

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

FELIKS BURDECKI

Sur l'itération d'une fonction de variable réelle

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1926

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1926__68__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1926__68__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N° d'ordre :

39

Série U

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(MENTION : SCIENCES)

par **M. Feliks BURDECKI**

professeur au lycée de WEJHEROWO (Pologne)

1^{re} THÈSE. — SUR L'ITÉRATION D'UNE FONCTION DE VARIABLE RÉELLE.

2^e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 juin 1926 devant la Commission d'Examen.

MM. M. FRÉCHET, Président

G. VALIRON, }

P. FLAMANT, } Examineurs

IMPRIMERIE BOULANGEOT
STRASBOURG - RUE DE BERNE

— 1926 —

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen M. P. MULLER, Professeur de Chimie générale
et Chimie physique.

Doyen honoraire M. E. BATAILLON.

Professeurs	MM.
	G. VALIRON Calcul différentiel et intégral.
	H. VILLAT Mécanique.
	M. FRÉCHET Analyse supérieure.
	E. ESCLANGON Astronomie.
	P. WEISS Physique générale.
	H. OLLIVIER Physique générale.
	E. ROTHÉ Physique du Globe.
	L. HACKSPILL Chimie minérale.
	H. GAULT Chimie organique.
	E. TOPSENT Zoologie et Anatomie comparée.
	C. HOUARD Botanique.
	E. TERROINE Physiologie générale.
	J. de LAPPARENT Pétrographie.
	E. CHAPUT Géologie et Paléontolo gie.
	E. CHATTON Biologie générale,
	R. THIRY Mathématiques générales.
	E. BAUER Physique mathématique.
	E. CORNEC Chimie appliquée.
	H. LABROUSIE Physique du Globe.
	G. RIBAUD Physique générale.
	F. VLÈS Physique biologique.

Secrétaire E. BONTEMS.

PREMIÈRE THÈSE

Sur l'itération d'une fonction de variable réelle.

INTRODUCTION

Le problème de l'itération des fonctions ne paraît avoir suscité l'intérêt des mathématiciens que vers la seconde moitié du siècle écoulé. Après le court mémoire de M. FARKAS publié dans le *Journal de Mathématiques* ¹⁾ toute une série de travaux de savants éminents ont discuté à des points de vue différents ce problème. Je me borne à mentionner les travaux remarquables de M. KENIGS ²⁾ et de ses élèves et récemment ceux de M. Gaston JULIA ³⁾ et FATOU ⁴⁾. Les considérations nouvelles ont été particulièrement fécondes dans le domaine de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. L'itération des fonctions a des propriétés caractéristiques qui la lient étroitement à certaines équations fonctionnelles. Le problème sera envisagé dans ce mémoire d'un autre point de vue que dans les travaux cités. Je limite mes considérations aux fonctions de variable réelle et à la recherche de définitions élémentaires des ordres non entiers d'itérées, en m'efforçant en même temps de déterminer les dérivées des fonctions nouvellement définies.

Dans le premier chapitre, je donnerai une analyse élémentaire des itérées d'ordre entier en leur donnant une forme favorable à la suite de mes explications.

Le deuxième chapitre qui contient les éléments essentiels de mon travail traite des définitions des ordres non entiers et des solutions des questions posées ci-dessus dans la mesure du possible. On se trouve en présence de trois cas principaux :

-
- 1) Jules FARKAS, Sur les fonctions itératives (*Journal de Mathématiques* 3. série T. X. 1884.)
 - 2) G. KENIGS, Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles (*Ann. de l'Ecole Normale supérieure*, 1884 et 1885.)
 - 3) G. JULIA, Sur l'itération des fonctions rationnelles (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1918.)
 - 4) P. FATOU, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1924 et 1925.)

INTRODUCTION

1° Celui où la dérivée de la fonction pour le point double de la transformation $[x \mid f(x)]$ est comprise entre 0 et 1,

2° Celui où la dérivée sus-mentionnée est nulle,

3° Celui où elle est égale à 1.

J'indique une définition spéciale à chaque cas, toutes les trois étant étroitement liées. De plus j'ai tâché de donner des formules utilisables pour le calcul numérique des fonction définies.

Le troisième chapitre contient des applications et exemples. En outre nous trouvons encore une étude de la représentation graphique de $f_x(a)$ qui est applicable à la plupart des fonctions. Enfin j'ajoute une table des fonctions itérées $\sin \frac{\pi}{2}$ qui bien que n'étant pas très précise donne une idée suffisante de cette fonction étant donné surtout que seules des tables de logarithmes à 5 décimales ont servi à l'établir. La petite table qui indique les valeurs des itérées d'ordre très élevé n'a été établie qu'avec peu de précision et seulement pour donner une idée de la distance de la représentation graphique à l'axe des x .

Il me reste à exprimer ma grande reconnaissance à M. FRÉCHET. Directeur de l'Institut de Mathématiques par les encouragements bienveillants qu'il a bien voulu m'adresser en ma qualité d'étranger non familiarisé avec les usages des universités françaises, ainsi qu'à M. VALIRON qui a eu la bonté de s'intéresser à ce travail, et particulièrement à M. FLAMANT pour l'accueil que j'ai eu près de lui, son aide constante et son inlassable bienveillance.

Je tiens également à remercier Mademoiselle BUZON, étudiante en mathématiques, M. CLERMONT, professeur au lycée Fustel de Coulanges et M. STRAUB, attaché au Parquet pour leur précieux concours à la révision du texte.



PREMIER CHAPITRE

Les fonctions itérées d'ordre entier

Définition :

Soit $F(x) = f_1 \{ f_2(x) \}$ une fonction de fonction et admettons que $f_1 \equiv f_2$.

En formant la suite des fonctions consécutives :

$F_2(x) = f[f(x)]$; $F_3(x) = f[f[f(x)]]$; $F_4(x) = f[f[f[f(x)]]]$;... nous appellerons $F_2(x)$, $F_3(x)$,... les fonctions itérées d'ordre 2, 3,... etc. Pour la brièveté et la clarté nous adopterons l'écriture :

$$F_2(x) = f_2(x); \quad F_3(x) = f_3(x); \dots \quad F_n(x) = f_n(x)$$

Evidemment en outre de ces expressions nous écrivons :

$$F_1(x) = f_1(x) = f(x) \quad \text{et} \quad F_0(x) = f_0(x) = x$$

§ 1. Dans tout ce qui suit, nous supposerons que les fonctions, dont nous étudierons les itérées possèdent une dérivée première continue dans l'intervalle considéré, sans nous astreindre à répéter cette hypothèse dans tous les énoncés.

§ 2. **De la continuité des fonctions itératives issues d'une fonction continue.** — Il résulte de la définition précédente que toutes les itérées des fonctions que nous allons considérer, sont continues : Car du théorème, qu'une fonction continue d'une fonction continue est continue, il résulte que la fonction $f_2(x)$ est aussi continue et par conséquent $f_3(x)$. En supposant que $f(x)$ est continue il en résulte de même que $f_{n+1}(x) = f \{ f_n(x) \}$ est aussi continue.

En conséquence, si l'on emploie l'induction mathématique nous pouvons dire, que les itérées d'ordre quelconque, (cet ordre est nécessairement un nombre naturel) d'une fonction continue sont aussi continues.

§ 3. Limites des fonctions itérées.

En formant, pour une certaine valeur définie de la variable x , la suite des fonctions itérées $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$, nous obtenons une suite numérique qui est convergente ou divergente.

Si pour une certaine fonction on envisage toutes les valeurs de x , trois cas seront possibles :

I. Les itérées sont divergentes pour toutes les valeurs de la variable x .

II. Les itérées sont convergentes pour toutes les valeurs de la variables x .

III. Les itérées sont convergentes pour certaines valeurs de la variables x et divergentes pour les autres.

Par exemple ; Les itérées de la fonction $f(x) = x^2 - 1$ sont divergentes pour toutes les valeurs de x . En effet, nous aurons pour toute valeur de x

$$\begin{aligned} f_1(x) &\geq +1, & f_2(x) &\geq +2, & f_3(x) &> +2^2 \\ f_4(x) &> +2^2 \dots & f_n(x) &> +2^{2^{n-2}} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Pour la fonction $f(x) = x^2$ nous aurons un intervalle, où les itérées convergent. Prenons $|x| < 1$. Les itérées seront convergentes en tendant vers 0. Pour $|x| > 1$ les itérées divergent.

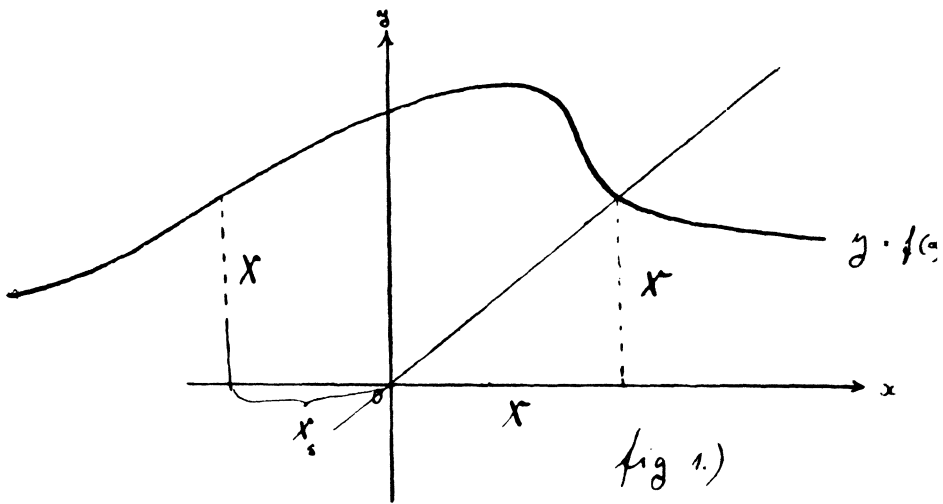
Ci-après nous allons nous occuper des itérées des fonctions du II^e et du III^e cas et nous chercherons des valeurs ou des intervalles pour lesquels les itérées sont convergentes.

A priori nous pouvons voir que les itérées sont convergentes pour tout point x , satisfaisant à l'équation $X = f(X)$. En effet, si nous avons par hypothèse

$$f_1(X) = f(X) = X \quad \text{il résulte}$$

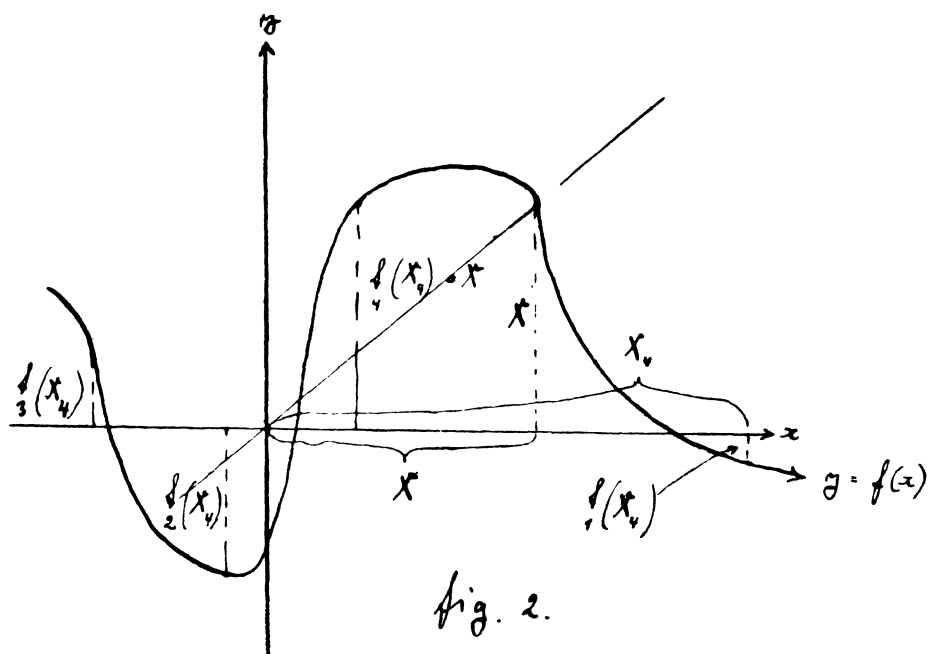
$$f_2(X) = f \{ f_1(X) \} = f(X) = X \text{ et ainsi de suite.}$$

C'est-à-dire pour le point X toutes les itérées auront la même valeur X , qui sera la limite. Un tel point X s'appelle un point invariant ou un point double de la transformation de x en $f(x)$. Il est alors possible que, connaissant une racine de l'équation $x = f(x)$ nous puissions trouver une ou plusieurs valeurs de la variable x , par exemple X_1 , pour laquelle $f(X_1) = X$. Evidemment aussi pour X_1 les itérées auront la limite X (fig. 1.)



Mais il est aussi possible, que pour une ou plusieurs autres valeurs de x par exemple X_2 nous ayons $f_2(X_2) = X$; et, plus généralement pour un nombre naturel n il est possible que nous puissions trouver des valeurs de x telles, que $f_n(X_n) = X$.

Toutes ces valeurs de x pourront être entièrement séparées par des distances finies et les itérées seront convergentes pour ces points et admettrons pour limite X (fig. 2).



Alors, signalons le cas appelé par M. Kœnigs: groupes circulaires limites. Il est possible, que pour une certaine valeur de x , que nous désignons par X_k nous aurons

$$X_k = f_k(X_k)$$

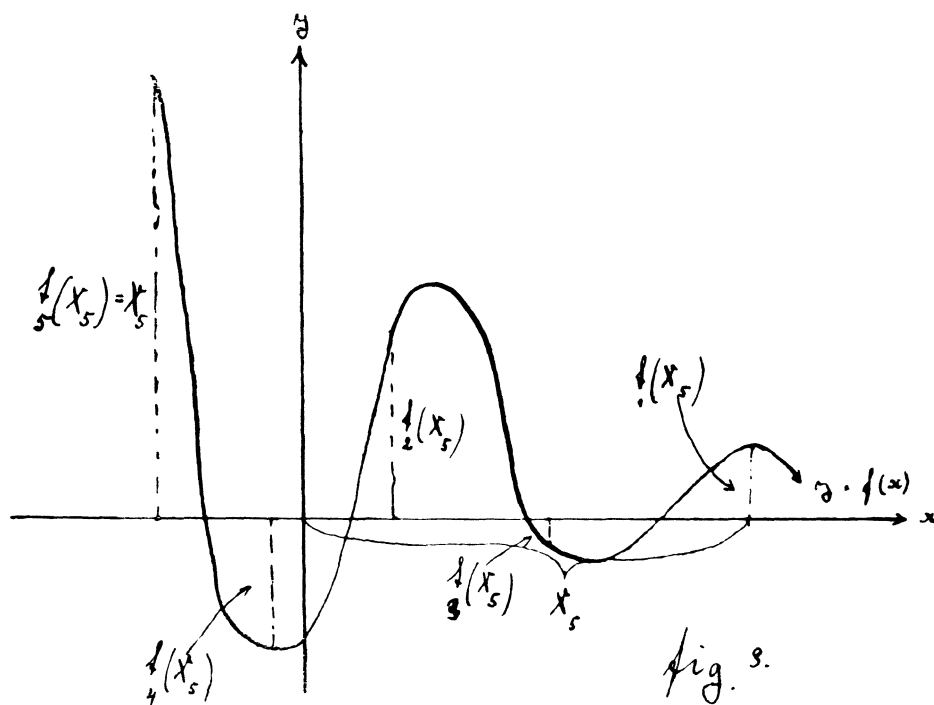
Il résulte alors que nous aurons aussi :

$$X'_k = f_1(X_k) = f_{k+1}(X_k); \quad X''_k = f_2(X_k) = f_{k+2}(X_k) = \dots$$

$$X_k = f_k(X_k) = f_{2k}(X_k) = \dots = f_{nk}(X_k);$$

$$X'_k = f_1(X_k) = f_{k+1}(X_k) = \dots = f_{nk+1}(X_k);$$

L'ensemble de ces $X_k, X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \dots, X_k^{(k-1)}$ constitue un groupe circulaire limite, (fig. 3.)



Enfin il est possible que dans un intervalle les itérées d'ordre n tendent vers un certain nombre X , si n tend vers l'infini pour toutes les valeurs de x appartenant à notre intervalle.

