PH. LE CORBEILLER

Contribution à l'étude des formes quadratiques à indéterminées conjuguées

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1926

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1926__63__1_0>

N° D'ORDRE : 1883

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. Ph. LE CORBEILLER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INGÉNIEUR DES TÉLÉGRAPHES

1re THÈSE. — Contribution a l'étude des formes quadratiques a indéterminées conjuguées.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 1926, devant la Commission d'examen.

MM. E. PICARD, *Président*.
E. CARTAN, G. JULIA, *Examinateurs*.

TOULOUSE
IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT
Librairie de l'Université.
14, RUE DES ARTS, 14 (SQUARE DU MUSÉE, TOULOUSE)

1926

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

	MM.	
Doyen	M. MOLLIARD, *Professeur*.	Physiologie végétale.
Doyen honoraire	P. APPELL.	
Professeurs honoraires	P. PUISEUX.	
	V. BOUSSINESQ.	
	A. JOANNIS	
Professeurs	Emile PICARD	Analyse supérieure et algèbre supér.
	G. KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale
	E. GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	P. JANET	Electrotechnique générale.
	F. WALLERANT	Minéralogie.
	H. ANDOYER	Astronomie.
	P. PAINLEVÉ	Mécan. analytique et mécan. céleste.
	E. HAUG	Géologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie générale.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	M. CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale.
	Emile BOREL	Calcul des probab. et Physique math.
	L. MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	H. ABRAHAM	Physique.
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	L. LAPICQUE	Physiologie.
	E. VESSIOT	Théorie des groupes et calcul des variations.
	A. COTTON	Physique générale.
	J. DRACH	Applicat. de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY	Physique.
	Charles PÉREZ	Zoologie.
	A. LEDUC	Physique théorique et physiq. céleste.
	Léon BERTRAND	Géologie appliq. et géologie régionale
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	E. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD	Botanique.
	C. MAURAIN	Physique du globe.
	P. MONTEL	Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT	Anatomie et Histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
	M. TIFFENEAU	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	N...	Géographie physique.
	E. HÉROUARD	Zoologie.
	Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	G. SAGNAC	Physique théorique et physiq. céleste.
	E. PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	V. AUGER	Chimie analytique.
	M. GUICHARD	Chimie minérale.
	A. GUILLET	Physique.
	C. MAUGUIN	Minéralogie.
	L. BLARINGHEM	Botanique.
	A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.
Secrétaire	Daniel TOMBECK.	

A mon camarade Paul Lévy

Cordial hommage

Ph. Le Corbeiller.

A LA MÉMOIRE DE MON MAITRE

GEORGES HUMBERT

PREMIERE THÈSE

CONTRIBUTION

A L'ÉTUDE

DES FORMES QUADRATIQUES A INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION ET HISTORIQUE

1. Les principes de la métrique « cayleyenne » ont été posés par Cayley dans son « *Sixth Memoir upon Quantics* » (Phil. Trans. 1859). Dans l'espace à trois dimensions, qui seul nous intéressera, on se donne *a priori* une quadrique appelée *l'absolu*. Pour définir la distance de deux points M et M', on considère les deux points A et B où la droite MM' rencontre l'absolu, et l'on pose, en appelant $\mathcal{R}$ un rapport anharmonique,

$$\text{distance } \mathrm{MM'} = \frac{1}{\mathrm{C}} \operatorname{Log} \mathcal{R}\,(\mathrm{M'MAB})$$

C étant une constante d'abord arbitraire. De la même façon, soient μ, μ' deux plans, α, β les plans passant par leur intersection et tangents à l'absolu, on pose

$$\text{angle } \mu\mu' = \frac{1}{\mathrm{C'}} \operatorname{Log} \mathcal{R}\,(\mu'\mu\alpha\beta).$$

Enfin, soient d et d' deux droites *qui se coupent*, a et b les deux tangentes à l'absolu qui sont dans le plan de ces droites et passent par leur intersection, on pose

$$\text{angle } dd' = \frac{1}{\mathrm{C''}} \operatorname{Log} \mathcal{R}\,(d'dab).$$

Le rapport anharmonique étant invariant par une transformation homographique, ces définitions (¹) font rentrer d'une manière très générale les propriétés métriques dans la géométrie projective, ce qu'avait fait pour la première fois Laguerre dans un cas particulier. (*Note sur la théorie des foyers*, Nouv. Ann. 1853). De plus, dans une transformation par polaires réciproques, la formule relative aux droites se conserve, et les formules relatives aux points et aux plans permutent entre elles.

2. Suivant le type de la quadrique prise pour *absolu*, on obtient à partir de ces définitions des géométries essentiellement différentes. Dans son mémoire *Sur la Géométrie dite non-euclidienne* (Math. Ann., 1871, et Bull. des Sc. math., *trad.*, 1871) Klein a montré que celles-ci n'étaient autres que les géométries non-euclidiennes. Si l'on prend pour absolu une quadrique réelle convexe, l'espace *intérieur* à l'absolu est identique à celui de la géométrie *hyperbolique* (Gauss, Lobatchewski, Bolyai), où toute droite réelle a à l'infini (sur l'absolu) deux points réels. Si l'on prend pour absolu une quadrique imaginaire, mais non dégénérée, on obtient la géométrie *elliptique* (Riemann), où toute droite réelle est de longueur finie (n'a aucun point à l'infini). Enfin si l'on prend pour absolu une conique imaginaire, on retrouve la géométrie euclidienne, ou *parabolique*, où toute droite réelle a à l'infini un point réel et un seul.

3. En géométrie cayleyenne comme en géométrie euclidienne, on appelle *déplacements* ou *symétries*, suivant le cas, les transformations de l'espace admettant la distance pour invariant. Ce sont donc ici toutes les transformations homographiques conservant l'absolu. Ces transformations ont été étudiées par Hermite (*Sur la théorie des formes quadratiques, premier mémoire*, Journal de Crelle, 1853) et par Cayley (*Sur la transformation d'une forme quadratique en elle-même par des substitutions linéaires*, Journal de Crelle 1855). Dans l'espace à trois dimensions, elles se rattachent d'une manière étroite aux homographies effectuées sur les génératrices rectilignes de l'absolu.

Lorsque l'absolu est une quadrique réelle convexe, on est conduit à prendre, comme paramètres définissant les génératrices (imaginaires) de l'un et de l'autre système, deux variables complexes, z et t, le point commun à deux génératrices de systèmes différents étant réel lorsque les quantités complexes z et t sont conjuguées ($z = a + bi$, $t = z_0 = a - bi$). Les déplacements réels de l'espace cayleyen hyper-

(¹) La forme de ces définitions est due à Klein (Mém. cité de 1871). Cayley employait, au lieu du *Log*, un *arccos*.

bolique, ou de la géométrie de Lobatchewski, seront donc liés aux homographies à coefficients complexes effectuées sur la variable complexe z

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

la variable t subissant la transformation conjuguée $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}$. Aussi lorsque Poincaré étudia les substitutions de ce type (*Mémoire sur les groupes Kleinéens*, Acta Math., 1883) fut-il amené à une représentation géométrique qui offrit les caractères de l'espace de Lobatchewski.

4. Les éléments analytiques qui correspondent dans la géométrie du type hyperbolique aux éléments : point, droite et plan, sont les formes d'Hermite et de Dirichlet qui vont jouer le premier rôle dans la Première Partie de ce travail.

On appelle *forme d'Hermite*, en référence au mémoire déjà cité de 1853, une forme quadratique à indéterminées conjuguées, du type

$$f = axx_0 + bx_0y + b_0xy_0 + cyy_0. \tag{2}$$

x, y, sont les variables, ou indéterminées, complexes, x_0 et y_0 leurs conjuguées; les coefficients a et c sont réels, le coefficient b complexe; nous poserons encore

$$b = b_1 + b_2 i, \qquad b_0 = b_1 - b_2 i.$$

On voit que, d'après ces conventions, une forme d'Hermite ne représente que des nombres f réels.

Le discriminant Δ de la forme f est

$$\Delta = ac - bb_0 = ac - b_1^2 - b_2^2;$$

c'est donc un nombre réel, et on peut écrire

$$af = \mathfrak{N}(ax + by) + \Delta yy_0 \tag{3}$$

en indiquant par $\mathfrak{N}\alpha$ la *norme* $\alpha\alpha_0$, toujours réelle et positive, d'un nombre complexe α.

Si le discriminant Δ est positif, la forme d'Hermite est dite *définie*, pour rappeler qu'elle ne peut représenter, d'après (3), que des nombres réels d'un signe défini, savoir, le signe de a.

Si Δ est négatif, la forme est dite *indéfinie;* elle peut représenter des nombres réels de signe quelconque.

On appelle *forme de Dirichlet*, en référence aux *Recherches sur les formes* *quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes* (Journal de Crelle, 1842), une forme quadratique du type

$$F = \mathfrak{A}x^2 + 2\mathfrak{B}xy + \mathfrak{C}y^2. \tag{4}$$

Le déterminant de cette forme

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}\mathfrak{C}$$

est en général un nombre complexe.

5. Les formes d'Hermite et de Dirichlet sont susceptibles d'une représentation géométrique simple, soit dans l'espace non-euclidien de Lobatchewski, soit dans l'espace cayleyen hyperbolique correspondant.

Considérons l'équation en nombres complexes

$$azz_0 + bz_0 + b_0z + c = 0, \tag{5}$$

dont on voit la relation avec la forme d'Hermite (2). Si l'on pose $z = \xi + \eta i$, le lieu des points du plan $O\xi\eta$ de coordonnées ξ, η, ou, comme nous dirons, *d'affixe* z, satisfaisant à l'équation (5), est une circonférence dont le centre est le point d'affixe $-\frac{b}{a}$ et le rayon $\frac{\sqrt{-\Delta}}{a}$.

Si la forme d'Hermite (2) est définie, ou $\Delta > 0$, cette circonférence est imaginaire. Soit alors $O\zeta$ un axe formant avec $O\xi$, $O\eta$, un trièdre trirectangle, le point de cote positive $\zeta = +\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ dont la projection sur $O\xi\eta$ a pour affixe z,

$$z = \xi + \eta i = -\frac{b}{a}, \qquad \zeta = +\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \tag{6}$$

et son symétrique par rapport au plan $\xi\eta$ sont (Laguerre, *Sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie dans l'espace*, 1870; *Œuvres*, p. 111) les sommets des cônes isotropes passant par la circonférence (5) du plan $O\xi\eta$. Nous représenterons la *forme d'Hermite définie* (2) par le *point* (6) de cote positive. Cette représentation actuellement classique paraît explicitement pour la première fois dans la note de M. Picard, *Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté du plan* (Bulletin de la Société Math. de France, 1884.)

Si la forme d'Hermite (2) est indéfinie, $\Delta < 0$, la circonférence (5) est réelle. M. Bianchi représente la *forme d'Hermite indéfinie* (2) par la *demi-sphère* située au-dessus du plan $O\xi\eta$ et le rencontrant orthogonalement suivant la circonférence (5) (*Représentation géométrique des groupes de substitutions linéaires à coefficients entiers, avec applications à la théorie des nombres:* Math. Ann., 1890).

Soit enfin la *forme de Dirichlet* (4). M. Bianchi (même mémoire) lui fait correspondre la *demi-circonférence* située au-dessus du plan $O\xi\eta$ et le rencontrant orthogonalement aux points qui ont pour affixe les zéros de la forme F.

Comme le remarque Poincaré dans le mémoire cité, les demi-circonférences et les demi-sphères orthogonales au plan $O\xi\eta$ peuvent être interprétées comme étant les droites et les plans de l'espace lobatchewskien $\zeta \geqslant 0$, ou, comme on dit à présent, du *demi-espace de Poincaré*.

6. L'interprétation des formes d'Hermite et de Dirichlet dans l'espace cayleyen hyperbolique est due à Klein (Fricke-Klein, *Automorphe Funkt.*, t. I, p. 497, 1897). Par le choix d'un tétraèdre de référence convenable, l'absolu peut être mis sous la forme

$$x_1 x_4 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \tag{7}$$

et la *forme d'Hermite définie* (abc) représentée par le point ($c, -b_1, -b_2, a$), *intérieur à l'absolu* (1).

Une *forme d'Hermite indéfinie* (abc) peut être représentée par le *plan*,

$$ax_1 + 2b_1x_2 + 2b_2x_3 + cx_4 = 0 \tag{8}$$

qui coupe l'absolu. Comme la partie de l'espace projectif intérieure à l'absolu correspond à l'espace lobatchewskien tout entier, la partie du plan (abc) intérieure à l'absolu correspond à la demi-sphère (abc) située dans le demi-espace de Poincaré.

Mais Klein observe que la représentation dans l'espace projectif est plus symétrique que celle dans le demi-espace de Poincaré; car le plan (8) n'est autre que le plan polaire du point ($c, -b_1, -b_2, a$) par rapport à la quadrique (7), et l'on peut donc convenir qu'une forme d'Hermite (abc) sera toujours représentée par le point ($c, -b_1, -b_2, a$); ce point sera intérieur à l'absolu si la forme est définie, extérieur si la forme est indéfinie.

Enfin Klein représente la *forme de Dirichlet* F, ou ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$), par la *droite coupant l'absolu* aux points qui ont pour affixe sur l'absolu les zéros de la forme F.

7. Les deux représentations qui précèdent ont ce caractère commun, que deux formes d'Hermite qui ont leurs coefficients semblables, le facteur de proportionalité

---

(1) J'ai changé b_2 en $-b_2$ dans les notations de Klein, qui prend pour forme d'Hermite la forme

$$axx_0' + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0 \tag{2 bis}$$

au lieu de la forme (2). La notation (2 *bis*) est la notation originale d'Hermite; la notation (2), que nous empruntons aux derniers mémoires de M. Humbert, présente un léger avantage lorsqu'on passe aux coordonnées tétraédriques.

étant réel, ont même représentation géométrique ; et il semble à première vue qu'il en soit de même pour les formes de Dirichlet, le facteur de proportionalité étant complexe.

Or, lorsqu'on cherche à déterminer la droite représentant une forme de Dirichlet $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ (par exemple en exprimant ses coordonnées pluckériennes, relativement au tétraèdre de référence, en fonction de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$), on s'aperçoit (nous ferons ce calcul en détail au chap. II) qu'à l'ensemble de toutes les formes semblables à une forme donnée correspondent deux groupes de coordonnées pluckériennes, représentant deux droites polaires l'une de l'autre par rapport à l'absolu, l'une des deux, par conséquent, coupant l'absolu et l'autre ne le coupant pas. Et l'on ne peut distinguer ces deux droites que par une convention de signes qui paraît très artificielle.

Il m'a semblé que cette indétermination était au fond pleinement justifiée, et que plutôt que de chercher à la faire disparaître il y avait lieu de la souligner. En effet, au début de la géométrie cayleyenne, nous nous donnons *a priori* une quadrique de référence A ; c'est ce qu'exprime fort bien le nom d'*absolu* choisi par Cayley. Cela posé, chaque fois que nous définirons un être géométrique Σ, nous aurons défini par cela même l'être Σ' qui lui correspond par dualité par rapport à A. Les coordonnées ou équations qui définissent Σ définissent tout aussi bien Σ' ; ce sont, en réalité, les coordonnées ou équations du système indivisible (Σ, Σ').

En conséquence, nous adopterons désormais les représentations suivantes pour les formes d'Hermite et de Dirichlet :

A une *forme d'Hermite* correspondra *l'ensemble d'un point et de son plan polaire par rapport à l'absolu.* Si la forme est définie, le point est intérieur à l'absolu, le plan ne coupe pas l'absolu ; si la forme est indéfinie, le point est extérieur, le plan coupe l'absolu.

A une *forme de Dirichlet* correspondra *un couple de droites,* polaires l'une de l'autre par rapport à l'absolu.

Cette fois, deux formes semblables, d'Hermite ou de Dirichlet, auront même représentation géométrique, sans aucune restriction.

Les Chapitres II à IV du présent mémoire développent les conséquences de ces conventions.

8. Dans le Chapitre II, je définis d'une façon précise les points, droites et plans correspondant à des formes données et inversement. Je trouve ensuite les conditions pour que deux formes aient des éléments géométriques communs.

Ces questions ont déjà été, à ma connaissance, traitées par deux auteurs : M. Bianchi (*mém. cité*) et M. Luckhaub (*Contributions à l'interprétation géométrique des formes quadratiques et des formes d'Hermite.* Monatshefte für Math., 1915). J'espère toutefois avoir apporté dans leur traitement un progrès réel.

C'est ainsi que je me suis imposé comme règle de toujours exprimer les conditions cherchées à l'aide des coefficients $a, b, c, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, des formes données, et des conjugués $b_0, \mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ de ceux qui sont complexes. Cela revient évidemment au même que d'introduire leurs parties réelles et leurs parties imaginaires, mais, du fait que l'individualité des coefficients donnés est mieux conservée, les formules auxquelles on aboutit sont beaucoup plus condensées et d'une interprétation plus facile.

