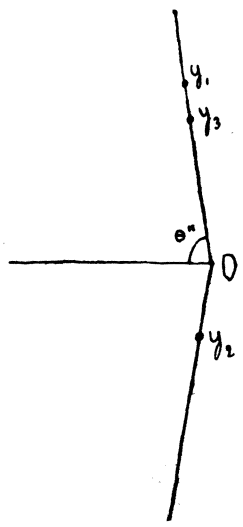

Fig. 23.

aucune racine ne peut donc pénétrer dans E_1OE_2 par l'origine. Il est cependant nécessaire, d'après la relation $\sum_{i=1}^{4} y_i = -1$ qu'une ra-

cine pénètre effectivement dans cet angle avant que OE_1 et OE_2 viennent à coïncider avec l'axe imaginaire. Donc nous aboutirions nécessairement à un angle E_1OE_2 d'ouverture $2\theta''$ $\left(\theta_0 < \theta'' < \frac{\pi}{2}\right)$ (Fig. 23) tel qu'une équation du type considéré aurait sur une des demi-droites OE_i, OE_1 par exemple, deux racines, soit y_1 et y_3 et sur l'autre OE_2 une au moins: y_2; ou bien qu'elle aurait trois racines y_1, y_2, y_3 au moins sur OE_1 par exemple. Nous allons cependant voir que ceci est impossible. Dans le deuxième cas en effet il est manifeste que la partie réelle du 1-er membre de l'équation (11):

$$\sum_{i=1}^{3} y_i^2 + \sum_{j \neq k} y_j y_k + \sum_{i=1}^{3} y_i = 0$$

est négative.

Dans le premier cas posons

$$y_1 = -Y_1 e^{-i\theta''}, \quad y_2 = -Y_2 e^{\theta''}, \quad y_3 = -Y_3 e^{-i\theta''}$$

et égalons à zéro la partie réelle du 1-er membre de (11), il vient:

$$(16) \qquad \begin{aligned} (Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_1 Y_3) \cos 2\theta'' + Y_1 Y_2 + Y_3 Y_2 - \\ - (Y_1 + Y_2 + Y_3) \cos \theta'' = 0. \end{aligned}$$

En considérant Y_1, Y_2, Y_3 comme coordonnées rectangulaires dans l'espace il est aisé de constater que (16) représente $\left(\text{si } \theta_0 < \theta'' < \frac{\pi}{2}\right)$ un ellipsoïde réel passant par l'origine et tangent au plan $Y_1 + Y_3 + Y_3 = 0$. En examinant les intersections de l'ellipsoïde avec les plans coordonnés on constate qu'il ne pénètre point dans l'octant: $Y_1 > 0$ $Y_2 > 0$ $Y_3 > 0$. Ceci établit notre assertion.

En supposant de nouveau $n_2 \geqslant \frac{3}{2} n_1$ et en désignant par ε un nombre positif arbitrairement petit je dis maintenant qu'il existe un secteur circulaire fini S de l'angle au centre $\frac{2\pi}{n_1} + \varepsilon$, de sommet à l'origine, symétrique par rapport à la droite joignant une racine p-ème de (-1): $\tilde{\omega}$ à l'origine et contenant toujours une racine de l'équation. Nous savons en effet que l'angle A' d'ouverture $\frac{2\pi}{n_1} + \varepsilon$ dont les côtés coïncident avec les rayons frontières du secteur con-

tient toujours une racine. Si notre assertion était inexacte, il existerait nécessairement une suite infinie de couples de valeurs

$$(a_1^{(k)},\ a_2^{(k)} \quad k = 1, 2, \ldots)$$

telle que le module de la racine $x_1^{(k)}$ de l'équation correspondante, contenue dans A' augmenterait indéfiniment pour $k = \infty$. De la suite $(a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$ on pourrait extraire une autre telle que les arguments de $a_1^{(k)}$ et $a_2^{(k)}$ tendraient vers des limites déterminées, et que de même les modules $|a_1^{(k)}|$, $|a_2^{(k)}|$ tendraient vers des limites finies ou augmenteraient indéfiniment. Si $a_1^{(k)}$, $a_2^{(k)}$ tendaient vers des limites finies $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, l'équation $1 + x^p + \hat{a}_1 x^{n_1} + \hat{a}_2 x^{n_2} = 0$ n'aurait aucune racine dans A', ce qui est impossible. Donc $|a_1^{(k)}|$ ou $|a_2^{(k)}|$ augmente indéfiniment. Il est visible que dans ces conditions l'équation

$$1 + x^p + a_1^{(k)} x^{n_1} + a_2^{(k)} x^{n_2} = 0$$

peut s'écrire pour de grandes valeurs de $|x|$:

$$a_2^{(k)} x^{n_2} = (1 + \varepsilon^{(k)}) a_1^{(k)} x^{n_1}$$

où $\varepsilon^{(k)}$ tend vers 0 pour k infini ou encore

$$x^{n_2 - n_1} = (1 + \varepsilon^{(k)}) \cdot \frac{a_1^{(k)}}{a_2^{(k)}}.$$

Puisque la racine $x_1^{(k)}$ augmente indéfiniment, la dernière équation a une solution, on en tire $\lim\limits_{k=\infty} \dfrac{a_2^{(k)}}{a_1^{(k)}} = 0$. On voit, de plus, que si une autre racine $x_i^{(k)}$ augmentait indéfiniment en module, on aurait nécessairement $\lim\limits_{k=\infty} \dfrac{x_i^{(k)}}{x_1^{(k)}} = \zeta$, ζ étant une racine $(n_2 - n_1)$-ème de l'unité. D'ailleurs $\zeta \neq 1$. En effet, en posant $\dfrac{x_1^{(k)}}{x_i^{(k)}} = t_k$ l'on trouve:

$$a_1^{(k)} = \frac{(1 - t_k^{n_2}) + (1 - t_k^{n_2 - p}) x_1^p}{(t_k^{n_2 - n_1} - 1) x_1^{n_1}} \text{ [1]},$$

donc, si $t_k \underset{k=\infty}{\to} 1$ et $|x_1|$ augmente indéfiniment $|a_1^{(k)}|$ tend vers zéro et par conséquent $|a_2^{(k)}|$ aussi, ce qui est impossible. Il en résulte que $(n_2 - n_1)$ racines de l'équation au plus augmentent indéfiniment.

[1]) Je supprime pour simplifier l'écriture des indices k dans $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots$

en module, les n_1 autres restent à distance finie; on peut d'ailleurs supposer (en extrayant au besoin une nouvelle suite partielle) qu'elles tendent vers des limites déterminées. Ces limites ne peuvent être que nulles: en effet, si $x_2^{(k)}$ p. ex. tendait vers une limite finie non nulle et $|x_1^{(k)}|$ augmentait indéfiniment, la formule:

$$(17) \qquad a_1^{(k)} = \frac{-(1 + x_2^p) \,.\, x_1^{n_2} + x_2^{n_2} \,.\, x_1^p + x_2^{n_2}}{x_2^{n_1} \,.\, x_1^{n_2} - x_2^{n_2} \,.\, x_1^{n_1}}$$

montrerait que $a_1^{(k)}$ tendrait vers une limite finie, donc $a_2^{(k)}$ vers zéro, ce qui n'est pas possible. Ainsi donc il est nécessaire de supposer que n_1 racines de l'équation tendent vers zéro. Cependant, dans le voisinage de l'origine l'équation peut s'écrire: $\left(\text{à cause de la relation } \lim \frac{a_2^{(k)}}{a_1^{(k)}} = 0\right)$ $x^{n_1} = \frac{-(1 + \varepsilon_k)}{a_1^{(k)}}$.

Or, une telle équation a nécessairement une racine dans l'angle A', si ε_k est assez petit. Nous aboutissons donc à une contradiction.

Examinons maintenant dans quelles conditions la limite supérieure Q de module de la racine de l'équation située dans l'angle A', d'ouverture $\frac{2\pi}{n_1} + \varepsilon$ pourrait être atteinte?

Il existe une suite $a_1^{(k)}$, $a_2^{(k)}$ telle que la racine du module le plus petit parmi celles qui sont situées dans A' tend vers un nombre x_1 de module Q. On peut supposer que $a_1^{(k)}$, $a_2^{(k)}$ tendent vers des limites finies ou non. Considérons d'abord le cas où $|a_1^{(k)}|$ ou $|a_2^{(k)}|$ augmente indéfiniment. On voit, exactement comme tout à l'heure, qu'il n'est pas possible qu'une racine x_i de l'équation augmente indéfiniment en module pour $k = \infty$. On peut donc supposer que toutes les racines tendent vers des limites finies et déterminées.

La formule (17) ou la formule analogue

$$(18) \qquad a_2^{(k)} = \frac{x_2^{n_1} - x_2^{n_1} + x_1^p x_2^{n_1} - x_1^{n_1} x_2^p}{x_2^{n_2} x_1^{n_1} - x_1^{n_2} x_2^{n_1}}$$

où x_1, x_2 sont des racines quelconques de l'équation montrent d'ailleurs que les limites différentes de zéro sont toutes distinctes: autrement on verrait, en y divisant les numérateurs et les dénominateurs par $(x_2 - x_1)$ que $a_1^{(k)}$ et $a_2^{(k)}$ tendent vers des limites finies; pour la même raison le nombre de ces limites ne peut pas dépasser $(n_2 - n_1)$: donc n_1 racines de l'équation tendent vers zéro. Enfin en

formant d'après (17) et (18) le quotient $\frac{a_2}{a_1}$, en y supprimant au numérateur et au dénominateur le facteur commun $(x_2 - x_1)$ et en supposant que $|x_1|$ est très voisin de Q et $|x_2|$ très petit l'on constate que $\lim\limits_{k=\infty} \frac{a_2^{(k)}}{a_1^{(k)}} = 1$. Dès lors l'équation peut s'écrire dans le voisinage de l'origine sous la forme $x^{n_1} = \frac{-(1+\varepsilon_k)}{a_1^{(k)}}$ et l'on aboutit alors, comme à la p. 603, à une contradiction. Il faut donc supposer que $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}$ tendent vers des limites finies $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ et il est clair que l'équation

$$1 + x^p + \hat{a}_1 x^{n_1} + \hat{a}_2 x^{n_2} = 0$$

réalise la limite de module Q. Cette équation que j'écrirai:

$$f(x) = 1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0$$

a nécessairement deux racines de module Q, dans A'. Dans le cas contraire, en effet, on pourrait en choisissant convenablement un accroissement de a_1 par exemple et en déterminant l'accroissement correspondant dx_1 de x_1 $(|x_1| = Q)$ par la formule

$$f'(x_1)\,dx_1 + x_1^{n_1} da_1 = 0$$

faire en sorte que le point $x_1 + dx_1$ reste en A' et que $|x_1 + dx_1| > Q$. Mais il y a plus, l'équation doit avoir au moins 3 racines de module Q.

Supposons le contraire, et d'abord que les deux racines x_1 et x_2 de module Q soient distinctes. Les formules (17), (18) montrent alors immédiatement qu'il est nécessaire de supposer $x_2^{n_2-n_1} = x_1^{n_2-n_1}$; a_1 et a_2 étant finis, on en déduit

$$\frac{1 + x_1^p}{1 + x_2^p} = \frac{x_1^{n_1}}{x_2^{n_1}} = \frac{x_1^{n_2}}{x_2^{n_2}}. \tag{19}$$

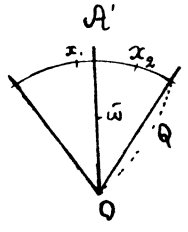

Fig 24

Si x_1 et x_2 ne sont pas sur les frontières de A' on n'a qu'à rai-

sonner comme pp. 580—581 pour aboutir à une contradiction. Si une des racines x_1 et x_2, x_2 par exemple serait sur la frontière de A', observons que l'on déduit de (19):

$$\frac{1+x_1^p}{x_1^{n_1}} = \frac{1+x_2^p}{x_2^{n_1}} \quad \text{c. à. d.}$$

qu'il existe une équation trinome de la forme $1 + x^p + bx^{n_1} = 0$

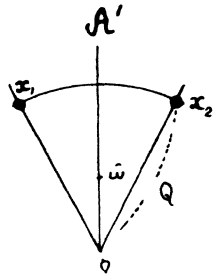

Fig. 25.

ayant des racines x_1 et x_2. D'ailleurs

$$\frac{\pi}{n_1} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{p}$$

si ε est assez petit et $|1 + x_1^p| = |1 + x_2^p|$, donc x_1 et x_2 devraient être situées toutes les deux sur la frontière de A'.

En se rappelant la disposition des courbes Γ relatives à l'équa-

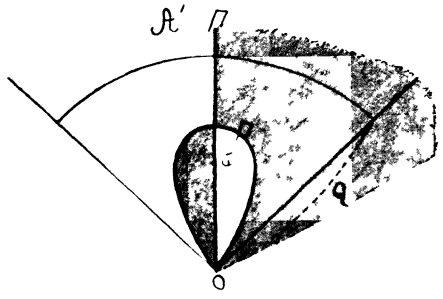

Fig 26.

tion $1 + x^p + bx^{n_1} = 0$, définies par la relation $\arg b \equiv \lambda \pmod{\pi}$, de celles notamment pour lesquelles $\lambda = \arg(\bar{\omega}^{-n_1})$ et dont une

branche a le point double $x = \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p}} \cdot \tilde{\omega}$ on constate aisément qu'aucune de ces branches ne coupera les frontières de l'angle A' si $\varepsilon > 0$ est assez petit $\left(\text{si } \frac{\pi}{n_1} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{n_1 - p}\right)$. Il en résulte immédiatement que les régions hachurées et les régions laissées en blanc de l'angle A' sur la figure 26 ci-contre correspondent à deux demi-plans complémentaires du plan des b, donc x_1 et x_2 ne peuvent pas être racines d'une même équation de la forme $1 + x^p + bx^{n_1} = 0$. Si l'équation avait une racine double de module Q il n'y a qu'à répéter le raisonnement de la p. 581

En m'appuyant sur les résultats qui viennent d'être obtenus je vais démontrer maintenant que le nombre Q ne peut pas dépasser

$$\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}}.$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitrairement petit nous aboutissons donc à l'énoncé suivant qui constitue évidemment une précision du théorème général de la p. 547:

Considérons les p secteurs circulaires, dont chacun contient une racine p-ème $\tilde{\omega}$ de (-1) et qui sont limités d'une part par la circonférence $|x| = \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}}$ et d'autre part par les $2p$ demi-droites issues de l'origine et faisant des angles égaux à $\frac{\pi}{n_1}$ avec des segments joignant l'origine aux p racines $\tilde{\omega}$. Si $n_2 \geqslant \frac{3}{2} n_1$, l'équation

$$1 + x^p + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} = 0$$

$(p < n_1)$ a toujours une racine au moins dans chacun de ces secteurs. Dans cet énoncé ni $\frac{\pi}{n_1}$ ni $\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}}$ ne peuvent pas être remplacés par des nombres plus petits [1]).

[1]) Cf. l'énoncé analogue relatif à l'équation trinome p. 569. Notre énoncé n'est évidemment nullement en contradiction avec le fait que la limite de module de p racines peut être inférieure à $\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}}$.

Pour qu'il existe une équation du type étudié ayant 3 nombres donnés x_1, x_2, x_3 comme racines il faut et il suffit que ceux-ci vérifient la relation

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + x_1^p\, x_1^{n_1}\, x_1^{n_2} \\ 1 + x_2^p\, x_2^{n_1}\, x_2^{n_2} \\ 1 + x_3^p\, x_3^{n_1}\, x_3^{n_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous donnerons à cette condition une forme un peu différente; dans ce but posons $\frac{x_1}{x_2} = t$ et calculons le coefficient a_2 par les équations:

$$1 + x_1^p + a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_1^{n_2} = 0 \quad \text{et} \quad 1 + x_2^p + a_1 x_2^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} = 0.$$

Il vient ainsi:

$$(20) \qquad a_2 x_1^{n_2} = \frac{t^{n_2-n_1}(t^{n_1-p} - 1)}{t^{n_2-n_1} - 1}\left[\frac{t^{n_1} - 1}{t^{n_1-p} - 1} - (-x_1^p)\right] \equiv \varphi(t).$$

Si $x_2 \neq x_3$ la fonction de t qui figure au second membre doit prendre la même valeur pour deux valeurs différentes de $t: t_2$ et t_3. Réciproquement, si $\varphi(t_2) = \varphi(t_3)$ on pourra construire une équation ayant des racines $x_1, x_2 = \frac{x_1}{t_2}, x_3 = \frac{x_1}{t_3}$.

Etudions maintenant la variation de $\varphi(t)$ lorsque $t = e^{i\theta}$ parcourt dans le sens direct l'arc $O \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n_1} + \varepsilon$ de la circonférence $|t| = 1$. Je dis que:

$$si \quad |x_1| > \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}}, \quad \frac{\partial \arg \varphi(t)}{\partial \theta} > 0$$

dans l'intervalle $O \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n_1} + \varepsilon$.

Nous avons d'après (20):

$$(21) \quad \frac{\partial \arg \varphi(t)}{\partial \theta} = \frac{\partial \arg}{\partial \theta}\left\{\frac{t^{n_2-n_1}(t^{n_1-p} - 1)}{t^{n_2-n_1} - 1}\right\} + \frac{\partial \arg}{\partial \theta}\left\{\frac{t^{n_1} - 1}{t^{n_1-p} - 1} - (-x_1^p)\right\}.$$

On voit immédiatement que le premier terme du 2e membre de (21) a la valeur constante $\frac{n_2 - p}{2}$ (on suppose bien entendu que t n'annule pas $t^{n_2-n_1} - 1$); nous allons voir que le maximum de la

valeur absolue du deuxième terme du 2e membre de (21) est, dans le cas où il est négatif, moindre que $\frac{n_2 - p}{2}$. Remarquons d'abord que, dans l'intervalle $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n_1}$ le module de $\psi(t) = \frac{t^{n_1} - 1}{t^{n_1 - p} - 1}$ va constamment en décroissant, c'est évident dans l'intervalle

$$\frac{2\pi}{n_1 - p} < \theta < \frac{2\pi}{n_1},$$

car $|t^{n_1} - 1|$ y décroît et $|t^{n_1 - p} - 1|$ croît; dans $O \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n_1 - p}$ il faut faire voir que $\frac{1}{2}\,\partial \log \frac{|t^{n_1} - 1|}{\partial \theta} < \frac{1}{2}\,\partial \log \frac{|t^{n_1 - p} - 1|}{\partial \theta}$ c. à. d. que $\frac{n_1}{2} \operatorname{cotg}\left(\frac{n_1 \theta}{2}\right) < \frac{n_1 - p}{2} \operatorname{cotg}\left\{\frac{(n_1 - p)\theta}{2}\right\}$; ceci résulte de ce que $x \operatorname{cotg} x$ est décroissante dans l'intervalle $o \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

D'autre part l'on a toujours $\frac{\partial \arg \psi(t)}{\partial \theta} = \frac{p}{2}$. Pour $t = o$ $\psi(o) = \frac{n_1}{n_1 - p}$ et la tangente à la courbe décrite par $\psi(t)$ fait un angle droit avec ox: lorsque θ décrit l'intervalle $O \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n_1}$, $\psi(t)$ décrit donc un arc restant à l'intérieur du cercle $|x| < \frac{n_1}{n_1 - p}$ et aboutissant à l'origine pour $\theta = \frac{2\pi}{n_1}$, la tangente fait alors l'angle $\pi \cdot \frac{p}{n_1}$ avec l'axe positif. On peut remarquer encore que l'arc en question est convexe. En effet

$$t\psi'(t) = \frac{t^{n_1 - p}}{(t^{n_1 - p} - 1)^2}[p t^{n_1} - n_1 t^p + n_1 - p]$$

$$\arg\left\{\frac{t^{n_1 - p}}{(t^{n_1 - p} - 1)^2}\right\} = \pi$$

et d'autre part

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg [p t^{n_1} - n_1 t^p + n_1 - p] = \frac{r\,\partial \log}{\partial r} |p t^{n_1} - n_1 t^p + n_1 - p|.$$

Il suffit donc de faire voir que

$$\frac{\partial}{\partial r} |p t^{n_1} - n_1 t^p + n_1 - p|^2 > 0 \quad \text{c. à. d.}$$

que

$$\sin\frac{(n_1-p)\theta}{2}\cdot\left[(p+n_1)\sin\frac{(n_1-p)\theta}{2}-(n_1-p)\sin\frac{(n_1+p)\theta}{2}\right]>0.$$

Le premier facteur est assurément positif dans l'intervalle $O<\theta<\frac{2\pi}{n_1}$, d'autre part $\frac{(n_1+p)}{2}\theta<2\pi$; si $\frac{(n_1+p)\theta}{2}\geqslant\pi$ le crochet est manifestemment positif; on voit qu'il en est de même si $\frac{(n_1+p)\theta}{2}<\pi$ en remarquant que $\frac{\sin x}{x}$ décroît dans l'intervalle (o, π).

Nous supposons d'abord $n_1>2p$. Alors l'arc décrit par $\psi(t)$ lorsque θ parcourt l'intervalle $o\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{n_1}$ reste toujours dans le premier quadrant. D'autre part $(-x_1^p)$ reste dans le secteur infini R limité par la circonférence $|x|=\frac{n_1 n_2}{(n_1-p)(n_2-p)}$, l'axe positif et la demi-droite qui fait l'angle $-\left(\frac{p\pi}{n_1}+\varepsilon\right)$ (moindre que $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue) avec l'axe réel positif (fig. 27).

Pour $t=0$ $\psi(t)$ vient au point A d'affixe $\frac{n_1}{n_1-p}$. Si l'on avait

$$-x_1^p=\frac{n_1}{n_1-p}\cdot\frac{n_2}{n_2-p}$$

(affixe du point B) l'on aurait

$$\frac{\partial\arg}{\partial\theta}[\psi(t)+x_1^p]=-\frac{n_2-p}{2}.$$

Pour toute autre position de $(-x_1^p)$ dans R et de $\psi(t)$ sur l'arc $AMON$ cette quantité est plus grande que $-\frac{n_2-p}{2}$. Si M désigne le point où la tangente à la courbe C décrite par $\psi(t)$ est horizontale, il est clair que la quantité étudiée ne peut pas être négative que si le point P d'affixe $\psi(t)$ se trouve sur l'arc AM de C. Appelons Q le point dont l'affixe est $(-x_1^p)$, α l'angle de la normale PN en P à la courbe C avec PQ, β l'angle de PN avec PV, prolongement de OP, φ l'argument de $[\psi(t)+x_1^p]$.

On constate aisément que si $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} < 0$ les angles α, β sont aigus et $\alpha > \beta$ (PV et PQ sont du même côté par rapport à PN) et

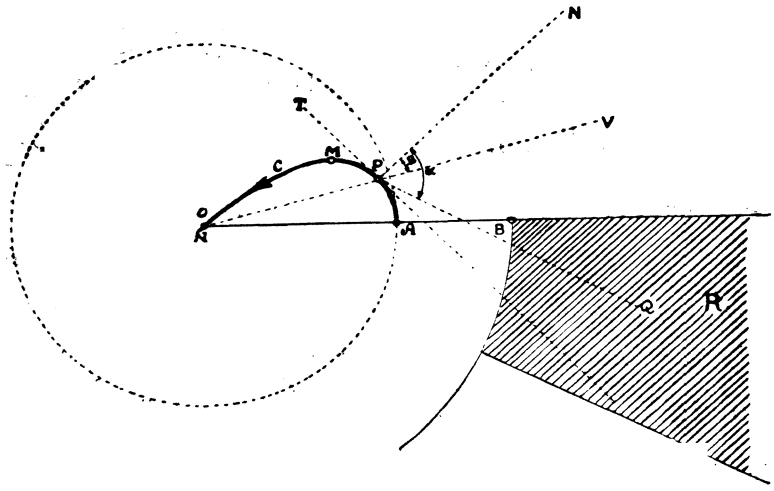

Fig 27.

l'on trouve de suite: $\left|\frac{d\varphi}{d\theta}\right| = \frac{OP}{PQ} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \frac{p}{2} < \frac{OA}{AB} \cdot \frac{p}{2} = \frac{n_2 - p}{2}$.