Si nous ne considérons pas le cas des groupes circulaires limites nous pouvons dire, qu'un tel point de convergence peut être seulement une racine de l'équation $x = f(x)$, si notre fonction f est continue.

En effet, si nous supposons $X = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, il est évident,

qu'il faut, que nous ayons aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(x) = X$. Mais nous savons, que

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), \quad \text{d'où} \quad f(X) = X$$

D'autre part, si nous définissons une fonction discontinue $\varphi(x)$ telle que $\varphi(x) \equiv f(x)$ ($f(x)$ étant continue), pour toutes valeurs de x , sauf la racine de l'équation $x = f(x)$, et $\varphi(X) = d \neq$ de la racine de $x = f(x)$, il est évident, que les itérées de $\varphi(x)$ convergent aussi, si $f(x)$ converge et la limite sera le point de discontinuité $X = f(X)$.

§ 4. **Cas de convergence.** — Convergence monotone et convergence oscillante.

Étant donné un point double X , à quelles conditions les itérées convergent-elles vers X pour toute valeur x du voisinage? Pour voir si les nombres $f_n(x) - X$ tendent vers 0, on peut comparer chacun au précédent par la formule des accroissements finis

$$f_n(x) - X = f_{n-1}(x) - f(X) = f_{n-1}(x) - X \left\{ f'(\xi) \right. \\ \left. f_{n-1}(x) \leq \xi \leq X \right. \quad (*)$$

$$\text{d'où} \quad \left| f_n(x) - X \right| = \left| f_{n-1}(x) - X \right| \left| f'(\xi) \right|$$

On voit immédiatement que si dans un intervalle $(X-h, X+h)$, la dérivée reste en valeur absolue plus petite qu'un nombre $k < 1$, $f_n(x)$ tendra vers X , quelle que soit la valeur x de l'intervalle; et que si au contraire, la dérivée reste en valeur absolue plus grande que -1 , $f_n(x)$ ne peut pas tendre vers X .

Par conséquent, si $|f'(X)| \neq 1$, X est ou n'est pas un point de convergence suivant que $|f'(X)|$ est plus petite ou plus grande que 1.

La formule des accroissements finis montre encore que $|f_n(x) - X|$ tend vers 0 en décroissant constamment; et que

*) Toutes les inégalités avec double signe doivent être lues en prenant partout le signe du haut ou partout le signe du bas.

le signe de $f_n(x) - X$ sera invariable si la dérivée est positive, on alternera si la dérivée est négative. Dans le premier cas, $f_n(x)$ tendra vers X en s'en rapprochant constamment et en restant d'un même côté, nous dirons que la convergence est **monotone**, dans le second cas, $f_n(x)$ tendra vers X en s'en rapprochant constamment mais en sautant d'un côté à l'autre, nous dirons que la convergence est **oscillante**. En excluant les cas où la dérivée a l'une des valeurs 1, -1 et 0, on a donc les résultats généraux suivants :

$f'(X) < -1$	divergence	$0 < f'(X) < +1$	convergence monotone
$-1 < f'(X) < 0$	convergence oscillante	$f'(X) > +1$	divergence

Si la dérivée s'annule pour X , mais garde un signe constant à gauche et à droite, il est évidemment facile de formuler des conclusions relatives à chaque disposition de signes.

Dans le cas simple où la fonction est croissante dans l'un des intervalles limité à X (par exemple dans l'intervalle situé à droite), on peut déterminer un intervalle de convergence plus grand que le précédent. Supposant en effet que dans un intervalle $(X, X + h)$ la fonction vérifie l'inégalité :

$$f(x) < x.$$

En tenant compte de ce fait et de la croissance de la fonction, on voit que l'on aura

$$X < f(x) < X + h$$

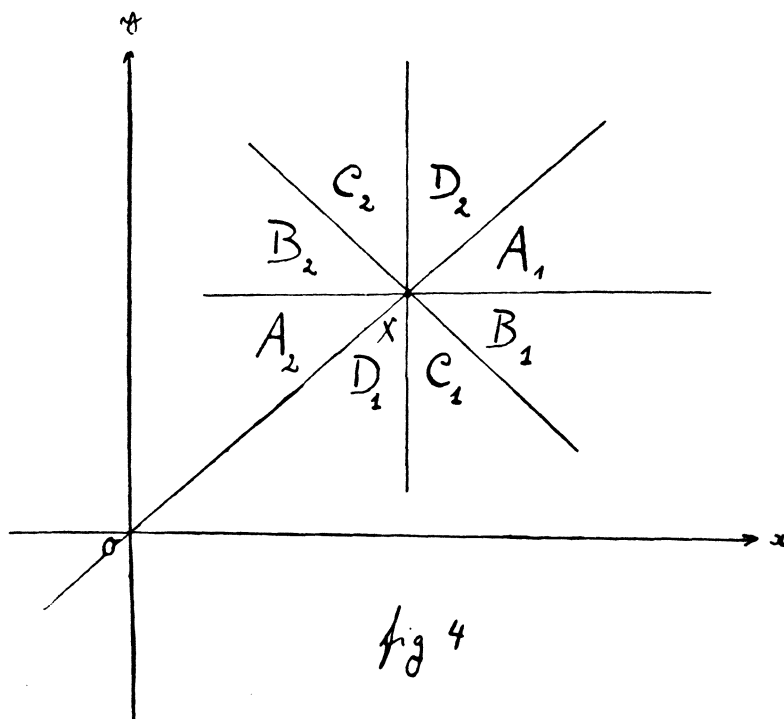
L'inégalité est donc applicable pour la valeur $f(x)$ de la variable $f_2(x) < f(x)$ et ainsi de suite. Les nombres $f_n(x)$ décroissent constamment en restant supérieurs à X ; donc ils ont une limite. Cette dernière étant une racine de l'équation

$$f(x) = x \quad \text{ne peut être que } X.$$

On verrait de même qu'en supposant réalisée l'hypothèse $f(x) > x$

les itérées $f_n(x)$ croîtront jusqu'à ce qu'elles sortent de l'intervalle.

On peut énoncer ces résultats sous une forme géométrique en considérant la bissectrice (fig. 4) des axes et les parallèles



aux axes d'abscisse ou d'ordonnée X . Tant que la courbe représentative de $f(x)$ reste dans l'un des angles A_1 et A_2 (bissectrice exclue), les itérées auront X pour point de **convergence monotone**.

Si la courbe aboutit au sommet dans l'un des angles D_1 et D_2 , X n'est pas point de convergence pour les valeurs de x supérieures ou inférieures à X . Remarquons ici, que la dérivée $f'(X)$ vérifie $-1 \leq f'(X)$.

Passons maintenant au cas d'une fonction monotone, mais décroissante. Donc la représentation graphique de la fonction est complètement comprise dans les champs B_1 , C_1 , B_2 et C_2 . Prenons le champ B_1 . Partant d'un nombre

$x > X$, nous obtenons une valeur $f(x) < X$, qu'il faut donner à l'argument de $f(x)$ pour obtenir $f_2^f(x)$, nous devons donc considérer la courbe représentative de $f(x)$ à la fois à gauche et à droite du sommet.

On peut facilement démontrer que l'ordonnée y pour le champ B_1 est

$$X > f\left(x_{B_1}\right) > 2X - x_{B_1} \quad \left(x_{B_1} \text{ étant } > X\right)$$

c'est-à-dire

$$X > f\left(x_{B_1}\right) > X - \left(x_{B_1} - X\right)$$

$$1.) \quad f\left(x_{B_1}\right) = X - \alpha\left(x_{B_1} - X\right)$$

où α satisfait aux inégalités $0 < \alpha < +1$

D'autre part nous aurons pour B_2

$$2.) \quad f\left(x_{B_2}\right) = X + \beta\left(X - x_{B_2}\right) \quad \begin{array}{l} x_{B_2} < X \\ 0 < \beta < +1 \end{array}$$

Pour α ou $\beta = 1$ nous aurons les points de la 2^e bissectrice, pour α ou $\beta = 0$ nous aurons la parallèle à l'axe des x d'ordonnée X . Prenons $x > X$; le point représentatif sera dans B_1 et $f(x)$ sera plus petite que X . Pour avoir $f_2^f(x)$ il faut substituer $f\left(x_{B_1}\right)$ à x_{B_2} dans 2.) et nous aurons:

$$f_2^f(x) = X + \beta \alpha (x - X)$$

si $\beta \alpha = 1$ nous aurons $f_2^f(x) = x$

C'est-à-dire nous aurons un groupe circulaire limite et les itérées ne tendent pas vers X . Si

$$0 < \alpha \beta < +1$$

Nous aurons en effet le cas de la convergence oscillante. C'est-à-dire pour la convergence il est nécessaire que au moins un rameau de la représentation graphique soit situé complètement à l'intérieur de B_1 ou B_2 , l'autre rameau peut être situé sur la frontière entre C_2 et B_2 ou C_1 et B_1 .

Remarquons ici, que la dérivée $f'(X)$ peut être $0 \geq f'(X) \geq -1$.

Pour C_1 et C_2 nous pouvons écrire d'une manière analogue

$$f(x_{c_1}) = X - \gamma(x_{c_1} - X) \quad \text{où} \quad \begin{cases} x_{c_1} > X \\ \gamma > +1 \end{cases}$$

et

$$f(x_{c_2}) = X + \delta(X - x_{c_2}) \quad \text{où} \quad \begin{cases} x_{c_2} < X \\ \delta > +1 \end{cases}$$

C'est-à-dire nous aurons

$$f_2(x) = X + \gamma \delta (x - X)$$

Le produit $\gamma \delta$ sera ici plus grand que 1. Donc il résulte que les itérées seront divergentes. Si nous supposons enfin $\gamma < +1$ et $\delta > +1$ nous aurons les champs B_1 et C_1 et le produit $\gamma \delta$ peut être plus petit que 1. D'où il résulte, que, pour le cas, où la représentation graphique de notre fonction est située dans le champ B_2 et dans une partie de C_2 telle qu'elle est bornée par les droites $y = X$ et $y = X + \delta(x - X)$ $\delta > +1$, nous pouvons chaque fois désigner une droite $y = X - \gamma(x - X)$, $\gamma \delta < 1$ telles que les itérées seront convergentes si à droite de X la représentation graphique de $f(x)$ est située entre les droites $y = x$ et $x = X - \gamma(x - X)$.

Remarquons que pour les champs C_1 et C_2 la dérivée $f'(X)$ peut être $-1 \geq f'(X)$.

Si la représentation graphique de $f(x)$ coupe la bissectrice en un point autre que X , le point commun sera un point double et en général il faut faire les mêmes discussions pour X_2 que nous avons faites pour X_1 .

Tout ce que nous avons démontré ci-dessus est déduit pour les fonctions monotones, mais il sera souvent possible d'appliquer notre discussion pour les fonctions non monotones.

En ce cas nous pouvons définir facilement l'intervalle de convergence si $0 < f'(X) < +1$, au voisinage du point (X, X) la courbe représentative de $f(x)$ est située dans les champs A_1 et A_2 . C'est-à-dire la partie de notre courbe jusqu'au passage des bornes des champs A_1 et A_2 , constitue l'intervalle de convergence monotone.

Le problème sera plus compliqué si $f'(X) = -1$. Pour ce cas décrivons une droite, qui coupe notre courbe représentative. (fig 5) au point X et en un autre point à

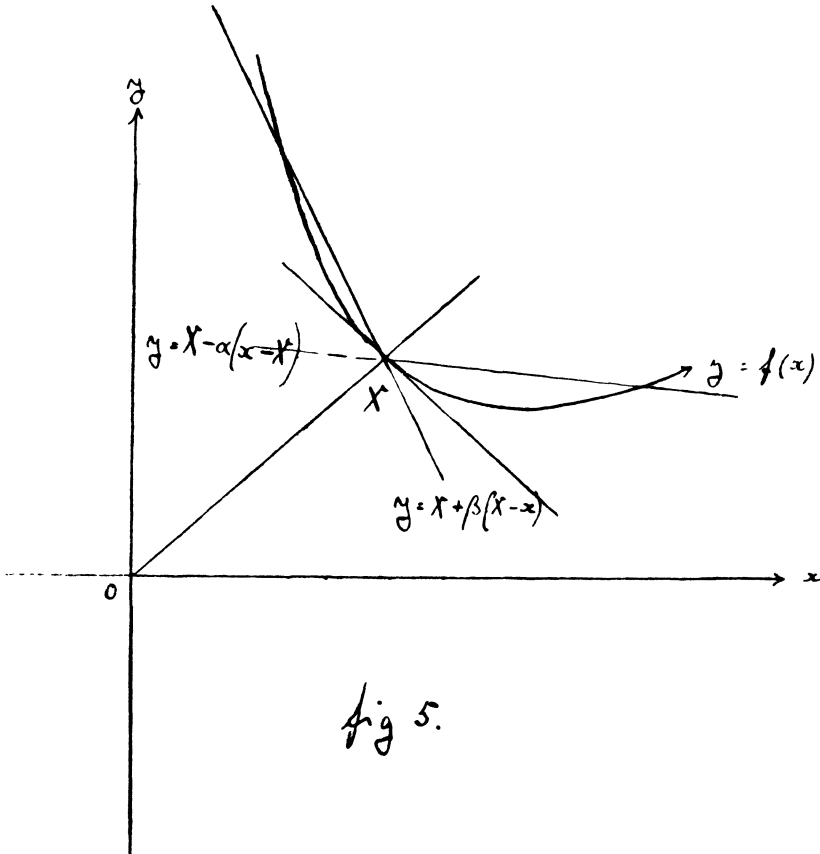


fig 5.

gauche de X. Supposons que le coefficient angulaire de cette corde soit plus petit que $f'(X)$; d'où il résulte que le point de la section de la droite avec notre courbe représentative sera définie par l'ordonnée y et l'abscisse x satisfaisant à deux équations

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= X + \beta(X - x) \end{aligned}$$

où β sera $> |f'(X)|$.

De ces équations nous pouvons tirer y comme fonction de X et β :

$$x = F(X, \beta)$$

Du côté droit de X nous pouvons de la même façon discuter un point de la section de notre courbe représentative et d'une autre droite

$$y = X - x(x - X)$$

où x sera plus petit que $|f'(X)|$. Si nous substituons ici pour la variable indépendante x la valeur trouvée ci-dessus pour y nous aurons pour l'ordonnée $f(y)$

$f\{F(X, \beta), \beta\} = X - x(F(X, \beta) - X)$ équation
donnant une relation entre x et β de la façon:

$$\beta = \Phi(X, x), \text{ ou } x = \Psi(X, \beta)$$

Nous avons vu ci-dessus, que la convergence est possible dans le cas où $x\beta < +1$. Ainsi s'il existe une valeur B telle que pour chaque β

$$-f'(X) < \beta < B, \quad \beta \Psi(X, \beta) < +1$$

ou s'il existe un valeur A telle que pour chaque x

$$A < x < -f'(X) \quad x \Phi(X, x) < +1$$

il est alors possible, que la convergence oscillante ait lieu. Pour être sûr, il faut affirmer, que le point $\{f(x), f(x)\}$ est situé dans le champ de convergence monotone ou oscillante du point double X et seulement cette racine de l'équation $x = f(x)$ peut être le point de convergence. Prenons comme exemple la fonction

$$f(x) = x^2 - x$$

Nous avons ici deux points doubles $X_1 = 0$ et $X_2 = 2$. Pour X_1 nous aurons

$$f'(X_1) = -1 \quad \text{pour } X_2 \quad f'(X_2) = -3$$

C'est-à-dire seulement X_1 peut être un point de convergence. Nous aurons

$$y = F(X, \beta) \equiv \beta^2 - \beta$$

$$\text{et} \quad x = \Psi(X, \beta) \equiv \pm \beta(1-\beta)$$

$$\text{d'où} \quad x\beta = \beta \Psi(X, \beta) = \pm \beta^2(1-\beta) < +1$$

pour $\beta = \frac{2}{3}$, nous aurons $\pm \beta^2(1-\beta) = \pm \frac{9}{8}$, mais

pour $\frac{7}{5} \geq \beta > 1$ nous aurons constamment

$$\pm \beta^2(1-\beta) < +1, \text{ d'où prenons } B = \frac{7}{5}$$

il résulte alors que nous aurons à coup sûr un intervalle de convergence pour toutes les valeurs de x

$$-\frac{2}{5} \leq x \leq +\frac{14}{25}$$

En se basant sur l'existence de cet intervalle, on peut facilement démontrer, que les itérées convergent aussi pour toutes les valeurs de x :

$$-1 < x < +2.$$

§ 5. Les dérivées des fonctions itérées.