M. Bianchi et M. Luckhaub ont cherché par exemple les conditions pour que la demi-circonférence représentant une forme F soit située sur la demi-sphère représentant une forme f indéfinie. Ils trouvent l'un et l'autre deux conditions réelles assez compliquées, $L = o$, $M = o$, mais M. Luckhaub les combine de plus en une troisième d'aspect plus simple, $N = o$, qu'il estime devoir remplacer l'une des deux premières. Or cette condition $N = o$ est complexe et est équivalente à elle seule à l'ensemble des deux conditions réelles $L = o$, $M = o$; c'est celle que nous formons directement (formule 35).

Notre interprétation géométrique dualistique donne de plus la clef de certaines identités qu'avait remarquées M. Bianchi sans en donner l'explication. Par exemple, nous trouverons au paragraphe 13 la condition pour que deux formes d'Hermite soient conjuguées, c'est-à-dire que les points et plans qu'elles représentent soient conjugués par rapport à l'absolu. Dans le demi-espace de Poincaré, cette condition unique correspond à deux configurations géométriques bien distinctes. En effet, deux points conjugués par rapport à une quadrique, sont, ou bien tous deux extérieurs à la quadrique (si la droite qui les joint ne coupe pas la quadrique), ou bien l'un intérieur et l'autre extérieur (dans le cas contraire). Dans le premier cas, nous avons affaire à deux formes d'Hermite indéfinies, et, dans le demi-espace de Poincaré, ces formes sont représentées par *deux demi-sphères se coupant orthogonalement*. Dans le second cas, nous avons affaire à une forme d'Hermite définie et une indéfinie, et, dans le demi-espace de Poincaré, ces formes sont représentées par *une demi-sphère et un point, la demi-sphère contenant le point*.

M. Bianchi dans le premier cas dit que les deux formes indéfinies sont *orthogonales*, dans le second cas que la forme définie et la forme indéfinie sont en *involution*. Il observe bien que ces deux relations sont exprimées par la même condition analytique, mais ne donne pas la raison de ce fait. On voit qu'elle réside en ce que ces deux problèmes n'en forment en réalité qu'un seul, et qu'il n'aurait pas suffi, pour s'en apercevoir, de se placer dans l'espace cayleyen « accessible », mais qu'il est indispensable de considérer en même temps l'espace extérieur à l'absolu ou « inaccessible », suivant l'expression de Darboux.

De ce même point de vue, la condition pour qu'une demi-circonférence soit *orthogonale à une demi-sphère* (condition 34) se déduit immédiatement sans aucun calcul de la condition pour qu'une demi-circonférence soit *située sur une demi-sphère* (condition 35) ou inversement.

Je forme aussi les expressions paramétriques (31) et (33) du point courant sur l'une ou l'autre droite d'un couple de droites, et je construis le système (43) de quatre formes correspondant aux sommets d'un tétraèdre autopolaire par rapport à l'absolu. Ces formules sont, je crois, nouvelles et elles sont nécessaires pour la suite du présent travail.

9. Dans le Chapitre III j'exprime les éléments métriques de l'espace cayleyen : distance de deux points, angle de deux points, plus courte distance et angle de deux droites (lesquelles ne se coupent pas en général) à l'aide des invariants des formes d'Hermite et de Dirichlet correspondantes, comme il suit :

distance d de deux points ou angle θ de deux plans :

$$ch\frac{d}{R} = \cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{\Delta\Delta'}} \tag{9}$$

distance et angle de deux droites :

$$ch\left(\frac{d}{R} + i\theta\right) = \frac{H}{2\sqrt{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}} \tag{10}$$

Les formules (9) résultent immédiatement des définitions de Cayley. J'ai cru d'abord nouvelle la formule (10) relative à deux droites qui ne se coupent pas; mais j'ai eu ensuite connaissance du mémoire de M. Luckhaub, d'après lequel elle se trouve dans le cours autographié de Klein sur la fonction hypergéométrique (1906), qu'il ne m'a malheureusement pas été possible de consulter [1].

D'autre part M. Study, dans sa *Geometrie der Dynamen* (1902), a écrit une formule analogue pour *l'angle dual* de deux *rayons*, qu'il définit ainsi : Soient X, Y, Z, L, M, N, les coordonnées (réelles) d'un système de forces ou *dyname*. M. Study pose

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X}_1 = X + L\omega, \\ \mathfrak{X}_2 = Y + M\omega, \\ \mathfrak{X}_3 = Z + N\omega, \end{array}\right.$$

où ω est un symbole satisfaisant aux règles ordinaires du calcul algébrique et à la condition $\omega^2 = 0$. Un nombre complexe $a + b\omega$ est appelé *nombre dual*. Si l'on multiplie $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$, par un même nombre dual quelconque, le nouveau dyname que l'on obtient a même axe central que le premier; on pourrait donc convenir de dire que $\mathfrak{X}_1\,\mathfrak{X}_2\,\mathfrak{X}_3$ sont les coordonnées duales homogènes de cet axe central.

---

(1) Après la rédaction de ce travail j'ai dû à l'obligeance de M. Julia la communication du cours de Klein. Dans ce cours, professé en 1893-1894, la formule (10) est établie d'une manière toute différente de celle qu'on trouvera ici.

Si les coefficients (X.... N) prennent des valeurs complexes ordinaires $a + bi$, $\mathfrak{X}_1\,\mathfrak{X}_2\,\mathfrak{X}_3$ sont, d'après M. Study, les coordonnées duales d'un *rayon*, le concept de rayon coïncidant avec celui de droite dans le champ réel.

Cela étant, M. Study appelle *angle dual de deux rayons* l'expression $\theta + d\omega$ (θ angle, d plus courte distance) et démontre que l'on a

$$\cos(\theta + d\omega) = \frac{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3}{\sqrt{\mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{X}_2^2 + \mathfrak{X}_3^2} \times \sqrt{\mathfrak{Y}_1^2 + \mathfrak{Y}_2^2 + \mathfrak{Y}_3^2}}.$$

La formule (10) n'est donc pas nouvelle, mais elle ne paraît pas encore très connue, et comme elle est d'importance égale aux formules classiques (9), il semble qu'il y ait intérêt à la souligner.

10. Enfin, dans le Chapitre IV, j'étudie les déplacements cayleyens, qui correspondent, comme nous l'avons dit, aux substitutions linéaires $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ à coefficients complexes. Dans le cas général, un pareil déplacement est hélicoïdal; il est composé d'une translation de longueur d le long d'un axe et d'une rotation d'angle θ autour de cet axe. M'appuyant sur la formule (10) je démontre que l'on a

$$ch\left(\frac{d}{R} + i\varphi\right) = \frac{(a+\delta)^2}{2} - 1 \qquad (11)$$

formule simple que je crois nouvelle et qui sera fondamentale pour la Deuxième Partie de ce travail.

En vertu de nos conventions dualistiques, on peut dire aussi que le déplacement hélicoïdal est composé d'une translation de longueur d le long d'une droite coupant l'absolu et d'une translation de longueur $Ri\varphi$ le long de sa droite conjuguée. Je forme les relations, qui nous serviront dans la Deuxième Partie, entre le multiplicateur de la substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ et les multiplicateurs des homographies relatives aux points des deux droites. Je termine en donnant une formule très condensée (76) pour la distance d'un point à une droite, ou l'angle d'une droite et d'un plan (¹).

(¹) Sur le sujet de cette Première Partie, je citerai, en dehors des mémoires signalés au cours de ce Chapitre, les exposés didactiques contenus dans le tome I des *Automorphe Funktionen* de Fricke et Klein (1897) et dans les *Principes de Géométrie analytique* de Darboux (1917). Dans ce dernier ouvrage, les avantages de la considération de l'espace « inaccessible » sont mis particulièrement en relief.

CHAPITRE II

GÉOMÉTRIE CAYLEYENNE HYPERBOLIQUE : PARTIE DESCRIPTIVE

11. Soit OABC un tétraèdre de référence réel. Nous prendrons pour *absolu* au cours des Chapitres II, III, IV, la quadrique

$$x^2 + y^2 - zt = 0. \tag{12}$$

C'est un ellipsoïde, tangent en O au plan $z = 0$ ou OAB, en C au plan $t = 0$ ou ABC.

Soient $x_1\ y_1\ z_1\ t_1$ les coordonnées d'un point quelconque, son plan polaire par rapport à l'absolu aura pour équation

$$2x_1x + 2y_1y - t_1z - z_1t = 0. \tag{13}$$

Cela posé, *nous ferons correspondre à la forme d'Hermite f*, de coefficients (a, b, c) ou $(a,\ b_1,\ b_2,\ c)$ *l'ensemble du point de coordonnées*

$$x = -b_1, \quad y = -b_2, \quad z = c, \quad t = a,$$

et de son plan polaire par rapport à l'absolu

$$2b_1x + 2b_2y + az + ct = 0. \tag{15}$$

Le discriminant Δ de la forme f est

$$\Delta = ac - bb_0 = ac - b_1^2 - b_2^2.$$

Si Δ est *positif*, la forme définie f représente un point intérieur à l'absolu, et son plan polaire, lequel ne coupe pas l'absolu,

Si Δ est *négatif*, la forme indéfinie f représente un point extérieur à l'absolu, et son plan polaire, lequel coupe l'absolu.

Si Δ est nul, la forme f représente un point de l'absolu et le plan tangent en ce point.

Pour compléter ces conventions observons, en premier lieu, que la représentation géométrique d'une forme d'Hermite que nous venons de donner ne fait intervenir que les *rapports* des quantités réelles $(a,\ b_1,\ b_2,\ c)$. Deux formes d'Hermite *semblables*, c'est-à-dire dont les coefficients sont proportionnels, le facteur de proportionnalité étant *réel*, auront donc même point et même plan représentatifs.

Enfin nous aurons besoin de considérer des points, que nous appellerons *points imaginaires*, et qui, par rapport au tétraèdre de référence réel OABC, auront des coordonnées x, y, z, t complexes. Les coefficients $a\ b_1\ b_2\ c$ de la forme d'Hermite correspondante, au lieu d'être réels, seront alors complexes. Nous dirons que nous avons affaire à une *forme d'Hermite généralisée*.

12. Nous allons maintenant introduire les génératrices rectilignes (imaginaires) de l'absolu. L'équation de l'absolu

$$x^2 + y^2 - zt = 0$$

peut s'écrire

$$PQ - RS = 0$$

en introduisant les plans

$$P = x + iy, \quad Q = x - iy, \quad R = z, \quad S = t.$$

Les deux systèmes (λ), (μ) de génératrices de l'absolu sont donc définis par

$$\begin{aligned} \lambda : \mu : \lambda\mu : 1 &:: P : Q : R : S \\ &:: x + iy : x - iy : z : t \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\lambda + \mu}{2} : \frac{\lambda - \mu}{2i} : \lambda\mu : 1 :: x : y : z : t. \tag{16}$$

La forme d'Hermite généralisée, de discriminant nul

$$XX_0 - \lambda X_0 Y - \mu XY_0 + \lambda\mu YY_0 = (X - \lambda Y)(X_0 - \mu Y_0) \tag{17}$$

représente donc l'ensemble du point de l'absolu situé à l'intersection des génératrices λ et μ et du plan tangent en ce point (plan des deux génératrices λ et μ).

Pour que ce point et ce plan soient réels, ou, ce qui est équivalent, que la forme d'Hermite généralisée devienne une forme d'Hermite ordinaire, il faut et il suffit, d'après (16) ou d'après (17), que λ et μ soient des nombres complexes conjugués. Posons alors $Z = \lambda = \mu_0$, nous aurons une représentation de la variable complexe Z sur la surface de la quadrique *absolu*, tout à fait analogue à la représentation classique sur la surface d'une sphère. Le point de l'absolu d'affixe Z aura pour coordonnées tétraédriques

$$\frac{Z + Z_0}{2} : \frac{Z - Z_0}{2i} : ZZ_0 : 1 :: x : y : z : t. \tag{18}$$

Il lui correspond la forme d'Hermite ordinaire à discriminant nul,

$$XX_0 - ZX_0Y - Z_0XY_0 + ZZ_0YY_0 = \mathfrak{N}(X - ZY).$$

Le point O a pour affixe $Z = 0$ et le point C, $Z = \infty$. Notons que de (18) on tire

$$Z = \frac{x + iy}{t} \tag{19}$$

relation qui nous servira plus loin.

13. Soient f et f' deux formes d'Hermite, ordinaires ou généralisées. Il résulte aussitôt de l'expression (14) des coordonnées du point correspondant à une forme d'Hermite que la forme $f+\lambda f'$, où λ est un paramètre variable, représente un point de la droite joignant les deux points f et f', et son plan polaire, qui par conséquent passe par l'intersection des deux plans f et f'.

Le discriminant de la forme $f+\lambda f'$ est

$$\Delta + I\lambda + \Delta'\lambda^2$$

où Δ, Δ' sont les discriminants de f et de f' et I *l'invariant simultané*, toujours réel,

$$I = ac' + ca' - b_0b' - bb'_0.$$

Nous connaissons déjà la signification de $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$. La condition $I = 0$ est équivalente à

$$-2b_1b'_1 - 2b_2b'_2 + ac' + ca' = 0.$$

Elle signifie donc, d'après (14) et (15), que le plan f contient le point f' et également que le plan f' contient le point f, autrement dit, que les points f et f' sont conjugués par rapport à l'absolu, le plan polaire de l'un contenant l'autre. Nous dirons que deux formes d'Hermite f et f' seront *conjuguées*, lorsque leur invariant simultané I sera nul.

14. Considérons à présent une *forme de Dirichlet*

$$F = \mathcal{A}X^2 + 2\mathcal{B}XY + \mathcal{C}Y^2.$$

Soient m et n les zéros de cette forme, complexes en général, et que nous supposerons d'abord distincts. Marquons sur l'absolu (*fig. 1*) les génératrices m et n du système (λ) et les génératrices m_0 et n_0 du système (μ).

Ces quatre droites imaginaires se coupent en quatre points; les points M et N sont réels et ont respectivement pour affixe, sur l'absolu, $Z=m$ et $Z=n$. Les points P et Q sont imaginaires conjugués; les droites MN et PQ sont donc réelles et de plus, comme on le voit aisément, conjuguées l'une de l'autre par rapport à l'absolu. *Nous représenterons la forme de Dirichlet* F *par ce couple de droites réelles conjuguées.*

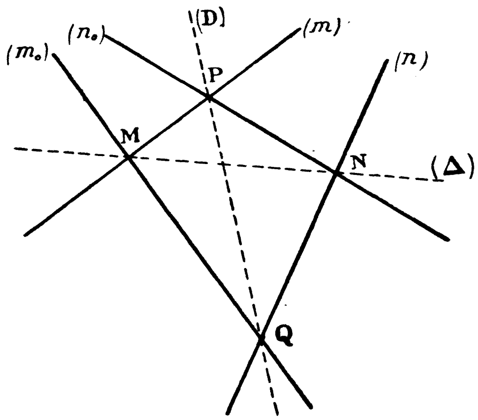


FIG. 1.

Par convention, nous appellerons *première droite*, (Δ), la droite MN qui coupe l'absolu en deux points réels; l'autre sera la *seconde droite*, (D).

Remarquons que cette représentation ne fait intervenir que les zéros de la forme F, ou, en d'autres termes, que les *rapports* des coefficients complexes $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Deux formes de Dirichlet *semblables*, c'est-à-dire dont les coefficients sont proportionnels, le facteur de proportionalité étant *complexe*, seront donc représentées par les deux mêmes droites (Δ) et (D).

Nous allons montrer que les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, de la forme F, s'expriment à un facteur de proportionalité près en fonction des coordonnées pluckériennes des droites (Δ) et (D), et réciproquement.

15. Soient d'abord

$$p_{12} \quad p_{13} \quad p_{14} \quad p_{23} \quad p_{24} \quad p_{34}$$

ou par abréviation (p_{ij}) les coordonnées pluckériennes d'une droite réelle. On sait que ces coordonnées sont six nombres réels satisfaisant à la relation

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0 \tag{20}$$

et que la droite qu'elles définissent appartient aux quatre plans

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\quad p_{12}y + p_{13}z + p_{14}t = 0, \\ p_{21}x \qquad\quad + p_{23}z + p_{24}t = 0, \\ p_{31}x + p_{32}y \qquad\quad + p_{34}t = 0, \\ p_{41}x + p_{42}y + p_{43}z \qquad\quad = 0 \end{array}\right. \tag{21}$$

(si l'on fait la convention d'écriture $p_{ij} = p_{ji}$). Nous allons chercher à former l'équation du second degré qui a pour racines les affixes des points où la droite (p_{ij}) rencontre l'absolu.