Si $n_1 \leqslant 2p$ la démonstration précédente est insuffisante, car la tangente à l'origine à la courbe C fait un angle obtus avec l'axe positif et l'ouverture angulaire du secteur R peut également surpasser $\frac{\pi}{2}$. Si t augmente de dt, $\psi(t)$ décrit l'arc $ds = |\psi'(t)dt|$. Il est clair que $|d\varphi|$ est moindre ou égal à $\frac{ds}{\delta}$, δ étant la plus petite distance de P à un point de la circonférence $|x| = \frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}$, ainsi donc $\left|\frac{d\varphi}{d\theta}\right| \leqslant \frac{|t\psi'(t)|}{\delta}$ et il suffira donc de démontrer que $\left|\frac{t\psi'(t)}{\delta}\right| \leqslant \frac{n_2 - p}{2}$ pour $t = e^{i\theta}$ $\quad O \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n_1} + \varepsilon$ [1]).

[1]) Si $n_1 > 2p$ cette inégalité n'est pas toujours vérifiée.

Pour $\theta = 0$ on trouve précisément

$$\left|\frac{t\psi'(t)}{\delta}\right| = \frac{n_2 - p}{2},$$

il faut donc démontrer l'inégalité:

$$H(\theta) = \frac{8}{(n_1-p)^2(n_2-p)^2}\frac{|t^2\psi'^2(t)|}{\delta^2} \leqslant H(o) \quad \left(o \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n_1} + \varepsilon\right).$$

En y substituant la valeur

$$\delta = \frac{n_1}{n_1-p}\cdot\frac{n_2}{n_2-p} - |\psi(t)|$$

il vient

$$H(\theta) = \frac{p^2+n_1^2-pn_1-pn_1\cos(n_1-p)\theta+p(n_1-p)\cos n_1\theta-n_1(n_1-p)\cos p\theta}{\sin^2\frac{(n_1-p)\theta}{2}\left[n_1 n_2 \sin\frac{(n_1-p)\theta}{2} - (n_1-p)(n_2-p)\left|\sin\frac{n_1\theta}{2}\right|\right]^2}.$$

Il faut montrer que $H(\theta) \leqslant H(o) = \frac{2}{(n_1-p)^2}$ Dans ce but remarquons d'abord que $H(\theta)$ est une fonction décroissante de n_2; il suffit donc de poser $n_2 = p$ et d'établir que

$$n_1^2 p^2 H(\theta) = H_1(\theta) =$$

$$= \frac{p^2+n_1^2-pn_1-pn_1\cos(n_1-p)\theta+p(n_1-p)\cos n_1\theta - n_1(n_1-p)\cos p\theta}{\sin^4\left\{\frac{(n_1-p)\theta}{2}\right\}} \leqslant$$

$$\leqslant H_1(o) = \frac{2n_1^2p^2}{(n_1-p)^2}.$$

Or

$$H_1\left(\frac{2\pi}{n_1}\right) = \frac{2n_1^2}{\sin^2\left(\frac{p\pi}{n_1}\right)} = \frac{2n_1^2}{\sin^2\left\{\frac{(n_1-p)\pi}{n_1}\right\}} \leqslant \frac{n_1^4}{2(n_1-p)^2} \leqslant H_1(o)\ ^{1)}.$$

D'autre part, si pour une valeur de θ la fraction $H_1(\theta)$ est maximum ou minimum, elle est égale au quotient des dérivées du numérateur et du dénominateur.

[1]) Il est clair que le résultat final s'étend à l'intervalle $\frac{2\pi}{n_1} < \theta < \frac{2\pi}{n_1} + \varepsilon$, si ε est assez petit, à cause des majorations de la p. 610.

$$H_1(\theta) = H_2(\theta) = 4pn_1 \cdot \frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{\sin\left\{\frac{(n_1-p)\theta}{2}\right\}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n_1\theta}{2}\right)}{\sin(n_1-p)\theta};$$

$H_2(\theta)$ est une fonction décroissante de θ dans l'intervalle $o \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n_1}$; il suffit de remarquer pour cela que

$$\frac{\partial \log}{\partial \theta}\left\{\frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{\sin\frac{(n_1-p)\theta}{2}}\right\} = \frac{p}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{p\theta}{2}\right) - \frac{(n_1-p)}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{(n_1-p)\theta}{2} \leqslant 0$$

$$\frac{\partial \log}{\partial \theta}\left\{\frac{\sin\frac{n_1\theta}{2}}{\sin(n_1-p)\theta}\right\} = \frac{n_1}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{n_1\theta}{2}\right) - (n_1-p)\operatorname{cotg}(n_1-p)\theta \leqslant 0$$

car $\frac{n_1-p}{2} \leqslant \frac{p}{2}$; $n_1 - p \leqslant \frac{n_1}{2}$ et $x \operatorname{cotg} x$ décroît dans l'intervalle $o \leqslant x \leqslant \pi$. Or $H_2(o) = H_1(o)$, notre assertion est donc établie.

Supposons pour un instant que $Q > \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1-p} \cdot \frac{n_2}{n_2-p}}$. Lorsque la limite est atteinte il y a 3 racines x_1, x_2, x_3 de module Q et contenues dans le secteur S. Si $x_1 = x_2 = x_3$ on trouve directement $Q = \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1-p} \cdot \frac{n_2}{n_2-p}}$.

Il n'est pas possible non plus qu'il y ait une racine double ξ car nous pourrions, en prenant au besoin la solution symétrique par rapport à la droite joignant ξ à l'origine poser $x_2 = x_3 = \xi$, la courbe décrite par $\varphi(t)$ lorsque t parcourt l'intervalle $t = e^{i\theta}$ $o \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n_1} + \varepsilon$ aurait un rebroussement ce qui n'est pas possible.

Il y a donc 3 ou davantage racines distinctes x_1, x_2, x_3 de module Q. x_2 et x_3 correspondent aux points d'intersection de la courbe Σ décrite par $\varphi(t)$ avec elle même. Cependant la condition $\frac{\partial \arg \varphi(t)}{\partial t} > 0$ entraîne, quelle que soit la manière dont les branches de Σ, en nombre quelconque, se coupent ou se touchent en un point M, le fait suivant:

Maintenant x_1 fixé, diminuons un peu $|a_2|$ de manière que la quantité $a_2 x_1^{n_2}$ (cf. formule (20) de la p. 607) qui a été représentée par le point M le soit maintenant par un point M' situé sur la demi-droite passant par l'origine et M et tel que $OM' < OM$. A la nouvelle valeur de $a_2 x_1^{n_2}$ l'équation $a_2 x_1^{n_2} = \varphi(t)$ fera correspondre un certain nombre de solutions en t voisines des solutions primitives (en nombre égal au nombre des branches de Σ se coupant en M) mais elles seront toutes de module < 1. En d'autres termes, on pourrait construire une équation ayant les racines x, telles que $|x_1| = Q$, $|x_2| > Q$, $|x_3| > Q$ (éventuellement $|x_4| > Q$, $|x_5| > Q \ldots$). Un nouveau déplacement des paramètres a_1, a_2 suffirait pour que l'on ait: $|x_1| > Q$, $|x_2| > Q$, $|x_3| > Q$ ce qui est impossible. On a donc bien:

$$Q \leqslant \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}}.$$

Il est bien évident que dans l'énoncé de la p. 606 l'angle $\frac{\pi}{n_1}$ ne peut pas être remplacé par un plus petit : on n'a qu'à poser p. ex. $a_2 = 0$ $a_1 = \frac{1}{\varepsilon e^{i\tilde{\omega} n_1}}$ $\varepsilon > 0$ et très petit.

Pour voir qu'il en est de même avec le nombre $\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}}$ considérons l'équation particulière qui a la racine triple

$$x = \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}} \cdot \tilde{\omega},$$

elle s'écrit:

$$(22) \quad 1 + x^p + \frac{p(n_1 - p)^{\frac{n_1}{p} - 1} (n_2 - p)^{\frac{n_1}{p}}}{(n_2 - n_1)\, n_1^{\frac{n_1}{p}}\, n_2^{\frac{n_1}{p} - 1}\, \tilde{\omega}^{n_1}} x^{n_1} - \frac{p(n_1 - p)^{\frac{n_2}{p}} (n_2 - p)^{\frac{n_2}{p} - 1}}{(n_2 - n_1)\, n_2^{\frac{n_2}{p}}\, n_1^{\frac{n_2}{p} - 1}\, \tilde{\omega}^{n_2}} x^{n_2} = 0.$$

Si d'abord $n_2 \leqslant 2n_1$ considérons les courbes Γ décrites par les racines de l'équation lorsque a_1 reste fixé et $\arg(a_2) \equiv \lambda \pmod{\pi}$, λ est fixe et choisi de manière qu'elles aient un point triple, qui est précisément la racine triple de l'équation (22). En supposant, pour fixer les idées $\tilde{\omega} = e^{i\frac{\pi}{p}}$, une discussion facile montre que les bran-

ches de ces courbes situées dans l'angle limité par les demi-droites

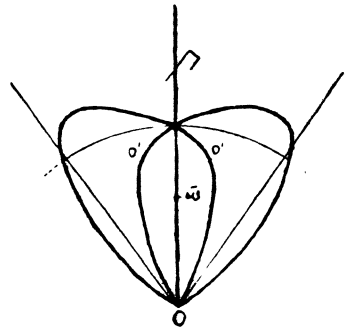

Fig. 28.

$\varphi = \frac{\pi}{p} - \frac{2\pi}{n_2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{p} + \frac{2\pi}{n_2}$ ont la forme de la figure 28 [1]); en particulier la demi-droite $\varphi = \frac{\pi}{p}$ appartient à Γ. O' désignent les racines de $1 + x^p + a_1 x^{n_1} = 0$ où a_1 a la même valeur que dans (22). D'ailleurs $\frac{\pi}{n_1} \leqslant \frac{2\pi}{n_2}$ et l'on constate immédiatement, que dans le secteur circulaire d'ouverture $\frac{2\pi}{n_1}$ indiqué sur la figure, l'équation (22) n'a que la racine triple $x = \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p}} \cdot e^{i\frac{\pi}{p}}$.

Si $n_2 > 2n_1$ il paraît plus commode d'envisager les courbes Γ' décrites par les racines de l'équation lorsque a_2 reste fixe et que l'on a: $\arg\{a_1\} \equiv \mu \pmod{\pi}$, μ étant fixe et choisi de manière qu'elles aient comme point triple la racine triple de l'équation (22). La disposition des branches de ces courbes situées dans l'angle compris entre les demi-droites $\varphi = \frac{\pi}{p} - \frac{\pi}{n_1}$ et $\varphi = \frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{n_1}$ est indiquée sur la fig. 29 ci-contre.

Les points O' désignent maintenant les racines de $1 + x^p + a_2 x^{n_2} = 0$ où a_2 a la même valeur que dans l'équation (22). Les angles MOA et MOB sont égaux à $\frac{\pi}{n_1}$. Pour justifier notre assertion, il suffit de

[1]) Sur la figure on suppose $n_2 > 2p$; la discussion reste à peu près la même dans le cas $n_2 \leqslant 2p$.

faire voir que le secteur $OAMB$ ne contient d'autres branches de

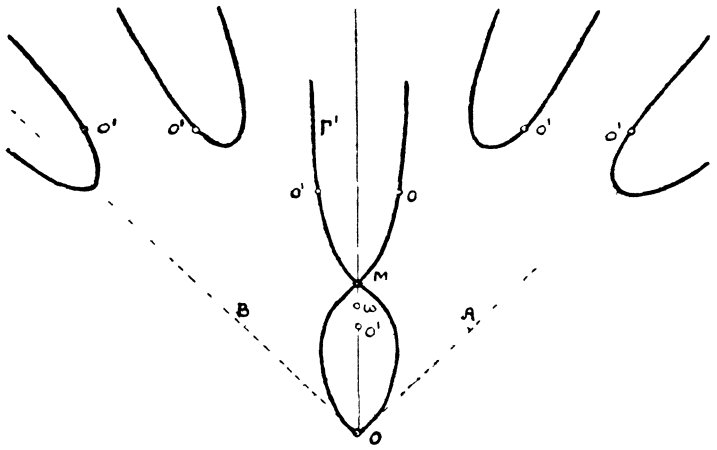

Fig 29.

Γ' que celles qui sont dessinées. Or les Γ' possèdent comme les Γ la propriété de n'être rencontrées qu'en deux points au plus par toute demi-droite issue de l'origine; nous allons voir qu'aucune branche ne coupe pas l'arc de cercle AMB (sauf au point M) Il est impossible qu'il y ait d'autres branches dans $OAMB$, car elles devraient être fermées ou bien pénétrer et ressortir par OA ou OB, ce qui ne peut avoir lieu [1])

Il reste donc à faire voir que Γ' ne coupe pas les arcs AM et MB, MB pour fixer les idées.

L'équation des courbes Γ' s'écrit, en posant

$$x = r e^{i\varphi},\ a_1 = t e^{i\mu},\ a_2 = \varrho e^{i\lambda}$$

$$\sin(n_1 \varphi + \mu) + r^p \sin[(n_1 - p)\varphi + \mu] + \varrho r^{n_2} \sin[(n_1 - n_2)\varphi + \mu - \lambda] = 0.$$

En posant

$$\varphi = \frac{\pi}{p} + \psi,\quad r = \sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p}\,\frac{n_2}{n_2 - p}}$$

[1]) Si Γ' avait des points doubles autres que M dans $OAMB$ on pourrait les faire disparaître en déplaçant infiniment peu a_1, a_2 et on aboutirait encore à une contradiction.

on obtient pour nos courbes Γ' particulières:

$$F(\psi) = -\sin(n_1\psi) + \frac{n_1}{n_1-p}\cdot\frac{n_2}{n_2-p}\sin[(n_1-p)\psi] - \\ - \frac{pn_1}{(n_2-n_1)(n_2-p)}\sin[(n_2-n_1)\psi] = 0.$$

Or nous allons voir que $F(\psi) > 0$ dans l'intervalle $0 < \psi \leqslant \frac{\pi}{n_1}$.

Considérons d'abord l'intervalle $0 < \psi < \frac{\pi}{2(n_2-n_1)}$, nous écrirons:

$$F(\psi) = n_1\left[\frac{\sin(n_1-p)\psi}{n_1-p} - \frac{\sin n_1\psi}{n_1}\right] + \\ + \frac{n_1 p}{n_2-p}\left[\frac{\sin(n_1-p)\psi}{n_1-p} - \frac{\sin(n_2-n_1)\psi}{n_2-n_1}\right].$$

Puisque $n_1 - p < n_2 - n_1$ et $\frac{\sin x}{x}$ décroît dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \pi$ les deux crochets sont certainement positifs.

Je dis que dans l'intervalle $\frac{\pi}{2(n_2-n_1)} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{n_1}$ l'on a:

(23)

$$T(\psi) = -\sin(n_1\psi) + \frac{n_1}{n_1-p}\cdot\frac{n_2}{n_2-p}\sin[(n_1-p)\psi] > \frac{pn_1}{(n_2-n_1)(n_2-p)},$$

il en résulte manifestemment que $F(\psi) > 0$ dans cet intervalle. Pour $\psi = \frac{\pi}{2(n_2-n_1)}$ l'inégalité (23) vient d'être établie. Pour $\psi = \frac{\pi}{n_1}$ (23) se réduit à: $\frac{n_2}{n_1-p}\sin\left(\frac{p\pi}{n_1}\right) > \frac{p}{n_2-n_1}$ ou

$$\frac{n_2}{n_1-p}\sin\left\{\frac{(n_1-p)\pi}{n_1}\right\} > \frac{p}{n_2-n_1}.$$

Si $n_1 \geqslant 2p$ on utilisera la première forme de l'inégalité: puisque $\frac{p\pi}{n_1} \leqslant \frac{\pi}{2}$ il suffira d'établir que $\frac{n_2}{n_1-p}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{p\pi}{n_1} > \frac{p}{n_2-n_1}$ ce qui se vérifie immédiatement.

Si $n_1 < 2p$, $\frac{(n_1-p)\pi}{n_1} < \frac{\pi}{2}$, on utilisera la deuxième forme de l'inégalité: il suffira de faire voir que

$$\frac{n_2}{n_1-p}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(n_1-p)\pi}{n_1}>\frac{p}{n_2-n_1}$$

ce que l'on constate de suite.

Il reste à constater que l'inégalité (23) subsiste pour une valeur $\psi=\psi_0$ rendant $T(\psi)$ minimum dans l'intervalle $\frac{\pi}{2(n_2-n_1)}<\psi<\frac{\pi}{n_1}$. Or

$$\frac{n_2-p}{n_1}T'(\psi)=-(n_2-p)\cos n_1\psi+n_2\cos(n_1-p)\psi;$$

on en déduit que $T'(\psi)>0$ si $\psi\leqslant\frac{\pi}{2(n_1-p)}$ donc

$$\frac{\pi}{2(n_1-p)}<\psi_0<\frac{\pi}{n_1}.$$

En posant pour abréger $\frac{n_1}{n_1-p}=m_1$, $\frac{n_2}{n_2-p}=m_2$ et $\cos(n_1\psi_0)=-\delta$ $(0<\delta<1)$, il vient

$$\cos(n_1-p)\psi_0=-\frac{\delta}{m_2}\quad\text{et}\quad T(\psi_0)=K(\delta)=m_1\sqrt{m_2^2-\delta^2}-\sqrt{1-\delta^2},$$

les radicaux étant pris avec le signe $+$. On constate immédiatetement que $K(\delta)$ décroît dans l'intervalle $\left(0<\delta<\sqrt{\frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2-1}}\right)$ et croît dans l'intervalle $\left(\sqrt{\frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2-1}}<\delta<1\right)$, il suffit donc d'établir que

$$K\left(\sqrt{\frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2-1}}\right)>\frac{p\,n_1}{(n_2-n_1)(n_2-p)}$$

ce que l'on vérifie sans difficulté.

Lorsque $n_2<\frac{3}{2}n_1$ nous n'obtiendrons plus des résultats aussi précis, faute surtout de la connaissance de la valeur exacte de l'angle A.

Je vais montrer cependant que la méthode qui vient d'être exposée peut encore nous renseigner sur la situation des zéros dans des cas étendus.

Si $n_2>\frac{3}{2}p$ l'on a $A\leqslant\frac{3\pi}{n_2}<\frac{2\pi}{p}$, les p angles A n'empiètent donc certainement pas les uns sur les autres. La démonstration des

pp. 602—603 subsiste sans modification et montre qu'il y a p secteurs finis S, d'ouverture angulaire $A' = A + \varepsilon$ contenant toujours une racine de l'équation. Il n'y a encore rien à changer dans la démonstration des pp. 603—605 jusqu'à la conclusion que x_1 et x_2 doivent être tous les deux sur la frontière de A' (en bas de la p. 605). A partir de ce point il n'y a qu'à remarquer que $x_1^{n_2-n_1} = x_2^{n_2-n_1}$, on devrait donc avoir $A' = \frac{2\pi k}{n_2 - n_1}$, k étant entier positif, or actuellement $A' \leqslant \frac{3\pi}{n_2} + \varepsilon < \frac{3\pi}{n_1} < \frac{2\pi}{n_2 - n_1}$.

En supposant dorénavant $n_2 \geqslant 4p$, je montrerai que le rayon de p secteurs S ne saurait dépasser $\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1-p} : \frac{n_2}{n_2-p}}$. A la place de l'expression (20) de la p. 607 nous allons considérer l'expression:

$$(20') \qquad -a_1 x_1^{n_1} = \frac{t^{n_2-p}-1}{t^{n_2-n_1}-1}\left[\frac{t^{n_2}-1}{t^{n_2-p}-1} - (-x_1^p)\right] \equiv \varphi_1(t)$$

dont l'étude est d'ailleurs parfaitement analogue à celle de l'expression (20). Nous envisageons maintenant l'intervalle $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{4\pi}{n_2}$, $t = e^{i\theta}$. L'argument de $\psi_1(t) = \frac{t^{n_2}-1}{t^{n_2-p}-1}$ croît sans cesse dans cet intervalle [1]), le module décroît dans l'intervalle $0 < \theta < \frac{2\pi}{n_2}$ jusqu'à 0, croît de 0 à ∞ dans $\frac{2\pi}{n_2} < \theta < \frac{2\pi}{n_2 - p}$, décroît pour $\frac{2\pi}{n_2-p} < \theta < \frac{4\pi}{n_2}$ jusqu'à 0. On s'assure ensuite que la pente de la tangente à la courbe C_1 décrite par $\psi_1(t)$ varie d'une façon monotone dans l'intervalle $0 < \theta < \frac{2\pi}{n_2 - p}$. Pour $\theta = 0$ la tangente a la direction de l'axe imaginaire, pour $\theta = \frac{2\pi}{n_2}$ elle fait l'angle aigu $\frac{p}{n_2} . \pi$ avec l'axe positif. Pour $\theta = \frac{2\pi}{n_2 - p}$ la courbe C_1 s'éloigne indéfiniment dans la direction faisant l'angle aigu $\frac{p}{n_2 - p} . \pi$ avec l'axe négatif. La bran-

[1]) En faisant bien entendu abstraction des racines de $t^{n_2} - 1 = 0$ et $t^{n_2-p} - 1 = 0$ où il saute brusquement de π.

che de C_1 correspondante à l'intervalle $\frac{2\pi}{n_2} < \theta < \frac{2\pi}{n_2 - p}$ se trouve toute entière entre l'axe réel négatif et la demi-droite passant par l'origine et faisant l'angle $\frac{p}{n_2 - p} . \pi$ avec cet axe, car autrement on serait en désaccord avec le fait que l'argument de $\psi_1(t)$ croît sans cesse. Dans l'intervalle $\frac{2\pi}{n_2 - p} \leqslant \theta \leqslant \frac{4\pi}{n_2}$ la courbe C_1 a un point d'inflexion et un seul. Le coefficient angulaire de la tangente commence par décroître, puis il croît. La branche correspondante de C_1 se trouve toute entière dans l'angle formé par deux demi-droites passant par l'origine et faisant respectivement des angles $\frac{p}{n_2 - p} . \pi$ et $\frac{2p}{n_2} . \pi$ avec l'axe positif. Pour $\theta = \frac{4\pi}{n_2}$, C_1 aboutit à l'origine, la tangente y fait l'angle $\frac{2p}{n_2} . \pi$ avec l'axe positif.

Nous pouvons supposer d'autre part que le point d'affixe $(-x_1^p)$ se trouve dans le secteur infini R limité par la circonférence $|x| = \frac{n_1}{n_1 - p} . \frac{n_2}{n_2 - p}$, l'axe positif et la demi-droite qui fait l'angle $-\left(\frac{3}{2}\frac{\pi p}{n_2} + \varepsilon\right)$ avec cet axe (fig. 30).

Nous allons établir maintenant que l'on a dans l'intervalle considéré $\frac{\partial \arg \varphi_1(t)}{\partial \theta} > 0$. En posant $\psi_1(t) = \frac{t^{n_2} - 1}{t^{n_2 - p} - 1}$ il suffit de montrer que l'on a:

$$\frac{\partial \arg [\psi_1(t) + x_1^p]}{\partial \theta} > -\left(\frac{n_1 - p}{2}\right).$$

Soient Γ, Γ', Γ'' les arcs de la courbe C_1 correspondants respectivement aux intervalles

$$0 < \theta < \frac{2\pi}{n_2}, \quad \frac{2\pi}{n_2} < \theta < \frac{2\pi}{n_2 - p}, \quad \frac{2\pi}{n_2 - p} < \theta < \frac{4\pi}{n_2}.$$

1° Sur Γ le raisonnement est identique à celui des pp. 608—610 où on remplace n_1 par n_2.

2° Sur Γ' on a constamment $\frac{\partial \arg [\psi_1(t) + x_1^p]}{\partial \theta} > 0$.