On obtient les dérivées des fonctions itérées en appliquant le théorème des dérivées des fonctions de fonctions, nous avons donc immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= f'(x) & \frac{d}{dx} f_2(x) &= f' \{f_1(x)\} \cdot f'(x) = \\ & & &= f' \{f_1(x)\} \cdot f' \{f_0(x)\} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} f_3(x) = f' \{f_2(x)\} \cdot f' \{f_1(x)\} \cdot f' \{f_0(x)\}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \prod_{i=1}^{i=n} f' \{f_{n-i}(x)\} = \prod_{i=0}^{i=n-1} f' \{f_i(x)\}$$

Pour définir une dérivée seconde, il faut appliquer à notre produit la loi de formation des dérivées d'un produit, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\frac{d^2}{dx^2} f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} f''_{n-k}(x) \prod_{i=1}^{i=n-k} f'_{n-k-i}(x) \prod_{i=1, i \neq k}^{i=n} f'_{n-i}(x)$$

Exemple :

Prenons la fonction $f(x) = \frac{1}{4} x^2 - x - \frac{7}{4}$.

Nous avons deux points doubles $X_1 = -1$ et $X_2 = 7$. Il résulte du § précédent que le point -1 n'a pas un voisinage convergent, parce que nous aurons $f'(7) = -\frac{5}{2}$.

Il existe seulement un point distinct $x = -3$, pour lequel $f(-3) = 7$ et par suite $f(-3) = -7$.

Pour le point $X_1 = -1$, $f'(1) = -\frac{1}{2}$. Alors nous voyons, qu'en ce cas, nous avons dans le voisinage le cas de convergence oscillante et les formules du § 4 nous donnent l'intervalle de convergence

$$-3 < x < -7.$$

En effet à droite de X_1 la courbe est située dans les champs A_1 et B_1 , pour toutes les valeurs de $x < -7$. A gauche de X_1 la représentation graphique est située dans le champ B_2 et dans une partie de C_2 , elle est bornée par la droite $y = 1 - \frac{6}{4}(1-x)$, qui coupe $f(x)$ au point $(-3, -7)$. Donc il faut que le rameau de $f(x)$ relatif à $x > -1$ coupe seulement des droites

$y = 1 - \varepsilon(x-1)$ où $\varepsilon < \frac{4}{6}$, en effet nous aurons pour notre fonction

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \left\{ 1 - x - 2 \right\} \text{ pour } x > -1 \quad \varepsilon < -\frac{6}{4}.$$

Comme nous voyons, nous aurons pour toutes les x

$$-3 < x < -7$$

$$\lim f(x) = -1$$

Pour toutes ces valeurs nous aurons aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{i=n} f'_{n-i}(x) = 0, \text{ parce que}$$

pour chaque valeur de x , qui n'est pas infiniment voisine des bornes de notre intervalle nous pouvons trouver un nombre N assez grand, mais fini tel, que le produit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=N}^{i=n-1} f'_i(x) \text{ se composera seulement de}$$

facteurs $|f'_i f(x)| < k < 1$. Si n tend vers l'infini la valeur de notre produit tendra vers 0. Par conséquent nous aurons aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=N}^{i=n-1} f'_i \cdot f_i(x) = \underbrace{\prod_{i=0}^{i=N-1} f'_i \cdot f_i(x)}_{\text{fini}} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=N}^{i=n-1} f'_i \cdot f_i(x)}_0 = 0$$

Donc la représentation graphique de la fonction

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad f(x) = \frac{1}{4} x^2 - x - \frac{7}{4}$$

sera une droite parallèle à l'axe des x d'ordonnée $-\frac{7}{4}$ 1

pour les valeurs $-3 < x < -\frac{7}{4}$

pour les valeurs $x = -3$ et $x = -\frac{7}{4}$ $F(x) = -\frac{7}{4}$

et pour toutes les autres valeurs de x plus grandes que $-\frac{7}{4}$, ou plus petites que -3 $F(x) = -\infty$ *. Nous voyons, que la fonction $F(x)$ n'est pas continue autour des points $-\frac{7}{4}$ et -3 .

Cet exemple montre que les itérées d'une fonction continue étant continues, il n'en est pas de même de leur limite pour n infini.

§ 7. Fonctions itérées d'ordres négatifs.

Prenons une fonction monotone $f(x)$ telle qu'elle ne prenne qu'une fois chaque valeur, et supposons qu'entre deux valeurs de la variable x il existe la relation

$$f_n(x_1) = f_v(x_2), \text{ nous pouvons écrire}$$

$$f_{n-1}\{f(x_1)\} = f_{v-1}\{f(x_2)\}$$

Il résulte de notre hypothèse que

$$f_{n-1}(x_1) = f_{v-1}(x_2)$$

En répétant cette opération, on voit qu'il est permis sans que l'égalité cesse d'avoir lieu de diminuer les deux indices (ordres d'itération) d'un même nombre entier.

Si $v \geq n$ on arrive à

$$x_1 = f_{v-n}(x_2)$$

Si $v < n$, on arrive à

$$f_{n-v}(x_1) = x_2$$

*) On peut facilement démontrer que nous aurons pour

$$\varepsilon > 0, f_n(7 + \varepsilon) > 7 + \left(\frac{10}{4}\right)^n \varepsilon$$

On peut convenir d'écrire encore la relation précédente, où figure l'indice entier négatif. Cela revient à adopter pour définition du symbole f où p est un nombre naturel, l'équivalence des deux relations

$$x_1 = \overset{f}{\underset{-p}{}} (x_2) \quad \text{et} \quad x_2 = \overset{f}{\underset{p}{}} (x_1)$$

En termes plus élémentaires on peut dire que f est la fonction inverse de $\overset{f}{\underset{p}{}} (x)$.

Nous avons vu ci-dessus qu'on peut écrire pour les ordres positifs

$$\overset{f}{\underset{p}{}} \left\{ \overset{f}{\underset{q}{}} (x) \right\} = \overset{f}{\underset{p+q}{}} (x) \quad \text{Supposons ici } p = -P \text{ et } q = -Q. \\ P \text{ et } Q \text{ étant négatifs.}$$

Nous aurons

$$\overset{f}{\underset{-P-Q}{}} (x) = \overset{f}{\underset{-P-Q}{}} (x) = \overset{f}{\underset{-(P+Q)}{}} (x) = y$$

d'où

$$\overset{f}{\underset{-P}{}} \overset{f}{\underset{-Q}{}} (x) = y \quad \text{et} \quad \overset{f}{\underset{-(P+Q)}{}} (x) = y$$

c'est-à-dire

$$\overset{f}{\underset{-Q}{}} (x) = \overset{f}{\underset{P}{}} (y)$$

$$x = \overset{f}{\underset{P+Q}{}} (y)$$

$$x = \overset{f}{\underset{Q}{}} \left\{ \overset{f}{\underset{P}{}} (y) \right\} \quad \text{et enfin}$$

$$\overset{f}{\underset{Q}{}} \left\{ \overset{f}{\underset{P}{}} (y) \right\} = \overset{f}{\underset{P+Q}{}} (y)$$

D'où il résulte, que la règle de l'addition des ordres d'itération est la même pour les ordres négatifs et positifs. Il reste à démontrer, qu'elle est aussi la même si P négatif et q positif, c'est-à-dire que

$$\overset{f}{\underset{P}{}} \overset{f}{\underset{q}{}} (x) = \overset{f}{\underset{P+q}{}} (x) \quad \text{Posons}$$

$$\overset{f}{\underset{P}{}} \overset{f}{\underset{q}{}} (x) = z; \quad \overset{f}{\underset{P+q}{}} (x) = v \quad \text{d'où}$$

$$x = \overset{f}{\underset{-P-q}{}} (v) = \overset{f}{\underset{-q-P}{}} (z) \quad \text{Supposons } -P - q > 0, \text{ alors}$$

$$\overset{f}{\underset{q}{}} (x) = \overset{f}{\underset{-P}{}} (v) = \overset{f}{\underset{-P}{}} (z), \text{ mais } -P > 0 \text{ d'où } v = z$$

$$\overset{f}{\underset{P}{}} \overset{f}{\underset{q}{}} (x) = \overset{f}{\underset{P+q}{}} (x)$$

Si $-P - q < 0$ notre démonstration ne change pas beaucoup.



DEUXIÈME CHAPITRE

Les fonctions itérées d'ordre non entier

§ 1. Ci-dessus nous avons démontré, qu'il est très désirable, au point de vue de l'harmonie de la théorie, d'élargir la conception des ordres positifs des itérées c'est-à-dire de déduire la conception des ordres négatifs. Nous avons fait les mêmes discussions, qu'on a fait pour introduire en analyse mathématique les exposants négatifs. Donc il est aussi une nécessité logique de chercher de bonnes définitions des ordres non entiers des itérées. C'est le problème que nous allons résoudre.

En premier lieu il faut déduire quelques formules nécessaires pour notre définition.

1.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)}{f_n(x) - f_{n-1}(x)} = f'(X)$$

X étant la limite, vers laquelle tendent les itérées d'un certain intervalle des valeurs de la variable x.

Supposons

$$\left. \begin{array}{l} f_n(x) - f_{n-1}(x) = \varepsilon \\ \varepsilon \text{ tend vers } 0, \\ \text{si } n \gg \infty \end{array} \right\}$$

d'où il résulte

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \varepsilon, \quad f'_{n-1}(x) = f'_{n-1}(x) + \varepsilon$$

$$f_{n-1}(x) = f_{n-2}(x) + f'_{n-1}(x) + \theta \varepsilon$$

$$f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x) = f'_{n-1}(x) + \theta \varepsilon$$

$$\frac{f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)}{f_n(x) - f_{n-1}(x)} = f'_{n-1}(x) + \theta \varepsilon$$

Nous aurons immédiatement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)}{f_n(x) - f_{n-1}(x)} = f'(X)$$

2.) Démontrons alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - X}{f_n(x) - f_{n-1}(x)} = \frac{1}{1 - f'(X)}$$

Pour la déduction prenons n fini et considérons la différence $f_n(x) - f_{n-k}(x)$, où k est aussi fini.

$$f_n(x) - f_{n-k}(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) + f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x) + \dots + f_{n-k+1}(x) - f_{n-k}(x)$$

Mais nous pouvons écrire

$$f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) = \left\{ f_n(x) - f_{n+1}(x) \right\} f'(\xi_0)$$

$$\text{où } f_{n+1}(x) < \xi_0 < f_n(x)$$

$$f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x) = \left\{ f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) \right\} \cdot f'(\xi_1)$$

$$\text{où } f_{n+2}(x) < \xi_1 < f_{n+1}(x)$$

$$= \left\{ f_n(x) - f_{n+1}(x) \right\} \cdot f'(\xi_0) f'(\xi_1)$$

" " " "

$$f_{n+k-1}(x) - f_{n+k}(x) = \left\{ f_n(x) - f_{n+1}(x) \right\} f'(\xi_0) \cdot f'(\xi_1) \dots f'(\xi_{k-2})$$

C'est-à-dire

$$\frac{f_n(x) - f_{n+k}(x)}{f_n(x) - f_{n+1}(x)} = 1 + f'(\xi_0) + f'(\xi_0)f'(\xi_1) + \dots + f'(\xi_0)\dots f'(\xi_{k-2})$$

$$= 1 + \sum_{l=0}^{l=k-2} \prod_{i=0}^{i=1} f'(\xi_i)$$

Si k croît infiniment, nous aurons

$$\frac{f_n(x) - X}{f_n(x) - f_{n+1}(x)} = 1 + \sum_{l=0}^{l=\infty} \prod_{i=0}^{i=1} f'(\xi_i)$$

Prenons enfin n très grand, alors les ξ_i ne diffèrent pas beaucoup de X et nous pouvons écrire $f'(\xi_0) = f'(X) + \varepsilon$

En basant sur la condition de la continuité de la dérivée nous pouvons dire, que, si n tend vers l'infini, les différences successives

$$f'(\xi_1) - f'(X), f'(\xi_2) - f'(X), \dots, f'(\xi_i) - f'(X)$$

seront toutes plus petites que ε . Donc il résulte

$$1 + f'(X) + f'(X)^2 + \dots < 1 + f'(\xi_0) + f'(\xi_0)f'(\xi_1) + \dots$$

$$< 1 + \{f'(X) + \varepsilon\} + \{f'(X) + \varepsilon\}^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1 - f'(X)} < 1 + \sum_{l=0}^{l=\infty} \prod_{i=0}^{i=1} f'(\xi_i) < \frac{1}{1 - \{f'(X) + \varepsilon\}}$$

C'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - X}{f_n(x) - f_{n+1}(x)} = \frac{1}{1 - f'(X)}$$

Soit maintenant à évaluer la limite de $\frac{f_{n-1}(x) - X}{f_n(x) - X}$; en écrivant ce rapport sous la forme

$$\frac{f_{n-1}(x) - X}{f_n(x) - X} = \frac{f_{n-1}(x) - X}{f_n(x) - f_{n-2}(x)} \cdot \frac{f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)}{f_n(x) - f_{n-1}(x)} \cdot \frac{f_n(x) - f_{n-1}(x)}{f_n(x) - X}$$

et en appliquant les résultats précédents, on voit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}(x) - X}{f_n(x) - X} = f'(X)$$

Des théorèmes précédents il résulte immédiatement

$$\frac{f_{n-2}(x) - X}{f_n(x) - X} = \frac{f_{n-2}(x) - X}{f_{n-1}(x) - X} \cdot \frac{f_{n-1}(x) - X}{f_n(x) - X}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-2}(x) - X}{f_n(x) - X} = f'(X)^2 ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-3}(x) - X}{f_n(x) - X} = f'(X)^3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-u}(x) - X}{f_n(x) - X} = f'(X)^u \quad (A.)$$

Nous avons démontré la formule (A.) pour les ordres entiers des itérées; mais il est évident qu'il sera possible d'utiliser aussi cette formule u étant un nombre quelconque, réel, car nous pouvons prendre l'équation (A.) pour **définition de l'ordre d'itération u de x_2 par rapport à x_1** . Nous montrerons plus loin que x_1 et x_2 étant donnés dans l'intervalle de convergence monotone, il leur correspond toujours un nombre u .

M. Farkas a défini les fonctions itérées d'ordre fractionnaire de la manière suivante; « En supposant n et m des nombres entiers et positifs pour définition de l'itérative de degré $\frac{n}{m}$

de la fonction $f(z)$, désignée par $q_1 = z_{\frac{n}{m}}$, posons $q_m = z_n$.

Ainsi l'itérative de degré $\frac{n}{m}$ de la fonction $f(z)$ n'est autre chose que la fonction, dont l'itérative de degré m est égale à l'itérative de degré n de la fonction $f(z)$.

Cette définition n'est pas suffisante. Nous pourrions avoir pour chaque paire de valeurs de m et n plusieurs fonctions q différentes, qui admettent avec la fonction z la relation $q_m = z_n$.

Il résulte aussi de notre définition

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{n \div u} \left\{ \frac{f}{v} (x) \right\} - X}{\frac{f}{n} (x) - X} = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{n \div u} \left\{ \frac{f}{v} (x) \right\} - X}{\frac{f}{n \div u} (x) - X} \cdot \frac{\frac{f}{n \div u} (x) - X}{\frac{f}{n} (x) - X} = f'(X)^v \cdot f'(X)^u \\ & = f'(X)^{v+u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{n \div u \div v} (x) - X}{\frac{f}{n} (x) - X}, \text{ c'est-à-dire} \\ & \frac{f}{u} \left\{ \frac{f}{v} (x) \right\} = \frac{f}{u+v} (x) \end{aligned}$$

d'on résulte d'ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{f}{u} \left[\frac{f}{u} \left\{ \dots \right\} \right] &= \left\{ \frac{f}{u} \right\} (x) = \frac{f}{m \cdot u} (x) \\ \text{si } u &= \frac{n}{m} \quad \left\{ \frac{f}{\frac{n}{m}} \right\} (x) = \frac{f}{n} (x) \end{aligned}$$

Notre définition satisfait ainsi pour les ordres fractionnaires à la condition de M. Farkas.