A cet effet, si x, y, z, t sont les coordonnées d'un point de cette droite, posons $Z = \frac{x+iy}{t}$. Z sera un paramètre définissant un point courant sur la droite, à condition que t ne soit pas constamment nul (droite du plan $t=0$, ou ABC) ou encore $\frac{x}{t}$ et $\frac{y}{t}$ ne soient pas constants (droite passant par le point (0010), ou C). Écartant ces cas particuliers sur lesquels nous reviendrons dans un instant, nous voyons que les Z des points communs à la droite (p_{ij}) et à l'absolu coïncideront avec les affixes de ces points sur l'absolu, d'après l'égalité (19) du paragraphe 12.

Pour obtenir l'équation cherchée nous devrons donc éliminer x, y, z, t, entre cette égalité (19), l'équation de l'absolu (12), et les équations de deux des quatre plans (21) définissant la droite (p_{ij}), par exemple les deux premiers. La résolution du système

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\quad p_{12}y + p_{13}z + p_{14}t = 0, \\ p_{21}x \qquad\quad + p_{23}z + p_{24}t = 0, \\ \quad x + iy \qquad\qquad - Zt = 0 \end{array}\right.$$

donne

$$\left\{\begin{array}{l} D\frac{x}{t} = p_{12}(p_{23}Z - ip_{34}), \\ D\frac{y}{t} = p_{12}(-p_{13}Z + ip_{34}), \\ D\frac{z}{t} = p_{12}(p_{14}Z - p_{24} + ip_{14}) \end{array}\right.$$

avec

$$D = p_{12}(p_{23} - ip_{13})$$

et en reportant ces valeurs de $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ dans l'équation de l'absolu, il vient l'équation du second degré

$$(p_{13} - ip_{23})\,Z^2 - 2\left(p_{34} - i\frac{p_{12}}{2}\right)Z - (p_{14} + ip_{24}) = 0. \tag{22}$$

Les coefficients de cette équation sont, en définitive, ceux de la forme de Dirichlet $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ correspondant à la droite (p_{ij})

$$(p_{13} - ip_{23})\,X^2 - 2\left(p_{34} - i\frac{p_{12}}{2}\right)XY - (p_{14} + ip_{24})\,Y^2. \tag{23}$$

Mais, dans la représentation que nous avons adoptée, à la forme de Dirichlet $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ correspond non pas la droite (p_{ij}) seule, mais l'ensemble de la droite (p_{ij}) et de sa conjuguée. Soient (q_{ij}) les coordonnées pluckériennes de celle-ci, on a, comme on le voit aisément

$$\left\{\begin{aligned} q_{12} &= -2p_{34}, & q_{23} &= -p_{13}, \\ q_{13} &= p_{23}, & q_{24} &= p_{14}, \\ q_{14} &= -p_{24}, & q_{34} &= \frac{p_{12}}{2}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Si la représentation proposée est légitime, le calcul que nous venons de faire doit conduire, à partir des nombres (q_{ij}), à la forme (23) elle-même, ou à une forme *semblable*. Et en effet la forme

$$(q_{13} - iq_{23})\,X^2 - 2\left(q_{34} - i\frac{q_{12}}{2}\right)XY - (q_{14} + iq_{24})\,Y^2$$

est, d'après les relations (24), identiquement égale à

$$i\left[(p_{13} - ip_{23})\,X^2 - 2\left(p_{34} - i\frac{p_{12}}{2}\right)XY - (p_{14} + ip_{24})\,Y^2\right] \tag{25}$$

C'est donc bien la même forme, à un facteur de proportionalité près, qui correspond à deux droites conjuguées quelconques (p_{ij}) et (q_{ij}) et nous pouvons écrire indifféremment

$$\left.\begin{aligned} &p_{13} - ip_{23} : -p_{34} + i\frac{p_{12}}{2} : -p_{14} - ip_{24} = \mathcal{A} : \mathcal{B} : \mathcal{C} \\ &\text{ou bien} \\ &q_{13} - iq_{23} : -q_{34} + i\frac{q_{12}}{2} : -q_{14} - iq_{24} = \mathcal{A}i : \mathcal{B}i : \mathcal{C}i \end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

Revenons sur les cas particuliers que nous avons laissés de côté : droite p_{ij} située dans le plan $t = 0$ (ou ABC) ou bien passant par le point C. La première condition s'exprime en coordonnées pluckériennes par

$$p_{12} = p_{23} = p_{31} = 0;$$

la seconde par

$$p_{13} = p_{23} = p_{43} = 0$$

et ces deux cas se correspondent par dualité, puisque le plan ABC est tangent à l'absolu en C (par. 11); autrement dit, si la première droite, (Δ), passe par C, la deuxième droite, (D) est dans le plan ABC. L'un des zéros de la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ est donc infini, puisque le point C a pour affixe $Z = \infty$ (par. 12). Et nous voyons qu'en effet le coefficient $\mathcal{A}$ est nul si l'une ou l'autre des suites d'égalités que nous venons d'écrire est vérifiée. Les formules (26) ne cessent donc pas d'être valables dans ce cas.

16. Nous venons de trouver l'expression des coefficients $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ à partir des coordonnées (p_{ij}) d'une droite réelle quelconque ou des coordonnées (q_{ij}) de sa conjuguée; cherchons à résoudre le problème inverse : trouver les droites (p_{ij}), (q_{ij}) qui correspondent à une forme de Dirichlet $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ donnée, et aux formes semblables.

Il semble qu'il n'y ait pour cela qu'à identifier la forme donnée $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ avec la forme (23) puis avec la forme (25). Mais cela n'est pas possible immédiatement. En effet, si nous formons le déterminant de la forme (23), il vient

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= \mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} \\ &= p_{13}p_{14} + p_{23}p_{24} + (p_{34})^2 - \left(\frac{p_{12}}{2}\right)^2 - i(p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23});\end{aligned} \tag{27}$$

donc, en vertu de la relation (20) le déterminant de la forme (23) est nécessairement *réel.* Le déterminant de la forme (25) est évidemment égal au précédent changé de signe. Ainsi une forme de Dirichlet $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ quelconque ne peut pas être identifiée aux formes (23) ou (25), car son déterminant est en général complexe. Mais il est facile de trouver une forme, dont les coefficients soient les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ multipliés par un même facteur $g + ih$, et dont le déterminant soit réel. Il suffit, si $a + ib$ est le déterminant $\mathfrak{D}$ de la forme donnée $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, d'annuler le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le produit

$$(a + ib)(g + ih)^2.$$

On trouve ainsi la condition

$$bg^2 + 2agh - bh^2 = 0.$$

Il en résulte deux valeurs réelles pour $\frac{g}{h}$, et l'on s'assure aisément qu'elles conduisent à deux séries de formes dont les déterminants sont réels et de signes opposés.

Il est clair d'autre part que le déterminant $\mathfrak{D}$, qui d'après (27) varie d'une manière continue avec les (p_{ij}) et qui est nul lorsque la droite (p_{ij}) est tangente à l'absolu, a un signe déterminé pour toutes les « premières droites » qui coupent l'absolu, et le signe contraire pour les « deuxièmes droites » qui ne le coupent pas. On voit sur un exemple numérique quelconque, (par exemple la droite

$$p_{12} = 0, \quad p_{13} = 1, \quad p_{14} = -1, \quad p_{23} = 0, \quad p_{24} = 0, \quad p_{34} = 0,$$

ou

$$z = t, \quad x = 0,$$

qui coupe l'absolu et pour laquelle $\mathfrak{D} = -1$) que ce signe est le signe — pour les premières droites. Par convention, *nous admettrons que l'on a pris pour forme* $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ *représentative de toutes les formes de Dirichlet semblables, une forme à déterminant réel et négatif* [1]. Nous conviendrons encore de réserver la notation (p_{ij}) pour les coordonnées des premières droites, la notation (q_{ij}) pour les secondes.

Il est très facile maintenant, une forme de Dirichlet étant donnée, de trouver les droites qui la représentent. Nous construirons d'abord une forme $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ semblable à la forme donnée, et de déterminant réel et négatif. Nous identifierons ensuite cette forme avec la forme (23) ce qui donnera les formules (26); et de ces dernières nous tirerons les expressions cherchées des (p_{ij})

$$\left\{\begin{aligned} p_{12} &= i(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0), & p_{23} &= \frac{i(\mathfrak{A} - \mathfrak{A})_0}{2}, \\ p_{13} &= \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_0}{2}, & p_{24} &= \frac{i(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_0)}{2}, \\ p_{14} &= -\frac{\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_0}{2}, & p_{34} &= -\frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_0}{2}. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Pour obtenir les coordonnées (q_{ij}) de la deuxième droite nous pouvons, soit nous

---

[1] La raison de cette convention est qu'une substitution elliptique d'ordre deux $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ du groupe modulaire Γ que nous étudierons dans la Deuxième Partie de ce travail, conserve la forme de Dirichlet $\gamma x^2 - 2\alpha xy - \beta y^2$ qui est de déterminant -1. De même la substitution d'ordre trois $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 1-\alpha \end{pmatrix}$ conserve la forme $2\gamma x^2 + 2(1 - 2\alpha)xy - 2\beta y^2$ de déterminant -3 (par. 70 et 71). Il est commode de conserver ces formes telles qu'elles se présentent, sans les affecter d'un facteur $\sqrt{-P}$.

servir des formules (24), soit identifier la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ avec la forme (25) ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned} q_{12} &= \mathcal{B} + \mathcal{B}_0, & q_{23} &= \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}_0}{2}, \\ q_{13} &= i(\mathcal{A} - \mathcal{A}_0), & q_{24} &= \frac{\mathcal{C} + \mathcal{C}_0}{2}, \\ q_{14} &= \frac{-i(\mathcal{C} - \mathcal{C}_0)}{2}, & q_{34} &= \frac{-i(\mathcal{B} - \mathcal{B}_0)}{2}. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Le raisonnement précédent est toutefois en défaut pour les formes de déterminant nul. Une forme à déterminant nul a ses deux zéros confondus; on peut l'écrire $(\mathcal{A}X+\mathcal{B}Y)^2$ et lui faire correspondre un couple de droites conjuguées *quelconque* du plan tangent à l'absolu au point d'affixe $Z = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$. Il suffit pour cela d'identifier la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ aux formes (23) et (25), ce qui donne les droites conjuguées (28) et (29): puis, multipliant les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ par un facteur complexe quelconque (ce que l'on peut faire ici sans que le déterminant de la forme cesse pour cela d'être réel), les coordonnées (p_{ij}), (q_{ij}), varieront en représentant toujours deux droites conjuguées tangentes à l'absolu au point $Z = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$. Ce cas est donc véritablement un cas d'exception.

Nous conclurons que *l'ensemble des formes de Dirichlet semblables à une forme donnée $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, à déterminant non nul, peut être représenté géométriquement par l'ensemble de deux droites réelles, conjuguées l'une de l'autre par rapport à l'absolu; et réciproquement.*

Ayant ainsi établi une correspondance entre les points, droites et plans de l'espace cayleyen d'une part, les formes d'Hermite et de Dirichlet d'autre part, nous allons résoudre quelques problèmes élémentaires de géométrie analytique, dont la solution nous sera utile par la suite.

17. Nous allons chercher dans ce paragraphe la *représentation paramétrique d'un point réel mobile sur la première ou sur la seconde droite* $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$.

Considérons d'abord la *première droite*, c'est-à-dire celle qui coupe l'absolu en deux points réels, M et N (*fig. 1*).

Les points M et N ayant pour affixe m et n correspondent aux formes d'Hermite à discriminant nul

$$\mathfrak{N}(x - my) \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}(x - ny).$$

La forme d'Hermite

$$\lambda\,\mathfrak{N}(x - my) + \mu\,\mathfrak{N}(x - ny), \tag{30}$$

où λ et μ sont deux nombres réels variables, représentera donc un point réel de la droite MN, et son plan polaire passant par PQ. Soient a, b, c les coefficients de cette forme d'Hermite, Δ son discriminant, il vient en développant l'expression (30)

$$\left\{\begin{aligned} a &= \lambda + \mu, \\ b &= -(\lambda m + \mu n), \\ c &= \lambda m m_0 + \mu n n_0, \\ \Delta &= \lambda\mu(m-n)(m_0 - n_0). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Le point (abc) est ainsi défini sur la droite MN en fonction du paramètre réel $\frac{\lambda}{\mu}$. Lorsque $\frac{\lambda}{\mu} > 0$, $\Delta > 0$, le point (abc) est intérieur à l'absolu. Le point M correspond à $\frac{\lambda}{\mu} = \infty$, le point N à $\frac{\lambda}{\mu} = 0$.

Cherchons maintenant à représenter un point réel situé sur la *deuxième droite* $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, ou PQ (*fig. 1*). Les points P et Q sont imaginaires conjugués, ils correspondent, d'après la formule (17), aux formes d'Hermite généralisées

$$(x - my)(x_0 - n_0 y_0) \quad \text{et} \quad (x - ny)(x_0 - m_0 y_0).$$

La forme

$$\lambda(x - my)(x_0 - n_0 y) + \mu(x - ny)(x_0 - m_0 y) \tag{32}$$

où λ et μ sont deux nombres complexes variables, représente un point, réel ou imaginaire, de la droite PQ ; pour que ce point soit réel, il faut et il suffit que la forme (32) correspondante soit une forme d'Hermite ordinaire, à coefficients a et c réels, c'est-à-dire que $\mu = \lambda_0$. Développant la forme (32) en remplaçant μ par λ_0, il vient

$$\left\{\begin{aligned} a &= \lambda + \lambda_0, \\ b &= -(\lambda m + \lambda_0 n), \\ c &= \lambda m n_0 + \lambda_0 m_0 n, \\ \Delta &= -\lambda\lambda_0(m-n)(m_0 - n_0). \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Nous avons ainsi en fonction du paramètre $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ (quantité complexe de module *un*) l'expression d'un point courant réel sur la droite PQ et de son plan polaire passant par MN. Le discriminant Δ est ici toujours négatif, ce qui concorde avec le fait que tous les points de PQ sont extérieurs à l'absolu.

18. *Condition pour qu'un point appartienne à une droite.* — Cherchons d'abord la condition pour que le *point* (abc) appartienne à la *première droite* $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$; le plan (abc) contiendra alors la deuxième droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$. Entre les trois premières équations (31) éliminons λ et μ, il vient la condition cherchée :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & -m & -n \\ c & mm_0 & nn_0 \end{vmatrix} = 0;$$

elle s'écrit en développant

$$amn - b\frac{nn_0 - mm_0}{m_0 - n_0} + c\frac{m-n}{m_0 - n_0} = 0.$$

Or, m et n sont les zéros de la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ dont par hypothèse le déterminant $\mathcal{D} = -\mathrm{D}$, D étant un nombre réel et positif. On a donc

$$mn = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}},$$

$$m - n = \frac{-2\sqrt{-\mathrm{D}}}{\mathcal{A}}, \qquad m_0 - n_0 = \frac{2\sqrt{-\mathrm{D}}}{\mathcal{A}_0}, \qquad \frac{m-n}{m_0 - n_0} = -\frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}},$$

$$\begin{aligned} \frac{nn_0 - mm_0}{m_0 - n_0} &= \frac{-(m+n)(m_0 - n_0) - (m_0 + n_0)(m-n)}{2(m_0 - n_0)} \\ &= \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} - \frac{\mathcal{B}_0}{\mathcal{A}_0} \times \frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}}, \\ &= \frac{\mathcal{B} - \mathcal{B}_0}{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

La condition cherchée s'écrit donc finalement

$$a\mathcal{C} - b(\mathcal{B} - \mathcal{B}_0) - c\mathcal{A}_0 = 0. \qquad (34)$$

En remplaçant dans cette expression $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ par $(\mathcal{A}i, \mathcal{B}i, \mathcal{C}i)$ nous obtiendrons immédiatement la condition pour que le *point* (abc) appartienne à la *deuxième* droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, ou que le plan (abc) contienne la première droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$; cette condition est

$$a\mathcal{C} - b(\mathcal{B} + \mathcal{B}_0) + c\mathcal{A}_0 = 0. \qquad (35)$$

19. *Droite passant par deux points, et droite commune à deux plans.* — Soit

$$f = aXX_0 + bX_0Y + b_0XY_0 + cYY_0.$$

une forme d'Hermite. Elle représente un point et son plan polaire. Elle définit aussi le cône tangent à l'absolu ayant pour sommet le point, et la conique, intersection de son plan polaire et de l'absolu (1). Ces éléments sont réels si le point (abc) est extérieur ou la forme f indéfinie, imaginaires si le point (abc) est intérieur ou la forme f définie. Les affixes des points de la conique satisfont à une relation que l'on obtient en écrivant que la forme $\mathcal{N}(Z - XY)$ est conjuguée (par. 13) de la forme (abc), ce qui donne

$$aZZ_0 + bZ_0 + b_0Z + c = 0.$$

Soit une deuxième forme d'Hermite $f' = (a'\,b'\,c')$; les points de la conique correspondante sont donnés par

$$a'ZZ_0 + b'Z_0 + b'_0Z + c' = 0.$$

Les affixes des deux points (réels ou imaginaires) communs à ces deux coniques sont donnés par

$$\begin{vmatrix} aZ + b & b_0Z + c \\ a'Z + b' & b'_0Z + c' \end{vmatrix} = 0$$

et par suite la forme de Dirichlet qui représente la droite joignant les deux points (abc), $(a'\,b'\,c')$, et la droite intersection des deux plans correspondants est le *covariant* φ *des deux formes d'Hermite* f *et* f'.

$$\varphi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial X_0} & \dfrac{\partial f}{\partial Y_0} \\ \dfrac{\partial f'}{\partial X_0} & \dfrac{\partial f'}{\partial Y_0} \end{vmatrix} \tag{36}$$

---

(1) Le système (Σ, Σ') introduit au paragraphe 7 comprend en réalité six éléments se correspondant deux à deux par dualité et qui sont introduits simultanément dès que l'on définit dans l'espace cayleyen une figure Σ :

1° la figure Σ;
2° la figure Σ' polaire de Σ par rapport à l'absolu A;
3° l'intersection de Σ et de A;
4° la développable circonscrite à Σ' et à A;
5° la développable circonscrite à Σ et à A;
6° l'intersection de Σ' et de A.