En effet Γ' constitue avec Γ et la demi-droite L parallèle à l'axe imaginaire (marquée en pointillé sur la fig. 30) une courbe convexe Σ limitant un domaine Δ. Si un point de R est dans Δ on

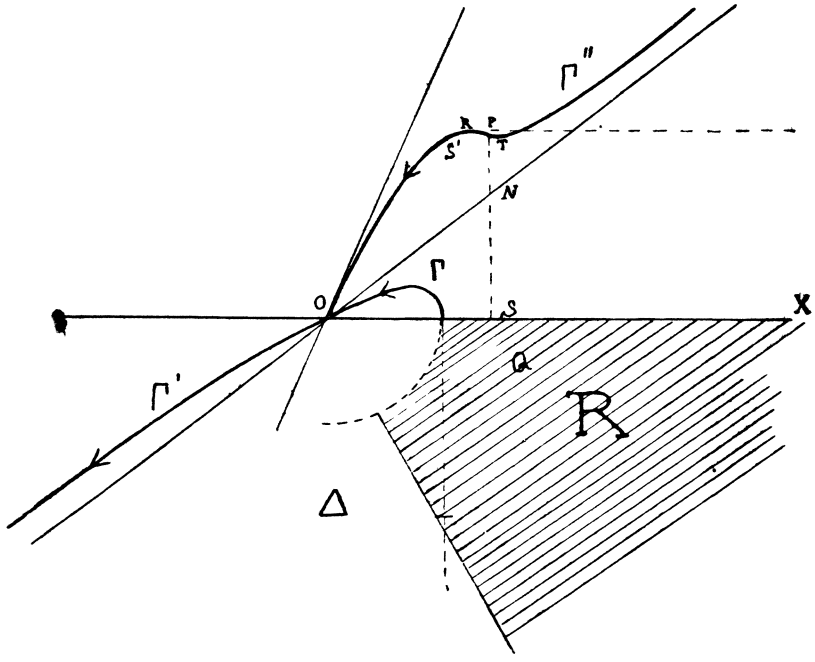

Fig. 30.

ne peut mener par ce point aucune tangente à Σ; s'il est en dehors de Δ on voit d'après la figure que les deux tangentes à Σ touchent cette courbe au point à l'infini et en un point de Γ. Il suffit donc que l'inégalité $\frac{\partial \arg[\psi_1(t)+x_1^p]}{\partial \theta} > 0$ ait lieu pour $\theta = \frac{2\pi}{n_2}$ c. à. d. si $\psi_1(t) = 0$, ce que l'on constate immédiatement.

3° Sur Γ'' considérons le point S' où la tangente est parallèle à la direction asymptotique et les deux points R et T où elle est parallèle à l'axe des x. On constate immédiatement que la tangente à Γ'' sur la partie qui s'étend du point T à l'infini ne peut pas rencontrer la région R, il en est encore de même sur l'arc convexe $OS'R$ qui peut être complété (comme l'indique le pointillé)

de manière à contenir la région R à son intérieur; sur tous ces arcs de Γ'' on a donc visiblement $\frac{\partial}{\partial\theta}\arg[\psi_1(t)+x_1^p]>0$. Il reste à examiner le segment RT de Γ'' [1]). Soient P et Q les points d'affixes $\psi_1(t)$ et $(-x_1^p)$, nous avons d'après la figure 30

$$\frac{OP}{PQ}\leqslant\frac{OP}{PS}<\frac{NO}{NS}=\frac{1}{\sin\left(\frac{p}{n_2-p}\cdot\pi\right)}<\frac{n_2-p}{p\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{n_2-p}{2p}.$$

Dès lors on n'a qu'à reprendre les raisonnements des pp. 609—610: il vient [2]) $\left|\frac{d\varphi}{d\theta}\right|=\frac{OP}{PQ}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{p}{2}<\frac{n_2-p}{2p}\cdot\frac{p}{2}=\frac{n_2-p}{4}$. Il suffit donc de faire voir que $\frac{n_2-p}{4}<\frac{n_1-p}{2}$ c. à. d. $n_2+p<2n_1$; or $n_1\geqslant\frac{2}{3}n_2$, il suffit donc de constater que $n_2+p<\frac{4}{3}n_2$ c. à. d. $n_2>3p$. On achève la démonstration comme aux pp. 612—613.

Enfin le raisonnement des pp. 613—614 s'applique et montre que le nombre $\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1-p}\cdot\frac{n_2}{n_2-p}}$ ne peut pas être remplacé par un plus petit. En définitive nous avons l'énoncé suivant (cf. l'énoncé de la p. 606):

Si $n_2<\frac{3}{2}n_1$, mais $n_2\geqslant 4p$ chacun des p secteurs circulaires contenant une racine p-ème $\tilde{\omega}$ de (-1) et qui sont limités d'une part par la circonférence $|x|=\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1-p}\cdot\frac{n_2}{n_2-p}}$ et d'autre part par les $2p$ demi-droites issues de l'origine et faisant des angles égaux à $\frac{3\pi}{2n_2}$ avec des segments joignant l'origine aux p racines $\tilde{\omega}$ contient toujours une racine de l'équation $1+x^p+a_1x^{n_1}+a_2x^{n_2}=0$. Dans cet énoncé le nombre $\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1-p}\cdot\frac{n_2}{n_2-p}}$ ne peut pas être remplacé par un plus petit.

[1]) Dans certains cas ce segment peut ne pas exister. Sur RT la tangente dirigée fait un angle compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π avec l'axe positif: autrement elle serait verticale en un point de RT ce qui est impossible car $\frac{\partial|\psi_1(t)|}{\partial\theta}<0$ et $\frac{\partial\arg\psi_1(t)}{\partial\theta}>0$.

[2]) cf. de nouveau la fig. 27.

CHAPITRE II.

Les polynomes multivalents.

1. M. Montel a introduit la notion de fonction p-valente. Une fonction $f(x)$ est dite p-valente dans un domaine D si elle ne prend, dans ce domaine, aucune valeur plus de p fois et s'il existe des valeurs qu'elle y prend effectivement p fois. Si l'équation $f(x)-a=0$ a une racine multiple d'ordre s en un point de D la valeur a est considérée comme prise s fois en ce point. Nous nous proposons d'établir quelques propositions permettant de délimiter des régions où les polynomes de degré n ne sont que p-valents $(1 \leqslant p < n)$ c. à. d. se comportent, à un certain point de vue, comme les polynomes de degré p seulement. Une des propositions les plus remarquables de ce genre a été donnée par M. Kakeya [1]). L'on sait que si une fonction est univalente dans D sa dérivée ne s'y annule pas, mais cette condition n'est pas suffisante. Toutefois, si la dérivée d'un polynome de degré n ne s'annule pas dans un cercle de rayon R, M. Kakeya a établi que le polynome est univalent dans le cercle concentrique de rayon $R \cdot \sin \frac{\pi}{n}$ (ce rayon est d'ailleurs le plus grand possible si $n > 1$).

Nous donnerons au Chapitre III une proposition tout à fait analogue à celle-ci; pour le moment nous allons résoudre quelques cas particuliers du problème suivant: sachant qu'un polynome de degré n ne prend, dans un domaine D, que p fois une valeur particulière a — éventuellement dans certaines conditions déterminées — délimiter des régions intérieures à D où le polynome est nécessairement p-valent.

2. Nous obtiendrons un résultat de cette nature comme conséquence simple de la proposition suivante:

$P(x)$ étant un polynome de degré p dont tous les zéros ne dépassent pas en module P, $Q(x)$ un polynome de degré $q\,(q > p)$ dont tous les zéros ne dépassent pas en module Q, l'équation $P(x)+aQ(x)=0$

[1]) On zeros of a polynomial and its derivatives. The Tohoku Math. Journal Tome 11 (1917) p. 5 et suiv. M. Szegö a démontré d'une façon différente cette proposition. Mathematische Zeitschrift t. 13 (1922).

a toujours p racines dont le module ne dépasse pas $\operatorname{Max}\left\{Q, \frac{pQ+qP}{q-p}\right\}$ *et cette limite supérieure est atteinte.*

Remarque. Le même nombre $\frac{pQ+qP}{q-p}$ est aussi, d'après M. Walsh, la limite supérieure des modules des zéros de la dérivée de la fraction rationnelle: $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Ce nombre ne dépend que du rapport $\mu = \frac{q}{p}$, dont il est une fonction décroissante tendant vers P pour μ tendant vers ∞.

Démonstration. Faisons voir d'abord que l'expression

$$\operatorname{Max}\left\{Q, \frac{pQ+qP}{q-p}\right\}$$

est effectivement une limite supérieure des modules de p racines de l'équation $P(x) + aQ(x) = 0$. Posons à cet effet

$$P(x) = \prod_{i=1}^{p}(x-\alpha_i), \quad Q(x) = \prod_{i=1}^{q}(x-\beta_i).$$

Supposons que x décrive une circonférence $|x| = R$ $(R > P, R > Q)$ dans le sens direct, on posera donc $x = Re^{i\theta}$. Le maximum de $\frac{\partial}{\partial\theta}\{\arg P(x)\}$ lorsque les α_i varient dans les cercles $|\alpha_i| \leqslant P$, x restant fixe, est visiblement atteint lorsque les p points α_i se confondent au point de la circonférence $|\alpha_i| = P$ le plus rapproché du point d'affixe x et sa valeur est alors $\frac{pR}{R-P}$. De même on trouve aisément que le minimum de $\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg Q(x))$ est atteint lorsque les q points β_i se confondent au point de la circonférence $|\beta_i| = Q$ le plus éloigné du point d'affixe x.

[En désignant par A le point d'affixe x, par O l'origine et par M le point d'affixe β avec $|\beta| = B$, en posant enfin l'angle $MOA = \varphi$ l'on trouve

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{\arg(x-\beta)\} = \frac{R}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\{\log|x-\beta|^2\} = R\cdot\frac{R-B\cos\varphi}{R^2+B^2-2RB\cos\varphi}$$

et cette expression décroît sans cesse, lorsque $\cos\varphi$ décroît. Il faut donc que M vienne en M'. Si on fait varier maintenant B dans l'in-

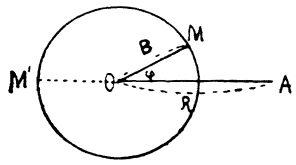

Fig. 31.

tervalle $0 \leqslant B \leqslant Q$ l'on constate immédiatement que c'est la valeur $B = Q$ qui donne le minimum]. Ce minimum est donc égal à $\frac{qR}{R+Q}$. Si donc $\frac{qR}{R+Q} > \frac{pR}{R-P}$ c. à. d. $R > \frac{qP+pQ}{q-p}$, l'on a toujours $\frac{\partial}{\partial\theta} \arg\left\{\frac{P(x)}{Q(x)}\right\} < 0$. Par conséquent, si x décrit la circonfé-

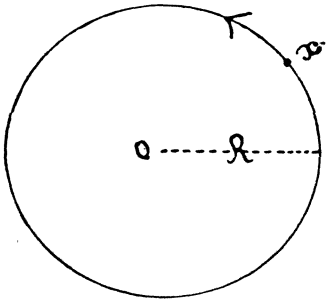

Fig. 32.

rence $|x| = R$ dans le sens direct, l'argument de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ décroît sans cesse et le point ayant pour affixe cette expression entoure $(q-p)$ fois l'origine dans le sens négatif. Il est dès lors évident qu'un point quelconque, d'affixe a, ne peut pas être entouré par $\frac{P(x)}{Q(x)}$ plus de $(q-p)$ fois dans le sens négatif. Notre équation peut cependant s'écrire:

$$Q(x)\left[\frac{P(x)}{Q(x)} - a\right] = 0.$$

Si x décrit la circonférence $|x| = R$ dans le sens direct l'argument de $Q(x)$ augmente de $2\pi q$, celui du crochet diminue au plus de $(q-p).2\pi$, donc l'argument du 1er membre augmente de $2\pi p$ au moins.

Ceci établit la proposition. Lorsque $Q \geqslant \frac{pQ+qP}{q-p}$ $\left(\text{on a d'ailleurs toujours } P < \frac{pQ+qP}{q-p}\right)$ la limite supérieure Q est évidemment aussi la limite exacte.

Il reste à établir que, si $Q < \frac{pQ+qP}{q-p}$ la limite $\frac{pQ+qP}{q-p}$ est effectivement atteinte. Il résulte de la démonstration précédente que ceci ne peut avoir lieu que si tous les points α_i sont concentrés en un seul point de la circonférence $|x| = P$ et tous les points β_i concentrés au point diamétralement opposé de la circonférence $|x| = Q$. L'on peut donc se borner à considérer l'équation

$$(x+P)^p + a(x-Q)^q = 0 \text{ [1]}.$$

Nous allons voir que la limite n'est atteinte que pour une valeur unique de a et que la racine de module maximum est en même temps une racine double de l'équation. Etudions à cet effet la disposition des courbes: $\frac{|x+P|^p}{|x-Q|^q} = \alpha$ (α = constante).

En posant $x = re^{i\theta}$ et $L = r^2 + 2P\cos\theta + P^2$, $M = r^2 - 2Q\cos\theta + Q^2$ leur équation s'écrit:

$$S(r,\theta) \equiv L^p - \alpha^2 M^q = 0.$$

Pour obtenir les extrêma des rayons vecteurs de ces courbes il faut y joindre l'équation $\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$. En éliminant α^2 entre $S = 0$ et $\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ il vient:

$$\begin{vmatrix} p\frac{\partial L}{\partial \theta} & q\frac{\partial M}{\partial \theta} \\ L & M \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad r.\sin\theta.[pPM + qQL] = 0$$

Or L, M sont les carrés des distances du point x au point Q et au point $(-P)$ respectivement, donc $L \geqslant 0$, $M \geqslant 0$ et d'ailleurs on ne peut pas avoir à la fois $L = 0$, $M = 0$. Le crochet est donc

[1]) Nous faisons abstraction des équations qui se déduisent de celle-ci par des rotations sur le point x.

toujours positif. Les extrêma sont donc déterminés par l'équation $\sin\theta = 0$ c. à. d. se trouvent sur l'axe réel. Les points doubles de nos courbes s'obtiennent en éliminant a entre l'équation proposée $(x+P)^p + a(x-Q)^q = 0$ et sa dérivée. On obtient ainsi la valeur unique: $x = -\frac{pQ+qP}{q-p}$. Il existe donc une seule courbe ayant un point double, nous l'appelons Γ. Puisque sur le segment $(-P, Q)$ a croît sans cesse, une courbe quelconque coupe ce segment en un seul point.

La règle de Descartes permet d'affirmer de plus que nos courbes coupent aussi en un seul point le segment $(Q, +\infty)$ tandis que le segment $(-\infty, -P)$ est coupé en 2 ou en 0 points. On obtient ainsi la disposition des courbes indiquée approximativement

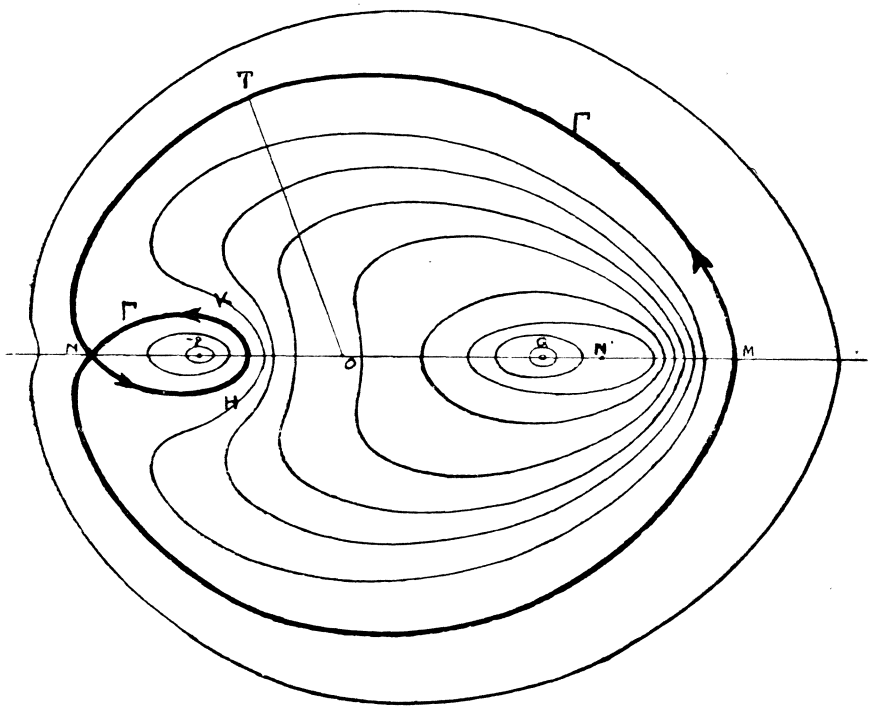

Fig. 33.

sur la figure ci-contre (qui correspondrait au cas $P=4$ $Q=5$ $q=4p$).

Il est facile de constater que $R = ON < OM$. Car soit N' le point symétrique de N par rapport à l'origine ($ON' > Q$). La valeur de a au point N est $\frac{(R-P)^p}{(R+Q)^q}$, celle au point N' est $\frac{(R+P)^p}{(R-Q)^q}$, plus grande que la précédente. Donc N' est plus près de Q que M. Il s'ensuit que, lorsqu'un point T décrit la branche de la courbe Γ qui va de N à M, le rayon vecteur OT croît sans cesse. Si nous donnons maintenant au paramètre a la valeur a_0 correspondante au point double N c. à. d. si nous considérons l'équation:

$$(1) \qquad (x+P)^p + (-1)^{p+q+1} \frac{p^p}{q^q} \left(\frac{q-p}{Q+P}\right)^{q-p} (x-Q)^q = 0$$

on voit bien que toutes les racines sont sur Γ. La variation de l'argument de $\frac{(x+P)^p}{(x-Q)^q}$ est de $p.2\pi$ lorsque x décrit la branche $NHKN$ (dans le sens de la flèche) et de $-(q-p).2\pi$ lorsque x décrit la partie restante de Γ. Puisque le rayon vecteur OT varie d'une façon monotone lorsque T décrit Γ ne traversant pas l'axe réel, l'équation (1) a $(p-1)$ racines de modules inférieurs à R, une racine double de module R, tandis que toutes les autres racines ont leur module plus grand. C'est d'ailleurs (à des rotations autour de l'origine près) la seule équation du type $P(x) + aQ(x) = 0$ réalisant le maximum de module du p-ème zéro: en effet, si $|x| = R$

$$\frac{\partial \arg}{\partial \theta} \left\{\frac{(x+P)^p}{(x-Q)^q}\right\} < 0$$

si x n'est pas négatif, donc aucun point d'affixe $a \neq a_0$ ne peut pas être entouré par $\frac{(x+P)^p}{(x-Q)^q}$ plus de $(q-p)$ fois dans le sens négatif.

3. En revenant à l'ordre d'idées du § 1 nous allons maintenant démontrer la proposition suivante:

Supposons qu'un polynome de degré n s'annule p fois $(1 \leqq p < n)$ *à l'origine et qu'il ne s'annule plus en aucun autre point du cercle* $|x| < 1$. *Le polynome est nécessairement p-valent dans le cercle* $|x| < \frac{p}{n}$.

D'ailleurs, les polynomes $x^p(x+e^{i\theta})^{n-p}$ (θ réel arbitraire) qui satisfont aux conditions de l'énoncé ne sont plus p-valents dans aucun

cercle $|x| < \frac{p}{n} + \varepsilon$ *quelque petit que soit* $\varepsilon > 0$. *Tous les autres polynomes de la classe considérée sont p-valents dans un cercle de centre origine et de rayon supérieur à* $\frac{p}{n}$ [1]).

Notre polynome est de la forme

$$f(x) = x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_n x^n;$$

on aura en outre

$$\frac{f(x)}{x^p} = 1 + a_{p+1} x + \ldots + a_n x^{n-p} \neq 0 \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

En posant $x = \frac{1}{y}$ on en déduit que le polynome:

$$a_n + a_{n-1} y + \ldots + a_{p+1} y^{n-p-1} + y^{n-p}$$

a tous ses zéros inférieurs ou égaux à 1 en module. Considérons maintenant les équations de la forme

$$(2) \qquad a_n + a_{n-1} y + \ldots + a_{p+1} y^{n-p-1} + y^{n-p} + a y^n = 0$$

a étant quelconque. Pour obtenir la limite supérieure de module de $(n-p)$ racines de cette équation, il faut appliquer le théorème du § 2, en posant $p = n - p$, $q = n$, $P = 1$, $Q = 0$. Il s'ensuit que l'équation (2) a toujours $(n-p)$ racines de modules ne dépassant pas $\frac{n}{p}$. Donc l'équation aux inverses $x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_n x^n + a = 0$ a toujours $(n-p)$ racines de modules supérieurs ou égaux à $\frac{p}{n}$, donc p au plus de module moindre que $\frac{p}{n}$ et ceci démontre la proposition. En se reportant au polynome réalisant la limite supérieure de p zéros de $P(x) + a\,Q(x) = 0$ on trouve que le polynome $x^p(x+1)^{n-p}$ prend au moins $(p+1)$ fois la valeur: $(-1)^p \frac{p^p(n-p)^{n-p}}{n^n}$ dans tout cercle de centre origine et de rayon supérieur à $\frac{p}{n}$.

[1]) Je n'ai établi primitivement cette proposition que dans le cas $p = 1$. M. Montel m'a suggéré de la généraliser. Pour $p = 1$ l'énoncé se trouve aussi, sous forme différente, dans le travail de M. Alexander. Annals of Mathematics, 2e série t. 17 (1915).

4. Si en particulier $p=1$ on obtient un énoncé présentant quelque analogie avec le théorème de M. Kakeya signalé au § 1. Il est à remarquer que la condition de M. Kakeya (non annulation de la dérivée) donne un rayon d'univalence plus grand que la nôtre (univalence par rapport à une valeur particulière). Je me borne à signaler le problème de déterminer le rayon d'univalence lorsqu'on suppose les deux conditions remplies à la fois [1]).

Il ne sera peut-être pas inutile d'exprimer la proposition du § précédent sous la forme suivante: un polynome de degré n qui prend p fois $(1 \leqq p < n)$ la valeur b en un point a et qui prend d'autre part $(p+1)$ fois une valeur c dans le cercle $|x-a| < R$ reprend nécessairement la valeur b en un point du cercle $|x-a| < \frac{n}{p} . R$. En particulier, un polynome de degré n qui prend la valeur b en un point a et dont la dérivée s'annule en un point du cercle $|x-a| < R$ reprend nécessairement cette valeur b en un point du cercle $|x-a| < nR$

La dernière conclusion peut être facilement retrouvée par des considérations toutes différentes et d'ailleurs connues: Laguerre a en effet démontré [2]) que tout cercle passant par les points x et $x - \frac{nf(x)}{f'(x)}$, $f(x)$ étant un polynome de degré n, „sépare" les zéros de $f(x)$ c. à. d. que, ou bien il y a au moins un zéro à l'intérieur et au moins un zéro à l'extérieur du cercle, ou bien tous les zéros sont sur la circonférence même. Récemment M. v. Nagy [3]) a remarqué que si ξ est le point du cercle $|x-a| < R$ tel que $f'(\xi)=0$, on trouve, en appliquant la proposition précédente au polynome $g(x) = \frac{f(x)-b}{x-a}$ et au point $x=\xi$ que tout cercle passant par ξ $(\xi \neq a)$ et $\xi + (n-1)(\xi - a)$ contient à son intérieur un point où le polynome reprend la valeur b qu'il a au point a. On n'a qu'à

[1]) En tout cas, on constate facilement que ce rayon est supérieur (et non pas égal) au rayon de M. Kakeya et, d'autre part, qu'il tend vers zéro pour n augmentant indéfiniment.

[2]) Oeuvres. Tome I, pp. 133—136. Cette proposition n'est qu'un cas particulier.

[3]) Inséré comme exercice dans le livre de Pólya et Szegö: „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis". Tome II, Livre 5. Exerc 115.

prendre, en particulier, le cercle ayant le segment $[\xi, \xi+(n-1)(\xi-a)]$ comme diamètre pour retrouver notre proposition.

5. On pourrait maintenant se poser le problème suivant: Un polynome de degré n ne prend, dans un cercle de rayon R, que p fois $(1 \leqslant p < n)$ la valeur qu'il a au centre. Dans quel cercle concentrique est-il nécessairement p-valent?

Pour $p = 1$, le problème vient d'être résolu; pour $p = n - 1$ il a été résolu par M. Szegö sous une forme différente [1]): Si n est pair, le rayon cherché est alors $\frac{R}{2}$; si n est impair, c'est $\frac{R}{2\cos\frac{\pi}{2n}}$.

La recherche de la limite exacte dans le cas général semblant conduire à des calculs assez compliqués, il ne sera peut-être pas inutile d'indiquer un procédé qui permet d'obtenir rapidement tout au moins une limite inférieure du rayon du cercle cherché.

En supposant que le cercle dont il s'agit est le cercle $|x| < 1$ et la valeur que le polynome ne prend que p fois est la valeur 0, l'on peut écrire

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

L'équation

$$a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} = 0$$

n'a donc que $(p-1)$ racines dans le cercle $|x| < 1$, elle en a donc $(n-p)$ dans le domaine $|x| \geqslant 1$.