§ 2. D'après (A.) il y a deux cas spéciaux à étudier à part, celui où $f'(X) = 1$ et celui où $f'(X) = 0$.

Prenons le cas $f'(X) = 0$, pour lequel notre définition n'aura pas valeur. Supposons ici, que notre fonction soit développable en série de Taylor et faisons tendre n vers l'infini.

$$\frac{f}{n} (x) = X + \varepsilon \quad \varepsilon \text{ étant infiniment petit}$$

Alors nous pouvons écrire

$$f_{n+1}(x) = f(X + \varepsilon) = X + f'(X) \varepsilon + \frac{1}{2} f''(X) \varepsilon^2 + \dots$$

Donc

$$f_{n+1}(x) - X = \frac{1}{2} f''(X) \varepsilon^2 + \dots$$

Divisons cela par $\{f_n(x) - X\}^\alpha$, où α est un exposant tel, que le quotient ait une limite. Nous aurons

$$\frac{f_{n+1}(x) - X}{\{f_n(x) - X\}^\alpha} = \frac{\frac{1}{2} f''(X) \varepsilon^2 + \dots}{\varepsilon^\alpha} \quad (B.)$$

Si n tend vers l'infini, il suffit de considérer seulement le premier terme du numérateur de la partie droite, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}(x) - X}{\{f_n(x) - X\}^\alpha} = \frac{1}{2} f''(X) \varepsilon^{2-\alpha}. \text{ Si } \alpha = 2, \text{ il existe en effet la limite}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}(x) - X}{\{f_n(x) - X\}^2} = \frac{1}{2} f''(X).$$

Si $f''(X)$ est aussi égal à 0 nous aurons évidemment $\alpha = 3$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}(x) - X}{\{f_n(x) - X\}^3} = \frac{1}{3!} f'''(X).$$

Donc nous voyons que nous pouvons toujours trouver une limite de l'expression B si notre fonction est développable en série de Taylor et si au moins la dérivée m -ième est $\neq 0$. Désignons cette limite par l . Alors nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+k}(x) - X}{\{f_n(x) - X\}^{\alpha^k}} &= \frac{f_{n+k}(x) - X}{\{f_{n+k-1}(x) - X\}^\alpha} \cdot \left[\frac{f_{n+k-1}(x) - X}{\{f_{n+k-2}(x) - X\}^\alpha} \right]^\alpha \\ &\dots \left[\frac{f_{n+1}(x) - X}{\{f_n(x) - X\}^\alpha} \right]^{\alpha^{k-1}} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1} \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+k}(x) - X}{\{f_n(x) - X\}^{\alpha^k}} = 1 \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} \quad (C.) \end{aligned}$$

Cette équation conduirait à une définition des ordres non entiers itérées dans le cas où toutes les dérivées de $f(x)$ jusqu'au degré $m^{\text{ième}}$ sont nulles. Remarquons, que C. se réduit à A., si $f(X) = 0$, c'est-à-dire nos deux définitions sont au fond les mêmes.

Nous pouvons facilement indiquer, que par suite de la définition adoptée, les symboles se combinent suivant la même règle que pour les ordres entiers

$$\left\{ \begin{matrix} f \\ u \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} f \\ v \end{matrix} \right\} (x) = \left\{ \begin{matrix} f \\ u+v \end{matrix} \right\} (x)$$

En effet nous aurons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \begin{matrix} f \\ n-u \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} f \\ v \end{matrix} \right\} (x) - X}{\left\{ \begin{matrix} f \\ n \end{matrix} \right\} (x) - X} \alpha^{v-u} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \begin{matrix} f \\ n-u \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} f \\ v \end{matrix} \right\} (x) - X}{\left\{ \begin{matrix} f \\ n-u \end{matrix} \right\} (x) - X} \alpha^v \\ &= \left(\frac{\left\{ \begin{matrix} f \\ n-u \end{matrix} \right\} (x) - X}{\left\{ \begin{matrix} f \\ n \end{matrix} \right\} (x) - X} \right)^{\alpha^v} = \frac{1 - \alpha^v (1 - \alpha^u)^{\alpha^v}}{1 - \alpha} = \frac{1 - \alpha^{v+u} - \alpha^v + \alpha^{v+u}}{1 - \alpha} \\ &= \frac{1 - \alpha^{u+v}}{1 - \alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \begin{matrix} f \\ n-u-v \end{matrix} \right\} (x) - X}{\left\{ \begin{matrix} f \\ n \end{matrix} \right\} (x) - X} \alpha^{v+u} \end{aligned}$$

§ 3. Pour le cas $f'(X) = 1$ supposons, que nous ayons deux valeurs x_1 et x_2 telles que

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} f \\ 0 \end{matrix} \right\} (x_1) &> \left\{ \begin{matrix} f \\ n_{1,2} \end{matrix} \right\} (x_2) > \left\{ \begin{matrix} f \\ 1 \end{matrix} \right\} (x_1), \text{ il vient aussi} \\ \left\{ \begin{matrix} f \\ 1 \end{matrix} \right\} (x_1) &> \left\{ \begin{matrix} f \\ n_{1,2}-1 \end{matrix} \right\} (x_2) > \left\{ \begin{matrix} f \\ 2 \end{matrix} \right\} (x_1) \\ &\vdots \\ \left\{ \begin{matrix} f \\ p \end{matrix} \right\} (x_1) &> \left\{ \begin{matrix} f \\ n_{1,2}-p \end{matrix} \right\} (x_2) > \left\{ \begin{matrix} f \\ p-1 \end{matrix} \right\} (x_1) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors former une suite décroissante

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} f \\ 0 \end{matrix} \right\} (x_1) &> \left\{ \begin{matrix} f \\ n_{1,2} \end{matrix} \right\} (x_2) > \left\{ \begin{matrix} f \\ 1 \end{matrix} \right\} (x_1) > \left\{ \begin{matrix} f \\ n_{1,2}-1 \end{matrix} \right\} (x_2) > \left\{ \begin{matrix} f \\ 2 \end{matrix} \right\} (x_1) > \\ &\dots > \left\{ \begin{matrix} f \\ p \end{matrix} \right\} (x_1) > \left\{ \begin{matrix} f \\ n_{1,2}-p \end{matrix} \right\} (x_2) > \left\{ \begin{matrix} f \\ p-1 \end{matrix} \right\} (x_1) > \dots \end{aligned}$$

donc les itérées particulières de x_2 sont comprises entre deux itérées de x_1 et vice-versa. Evidemment la différence $\left\{ \begin{matrix} f \\ p \end{matrix} \right\} (x_1) - \left\{ \begin{matrix} f \\ n_{1,2}-p \end{matrix} \right\} (x_2)$ sera toujours plus petite que la différence $\left\{ \begin{matrix} f \\ p \end{matrix} \right\} (x_1) - \left\{ \begin{matrix} f \\ p-1 \end{matrix} \right\} (x_1)$.

Appelons $\hat{z}_p$ le rapport de la 1^{re} différence à la 2^{me}.

$$\hat{z}_p = \frac{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{n_{1,2}|-p}(x_2)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p|-1}(x_1)}$$

Il est facile de démontrer que, si p augmente indéfiniment, $\hat{z}_p$ tend vers une limite :

$$\hat{z} = \lim_{p \rightarrow \infty} \hat{z}_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{n_{1,2}|-p}(x_2)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p|-1}(x_1)}$$

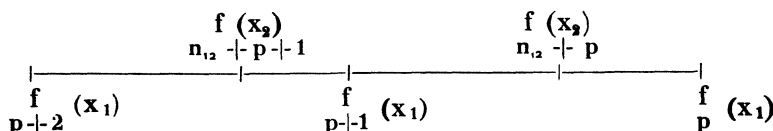


Fig. 6

Pour cela écrivons $\hat{z}_p$ sous la forme d'une série
 $\hat{z}_p = \hat{z}_0 + (\hat{z}_1 - \hat{z}_0) + (\hat{z}_2 - \hat{z}_1) + \dots + (\hat{z}_p - \hat{z}_{p-1})$ (D.)

Pour prouver que cette série est convergente on peut démontrer, que

- 1.) Chaque terme est positif, ou chaque terme est négatif.
- 2.) Il est possible de désigner des bornes, qui limitent supérieurement ou inférieurement tous les $\hat{z}_p$.
- 1.) Il est facile de démontrer que la série (D.) se compose sauf $\hat{z}_0$ seulement des termes négatifs. Il suffit de démontrer pour cela que tous les $\hat{z}_p$ sont positifs et que

$$\frac{\hat{z}_p}{\hat{z}_{p-1}} \text{ est constamment } < +1.$$

Il résulte de la définition des $\hat{z}_p$ que tous les $\hat{z}_p$ sont positifs. Nous pouvons écrire

$$\frac{\hat{z}_p}{\hat{z}_{p-1}} = \frac{\frac{\frac{f}{p-1}(x_1) - \frac{f}{n_{1,2}|-p-1}(x_2)}{\frac{f}{p-1}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)}}{\frac{\frac{f}{p-1}(x_1) - \frac{f}{p}(x_1)}{\frac{f}{p-1}(x_1) - \frac{f}{p}(x_1)}} \quad \begin{array}{l} \text{Pour la simplicité posons} \\ \frac{f}{p-1}(x_1) = a; \\ \frac{f}{n_{1,2}|-p-1}(x_2) = b; \frac{f}{p}(x_1) = c \end{array}$$

(E.) $\frac{z_p}{z_{p-1}} = \frac{\frac{f(a) - f(b)}{a - b}}{\frac{f(a) - f(b)}{a - b}}$ Remarquons, que nous aurons toujours pour une fonction croissante $f(a) > f(b) > f(c)$; $a > b > c$, si les valeurs considérées sont supérieures à X (courbe dans A_1) et des inégalités analogues et de sens contraire si les valeurs considérées sont inférieures à X (courbe dans A_2).

Pour pouvoir dire avec certitude que ce rapport est $< + 1$ il suffit de voir dans quel sens varie la fonction :

$\varphi(y) = \frac{f(a) - f(y)}{a - y}$ si y croit; nous aurons :

$$\varphi'(y) = \frac{d}{dy} \varphi(y) = \frac{-(a - y) f'(y) + \{f(a) - f(y)\}}{(a - y)^2}$$

$$f(a) - f(y) = (a - y) f'(\xi) \quad a > \xi > y.$$

$$\varphi'(y) = \frac{f'(\xi) - f'(y)}{a - y}$$

Si, pour les valeurs considérées la fonction $f'(x)$ est décroissante, on aura

$f'(\xi) < f'(y)$ et par suite $\varphi'(y)$ est négatif et la fonction $\varphi(y)$ est décroissante. Donc

$$\frac{\frac{f(a) - f(b)}{a - b}}{\frac{f(a) - f(c)}{a - c}} = \frac{z_p}{z_{p-1}} < + 1$$

Dans tous les cas, on arrivera à cette conclusion ou à la conclusion opposée; mais de même nature pour toutes les valeurs de l'entier p.

2.) Si nous savons, que les z_p constituent une suite décroissante il suffit de démontrer, qu'il existe une borne inférieure pour tous les z_p . En effet nous pouvons écrire :

$$z_0 = \frac{\frac{f_0(x_1) - f_{0-|n_{1,2}}(x_2)}{f_0(x_1) - f_1(x_1)};$$

$$z_1 = \frac{\frac{f_1(x_1) - f_{1-|n_{1,2}}(x_2)}{f_1(x_1) - f_2(x_1)}}{\frac{f_0(x_1) - f_{0-|n_{1,2}}(x_2)}{f_0(x_1) - f_1(x_1)}} = \frac{f_1(x_1) - f_{1-|n_{1,2}}(x_2)}{f_0(x_1) - f_{0-|n_{1,2}}(x_2)} \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_1)}$$

D'où il résulte

$$\varepsilon_{21} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{n_{12}+p}(x_2) - \frac{f}{p+1}(x_1)}{\frac{f}{n_{12}-p}(x_2) - \frac{f}{n_{12}-p-1}(x_2)}$$

D'autre part prenons

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{n_{12}-p}(x_2) - \frac{f}{n_{12}-p-1}(x_2)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} = \\ & \frac{\left\{ \frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1) \right\} + \left\{ \frac{f}{p-1}(x_1) - \frac{f}{n_{12}-p-1}(x_2) \right\} - \left\{ \frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{n_{12}-p}(x_2) \right\}}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} \\ & = 1 + \frac{\frac{f}{p-1}(x_1) - \frac{f}{n_{12}-p-1}(x_2)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} - \varepsilon_{12} \\ & \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{p-1}(x_1) - \frac{f}{n_{12}-p-1}(x_2)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} = \\ & \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{p-1}(x_1) - \frac{f}{n_{12}-p-1}(x_2)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} \cdot \frac{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)}{\frac{f}{p-1}(x_1) - \frac{f}{p-2}(x_1)} \\ & = \varepsilon_{12} \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$f'(X) = 1$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{n_{12}-p}(x_2) - \frac{f}{n_{12}-p-1}(x_2)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} = 1$$

D'où il résulte

$$\varepsilon_{21} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{n_{12}-p}(x_2) - \frac{f}{p-1}(x_1)}{\frac{f}{n_{12}-p}(x_2) - \frac{f}{n_{12}-p-1}(x_2)} \cdot \frac{\frac{f}{n_{12}-p}(x_2) - \frac{f}{n_{12}-p-1}(x_2)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} =$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{p-1-p}(x_2) - \frac{f}{p-1}(x_1)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} \\ = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1) - \left\{ \frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{n_{12}-1-p}(x_2) \right\}}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} = 1 - \hat{\varepsilon}_{12}$$

et $\hat{\varepsilon}_{21} = 1 - \hat{\varepsilon}_{12}$ (H.)

Remarquons ici que les $\hat{\varepsilon}$ se transforment de la même manière que les compléments fractionnaires des ordres d'itérée non entiers. Supposons, qu'il existe entre x_1 et x_2 la relation

$$x_1 = \frac{f}{\alpha_{12}}(x_2) \text{ où } \alpha_{12} \text{ est non entier.}$$

Il sera toujours possible d'écrire $\alpha_{12} = n_{12} - u_{12}$ où n_{12} est entier et $0 < u_{12} < +1$. Supposons n_{12} positif. Alors nous aurons ;

$$x_1 = \frac{f}{- \alpha_{12}}(x_1) = \frac{f}{\alpha_{21}}(x_1) \quad \alpha_{21} = n_{21} - u_{21} \text{ où } n_{21} \text{ est aussi entier et } 0 < u_{21} < +1.$$

$\frac{f}{- n_{12} - 1 - u_{12}}(x_1) = \frac{f}{n_{21} - u_{21}}(x_1)$ pour avoir la relation entre u_{12} et u_{21} il faut évidemment écrire

$$\frac{f}{(1 - n_{12}) - (1 - u_{12})}(x_1) = \frac{f}{n_{21} - u_{21}}(x_1) \quad \text{et nous aurons} \\ n_{21} = 1 - n_{12} \quad \text{comme ci-dessus (formule G.)} \\ \text{et } u_{21} = 1 - u_{12} \quad \text{» » (formule H.)}$$

Prenons alors trois valeurs de la variable x : x_1, x_2, x_3 . Soient connues les $\hat{\varepsilon}_{1,2}, \hat{\varepsilon}_{1,3}$, nous cherchons $\hat{\varepsilon}_{2,3}$ comme fonction des deux autres $\hat{\varepsilon}$. Nous aurons :

$$\hat{\varepsilon}_{12} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{n_{12}-1-p}(x_2)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} ; \hat{\varepsilon}_{1,3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{n_{13}-1-p}(x_3)}{\frac{f}{p}(x_1) - \frac{f}{p-1}(x_1)} \\ \hat{\varepsilon}_{23} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f}{p}(x_2) - \frac{f}{n_{23}-1-p}(x_3)}{\frac{f}{p}(x_2) - \frac{f}{p-1}(x_2)}$$

De la représentation graphique (fig. 7) nous voyons, que

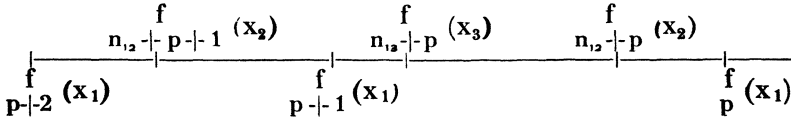


Fig. 7

nous pouvons prendre

$n_{12} - p = P$, $n_{1,3} - p = n_{2,3} - P$, $n_{23} = n_{13} - n_{12}$ (J.)
c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \hat{z}_{23} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f_{n_{12}-p}(x_2) - f_{n_{13}-p}(x_3)}{f_{n_{12}-p}(x_2) - f_{n_{12}-p-1}(x_2)} \cdot \frac{f_{n_{12}-p}(x_2) - f_{n_{12}-p-1}(x_2)}{f_p(x_1) - f_{p-1}(x_1)}}{\frac{f_p(x_1) - f_{n_{13}-p}(x_3) - \left\{ \frac{f_p(x_1) - f_{n_{12}-p}(x_2) \right\}}{f_p(x_1) - f_{p-1}(x_1)}}} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{f_p(x_1) - f_{n_{13}-p}(x_3) - \left\{ \frac{f_p(x_1) - f_{n_{12}-p}(x_2) \right\}}{f_p(x_1) - f_{p-1}(x_1)}}{\hat{z}_{23} = \hat{z}_{13} - \hat{z}_{12}} \quad (K.) \end{aligned}$$

Ici aussi nous pouvons facilement démontrer, que les $\hat{z}$ se transforment identiquement comme les compléments fractionnaires des ordres d'itération non entiers; cette circonstance nous légitime à utiliser les $\hat{z}$ pour la définition des ordres non entiers.