Dans le cas d'une forme d'Hermite ce système se réduit aux quatre éléments : point, plan, conique et cône. La correspondance est évidente avec les éléments correspondants du demi-espace de Poincaré : point, demi-sphère, cercle (5) du paragraphe 5, cône isotrope de Laguerre. Dans le cas d'une forme de Dirichlet on a les droites (Δ) et (D), leurs points d'intersection avec A, et les quatre plans tangents à A dont les équations $M, N, P, Q = 0$ interviennent au paragraphe 34.

Le déterminant $\mathfrak{D}$ de cette forme, en fonction des invariants Δ, Δ', I, de f et f', est donné par

$$4\mathfrak{D} = I^2 - 4\Delta\Delta' \tag{37}$$

Il est réel; on prendra dans les calculs la forme φ elle-même ou la forme semblable $\varphi\sqrt{-1}$ suivant que $\mathfrak{D}$ sera trouvé négatif ou positif.

20. *Formes de Dirichlet conjuguées*; *tétraèdre autopolaire.* — Soient F et F' deux formes de Dirichlet, de déterminant $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$; le déterminant de la forme $F + \lambda F'$ est

$$\mathfrak{D} - H\lambda + \mathfrak{D}'\lambda^2$$

en posant

$$H = \mathcal{A}\mathcal{C}' + \mathcal{C}\mathcal{A}' - 2\mathcal{B}\mathcal{B}'. \tag{38}$$

H est l'invariant simultané des deux formes F et F'.

Nous allons chercher la traduction géométrique de la condition $H = 0$, et nous trouverons qu'elle signifie que les deux couples de droites que représentent les formes F et F' se rencontrent deux à deux en quatre points, qui sont par conséquent les sommets d'un tétraèdre auto-conjugué par rapport à l'absolu.

Écrivons en effet que les deux premières droites F et F', soit (p_{ij}) et (p'_{ij}), se rencontrent. La relation qui exprime ce fait en coordonnées pluckériennes est

$$p_{12}p'_{34} - p_{13}p'_{24} + p_{14}p'_{23} + p'_{12}p_{34} - p'_{13}p_{24} + p'_{14}p_{23} = 0.$$

Remplaçons dans cette relation les (p_{ij}) par leurs valeurs (28) en fonction de $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ et faisons de même pour les (p'_{ij}), il vient

$$H - H_0 = 0,$$

c'est-à-dire H *réel*. Ceci est donc la condition pour que la première droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, soit (Δ), rencontre la première droite $(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}')$, soit (Δ'). Les deuxièmes droites (D) et (D') se rencontreront alors aussi. Mais en général (Δ) ne rencontrera pas (D'), ni (Δ'), (D).

La condition pour que (Δ) rencontre (D') s'obtient, sans refaire le calcul précédent, en écrivant la condition que nous venons de trouver, « invariant simultané réel », pour les deux formes $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ et $(\mathcal{A}'i, \mathcal{B}'i, \mathcal{C}'i)$. Cela donne cette fois, en représentant toujours par H la même expression (38),

$$H + H_0 = 0$$

ou H *imaginaire pur*.

Réunissant ces deux conditions, $H = 0$ sera la *condition pour que les couples de droites* (Δ, D) et (Δ', D') *se rencontrent deux à deux en quatre points.*

Nous allons maintenant chercher les coordonnées de ces quatre points.

Soit la forme F

$$(x - my)(x - ny).$$

Les formes F' *conjuguées* à F (c'est-à-dire telles que l'invariant simultané H de F et de F' soit nul) sont données par la formule

$$F' = \nu(x - my)^2 + \rho(x - ny)^2$$

où ν et ρ sont deux nombres complexes quelconques. On démontre en effet aisément que l'on a $F' = \nu F_1 + \rho F_2$, F_1 et F_2 étant deux formes particulières conjuguées à F ; puis on remarque que $(x - my)^2$ et $(x - ny)^2$ sont de telles formes.

Nous connaissons les expressions paramétriques (31) et (33) d'un point situé sur la première ou sur la deuxième droite F ; nous allons exprimer à l'aide des relations (34) et (35) que ce point se trouve sur la première, puis sur la seconde droite F'. Il ne serait pas possible de trouver des points satisfaisant à ces conditions si les formes F et F' étaient quelconques, mais ici nous obtiendrons les coordonnées de quatre points réels, ce qui vérifiera *a posteriori* la proposition que nous venons de démontrer.

Point M_{11} situé sur les premières droites F et F'. — Ce point (abc) appartenant à la première droite F', on devra avoir

$$a\mathcal{C} - b(\mathcal{B} - \mathcal{B}_0) - c\mathcal{A}_0 = 0 \tag{34}$$

ou

$$a(\nu m^2 + \rho n^2) - b(\nu m + \rho n - \nu_0 m_0 - \rho_0 n_0) - c(\nu_0 + \rho_0) = 0.$$

Comme il appartient aussi à la première droite F, on a

$$a = \lambda + \mu, \qquad b = -(\lambda m + \nu n), \qquad c = \lambda m m_0 + \mu \nu \nu_0, \tag{31}$$

d'où

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\nu m(m - n) + \nu_0 n(m_0 - n_0)}{\rho n(m - n) + \rho_0 n(m_0 - n_0)}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{\nu}{\rho}}\, m \times \sqrt{\nu\rho}\,(m - n) + \sqrt{\frac{\nu_0}{\rho_0}}\, n \sqrt{\nu_0 \rho_0}\,(m_0 - n_0)}{\sqrt{\frac{\rho}{\nu}}\, n \times \sqrt{\nu\rho}\,(m - n) + \sqrt{\frac{\rho_0}{\nu_0}}\, m \sqrt{\nu_0 \rho_0}\,(m_0 - n_0)}.$$

Mais nous ne devons pas oublier qu'en établissant la formule (34), nous avons supposé que le déterminant $\mathcal{D}$ de la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, ici F, était réel et négatif. Ce déterminant est $-\nu\rho(m-n)^2$, qui est donc réel et négatif, et par suite $\sqrt{\nu\rho}\,(m-n)$ est réel et égal à son conjugué $\sqrt{\nu_0\rho_0}\,(m_0-n_0)$.

En tenant compte de cette remarque, l'expression de $\frac{\lambda}{\mu}$ se simplifie et devient

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\sqrt{\nu\nu_0}}{\sqrt{\rho\rho_0}}. \tag{39}$$

Portant cette valeur dans l'expression (30), la forme d'Hermite correspondant au point M s'écrit

$$\sqrt{\nu\nu_0}\,(x-my)(x_0-m_0y_0)+\sqrt{\rho\rho_0}\,(x-ny)(x_0-n_0y_0).$$

Un calcul absolument analogue au précédent donnera pour le *point* M_{12} situé sur la première droite F et la deuxième droite F′

$$\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{\sqrt{\nu\nu_0}}{\sqrt{\rho\rho_0}} \tag{40}$$

Pour le *point* M_{21}

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{\sqrt{\nu\rho_0}}{\sqrt{\nu_0\rho}}. \tag{41}$$

Pour le *point* M_{22}

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=-\frac{\sqrt{\nu\rho_0}}{\sqrt{\nu_0\rho}}=\frac{\sqrt{-\nu\rho_0}}{-\sqrt{-\nu_0\rho}}. \tag{42}$$

Finalement, nous obtenons les quatre formes d'Hermite

$$\left.\begin{array}{ll}
(M_{11}) & \sqrt{\nu\nu_0}\,(x-my)(x_0-m_0y_0)+\sqrt{\rho\rho_0}\,(x-ny)(x_0-n_0y_0)\\
(M_{12}) & \sqrt{\nu\nu_0}\,(x-my)(x_0-m_0y_0)-\sqrt{\rho\rho_0}\,(x-ny)(x_0-n_0y_0)\\
(M_{21}) & \sqrt{\nu\rho_0}\,(x-my)(x_0-n_0y_0)+\sqrt{\nu_0\rho}\,(x-ny)(x_0-m_0y_0)\\
(M_{22}) & \sqrt{-\nu\rho_0}\,(x-my)(x_0-n_0y_0)-\sqrt{-\nu_0\rho}\,(x-ny)(x_0-m_0y_0)
\end{array}\right\} \tag{43}$$

et l'on voit que ce sont bien des formes d'Hermite ordinaires correspondant à des points et plans réels. (Cela est évident pour les deux premières; quant aux deux dernières, elles sont la somme de deux formes d'Hermite généralisées, dont les coefficients sont respectivement *conjugués*.)

21. *Perpendiculaires communes à deux droites.* — L'analogue, en géométrie cayleyenne, des perpendiculaires élevées à une droite (Δ) par un point de cette droite, sont les droites menées par le point et rencontrant la conjuguée (D) de (Δ) par rapport à l'absolu. Il suit de là que ces droites sont aussi perpendiculaires à (D). Si nous considérons deux couples de droites (Δ, D) et (Δ', D') n'ayant aucun point commun, il y aura, comme l'enseigne la géométrie classique, deux droites (d) et (δ) rencontrant à la fois ces quatre droites. Ainsi deux droites (D) et (D') admettent en géométrie cayleyenne deux perpendiculaires communes, (d) et (δ); leurs conjuguées (Δ) et (Δ') admettent les mêmes perpendiculaires communes, et les droites (d) et (δ) sont conjuguées. Nous allons chercher la forme de Dirichlet qu'elles représentent.

Soit

$f = (\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ la forme que représentent (D) et (Δ),

$f' = (\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}')$ » » » (D') et (Δ'),

$J = (\mathcal{A}''\mathcal{B}''\mathcal{C}'')$ » » » (d) et (δ);

on devra avoir

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathcal{C}'' + \mathcal{C}\mathcal{A}'' - 2\mathcal{B}\mathcal{B}'' = 0 \\ \mathcal{A}'\mathcal{C}'' + \mathcal{C}'\mathcal{A}'' - 2\mathcal{B}'\mathcal{B}'' = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\mathcal{A}'' : -2\mathcal{B}'' : \mathcal{C}'' :: \mathcal{A}\mathcal{B}' - \mathcal{B}\mathcal{A}' : \mathcal{C}\mathcal{A}' - \mathcal{A}\mathcal{C}' : \mathcal{B}\mathcal{C}' - \mathcal{C}\mathcal{B}'.$$

La forme $(\mathcal{A}''\mathcal{B}''\mathcal{C}'')$ peut donc s'écrire

$$J = \begin{vmatrix} \mathcal{A}X + \mathcal{B}Y & \mathcal{B}X + \mathcal{C}Y \\ \mathcal{A}'X + \mathcal{B}'Y & \mathcal{B}'X + \mathcal{C}'Y \end{vmatrix}$$

et par suite la forme de Dirichlet, qui représente les perpendiculaires communes aux droites représentées par deux formes de Dirichlet F et F', est le *covariant* J *des deux formes* F *et* F',

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial X} & \dfrac{\partial F}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial F'}{\partial X} & \dfrac{\partial F'}{\partial Y} \end{vmatrix}. \tag{44}$$

Le déterminant $\mathfrak{D}''$ de la forme J ou $(\mathcal{A}''\mathcal{B}''\mathcal{C}'')$ en fonction des invariants $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, H de F et F' est donné par

$$4\mathfrak{D}'' = H^2 - 4\mathfrak{D}\mathfrak{D}'. \tag{45}$$

Il sera donc en général nécessaire de multiplier les coefficients de J par un facteur complexe convenable pour rendre $\mathfrak{D}''$ réel et négatif.

La considération des droites J va nous permettre de résoudre le problème suivant : *que représente la forme de Dirichlet $f+\lambda f'$, où λ est un paramètre complexe?*

Pour chaque valeur de λ, $f+\lambda f'$ représente un couple de droites. λ étant un paramètre complexe, $f+\lambda f'$ représente, pour l'ensemble des valeurs de λ, une double infinité de ces couples, c'est-à-dire une congruence. Écrivons que la première droite $f+\lambda f'$ passe par un point donné (abc) ; il vient une équation du premier degré en λ. Donc il passe une (première) droite $f+\lambda f'$ par un point donné, c'est-à-dire que nous avons affaire à une congruence linéaire. Je dis que *cette congruence est l'ensemble doublement infini des droites s'appuyant sur les droites J.* Cherchons en effet s'il est possible de trouver un couple de droites, $f''(\mathcal{A}''\mathcal{B}''\mathcal{C}'')$, rencontrant constamment le couple $(f+\lambda f')$. On devra avoir

$$\mathcal{A}''(\mathcal{C}+\lambda\mathcal{C}')+\mathcal{C}''(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{A}')-2\mathcal{B}''(\mathcal{B}+\lambda\mathcal{B}')\equiv 0$$

ou

$$(\mathcal{A}''\mathcal{C}+\mathcal{C}''\mathcal{A}-2\mathcal{B}''\mathcal{B})+\lambda(\mathcal{A}''\mathcal{C}'+\mathcal{C}''\mathcal{A}'-2\mathcal{B}''\mathcal{B}')\equiv 0$$

et nous retombons par conséquent sur les relations qui nous ont donné les coefficients de la forme J.

CHAPITRE III

LA MÉTRIQUE CAYLEYENNE

22. *Distance de deux points.* — La distance de deux points M et M′ de l'espace cayleyen est définie comme il suit :

Soit A, B, les deux points où la droite MM′ rencontre l'absolu, $\mathcal{R}$(M′MAB) le rapport anharmonique des quatre points dans l'ordre indiqué, on pose

$$\overline{MM'} = \frac{1}{C} \operatorname{Log} \mathcal{R}(M'MAB), \tag{46}$$

expression où C est une constante, évidemment de dimensions inverses d'une longueur. Nous poserons suivant Darboux

$$C = \frac{2}{R} \tag{47}$$

R étant une longueur arbitraire [1].

Soient f et f' les deux formes d'Hermite représentant les deux points M et M′; la forme $f+\lambda f'$ représente un point de la droite MM′ et les valeurs de λ qui correspondent aux points A et B situés sur l'absolu sont donnés par l'équation du second degré

$$\Delta + I\lambda + \Delta'\lambda^2 = 0.$$

Soient donc $(0, \infty, \lambda_1, \lambda_2)$ les valeurs du paramètre λ qui correspondent aux points (M, M′, A, B), on a

$$\mathcal{R}(M'MAB) = \frac{\infty - \lambda_1}{\infty - \lambda_2} : \frac{0-\lambda_1}{0-\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{-I + \sqrt{I^2 - 4\Delta\Delta'}}{-I - \sqrt{I^2 - 4\Delta\Delta'}}.$$

Puisque, d'après (46) et (47),

$$d = \overline{MM'} = \frac{R}{2} \operatorname{Log} \mathcal{R},$$

---

(1) L'espace cayleyen hyperbolique est à courbure constante négative (Riemann, *Uber die Hypothesen....*; Klein, mém. de 1871). Avec ce choix de la constante C cette courbure est égale à $\frac{-1}{R^2}$. La trigonométrie est alors la même que sur une sphère de rayon Ri.

on a aussi

$$\mathcal{R} = e^{\frac{2d}{R}} = \frac{-I + \sqrt{I^2 - 4\Delta\Delta'}}{-I - \sqrt{I^2 - 4\Delta\Delta'}}$$

d'où l'on tire par un court calcul

$$\left(\frac{e^{\frac{d}{R}} + e^{-\frac{d}{R}}}{2}\right)^2 = ch^2 \frac{d}{R} = \frac{I^2}{4\Delta\Delta'}. \tag{48}$$

Telle est la relation entre les distances de deux points et l'invariant simultané absolu $\frac{I^2}{4\Delta\Delta'}$ des formes d'Hermite qui les représentent.