Donc l'équation aux inverses:

$$a_n + a_{n-1} y + \ldots + a_1 y^{n-1} = 0$$

a $(n-p)$ racines de module ne dépassant pas 1 et $(p-1)$ de module supérieur. On peut donc écrire:

$$a_n + a_{n-1} y + \ldots + a_1 y^{n-1} = P(y) \,.\, R(y),$$

$P(y)$ étant un polynome de degré $(n-p)$ dont tous les zéros sont dans le cercle $|y| \leqslant 1$ et $R(y)$ un polynome de degré $(p-1)$. Nous allons voir que, dans ces conditions, l'équation

$$P(y) \,.\, R(y) + b y^n = 0$$

[1]) Mathematische Zeitschrift, Tome 13 (1922). Théorème 12'. Plus exactement M. Szegö résout un problème légèrement différent. un polynome de degré n prend, *au plus*, $(n-1)$ fois dans le cercle $|x| < R$ sa valeur au centre. Dans quel cercle est-il $(n-1)$-valent?

a toujours $(n-p)$ racines qui ne dépassent pas en module un nombre fixe K qui ne dépend que de n et de p. En revenant à la variable x on en conclut que l'équation $f(x)+b=0$ a toujours $(n-p)$ racines de module supérieur ou égal à $\frac{1}{K}$ donc p au plus de module inférieur à $\frac{1}{K}$, ce nombre $\frac{1}{K}$ résout donc le problème posé au début. Nous allons déterminer une limite supérieure du nombre K.

Supposons pour un moment (je remplace maintenant la variable y par x) que les zéros de $R(x)$ [au nombre de $(p-1)$] se divisent en un groupe de s zéros de module ne dépassant pas $\lambda (0 \leqslant s \leqslant p-1)$ et un groupe de $(p-1-s)$ zéros tous supérieurs à un nombre $R > \lambda$. Soit $S(x)$ le polynome de degré s qui a les s zéros du premier groupe, appelons $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1-s}$ les zéros du deuxième groupe. L'équation étudiée: $P(x)\,R(x)+b\,x^n=0$ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$x^n \left[\frac{P(x)\,.\,S(x)\,.\prod_{i=1}^{p-1-s}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha_i}\right)}{x^{n+s+1-p}} - b' \right] \equiv x^n\,[\varphi(x)-b'] = 0.$$

Supposons maintenant que $x = R\,e^{i\theta}$ décrive la circonférence $|x| = R$ dans le sens direct, x étant fixé; quelle est la valeur maximum de $\frac{\partial}{\partial\theta}\{\arg \varphi(x)\}$?

On voit comme au § 2 que les zéros de $P(x)$ et de $S(x)$ doivent être tous concentrés aux points des circonférences $|x| = 1$ et $|x| = \lambda$ respectivement qui sont les plus rapprochés du point d'affixe x. Quant au produit

$$\prod_{i=1}^{p-1-s}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha_i}\right),$$

l'on peut remarquer que $\frac{1}{x}$ décrit la circonférence de rayon $\frac{1}{R}$ dans le sens négatif et que $\left|\frac{1}{\alpha_i}\right| < \frac{1}{R}$, donc l'on a toujours

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\prod_{i=1}^{p-1-s}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha_i}\right)\right\} < 0.$$

L'on voit donc que:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{\arg\varphi(x)\}\leqslant\frac{(n-p)R}{R-1}+\frac{sR}{R-\lambda}-(n+s+1-p).$$

λ étant fixé, si R est assez grand le deuxième membre de la dernière inégalité est négatif et dans ce cas, on constate immédiatement, comme tout-à-l'heure, que l'équation proposée a, quel que soit b, au moins $(n-p+s)$ donc a fortiori au moins $(n-p)$ racines de module non supérieur à R.

Ceci posé, cherchons d'abord une valeur simple de R $(R>\lambda)$ pour laquelle on aura sûrement:

$$\frac{(n-p)R}{R-1}+\frac{sR}{R-\lambda}-(n+s+1-p)<0.$$

L'on constate sans peine que l'on peut prendre p. ex.

$$R\geqslant(s+1)\lambda+n+1-p.$$

Supposons d'abord que $s=0$: on trouve alors directement la valeur de R que nous appellerons $R_0=n+1-p$. Si donc le cercle $|x|<R_0$ ne contient pas $(n-p)$ racines de l'équation proposée il faut que l'un au moins des zéros de $R(x)$ soit inférieur ou égal à R_0 en module. Supposons donc que $s=1$ et $\lambda=R_0$. Si le cercle $|x|<R_1$ où $R_1=2R_0+n+1-p$ ne contient pas $(n-p)$ racines de l'équation proposée, il faut que deux au moins des zéros de $R(x)$ soient inférieurs ou égaux à R_1 en module, nous posons donc $s=2$ $\lambda=R_1$ et nous obtenons le rayon $R_2=3R_1+n+1-p$. Nous continuons le procédé: Si le cercle $|x|<R_{p-2}$ ne contient pas $(n-p)$ racines de l'équation étudiée il faut que $(p-1)$ c. à. d. tous les zéros de $R(x)$ soient inférieurs ou égaux à R_{p-2} en module, dans ce dernier cas nous aboutissons au nombre

$$R_{p-1}=pR_{p-2}+n+1-p.$$

Ainsi nous sommes certains que l'équation proposée a toujours $(n-p)$ racines de module ne dépassant pas R_{p-1}. On aura $R_i\leqslant R'_i$ en posant: $R'_1=3R_0$, $R'_2=4R'_1$, $R'_3=5R'_2,\ldots,$ $R'_{p-1}=(p+1)R'_{p-2}$. Puisque $R_0=n+1-p$ il vient $R'_{p-1}=\dfrac{(n+1-p)(p+1)!}{2}$.

En définitive, nous aboutissons à la proposition suivante:

Si un polynome de degré n ne prend, dans un cercle de rayon R,

que p fois la valeur qu'il a au centre du cercle il est nécessairement au plus p-valent dans le cercle concentrique de rayon $\frac{2}{(p+1)!(n+1-p)} \cdot R$.

Assurément cette limite est (si $p > 1$) notablement trop petite [1]): il paraît même vraisemblable que la limite exacte est (comme dans le cas particulier étudié au § 3) une fonction croissante de p.

6. Passons à des problèmes d'un type différent. Supposons que les polynomes $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x)$ soient respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_k$-valents dans un domaine; que peut-on-dire au sujet du nombre des fois qu'une valeur arbitraire peut être prise dans ce domaine, ou dans une de ses parties, par un autre polynome „fonction" des polynomes $P_i(x)$? [2]).

On peut établir la proposition suivante:

Considérons k polynomes $P_i(x)$ de la forme $P_i(x) = b_i x^{p_i} + a_i x^{n_i}$ $(0 < p_i \leqslant n_i)$ $i = 1, 2, \ldots, k$ et supposons que chaque polynome $P_i(x)$ soit p_i-valent dans le cercle $|x| < R$. Le produit $P_1(x) . P_2(x) \ldots . P_k(x)$ est $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$-valent dans le même cercle.

Pour qu'un polynome de la forme: $x + ax^n$ soit univalent dans le cercle $|x| < 1$ il faut et il suffit que l'on ait $|a| \leqslant \frac{1}{n}$. C'est nécessaire [3]) puisque la dérivée $1 + nax^{n-1}$ a ses zéros moindres à 1 en module si $|a| > \frac{1}{n}$. Cela est suffisant, puisque

$$(x_1 + ax_1^n) - (x_2 + ax_2^n) = (x_1 - x_2)\,[1 + a(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \ldots + x_2^{n-1})]$$

et si l'on suppose $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $x_1 \neq x_2$, $|a| \leqslant \frac{1}{n}$ il vient

$$|a(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \ldots + x_2^{n-1})| < 1$$

le crochet ne peut donc pas s'annuler.

Cette remarque peut être généralisée: pour qu'un polynome de la forme $x^p + ax^n$ $(p < n)$ soit p-valent dans le cercle $|x| < 1$ il faut et il suffit que l'on ait $|a| \leqslant \frac{p}{n}$ [4]).

[1]) Cependant la limite exacte doit être inférieure à $\frac{p}{n} \cdot R$.

[2]) On doit mentionner ici le „théorème de composition" des deux polynomes univalents de M. Szegö. Loc. cit. Théorème 21.

[3]) Cela est nécessaire même dans le cas général: $x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$.

[4]) Cette condition exprime que les zéros du polynome dérivé, autres que 0, ont leur module $\geqslant 1$.

La propriété d'être p-valent peut, en effet, être exprimée sous la forme suivante: L'équation $x^p + ax^n = b$ doit avoir, quel que soit b, $(n-p)$ racines de module supérieur ou égal à 1. En posant $x = \frac{1}{y}$ ceci revient à dire que l'équation $a + y^{n-p} = by^n$ a $(n-p)$ racines de module ne dépassant pas 1; en divisant par a et en posant $t = \frac{y}{\sqrt[n-p]{a}}$ l'ón voit que ceci équivaut à ce que l'équation $1 + t^{n-p} + bt^n = 0$ ait toujours (quel que soit b) $(n-p)$ racines de modules ne dépassant pas $\frac{1}{\sqrt[n-p]{|a|}}$. Or, on sait [1]) que la limite (atteinte) des modules des $(n-p)$ racines de la dernière équation est égale à $\sqrt[n-p]{\frac{n}{p}}$.

Donc il faut et il suffit que l'on ait:

$$\frac{1}{\sqrt[n-p]{|a|}} \geqslant \sqrt[n-p]{\frac{n}{p}} \quad \text{c. à. d.} \quad |a| \leqslant \frac{p}{n}.$$

Cela posé, considérons le produit des k polynomes de la forme: $x^{p_i} + a_i x^{n_i}$ $(0 < p_i \leqslant n_i \;\; i = 1, 2, \ldots, k)$ où $|a_i| \leqslant \frac{p_i}{n_i}$ [2]) qui sont donc respectivement p_i-valents dans le cercle $|x| < 1$. En posant $x = re^{i\theta}$ nous allons étudier la variation de l'argument de ce produit lorsque x décrit la circonférence $|x| = 1$ dans le sens direct. Nous pouvons écrire:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg \prod_{i=1}^{k} (x^{p_i} + a_i x^{n_i})\right\} = \sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial\theta} \arg\left(x^{n_i - p_i} + \frac{1}{a_i}\right).$$

D'après une formule générale:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \arg\left(x^{n_i - p_i} + \frac{1}{a_i}\right) = \frac{r}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial r}\left|x^{n_i - p_i} + \frac{1}{a_i}\right|^2}{\left|x^{n_i - p_i} + \frac{1}{a_i}\right|^2}.$$

[1]) Cf. Chapitre I.

[2]) Cette condition est naturellement inutile si $p_i = n_i$.

Evaluons le minimum de la dernière expression lorsque x parcourt la circonférence $|x| = 1$. Nous pouvons évidemment supposer, pour fixer les idées:

$$\frac{1}{a_i} = -R, \quad R \geqslant \frac{n_i}{p_i} \geqslant 1.$$

La dernière expression s'écrit:

$$\frac{r}{2} \cdot \frac{2(n_i - p_i)\,[r^{2(n_i-p_i)-1} - R r^{n_i-p_i-1} \cos(n_i - p_i)\,\theta]}{r^{2(n_i-p_i)} + R^2 - 2R r^{n_i-p_i} \cos(n_i - p_i)\,\theta}.$$

En y posant $r = 1$ l'on trouve:

$$\frac{(n_i - p_i)\,[1 - R\cos(n_i - p_i)\,\theta]}{1 + R^2 - 2R\cos(n_i - p_i)\,\theta}.$$

Le minimum de cette expression, lorsque θ varie, est atteint pour $\cos(n_i - p_i)\,\theta = -1$, il est donc égal à $-\dfrac{n_i - p_i}{R - 1}$, puisque $R \geqslant \dfrac{n_i}{p_i}$; ce minimum est $\geqslant -\dfrac{n_i - p_i}{\dfrac{n_i}{p_i} - 1} = -p_i$. On en conclut donc, d'après la formule de la page 634:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \arg \prod_{i=1}^{k} (x^{p_i} + a_i x^{n_i}) \geqslant \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} p_i = 0.$$

Ainsi donc, lorsque x décrit la circonférence $|x| = 1$ dans le sens direct l'argument du produit ne va jamais en décroissant. D'ailleurs, après le tour complet, cet argument augmente de $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k) \cdot 2\pi$. Il est clair qu'aucun point du plan ne peut pas être entouré par la courbe décrite par le produit plus de $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$ fois dans le sens positif; le théorème est donc démontré.

7. La proposition précédente est sans doute susceptible de généralisations. Cependant le théorème général suivant: le produit des k polynomes $x^{p_i} + a_{p_i+1} x^{p_i+1} + \ldots + a_{n_i} x^{n_i}$ $(0 < p_i \leqslant n_i;\ i = 1, 2, \ldots, k)$ respectivement q_i-valents $(p_i \leqslant q_i \leqslant n_i)$ dans le cercle $|x| < 1$, (c'est à dire que le nombre de fois qu'une valeur peut être prise dans le cercle $|x| < 1$ pourrait être supérieur au nombre relatif à un cercle très petit de centre $x = 0$) est $(q_1 + q_2 + \ldots + q_k)$-valent

dans le même cercle, est certainement inexact, comme le montre l'exemple simple:

$$P_1(x) = x^{p-1} + x^{2p-1} \quad (p > 1), \quad P_2(x) = x.$$

Le polynome $x^{p-1} + x^{2p-1}$ est au plus $(2p-2)$-valent dans le cercle $|x| < 1$, tandis que $P_1(x)\,P_2(x) = x^p + x^{2p}$ n'est $(2p-1)$-valent que dans le cercle $|x| < \frac{1}{\sqrt[p]{2}}$ [1]).

La question reste posée, de savoir si l'énoncé pourrait subsister dans le cas particulier $q_i = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

CHAPITRE III.

Les zéros de la dérivée.

1. Les zéros d'un polynome ou les zéros et les pôles d'une fraction rationnelle déterminant ceux de ses dérivées on a, il y a longtemps, déjà établi plusieurs théorèmes exprimant directement cette dépendance. Abstraction faite du théorème de Rolle, le premier résultat général de ce genre semble être celui publié par Ch. Lucas [2]): les zéros de la dérivée d'un polynome sont des positions d'équilibre dans le champ de masses égales, placées aux zéros du polynome et répulsives (ou attractives) en raison inverse de la distance.

Récemment, M. Walsh a repris ces considérations mécaniques et a obtenu plusieurs propositions concernant les dérivées des polynomes et des fractions rationnelles [3]).

Je ne citerai qu'un cas extrêmement particulier de ses résultats: Si tous les zéros, en nombre p, d'une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ainsi que tous ses $q (q > p)$ pôles sont contenus dans le cercle $|x| \leqslant 1$, tous les zéros de la dérivée sont contenus dans le cercle $|x| \leqslant \frac{q+p}{q-p}$, cette limite est d'ailleurs atteinte pour une fraction convenable.

[1]) Cf. le Chapitre I.

[2]) C. R. t. 67 (1868) et t. 106 (1888). Le théorème se trouve aussi, sans démonstration, dans les oeuvres posthumes de Gauss. Oeuvres t. 3 p. 112 et t. 8 p. 52.

[3]) American Math. Soc. Trans. t. 22, 1921.

Je vais montrer comment cette limite s'abaisse lorsque $P(x)$ et $Q(x)$, au lieu d'être indépendants, sont liés par certaines relations fonctionnelles. Ces propositions particulières nous serviront comme lemmes pour en établir d'autres, d'un caractère plus général.

2. Lemme. *$Q(x)$ étant un polynome de degré n dont tous les zéros sont contenus dans le cercle $|x| \leqslant 1$, tous les zéros de la dérivée de la fraction:* $\dfrac{Q'(x)}{Q(x) + x\,Q'(x)}$ *sont contenus dans le cercle:*

$$|x| \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \quad \textit{si } n \textit{ est pair,}$$

$$|x| \leqslant \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+3}}{2\sqrt{n}} \quad \textit{si } n \textit{ est impair.}$$

Ces limites ne sont atteintes que pour les polynomes [1]).

$$Q(x) = \left[x^2 - 2\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,x + 1\right]^{\frac{n}{2}} \quad \textit{lorsque } n \textit{ est pair,}$$

$$Q(x) = \left[x - \frac{\sqrt{n-1} \pm i}{\sqrt{n}}\right]^{\frac{n+1}{2}} \left[x - \frac{(n+1) \mp i\sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n+3)}}\right]^{\frac{n-1}{2}}$$

lorsque n est impair.

Remarques. Tous les zéros du numérateur $Q'(x)$ sont contenus dans le cercle $|x| \leqslant 1$, en vertu de la proposition de Lucas. On voit immédiatement qu'il en est de même des zéros du dénominateur, il suffit pour cela de remarquer que ce dénominateur est la dérivée de $x\,Q(x)$ et d'appliquer le théorème de Lucas [2]). Dès lors, on peut appliquer le théorème de M. Walsh, en posant $p = (n-1)$, $q = n$, on obtient ainsi la limite $(2n-1)$. Nous allons voir que la limite exacte est beaucoup plus petite, qu'elle décroît régulièrement lorsque n croît, en tendant vers 1 pour n infini.

Démonstration.

L'équation qui donne les zéros de la dérivée s'écrit:

$$Q(x)\,Q''(x) - 2\,Q'^2(x) = 0 \quad \text{ou} \quad (\text{si } |x| > 1)$$

[1]) Je fais abstraction de ceux qui s'en déduisent par des rotations autour de l'origine

[2]) Je dois cette remarque à M. Montel.

$2\left[\frac{Q'(x)}{Q(x)}\right]^2 - \frac{Q''(x)}{Q(x)} = 0$, en posant toujours $Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$, $u_i = \frac{1}{x - a_i}$ il vient:

$$2\left[\sum_{i=1}^{n} u_i\right]^2 - 2\sum_{j \neq k} u_j u_k = 0 \quad \text{c. à. d.} \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{j \neq k} u_j u_k = 0$$

(la deuxième somme est étendue à toutes les combinaisons deux à deux des indices $1, 2, \ldots, n$). On peut supposer, sans nuire à la généralité, x positif, l homographie $u = \frac{1}{x - z}$ fait correspondre alors au cercle $|z| < 1$ un cercle C symétrique par rapport à l'axe réel, le coupant

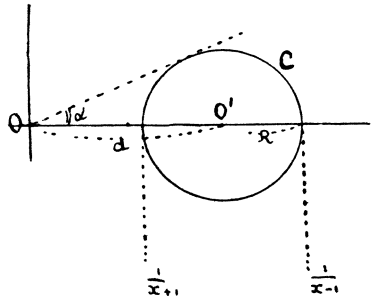

Fig. 34.

aux points $\frac{1}{x+1}$ et $\frac{1}{x-1}$, de centre $d = \frac{x}{x^2 - 1}$ et de rayon $R = \frac{1}{x^2 - 1}$. Les u_i sont dans C. Nous sommes donc conduits à chercher le minimum de module de la forme

$$F = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{j \neq k} u_j u_k$$

lorsque les u_i parcourent C. Il est évident que, si x est très grand F ne peut s'annuler; il est évident aussi que le minimum que nous cherchons *n'est sûrement pas atteint lorsque tous les u_i se confondent en un seul point u* car alors

$$F = \frac{n(n+1)}{2} u^2 \quad \text{et} \quad |F| \geqslant \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} > \frac{n(n+1)}{2} \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}$$

(on peut poser $x \leqslant \sqrt{2}$, car si $x > \sqrt{2}$ l'angle α de la fig. 34 est inférieur à 45° et F ne peut s'annuler).

Pour faire les calculs plus commodément, nous introduirons encore les variables v_i par la substitution $u_i = v_i + d$ Les v_i varient donc dans le cercle: $|v| \leqslant R$ La forme F devient:

$$F = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + \sum_{j \neq k} v_j v_k + (n+1)\, d \sum_{i=1}^{n} v_i + \frac{n(n+1)}{2} d^2.$$

Le premier résultat que nous obtenons est le suivant: *Les v_i doivent se reunir en 3 points au plus* Supposons uniquement que notre système de valeurs des v_i corresponde au contour de la région décrite par F lorsque les v_i décrivent $|v| \leqslant R$ (x restant fixe). Les v_i doivent se trouver évidemment sur la circonférence $|v| = R$. Faisons varier p ex. v_1. dans son voisinage, intérieur à $|v| = R$, en maintenant fixes les autres v_i (certains de ces v_i peuvent d'ail-

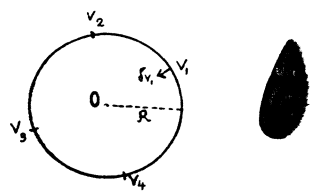

Fig 35.

leurs occuper la même position que v_1). En désignant par δv et δF les déplacements normaux resp. au cercle C et au contour de la région décrite par F l'on a $\delta F = \frac{\partial F}{\partial v_1} \delta v_1$ [1]). En appliquant la même remarque aux v_i occupant d'autres positions nous avons donc

$$\arg\left(\frac{\partial F}{\partial v_1} \delta v_1\right) = \arg\left(\frac{\partial F}{\partial v_2} \delta v_2\right) = \ldots = \arg\left(\frac{\partial F}{\partial v_n} \delta v_n\right)$$

ou

$$\arg\left(\frac{\partial F}{\partial v_1} v_1\right) = \arg\left(\frac{\partial F}{\partial v_2} v_2\right) = \ldots = \arg\left(\frac{\partial F}{\partial v_n} v_n\right).$$

[1]) On constate facilement que les $\frac{\partial F}{\partial v_i}$ ne s'annulent pas

En y substituant les valeurs des $\frac{\partial F}{\partial \nu_i}$ et en posant pour abréger:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \nu_i + (n+1)d$$

il vient

(1) $\arg\{\nu_1(\nu_1 + s)\} = \arg\{\nu_2(\nu_2 + s)\} = \ldots = \arg\{\nu_n(\nu_n + s)\}.$

En remarquant que

$$|s| \geqslant (n+1)d - nR \qquad (d > R)$$

posons encore $|s| = \mu R$ $(\mu > 1)$. Etudions la variation de $\lambda = \arg[\nu(\nu+s)]$ lorsque s reste fixe, par exemple positif, et que ν décrit la circonférence $|\nu| = R$. En posant $\nu = Re^{i\theta}$, on a:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{R}{2} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial R}|\nu(\nu+s)|^2}{|\nu(\nu+s)|^2} = \frac{2 + \mu^2 - 3\mu\cos\theta}{1 - 2\mu\cos\theta + \mu^2}.$$

Le dénominateur de la dernière fraction est toujours positif (car $\mu > 1$), le numérateur ne s'annule que pour $\cos\theta = \frac{1}{3}\left(\mu + \frac{2}{\mu}\right)$. L'expression $\frac{1}{3}\left(\mu + \frac{2}{\mu}\right)$ n'a qu'un seul minimum pour $\mu = \sqrt{2}$, elle est égale à 1 pour $\mu = 1$ et $\mu = 2$. Si donc $\mu \geqslant 2$ on a constamment $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \geqslant 0$ et l'égalité (1) n'est possible que si tous les ν_i se confondent: cas déjà exclu. Il faut donc supposer $1 < \mu < 2$, lorsque θ varie de $-\pi$ à $+\pi$ $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}$ change deux fois de signe et $\lambda(\theta)$ qui,

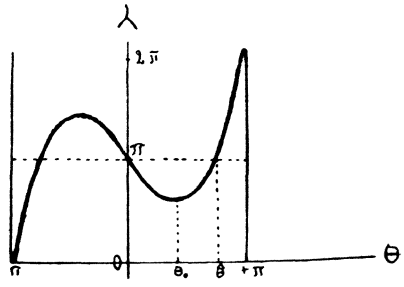

Fig. 36.

pendant ce temps, augmente de 2π, varie de la façon indiquée sur la

fig. 36 [1]). Il en résulte immédiatement l'impossibilité des égalités (1) de la page précédente lorsque les v_i ne se réunissent pas en 3 positions seulement. Il suffit donc d'étudier la forme à 3 variables:

$$F = \sum_{i=1}^{3} n_i(n_i+1)v_i^2 + 2\sum_{j \neq k} n_j n_k v_j v_k + 2(n+1)d\sum_{i=1}^{3} n_i v_i + n(n+1)d^2$$
$$(n_1 + n_2 + n_3 = n).$$

En utilisant la notation introduite: $s = \sum_{i=1}^{3} n_i v_i + (n+1)d$ il vient:

$$F = s^2 + \sum_{i=1}^{3} n_i v_i^2 - (n+1)d^2.$$

Avant de poursuivre notre recherche, remarquons que l'on peut déduire immédiatement de cette expression de F une limite supérieure des zéros de la dérivée de la fraction, limite déjà assez approchée: en effet, puisque $|v_i| = R$, $|s| = \mu R$ et $F = 0$ on a: $(n+1)d^2 \leqslant (n+\mu^2)R^2$, en se rappelant que $\mu < 2$ et que $d = \frac{x}{x^2-1}$, $R = \frac{1}{x^2-1}$, on trouve

$$x < \sqrt{1 + \frac{3}{n+1}},$$

Nous distinguerons maintenant deux cas, suivant que n est pair ou impair.