Supposons, qu'il existe entre deux valeurs x_1 et x_2 l'inégalité.

$$f_0(x_1) > f_{n_{12}}(x_2) > f_1(x_1) > \dots$$

si alors

$$\hat{z}_{12} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{f_p(x_1) - f_{n_{12}+p}(x_2)}{f_p(x_1) - f_{q+1}(x_1)}}$$

nous écrivons $\frac{f_{n_{12}}(x_2)}{\hat{z}_{12}} = f_{\hat{z}_{12}}(x_1)$

§ 5.) Cette équation et les conditions précédentes constituent la définition des ordres non entiers des itérées pour le cas où $f'(X) = 1$. Il semble, que cette définition est autre que la définition donnée pour le cas $f'(X) > 1$. Mais nous pouvons facilement démontrer, qu'il n'existe pas de différence essentielle entre les deux définitions.

Pour la brièveté écrivons $f'(X) \equiv \tau$. Nous aurons aussitôt pour des valeurs quelconques de u et $\hat{z}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n|-u}(x) - X}{f_n(x) - X} = T^u ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n|-u}(x) - f_{n|-v}(x)}{f_n(x) - X} = T^u - T^v$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n|-u}(x) - f_n(x)}{f_n(x) - X} = T^u - 1 \quad \text{Donc nous aurons}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n|-u}(x) - f_{n|-v}(x)}{f_{n|-u}(x) - f_n(x)} = \frac{T^u - T^v}{T^u - 1} \quad \text{Supposons } u = -1 \text{ et } v \text{ arbitraire.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}(x) - f_{n'-v}(x)}{f_{n-1}(x) - f_n(x)} = \frac{1 - T^{v-1}}{1 - T} \quad \text{Alors écrivons } n-1 = n', \quad n = n' - 1, \quad v = v' - 1$$

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{f_{n'}(x) - f_{n'-v'}(x)}{f_{n'}(x) - f_{n'-1}(x)} = \frac{1 - T^{v'}}{1 - T} \quad \text{C'est-à-dire nous pouvons écrire :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_{n|-u}(x)}{f_n(x) - f_{n-1}(x)} = \frac{1 - T^u}{1 - T} \quad (L.)$$

Si nous supposons $T = f'(X) = 1$ nous aurons

$$\lim_{T \rightarrow 1} \frac{1 - T^u}{1 - T} = u, \quad \text{donc il résulte}$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ f'(X) = 1}} \frac{f_n(x) - f_{n|-u}(x)}{f_n(x) - f_{n-1}(x)} = u \quad (M.)$$

Or, en remplaçant dans l'équation (F.) $f_{n_{12}}(x_2)$ par $f_{z_{12}}(x_1)$ nous aurons :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{f_p(x_1) - f_{p|-z_{12}}(x_1)}{f_p(x_1) - f_{p-1}(x_1)} = z_{12}$$

Si nous écrivons ici $z_{12} \equiv u$ la formule (F) se transformera en l'équation (M.).

§ 6. Pour définir les ordres d'itération non entiers dans le cas $f'(X) = 1$, nous avons démontré l'existence, d'une limite pour un certain rapport. L'équation (L.) exprime

que dans le cas $0 < f'(X) < 1$, ce même rapport a aussi une limite $\hat{z}$, qui est liée à l'ordre d'itération u par la formule

$$u = \frac{\lg [1 - (1 - \tau) \hat{z}]}{\lg \tau}$$

Soient $\hat{z}_{12}$, $\hat{z}_{13}$, $\hat{z}_{23}$ les limites des rapports analogues pour trois valeurs x_1 , x_2 et x_3 associées deux à deux; proposons nous de calculer $\hat{z}_{23}$ en fonction de $\hat{z}_{12}$ et $\hat{z}_{13}$. Nous pouvons écrire

$$\hat{z}_{12} = \frac{1 - \tau^{u_{12}}}{1 - \tau}; \quad \hat{z}_{13} = \frac{1 - \tau^{u_{13}}}{1 - \tau}; \quad \hat{z}_{23} = \frac{1 - \tau^{u_{23}}}{1 - \tau}$$

Comme nous avons vu ci-dessus, les transformations des u (précédemment nous avons écrit $u_{23} = u_{13} - u_{12}$) doivent être $u_{23} = u_{13} - u_{12}$, c'est-à-dire

$$\frac{\lg [1 - (1 - \tau) \hat{z}_{23}]}{\lg \tau} = \frac{\lg [1 - (1 - \tau) \hat{z}_{13}]}{\lg \tau} - \frac{\lg [1 - (1 - \tau) \hat{z}_{12}]}{\lg \tau}$$

$$\text{d'où} \quad \hat{z}_{23} = \frac{\hat{z}_{13} - \hat{z}_{12}}{1 - (1 - \tau) \hat{z}_{12}} \quad (\text{N.})$$

La formule (N) se réduit à (K.) dans le cas $\tau = 1$. Cette expression générale de la transformation des $\hat{z}$ pourrait être établie directement en appliquant la méthode du § 4.

De la même façon nous pouvons aussi déduire la relation générale entre $\hat{z}_{21}$ et $\hat{z}_{12}$. Nous aurons facilement

$$\hat{z}_{21} = \frac{1 - \hat{z}_{12}}{1 - (1 - \tau) \hat{z}_{12}}$$

§ 7. Les formules, que nous avons déduites ci-dessus, sont applicables pour $f'(X)$ positif, c'est-à-dire pour le cas de la convergence monotone. Si nous avons le cas de la convergence oscillante pour $f'(X) < 0$, on peut convenir d'appliquer les mêmes définitions, lorsqu'elles conservent un sens; mais pour la plupart des ordres, elles en sont dépourvues.

§ 8. Dans le premier cas [$0 < f'(X) = \tau < 1$], nous avons défini l'ordre d'itération u de x_2 par rapport à x_1 par l'équation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x_2) - X}{f_n(x_1) - X} = \tau^u \quad (\text{A.})$$

x_1 et x_2 appartenant au même intervalle de convergence monotone; pour montrer qu'il existe un ordre u tel que

$x_2 = \frac{f}{u}(x_1)$, il suffit d'établir l'existence de la limite. Pour cela, nous allons montrer que les rapports

$$s_n = \frac{\frac{f}{n}(x_2) - X}{\frac{f}{n}(x_1) - X}$$

forment une suite croissante ou une suite décroissante, et restent compris entre deux nombre fixes.

L'inégalité

$$s_{n+1} \geq s_n \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{f}{n+1}(x_2) - X}{\frac{f}{n+1}(x_1) - X} \geq \frac{\frac{f}{n}(x_2) - X}{\frac{f}{n}(x_1) - X} \quad \text{est}$$

$$\text{équivalente à} \quad \frac{\frac{f}{n+1}(x_2) - X}{\frac{f}{n}(x_2) - X} \geq \frac{\frac{f}{n+1}(x_1) - X}{\frac{f}{n}(x_1) - X}$$

Les deux membres de cette inégalité sont les valeurs pour $x = \frac{f}{n}(x_2)$ et $x = \frac{f}{n}(x_1)$ de la fonction

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - X}{x - X}$$

En raisonnant comme au paragraphe 3 pour les ε , on verrait que cette fonction est monotone si $f'(x)$ l'est; d'autre part, la fonction $f(x)$ étant croissante, l'inégalité $x_1 \leq x_2$ entraîne

$$f(x_1) \leq f(x_2), \quad \frac{f}{2}(x_1) \leq \frac{f}{2}(x_2), \quad \dots, \quad \frac{f}{n}(x_1) \leq \frac{f}{n}(x_2)$$

Ce premier point est donc établi.

D'autre part prenons la suite des itérées d'ordre naturel de x_1 , x_2 est compris entre deux termes consécutifs de cette suite

$$\frac{f}{k}(x_1) < x_2 < \frac{f}{k+1}(x_1)$$

(ou bien l'inverse à lieu).

On a donc

$$\frac{f}{n-k}(x_1) < \frac{f}{n}(x_2) < \frac{f}{n-k+1}(x_1)$$

d'où

$$\frac{f_{n-k}(x_1) - X}{f_n(x_1) - X} \geq \frac{f_n(x_2) - X}{f_n(x_1) - X} \geq \frac{f_{n-k-1}(x_1) - X}{f_n(x_1) - X}$$

Les deux membres extrêmes ont chacun une limite :
 $f'(X)^k$ et $f'(X)^{k-1}$

Par suite, le rapport du milieu reste borné dans les deux sens. Il a donc une limite comprise nécessairement entre $f'(X)^k$ et $f'(X)^{k-1}$.

§ 9. Remplaçons x_1 par a que nous laisserons fixe, et x_2 par x qui reste variable. L'ordre d'itération u et une fonction de x que nous nous proposons d'étudier. Donnons à x un accroissement Δx et soit s l'ordre d'itération de x par rapport à x . De

$$x \vdash \Delta x = f_s(x) \text{ et } x = f_u(a) \text{ il résulte}$$

$$x \vdash \Delta x = f_s[f_u(a)] = f_{u+s}(a)$$

L'accroissement de la fonction u est donc l'ordre de $x \vdash \Delta x$ relativement à x (il est par suite indépendant de a). Définissons le par l'équation (L)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x \vdash \Delta x)}{f_n(x) - f_{n-1}(x)} = \frac{1 - \tau^n}{1 - \tau}$$

Chaque rapport peut être comparé au précédent en appliquant à ses deux termes la formule des accroissements finis. On a ainsi

$$\frac{f_1(x) - f_1(x + \Delta x)}{f_1(x) - f_2(x)} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x - f(x)} \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_1)}$$

$$x \lesssim \xi_1 \lesssim x + \Delta x, \quad x \gtrsim \gamma_1 \gtrsim f(x)$$

$$\frac{f_2(x) - f_2(x + \Delta x)}{f_2(x) - f_3(x)} = \frac{f_1(x) - f_1(x + \Delta x)}{f_1(x) - f_2(x)} \cdot \frac{f'(\xi_2)}{f'(\gamma_2)}$$

$$f(x) \lesssim \xi_2 \lesssim f(x + \Delta x), \quad f(x) \gtrsim \gamma_2 \gtrsim f_2(x)$$

.....

$$\frac{f_n(x) - f_n(x + \Delta x)}{f_n(x) - f_{n-1}(x)} = \frac{f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x + \Delta x)}{f_{n-1}(x) - f_n(x)} \cdot \frac{f'(\xi_n)}{f'(\gamma_n)}$$

$$f_{n-1}(x) \leq \xi_n \leq f_{n-1}(x + \Delta x), \quad f_{n-1}(x) \geq \gamma_n \geq f_n(x)$$

Multiplions membre à membre et simplifions :

$$\frac{f_n(x) - f_n(x + \Delta x)}{f_n(x) - f_{n-1}(x)} = \frac{-\Delta x}{x - f(x)} \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_1)} \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_1)} \cdots \frac{f'(\xi_n)}{f'(\gamma_n)}$$

On peut toujours en associant si c'est nécessaire chaque numérateur avec le dénominateur précédent ou suivant, faire apparaître un produit de rapports tous plus petits que 1. Supposons pour fixer les idées $x > X$ et $f'(X)$ décroissante (courbe représentative dans l'angle A_1 et concave vers l'axe des x). On a alors $x > \gamma_1 > f(x) > \gamma_2 > \frac{f}{2}(x) > \dots$

$$f_{n-1}(x) > \gamma_n > f_n(x)$$

Si $\Delta x > 0$	on a :	$\xi_i > \gamma_i$
et si $\Delta x < 0$	on a :	$\xi_i > \gamma_{i+1}$

On laissera la formule telle qu'elle est écrite dans le premier cas, et on la mettra sous la forme :

$$\frac{f_n(x) - f_n(x + \Delta x)}{f_n(x) - f_{n+1}(x)} = \frac{-\Delta x}{x - f(x)} \cdot \frac{f'(\xi_n)}{f'(\gamma_1)} \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_2)} \cdot \frac{f'(\xi_2)}{f'(\gamma_n)} \cdots \frac{f'(\xi_{n-1})}{f'(\gamma_n)}$$

En faisant croître n indéfiniment, on arrivera toujours à une égalité de la forme

$$\frac{1 - \tau^*}{1 - \tau} = \frac{-\Delta x}{x - f(x)} \cdot K \prod \quad (P)$$

$\prod$ étant un produit infini, dont tous les facteurs sont plus petits que 1. La comparaison des signes des deux membres montre, que u est une fonction monotone de x . La comparaison des valeurs absolues montre que c'est une fonction continue. La démonstration s'applique évidemment aussi au cas où $f'(X) = 1$, car $\frac{1 - \tau^*}{1 - \tau}$ serait simplement remplacé par s .

Continuité et monotonie de la fonction $f_x(a)$

Nous venons de voir que dans la relation $y = f_x(a)$ l'ordre d'itération x est fonction continue et monotone de la fonction itérée y . Nous pouvons alors faire l'inversion de cette fonction; y considérée comme fonction de x est continue et monotone. Si nous prenons deux fonctions de cette forme relatives à deux valeurs a et b (appartenant au même intervalle de convergence monotone), il y a entre elles une relation très simple. En effet b a par rapport à a un ordre d'itération m

$$b = f_m(a) \quad \text{d'où il résulte que} \quad f_x(b) = f_{x-m}(a)$$

Les deux courbes représentatives se déduisent l'une de l'autre par une translation parallèle à l'axe des x .

§ 10. La continuité de $f_u(x)$.

Pour la continuité de $f_u(x)$ il faut démontrer que $f_u(x + \Delta x) - f_u(x) = \Delta y$ tend vers 0 si Δx tend vers 0, nous pouvons écrire :

$$x + \Delta x = f_s(x)$$

et nous avons vu que s tend vers 0 si Δx tend vers 0 donc nous aurons

$$f_{u+s}(x) = f_u(x + \Delta x) = f_u(x) + \Delta y$$

Si $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y = f_{u+s}(x) - f_u(x)$ tend aussi vers 0.

La continuité de $f_u(x)$ est démontrée.