23. *Angle de deux plans.* — L'angle de deux plans μ et μ' est défini comme il suit : Soient α et β les deux plans tangents menés à l'absolu par leur intersection, on pose

$$\widehat{\mu\mu'} = \frac{1}{C'} \operatorname{Log} \mathcal{R}(\mu'\mu\alpha\beta). \tag{49}$$

Par extension des relations projectives de la géométrie euclidienne, on dira que les deux plans μ, μ' sont perpendiculaires lorsqu'ils seront conjugués par rapport au couple α, β, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{R}(\mu'\mu\alpha\beta) = -1$. Pour rendre $\widehat{\mu\mu'}$ égal à $\frac{\pi}{2}$ dans ce cas, on prendra la constante arbitraire C' égale à $2i$:

$$\widehat{\mu\mu'} = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \mathcal{R}(\mu'\mu\alpha\beta). \tag{50}$$

Soient maintenant f et f' deux formes d'Hermite, M, M' et μ, μ' les points et plans qu'elles représentent; le rapport anharmonique $\mathcal{R}(M'MAB)$ est égal au rapport anharmonique $\mathcal{R}(\mu'\mu\alpha\beta)$ par dualité ; si donc on pose $\theta = \widehat{\mu\mu'}$, on aura immédiatement, sans qu'il soit nécessaire de reprendre le calcul précédent,

$$\frac{2d}{R} = \log \mathcal{R} = 2i\theta, \tag{51}$$

d'où

$$\cos^2\theta = \frac{I^2}{4\Delta\Delta'} \tag{52}$$

24. *Discussion des formules précédentes.* — Les formules (48) et (52) montrent que la distance de deux points, comme l'angle de deux plans, sont susceptibles d'une double série de déterminations. Soient d_1 et θ_1 l'une de ces déterminations, les autres sont comprises dans les formules

$$\begin{gathered} \frac{d}{R} = \pm\left(\frac{d_1}{R} + ki\pi\right), \\ \theta = \pm(\theta_1 + k\pi) \end{gathered} \tag{53}$$

k étant un nombre entier quelconque positif, négatif ou nul.

L'indétermination exprimée par le double signe $\pm$ est factice et provient d'une élévation au carré au cours de nos calculs ; l'une des séries de valeurs correspond évidemment à la distance $\overline{MM'}$ et à l'angle $\widehat{\mu\mu'}$, et l'autre à la distance $\overline{M'M}$ et à l'angle $\widehat{\mu'\mu}$, distinction expressément faite par les formules (46) et (49). Mais l'indétermination qui substiste à l'intérieur de chacune des séries (53) ne peut être levée ; en raison de la définition de la distance à l'aide d'un logarithme il existe ici une périodicité pour les longueurs aussi bien que pour les angles.

Il est possible toutefois de définir une des déterminations de la distance MM′ de telle façon que cette détermination soit *réelle* lorsque les deux points M, M′ seront *intérieurs à l'absolu.* Nous poserons à cet effet

$$\frac{d_1}{R} = m + in$$

avec les conventions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{I^2}{4\Delta\Delta'} < 0, & m = -\arg sh\sqrt{\dfrac{-I^2}{4\Delta\Delta'}}, & n = \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 < \dfrac{I^2}{4\Delta\Delta'} < 1, & m = 0, & n = \operatorname{arc}\cos\sqrt{\dfrac{I^2}{4\Delta\Delta'}}, \\ 1 < \dfrac{I^2}{4\Delta\Delta'}, & m = \arg ch\sqrt{\dfrac{I^2}{4\Delta\Delta'}}, & n = 0. \end{array}\right.$$

La quantité $\frac{d_1}{R}$ décrira alors la ligne suivante dans le plan analytique (les valeurs correspondantes de $\frac{I^2}{4\Delta\Delta'}$ sont entre parenthèses) :

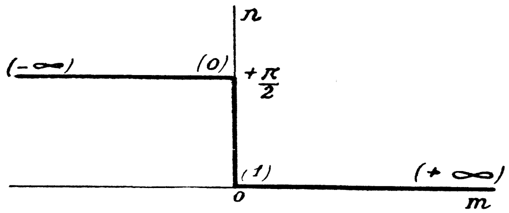


FIG. 2.

Voyons comment varie l'expression $\frac{I^2}{4\Delta\Delta'}$ avec les positions respectives de deux points M et M'. Supposons d'abord que la droite qui joint ces deux points rencontre l'absolu (première droite). On trouve alors facilement, en remplaçant (abc), $(a'b'c')$ par leurs expressions paramétriques (31)

$$I = (\lambda\mu' + \lambda'\mu)(m - n)(m_0 - n_0),$$

d'où

$$\frac{I^2}{4\Delta\Delta'} = \frac{(\lambda\mu' + \lambda'\mu)^2}{4\lambda\mu\lambda'\mu'},$$

$$= 1 + \frac{(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2}{4\lambda\mu\lambda'\mu'}.$$

De la première expression il résulte que si $\frac{\lambda}{\mu}$ et $\frac{\lambda'}{\mu'}$ sont de signes contraires (un point intérieur à l'absolu, l'autre extérieur), $\frac{I^2}{4\Delta\Delta'}$ est négatif.

De la seconde il résulte que si $\frac{\lambda}{\mu}$ et $\frac{\lambda'}{\mu'}$ sont de même signe (points tous deux extérieurs, ou tous deux intérieurs), $\frac{I^2}{4\Delta\Delta'}$ est positif et supérieur à l'unité.

Supposons maintenant que la droite MM' ne rencontre pas l'absolu (deuxième droite) les formules (33) donnent de même :

$$I = -(\lambda\lambda'_0 + \lambda_0\lambda')(m - n)(m_0 - n_0),$$

$$\frac{I^2}{4\Delta\Delta'} = \frac{(\lambda\lambda'_0 + \lambda_0\lambda')^2}{4\lambda\lambda_0\lambda'\lambda'_0},$$

$$= 1 + \frac{(\lambda\lambda'_0 - \lambda'\lambda_0)^2}{4\lambda\lambda_0\lambda'\lambda'_0}.$$

La première expression montre que $\frac{I^2}{4\Delta\Delta'}$ est toujours positif, la seconde, qu'il est toujours inférieur à l'unité (en effet, $\lambda\lambda'_0 - \lambda_0\lambda'$ est une imaginaire pure, dont le carré est négatif).

Nous pouvons donc établir le tableau suivant des déterminations de (d_1) :

TABLEAU I.

1 point intérieur, l'autre extérieur...	$\frac{I^2}{4\Delta\Delta'} < 0$	d_1 complexe, de la forme $m + Ri\frac{\pi}{2}$
2 points extérieurs, leur droite ne coupant pas l'absolu............	$0 < \frac{I^2}{4\Delta\Delta'} < 1$	d_1 imaginaire pure.
2 points intérieurs; ou bien 2 points extérieurs, leur droite coupant l'absolu	$1 < \frac{I^2}{4\Delta\Delta'}$	d_1 réel.

Telles sont les différentes circonstances qui peuvent se présenter. Nous n'oublierons pas que la distance $d = MM'$ n'est pas uniquement égale à d_1, mais aussi à d_1 augmenté ou diminué d'un nombre entier de périodes $Ri\pi$.

Il résulte en particulier de ce tableau que si nous désignons par ds^2 le carré de la détermination d_1 de la distance d'un point M à un point M' *infiniment voisin*, ds^2 sera positif pour toutes les directions autour de M, si M est intérieur à l'absolu; si au contraire M est extérieur à l'absolu, ds^2 sera positif à l'intérieur du cône de sommet M circonscrit à l'absolu et négatif à l'extérieur de ce cône (¹).

Les cas particuliers suivants méritent aussi d'être relevés.

Distance nulle. — La distance MM' est nulle, soit lorsque les points M et M' sont confondus, soit encore, d'après la définition (46), lorsque les points A et B sont confondus. *Les tangentes à l'absolu sont donc des droites de longueur nulle.*

Distance infinie. — La distance MM' est infinie lorsque l'un au moins des points M et M' est confondu avec l'un des points A et B. La distance d'un point M intérieur à l'absolu à un point M' voisin, qui est, nous l'avons vu, réelle dans toutes les directions, augmente donc indéfiniment lorsque M' se rapproche de l'absolu. *Par rapport aux points intérieurs, l'absolu se trouve tout entier à distance infinie.*

(¹) C'est à ce fait, dont les conséquences sont à présent familières, qu'il faut attribuer, croyons-nous, la répugnance qu'ont mise le plus souvent les géomètres à appliquer la métrique cayleyenne à l'espace « *inaccessible* ».

Si le point M′ franchit l'absolu, la distance M M′ prend (Tableau I) une valeur complexe. C'est d'après l'ensemble de ces faits que Darboux a appelé l'espace extérieur à l'absolu, *espace inaccessible.*

Distance de deux points conjugués. — Si les points M et M′ sont conjugués, on a $I = 0$ (par. 13), et par suite $d_1 = Ri\frac{\pi}{2}$, grandeur constante quels que soient les deux points conjugués. Par exemple, tous les points d'un plan sont à la distance $Ri\frac{\pi}{2}$ du pôle de ce plan.

Nous ne ferons pas la discussion détaillée de l'*angle de deux plans;* en vertu de la formule (51) nous poserons

$$\theta_1 = \frac{d_1}{Ri}$$

et nous rassemblerons les différents cas possibles dans le tableau suivant, simple traduction du tableau I.

TABLEAU II.

1 plan coupant l'absolu, l'autre non..	$\frac{I^2}{4\Delta\Delta'} < 0$	θ_1 complexe de la forme $\frac{\pi}{2} + i\alpha$
2 plans se coupant à l'intérieur de l'absolu	$0 < \frac{I^2}{4\Delta\Delta'} < 1$	θ_1 réel
2 plans ne coupant pas l'absolu; ou bien, 2 plans coupant l'absolu, leur intersection ne le coupant pas	$1 < \frac{I^2}{4\Delta\Delta'}$	θ_1 imaginaire pure.

L'angle θ des deux plans est égal à θ_1, augmenté ou diminué d'un multiple entier de la période π.

25. *Relations métriques entre deux droites.* — Soient $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, $(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}')$ deux formes d'Hermite. Nous porterons d'abord notre attention sur les premières droites qu'elles représentent. Ces deux droites (Δ) et (Δ') ont à l'intérieur de l'absolu une seule perpendiculaire commune (δ) [par. 21]. Par extension des définitions de la géométrie ordinaire, nous appellerons *distance* des deux droites (Δ) et (Δ') la longueur d du segment qu'elles découpent sur leur perpendiculaire commune, et *angle* de (Δ) et de (Δ') l'angle θ des deux plans (δ, Δ) et (δ, Δ'). La distance de deux points conjugués étant une constante, les deuxièmes droites (D) et (D′) découpent sur (δ)

un segment qui est aussi de longueur d, et les plans (δ, D), (δ, D') font aussi l'angle θ. De plus, en vertu de la formule (51), la longueur du segment découpé par (Δ) et (Δ') sur leur deuxième perpendiculaire commune est $Ri\theta$.

Nous allons chercher à relier les quantités d et θ aux invariants du système $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, $(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}')$.

A cet effet nous substituerons de nouveaux paramètres à ceux dont nous avons fait usage au Chapitre II. Pour définir la position d'un point sur une première droite (par. 17), nous poserons

$$\lambda = e^{-a}, \qquad \mu = e^{a};$$

comme les paramètres homogènes λ et μ étaient réels, a est aussi une quantité réelle. Pour définir la position d'un point sur une deuxième droite, nous poserons

$$\lambda = e^{-i\alpha}, \qquad \mu = e^{i\alpha} = \lambda_0;$$

la quantité $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ étant de module un, α est encore une quantité réelle. Enfin pour définir une forme de Dirichlet conjuguée à une forme donnée (par. 20) nous poserons

$$\nu = e^{-\mathbf{x}-i\mathbf{y}}, \qquad \rho = e^{\mathbf{x}+i\mathbf{y}}.$$

Avec ces notations la distance de deux points, de paramètre a et a', sur une première droite, sera

$$d = \frac{R}{2} \operatorname{Log} \frac{e^{2a'}}{e^{2a}} = R(a' - a)$$

et la distance des deux points α et α' sur une deuxième droite sera

$$d = \frac{R}{2} \operatorname{Log} \frac{e^{2i\alpha'}}{e^{2i\alpha}} = Ri(\alpha' - \alpha).$$

De plus, les points d'intersection de deux couples conjugués de droites (par. 20) seront définis comme il suit :

$$(M_{11}) \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \sqrt{\frac{\nu\nu_0}{\rho\rho_0}} \quad \text{devient} \quad a = \mathbf{x},$$

$$(M_{12}) \qquad \frac{\lambda}{\mu} = -\sqrt{\frac{\nu\nu_0}{\rho\rho_0}} \quad \text{»} \quad a = \mathbf{x} \pm i\frac{\pi}{2},$$

$$(M_{21}) \qquad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{\nu\rho_0}{\nu_0\rho}} \quad \text{»} \quad \alpha = \mathbf{y},$$

$$(M_{22}) \qquad \frac{\lambda}{\lambda_0} = -\sqrt{\frac{\nu\rho_0}{\nu_0\rho}} \quad \text{»} \quad \alpha = \mathbf{y} \pm \frac{\pi}{2}.$$

Considérons maintenant les couples de droites $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, $(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}')$ comme définis à partir du couple $(\mathcal{A}''\mathcal{B}''\mathcal{C}'')$ de leurs perpendiculaires communes par les paramètres complexes $(\mathbf{x} + i\mathbf{y})$ et $(\mathbf{x} + i\mathbf{y}')$. Les premières droites (Δ) et (Δ') rencontrent la première perpendiculaire commune aux points correspondants aux valeurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ du paramètre a, et par suite la distance de ces points est

$$d = \mathrm{R}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}).$$

Elles rencontrent la deuxième perpendiculaire commune aux points correspondants aux valeurs $\mathbf{y}$, et $\mathbf{y}'$ du paramètre α; par suite la distance de ces points est

$$\mathrm{R}i\theta = \mathrm{R}i(\mathbf{y}' - \mathbf{y}),$$

d'où

$$\theta = \mathbf{y}' - \mathbf{y}.$$

Or les invariants du système des deux formes

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}) &= \nu\,(x - my)^2 + \rho\,(x - ny)^2,\\ (\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}') &= \nu'(x - my)^2 + \rho'(x - ny)^2\end{aligned}$$

sont

$$\mathfrak{D} = -\nu\rho(m - n)^2, \qquad \mathfrak{D}' = -\nu'\rho'(m - n)^2, \qquad \mathrm{H} = (\nu\rho' + \nu'\rho)(m - n)^2;$$

on a par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{H}^2}{4\mathfrak{D}\mathfrak{D}'} &= \left(\frac{\nu\rho' + \nu'\rho}{4\nu\rho\nu'\rho'}\right)^2\\ &= \left(\frac{e^{\mathbf{x}'-\mathbf{x}+i\mathbf{y}'-i\mathbf{y}} + e^{-\mathbf{x}'+\mathbf{x}-i\mathbf{y}'+i\mathbf{y}}}{2}\right)^2\\ &= ch^2(\mathbf{x}' - \mathbf{x} + i\mathbf{y}' - i\mathbf{y})\\ &= ch^2\left(\frac{d}{\mathrm{R}} + i\theta\right).\end{aligned} \tag{54}$$

26. Appliquons cette formule au *cas de deux droites coupant l'absolu et qui se rencontrent.* — Supposons pour faciliter la discussion qu'on ait rendu $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ réels et négatifs. Puisque ces droites se rencontrent, on doit avoir $d = 0$. Si elles se rencontrent à l'intérieur de l'absolu, θ est réel, et l'on a

$$- \quad ch\left(\frac{d}{\mathrm{R}} + i\theta\right) = \cos\theta = \frac{\mathrm{H}}{2\sqrt{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}}.$$

H est donc réel et compris entre $\pm 2\sqrt{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}$. Si elles se rencontrent à l'extérieur de l'absolu, θ est une imaginaire pure ($\theta = in$) (Tableau II) et l'on a

$$ch\left(\frac{d}{R} + i\theta\right) = ch(i.n.i) = ch\, n = \frac{H}{2\sqrt{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}}.$$

H est donc réel et supérieur à $+2\sqrt{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}$. Si H était réel et inférieur à $-2\sqrt{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}$, on rentrerait dans le cas précédent en changeant de signe les coefficients de l'une des formes. Ainsi nous vérifions bien la condition (H *réel*) trouvée au paragraphe 20 pour que deux premières droites se rencontrent dans l'espace projectif, mais nous voyons que pour qu'elles se rencontrent à *l'intérieur de l'absolu*, il faut encore que H soit *compris entre* $\pm 2\sqrt{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}$, condition dont nous nous servirons dans la Deuxième Partie (par. 79).