I. *n pair.*

Nous supposerons dorénavant que les n_i figurant dans l'expression de F ne sont pas nécessairement des entiers, mais que ces quantités peuvent prendre toutes les valeurs satisfaisant aux conditions: $n_1 \geqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$, $n_3 \geqslant 0$ $n_1 + n_2 + n_3 = n$ et nous chercherons le minimum de module de la forme F ainsi généralisée, que nous appellerons $\hat{F}$, lorsque les v_i parcourent le cercle $|v| \leqslant R$ et les n_i les valeurs indiquées ci-dessus. Nous allons voir que, dans ces conditions, *les v_i doivent se réunir en 2 points.* Nous avons d'abord,

[1]) La courbe de la fig. 36 est symétrique par rapport aux droites $\theta = 0$ et $\lambda = \pi$. On a $\cos\theta_0 = \frac{1}{3}\left(\mu + \frac{2}{\mu}\right)$; $\cos\hat{\theta} = \frac{\mu}{2}$.

d'après ce qui précède:

$$(2)\quad \arg\{\nu_1(\nu_1+s)\} = \arg\{\nu_2(\nu_2+s)\} = \arg\{\nu_3(\nu_3+s)\} = \lambda \equiv \arg \hat{F} \pmod{\pi}.$$

Supposons, pour fixer les idées, les variables n_1 et n_2 indépendantes. Si notre assertion était inexacte, tous les n_i seraient $\neq 0$ et $|\hat{F}|$ serait aussi minimum par rapport aux variables n_1 ou n_2 seules.

Si n_1, par exemple, décrit le segment $0 < n_1 < n - n_2$ $\hat{F}$ décrit un arc de courbe et l'on doit avoir

$$\arg(d\hat{F}) \equiv \arg \hat{F} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

D'autre part $d\hat{F} = \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial n_1} - \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_3}\right) dn_1$, on aura donc, puisque $\frac{\partial \hat{F}}{\partial n_i} = \nu_i(\nu_i + 2s)$:

$$(3)\quad \arg\{\nu_1(\nu_1+2s) - \nu_3(\nu_3+2s\} \equiv \arg\{\nu_2(\nu_2+2s) - \nu_3(\nu_3+2s)\} \equiv$$
$$\equiv \arg \hat{F} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Soit A_i le point d'affixe $\nu_i(\nu_i + s)$, B_i celui d'affixe $\nu_i(\nu_i + 2s)$,

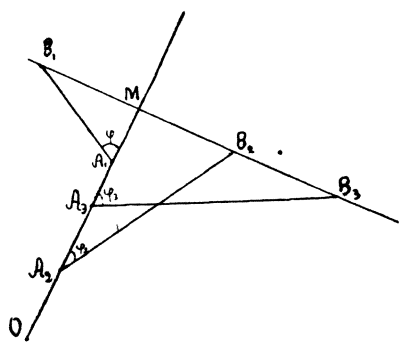

Fig. 37.

la distance $A_iB_i = |s\nu_i| = |s|\,R = \mu R^2$ est indépendante de l'indice i. D'après (2) A_1, A_2, A_3 se trouvent sur une même droite passant par l'origine et d'après (3) B_1, B_2, B_3 se trouvent sur une droite perpen-

diculaire à celle-ci. Marquons encore dans le plan le point d'affixe

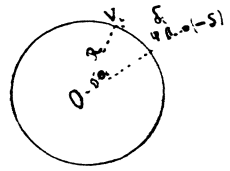

Fig. 38.

$(-s)$ et posons $\delta_i = |\nu_i + s|$, $\varphi_i = \arg\left\{\frac{s}{\nu_i + s}\right\}$. L'angle que fait la direction OA_i (fig. 37) avec $A_iB_i = \arg\left\{\frac{\nu_i s}{\nu_i(\nu_i + s)}\right\}$ est aussi égal à φ_i. Nous avons:

$$OM = OA_i + A_iM = R|\nu_i + s| + A_iB_i\cos\varphi_i = R\delta_i + \mu R^2\cos\varphi_i.$$

D'autre part (fig. 38) $R^2 = \delta_i^2 + \mu^2 R^2 - 2\mu R\delta_i\cos\varphi_i$, donc

$$H(\delta_i) = 3\delta_i + \frac{(\mu^2 - 1)R^2}{\delta_i} = \frac{2\,OM}{R},$$

cette quantité doit être indépendante de l'indice i $(i = 1, 2, 3)$.

En se reportant à la courbe qui représente la variation de l'ar-

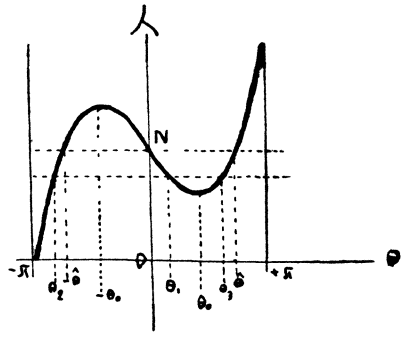

Fig. 39.

gument de $\lambda = \arg\{\nu(\nu + s)\}$ dessinée sur les fig. 36 et 39 [sur la fig. 39 on désigne par θ la différence entre les arguments de ν et de $(-s)$, le point N correspond au cas où ces deux arguments sont

les mêmes] et en remarquant que la fonction

$$H(\delta) = 3\delta + \frac{R^2(\mu^2 - 1)}{\delta}$$

n'a qu'un seul minimum qui correspond à la valeur $\delta = \delta_0 = \frac{R\sqrt{\mu^2 - 1}}{\sqrt{3}}$ à laquelle correspond $\theta_0 \left[\cos\theta_0 = \frac{1}{3}\left(\mu + \frac{2}{\mu}\right)\right]$ on constate immédiatement l'impossibilité de la relation $H(\delta_1) = H(\delta_2) = H(\delta_3)$ à moins que l'argument λ n'ait pas la valeur qui correspond au point N. Mais dans ce dernier cas nous trouvons, si δ_1 p. ex. correspond à $\theta = 0$, δ_2 à $(+\hat{\theta})$ et δ_3 à $(-\hat{\theta})$: $\delta_1 = R(\mu - 1)$, $\delta_2 = \delta_3 = R$. Donc $H(\delta_1) = 2R(2\mu - 1)$ et $H(\delta_2) = H(\delta_3) = R(\mu^2 + 2)$. On devrait donc avoir $2(2\mu - 1) = \mu^2 + 2$ c. à. d. $\mu = 2$. Or $\mu < 2$ (p. 640).

Il est donc bien démontré que les ν_i se réunissent en deux points seulement[1]). En considérant toujours n_1 et n_2 comme variables indépendantes nous définirons la fonction $\Phi(n_1, n_2)$ de la façon suivante: $\Phi(n_1, n_2) = \min. |\hat{F}|$ [le minimum de $|\hat{F}|$ lorsque n_1 et n_2 restent fixes et que les ν_i parcourent le cercle $|\nu| \leqslant R$]. On peut envisager $\Phi(n_1, n_2)$ comme définie dans le triangle: $n_1 \geqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$ $n_1 + n_2 \leqslant n$ et l'on pose, comme auparavant, $n_3 = n - n_1 - n_2$. Ceci posé je dis que *si $\Phi(n_1, n_2)$ est maximum ou minimum par rapport à n_1 l'on a $n_1 = n_3$, si elle est maximum ou minimum par rapport à n_2 l'on a $n_2 = n_3$* [2]).

Considérons, par exemple, le premier cas. Puisque $|\hat{F}| \geqslant \Phi(n_1, n_2)$ on doit avoir aussi $\frac{\partial |\hat{F}|}{\partial n_1} = 0$ (on considère maintenant dans $\hat{F}$ les ν_i comme fixés) et ceci entraîne, nous l'avons vu, l'égalité entre le 1er et le 3ème membre de l'égalité (3) de la p. 642 et partant la relation $H(\delta_1) = H(\delta_3)$. Supposons, en premier lieu, que l'argument λ n'ait pas la valeur correspondante au point N de la fig. 39, mais qu'il soit, par exemple plus petit. Les abscisses θ_1, θ_3 correspondantes aux δ_1, δ_3 doivent être disposées comme l'indique cette figure

[1]) On pourrait, dans le cas de n pair, achever les calculs plus rapidement à partir de ce point. Je préfère introduire la discussion qui suit, car elle sera utile à l'étude du cas plus difficile où n est impair.

[2]) On suppose ici n_1 resp. n_2 à l'intérieur de l'intervalle dans lequel ces variables varient. On suppose aussi $\Phi(n_1, n_2) > 0$.

(car si δ_2 correspond à la 3e abscisse possible θ_2 on a nécessairement $H(\delta_2) > H(\delta_1)$, $H(\delta_2) > H(\delta_3)$: en effet $H(\delta)$ est une fonction paire de θ et $H(\delta)$ n'a qu'un seul minimum au point $\delta = \delta_0$). La relation $H(\delta_1) = H(\delta_3)$ peut s'écrire aussi: $\delta_1 \delta_3 = \delta_0^2$ $\left(\delta_0 = \frac{R\sqrt{\mu^2-1}}{\sqrt{3}}\right)$. Ecrivons maintenant que l'argument λ est le même au point ν_1

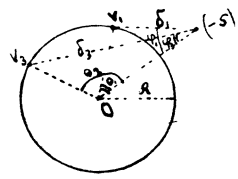

Fig. 40.

situé à la distance δ_1 de $(-s)$ qu'au point ν_3, situé à la distance $\delta_3 = \frac{\delta_0^2}{\delta_1}$:

$$\lambda = \arg\{\nu_1(\nu_1+s)\} = \theta_1 - \varphi_1 + \arg(-s) + \arg(s) = \theta_3 - \varphi_3 + \arg(-s) + \arg(s).$$

Donc $\cos(\theta_1 - \varphi_1) = \cos(\theta_3 - \varphi_3)$. D'autre part, puisque $|s| = R\mu$ nous avons généralement:

$$\delta_i^2 = R^2(1 + \mu^2 - 2\mu\cos\theta_i), \quad R^2 = R^2\mu^2 + \delta_i^2 - 2R\mu\delta_i\cos\varphi_i$$

et en outre: $\sin\varphi_i : \sin\theta_i = R : \delta_i$; ces formules nous permettent d'exprimer

$$\cos(\theta_i - \varphi_i) = \cos\theta_i\cos\varphi_i + \sin\theta_i\sin\varphi_i =$$
$$= \cos\varphi_i\cos\theta_i + (1 - \cos^2\theta_i) \cdot \frac{\sin\varphi_i}{\sin\theta_i}$$

en fonction de δ_i. On trouve ainsi:

$$2\mu^2 R\cos(\theta_1 - \varphi_1) = \frac{1}{\delta_1}[(\mu^2 - 1)R^4 + (\mu^2 + 2)R^2\delta_1^2 - \delta_1^4].$$

En écrivant que la dernière expression ne change pas lorsqu'on y substitue $\delta_3 = \frac{R^2(\mu^2-1)}{3\delta_1}$ à la place de δ_1 on aboutit finalement à l'équation

$$[3\delta_1^2 - (\mu^2 - 1)R^2]^3 = 0$$

qui montre que $\delta_1 = \delta_0$, donc $\delta_3 = \frac{\delta_0^2}{\delta_1} = \delta_0 = \delta_1$, ν_1 et ν_3 doivent se confondre. Mais alors on pourrait faire varier arbitrairement n_1 sans changer la valeur de $|\hat{F}|$ et les conditions qui expriment que $|\hat{F}|$ est minimum ou maximum seraient toujours remplies: on ne serait donc pas en présence d'un véritable minimum ou maximum.

Il nous reste à supposer que l'argument λ ait la valeur correspondant au point N de la fig. 39. *Il est alors nécessaire de supposer s positif.* Remarquons d'abord que, puisque $\cos\hat{\theta} = \frac{\mu}{2}$ et $\mu > 1$, l'angle $\hat{\theta}$ c. à. d. la différence entre les arguments de ν_3 et $(-s)$ ou de $(-s)$ et de ν_1 est moindre que 60^0. Il en résulte que l'hypothèse $R(s) \leqslant 0$ [1]) se trouve écartée immédiatement, en vertu

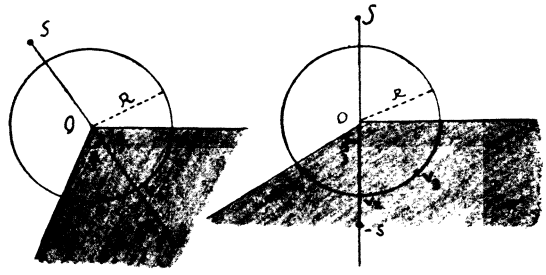

Fig. 41.

de la définition de s: $s = \sum_{i=1}^{3} n_i \nu_i + (n+1)d \quad (d > 0)$ car le 2e

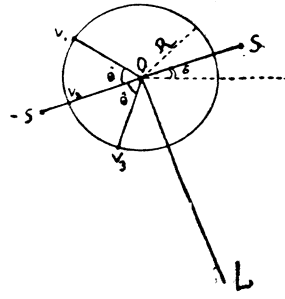

Fig. 42.

[1]) $R(x)$ désigne la partie réelle de x, $I(x)$ le coefficient de i dans x.

membre de cette égalité se trouve dans les régions marquées ci-contre à la fig. 41. Supposons donc $R(s) > 0$ et, par exemple, $I(s) > 0$, appelons σ l'argument de s. En projetant la relation $s = \sum_{i=1}^{3} n_i v_i + (n+1)d$ sur la droite OL perpendiculaire à Os, il vient:

$$(4) \qquad (n_3 - n_1) R \sin \hat{\theta} + (n+1) d \sin \sigma = 0.$$

$|\hat{F}|$ étant minimum par rapport aux variables v_i on a d'autre part (p. 639):

$$\arg \hat{F} = \arg \lambda + \pi = \arg \{v_2(v_2 + s)\} + \pi = \arg(-s) + \arg(s) + \pi = \arg s^2.$$

D'ailleurs (p. 641)

$$\hat{F} - s^2 = \sum_{i=1}^{3} n_i v_i^2 - (n+1) d^2.$$

Projetons cette relation sur la droite OM perpendiculaire à Os^2,

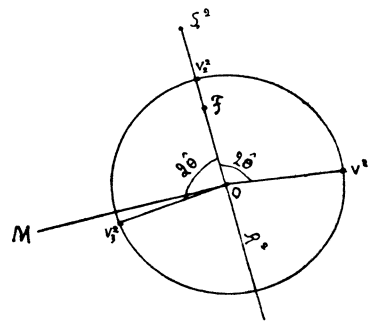

Fig. 43.

il vient:

$$(5) \qquad (n_3 - n_1) \sin 2\hat{\theta} \,.\, R^2 + (n+1) d^2 \sin 2\sigma = 0.$$

Si $n_3 = n_1$ l'égalité (4) fournit: $\sigma = 0$. Si $n_1 \neq n_3$ une comparaison de (4) et de (5) donne: $\cos \hat{\theta} = \frac{d}{R} \cos \sigma$ donc, puisque $d > R$, $\hat{\theta} < \sigma$. Dans ce cas cependant on constate immédiatement sur la

figure 42 que $I\left(\sum_{i=1}^{3} n_i v_i\right) < 0$ et l'égalité $s = \sum_{i=1}^{3} n_i v_i + (n+1)d$ est encore impossible. Donc s est positif. Mais alors la formule qui vient d'être écrite montre immédiatement que $n_1 = n_3$ car autre-

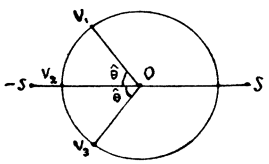

Fig 44.

ment la partie imaginaire du 2eme membre ne serait pas nulle. L'assertion de la p. 644 est donc démontrée.

Revenons au problème de la recherche du minimum de $|\hat{F}|$. Nous avons vu que les v_i se réunissent en deux points On peut donc supposer p. ex. $n_2 = 0$; d'autre part nous devons avoir un minimum par rapport à n_1, donc $n_1 = n_3 = \frac{n}{2}$, n étant supposé pair nous obtenons en même temps le minimum cherché de la forme primitive $|F|$. En revenant aux variables u_i nous obtenons: $4F = n(n+2)(u_1^2 + u_3^2) + 2n^2 u_1 u_3$; $u_1 = d - R\cos\hat{\theta} + i R \sin\hat{\theta}$,

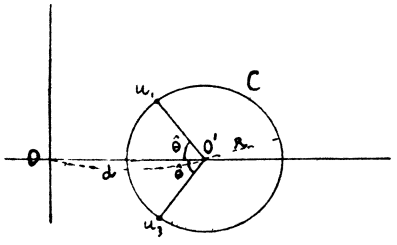

Fig. 45.

$u_3 = \bar{u}_1$; calculons $\hat{\theta}$:

$$s = R\mu = \sum_{i=1}^{3} n_i v_i + (n+1)d = n_1 u_1 + n_3 u_3 + d =$$

$$= \frac{n}{2}(u_1 + u_3) + d = n\left(d - R \cdot \frac{\mu}{2}\right) + d,$$

d'où $\frac{\mu}{2} = \cos\hat{\theta} = \frac{(n+1)d}{(n+2)R}$, en substituant cette valeur on trouve finalement:

$$|F|_{\text{min.}} = \frac{n}{n+2}[(n+1)d^2 - (n+2)R^2]$$

d'où immédiatement $\left(\text{puisque } \frac{d}{R} = x\right)$ la limite cherchée:

$$x = \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}.$$

II. *n impair.*

Le calcul précédent montre que la limite cherchée est inférieure à $\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}$. Nous allons étudier la fonction $\Phi(n_1, n_2)$ déjà définie (p. 644) dans le triangle où n_1 et n_2 varient ($n_1 \geqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$, $n_1 + n_2 \leqslant n$, sur la fig. 46, $n = 9$).

Menons les droites $AE : n_1 = n_2$, $CD : n_1 = n_3$ $BF : n_2 = n_3$. On

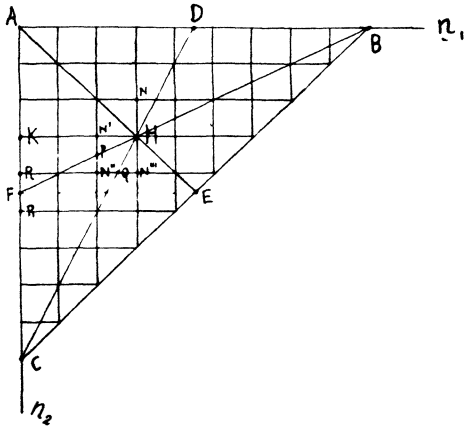

Fig. 46.

voit tout de suite que changer un point N en son symétrique N' par rapport à AE revient à échanger n_1 et n_2, ce qui ne change pas la valeur de $\Phi(n_1, n_2)$. De même, changer N' en N'' ($PN' = PN''$)

revient à échanger n_2 et n_3 et changer N'' en N''' ($QN'' = QN'''$) revient à échanger n_1 et n_3. Nous pouvons donc nous borner à considérer le triangle FCH. D'après le résultat précédent les points F ou E fournissent le minimum absolu de $\Phi(n_1, n_2)$. On voit donc, en considérant le segment FE que la ligne HC est le lieu de maximum de $\Phi(n_1, n_2)$, par rapport à la variable n_1. Les seuls points qui puissent fournir le minimum cherché sont donc situés sur les segments CF et FH. On voit cependant que les valeurs de $\Phi(n_1, n_2)$ sur FH sont plus grandes que celles sur FK (en comparant les points de la même ordonnée): il suffit donc de considérer le segment AC ou à cause de symétrie AF. Le point F étant le seul sur AC où $\Phi(n_1, n_2)$ est minimum par rapport à n_2 c'est évidemment le point R (ou R') qui donne la solution cherchée [1]).

En résumé, il suffit de considérer le cas: $n_1 = 0$, $n_2 = \frac{n-1}{2}$, $n_3 = \frac{n+1}{2}$ c. à. d. la forme:

$$F = (n-1)\,u_2^2 + (n+3)\,u_3^2 + 2(n-1)\,u_2 u_3 \equiv (n-1)(u_2 + u_3)^2 + 4u_3^2$$

En posant:

$$\begin{cases} L_1 = \sqrt{n-1}\,(u_2 + u_3) + 2\,i\,u_3 \\ L_2 = \sqrt{n-1}\,(u_2 + u_3) - 2\,i\,u_3 \end{cases}$$

l'on a $F = L_1 . L_2$. Si F s'annule, L_1 ou L_2 doit s'annuler, il suffit donc de chercher le minimum de $|L_1|$ et $|L_2|$.

Lorsque u_1 et u_3 décrivent le cercle C, L_1 et L_2 décrivent des régions symétriques par rapport à l'axe réel. Il suffit donc de s'occuper, par exemple, de

$$L_1 = (\sqrt{n-1} + 2i)\,u_3 + \sqrt{n-1}\,.\,u_2.$$

On voit sans peine que, lorsque u_3 décrit le cercle C de centre $x = d$, $y = 0$ et de rayon R, l'expression $(\sqrt{n-1} + 2i)u_3$ décrit un cercle de centre $x = \sqrt{n-1}\,d$, $y = 2d$ et de rayon $\sqrt{n+3}\,.R$; lors-

[1]) Nous avons supposé implicitement que $\Phi(n_1, n_2)$ et ses dérivées partielles sont continues. Or la deuxième propriété pourrait ne pas subsister le long de certaines lignes du plan (n_1, n_2). Il n'est cependant pas difficile de compléter la démonstration en remarquant que l'assertion de la p. 644 n'exige nullement, en ce qui concerne le *minimum*, l'hypothèse de l'existence des dérivées de la fonction $\Phi(n_1, n_2)$.

que u_2 décrit C, $\sqrt{n-1}\,u_2$ décrit un cercle de centre $x=\sqrt{n-1}\,d$, $y=0$ et de rayon $\sqrt{n-1}\,.\,R$. Il est donc clair que L_1 décrit un cercle de centre $x=\xi=2\sqrt{n-1}\,d$, $y=\eta=2d$ et de rayon $\varrho=(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1})\,.\,R$. Le minimum de $|L_1|$ est égal à

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\varrho=2\sqrt{n}\,.\,d-R(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1})$$

ou, en remplaçant d et R par leurs valeurs $d=\dfrac{x}{x^2-1}$, $R=\dfrac{1}{x^2-1}$ à

$$\frac{2\sqrt{n}\,x-(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1})}{x^2-1}.$$

Cette expression ne peut s'annuler tant que $x>\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}$.

3. Nous établirons encore un autre lemme dont l'énoncé et la démonstration ressemblent beaucoup aux précédents:

$P(x)$ étant un polynome de degré n, dont tous les zéros sont contenus dans le cercle $|x|\leqslant 1$, tous les zéros de la dérivée de la fraction $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$ sont contenus dans le cercle:

$$|x|\leqslant\sqrt{2}\ \textit{si } n \textit{ est pair},$$

$$|x|\leqslant\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}\,.\sqrt{2}\ \textit{si } n \textit{ est impair.}$$

Ces limites ne sont atteintes (en faisant abstraction des rotations autour de l'origine) que pour les polynomes:

$$P(x)=(x^2-\sqrt{2}\,x+1)^{\frac{n}{2}}\quad \textit{lorsque}\quad n \textit{ est pair.}$$

$$P(x)=\left(x-\frac{\sqrt{n+1}\pm i\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{n-1}\mp i\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

lorsque n est impair.

Je me bornerai à signaler, dans le canevas de la démonstration du théorème précédent, les particularités propres au problème considéré. L'équation qui donne les zéros est:

$$P(x)\,P''(x)-P'^2(x)=0.$$

A la place da la forme

$$F = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i \neq k} u_i u_k$$

on trouve la forme $G = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$.

En nous rappelant que $\sin \alpha = \frac{1}{x}$ (cf. la fig. 47), on constate

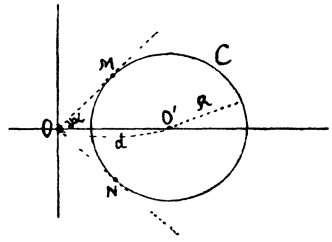

Fig. 47.

immédiatement que, si $x > \sqrt{2}$ $\alpha < 45^0$ et G ne peut s'annuler.