§ 11. Pour trouver l'expression de la dérivée de $f_x(a)$ prenons la formule

$$\frac{T^x(1 - T^{\Delta x})}{1 - T} = \frac{f_{x+\Delta x}(a) - f_x(a)}{f(a) - a} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\xi_i)}{f'(\gamma_i)}$$

il résulte immédiatement

$$\frac{f_{x+\Delta x}(a) - f_x(a)}{\Delta x} = \frac{T^x}{1-T} \cdot \frac{1-T^{\Delta x}}{\Delta x} \cdot \{f(a) - a\} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)}$$

$$\frac{d}{dx} f_x(a) = \frac{-T^x}{1-T} \cdot \lg_e T \{f(a) - a\} \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)}}_{\parallel}$$

Il faut démontrer l'existence de la limite double $\parallel$. Remarquons, que les numérateurs des facteurs sont fixes et que les dénominateurs dépendent de Δx . Pour la preuve nous pouvons supposer toujours $0 < x < 1$, parce qu'il est possible dans tout autre cas de faire sortir du signe du produit un nombre fini de premiers facteurs $f'(\xi_i)$ et un nombre égal des derniers facteurs $f'(\gamma_i)$ de telle manière, que chaque γ_i soit associé avec un ξ_i , situé dans le même intervalle $(f_{i-1}(a), f_i(a))$. Si Δx tend vers 0

$$\frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)} \rightarrow \frac{f'(\gamma_i)}{f'_{x+i-1}(a)}. \quad \text{C'est-à-dire le produit infini}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'_{x+i-1}(a)} \quad \text{sera strictement défini.}$$

Evidemment nous sommes amené à penser que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)}$$

Il suffit de démontrer que ce produit infini, dont les facteurs dépendent de Δx est uniformément convergent (quelque soit Δx suffisamment petit).

La différence entre le produit infini et le produit des n premiers facteurs se met sous la forme

$$\left| \underbrace{\prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)}}_{P_n} \cdot \underbrace{\prod_{i=n+1}^{i=\infty} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)}}_{P_\infty} - 1 \right|$$

P_n sera toujours fini et en se basant sur les mêmes conditions qu'à la page 34. nous aurons :

$$\frac{f'(\gamma_1)}{f'(\xi_1)} \dots \frac{f'(\gamma_{n-1})}{f'(\xi_{n-1})} \cdot \frac{f'(\gamma_n)}{f'(\xi_n)} = P_n = \frac{f'(\gamma_2)}{f'(\xi_1)} \dots \frac{f'(\gamma_n)}{f'(\xi_{n-1})} \cdot \frac{f'(\gamma_1)}{f'(\xi_n)}$$

c'est-à-dire

$$\frac{f'(X)}{f'(\xi_1)} < P_n < \frac{f'(\gamma_1)}{f'(X)}$$

Pour P_∞ il résulte

$$\frac{f'(X)}{f'(\xi_{n+1})} < P_\infty < \frac{f'(\gamma_{n+1})}{f'(X)}$$

$$\frac{f'(X) - f'(\xi_{n+1})}{f'(\xi_{n+1})} < P_\infty - 1 < \frac{f'(\gamma_{n+1}) - f'(X)}{f'(X)}$$

Nous pouvons écrire

$$\left| \frac{f'(X) - f'(\xi_{n+1})}{f'(\xi_{n+1})} \right| = \frac{f'(\xi_{n+1}) - f'(X)}{f'(\xi_{n+1})} < \frac{f'(\xi_{n+1}) - f'(X)}{f'(X)}$$

$$f'(\gamma_{n+1}) < f'\left(\frac{f}{n}(a)\right) \quad f'(\xi_{n+1}) \leq f'\left\{\frac{f}{n}(a)\right\}$$

Donc

$$\left| P_\infty - 1 \right| < \frac{f'\left[\frac{f}{n}(a)\right] - f'(X)}{f'(X)}$$

Le 2. membre tend vers 0 puisque $\frac{f}{n}(a) \rightarrow X$; et comme il ne dépend plus de Δx , cette convergence est uniforme, et nous pouvons enfin écrire :

$$\frac{d f}{d x} (a) = \frac{-\tau^x}{1-\tau} \cdot \lg \tau \{f(a)-a\} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'_{x+i-1}(a)} \quad (Q)$$

Cette formule est démontrée pour le cas, où la dérivée $f'(x)$ est monotone au voisinage de X .

§ 12. En appliquant la formule (Q) du paragraphe précédent nous pouvons très facilement déduire la dérivée de la fonction $f_u(x)$. En effet, nous aurons aussitôt :

$$\frac{d}{dx} f_u(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_u(x + \Delta x) - f_u(x)}{\Delta x}$$

Supposons $f_s(x) = x + \Delta x$ $\Delta x = f_{u+s}(x) - f_u(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_u(x) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_{u+s}(x) - f_u(x)}{f_s(x) - f_0(x)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{f_{u+s}(x) - f_u(x)}{s} : \frac{f_s(x) - f_0(x)}{s} \right\} \\ \frac{d}{dx} f_u(x) &= \tau^u \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{i=n-1} \frac{f'_{f_i}(x)}{f'_{f_{u-i}}(x)} \end{aligned}$$

§ 13. Dans notre définition des ordres non entiers d'itérées nous avons la signe de la limite, ce qui rend notre définition inutilisable pour le calcul pratique des ordres quelconques; mais nous pouvons chercher une formule d'interpolation, qui donne la méthode pour calculer (d'une manière analogue à la fonction d'interpolation de Newton) avec grande probabilité une approximation arbitraire des itérées cherchées.

Prenons la dérivée de la fonction

$$\xi(x) = \frac{f(x) - X}{x - X}, \quad \text{nous aurons}$$

$$\xi'(x) = \frac{(x-X)f'(x) - [f(x)-X]}{(x-X)^2} = \frac{(x-X)f'(x) - [f(x)-f(X)]}{(x-X)^2}$$

$$f(x) - f(X) = (x - X) f'(\xi) \quad x \leq \xi \leq X$$

$$\xi'(x) = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{(x - X)}$$

Si nous supposons $(f')_x$ monotone et x dans le champ A_1 ou A_2 , la signe de $\varphi'(x)$ sera invariable. Donc nous pouvons écrire

$$\frac{(f_x) - \Delta x - X}{(x - \Delta x) - X} \geq \frac{f(x) - X}{x - X} \geq \frac{f(x + \Delta x) - X}{(x + \Delta x) - X}$$

ou

$$\frac{f_{N-s}(x) - X}{f_{N-1-s}(x) - X} \geq \frac{f_N(x) - X}{f_{N-1}(x) - X} \geq \frac{f_{N-s}(x) - X}{f_{N-1-s}(x) - X} \quad (R)$$

où $s > 0$ (arbitraire)

Nous pouvons toujours écrire pour u entier et N arbitraire

$$\begin{aligned} \frac{f_{N-u}(x) - X}{f_N(x) - X} = \\ \frac{f_{N-u}(x) - X}{f_{N-1-u}(x) - X} \cdot \frac{f_{N-1-u}(x) - X}{f_{N-1-u-1}(x) - X} \cdots \frac{f_{N-1}(x) - X}{f_N(x) - X} \end{aligned}$$

Il résulte de (R)

$$\left\{ \frac{f_{N-1-u-s}(x) - X}{f_{N-1-u-s}(x) - X} \right\}^u \geq \frac{f_{N+u}(x) - X}{f_N(x) - X} \geq \left\{ \frac{f_{N-1-s}(x) - X}{f_{N-s}(x) - X} \right\}^u \quad (S.)$$

Nous avons démontré la formule (S) pour u entier, mais il ne sera pas très risqué de l'utiliser aussi pour u non entier. Alors il faut prendre pour la première expression s tel, que $u - s$ est entier et pour la troisième expression il sera opportun de prendre $s = -1$.

§ 14. Nous avons vu ci-dessus, que le calcul de $\frac{f}{x}(a)$ est très difficile au point de vue pratique pour x non entier ou grand. Cherchons maintenant une fonction d'interpolation. Cette fonction doit satisfaire aux conditions :

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = X$
- 2.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n) - P(n+x)}{P(n) - P(n+1)} = \frac{1 - T^x}{1 - T} = \frac{T^n - T^{n+x}}{T^n - T^{n+1}}$

Une fonction satisfaisant à la deuxième condition, c'est $P_1(x) = T^x$. Seulement, si $T < 1$ notre fonction tend vers 0 quand x tend vers ∞ , donc pour la première condition il faut écrire :

$P_2(x) = T^x \vdash X$. Mais nous savons aussi que $\int_x^f(a)$ tend plus vite vers X si « a » est très voisin de X , pour satisfaire à cette condition écrivons :

$$P_3(x) = \vdash (a - X) T^x \vdash X$$

Enfin remarquons, que la condition 2.) est accomplie pour la fonction $P_3(x)$ pour n quelconque ; mais nous savons, qu'elle ne doit être juste que pour $n \rightarrow \infty$. Donc nous voyons, qu'il faudra modifier la fonction $P_3(x)$, pour qu'il soit possible de l'utiliser aussi pour n fini ; nous pouvons faire cela en écrivant par exemple :

$$P(x) = (a - X) \cdot \varphi(a, x) T^x \vdash X$$

$$\text{ou } P(x) = (a - X) \Psi'(a, x) T^x \vdash X$$

$\varphi(a, x)$ et $\Psi'(a, x)$ étant des fonctions telles que $\varphi(a, x)$ et $\Psi'(a, x) = \vdash 1$ pour $x = 0$ et $\varphi(a, x)$ et $\Psi'(a, x) \rightarrow \text{const}$ (dépendant de a) pour $x \rightarrow \infty$.

Il faudra trouver la forme de $\varphi(a, x)$ ou $\Psi'(a, x)$ en dépendant de la fonction « f » et il est évident, qu'il sera possible de la déterminer avec exactitude suffisante ordinairement seulement pour un certain intervalle de x .

D'autre part il sera souvent possible de trouver la limite $\varphi(a, \infty)$ ou $\Psi'(a, \infty)$, vers laquelle tendent $\varphi(a, x)$ et $\Psi'(a, x)$ si x tend vers l'infini. Nous pouvons facilement démontrer que pour une autre valeur du paramètre $b = \int_v^f(a)$ nous aurons les relations :

$$\varphi(b, \infty) = \frac{a - X}{b - X} \cdot T^0 \varphi(a, \infty)$$

ou

$$\Psi'(b, \infty) = \frac{\lg T^0 \vdash \Psi'(a, \infty) \lg(a - X)}{\lg(b - X)}$$



TROISIÈME CHAPITRE

Exemples et applications

M. KÆNIGS a traité comme exemple la fonction :

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + c}$$

Il est facile de vérifier, que nous pouvons écrire les itérées d'ordre entier sous la forme

$$f_2(x) = \sqrt{a \sqrt{ax^2 + c}^2 + c} = \sqrt{a^2 x^2 + c(a+1)}$$

.....

$$f_n(x) = \sqrt{a^n x^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} \quad (I.)$$

Evidemment les itérées convergent monotonement seulement pour $0 < a < 1$ et la limite sera égale,

$$X = \sqrt{\frac{c}{1-a}}$$

Indépendamment de toute théorie générale, il semble désirable que, si on étend la notion de fonction itérée, la formule 1. soit aussi valable pour n non entier. Constatons, que cette définition coïncide avec notre définition des ordres non entiers.

De la formule A., qui traduit notre définition il résulte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a^n \{f_u(x)\}^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} - \sqrt{\frac{c}{1-a}}}{\sqrt{a^n x^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} - \sqrt{\frac{c}{1-a}}} = a^u$$

Trouvons la limite de la première partie de notre égalité. Nous aurons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a^n \{f_u(x)\}^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} - \sqrt{\frac{c}{1-a}}}{\sqrt{a^n x^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} - \sqrt{\frac{c}{1-a}}} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a^n x^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} (f_u(x)^2 - \frac{c}{1-a})}{\sqrt{a^n f_u(x)^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} (x^2 - \frac{c}{1-a})} &= \frac{\{f_u(x)\}^2 - \frac{c}{1-a}}{x^2 - \frac{c}{1-a}} = a^u \end{aligned}$$

et en effet nous aurons enfin :

$$f_u(x) = \sqrt{a^u x^2 + \frac{c}{1-a} (1-a^u)}$$

Prenons pour deuxième exemple la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{4}$$

Nous avons ici $X = \frac{1}{2}$ et $f'(X) = -\frac{1}{2}$. Cherchons $f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)$? Alors calculons les itérées jusqu'au neuvième ordre :

$$\begin{array}{ll} f_0\left(\frac{3}{2}\right) = 1.5 & f_5\left(\frac{3}{2}\right) = 1.02650 \\ f_1\left(\frac{3}{2}\right) = 1.3125 & f_6\left(\frac{3}{2}\right) = 1.01342 \\ f_2\left(\frac{3}{2}\right) = 1.18066 & f_7\left(\frac{3}{2}\right) = 1.006759 \quad 2. \\ f_3\left(\frac{3}{2}\right) = 1.09849 & f_8\left(\frac{3}{2}\right) = 1.003391 \\ f_4\left(\frac{3}{2}\right) = 1.05167 & f_9\left(\frac{3}{2}\right) = 1.001698 \end{array}$$

Appliquons la formule S en posant $N = 8$ nous aurons

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{3391}{6745} \right\}^{\frac{1}{2}} &> \frac{f_{8\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right) - 1}{0.003391} > \left\{ \frac{1698}{3391} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ 1.002402 &> f_{8\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right) > 1.002399 \\ 1.400\,005 &> f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right) > 1.399237 \\ f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right) &= 1.39962 \quad \pm 3.8 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi appliquer une formule d'interpolation et nous aurons ici :

$$P(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\Psi\left(\frac{3}{2}, x\right) - x} - \frac{1}{2}$$

D'où nous aurons

$$\Psi\left(\frac{3}{2}, x\right) = \frac{\lg \{2^x \cdot P(x) - 1\}}{\lg \frac{1}{2}}$$

Pour $\Psi\left(\frac{3}{2}, x\right)$ il résulte du tableau 2.

	x	$2^x \left[\frac{f}{x} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \right]$
$\Psi\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{1}{\lg 0,5} \cdot \lg 0,5$	4	0.8267
	5	0.8480
$\Psi\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \text{,,} \cdot \lg 0.625$	6	0.8589
	7	0.865
$\Psi\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \text{,,} \cdot \lg 0.72264$	8	0.868
	9	0.869
$\Psi\left(\frac{3}{2}, 3\right) = \text{,,} \cdot \lg 0.7879$	x	y

Nous pouvons présumer facilement en regardant les dernières valeurs de y , que les y tendent vers une limite

En effet prenons le rapport

$$\varphi \equiv \frac{y(x+2) - y(x+1)}{y(x+1) - y(x)}$$

$$= \frac{2^{x+2} \left\{ \frac{f}{x+2}(a) - 1 \right\} - 2^{x+1} \left\{ \frac{f}{x+1}(a) - 1 \right\}}{2^{x+1} \left\{ \frac{f}{x+1}(a) - 1 \right\} - 2^x \left\{ \frac{f}{x}(a) - 1 \right\}}$$

Nous aurons

$$\frac{f}{x+1}(a) = \frac{\left\{ \frac{f}{x}(a) \right\}^2 + 3}{4}$$

d'où

$$\frac{f}{x+1}(a) - 1 = \frac{\frac{f}{x}(a)^2 - 1}{4} = \frac{\left(\frac{f}{x}(a) + 1 \right) \left(\frac{f}{x}(a) - 1 \right)}{4}$$

c'est-à-dire

$$2^{x+1} \left\{ \frac{f}{x+1}(a) - 1 \right\} - 2^x \left\{ \frac{f}{x}(a) - 1 \right\} =$$

$$2^x \frac{\left(\frac{f}{x}(a) + 1 \right) \left(\frac{f}{x}(a) - 1 \right)}{2} - 2^x \left(\frac{f}{x}(a) - 1 \right)$$

et

$$2^{x+2} \left\{ \frac{f}{x+2}(a) - 1 \right\} - 2^{x+1} \left\{ \frac{f}{x+1}(a) - 1 \right\} =$$

$$2^{x+1} \frac{\left(\frac{f}{x+1}(a) + 1 \right) \left(\frac{f}{x+1}(a) - 1 \right)}{2} - 2^{x+1} \left(\frac{f}{x+1}(a) - 1 \right)$$

d'où

$$\varphi = 2 \cdot \left\{ \frac{f_{x-1}(a) - 1}{f_x(a) - 1} \right\}^2 \quad \text{mais} \quad \frac{f_{x-1}(a) - 1}{f_x(a) - 1} \rightarrow f'(X) = \frac{1}{2} \quad \text{si } x \rightarrow \infty$$