27. On peut démontrer directement que la distance de deux points P et P', appartenant aux segments intérieurs à l'absolu de deux droites (Δ) et (Δ'), admet un minimum, et trouver les points correspondants, par le calcul suivant [1] :

Soit a le paramètre réel définissant la position du point P sur la droite (Δ) joignant les points d'affixe m et n de l'absolu ; b, p, q, les quantités correspondantes relatives au point P' et à la droite (Δ').

La distance PP' est donnée par la formule (48),

$$ch^2\frac{d}{R} = \frac{I^2}{4\Delta\Delta'}$$

et l'on a

$$\Delta = (m-n)(m_0 - n_0), \qquad \Delta' = (p-q)(p_0 - q_0),$$
$$I = e^{-a-b}(m-p)(m_0-p_0) + e^{-a+b}(m-q)(m_0-q_0)$$
$$+ e^{a-b}(n-p)(n_0-p_0) + e^{-a-b}(n-q)(n_0-q_0).$$

Posons

$$(m-p)(m_0-p_0) = e^{c_1}, \qquad (m-q)(m_0-q_0) = e^{c_2},$$
$$(n-p)(n_0-p_0) = e^{c_3}, \qquad (n-q)(n_0-q_0) = e^{c_4},$$

---

[1] Ce calcul est imité de celui que Darboux, dans ses *Principes de Géométrie analytique* (par. 193), fait pour l'espace riemannien. Dans l'espace riemannien on a des cosinus circulaires au lieu de cosinus hyperboliques, aussi la distance PP' admet-elle un minimum *et un maximum*.

il vient par un calcul simple

$$2\sqrt{\Delta\Delta'}\, ch\frac{d}{R} = e^{\frac{c_1+c_4}{2}}\, ch\left(a+b-\frac{c_1-c_4}{2}\right) + e^{\frac{c_2+c_3}{2}}\, ch\left(a-b-\frac{c_2-c_3}{2}\right).$$

Les a, b, c, étant réels, les cosinus hyperboliques varient de $+1$ à $+\infty$ et le premier membre atteint son minimum lorsque l'on a simultanément

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{c_1-c_4}{2}, \\ a-b=\dfrac{c_2-c_3}{2} \end{cases}$$

ce qui définit les points P et P', pieds sur les droites (Δ) et (Δ') de leur perpendiculaire commune; et, en désignant par $|\alpha|$ le module $\sqrt{\alpha\alpha_0}$ d'une imaginaire α, la distance d de ces deux points (plus courte distance des deux droites) est donnée par

$$ch\frac{d}{R} = \frac{|m-p|\,|n-q| + |m-q|\,|n-p|}{|m-n|\,|p-q|}. \tag{55}$$

— On pourrait encore se proposer de chercher l'expression de la distance d'un point à une droite, à laquelle correspond par dualité l'angle d'une droite et d'un plan. Ce problème sera plus facilement résolu lorsque nous pourrons faire usage des déplacements cayleyens, que nous allons étudier à présent.

CHAPITRE IV

LES DÉPLACEMENTS CAYLEYENS

28. Nous établirons dans ce chapitre, à l'aide des résultats obtenus précédemment, ce théorème à présent classique (Poincaré-Klein) qu'une transformation homographique à coefficients complexes

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{56}$$

ou $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, correspond à un déplacement de l'espace cayleyen. Nous compléterons ce théorème par quelques remarques, peut-être moins connues, qui nous seront utiles dans la Deuxième Partie de ce travail.

Nous commencerons par traiter le problème plus général suivant : Trouver toutes les homographies de l'espace conservant une quadrique. Il faut, puisqu'une pareille transformation fait correspondre une droite à une droite, qu'une génératrice rectiligne de la quadrique proposée corresponde à une génératrice, soit du même système, soit du système opposé. On rencontre ainsi deux groupes continus de transformations, mais un seul contient des substitutions infiniment voisines de la substitution identique, celui qui fait correspondre entre elles les génératrices d'un même système ; c'est celui des *déplacements*, que nous considérons seul ; l'autre est celui des *symétries*. Soient λ et μ les paramètres définissant les génératrices de l'un et l'autre système ; la correspondance entre génératrices d'un même système devant être algébrique, et bi-linéaire, on aura les deux homographies

$$\lambda' = S(\lambda) \quad \text{et} \quad \mu' = T(\mu). \tag{57}$$

Chacune de ces homographies admet deux racines doubles. Il y a donc en tout quatre génératrices de la quadrique proposée, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, qui se correspondent à elles-mêmes ; non pas point par point, mais dans leur ensemble. Les points ABCD où ces génératrices se rencontrent deux à deux sont les points doubles d'une homographie de l'espace, conservant la quadrique. Si l'on prend ABCD pour tétraèdre de référence, cette homographie a pour équations

$$x'_1 = g_1 x_1, \qquad x'_2 = g_2 x_2, \qquad x'_3 = g_3 x_3, \qquad x'_4 = g_4 x_4. \tag{58}$$

Avec des unités de longueur convenables l'équation de la quadrique peut s'écrire

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0.$$

Définissons alors les deux systèmes de génératrices par les proportions

$$\lambda : \mu : \lambda\mu : 1 :: x_1 : x_2 : x_3 : x_4 \tag{59}$$

les homographies (57) prendront la forme simplifiée

$$\lambda' = k\lambda, \qquad \mu' = h\mu. \tag{60}$$

Les génératrices λ' μ' correspondant au point (x'_i) transformé du point (x_i) par l'homographie (58) ou (60) seront données par

$$\lambda' : \mu' : \lambda'\mu' : 1 :: x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 \tag{61}$$

et par suite les deux groupes de coefficients $(g_1 g_2 g_3 g_4)$ et (k, h) définissant la même homographie de l'espace seront liés par

$$k : h : kh : 1 :: g_1 : g_2 : g_3 : g_4. \tag{62}$$

Soient (D) et (Δ) les deux arêtes du tétraèdre ABCD qui ne sont pas des génératrices de la quadrique. L'homographie de l'espace considéré effectue sur les points de (D) une homographie qui est la même que celle des plans, $x_1 + \sigma x_2 = 0$, passant par (Δ), et dont par suite le multiplicateur est

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{k}{h}. \tag{63}$$

De même l'homographie des points situés sur (Δ) est la même que celle des plans, $x_3 + \tau x_4 = 0$, passant par (D), et par suite son multiplicateur est

$$\frac{g_3}{g_4} = kh. \tag{64}$$

29. Nous n'avons fait dans le paragraphe précédent aucune hypothèse sur la réalité des éléments dont nous nous sommes servis. Reprenons à présent le tétraèdre de référence *réel* ABCD des Chapitres II et III et cherchons les homographies *réelles* de l'espace qui conservent la quadrique *absolu*

$$x^2 + y^2 - zt = 0. \tag{12}$$

Les génératrices de cette quadrique réelle convexe, passant par un point $(xyzt)$, sont données par

$$\frac{\lambda+\mu}{2} : \frac{\lambda-\mu}{2i} : \lambda\mu : 1 :: x : y : z : t. \tag{16}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, il faut, pour que le point $(xyzt)$ soit réel, que la quantité μ soit conjuguée de λ ; mais, de plus, ici, pour que la transformation soit réelle, il faut que la transformée μ' de μ soit conjuguée de la transformée λ' de λ, autrement dit, que les coefficients des transformations S et T (57) soient conjugués. Nous devons donc poser finalement

$$\lambda = \mathrm{Z}, \quad \mu = \mathrm{Z}_0, \quad \mathrm{S}(\lambda) = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}, \quad \mathrm{T}(\mu) = \frac{\alpha_0\mu+\beta_0}{\gamma_0\mu+\delta_0}. \tag{65}$$

De la sorte, et au moyen d'une suite assez étendue de conventions, nous faisons correspondre à toute substitution (56) $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ une homographie réelle de l'espace, qui conserve la quadrique *absolu*. Cette homographie, remarquons-le, sera la même pour tout ensemble de quatre quantités complexes $(\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta')$ proportionnelles à $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ à un facteur complexe près [1].

30. L'homographie de l'espace qui correspond à la substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ conserve deux génératrices (imaginaires) de chaque système ; les génératrices conservées du système (λ) ont pour paramètres m et n les racines de l'équation

$$\mathrm{Z} = \frac{\alpha\mathrm{Z}+\beta}{\gamma\mathrm{Z}+\delta}$$

ou

$$\gamma\mathrm{Z}^2 + (\delta-\alpha)\mathrm{Z} - \beta = 0,$$

et les génératrices conservées du système (μ) ont pour paramètres m_0 et n_0. Les points M et N, d'affixe m et n sur la quadrique, sont les deux seuls points réels de l'absolu qui soient conservés ; l'homographie considérée conserve, dans leur

---

[1] Algébriquement la substitution $(x', y' ; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ transforme la forme d'Hermite (abc) en une forme $(a'\,b'\,c')$, et l'on a :

$$\begin{cases} a' = \delta\delta_0 a - \delta_0\gamma b - \delta\gamma_0 b_0 + \gamma\gamma_0 c, \\ b' = -\delta_0\beta a + \delta_0\alpha b + \gamma_0\beta b_0 - \gamma_0\alpha c, \\ c' = \beta\beta_0 a - \beta_0\alpha b - \beta\alpha_0 b_0 + \alpha\alpha_0 c. \end{cases}$$

ensemble, la droite réelle MN ou (Δ) et sa conjuguée PQ ou (D) (*fig. 1*). A ces deux droites (Δ) et (D) nous avons fait correspondre (par. 14) la forme de Dirichlet ($\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$) qui a pour zéros m et n, c'est-à-dire

$$\gamma x^2 + (\delta - \alpha)xy - \beta y^2. \tag{66}$$

On voit ainsi à quel fait géométrique (conservation des droites réelles (Δ), (D) par une homographie réelle de l'espace conservant l'absolu) correspond, *grâce à nos conventions*, le fait analytique que la substitution (56) (et les substitutions semblables), conserve la forme ($\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$) (et les formes semblables).

Examinons de plus près quelles sont les homographies effectuées sur ces droites (Δ) et (D). Nous connaissons leurs points doubles, réels pour la première (M et N), imaginaires conjugués pour la seconde (P et Q). Il reste à déterminer leurs multiplicateurs. Soit $M = \rho e^{i\varphi}$ le multiplicateur de la substitution $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, mise sous la forme

$$\frac{z' - m}{z' - n} = M \frac{z - m}{z - n}.$$

D'après les équations (65), la substitution $T(\mu)$ doit être la substitution conjuguée de $S(\lambda)$; elle a donc pour multiplicateur $M_0 = \rho e^{-i\varphi}$; donc, d'après les équations (62), les coefficients (g_i) de l'homographie de l'espace, rapportée au tétraèdre de ses points doubles MNPQ, sont donnés par

$$M : M_0 : MM_0 : 1 :: g_1 : g_2 : g_3 : g_4. \tag{67}$$

Finalement, l'homographie réelle à points doubles imaginaires faite sur (D) aura pour multiplicateur, d'après (63),

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{M}{M_0} = e^{2i\varphi}$$

et l'homographie réelle à points doubles réels, faite sur (Δ), aura pour multiplicateur, d'après (64),

$$\frac{g_3}{g_4} = MM_0 = \rho^2.$$

Nous aurons besoin de ce résultat dans la Deuxième Partie (par. 92).

31. Interprétons à présent cette homographie de l'espace en utilisant la métrique cayleyenne. Le fait essentiel est que cette transformation ponctuelle est *un déplacement cayleyen*. En effet, une homographie conserve les rapports anharmoniques; donc les distances et les angles de l'espace cayleyen, qui sont définis par des rapports anharmoniques, seront conservés. Sous une autre forme, exactement équivalente, nous pourrions dire qu'une substitution linéaire conserve les invariants absolus $\frac{I^2}{4\Delta\Delta'}$ et $\frac{H^2}{4\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}$, et par suite les éléments métriques que nous leur avons rattachés.

Ce déplacement cayleyen conserve deux droites, les droites (Δ) et (D). C'est un déplacement hélicoïdal autour de *chacune* de ces droites. En effet, si nous nous servons pour définir la position d'un point sur ces droites des paramètres a, α introduits au paragraphe 25, nous avons, d'après ce qui précède, pour l'homographie effectuée sur les points de (Δ),

$$e^{2a'} = e^{2a} \times \rho^2$$

d'où

$$a' = a + \operatorname{Log} \rho\,,$$

c'est donc une translation de longueur $R \log \rho$; et pour l'homographie effectuée sur les points de (D)

$$e^{2i\alpha'} = e^{2i\alpha} \times e^{2i\varphi}$$

où

$$\alpha' = \alpha + \varphi$$

c'est donc une translation de longueur $Ri\varphi$. L'homographie de l'espace est donc, si l'on veut, le produit d'une translation de $R \log \rho$ le long de (Δ) et d'une rotation de φ autour de (Δ), ou bien d'une translation de $Ri\varphi$ le long de (D) et d'une rotation de $\left(\frac{\operatorname{Log} \rho}{i}\right)$ autour de (D).

On sait que l'on distingue différents types de substitutions $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ d'après la valeur de leur multiplicateur M. Si l'on suppose distincts les points doubles m et n comme nous l'avons fait jusqu'ici, la substitution sera dite *elliptique*, si M est de module unité ($M = e^{i\varphi}$); *hyperbolique*, si M est une quantité réelle et positive ($M = \rho$); *loxodromique*, dans le cas général ($M = \rho e^{i\varphi}$). Dans l'espace intérieur à l'absolu où les distances et les angles sont réels, une substitution elliptique correspondra, d'après ce qui précède, à une rotation d'angle φ autour de la droite (Δ); une substitution hyperbolique, à une translation de longueur $R \log \rho$ le long de (Δ), et une substitution loxodromique, à un déplacement hélicoïdal ($R \log \rho$, φ) conservant (Δ).

32. Un cas particulier remarquable est celui où l'on a $M = e^{i\pi} = -1$. D'après les proportions (67) les équations de ce déplacement particulier, rapporté au tétraèdre formé par les génératrices conservées et les droites (D) et (Δ), sont,

$$X' = -X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = Z, \quad T' = T. \tag{68}$$

C'est une rotation de π autour de la droite $X = Y = 0$, ou (Δ), et pour cette raison nous l'appellerons un *retournement*. La droite (Δ) est conservée point par point. Sur la droite (D) on a, à première vue, une translation de $Ri\pi$, mais $Ri\pi$ est précisément la période de la fonction *distance* d'après le paragraphe 24, et par suite la droite (D), ou $Z = T = 0$, est, elle aussi, conservée point par point comme le montrent d'ailleurs les formules (68).

Soit M' le point transformé d'un point M quelconque de l'espace par ce retournement; la droite MM' rencontre les droites (Δ) et (D) en m et m', l'absolu en A et B; le point M' est conjugué de M soit par rapport au couple mm', soit par rapport au couple AB. On sait qu'on appelle *homologie biaxiale*, ou de Sylvester [1], la transformation qui fait correspondre à tout point M de l'espace le point M', situé sur la droite passant par M et rencontrant deux droites fixes (Δ) et (D), tel que le rapport anharmonique $\mathcal{R}(MM'mm')$ ait une valeur donnée K. Les droites (D) et (Δ) sont conservées point par point. Un retournement est donc un cas particulier d'homologie biaxiale, dans lequel les droites (D) et (Δ) sont conjuguées par rapport à l'absolu et le rapport anharmonique K égal à -1. Un retournement une fois répété ramène à leur position de départ tous les points de l'espace; la substitution elliptique correspondante, dont le carré est la substitution identique, est dite *d'ordre deux*.

33. Il importe de pouvoir trouver rapidement le multiplicateur d'une substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ donnée. Ce multiplicateur M restant le même ainsi que les points doubles, m et n, pour toutes les substitutions semblables à la substitution donnée, nous conviendrons de prendre pour représentant de ces substitutions celle d'entre elles dont le déterminant est égal à l'unité :

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Nous dirons que cette substitution est mise sous la forme *modulaire*.

---

[1] Darboux, *Principes de Géométrie analytique*, Livre I, Chap. V.

La substitution

$$\frac{z'-m}{z'-n} = \mathrm{M}\frac{z-m}{z-n}$$

s'écrit, en la résolvant en z',

$$z' = \frac{(m-\mathrm{M}n)z + (\mathrm{M}-1)mn}{(1-\mathrm{M})z + (\mathrm{M}m-n)};$$

son déterminant étant $\mathrm{M}(m-n)^2$, elle s'écrit encore, cette fois sous la forme modulaire,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{m-\mathrm{M}n}{\sqrt{\mathrm{M}}(m-n)} & \dfrac{(\mathrm{M}-1)mn}{\sqrt{\mathrm{M}}(m-n)} \\ \dfrac{1-\mathrm{M}}{\sqrt{\mathrm{M}}(m-n)} & \dfrac{\mathrm{M}m-n}{\sqrt{\mathrm{M}}(m-n)} \end{pmatrix}$$

et l'on a en l'identifiant avec la substitution modulaire $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$,

$$\alpha + \delta = \frac{1+\mathrm{M}}{\sqrt{\mathrm{M}}} = \mathrm{M}^{\frac{1}{2}} + \mathrm{M}^{-\frac{1}{2}}. \tag{69}$$

Le multiplicateur M de $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ ne dépend donc que de la somme $\varepsilon = \alpha + \delta$ des coefficients extrêmes. On peut encore, en posant

$$c = \frac{(\alpha+\delta)^2}{2} - 1 \tag{70}$$

mettre la relation (69) sous la forme

$$\mathrm{M}^2 - 2c\mathrm{M} + 1 = 0 \tag{71}$$

équation réciproque du second degré, dont les racines s'échangent lorsqu'on permute les points m et n, supposés distincts.