Si n est pair tout calcul est inutile: l'annulation de G sera obtenue, de toute évidence, lorsque x devient égal à $\sqrt{2}$; il faut pour cela que la moitié des u_i occupe le point de contact M et la moitié restante le point de contact N. On trouve ainsi l'exemple cité dans l'énoncé.

Le cas de n impair est plus délicat. Il faut alors reprendre les considérations de la p. 639 et suivantes Dans l'équation (1) de la p. 640 il y a lieu de remplacer s par $d\left(d > 0\right.$, on a donc ici $\left.\mu = \frac{d}{R} = x\right)$, il en est de même dans les équations (2) de la p. 642 Les considérations des pp. 646—648 (démonstration du fait que s est positif) deviennent évidemment inutiles. La conclusion de la p. 644: si $\Phi(n_1, n_2)$ est maximum ou minimum par rapport à n_1 l'on a $n_1 = n_3$ etc. résulte ici simplement de ce que $\arg G = \arg d^2$ c. à. d. $G > 0$. Or $G = n_1 u_1^2 + n_2 u_2^2 + n_3 u_3^2 (u_2 > 0$ et $u_3 = \bar{u}_1)$. La forme qui correspond à l'expression de F écrite p. 650 est ici:

$$G = (n-1) u_2^2 + (n+1) u_3^2;$$

on la décompose en facteurs linéaires: $G = L_1 . L_2$ où

$$L_1 = \sqrt{n-1}\, u_2 + i\sqrt{n+1}\, u_3, \quad L_2 = \sqrt{n-1}\, u_2 - i\sqrt{n+1}\, u_3.$$

En écrivant que L_1 ou L_2 s'annule on trouve la limite donnée dans l'énoncé.

4. Remarque. La proposition bien connue de Grace sur les équations apolaires peut s'énoncer sous la forme suivante [1]: Considérons l'équation $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, F étant symétrique et linéaire par rapport à chaque variable séparément c. à. d. une combinaison linéaire des fonctions symétriques élémentaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si les points d'affixes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, vérifiant $F = 0$ appartiennent à un domaine circulaire C (c. à. d. soit l'intérieur d'un cercle, soit l'extérieur d'un cercle, soit un demi-plan), il existe aussi une solution de la forme $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = t$, t appartenant aussi à C. L'étude des paragraphes précédents nous a montré que cette proposition ne subsiste pas lorsque l'expression symétrique est quadratique par rapport aux variables. Cependant, dans les exemples considérés

$$\left(F = x_1^2 + \ldots + x_n^2, \quad F = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j \neq k} x_j x_k\right)$$

il existait une solution de la forme $x_1 = x_2 = \ldots = x_i = t$, $x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_n = \nu$, t et ν appartenant à C. On peut se demander si ce fait ne correspond pas à une proposition générale. L'exemple de l'équation

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) - 5xyz + 5 = 0$$

qui a un système de solutions $x = 1$, $y = \tilde{\omega}$, $z = \tilde{\omega}^2$ où $\tilde{\omega}$ est une racine cubique non réelle de 1 et qui n'a pas de système de solutions de la forme: $x = y = t$, $z = \nu$, $|t| \leqslant 1$, $|\nu| \leqslant 1$ montre qu'il n'en est rien. Il est cependant probable que la propriété signalée subsiste pour des classes étendues d'expressions symétriques quadratiques.

[1]) Kakeya. On algebric equations having the roots of limited magnitude. Proc. of the phys. math. Society of Japan. Série 3. t. 3 (1921).

Walsh. On the location of the roots of certain types of polynomials. Trans. Amer. Math. Society t. 24 (1922).

5. M. Szegö a établi le résultat suivant [1]):

Si tous les zéros d'un polynome $P(x)$ de degré n sont contenus dans le cercle $|x| \leqslant 1$, tous les zéros de $P(x) + aP'(x)$ sont contenus ou bien dans ce même cercle ou bien dans le cercle $|x + na| \leqslant 1$.

En utilisant la même méthode, c. à. d. en appliquant le théorème de Grace sur les équations apolaires, MM. Kakeya et Walsh ont généralisé ce résultat [2]), en démontrant la proposition suivante:

Si tous les zéros d'un polynome $P(x)$ de degré n sont contenus dans le cercle $|x| \leqslant 1$, tous les zéros du pôlynome

$$R(x) = P(x) + a_1 P'(x) + \ldots + a_r P^{(r)}(x)$$

sont contenus ou bien dans le même cercle, ou bien dans les r cercles $C_1, C_2, \ldots, C_r$, tous de rayon 1, et dont les affixes des centres sont les racines de l'équation:

$$x^r + na_1 x^{r-1} + n(n-1)a_2 x^{r-2} + \ldots + n(n-1)\ldots(n-r+1)a_r = 0.$$

Ils y ont ajouté le complément suivant [3]):

Chaque région connexe composée de k cercles C_i et extérieure au cercle $|x| \leqslant 1$ et aux $(r-k)$ cercles C_i restants contient exactement k zéros de $R(x)$; chaque région connexe composée du cercle $|x| \leqslant 1$ et de $k (k \geqslant 0)$ cercles C_i, extérieure aux $(r-k)$ cercles C_i restants, en contient exactement $(n-r+k)$.

Nous pouvons déduire de ce résultat:

$R(x)$ a toujours $(n-r)$ zéros dont le module ne dépasse pas $(2r+1)$ [4]).

Le cas particulier du polynome $P(x) + aP^{(r)}(x)$ semble intéressant. Nous constatons tout de suite:

$P(x) + aP^{(r)}(x)$ a toujours $(n-r)$ zéros de module ne dépassant pas 3.

Cependant le nombre 3 ne donne pas la limite exacte. Je me propose de déterminer la limite exacte dans le cas le plus simple du polynome $P(x) + aP'(x)$. Nous obtiendrons le résultat suivant:

Si tous les zéros d'un polynome $P(x)$ de degré n sont contenus dans un cercle de rayon R, tous les zéros d'un polynome de la forme $P(x) + aP'(x)$, à l'exception d'un seul au plus, sont contenus dans le

[1]) Math. Zeitschrift t. 13 (1922).

[2]) Dans les travaux cités p. 653.

[3]) Pour l'obtenir on fait coïncider les racines de $P(x) = 0$.

[4]) Car chaque région connexe composée du cercle $|x| \leqslant 1$ et de k cercles C_i est située dans le cercle $|x| \leqslant 2k+1$.

cercle concentrique au précédent et de rayon:

$$\sqrt{2}R \quad \textit{si} \quad n \textit{ est pair},$$

$$\left[\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}\right].\sqrt{2}\,.\,R \quad \textit{si } n \textit{ est impair.}$$

La limite n'est atteinte que dans les cas suivants [1]*:*

$$P(x)=(x^2-\sqrt{2}\,x+1)^{\frac{n}{2}} \qquad a=\frac{-\sqrt{2}}{n} \quad \textit{si} \quad n \textit{ est pair},$$

$$P(x)=\left(x-\frac{\sqrt{n+1}\mp i\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{n-1}\mp i\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

$$a=-\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})\mp i(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}{n\sqrt{2n}} \quad \textit{si} \quad n \textit{ est impair.}$$

6. En éliminant a entre l'équation $P(x)+aP'(x)=0$ et sa dérivée $P'(x)+aP''(x)=0$ on obtient l'équation déjà étudiée au § 3: $P(x)P''(x)-P'^2(x)=0$. Nous avons vu que, si tous les zéros de $P(x)$ sont contenus dans le cercle $|x|\leqslant 1$, tous les zéros de $P(x)P''(x)-P'^2(x)$ sont contenus dans les cercles: $|x|\leqslant\sqrt{2}$ si n est pair, $|x|\leqslant\left[\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}\right]\sqrt{2}$ si n est impair, et que d'ailleurs ces limites sont effectivement atteintes.

(Remarquons que la limite indiquée pour le cas de n impair est plus petite que $\sqrt{2}$; si n croît de 3 à l'infini, elle croît régulièrement à partir de $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$ et tend vers $\sqrt{2}$ pour n infini).

La limite que nous cherchons ne peut évidemment pas être plus petite que ces nombres. Il nous reste à voir qu'elle ne peut pas être plus grande non plus. Lorsque la limite supérieure du module de $(n-1)$ zéros de l'équation proposée est atteinte, il y a évidemment au moins deux zéros x_1 et x_2 qui ont ce module. En supposant $x_1 \neq x_2$ nous aboutirons à une contradiction: ceci suffit pour établir notre assertion.

[1]) On suppose que le cercle ait été réduit au cercle $x|\leqslant 1$ et l'on fait abstraction des rotations autour de l'origine et des multiplications par des constantes réelles.

Je dis d'abord que, si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les zéros de $P(x)$ tous ces zéros doivent être situés sur la périphérie $|x| = 1$ du cercle unité. L'équation proposée peut s'écrire en effet:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_1 - \alpha_i} = a, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_2 - \alpha_i} = a,$$

d'où en retranchant

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{x_1 - \alpha_i} - \frac{1}{x_2 - \alpha_i} \right] = 0.$$

En supposant $x_1 \neq x_2$ et en divisant la dernière équation par $(x_2 - x_1)$ il vient:

$$E \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_1 - \alpha_i)(x_2 - \alpha_i)} = 0.$$

Supposons p. ex. α_1 à l'intérieur du cercle unité Nous pouvons considérer $E = 0$ comme une relation entre α_1 et x_1, par exemple. Elle établit une correspondance biunivoque entre certains voisinages (éventuellement à plusieurs feuillets) de x_1 et de α_1. Par un déplacement convenable de α_1 nous pourrions augmenter le module de x_1, sans changer celui de x_2. Par un déplacement ultérieur des α_i nous pourrions ensuite faire sortir x_2 aussi en dehors du cercle C défini primitivement par la relation $|x| = |x_1| = |x_2|$; en choisissant convenablement a on pourrait alors construire une équation du type considéré ayant deux zéros en dehors de C. Cela est cependant impossible par hypothèse.

Ceci posé, nous allons distinguer deux cas:

1° Le nombre $\zeta = \frac{x_1 + x_2}{2}$ a son module > 1.

2° Ce nombre est de module $\leqslant 1$. Nous supposerons d'ailleurs, ceci ne restreint évidemment pas la généralité du résultat, que $\zeta \geqslant 0$

Remarquons d'abord que le premier cas seul peut se présenter lorsque le degré n du polynome $P(x)$ est pair. En effet, il faut supposer alors $|x_1| = |x_2| = R > \sqrt{2}$. Si $\zeta \leqslant 1$ x_1 et x_2 devraient se trouver respectivement dans deux régions R_1 et R_2 marquées sur la fig. 48. En désignant généralement par $I(x)$ le coefficient de i

dans le nombre complexe x on aurait donc $I(x_2) > 1$, $I(x_1) < -1$.

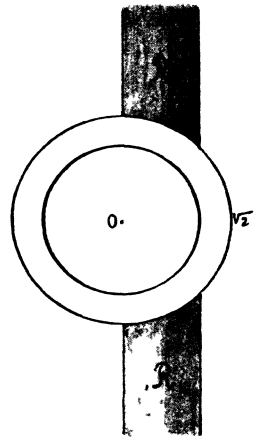

Fig. 48.

Ceci entraîne visiblement (puisque $|\alpha_i| = 1$) $I\left(\frac{1}{x_2 - \alpha_i}\right) < 0$ et $I\left(\frac{1}{x_1 - \alpha_i}\right) > 0$. L'égalité: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_1 - \alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_2 - \alpha_i}$ serait impossible.

1° *Soit donc d'abord* $\zeta > 1$. En différentiant l'équation $E = 0$ nous obtenons:

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2} dx_2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = 0,$$

on constate sans peine que toutes les dérivées de E sont finies et que $\frac{\partial E}{\partial \alpha_i}$ ne s'annule que si $\alpha_i = 0$, cas que nous avons déjà exclu. Je dis qu'il est nécessaire de supposer:

$$\arg\left(\alpha_1 \frac{\partial E}{\partial \alpha_1}\right) = \arg\left(\alpha_2 \frac{\partial E}{\partial \alpha_2}\right) = \ldots = \arg\left(\alpha_n \frac{\partial E}{\partial \alpha_n}\right) = \lambda$$

et aussi:

$$\arg\left(x_1 \frac{\partial E}{\partial x_1}\right) = \arg\left(x_2 \frac{\partial E}{\partial x_2}\right) = \lambda + \pi.$$

En effet, si p. ex $\arg\left(\alpha_1 \frac{\partial E}{\partial \alpha_1}\right) \neq \arg\left(\alpha_2 \frac{\partial E}{\partial \alpha_2}\right)$ on pourrait trouver des déplacements $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ dirigés vers l'intérieur du cercle unité, satisfaisant à la relation: $\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 = 0$, nous aurions donc une équation avec $|x_1| = |x_2| = R$ et un α_i à *l'intérieur* du cercle unité, ce que nous savons impossible. De même si

$$\arg\left(x_1 \frac{\partial E}{\partial x_1}\right) \neq \arg\left(x_2 \frac{\partial E}{\partial x_2}\right)$$

on pourrait déplacer x_1 et x_2 vers l'extérieur du cercle $|x| = R$, sans changer les α_i. Enfin la relation d'Euler:

$$x_1 \frac{\partial E}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial E}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = -2E = 0$$

montre que $\arg\left(x_1 \frac{\partial E}{\partial x_1}\right) = \arg\left(x_2 \frac{\partial E}{\partial x_2}\right) = \arg\left(\alpha_i \frac{\partial E}{\partial \alpha_i}\right) + \pi$, $i = 1, 2, \ldots n$. (L'une des quantités $x_1 \frac{\partial E}{\partial x_1}$, $x_2 \frac{\partial E}{\partial x_2}$ peut s'annuler mais non les deux à la fois).

En effectuant les calculs, on trouve:

$$\frac{1}{2}\left(\alpha_i \frac{\partial E}{\partial \alpha_i}\right) = \frac{\alpha_i(\zeta - \alpha_i)}{(x_1 - \alpha_i)^2 (x_2 - \alpha_i)^2}$$

et d'autre part

$$x_1 \frac{\partial E}{\partial x_1} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_1 (x_2 - \alpha_i)}{(x_1 - \alpha_i)^2 (x_2 - \alpha_i)^2}, \quad x_2 \frac{\partial E}{\partial x_2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_2 (x_1 - \alpha_i)}{(x_1 - \alpha_i)^2 (x_2 - \alpha_i)^2}.$$

On doit visiblement avoir

$$\arg\left(x_1 \frac{\partial E}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial E}{\partial x_2}\right) \equiv \lambda \pmod{\pi};$$

ceci s'écrit:

$$\arg\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_1 - x_2)\alpha_i}{(x_1 - \alpha_i)^2 (x_2 - \alpha_i)^2}\right\} \equiv \lambda \pmod{\pi}.$$

Or $(x_1 - x_2)$ est purement imaginaire, donc:

$$\arg\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(x_1 - \alpha_i)^2 (x_2 - \alpha_i)^2}\right\} = \arg\left\{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_i(\zeta - \alpha_i)}{(x_1 - \alpha_i)^2 (x_2 - \alpha_i)^2}\right] \cdot \frac{1}{\zeta - \alpha_i}\right\} =$$

$$= \lambda \pm \frac{\pi}{2}.$$

C'est ici que nous aboutissons à une contradiction car les quantités entre crochets ont toutes leur argument égal à λ, tandis que les multiplicateurs $\frac{1}{\zeta - \alpha_i}$ ont tous leur partie réelle positive, puisque $\zeta > 1$. Ainsi l'hypothèse $x_1 \neq x_2$ est inadmissible.

2° Lorsque le degré n est impair il y a lieu d'envisager aussi *le cas* $\zeta \leqslant 1$, nous pouvons d'ailleurs toujours supposer que $x_1 = |x_2| = R > \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$.

Posons $x_2 = Re^{i\varphi}$, $x_1 = Re^{-i\varphi}$ $\varphi > 0$, d'où $\zeta = R\cos\varphi$ et $\alpha_i = e^{i\theta}$. Je dis que $I\left(\frac{1}{x_2 - \alpha_i}\right) < I\left(\frac{1}{x_1 - \alpha_i}\right)$: cette inégalité rend évidemment impossible que l'on ait à la fois:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_1 - \alpha_i} + a = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_2 - \alpha_i} + a = 0.$$

L'inégalité en question s'écrit:

$$\frac{\sin\theta - R\sin\varphi}{R^2 + 1 - 2R\cos(\theta - \varphi)} < \frac{\sin\theta + R\sin\varphi}{R^2 + 1 - 2R\cos(\theta + \varphi)}$$

ou, les dénominateurs étant positifs, en tenant compte de ce que $\sin\varphi > 0$: $R^2 + 1 - 2R\cos\theta\cos\varphi - 2\sin^2\theta > 0$ c à. d. en posant $\cos\theta = t$: $2t^2 - 2R\cos\varphi \,.\, t + R^2 - 1 > 0$. Le discriminant de ce trinome en t est égal à $\zeta^2 + 2 - 2R^2$, si $\zeta \leqslant 1$ et $R > \sqrt{\frac{3}{2}}$ il est négatif. Or, on vérifie sans peine que $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} > \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Remarque. Si l'on savait d'avance que, lorsque la limite est atteinte, les zéros de $P(x)$ sont réunis en deux points seulement du cercle unité, la démonstration s'achèverait très rapidement à l'aide du théorème de Grace. L'équation proposée s'écrit en effet dans ce cas: $\frac{p}{x - \alpha} + \frac{q}{x - \beta} = a$ ($|\alpha| \leqslant 1$, ($|\beta| \leqslant 1$, $p + q = n$). En désignant par x_1 et x_2 les deux racines de cette équation du 2ème degré: $|x_1| = |x_2| = R$, on en tire:

$$\begin{cases} a[x_1 + x_2 - \alpha - \beta] = n \\ a[x_1 x_2 - \alpha\beta] = p\beta + q\alpha \end{cases}$$

d'où, en éliminant a:

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 - \alpha - \beta & n \\ x_1 x_2 - \alpha\beta & p\beta + q\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation obtenue est symétrique et bilinéaire par rapport à x_1 et x_2, donc, d'après le théorème de Grace, elle a une solution de la forme: $x_1 = x_2 = z$, $|z| \geqslant R$; il est donc possible de construire une équation du type considéré ayant une racine double de module $\geqslant R$.

Cette méthode de démonstration semble pouvoir difficilement s'étendre au cas général.

7. Le théorème bien connu de Lucas:

„Si un cercle contient tous les n zéros d'un polynome, il contient aussi les $(n-1)$ zéros de sa dérivée" a été généralisé comme suit [1]):

„Si un cercle de rayon R contient p zéros d'un polynome de degré n, un cercle concentrique de rayon $\psi(n, p) . R$ contient au moins $(p-1)$ zéros de la dérivée".

M. Kakeya a d'ailleurs calculé, dans le travail cité, la valeur exacte de $\psi(n, 2) = \dfrac{1}{\sin \dfrac{\pi}{n}}$ [2]).

Je me propose d'étudier en détail le cas $p = n - 1$. En remplaçant, pour la commodité des notations, n par $(n+1)$, désignons par $P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$ un polynome dont tous les n zéros α_i sont

[1]) Kakeya. „On zeros of a polynomial and its derivatives". The Tohoku Math. Journal t. 11 (1917).

[2]) Ce résultat a été auparavant signalé comme probable par M. Alexander dans les Annals of Mathematics, 2e série t. 17 (1915). On en trouvera une démonstration nouvelle dans le travail de M. Szegö: „Bemerkungen zu einem Satz von I. H. Grace". Math. Zeitschrift t. 13 (1922). M. Kakeya a aussi indiqué une méthode, d'ailleurs fort compliquée, pour le calcul de $\psi(n, p)$ dans tous les cas. Signalons aussi dans cet ordre d'idées un résultat récent de M. Sergesco: La dérivée d'un polynome de 3e degré s'annulant aux points 0 et 1 a un zéro de module non supérieur à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et un zéro de module non inférieur à ce nombre. Dans un exemple particulier les deux zéros ont leur module égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

contenus dans le cercle unité. Il s'agira d'étudier l'équation:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i} + \frac{1}{x-a} = 0$$

a étant quelconque et, en particulier, de donner des renseignements sur la limite supérieure de module de ses $(n-1)$ zéros.

La proposition de Grace donne immédiatement quelques indications: en effet, l'équation en question, mise sous forme entière, est symétrique et linéaire par rapport aux α_i, donc pour obtenir la région de la variabilité des racines il suffit d'y poser $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$.

Il vient ainsi:

Les racines de (1) sont situées ou bien dans le cercle unité ou bien dans le cercle Γ de centre $\frac{n}{n+1} \cdot a$ et de rayon $\frac{1}{n+1}$. Si le cercle Γ est extérieur au cercle unité il contient une seule racine de (1), les $(n-1)$ autres sont contenues dans le cercle unité.

On en déduit immédiatement l'inégalité: $\psi(n, n-1) \leqslant 1 + \frac{2}{n}$.

Cependant, nous verrons que, en réalité, $\psi(n, n-1) \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{n}}$.

Si n est impair, on a même exactement $\psi(n, n-1) = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$; si n est pair

$$\frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n-1}} \leqslant \psi(n, n-1) < \sqrt{1+\frac{1}{n}},$$

il est d'ailleurs très probable que dans ce cas

$$\psi(n, n-1) = \frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n-1}}.$$

Reprenons l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i} + \frac{1}{x-a} = 0.$$

On voit d'abord immédiatement, comme à la p. 656, qu'on peut se borner au cas où tous les α_i sont sur la périphérie du cercle unité: nous poserons donc $\alpha_i = e^{i\theta_i}$, θ_i réel. L'équation ne change pas si l'on fait tourner x, a et les α_i d'un même angle, on peut donc supposer,

sans nuire à la généralité, que a est positif. L'équation peut d'ailleurs s'écrire: $xP'(x) + P(x) - aP'(x) = 0$.

Tous les zéros de $xP'(x) + P(x)$ sont contenus dans le cercle unité: ceci résulte de l'énoncé de la p. 661, où l'on fait $a = 0$ [1]. Si on laisse fixes les α_i et que l'on fasse parcourir à a, l'axe positif, de 0 à l'infini, les racines de l'équation décrivent des courbes qui commencent aux n racines de $xP'(x) + P(x) = 0$ et dont $(n-1)$ branches aboutissent aux racines de $P'(x)=0$, la dernière par contre s'éloigne à l'infini. Pour obtenir leurs équations en coordonnées polaires, écrivons la proposée sous la forme:

$$x + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_i}} - a = 0.$$

En posant

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_i} \right|^2 = S$$

il vient

$$Sx + \sum_{i=1}^{n} \frac{x - \alpha_i}{|x - \alpha_i|^2} - aS = 0.$$

En posant $x = re^{i\varphi}$ et en égalant à zéro le coefficient de i, on en tire:

$$T(r, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_n) \equiv Sr \sin \varphi + \sum_{i=1}^{n} \frac{r \sin \varphi - \sin \theta_i}{r^2 + 1 - 2r \cos(\varphi - \theta_i)} = 0.$$

Il est bien clair, d'après l'énoncé de la p. 661, que toutes les

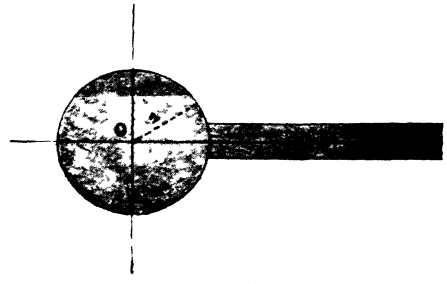

Fig. 49.