Il résulte de cela aussitôt l'existence de la limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = Y$$

$$0,8695 < Y = \lim_{x \rightarrow \infty} y < 0,870$$

Ecrivons :

$$Y = 0,870$$

Donc il résulte, que nous pouvons écrire pour x assez grand (il suffit d'avoir $x < 15$)

$$P(x) = 0,870 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\Psi\left(\frac{3}{2}, \infty\right)} = 0,870$$

De $\Psi\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ nous pouvons facilement déduire par exemple $\Psi(1,3125, \infty)$ en appliquant la formule finale du deuxième chapitre nous aurons

$$\Psi(1,3125, \infty) = \frac{\lg\left(\frac{1}{2}\right) + \Psi\left(\frac{3}{2}, \infty\right) \lg \frac{1}{2}}{\lg 0,3125} = \frac{1 + \Psi\left(\frac{3}{2}, \infty\right) \lg 2}{1 \cdot 0,3125} \lg \frac{2}{1}$$

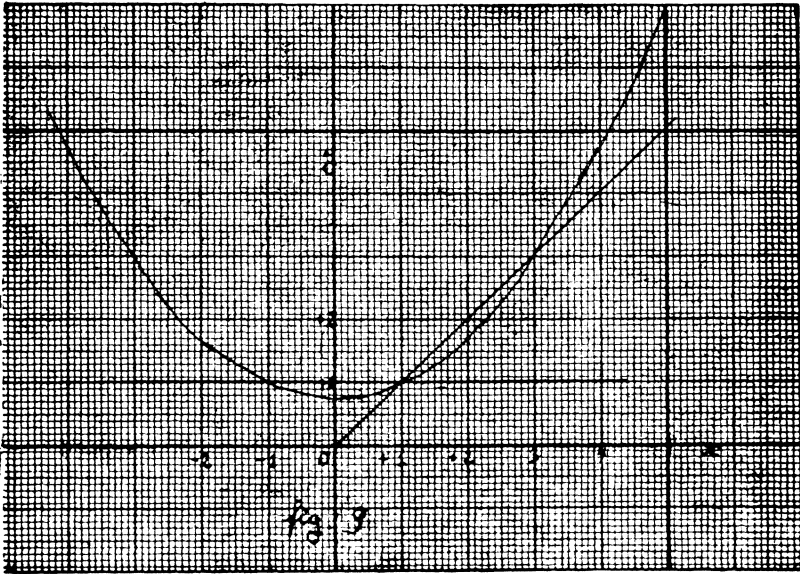
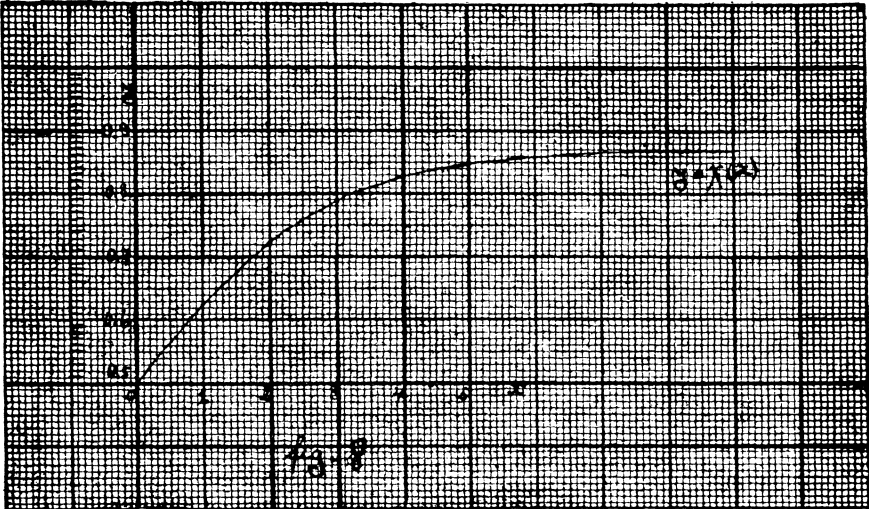
Pour les valeurs de x plus petites que 15 il sera commode, si l'exactitude exigée n'est pas grande, de faire une représentation graphique de la fonction $y = \mathcal{H}(x)$ en utilisant le tableau 2., et enfin tirer la valeur cherchée de y de la représentation graphique.

Pour $x = \frac{1}{2}$ nous trouvons par exemple $y = 0,564$ et nous aurons enfin $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,39881$, comme nous

voyons, la différence moyenne de ce résultat et de l'expression exact 3. est égale à 0,00081.

Passons maintenant à la discussion de la représentation graphique de la fonction :

$$F(x) = f_x(a) \quad f(a) = \frac{a^2 + 3}{4}$$



La fonction $f(a)$ admet deux points doubles $X_1 = +1$ et $X_2 = +3$. Le point X_2 n'est pas point de convergence.

Remarquons que la représentation graphique de $f(x)$ est symétrique par rapport à l'axe des y ; il en résulte, que les itérées d'ordre naturel formées à partir d'une valeur négative de a sont les mêmes qu'à partir de $-a$; c'est-à-dire il suffit à priori de s'occuper des valeurs positives.

Les points X_1 et X_2 divisent le rameau positif de $f(x)$ en trois parties. Pour chacune de ces parties nous aurons une autre représentation graphique de $F(x)$ suivant la valeur du nombre a .

Considérons les deux courbes $f_x(a_1)$ et $f_x(a_m)$, où a_m et a_1 sont deux différentes valeurs du paramètre a dans un même intervalle de convergence monotone. Remarquons que nos deux courbes $f_x(a_1)$ et $f_x(a_m)$ découpent sur toutes les parallèles tracées entre X_2 et X_1 de segments égaux v , où v se présente comme ordre de l'itération dans l'équation $a = f_1(a_m)$. En se basant sur le théorème de Cavalieri nous pouvons en déduire l'expression de l'aire comprise entre les deux courbes.

$$P = (X_2 - X_1) \cdot v.$$

Prenons par suite « a » plus grand que X_2 . Le rapport *)

$$\frac{f_1(a) - f_0(a)}{1 - 0} = \frac{a^2 - 4a + 3}{4} \text{ sera autant plus grand,}$$

*) A cause de commodité au lieu de la dérivée nous employons le rapport $\frac{f_1(a) - f_0(a)}{1 - 0}$, qui donne la pente de la corde joignant les points d'abscisses 0 et 1.

que a est plus éloigné du point X_2 , c'est-à-dire pour la même valeur de « x » $f_x(a)$ croît d'autant plus vite que a est plus grand.

Pour $x \rightarrow -\infty$ $F(x)$ tend vers X_2 , la courbe a pour asymptote la parallèle à l'axe des x d'ordonnée X_2 . C'est-à-dire la représentation graphique sera une courbe un peu semblable

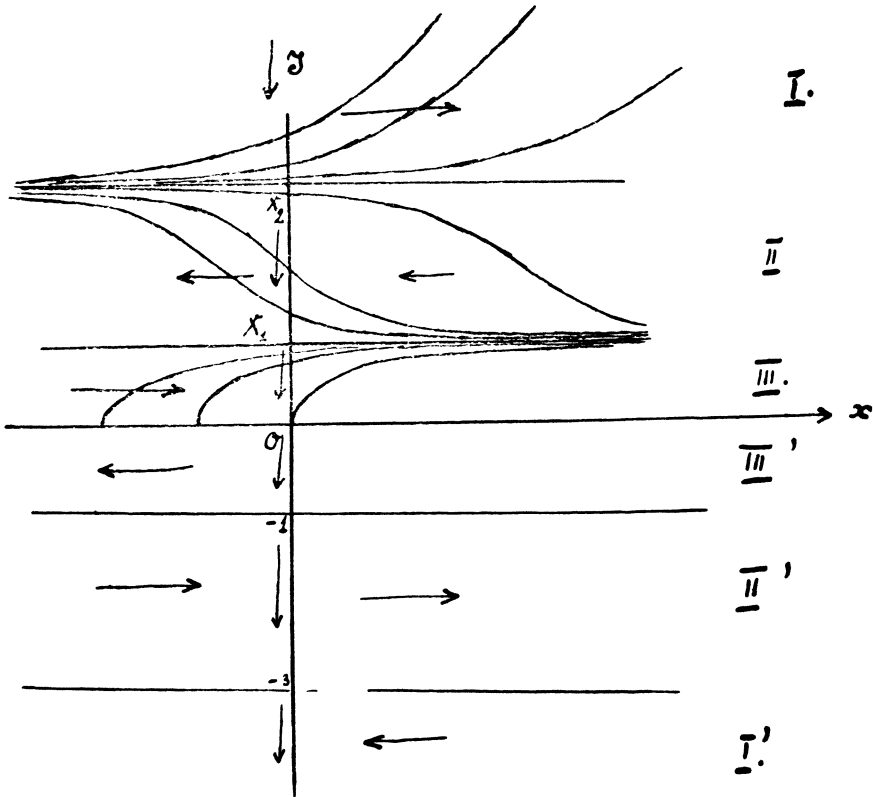


fig. 10

à une courbe exponentielle. Pour $a = X_2$ toutes les itérées décriront la droite parallèle à l'axe des x à la distance X_2 . Pour une valeur de a $X_1 < a < X_2$, comme nous savons les itérées tendent vers X_1 , quand x prend les valeurs naturelles $1, 2, 3, \dots, n$; nous aurons ici une courbe, qui aura deux asymptotes parallèles à l'axe des x à la distance X_1 et à la distance X_2 , pour x tendant vers $-\infty$ la fonction tend vers X_2 , pour x tendant vers $+\infty$ la fonction tend vers X_1 . La décroissance sera la plus rapide environs au milieu de l'intervalle X_2, X_1 , où

$$\frac{f_1(2) - f_0(2)}{1 - 0} = -\frac{1}{4}.$$

Nous voyons que la forme de $f_x(a)$ sera un peu semblable à la représentation graphique de $\arctg x$

Seulement il faut remarquer que $\arctg x$ tend vers sa limite comme $\frac{1}{x}$, et notre fonction $f_x(a)$ tend vers X_1 si $x \rightarrow +\infty$ et vers X_2 si $x \rightarrow -\infty$ à la manière d'une exponentielle; en effet, nous pouvons démontrer bien facilement, que si N est assez grand, tel que $f_N(a) = X_1 + \varepsilon$, ε étant petit

$$f_{x+N}(a) = X_1 + f'(X_1)^x \varepsilon, \text{ si } x \rightarrow +\infty$$

et si $x \rightarrow -\infty$ nous aurons

$$f_{x-N}(a) = X_2 - f'(X_2)^x \varepsilon, \quad f_{-N}(a) = X_2 - \varepsilon$$

Si notre valeur de paramètre a passe de X_2 à X_1 la courbe se déplace parallèlement à l'axe des x dans le sens négatif de $+\infty$ jusqu'à $-\infty$. Pour $a = X_1$ nous aurons la droite parallèle à l'axe des x à la distance X_1 .

Pour $X_1 > a > 0$ les itérées tendent vers X_1 en augmentant.

Pour $a = 0$ les premières itérées croissent très vite, la représentation graphique sera tangente à l'axe des y pour $a = 0$ et $x = 0$. En effet, tous les facteurs du numérateur du produit infini de la formule (Q) seront finis, mais le premier facteur du dénominateur $f'(0)$ sera nul, parce-que nous avons un minimum de $f(x)$ pour $x = 0$. Nous aurons une courbe un peu semblable à un rameau de la représentation de l'arc $\operatorname{cosec} x$ analogue comme celle

signalée ci-dessus pour $\arctg(x)$. Si $a = 0$ cette courbe occupe sa position extrême vers la droite et la fonction $f_x^f(a)$ sera définie seulement pour les valeurs positives de x . Pour $0 < a < +1$ les itérées d'ordre quelconque négatif n'existent que jusqu'à un certain ordre s dépendant de a tel que $f_x^f(a)$ tend monotonement vers 0, si x s'approche en décroissant de s .

Si a traverse la valeur zéro les itérées d'ordre positif entier seront les mêmes comme pour le paramètre $-a$. Pour $x < 0$ $f_x^f(a)$ ne sera pas définie *)

Nous pouvons faire des discussions analogues pour chaque fonction « f ».

Prenons maintenant comme exemple la fonction $\sin x$.

L'équation $\sin x = x$ n'admet que la racine 0; la courbe est bien comprise dans les champs $A_1 A_2$ et $B_1 B_2$ de la théorie générale. Donc les itérées d'ordre naturel convergent vers 0 en décroissant si $x > 0$ et en croissant si $x < 0$. Comme $f'(X) = \cos 0 = 1$, nous devons employer la troisième définition des itérées d'ordre non entier. La fonction inverse de $\sin x$ sera $\arcsin x$. L'expression générale de la dérivée d'une itérée d'ordre quelconque sera

$$\frac{d}{dx} \sin_x u = \lim_{p \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{i=p-1} \frac{\cos \sin_i x}{\cos_{u+i} x}$$

Considérons maintenant la fonction $\tau(x) = \sin_x a$. Nous n'aurons qu'une forme de la représentation graphique, c'est la forme III. ou III' de la figure (10). Si a est positif cette forme sera décroissante, tandis que pour a négatif elle sera croissante. Remarquons aussi que pour $0 < a < 1$ il existe chaque fois une solution de l'équation en τ .

*) Il est **peut-être** une conséquence logique de faire l'hypothèse que toutes les itérées d'ordres non entiers positifs sauf $f_0^f(a)$ ($a < 0$) sont aussi les mêmes que pour $-a$. C'est-à-dire la fonction $f_x^f(a)$ sera discontinue pour les valeur $a = 0$ au point de $x = 0$, si nous nous approchons du côté droit, du côté gauche la fonction $f_x^f(a)$ n'existe pas

$\sin_{-1}(a + \varepsilon) = \sin_{-1}(a) + \eta$, où ε est positif ou négatif, mais tel que $a - \varepsilon \leq -1$, n sera alors aussi positif ou négatif.

Pour $a = 1$ il existe seulement une solution pour $\varepsilon < 0$.

$$\sin_{-1}(1 - \varepsilon) = \sin_{-1}(1) - \eta = \sin_0 \frac{\pi}{2} - \eta$$

C'est-à-dire il faut signaler que a étant donné, les itérées n'existent qu'à partir d'une certaine valeur de x , p. ex. s tel que $\sin_x(a)$ tend monotonement vers $\frac{\pi}{2}$ si x s'approche en décroissant de s . Par exemple $a = 1$ les itérées n'existent que pour $x \geq -1$, pour $a = \frac{\pi}{2}$, x peut être seulement ≥ 0 .