Nous venons de voir que si $\mathrm{M} = \rho\varepsilon^{i\varphi}$, le déplacement hélicoïdal correspondant est une translation de longueur $d = \mathrm{R} \log \rho$ suivi d'une rotation d'angle φ. On a donc

$$\begin{aligned} ch\left(\frac{d}{\mathrm{R}} + i\varphi\right) &= ch(\mathrm{Log}\, \rho + i\varphi), \\ &= ch\, \mathrm{Log}\, \mathrm{M}, \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{M} + \frac{1}{\mathrm{M}}\right) \end{aligned}$$

et finalement

$$ch\left(\frac{d}{R}+i\varphi\right)=c. \tag{72}$$

Cette relation très simple donne les éléments géométriques du déplacement cayleyen correspondant à la substitution modulaire $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. La discussion des différents types de substitution s'ensuit immédiatement :

c réel, $-1 < c < 1$: substitution elliptique, rotation d'angle φ,

$$\cos\varphi = c;$$

c réel et > 1 : substitution hyperbolique, translation de longueur d,

$$ch\frac{d}{R}=c;$$

tous autres cas : substitution *loxodromique*; déplacement hélicoïdal de longueur d et d'angle φ,

$$ch\left(\frac{d}{R}+i\varphi\right)=c.$$

Comme cas limites, $c=-1$ correspond à un *retournement* (rotation d'angle π) et $c=1$ correspond aux substitutions *paraboliques* à points doubles confondus.

34. Nous allons donner deux applications des remarques qui précèdent. La première est relative à la *décomposition d'un déplacement cayleyen en deux retournements*.

Soit $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ une substitution à points doubles distincts m et n, et de multiplicateur M. Le déplacement correspondant est un déplacement hélicoïdal autour de la (première) droite

$$(x-my)(x-ny).$$

Cherchons une substitution qui conserve la (première) droite

$$\nu(x-my)^2+\rho(x-ny)^2$$

(rencontrant perpendiculairement la précédente, d'après le par. 20) et dont les coefficients extrêmes aient des valeurs opposées (retournement). On trouve facilement

$$\begin{pmatrix} \nu m + \rho n & -\nu m^2 - \rho n^2 \\ \nu + \rho & -\nu m - \rho n \end{pmatrix}.$$

Soit $(\nu'\rho')$ un autre retournement conservant la (première) droite

$$\nu'(x - my)^2 + \rho'(x - ny)^2.$$

Le produit de ces retournements est

$$\begin{pmatrix} \rho\nu' n - \rho'\nu m & mn(\rho'\nu - \rho\nu') \\ \rho\nu' - \rho'\nu & \rho'\nu n - \rho\nu' m \end{pmatrix}.$$

C'est une substitution qui a pour points doubles m et n ; pour l'identifier avec la substitution proposée il suffit d'écrire que son multiplicateur est égal à M. On trouve en la mettant sous la forme modulaire

$$\begin{aligned} \alpha + \delta &= -\frac{(\rho\nu' + \rho'\nu)(m - n)}{\sqrt{\rho\rho'\nu\nu'(m - n)^2}} \\ &= \left(\frac{\rho'\nu}{\rho\nu'}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\rho'\nu}{\rho\nu'}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'où d'après la relation (69)

$$\mathrm{M} = \frac{\rho'}{\nu'} : \frac{\rho}{\nu}. \tag{73}$$

Donc on peut effectuer le premier retournement autour d'une perpendiculaire quelconque $(\nu\rho)$ à l'axe du mouvement hélicoïdal, et la perpendiculaire $(\nu'\rho')$, axe du second retournement, sera déterminée par (73).

Mais, en faisant le même changement de paramètres qu'au paragraphe 25 on a

$$\frac{\rho'}{\nu'} : \frac{\rho}{\nu} = e^{2(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + i\,2(\mathbf{y}' - \mathbf{y})}$$

soit alors $\mathrm{M} = re^{i\varphi}$, et soient d et θ la distance et l'angle des axes de deux retournements, on aura

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{\mathrm{R}} &= \mathbf{x}' - \mathbf{x} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} r, \\ \theta &= \mathbf{y}' - \mathbf{y} = \frac{1}{2} \varphi. \end{aligned} \right.$$

Nous avons donc démontré, pour les déplacements cayleyens, ce théorème classique de la cinématique ordinaire, qu'*un déplacement hélicoïdal peut être décomposé d'une infinité de manières en deux retournements, la distance et l'angle des axes des deux retournements étant toujours égaux à la moitié de l'amplitude de la translation et de la rotation en lesquelles on peut aussi décomposer le mouvement hélicoïdal donné.* (Darboux, *Leçons sur la théorie générale des Surfaces*, t. IV, note V).

35. Comme deuxième application des retournements nous allons donner l'expression de la *distance d'un point à une droite.*

Soit f ou (abc) la forme d'Hermite correspondant au point donné A, soit F ou $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ la forme de Dirichlet correspondant à la droite donnée (Δ). Soit A' le point transformé de A par un retournement ayant pour axe la droite (Δ) ; la distance cherchée du point A à la droite (Δ) est évidemment $\frac{\mathrm{AA'}}{2}$.

La substitution elliptique d'ordre deux conservant la droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ s'écrit immédiatement, c'est $\begin{pmatrix} -\mathcal{B} & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix}$. Son déterminant étant $-\mathcal{B}^2+\mathcal{A}\mathcal{C}=-\mathcal{D}=+\mathrm{D}$, elle s'écrit sous la forme modulaire

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-\mathcal{B}}{\sqrt{\mathrm{D}}} & \dfrac{-\mathcal{C}}{\sqrt{\mathrm{D}}} \\ \dfrac{\mathcal{A}}{\sqrt{\mathrm{D}}} & \dfrac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathrm{D}}} \end{pmatrix}$$

Cette substitution appliquée à la forme (abc) la transforme en la forme $(a'b'c')$ correspondant au point A' et l'on a

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{D}a' &= a\mathcal{B}\mathcal{B}_0 - b\mathcal{B}_0\mathcal{A} - b_0\mathcal{B}\mathcal{A}_0 + c\mathcal{A}\mathcal{A}_0, \\ \mathrm{D}b' &= a\mathcal{B}_0\mathcal{C} - b\mathcal{B}_0\mathcal{B} - b_0\mathcal{C}\mathcal{A}_0 + c\mathcal{A}_0\mathcal{B}, \\ \mathrm{D}c' &= a\mathcal{C}\mathcal{C}_0 - b\mathcal{C}_0\mathcal{B} - b_0\mathcal{C}\mathcal{B}_0 + c\mathcal{B}\mathcal{B}_0. \end{aligned}\right.$$

Le discriminant Δ de la forme $(a'b'c')$ est égal au déterminant Δ de la forme (abc) puisque la substitution est de déterminant $+1$; quant à l'invariant simultané I, il se calcule aisément : on a

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= ac' + ca' - b_0b' - b'b_0 \\ &= \frac{1}{\mathrm{D}}(a^2\mathcal{C}\mathcal{C}_0 + c^2\mathcal{A}\mathcal{A}_0 + b^2\mathcal{C}_0\mathcal{A} + b_0^2\mathcal{C}\mathcal{A}_0 \\ &\qquad - 2ab\mathcal{B}\mathcal{C}_0 - 2ab_0\mathcal{B}_0\mathcal{C} - 2bc\mathcal{A}\mathcal{B}_0 - 2b_0c\mathcal{A}_0\mathcal{B} \\ &\qquad + 2ac\mathcal{B}\mathcal{B}_0 + 2bb_0\mathcal{B}\mathcal{B}_0). \end{aligned}$$

Si donc $2d$ est la distance AA', double de la distance d cherchée, on a d'après la formule (48)

$$ch^2\frac{2d}{R} = \frac{I^2}{4\Delta\Delta'} = \frac{I^2}{4\Delta^2}. \tag{74}$$

L'expression de I est compliquée ; nous la mettrons sous une forme plus simple et d'une interprétation intéressante en introduisant les quatre faces du tétraèdre MNPQ (*fig. 1*) dont les arêtes sont les droites (Δ) et (D) représentées par la forme ($\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$) et les quatre génératrices de l'absolu m, m_0, n, n_0.

En vertu des paragraphes 12 et 13 si un point (abc) appartient au plan de deux génératrices (λ, μ) de l'absolu on a

$$a\lambda\mu + b\mu + b_0\lambda + c = 0.$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned} M &= ann_0 + bn_0 + b_0n + c, \\ N &= amm_0 + bm_0 + b_0m + c, \\ P &= anm_0 + bm_0 + b_0n + c, \\ Q &= amn_0 + bn_0 + b_0m + c, \end{aligned}\right.$$

$M = 0$ sera la condition pour que le point (abc) appartienne à la face du tétraèdre MNPQ définie par les génératrices n et n_0, c'est-à-dire la face NPQ opposée au point M ; et ainsi des autres.

L'expression développée de DI s'écrit en fonction de m et n,

$$\begin{aligned} \frac{DI}{\mathcal{A}\mathcal{A}_0} = a^2mnm_0n_0 &+ c^2 + b^2m_0n_0 + b^2_0mn \\ &+ ab(m+n)m_0n_0 + ab_0(m_0+n_0)mn \\ &+ bc(m_0+n_0) + b_0c(m+n) \\ &+ \frac{1}{2}ac(m+n)(m_0+n_0) + \frac{1}{2}bb_0(m+n)(m_0+n_0). \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\frac{4D}{\mathcal{A}\mathcal{A}_0} = (m-n)(m_0-n_0);$$

cela posé, une simple identification montre que l'on a

$$\left\{\begin{aligned} MN &= \frac{DI}{\mathcal{A}\mathcal{A}_0} + \frac{2D\Delta}{\mathcal{A}\mathcal{A}_0}, \\ PQ &= \frac{DI}{\mathcal{A}\mathcal{A}_0} - \frac{2D\Delta}{\mathcal{A}\mathcal{A}_0} \end{aligned}\right.$$

où bien

$$\left\{\begin{aligned} 1 + 2\Delta &= \frac{\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0}{D}\,MN, \\ 1 - 2\Delta &= \frac{\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0}{D}\,PQ. \end{aligned}\right. \tag{75}$$

On a d'autre part l'identité

$$th^2\frac{d}{R} = \frac{ch\frac{2d}{R} - 1}{ch\frac{2d}{R} + 1},$$

d'où finalement l'expression de la distance d'un point à une droite à laquelle nous voulions arriver

$$th^2\frac{d}{R} = \frac{PQ}{MN}. \tag{76}$$

Les quantités M, N, P, Q sont nulles, rappelons-le, lorsque le point donné (abc) est sur l'une des faces du tétraèdre des génératrices de l'absolu défini par la droite donnée.

Les cas où la distance d est nulle ou infinie s'aperçoivent mieux sur la formule qui suit, équivalente à la précédente

$$th\frac{2d}{R} = \frac{2th\frac{d}{R}}{1 - th^2\frac{d}{R}} = \frac{2\sqrt{MNPQ}}{MN - PQ}.$$

D'après les équations (75) la relation $MN - PQ = 0$ équivaut à $\Delta = 0$. La distance d est donc nulle si le point (abc) appartient à l'une des quatre faces du tétraèdre MNPQ et elle est infinie, si le point est sur l'absolu. Ceci concorde bien avec l'étude des cas particuliers de la distance de deux points faite au paragraphe 24.

La relation (74), si on la complète par une convention de signes, définit sans ambiguïté la valeur de $ch\frac{2d}{R}$ et par suite ne définit la distance d qu'à la période $Ri\frac{\pi}{2}$ près. Ce résultat s'interprète de la manière suivante : la méthode que nous avons suivie ne distingue pas l'une de l'autre les deux droites (D) et (Δ) correspondant à la forme de Dirichlet $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$; si d est la distance du point A, représentatif de la forme d'Hermite (abc), à l'une de ces droites, d n'est défini qu'à la période $Ri\frac{\pi}{2}$ près, et la distance d' du même point à l'autre droite est donnée par

$$d' = d + Ri\frac{\pi}{2},$$

les points où la droite, issue de A et s'appuyant sur (Δ) et (D), rencontre ces deux droites, étant conjugués par rapport à l'absolu et par suite distants de $Ri\frac{\pi}{2}$. De même, si θ est l'angle de l'une des deux droites représentées par la forme ($\mathcal{ABC}$) avec le plan représenté par la forme (abc), on a, en vertu des formules (52) et (74),

$$\cos^2 2\theta = \frac{I^2}{4\Delta^2}, \tag{77}$$

et l'angle θ' de l'autre droite ($\mathcal{ABC}$) avec le plan (abc), satisfaisant également à l'équation (77), sera donné par

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

La formule (76) devient ici [1]

$$\mathrm{tg}^2\theta = -\frac{PQ}{MN}. \tag{78}$$

---

[1] M. Luckhaub (mém. cité) trouve pour l'angle d'une droite et d'un plan la formule (écrite avec nos notations)

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{D_{f\varphi}}{4\mathfrak{D}\Delta}} \tag{77 bis}$$

$D_{f\varphi}$ étant un invariant simultané de la forme d'Hermite f et de la forme de Dirichlet φ, qu'il définit ainsi :

$$\begin{aligned} D_{f\varphi} = {} & a^2\mathcal{C}\mathcal{C}_0 + b^2\mathcal{A}\mathcal{C}_0 + b_0^2\mathcal{A}_0\mathcal{C} + c^2\mathcal{A}\mathcal{A}_0 \\ & + 2(bb_0 + ac)\mathcal{B}\mathcal{B}_0 \\ & - 2(ab\mathcal{B}_0\mathcal{C} + ab\mathcal{B}\mathcal{C}_0 + b_0c\mathcal{A}_0\mathcal{B} + bc\mathcal{A}\mathcal{B}_0). \end{aligned}$$

On a donc $D_{f\varphi} = DI$ et les deux expressions de θ, (77) et (77 *bis*), sont bien équivalentes.

DEUXIÈME PARTIE

ARITHMÉTIQUE

CHAPITRE V

INTRODUCTION ET HISTORIQUE

36. Les résultats que nous allons exposer au cours de cette Deuxième Partie sont de nature arithmétique ; ils se rapportent à des groupes discontinus dont le premier exemple a été donné par M. Picard dans sa note *Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté du plan* (Bull. de la Soc. Mathém., mars 1884).

M. Picard considère la forme d'Hermite définie

$$XX_0 + xXY_0 + x_0X_0Y + (xx_0 + y^2)YY_0 \tag{79}$$

(x complexe, y réel positif) dont le discriminant est $\Delta = +y^2$. Il montre que la substitution $(X, Y; dX+bY, cX+aY)$, a, b, c, d complexes et $ad-bc=+1$, conduit à une substitution effectuée sur x et sur xx_0+y^2, ou bien, en posant

$$x = \xi + i\eta, \qquad y = \zeta,$$

à une transformation du demi-espace de Poincaré.

Si a, b, c, d sont des entiers complexes, nous avons un groupe improprement discontinu. A ce groupe M. Picard donne pour domaine fondamental le pentaèdre limité par les quatre plans verticaux

$$\xi = \pm\frac{1}{2}, \qquad \eta = \pm\frac{1}{2}$$

et par la sphère $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$.

Lorsque le point (ξ, η, ζ) est à l'intérieur de ce domaine la forme (79) est ***réduite***, d'après les conditions de réduction posées par Hermite (*J. de Crelle*, 1853).

37. A cette note, fondamentale dans sa brièveté, inaugurant l'étude du groupe à présent universellement appelé « *groupe de Picard* », il convient de joindre pour l'histoire des idées d'autres mémoires du même maître : *Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions* (Acta Math., 1882); *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies à indéterminées conjuguées* (Ann. Éc. Normale, 1884); *Sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées et les fonctions fuchsiennes* (Amer. Journal of Math., 1889).