[1]) Ou bien du théorème de Lucas appliqué au polynome $xP(x)$.

branches de la courbe $T=0$ se trouvent, soit dans le cercle unité, soit dans la bande infinie d'épaisseur $\frac{2}{n+1}$ qui s'étend à droite de ce cercle, symétriquement par rapport à l'axe positif. Je dis qu'il existe un nombre K_n tel que, si $|x|>K_n$, on a toujours $\frac{\partial T}{\partial \varphi} \neq 0$, en un point de la courbe $T=0$ $\left(\text{nous verrons plus loin que } \frac{\partial T}{\partial \varphi}>0\right)$, tandis que, si $|x|=K_n$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ peut s'annuler. Si l'on a $\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$, $\frac{\partial T}{\partial r}=0$ l'équation a une racine double au point considéré: nous verrons que cela est impossible si $|x|$ dépasse une certaine limite, ne dépendant que de n. Supposons $\frac{\partial T}{\partial r} \neq 0$, alors au point considéré M de la courbe $T=0$. $\frac{dr}{d\varphi}=0$. Ecrivons l'équation étudiée sous la forme: $\frac{xP'(x)+P(x)}{P'(x)}=a$. On voit que $x=re^{i\varphi}$ décrivant la circonférence $|x|=r$ tangente au point M à la branche considérée de $T=0$ on devrait y avoir

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \left\{ \frac{xP'(x)+P(x)}{P'(x)} \right\} = 0.$$

Or, tous les zéros de $xP'(x)+P(x)$ et de $P'(x)$ sont contenus dans le cercle unité; on trouve donc $\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \{xP'(x)+P(x)\} \geqslant \frac{n}{r+1}$ [1]) et $\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \{P'(x)\} \leqslant \frac{n-1}{r-1}$ donc

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \left\{ \frac{xP'(x)+P(x)}{P'(x)} \right\} \geqslant \frac{n}{r+1} - \frac{n-1}{r-1}.$$

Or

$$\frac{n}{r+1} - \frac{n-1}{r-1} > 0 \quad \text{si} \quad r > 2n-1.$$

Il est d'ailleurs clair que la limite des modules de $(n-1)$ racines que nous cherchons ne peut pas dépasser K_n: il suffit d'appliquer „le principe de variation de l'argument" exposé en détail dans l'étude de l'équation $P(x)+aQ(x)=0$ (Chap. II. § 2). Cher-

[1]) Cf pour le détail des calculs le § 2 du Chapitre II.

chons maintenant dans quelles conditions la limite K_n pourrait être atteinte. On constate que:

1° Ou bien on devrait avoir au point simple M de la courbe $T=0$ un „maximum maximorum“: aucun changement des θ_i ne pouvant augmenter la distance OM,

2° Ou bien la limite serait atteinte en un point multiple de la courbe $T=0$.

3° Ou enfin elle serait atteinte lorsqu'un „maximum“ cesse de l'être en devenant un point d'inflexion avec $\frac{dr}{d\varphi}=0$.

Il est facile de voir que le cas 1° ne peut pas se présenter si $r>1$. On devrait avoir, en effet, $\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$ et $\frac{\partial T}{\partial r}\neq 0$. En déplaçant les θ_i nous obtenons d'autre part $\frac{dr}{d\theta_i}=\frac{-\frac{\partial T}{\partial \theta_i}}{\frac{\partial T}{\partial r}}$ et l'on aurait aussi $\frac{\partial T}{\partial \theta_i}=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Posons pour abréger

$$\varphi-\theta_i=\psi_i,\quad r^2+1-2r\cos\psi_i=D_i \qquad (D_i>0 \text{ si } r>1),$$

il vient donc:

$$T=Sr\sin\varphi+\sum_{i=1}^{n}\frac{r\sin\varphi-\sin\theta_i}{D_i}=0$$

et [1])

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \theta_i}=Sr\cos\varphi+\sum_{i=1}^{n}\frac{r\cos\varphi-\cos\theta_i}{D_i}=0,$$

d'où:

$$\sin\varphi\,.\,T+\cos\varphi\,.\left[\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \theta_i}\right]=Sr+\sum_{i=1}^{n}\frac{r-\cos\psi_i}{D_i}=0.$$

La dernière égalité est évidemment impossible si $r>1$, car $S>0$ et les $D_i>0$.

[1]) On s'appuie sur la relation $\frac{\partial S}{\partial \varphi}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \theta_i}=0$, évidente géométriquement.

Supposons en second lieu que la limite K_n soit atteinte en un point multiple de la courbe $T = 0$: l'équation proposée aurait une racine double en ce point, qui vérifierait les relations:

$$xP'(x) + P(x) - aP'(x) = 0, \quad xP''(x) + 2P'(x) - aP''(x) = 0,$$

d'où, en éliminant a: $P(x)P''(x) - 2P'^2(x) = 0$. Nous avons déjà étudié au § 2 cette équation; nous avons vu que toutes ses racines ne dépassent point en module $\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}$ si n est pair et $\frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+3}}{2\sqrt{n}}$ si n est impair et que d'ailleurs ces limites peuvent être effectivement atteintes.

Il reste à examiner la circonstance 3⁰ de la p. 664. Il paraît difficile d'établir directement qu'elle ne puisse pas se présenter [1]). Elargissons notre problème primitif en remplaçant l'équation étudiée par la suivante:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x - \alpha_i} + \frac{1}{x - a} = 0,$$

$p_i \geqslant 0$ $\sum_{i=1}^{n} p_i = n$ [2]). On s'assure d'abord aisément que toutes les propriétés établies jusqu'ici subsistent pour cette équation plus générale. La courbe

$$T = Sr \sin\varphi + \sum_{i=1}^{n} p_i . \frac{r \sin\varphi - \sin\theta_i}{D_i} = 0$$

(on pose maintenant

$$S = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x - \alpha_i} \right|^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i . \frac{r - \cos\psi_i}{D_i} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n} p_i . \frac{\sin\psi_i}{D_i} \right]^2)$$

est toujours comprise, soit dans le cercle unité, soit dans une bande infinie d'épaisseur $\frac{2}{n+1}$: donc, si $|x| > 1$, on a en un point de cette courbe $\cos\varphi > \delta > 0$, δ étant fixe. En s'appuyant sur ce fait

[1]) D'ailleurs dans certains problèmes analogues elle se présente effectivement.

[2]) On peut interpréter les p_i comme des masses de points attirants placés aux racines α_i de $P(x) = 0$.

on constate sans peine que $\frac{\partial T}{\partial \varphi} > 0$ si r est assez grand, quelle que soit la distribution des θ_i dans l'intervalle $0 \leqslant \theta_i \leqslant 2\pi$. Il existe donc toujours un nombre $K_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ jouissant des propriétés du nombre K_n de la p. 663. On constate immédiatement que la circonstance 1° de la p. 664 ne se présente pas. Quant aux racines doubles, il résulte de nos démonstrations antérieures du § 2 qu'elles sont, quels que soient les p_i, inférieures à $\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}$ en module. Ce maximum est d'ailleurs atteint p. ex. en posant

$$p_1 = p_2 = \frac{n}{2}, \quad p_3 = p_4 = \ldots = p_n = 0.$$

Je me propose de déterminer la valeur maximum de $K_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ soit K, pour toutes les valeurs des p_i dans le triangle:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = n, \quad p_i \geqslant 0.$$

Nous allons voir que ce maximum K est égal à $\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}$.

Si la limite K était supérieure à $\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}$ c'est que, d'après ce qui précède, elle serait atteinte, pour un système convenable des p_i, dans les circonstances décrites sous 3° p. 664; c. à. d. que la courbe $T = 0$ aurait un point d'inflexion $x = re^{i\varphi}$ avec $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ et $r = K$. En posant pour abréger

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(r - \cos\psi_i)}{D_i}, \quad W = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \sin\psi_i}{D_i} \text{ [1]}$$

et en écrivant que $T = 0$ $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, il vient

$$T = (V + rS)\sin\varphi + W\cos\varphi = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \left[\frac{\partial V}{\partial \varphi} + r\frac{\partial S}{\partial \varphi} - W\right]\sin\varphi + \left[V + rS + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right]\cos\varphi = 0.$$

En éliminant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ on aboutit à la condition:

[1]) On a $W^2 + V^2 = S^2$.

$$H(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, r) \equiv (V + rS)\left(V + rS + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) +$$
$$+ W\left(W - \frac{\partial V}{\partial \varphi} - r\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right) = 0$$

nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution du système $T = 0\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$. D'après ce qui précède $H \neq 0$ quels que soient les ψ_i réels et les p_i du triangle: $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = n$ si r est assez grand. D'ailleurs si $T = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\cos\varphi \,.\, H}{Sr + V}$. Or nous avons vu que $\frac{\partial T}{\partial \varphi} > 0$ si r est assez grand, en outre $\cos\varphi > 0$, $S > 0$, $V > 0$ donc aussi $H > 0$. Si $r = K$ on doit avoir $H = 0$ pour un système convenable de valeurs de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, cette fonction continue et dérivable tant que $r > 1$ doit donc présenter un minimum aussi bien par rapport aux variables ψ_i que par rapport aux p_i [1]. On aura donc

$$(2) \qquad \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \ldots = \frac{\partial H}{\partial p_n} = \lambda$$

$$(3) \qquad \frac{\partial H}{\partial \psi_1} = \frac{\partial H}{\partial \psi_2} = \ldots = \frac{\partial H}{\partial \psi_n} = 0.$$

En remarquant que

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = (1 - r^2)\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \sin\psi_i}{D_i^2}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{[(r^2+1)\cos\psi_i - 2r]}{D_i^2}$$

on voit que les équations (2) seront de la forme

$$(2') \quad A \,.\, \frac{\sin\psi_i}{D_i} + B \,.\, \frac{(r - \cos\psi_i)}{D_i} + C \,.\, \frac{\sin\psi_i}{D_i^2} + D \,.\left\{\frac{(r^2+1)\cos\psi_i - 2r}{D_i^2}\right\} = \lambda$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

[1]) Je suppose dans ce qui suit que $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ représente un point *intérieur* du triangle $\sum_{i=1}^{n} p_i = n$, $p_i \geqslant 0$; s'il n'en était pas ainsi on n'aurait qu'à considérer le triangle à un nombre moindre de dimensions et à raisonner comme dans le texte.

A, B, C, D ne dépendant pas de l'indice i, quant aux équations (3) elles pourront s'écrire:

$$(3') \quad A \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_i}\left(\frac{\sin \psi_i}{D_i}\right) + B \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_i}\left(\frac{r - \cos \psi_i}{D_i}\right) + C \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_i}\left(\frac{\sin \psi_i}{D_i^2}\right) + \\ + D \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_i}\left\{\frac{(r^2+1)\cos \psi_i - 2r}{D_i^2}\right\} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En multipliant (2') par D_i^2 et en posant $\cos \psi_i = x$, $\sin \psi_i = y$ on obtient, en considérant A, B, C, D, λ comme des constantes, l'équation d'une conique. Les ψ_i correspondent aux points d'intersection de la conique avec la circonférence $x^2 + y^2 = 1$. Les équations (3') expriment que de plus la conique est tangente à la circonférence $x^2 + y^2 = 1$ aux points correspondants aux ψ_i. Il en résulte immédiatement que *les ψ_i et donc aussi les racines de $P(x) = 0$ doivent se réunir en deux points au plus.*

Le cas où elles seraient réunies en un seul point s'élimine immédiatement, on trouve d'ailleurs que dans ce cas les courbes $T = 0$ sont des droites parallèles à Ox; nous supposerons donc qu'elles se réunissent en deux points distincts. L'équation proposée prend la forme:

$$(1') \qquad \frac{p_1}{x - \alpha_1} + \frac{p_2}{x - \alpha_2} + \frac{1}{x - a} = 0$$

$$(|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1, \ \alpha_i = e^{i\theta_i}, \ p_1 > 0, \ p_2 > 0, \ p_1 + p_2 = n).$$

On peut mettre dans ce cas l'équation des courbes $T = 0$ sous la forme suivante:

$$T = \begin{vmatrix} (n+1)r^2 \cos 2\varphi - r[(p_1+1)\cos(\varphi+\theta_2) + \\ \qquad + (p_2+1)\cos(\varphi+\theta_1)] + \cos(\theta_1+\theta_2), \\ \qquad - nr\cos\varphi + p_1 \cos\theta_2 + p_2 \cos\theta_1 \\ (n+1)r^2 \sin 2\varphi - r[(p_1+1)\sin(\varphi+\theta_2) + \\ \qquad + (p_2+1)\sin(\varphi+\theta_1)] + \sin(\theta_1+\theta_2), \\ \qquad - nr\sin\varphi + p_1 \sin\theta_2 + p_2 \sin\theta_1 \end{vmatrix} = 0.$$

En supposant que $r > 1$ et en posant $\cos \varphi = x$, $\sin \varphi = y$ nous obtiendrons une équation de la forme:

$$(n+1)r^2(p_1 \sin \theta_2 + p_2 \sin \theta_1)(x^2 - y^2) - \\ - 2(n+1)r^2(p_1 \cos \theta_2 + p_2 \cos \theta_1)xy + \text{un terme linéaire en } x, y = 0.$$

Le discriminant Δ de cette conique est:

$$\Delta = -(n+1)^2 r^4 [(p_1 \cos\theta_2 + p_2 \cos\theta_1)^2 + (p_1 \sin\theta_2 + p_2 \sin\theta_1)^2]$$

il est donc négatif, à moins que l'on ait

$$p_1 \cos\theta_2 + p_2 \cos\theta_1 = 0 \quad \text{et} \quad p_1 \sin\theta_2 + p_2 \sin\theta_1 = 0$$

auquel cas la conique se réduit à une droite. Si $\Delta < 0$, la conique représente soit une hyperbole équilatère, soit un système de deux droites non parallèles. En aucun cas elle n'a de point d'intersection triple avec la circonférence $x^2 + y^2 = 1$. Ainsi notre hypothèse, d'après laquelle la courbe $T = 0$ présente en un point de la circonférence $|x| = K$ l'inflexion avec $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ est inadmissible.

Donc $K = \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}$.

Remarquons encore que, si l'on savait *a priori* que, lorsque la limite est atteinte, les zéros de $P(x)$ se réunissent en deux points on pourrait appliquer le théorème de Grace à l'équation (1'), de la manière indiquée pp. 659—660 et obtenir immédiatement, en se servant du résultat du § 2 de ce Chapitre, les limites de l'énoncé. En résumé nous obtenons le résultat suivant:

Si les $(n-1)$ *zéros d'un polynome de degré* n *sont contenus dans un cercle de rayon* R. *le polynome dérivé a au moins* $(n-2)$ *zéros dans le cercle concentrique de rayon* $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \cdot R$.

Si n *est impair, cette limite n'est atteinte* [1]) *que pour le polynome:* $\left(x^2 - 2\sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x + 1\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n-1}\right)$ *dont la dérivée a* $(n-3)$ *zéros de module* 1 *et la racine double* $x = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

Si n *est pair, la limite exacte est inférieure à* $\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ *et supérieure ou égale à* $\frac{\sqrt{n-2} + \sqrt{n+2}}{2\sqrt{n-1}}$. Si l'on suppose que, lorsqu'elle est atteinte, l'équation considérée ait une racine double, elle serait égale précisément à $\frac{\sqrt{n-2} + \sqrt{n+2}}{2\sqrt{n-1}}$ et ne serait atteinte [1]) que pour les polynomes:

[1]) Je suppose que le cercle est le cercle unité et je fais abstraction des rotations et des multiplications par des constantes réelles.

$$\left[x-\frac{\sqrt{n-2}\pm i}{\sqrt{n-1}}\right]^{\frac{n}{2}}\left[x-\frac{n\mp i\sqrt{n-2}}{\sqrt{(n-1)(n-2)}}\right]^{\frac{n}{2}-1}$$
$$\left[x-\frac{n(\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2})}{2(n-1)\sqrt{n-1}}\pm i\cdot\frac{(n-\sqrt{n^2-4})}{2(n-1)\sqrt{n-1}}\right]$$

dont la dérivée a $(n-3)$ zéros de module 1 et une racine double $x=\frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n-1}}$.

Si l'on a des renseignement supplémentaires au sujet des zéros de $P(x)$ contenus dans le cercle $|x|\leqslant 1$, on peut obtenir des limitations plus précises. En voici un exemple:

Si $(n-1)$ zéros d'un polynome de degré n sont les sommets d'un polygone régulier de $(n-1)$ côtés, inscrit dans le cercle $|x|=1$, le polynome dérivé a $(n-2)$ zéros de modules ne dépassant pas $\sqrt[n-1]{\frac{n-2}{n}}$. On aboutit en effet à une équation de la forme:

$$1+at^{n-2}+t^{n-1}=0$$

qui a toujours $(n-2)$ racines de modules non supérieurs à $\sqrt[n-1]{n-2}$.

8. Nous étudierons maintenant les limites supérieures des zéros des dérivées des fractions rationnelles, en nous bornant d'ailleurs à quelques cas simples; nous utiliserons dans cette étude les résultats de M. Walsh [1]).

Considérons d'abord la fraction $\frac{P(x)}{(x-a)^s}$, où a est quelconque, et $P(x)$ un polynome de degré $n\geqslant s$ dont tous les zéros sont contenus dans le cercle unité. Les zéros de la dérivée sont les racines de l'équation:

$$(x-a)^{s-1}[(x-a)P'(x)-sP(x)]=0. \tag{1}$$

Si, au lieu d'un pôle unique d'ordre s, la fraction avait s pôles très rapprochés les uns des autres, la dérivée aurait évidemment $(s-1)$ zéros dans le voisinage immédiat des s pôles. Il paraît donc naturel de considérer, dans (1), le pôle a comme une racine $(s-1)$-ple de la dérivée. En adoptant désormais cette convention, on établit la proposition suivante:

[1]) Transactions of the American Math. Society t. 22 (1921).

Si $s \leqslant n < 2s$, *la dérivée de la fraction* $\frac{P(x)}{(x-a)^s}$ *a toujours* $(s-1)$ *zéros de modules non supérieurs à* 1

Si $n \geqslant 2s$, *elle a toujours* s *zéros de modules non supérieurs à* 1. *Dans les deux cas, les nombres respectifs* $(s-1)$ *et* s *ne peuvent pas être remplacés par des nombres plus grands.*

D'après M. Walsh, les zéros de la dérivée (différents de a) sont contenus, ou bien dans le cercle unité, ou bien dans le cercle Γ de centre $\frac{na}{n-s}$ et de rayon $\frac{s}{n-s}$.

Nous distinguons maintenant trois cas:

1° $s < n < 2s$.

Si $|a| \leqslant 1$, la proposition est évidente; d'autre part, si $|a| > 1$, le cercle Γ est complètement extérieur au cercle unité, donc ce dernier contient $(n-1)$ zéros de la dérivée.

Pour voir que le nombre $(s-1)$ ne peut pas être remplacé par un nombre plus grand, posons $P(x) = x^n - 1$ et $a = 0$, il vient $(x-a)P'(x) - sP(x) = (n-s)x^n + s$. Le module des racines de la dérivée différentes de 0 est donc $= \sqrt[n]{\frac{s}{n-s}} > 1$.

2° $n = s$.

Si $|a| \leqslant 1$, la proposition est évidente, supposons donc $|a| > 1$. L'équation qui donne les zéros de la dérivée autres que a s'écrit ici: $xP'(x) - nP(x) - aP'(x) = 0$. Je dis que cette équation, de degré $(n-1)$, a ses $(n-1)$ racines dans le cercle unité [1]). Supposons en effet le contraire: on aurait $x - \frac{nP(x)}{P'(x)} = a$ avec $|x| > 1$, $|a| > 1$. Or $x - \frac{nP(x)}{P'(x)}$ est le „point dérivé" de x de Laguerre qui a établi que chaque cercle passant par x et $x - \frac{nP(x)}{P'(r)}$ sépare les zéros de $P(x)$. En contruisant un cercle convenable on aboutirait donc à la conclusion que $P(x)$ a un zéro de module plus grand que un. Voici encore une autre démonstration qui m'a été indiquée par M. Montel: notre équation peut s'écrire

[1]) C'est évidemment une généralisation du théorème de Lucas.

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i} = \frac{n}{x-a},$$

α_i étant les zéros de $P(x)$. Or, si $|x| > 1$ on a d'après M. Walsh:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i} = \frac{n}{x-\alpha}, \quad |\alpha| \leqslant 1$$

donc $a = \alpha$ et $|a| \leqslant 1$ contrairement à l'hypothèse. On a donc bien $|x| \leqslant 1$.

3° $n \geqslant 2s$.

Si $|a| > 1$, le cercle Γ est complètement extérieur au cercle unité, ce dernier contient donc $(n-1)$ zéros de la dérivée. Supposons donc $|a| \leqslant 1$, $0 \leqslant a \leqslant 1$ pour fixer les idées. Ceci entraîne immédiatement l'existence de $(s-1)$ zéros de la dérivée, tous égaux à a, dans le cercle unité; faisons voir que $\varphi(x) = (x-a)\,P'(x) - sP(x)$ y a aussi un zéro: nous aurons donc bien, en tout, s zéros au moins dans le cercle unité. Si notre assertion était inexacte, tous les zéros de $\varphi(x)$ devraient être situés à l'intérieur d'un polygone convexe,

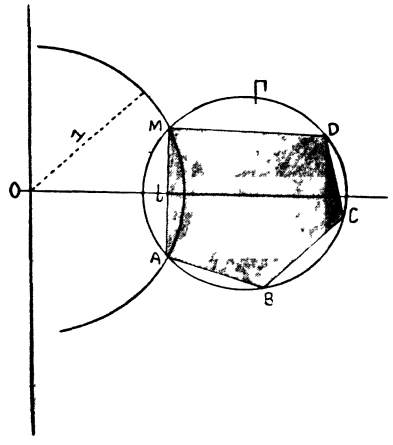

Fig. 50.

$ABCDMLA$, inscrit dans le cercle Γ, M et A désignant les points d'intersection de Γ avec $|x| = 1$, L le milieu du segment AM. Les zéros des dérivées successives de $\varphi(x)$ devraient donc être aussi

situés à l'intérieur ou sur les côtés du polygone, le côté MLA étant cependant exclu.

Or, $\varphi^{(s)}(x) = (x - a) P^{(s+1)}(x)$: on devrait donc avoir: $a > OL$. En effectuant le calcul on trouve cependant: $OL = \frac{n(a^2+1) - 2s}{2(n-s)a}$, d'où $a \leqslant OL$

Il reste à établir que le nombre s ne peut pas être remplacé par un plus grand.

Il nous sera commode d'employer le langage de la mécanique: si l'on suppose que l'on a placé aux zéros de $P(x)$ les masses attirantes, en raison inverse de la distance, toutes égales, et au pôle a une masse s fois plus grande et répulsive suivant la même loi, les zéros de la dérivée de $\frac{P(x)}{(x-a)^s}$ sont des points d'équilibre. Supposons les zéros de $P(x)$ tous réels et distincts, mais très rapprochés les uns des autres et que le pôle a n'est pas réel, p. ex. que sa partie imaginaire est positive.

L'interprétation mécanique ci-dessus montre immédiatement

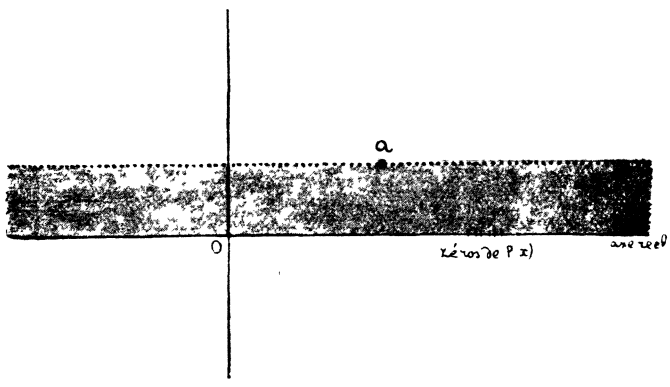

Fig. 51.

qu'il n'y a aucun zéro de la dérivée dans la bande infinie marquée sur la fig. 51 ni sur ses frontières, sauf au point a qui compte comme une racine $(s-1)$-ple de la dérivée.

Il est clair d'autre part qu'il y a $(n-1)$ zéros de la dérivée dans le voisinage immédiat des n zéros de $P(x)$. Comme le nombre total des zéros de la dérivée est $(n+s-1)$, on constate qu'il n'y en a qu'un seul dans la partie du plan située au-dessus de la bande. Dès lors

il est clair que l'on peut tracer un cercle contenant tous les zéros de $P(x)$ et ne contenant en tout que s zéros de la dérivée.

Nous avons eu l'occasion de constater, à plusieurs reprises, que lorsque les zéros des équations contenant des paramètres atteignent le maximum de leurs modules, on est en présence de racines doubles [1]). Il en est ainsi pour l'équation $P(x)+aQ(x)=0$, $P(x)+aP'(x)=0$, $xP'(x)+P(x)+aP'(x)=0$ (du moins si le degré du polynome $P(x)$ est impair), $1+x^p+ax^n=0$. Dans le cas de l'équation traitée par M. Montel

$$1+x+a_1x^{n_1}+\ldots+a_kx^{n_k}=0$$

on a une racine $(k+1)$-ple.