La discussion du signe de la dérivée nous conduit aux mêmes résultats

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin_x a &= (\sin a - a) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{\cos z_i}{\cos \sin_{x+i-1} a} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin_{n+1}(a) - \sin_n a}{\prod_{i=1}^{i=n} \cos \sin_{x+i-1}(a)} \end{aligned}$$

En effet, supposons que le paramètre a soit positif, alors nous voyons que le numérateur est négatif et le dénominateur positif, par conséquent la dérivée sera un nombre négatif, c'est-à-dire notre fonction sera une fonction décroissante. En effet, prenons par exemple $a = \frac{\pi}{2}$, dans ce cas la plus grande valeur de la fonction est pour $x = 0$, notamment $\sin_0 \frac{\pi}{2} = y = \frac{\pi}{2}$; pour toutes les courbes suivantes de x la fonction diminue de plus en plus et la représentation graphique de notre courbe s'approche asymptotiquement de l'axe des x , ainsi qu'il ressort du dessin. (fig. 10)

Prenons maintenant $a = -\frac{\pi}{2}$; évidemment nous aurons la même courbe, mais elle sera symétrique de la précédente par rapport à l'axe x . Alors pour $a < 0$ notre fonction sera

croissante. Dans ce cas le numérateur de la dérivée sera positif et le dénominateur sera aussi positif, ainsi toute la dérivée sera positive. Si l'on pose $a < \frac{\pi}{2}$ la courbe subit une translation dans la direction négative de l'axe des x sans changer sa forme :

a étant la mesure en radians d'un arc de :	le point de départ de la courbe a pour abscisse x_0
$57^{\circ} 17' 41''.8$	— 1
18°	— 26.94
15°	— 40.09
12°	— 64.43

Pour former une fonction d'interpolation de $\frac{\sin}{x}(a)$ nous pouvons supposer.

$$P(x) = a^{R(a,x)}$$

J'ai calculé pour $a = \frac{\pi}{2}$ les 32 premières itérées d'ordres entiers et j'ai trouvé pour $R(a,x)$ comme une fonction bien favorable pour l'intervalle $1 \leq x \leq 32$

$$R\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = 1 - \frac{1}{x^{a-bcx}}$$

c'est-à-dire

$$P(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1 - x^{a-bcx}}{1 - x^{a-bcx}} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} a &= 2,75923 \\ b &= 0,58673 \\ c &= 0,95461 \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi former une autre fonction d'interpolation, peut-être encore plus favorable, de la manière suivante. Nous avons vu ci-dessus que la représentation graphique de $\frac{\sin}{x} a$ est un peu semblable à la courbe d'arc cosec. Prenons alors une modification de la fonction arc cosec telle, que la fonction cherchée satisfait à un nombre fini des valeurs de la variable x . Ainsi la fonction recherchée prend la forme suivante :

$$P(x) = \text{arc cosec} \left\{ \frac{x}{s} \left(\alpha - \lg_r x + \tau x \right) + 1 \right\} \quad 4.$$

En me servant de la théorie de moindres carrés de Gauss j'ai déterminé les constantes inconnues s , α , r et τ (en se

basant sur les valeurs de $x = 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32$) et en employant les tables de logarithmes à cinq décimales j'ai obtenu

$$\alpha = 0,88\,65\,59\dots \quad s = 5,30\,84\dots \quad \lg_{10} s = 6,72\,49\,6\dots$$

$$r = 1057 \times 10^7 \quad \tau = 0,00027$$

Au lieu de la formule 4 on peut aussi écrire

$$P(x) = \text{arc cosec} \left\{ \frac{x}{s}^{\alpha - \beta \lg_{10} x + \tau x} - 1 \right\} \quad 5.$$

où $\beta = 0,09976$ et $\lg_{10} \beta = 0,99896 - 2$ nr

Cette dernière formule d'interpolation appliquée entre les valeurs $x = 1$ et $x = 33$ donne une grande précision; ici l'erreur est comprise dans les limites d'inexactitude du calcul logarithmique. La formule est bien commode pour calculer les ordres non entier dans l'intervalle $(+1, +33)$.

Par exemple en utilisant les inégalités, j'ai trouvé pour

$$\sin_{32 \frac{2}{3}} \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad 0,28767 < \sin_{32 \frac{2}{3}} \left(\frac{\pi}{2} \right) < 0,28775$$

et en utilisant la formule V. j'ai obtenu :

$$\sin_{32 \frac{2}{3}} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0,28772$$

En me servant de la fonction $P(x)$ et de la formule d'interpolation de Newton j'ai calculé aussi la table des itérées des ordres non entiers $\sin_x \frac{\pi}{2}$. Je joins cette table à la fin de mon travail. Ma table n'est pas toute à fait exacte, parce que mes tables de logarithmes contiennent des petites erreurs, que j'ai aperçu pendant mes calculs.

Au moyen de cette table on peut facilement calculer x dans la relation $\sin_x \alpha = \beta$,

e prends par exemple pour α et β

$75^\circ 18' 40''$	$32^\circ 40' 28''$
---------------------	---------------------

les valeurs en radians des angles $1,3144^3$ $0,57028$

ainsi $\sin_x 75^\circ 18' 40'' = 0,57028$, par interpolation

aurons de notre tableau

$$\frac{\sin}{0.159...} \frac{\pi}{2} = 1.3144^3 \text{ et } \frac{\sin}{6.486..} \frac{\pi}{2} = 0.57028$$

d'où il résulte

$$\frac{\sin}{6,486..} 32^{\circ}40'28'' = - \frac{\sin}{0.159} 75^{\circ}18'40'' \text{ et enfin}$$

$$\frac{\sin}{6.327...} 75^{\circ}18'40'' = 0.57028 \quad x = 6.327...$$



Nous avons vu sur le premier exemple traité que les itérées intermédiaires que nous avons définies coïncident avec celles que M. KÆNIGS a introduites. Il serait intéressant de démontrer que, *en général*, les itérées d'ordre non entier définies dans le présent travail sont les mêmes que celles de M. KÆNIGS ou de M. FATOU lorsque les fonctions sont analytiques.

$$y = \frac{\sin x}{x} \frac{x}{2}$$

x	y	rad.	°	'	"
0.000	1.570796	90	0	0.0	
0.001	4985	88	48	0.0	
0.002	4142	19	0.0		
0.003	3473	87	56	0.0	
0.004	2891	36	0.0		
0.005	2414	19	35.0		
0.006	1967	4	15.0		
0.007	1538	86	49	30.0	
0.008	1176	37	5.0		
0.009	0819	24	48.0		
0.01	1.50470	12	48.0		
0.02	47768	84	39	53	
0.03	5712	83	29	13	
0.04	3982	82	29	43	
0.05	2457	81	37	18.2	
0.06	1080	80	50	0.0	
0.07	1.39825	6	49		
0.08	8664	79	26	55	
0.09	7581	78	49	41	
0.10	6562	14	40		
0.11	5601	77	41	37	
0.12	4681	10	0		
0.13	3811	76	40	4	
0.14	2972	11	14		
0.15	2167	75	43	34	
0.16	1384	16	39		
0.17	0634	74	50	53	
0.18	1.29913	26	6		
0.19	9217	2	10		
0.20	8543	73	39	0	
0.21	7886	16	24		
0.22	7247	72	54	24	
0.23	6624	33	0		
0.24	6017	12	9		
0.25	5427	71	51	51	
0.26	4845	31	52		
0.27	4283	12	33		
0.28	3736	70	53	44	
0.29	3203	35	24		
0.30	2683	17	31		
0.31	2174	0	2		
0.32	1674	69	42	49	
0.33	1181	25	54		
0.34	0698	9	16		

x	y	rad.	°	'	"
0.34	1.20698	69	9	16.0	
35	0221	68	52	54	
36	1.19755	36	54		
37	9298	21	10		
38	8847	5	41		
39	8401	67	50	20	
0.40	7971	35	33		
41	7547	20	58		
42	7129	6	35		
43	6717	66	52	25	
44	6310	38	27		
45	5909	24	40		
46	5516	11	8		
47	5127	65	57	48	
48	4744	44	38		
49	4367	31	40		
0.50	3995	18	52		
51	630	6	19		
52	270	64	53	56	
53	2914	41	41		
54	562	29	36		
55	215	17	40		
56	1872	5	54		
57	535	63	54	17	
58	201	42	48		
59	0871	31	27		
0.60	545	20	15		
61	224	9	13		
62	1.09906	62	58	18	
63	593	47	32		
64	283	36	53		
65	8976	26	21		
66	675	16	1		
67	378	5	47		
68	084	61	55	39	
69	7791	45	36		
0.70	502	35	39		
71	214	25	46		
72	6930	16	0		
73	650	6	20		
74	371	60	56	40	
75	095	47	17		
76	5824	37	57		
77	554	28	42		

$\begin{array}{c} y \\ x \end{array}$	rad.	• ' "
0.77	1.05554	60 28 42.0
78	288	19 32
79	024	10 27
0.80	4762	1 27
81	503	59 52 32
82	245	43 42
83	3991	34 57
84	738	26 17
85	489	17 41
86	241	9 11
87	2996	0 46
88	755	58 52 26
89	513	44 9
0.90	275	35 57
91	038	27 50
92	1805	19 47
93	572	11 48
94	342	3 54
95	113	57 56 1
96	0887	48 15
97	663	40 31
98	440	32 52
99	219	25 17
1.00	0000	17 45
05	0.9 8932	56 41 3
10	7903	5 41
15	6912	55 31 36
20	5956	54 58 44
25	033	27 1
30	4143	53 56 25
35	3283	26 51
40	2450	52 58 12
45	1644	30 28
50	0862	3 38
55	104	51 37 33
60	0.8 9367	12 13
65	8653	50 47 41
70	7959	23 49
75	282	0 32
80	6623	49 37 52
85	5981	15 48
90	355	48 54 16
95	4743	33 15
2.00	148	12 49

$\begin{array}{c} y \\ x \end{array}$	rad.	• ' "
2.00	0.8 4148	48 12 49.0
05	3565	47 52 46
10	2998	33 16
15	439	14 4
20	1895	46 55 21
25	362	37 3
30	0838	19 2
35	331	1 36
40	0.7 9832	45 44 26
45	344	27 40
50	8866	11 15
55	398	44 55 9
60	7938	39 21
65	488	23 31
70	048	8 45
75	6613	43 53 26
80	188 ⁵	39 12
85	5771	24 50
90	361	10 44
95	4958	42 56 54
3.00	562	43 16
05	173	29 52
10	3792	16 48
15	414	3 48
20	043	41 51 4
25	2679	38 34
30	317	26 7
35	1967	14 4
40	619	1 46
45	277	40 50 21
50	0942	38 50
55	610	27 25
60	285	16 15
65	0.6 9956	4 56
70	650	39 54 23
75	328	43 19
80	029	33 3
85	8726	22 38
90	427	12 21
95	134	2 17
4.00	7842	38 52 13
05	549	42 8
10	262	32 18
15	6985	22 34

x	y	rad.	•	•	•
4.15	0.6	6985	38	22	34
20		704	13	0	
25		429	3	40	
30		162	37	54	29
35		5897	45	22	
40		638	36	28	
45		381	27	90	
50		129	18	59	
55		4880	10	25	
60		635	2	1	
65		391	36	53	36
70		151	45	21	
75		3913	37	11	
80		677	29	3	
85		444	21	4	
90		214	13	9	
95		2984	5	15	
5.00		756	35	57	23
05		533	49	44	
10		312	42	6	
15		094	34	38	
20		1878	27	13	
25		664	19	51	
30		452	12	38	
35		241	5	19	
40		034	34	58	12
45		0829	51	8	
50		626	44	11	
55		426	37	18	
60		228	30	28	
65		032	23	47	
70	0.5	9840	17	9	
75		650	10	38	
80		460	4	6	
85		273	33	57	40
90		086	51	14	
95		901	44	52	
6.00		8718 ⁱ	38	36	
05		537	32	21	
10		357 ⁷	26	13	
15		180	20	5	
20		003 ⁹	14	3	
25		7830 ¹	8	4	
30		659	2	11	

x	y	rad.	•	•	•
6.30	0.5	7659	33	2	11
35		484	32	56	9
40		314 ⁴	50	19	
45		145 ³	44	30	
50		6980 ⁴	38	50	
55		815 ⁷	33	11	
60		652 ²	27	34	
65		492 ⁸	22	5	
70		332 ²	16	34	
75		175 ⁷	11	11	
80		018 ²	5	46	
85		5862 ⁷	0	25	
90		708	31	55	7
95		554 ²	49	50	
7.00		5403	44	38	
05		252	39	27	
10		103	34	19	
15		4955	29	14	
20		808	24	11	
25		663	19	13	
30		518	14	13	
35		375	9	17	
40		233	4	25	
45		095	30	59	37
50		3955	54	50	
55		816	50	5	
60		676	45	15	
65		539	40	33	
70		404	35	54	
75		269	31	17	
80		136	26	42	
85		004	22	9	
90		2873	17	39	
95		742	13	9	
8.00		613	8	42	
05		485	4	19	
10		358	29	59	55
15		232	55	34	
20		105	51	13	
25		1982	47	20	
30		858	42	44	
35		735	38	31	
40		614	34	20	
45		493	30	11	

x \ y	rad.	° ' "
8.45	0.5 1493	29 30 11
50	373	26 5
55	254	21 58
60	135	17 53
65	018	13 52
70	0901	9 50
75	786	5 54
80	671	1 56
85	557	28 58 2
90	443	54 8
95	331	50 16
9.00	219	46 25
05	108	42 36
10	0.4 9998	38 50
15	889	35 5
20	780	31 20
25	672	27 38
30	565	23 56
35	459	20 17
40	353	16 40
45	248	13 3
50	144	9 27
55	040	5 54
60	8937	2 21
65	834	27 58 48
70	732	55 19
75	631	51 49
80	531	48 21
85	431	44 56
90	332	41 31
95	233	38 9
1000	135	34 46
10	7941	28 7
20	753	21 58
30	560	15 0
40	373	8 34
50	187	2 11
60	005	26 55 55
70	6825	49 43
80	650	43 42
90	470	37 31
1100	296	31 31
05		
10		

x \ y	rad.	° ' "
11.0	0.4 6296	26 31 31
1	124	25 28
2	5954	19 46
3	786	14 0
4	620	8 17
5	455	2 38
6	293	25 57 4
7	132	51 31
8	4973	46 4
9	816	40 39
12.0	660	35 19
1	506	30 2
2	354	24 48
3	203	19 37
4	054	14 29
5	3907	9 27
6	761	4 25
7	616	24 59 25
8	473	54 29
9	331	49 38
13.0	191	44 48
1	052	40 2
2	2915	35 18
3	778	30 37
4	644	25 59
5	510	21 23
6	378	16 51
7	247	12 20
8	117	7 52
9	1988	3 27
14.0	861	23 59 5
1	735	54 45
2	610	50 27
3	487	46 13
4	364	4 59
5	243	37 50
6	122	33 42
7	003	29 32
8	0885	25 31
9	767	21 28
15.0	651	17 27
1	536	13 31
2	421	9 34
3	308	5 42

x \ y	rad.	° ' "
15.3	0.4 0308	23 5 42
4	495	1 48
5	084	22 57 58
6	0.3 9973	54 11
7	863	50 25
8	755	46 40
9	647	42 58
16.0	540	39 19
2	329	32 4
4	122	24 56
6	8918	17 54
8	717	11 0
17.0	519	4 13
2	324	21 57 21
4	133	50 54
6	7943	44 25
8	758	38 2
18.0	574	31 42
2	393	25 29
4	215	19 22
6	040	13 20
8	6867	7 22
19.0	696	1 31
2	528	20 55 45
4	363	50 5
6	199	44 25
8	038	38 54
20.0	5879	33 25
21	114	7 7
22	4396	19 42 27
23	3721	19 15
24	085	18 57 23
25	2485	36 46
26	1918	17 15
27	379	17 58 44
28	0866	41 5
29	378	24 19
30	0.2 9913	8 19
31	469	16 53 5
32	046	38 33
33	8641	24 38
34	251	11 13
35	7868	15 58 23
36	525	46 15

x \ y	rad.	° ' "
36	0.2 7525	15 46 15
37	179	34 21
38	6846	22 54
39	525	11 52
40	215	1 13
41	5916	14 50 56
42	628	41 0
43	348	31 23
44	077	22 5
45	4815	13 5
46	561	4 21
47	304	13 55 53
48	076	47 42
49	3844	39 44
50	619	32 0
51	401	24 29
52	189	17 10
53	2981	10 4
54	780	3 9
55	584	12 56 24
56	393	49 50
57	207	43 26
58	025	37 11
59	1848	31 5
60	674	25 7
61	505 ₃	19 18
62	340	13 38
63	178 ₅	8 4
64	020	2 37

x \ y	rad.	0
64.49	0.2 0944	12
77.32	0.1 9199	11
94. 2	7453	10
117.	5708	9
148.7	3963	8
195.	2217	7
267.	0472	6
385.6	0.0 8727	5
606.3	6981	4
107.9	5236	3
224.3	3491	2
701.4	1745	1

TABLE DES MATIÈRES

Premier chapitre	1
Généralités sur les itérées d'ordre naturel	1
Etude de la convergence vers un point double	6
Dérivées des fonctions itérées	13
Définition des ordres négatifs	15
Deuxième chapitre	17
Théorèmes préliminaires.	17
Premier cas: $0 < f'(X) < 1$	20
Deuxième cas: $f'(X) = 0$	21
Troisième cas: $f'(X) = 1$	23
Monotonie et continuité des fonctions $f_x a$ et $f_u x$	33
Dérivées de $f_x(a)$ et $f_u x$	35
Interpolation.	38
Troisième chapitre	41
Premier exemple: $\sqrt{ax^3 + c}$; expression générale des itérées	41
Deuxième exemple: $\frac{x^2 + 3}{4}$; étude du faisceau des courbes $f_x(a)$ pour les différentes valeurs de a	42
Troisième exemple: $\sin x$	48
Table des valeurs numériques $\sin \frac{\pi}{2}$	55