En est-il toujours ainsi, ou du moins peut-on affirmer qu'il en soit ainsi dans „la plupart" des cas?

L'énoncé de la p. 671 nous permet de répondre par la négative. Reprenons en effet la fraction $\frac{P(x)}{x-a}$, en supposant que le degré n de polynome $P(x)$ soit $\geqslant 2$. L'équation qui donne les zéros de la dérivée s'écrit:

$$xP'(x)-P(x)-aP'(x)=0. \tag{2}$$

En supposant que tous les zéros de $P(x)$ sont contenus dans le cercle unité, il est bien clair que (2) a $(n-1)$ zéros restant à distance finie. Or, nous avons vu qu'un seul zéro de la dérivée reste constamment dans le cercle unité, donc les limites supérieures de module de $2, 3, \ldots, (n-1)$ zéros sont certainement supérieures à 1; on peut ajouter qu'elles sont inférieures à $1+\frac{2}{n-1}$: c'est une conséquence immédiate des résultats de M. Walsh. Or, supposons que (2) ait une racine double; en éliminant a entre les deux équations:

$$\begin{cases} xP'(x)-P(x)-aP'(x)=0 \\ xP''(x)-aP''(x)=0 \end{cases}$$

on obtient: $P(x)P''(x)=0$. Donc il n'y a jamais de racine double en dehors du cercle unité.

[1]) Plus précisément, nous supposons qu'il s'agit de déterminer le plus petit cercle de centre origine contenant toujours m racines de l'équation si m est le nombre maximum des racines qui restent toujours à distance finie.

(Il est remarquable que ce résultat ne se généralise pas si l'on considère, au lieu des masses égales, des masses quelconques placées aux zéros de $P(x)$: en d'autres termes, l'équation $\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x-\alpha_i} = \frac{1}{x-a}$ $|\alpha_i| \leqslant 1$, $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = n$ peut avoir des racines doubles extérieures au cercle unité. *Exemple:* $n = 3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = p_3 = \frac{5}{4}$, $a = \frac{2}{9}(\sqrt{10}+1)$. La racine double est $\frac{4+\sqrt{10}}{6} > 1$[1]).

En comparant ce résultat à celui qui vient d'être rappelé à propos de l'équation $xP'(x) + P(x) + aP'(x) = 0$ nous constatons qu'un simple changement de signe peut entraîner des modifications profondes dans la manière dont le maximum du module est atteint par les racines.

D'ailleurs il est aisé de former des exemples précis dans lesquels la limite est atteinte lorsqu'il y a plusieurs racines de même module et distinctes. Soit β un nombre fixe compris entre 1 et $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et considérons l'équation

$$1 - 3\beta x + 3\beta^2 x^2 + a x^3 = 0,$$

a étant un paramètre variable. On constate immédiatement que les deux racines de $1 - 3\beta x + 3\beta^2 x^2 = 0$ et les racines doubles de l'équation sont moindres que 1 en module. L'équation a d'ailleurs évidemment deux racines restant à distance finie, quel que soit a. Or, si l'on prend $a = -[\beta^3 + (\beta^2 - 1)^{3/2}]$ $(a < 0)$, l'équation correspondante a deux racines de modules supérieurs à 1.

Quand on a des renseignements supplémentaires au sujet des zéros de $P(x)$ (situés dans le cercle unité) on peut obtenir des limitations meilleures pour les zéros de la dérivée de $\frac{P(x)}{(x-a)^s}$. Supposons p ex. que $s = 1$, $n \geqslant 2$ et que les zéros de $P(x)$ soient

[1]) Ceci explique pourquoi la méthode employée pour le calcul de $\psi(n, n-1)$ ne peut pas fournir la limite exacte de module de $(n-1)$ zéros de la dérivée de la fraction $\frac{P(x)}{x-a}$.

les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité; on trouve alors facilement que la dérivée a toujours $(n-1)$ zéros dans ce cercle.

La recherche de la limite exacte de module de $2, 3, \ldots (n-1)$ zéros dans le cas général paraît difficile. L'étude précédente nous permet seulement d'affirmer que (je suppose pour fixer les idées $s=1$):

1° Ces limites sont supérieures à 1 et ne dépassent pas $1+\frac{2}{n-1}$ [1]).

2° Lorsqu'elles sont atteintes il y a deux racines de même module ou davantage, mais elles sont toutes distinctes.

3° Lorsqu'elles sont atteintes, les zéros de $P(x)$ se confondent certainement en un nombre déterminé de points, mais ce nombre ne peut pas être inférieur à 3: en supposant en effet que les zéros de $P(x)$ se confondent en deux points seulement on pourrait reprendre la méthode indiquée pp. 659—660. L'application du théorème de Grace combiné avec le résultat de la p. 674 conduirait alors à la conclusion que la limite cherchée est égale à l'unité.

9. Il est clair que les propositions du § 8 doivent pouvoir s'étendre, du moins en partie, lorsqu'on remplace le pôle unique a d'ordre s par s pôles. On peut s'attendre p. ex. à ce qu'il existe des énoncés du genre suivant: „Si tous les zéros du polynome $P(x)$ de degré n sont contenus dans le cercle unité et si $n \geqslant 2s$, la dérivée de la fraction $\frac{P(x)}{(x-a_1)\ldots(x-a_s)}$ a toujours s zéros dans le cercle unité".

Je me bornerai à l'étude de quelques cas très particuliers.

Si $P(x)$ est un polynome du 2e degré dont tous les zéros sont contenus dans le cercle unité, la dérivée de la fraction $\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}$ a un zéro dans ce cercle.

[1]) On pourrait ajouter qu'elles ne dépassent pas le maximum de module de tous les zéros de

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(p_i-1)}{(x-\alpha_i)^2} + \sum_{j \neq k} \frac{p_j p_k}{(x-\alpha_j)(x-\alpha_k)}$$

où $|\alpha_i| \leqslant 1$ et les p_i parcourent tout le triangle: $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = n$.

Car on peut considérer la fraction $\frac{(x-a)(x-b)}{P(x)}$ ou, en retranchant une constante, une fraction de la forme $\frac{x-c}{P(x)}$ ou enfin $\frac{P(x)}{x-c}$: on est ramené à la proposition déjà démontrée.

Si $P(x)$ est un polynome du 3e degré dont tous les zéros sont de module un, la derivée de la fraction $\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ a un zéro de module inférieur ou egal à un.

On voit comme tout à l'heure qu'il suffit de démontrer la même proposition relativement à la fraction $\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}$. Remarquons aussi que la limite (finie) de module de *deux* zéros de la dérivée de $\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}$ est $\geqslant \sqrt[3]{2}$ (p. 671). Je dis qu'il suffira d'établir la proposition dans le cas particulier $P(x) = x^3 - 1$.

Considérons à cet effet un système de la forme:

$$(T)\quad \begin{cases} u_1u_2u_3 + A_1(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) + B_1(u_1 + u_2 + u_3) + C_1 = 0 \\ u_1u_2u_3 + A_2(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) + B_2(u_1 + u_2 + u_3) + C_2 = 0 \end{cases}$$
$$(B_1 \neq B_2).$$

Si u_1, u_2, u_3 sont les racines de l'équation:

$$(1)\qquad x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

T équivaut au système:

$$\begin{cases} -\gamma + A_1\beta - B_1\alpha + C_1 = 0 \\ -\gamma + A_2\beta - B_2\alpha + C_2 = 0. \end{cases}$$

On en conclut que la condition nécessaire et suffisante pour que les racines d'une équation du 3e degré vérifient (T) est que cette équation puisse être ramenée à la forme:

$$(2)\qquad \Phi(x,\beta) = (B_2 - B_1)(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3) =$$
$$= M(x) + \beta N(x) \equiv [(B_2 - B_1)x^3 + (C_2 - C_1)x^2 + C_1B_2 - B_1C_2] +$$
$$+ \beta[(A_2 - A_1)x^2 + (B_2 - B_1)x + B_2A_1 - A_2B_1] = 0$$

β étant arbitraire.

Si (T) a un système de solutions de la forme:

$$(3)\qquad \begin{cases} u_1 = u_2 = t \\ u_3 = \nu \end{cases} \qquad |t| < 1$$

(2) a une racine double $x = t$ pour une valeur convenable $\beta = \beta_0$ de β.

On a donc

$$M(t) + \beta_0 N(t) = 0;$$

$M'(t) + \beta_0 N'(t) = 0$ et par conséquent

$$\frac{M'(t)}{M(t)} = \frac{N'(t)}{N(t)}.$$

Il s'ensuit que l'équation:

$$(4) \qquad \frac{\Phi'_x(x,\beta)}{\Phi(x,\beta)} = \frac{N'(x)}{N(x)} = \frac{2(A_2 - A_1)x + B_2 - B_1}{(A_2 - A_1)x^2 + (B_2 - B_1)x + B_2 A_1 - A_2 B_1}$$

a la racine $x = t$ quelle que soit la valeur de β.

Réciproquement d'ailleurs, si une équation de la forme (4) a, pour une valeur $\beta = \beta_1$ de β, une racine t de module inférieur à un, il existe une valeur $\beta = \beta_2$ pour laquelle (2) a une racine double, donc (T) a un système de solutions de la forme (3).

Soit $\tilde{\omega}$ une racine cubique de l'unité et supposons établi que l'équation

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-\tilde{\omega}} + \frac{1}{x-\tilde{\omega}^2} = \frac{1}{x-a'} + \frac{1}{x-b'}$$

ait une racine de module inférieur à *un*, quelles que soient les valeurs de a' et de b'; considérons une équation de la forme:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x-u_i} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$$

où

$$|u_i| = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{et} \quad u_1 \neq u_2,\ u_1 \neq u_3,\ u_2 \neq u_3.$$

Nous pouvons choisir A_1, A_2, B_1, B_2 de manière que le 2e membre de (4) soit identique à $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$, et ensuite C_1, C_2 de manière que les u_i vérifient (T) [1]). Il existe une transformation homographique du cercle unité en lui-même: $x = \frac{p + qx'}{r + sx'}$ telle que u_1, u_2, u_3 correspondent aux $1, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}^2$. En substituant dans (T) les

[1]) On peut supposer $B_2 = B_1$ si a et b n'ont pas des valeurs particulières; cette restriction ne nuit pas à la généralité du résultat.

valeurs $u_i = \frac{p + qu_i'}{r + su_i'}$ on obtient un système (T') en u_1', u_2', u_3' de la même forme que (T). (On peut supposer que les coefficients du produit $u_1'u_2'u_3'$ dans les équations de (T') ne sont pas nuls). Il est clair que la propriété de (T) qui consiste à posséder un système de solutions de la forme (3) se conserve dans cette transformation. Les valeurs $u_1' = 1$, $u_2' = \bar{\omega}$, $u_3' = \bar{\omega}^2$ satisfont à (T'). D'après notre hypothèse l'équation analogue à (4) mais dérivant du système transformé (T') a, pour une valeur particulière de β, une racine de module inférieur à un. Il s'ensuit, d'après la remarque déjà faite, que (T') a un système de solutions de la forme (3). Il en sera donc de même avec (T). Donc, l'équation (4) aura, quel que soit β, une racine de module inférieur à un. Il résulte cependant de notre choix des constantes A_i, B_i, C_i que l'équation considérée:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x - u_i} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b}$$

est bien de la forme (4).

Il reste à établir la proposition pour $P(x) = x^3 - 1$. Nous nous servirons dans ce but de la règle de M. Cohn [1]). L'équation qui donne les zéros de la dérivée s'écrit:

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2x + a = 0.$$

Si $|a| < 1$ l'équation a évidemment une racine de module inférieur à 1; si $|a| \geqslant 1$ posons $x = qt$, q est un nombre fixe $(0 < q < 1)$ et appliquons la règle [2]).

$$\varphi(t) \equiv q^4t^4 + 2aq^3t^3 + bq^2t^2 + 2qt + a$$

a autant de zéros de module inférieur à 1 que

$$\psi(t) \equiv \bar{a}\varphi(t) - q^4\overset{+}{\varphi}(t) = 2q^3[|a|^2 - q^2]t^3 + \ldots + |a|^2 - q^8.$$

Il est clair que, si q est suffisamment voisin de 1, $\psi(t)$ a un zéro de module inférieur à un, donc $f(x)$ aura bien un zéro de module inférieur à q.

[1]) Mathematische Zeitschrift t 13 (1922). L'application de la règle de M. Cohn dès le début conduit à des calculs à peu près inextricables.

[2]) Cf. Chapitre I pp. 564—565.

Considérons maintenant une fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ et $Q(x)$ étant de degré n et s respectivement, $n > s$. Nous supposerons que tous les zéros de $P(x)$ sont contenus dans le cercle unité.

Si $Q(x) = x^s + C_{s-1}x^{s-1} + \ldots + C_0$, les zéros de la dérivée sont donnés par l'équation:

$$(5)\quad \begin{cases} x^{s-1}[xP'(x) - sP(x)] + C_{s-1}x^{s-2}[xP'(x) - (s-1)P(x)] + \\ + C_{s-2}x^{s-3}[xP'(x) - (s-2)P(x)] + \ldots + C_1[xP'(x) - P(x)] + \\ \qquad + C_0 P'(x) = 0. \end{cases}$$

La méthode de l'homographie montre immédiatement que, si $n \geqslant 2s$ tous les zéros des polynomes:

$$xP'(x) - sP(x),\quad xP'(x) - (s-1)P(x), \ldots,\quad xP'(x) - P(x),\quad P'(x)$$

sont contenus dans le cercle unité. Au contraire, si $s < n < 2s$, on trouve, en posant $P(x) = x^n - 1$, que les zéros de $xP'(x) - sP(x)$ ont leur module égal à $\sqrt[n]{\frac{s}{n-s}} > 1$.

Nous allons prouver la proposition suivante:

Si la dérivée de la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ est un polynome de degré n dont tous les zéros sont contenus dans le cercle unité et $Q(x)$ un polynome de degré $s < n$ a une racine $(s+1)$-ple, celle-ci est nécessairement plus petite ou égale à un en module [1]).

En dérivant s fois l'équation (5) et en éliminant $C_0, C_1, \ldots, C_{s-1}$ on obtient un déterminant qui est, on le voit facilement, un polynome de degré $(n-1)(s+1)$. Je dis qu'il se réduit, à une constante près, à $[P(x)]^s \cdot P^{(s+1)}(x)$; ceci établit évidemment la proposition.

Effectuons l'élimination d'une manière un peu différente.

Posons

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i),\quad Q(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - \beta_i)$$

et ensuite:

$$u_i = \frac{1}{x - \alpha_i}\ (i = 1, 2, \ldots, n),\qquad w_i = \frac{1}{x - \beta_i}\ (i = 1, 2, \ldots, s)$$

[1]) Dans le cas particulier $s = 1$ cette proposition a été déjà démontrée p. 674.

l'équation considérée pourra s'écrire:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{s} w_i = \sigma_1$$

et les équations obtenues en la dérivant:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{s} w_i^2 = \sigma_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{s+1} = \sum_{i=1}^{s} w_i^{s+1} = \sigma_{s+1}.$$

Les w_i satisfont à une équation de la forme:

$$W^s + b_1 W^{s-1} + \ldots + b_{s-1} W + b_s = 0$$

et les u_i, en vertu des égalités écrites, à une équation de la forme:

$$U^n + b_1 U^{n-1} + b_2 U^{n-2} + \ldots + b_s U^{n-s} + d_{s+1} U^{n-s-1} + \ldots + d_n = 0.$$

Les formules de Newton, appliquées successivement aux deux équations donnent:

$$\sigma_{s+1} + b_1 \sigma_s + \ldots + b_s \sigma_1 = 0$$
$$\sigma_{s+1} + b_1 \sigma_s + \ldots + b_s \sigma_1 + (s+1) d_{s+1} = 0.$$

On en tire: $d_{s+1} = 0$. Or

$$d_{s+1} = \pm \sum u_{i_1}, \ldots u_{i_{s+1}},$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons $(s+1)$ à $(s+1)$ des u_i. Ceci est égal, à un facteur près, à $\frac{P^{(s+1)}(x)}{P(x)}$.

Ainsi donc, le déterminant provenant de l'élimination des constantes de l'équation (5) était bien de la forme:

$$K . [P(x)]^r . P^{(s+1)}(x).$$

En tenant compte de son degré on voit qu'il est de la forme:

$$K . [P(x)]^s . P^{(s+1)}(x).$$

10. La méthode suivie au § 9 (pp. 677—679) semble indiquer que le lemme suivant pourra, peut-être, faciliter les démonstrations des théorèmes analogues à ceux de ce paragraphe.

Etant donnés n points distincts[1]) *sur la périphérie d'un cercle, il existe toujours une transformation conforme du cercle en lui-même telle que le centre de gravité des transformés des points considérés occupe une position arbitrairement choisie à l'intérieur du cercle.*

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les affixes des points considérés; étudions le lieu décrit par le centre de gravité ξ des transformés, lorsqu'on effectue l'ensemble de toutes les transformations possibles du cercle en lui-même. On peut supposer qu'il s'agisse du cercle unité.

1° Je dis d'abord que ce lieu est nécessairement *une couronne circulaire de centre origine et dont le plus grand rayon est égal à un*[2]).

Supposons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numérotés dans l'ordre où ils se trouvent

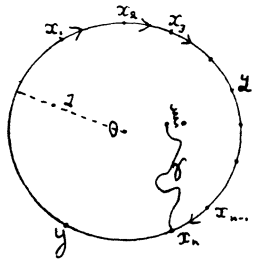

Fig. 52.

sur la circonférence et soit ξ_0 leur centre de gravité. Choisissons sur l'arc $x_n x_1$ qui ne contient pas d'autre point x_i. un point quelconque y. Il existe une suite continue des transformations hyperboliques maintenant fixes x_n et y et déplaçant x_1 vers x_n dans le sens indiqué sur la fig. 52, à une distance inférieure à ε de ce point. Pendant ce temps, les points $x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ se déplacent nécessairement dans le même sens que x_1: autrement, il existerait entre x_1 et x_{n-1} un troisième point invariant z Le centre de gravité ξ décrit une courbe continue γ qui aboutit évidemment aussi près que l'on veut du point x_n. En effectuant encore des rotations autour de l'origine on voit bien que toute la couronne comprise entre les circon-

[1]) Si les points ne sont pas distincts la proposition cesse d'être exacte.

[2]) Je dois cette remarque à M. Nikodym.

férences $|x| = |\xi_0|$ et $|x| = 1$ peut être recouverte par le centre de gravité.

Le théorème est évident pour $n = 2$ et $n = 3$; nous procéderons donc par induction, en le supposant déjà établi pour $(n - 1)$.

La couronne dont nous avons établi l'existence, comprise entre les circonférences $|x| = 1$ et $|x| = r$ $(0 \leqslant r < 1)$, est évidemment „ouverte" du côté de la circonférence $|x| = 1$.

2° Je dis *qu'elle est, au contraire, „fermée" du côté de la circonférence (ou point)* $|x| = r$ c. à. d. qu'il existe des transformations ramenant le centre de gravité ξ en des points de la périphérie $|x| = r$.

La forme générale des transformations est:

$$x' = e^{i\theta} \cdot \frac{x - a}{1 - \bar{a}x}, \quad |a| < 1, \quad \theta \text{ réel.}$$

Choisissons une suite de points: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ tendant vers un

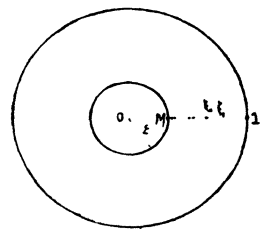

Fig. 53

point M de la circonférence $|x| = r$ et soit $x' = e^{i\theta_k} \cdot \dfrac{x - a_k}{1 - \bar{a}_k x}$ ou brièvement (a_k, θ_k) la transformation ramenant le centre de gravité en ξ_k. De la suite $(a_1, \theta_1), (a_2, \theta_2), \ldots, (a_k, \theta_k), \ldots$ on peut extraire une autre telle que a_k et θ_k tendent, pour $k = \infty$, vers des limites déterminées, soit a et θ $(|a| \leqslant 1)$.

Si $|a| < 1$. il est clair que la transformation (a, θ) ramène le centre de gravité au point M. Je dis que le cas: $|a| = 1$ ne peut pas se présenter. En effet. la proposition étant établie pour $(n - 1)$, il existe une transformation telle que $x'_1 + \ldots + x'_{n-1} = 0$, on a alors $\xi' = \dfrac{x'_n}{n}$, donc $r \leqslant \dfrac{1}{n}$. Or, si $a| = 1, x \neq a$ et que $a_k \to a$ on trouve que

$$e^{i\theta_k} \cdot \frac{x - a_k}{1 - \bar{a}_k x} \to e^{i\theta} \cdot \frac{x - a}{1 - \bar{a}x} = -a e^{i\theta}.$$

Si donc aucun des points x_i ne coïncide pas avec a, ξ_k tendrait évidemment pour k infini vers $-ae^{i\theta}$, en contradiction avec $r \leqslant \frac{1}{n}$.

Si l'un des points x_i coïncide avec a toutes les n expressions $e^{i\theta_k}\frac{x_i - a_k}{1 - \bar{a}_k x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tendraient pour k infini vers $-ae^{i\theta}$ sauf peut-être une seule, donc ξ_k tendrait vers un nombre de module $\geqslant 1 - \frac{2}{n}$. Ce n'est cependant pas possible car $\frac{1}{n} < 1 - \frac{2}{n}$ si $n > 3$.

3° *Faisons voir que* $r = 0$ [1]).

Supposons $r > 0$. Il existe une transformation telle que le centre de gravité des n transformés soit: $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ occupe une position M sur la périphérie $|x| = r$.

Effectuons maintenant une nouvelle transformation infinitésimale:

$$x'' = \frac{x' - da}{1 - \overline{da}\, x'}$$

ou

$$x'' = x' + (x'^2 \overline{da} - da) + \text{termes de degrés supérieurs en } da, \overline{da}.$$

On en déduit:

$$\xi'' = \xi' + \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2}{n}\overline{da} - da\right] + \text{termes de degrés supérieurs en } da, \overline{da}.$$

En posant

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2}{n} = q$$

le crochet peut s'écrire: $\left(q\frac{\overline{da}}{da} - 1\right)da$. En supposant d'abord que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i'^2\right| < n$$

c. à. d. $|q| < 1$ on constate immédiatement que si da décrit un petit cercle autour de l'origine, le crochet tourne aussi autour de

[1]) Dans le cas particulier $n = 4$ on peut le démontrer directement un peu plus simplement.

l'origine: en choisissant convenablement l'argument de da l'on aurait donc $|\xi''| < r$, ce qui n'est pas possible.

Il faudrait donc supposer

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i'^2\right| = n.$$

Ceci exige cependant que tous les points $x_i'^2$ soient confondus c. à. d. que tous les points x_i' soient confondus en deux positions au plus. Ce n'est pas possible car les points x_i' sont tous distincts et $n > 2$.

Notre démonstration s'étend facilement au cas où *tous les points x_i sont intérieurs au cercle unité.*

Il est d'abord évident que le lieu des ξ est une couronne circulaire; on ne voit plus immédiatement que son rayon extérieur est égal à un. Cependant la troisième et la deuxième parties de notre démonstration s'étendent immédiatement au cas actuel, dans la deuxième partie il devient même superflu de faire appel au principe de l'induction.

Le cas où *les points considérés $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont en partie à l'intérieur, en partie sur la périphérie du cercle unité* paraît un peu plus compliqué.

Si $n = 2$ le lieu des ξ est évidemment le cercle unité „troué" à l'origine.

Si $n > 2$, ce lieu est toujours une couronne circulaire; la troisième partie de notre démonstration montre que c'est nécessairement une couronne „ouverte"; enfin en faisant de nouveau appel à l'induction les raisonnements de la deuxième partie montrent que c'est un cercle ouvert: $|x| < Q$ où $1 - \frac{2}{n} \leqslant Q \leqslant 1$. Une discussion plus approfondie serait nécessaire pour compléter l'énoncé dans ce cas.

De toute façon nous obtenons l'énoncé suivant:

Si l'équation $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ $(n > 2)$ a p racines de modules moindres que R et $n - p$ racines de module R [1] *il existe toujours une transformation de la forme: $x = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}$ telle que les racines de l'équation transformée: $y^n + a_1' y^{n-1} + \ldots + a_n' = 0$ satisfont aux mêmes conditions et que $a_1' = 0$.*

[1]) Les racines sont supposées toutes distinctes.