Dans le premier de ces mémoires, M. Picard fonde la théorie des groupes fuchsiens, isomorphes aux groupes de substitutions qui conservent une forme indéfinie d'Hermite, et dans les suivants la développe dans différentes directions. Cette théorie est extrêmement étendue et a donné lieu, à la suite des mémoires fondamentaux de M. Picard, à de nombreux travaux, notamment de M. Bianchi et de M. Humbert. Nous la laisserons systématiquement de côté dans le présent travail. Nous noterons donc seulement, dans les mémoires cités, les points qui relèvent de l'étude du groupe de Picard. Ces points sont les suivants : Dans le mémoire de 1884, Chapitre III, paragraphes 8 et 9, M. Picard démontre qu'à une forme définie correspondent en général deux formes réduites équivalentes l'une à l'autre par la substitution $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ du groupe [1]. Dans le Chapitre IV, paragraphes 13 et 14, M. Picard forme toutes les substitutions qui transforment le domaine fondamental du groupe en un des domaines adjacents. Dans le mémoire de 1889, paragraphes 4 et 5, sont formées les substitutions elliptiques réduites du groupe de Picard, savoir :

$$1^{\text{er}} \text{ cas } \alpha + \delta = 0 \quad (1)\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} (2)\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} (3)\begin{pmatrix} -i & -i \\ 0 & i \end{pmatrix} (4)\begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 0 & i \end{pmatrix};$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas } \alpha + \delta = \pm 1 \quad (5)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (6)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (7)\begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} (8)\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

38. Dans les années suivantes, des groupes de substitutions linéaires généralisant dans différentes directions le groupe de Picard ont été étudiés par M. Bianchi dans trois mémoires des *Mathematische Annalen* :

---

(1) Il en résulte que le domaine fondamental du groupe de Picard, au sens de Poincaré, est limité par les plans verticaux

$$\xi = \pm \frac{1}{2}, \qquad \eta = 0, \qquad \eta = \frac{1}{2};$$

c'est le domaine que nous considérons au chapitre X.

Représentation géométrique des groupes linéaires à coefficients complexes avec application à la théorie des nombres (1891) ;

Sur les groupes de substitutions linéaires dont les coefficients appartiennent à des corps quadratiques imaginaires (1892) ;

Sur les groupes de substitutions linéaires (1893) ;

auxquels on peut ajouter une note intermédiaire dans les Comptes Rendus de l'Académie des *Lincei* (1891).

Dans le *premier mémoire*, M. Bianchi considère les substitutions linéaires dont les coefficients sont des membres de la forme $a+bi$ ou $a+b\varepsilon$ (ε racine cubique de l'unité) a et b étant des entiers ordinaires, c'est-à-dire des nombres des corps quadratiques imaginaires $\mathcal{C}(\sqrt{-1})$ et $\mathcal{C}(\sqrt{-3})$. Il forme leur domaine fondamental dans le demi-espace de Poincaré ; il donne les représentations géométriques dans ce demi-espace des formes d'Hermite, définies et indéfinies, et des formes de Dirichlet, que nous avons indiquées au Chapitre 1 ; et il effectue la réduction de ces formes. M. Bianchi se réfère au mémoire de M. Picard paru dans les *Annales de l'École Normale,* mais la note du *Bulletin de la Société de Mathématiques* lui avait échappé et dans la note des *Lincei* il « rend à l'insigne mathématicien la priorité qui lui est due ».

39. Dans le *second mémoire*, M. Bianchi considère les substitutions $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ dont les coefficients sont des entiers du corps quadratique $\mathcal{C}(\sqrt{-\mathrm{P}})$, c'est-à-dire sont du type $a+b\sqrt{-\mathrm{P}}$, a et b étant des entiers ordinaires quelconques, et P un entier sans facteurs carrés, multiple de 4 plus 1 ou plus 2. Ces substitutions forment le *groupe modulaire* Γ *du corps* $\mathcal{C}(\sqrt{-\mathrm{P}})$, $\mathrm{P} \equiv 1$ ou 2 (mod. 4). Lorsque $\mathrm{P} \equiv 3$ (mod. 4), M. Bianchi considère le groupe modulaire Γ du corps $\mathcal{C}(\sqrt{-\mathrm{P}})$ dont les entiers sont du type $a+b\,\dfrac{1+\sqrt{-\mathrm{P}}}{2}$, et le *groupe modulaire* Γ' *de l'anneau* $\mathcal{A}(\sqrt{-\mathrm{P}})$, dont les entiers sont seulement les nombres $a+b\sqrt{-\mathrm{P}}$. M. Bianchi démontre que le groupe Γ' est un sous-groupe du groupe Γ d'indice 10 ou 6, suivant que l'on a $\mathrm{P} \equiv 3$ ou 7 (mod. 8); il en résulte que le domaine fondamental de Γ' est constitué par 10 ou 6 domaines de Γ accolés. M. Bianchi construit le domaine fondamental du groupe modulaire Γ du corps $\mathcal{C}(\sqrt{-\mathrm{P}})$ en appliquant la méthode des symétries, due à M. Fricke. Il construit effectivement les domaines fondamentaux des corps $\mathcal{C}(\sqrt{-\mathrm{P}})$, $\mathrm{P} = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15$ et 19. La méthode des symétries ne résoud pas le problème pour une valeur quelconque de P ; M. Bianchi montre que la première valeur de P pour laquelle elle fait défaut est $\mathrm{P} = 14$. Il démontre ensuite que le groupe n'admet de substitutions elliptiques que des ordres deux et trois.

Dans la seconde partie de ce même mémoire, M. Bianchi traite de la réduction des formes d'Hermite et de Dirichlet, et du groupe reproductif d'une forme d'Hermite indéfinie; il en donne des exemples numériques.

Dans la troisième partie, M. Bianchi traite de l'involution et de l'orthogonalité des formes d'Hermite et de Dirichlet. Il démontre que pour qu'une demi-circonférence φ soit sur une demi-sphère f (formes d'Hermite f et de Dirichlet φ en involution), il faut : 1° que la norme du déterminant de φ soit un carré parfait; 2° que deux conditions, en nombre réels, soient réalisées. Et encore : qu'une forme de Dirichlet, pour laquelle $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_0$ est carré parfait, est en involution avec une infinité de formes d'Hermite; et que son groupe reproductif contient une infinité de substitutions hyperboliques.

L'orthogonalité d'une demi-circonférence φ et d'une demi-sphère f est étudiée ensuite et conduit à des résultats analogues (ce qui s'explique dans l'espace projectif complet; voir Chap. I, par. 8).

M. Bianchi effectue ensuite la réduction à la forme réelle du groupe automorphe Φ qui conserve la forme d'Hermite indéfinie $F = (1, 0, -\Delta)$.

Il trouve enfin la condition pour qu'un point F soit sur une sphère F′ (formes F et F′ en involution) et la condition pour que deux demi-sphères F et F′ soient orthogonales; ces deux conditions sont les mêmes (ce qui s'explique encore dans l'espace projectif complet). De même, suivant les cas, le covariant φ de deux formes d'Hermite F et F′ représente soit l'intersection des deux demi-sphères F et F′, soit la demi-circonférence orthogonale à la demi-sphère F passant par le point F′.

40. Dans son *troisième mémoire*, M. Bianchi effectue une nouvelle amplification du groupe modulaire Γ du corps $\mathfrak{C}(\sqrt{-P})$. Il considère les modules au sens de Dedekind (Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, Supp. XI, par. 168 de la 4ᵉ éd.) de base

$$M = \left[\sqrt{m}, \quad i\sqrt{\frac{P}{m}}\right]$$

où m est un diviseur quelconque de P, et les substitutions linéaires de déterminant $+1$ dont les coefficients sont des nombres de l'un de ces modules. Ces substitutions forment un groupe (¹) qui contient le groupe Γ comme sous-groupe invariant d'indice 2^{t-1}, si t est le nombre de facteurs premiers distincts du discriminant du corps ($4P$ si $P \equiv 1$ ou 2, P si $P \equiv 3 \bmod. 4$). La méthode des symétries permet alors de former le domaine fondamental du groupe amplifié pour certaines

(¹) Ce groupe amplifié a été rattaché par M. Humbert aux classes ambiguës du corps $\mathfrak{C}(\sqrt{-P})$ (*C. R.*, 8-15 mars 1920).

valeurs de P. M. Bianchi construit effectivement ce domaine pour $P = 5, 6, 10, 13, 14, 17, 21, 30$ et 39.

M. Bianchi étudie dans une deuxième partie le groupe reproductif de la forme $x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4$.

On est frappé de l'étendue des recherches de M. Bianchi sur cette question du groupe modulaire à coefficients complexes, et de leur approfondissement successif dans ces trois mémoires se suivant à intervalles rapprochés.

41. Nous arrivons maintenant aux recherches de M. Humbert. Elles ont été publiées dans plusieurs notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 23 août 1915 au 15 mars 1920.

Dans sa première note sur ce sujet (23 août 1915), M. Humbert donne une méthode pour former le domaine fondamental du groupe Γ du corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$, quel que soit $P \equiv 1$ ou $2 \pmod{4}$. Il détermine *a priori* les affixes des sommets de ce domaine situé dans le plan des $\xi\eta$, ou *sommets singuliers*, en les rattachant aux réduites de Gauss de déterminant $-P$, et il trouve le nombre de ces sommets.

M. Humbert dit qu'une forme d'Hermite définie (abc) est réduite, lorsque le plus petit nombre qui puisse être représenté proprement par la forme (son minimum propre) est son premier coefficient a, et que de plus on a les inégalités

$$-\frac{1}{2} < \frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{80}$$

Lorsque les coefficients sont des entiers complexes ordinaires $a + bi$, cette définition conduit aux conditions de réduction données par Hermite; dans le cas général, elle signifie que l'on doit avoir

$$a\lambda\lambda_0 + b\lambda_0\nu + b_0\lambda\nu_0 + c\nu\nu_0 \geqslant a \tag{81}$$

pour tous les couples d'entiers complexes (λ, ν) premiers entre eux dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$. En d'autres termes, le point représentatif de la forme (abc), déjà intérieur au prisme vertical (80), doit en outre être extérieur à une infinité dénombrable de demi-sphères (81). M. Humbert montre qu'on n'a besoin de retenir qu'un nombre fini de ces sphères pour définir un pareil domaine (on pourrait dire que cela résulte d'un théorème de M. Borel). Il donne une méthode géométrique pour les trouver, lorsque P est donné numériquement.

M. Humbert démontre ensuite que tous les points du plan des $\xi\eta$ sont intérieurs à une sphère (λ, ν) au moins, autrement dit que le plan des $\xi\eta$ est entièrement recouvert par ces sphères, à l'exception de certains points d'affixe rationnelle $\frac{r}{s}$,

$$r = qa + (g + \sqrt{-P})b \tag{82}$$

où q et g sont les deux premiers coefficients d'une réduite (réelle) de Gauss $qx^2 + 2gxy + hy^2$ de déterminant $g^2 - qh = P$, a un entier réel quelconque et b un entier réel premier à q. Ces points du plan des $\xi\eta$, dont il n'y a qu'un nombre fini à l'intérieur du prisme (80), sont *sur* des sphères (λ, ν), mais ils ne sont *à l'intérieur* d'aucune. Ce sont donc les *sommets singuliers* du domaine de réduction. A la réduite principale $x^2 + Py^2$ correspond le sommet du domaine à l'infini sur $O\zeta$.

42. Dans la note du 30 août 1915, M. Humbert applique cette méthode à titre d'exemple à la formation du domaine de réduction pour $P = 21$. Il montre ensuite que le domaine de réduction est un polyèdre fondamental pour le groupe de M. Bianchi. Les « sphères de réflexion » utilisées par celui-ci sont des sphères (λ, ν); mais ce ne sont pas *toutes* ces sphères, ce qui explique qu'elles ne suffisent pas toujours à fermer par le bas le prisme (80). Lorsque les faces du domaine fondamental sont toutes des « sphères de réflexion », les méthodes de M. Bianchi et de M. Humbert aboutissent au même polyèdre (¹).

43. Les recherches de M. Humbert ont porté ensuite sur l'extension aux formes définies d'Hermite des résultats de Dirichlet relatifs au *nombre de représentations* d'un nombre par une forme (réelle) de Gauss et au *nombre de classes de formes* de discriminant donné (Dirichlet, *Zahlentheorie*, 5 ter Abschnitt).

Les résultats les plus importants sont annoncés dans la note du 23 juin 1919. M. Humbert y donne l'expression de la mesure de l'ensemble des classes d'Hermite positives proprement primitives (²) d'un discriminant donné Δ premier à $2P$. On entend par *mesure* la somme $S\,\frac{1}{K}$ étendue à toutes les réduites de discriminant Δ, K étant le nombre des substitutions du groupe que l'on considère transformant en elle-même une de ces réduites (*automorphies*). Cette formule, pour le cas de $P = 1$, avait déjà été établie par M. Fatou (*C. R.*, 1906). M. Humbert montre comment on peut en déduire le *nombre de classes*, et non plus la mesure, lorqu'on connaît le

(¹) M. Humbert ayant formé le domaine de réduction dans l'espace des formes d'Hermite définies à l'aide de *sphères* (λ, ν), a montré un peu plus tard (8 mai 1916) comment on peut former le domaine plan du groupe fuchsien découvert par M. Picard, isomorphe au groupe qui conserve une forme indéfinie d'Hermite, à l'aide de *circonférences* (λ, ν). Plus généralement, il a montré (4 août 1919) comment on pouvait former, à l'aide des mêmes éléments, le domaine fondamental d'un groupe automorphe dont on connait les substitutions suivant la *méthode du rayonnement*, par laquelle on établit l'existence du domaine. Les circonférences ou les sphères (λ, ν) ne sont autres, en effet, que les droites du plan ou les plans de l'espace équidistants du point choisi comme centre et de ses transformés par les substitutions du groupe.

(²) Une forme d'Hermite est dite *primitive* lorsque (a, b, b_0, c) n'ont aucun diviseur entier réel commun; *propre* lorsque a et c ne sont pas pairs à la fois; *non primitive* ou *impropre* dans les cas contraires.

domaine du groupe $\Gamma(\sqrt{-P})$ et ses arêtes elliptiques (conservées par des substitutions elliptiques); il donne les résultats de cette étude pour $P=1$ et 2. De ces dernières formules, il tire des formules du type de Kronecker (Klein-Fricke, *Modulfunkt.*, 4ᵉ partie, Chap. VI) où figurent des sommes portant sur des nombres de réduites de Gauss de discriminants divers.

La démonstration et l'extension de ces résultats sont l'objet de deux séries de notes : août-septembre 1919 et février-mars 1920.

Nous aurons seulement besoin de noter pour la suite que M. Humbert a établi la formule donnant la mesure des classes de formes d'Hermite positives, primitives ou non, mais *propres*, de discriminant Δ, dans le *corps* $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$:

$$\mathcal{M}(\Delta) = \frac{P}{8}\left(\frac{-P}{\Delta}\right)\prod_{\varpi}\left[1+\left(\frac{-\Delta}{\varpi}\right)\frac{1}{\varpi}\right]\sum d\left(\frac{-P}{d}\right). \tag{83}$$

(P est supposé $\equiv 1$ ou 2 (mod. 4), Δ premier à $2P$; le produit $\prod_{\varpi}$ s'étend aux diviseurs premiers impairs (>1), ϖ, de P, et la somme Σ à tous les diviseurs d de Δ, y compris 1).

Lorsque $P\equiv 3$ (mod. 4), la même formule s'applique, les coefficients des formes d'Hermite étant des entiers de *l'anneau* $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$.

Enfin la mesure $\mathcal{M}'(\Delta)$ des classes de formes non plus propres, mais *impropres*, est donnée avec les mêmes restrictions par la formule

$$\mathcal{M}'(\Delta) = \mu\mathcal{M}(\Delta) \tag{84}$$

μ étant un coefficient numérique rationnel dont M. Humbert donne la valeur en fonction des restes de Δ et de P (mod. 8).

44. Quant au *nombre des classes de formes de discriminant* Δ, il s'obtient à partir des expressions (83) et (84) comme il suit :

Le nombre K des substitutions du groupe $\Gamma(\sqrt{-P})$ transformant en elle-même une forme définie d'Hermite est en général égal à 2 ; une forme quelconque admet en effet pour automorphies les substitutions $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ que nous désignons par 1 et I. Si le point représentatif de la forme est sur une arête elliptique, conservée par une substitution d'ordre deux, la forme admettra pour automorphies 1, E, I, EI, d'où $K=4$. S'il est sur une arête d'ordre trois, la forme admettra pour automorphies 1, E, E^2, I, EI, E^2I d'où $K=6$. Nous laisserons de côté pour le moment le cas où le point f serait un sommet du polyèdre fondamental par lequel passeraient plusieurs arêtes elliptiques.

Supposons donc que pour une valeur donnée de P, on ait reconnu les arêtes elliptiques du polyèdre ; puis qu'on les ait groupées en *cycles* (Poincaré) composés d'arêtes homologues dans le groupe Γ. Supposons que l'on puisse trouver le nombre $\mathcal{N}_4$ des formes *propres* de discriminant Δ situées sur les arêtes *réduites* d'ordre *deux*, c'est-à-dire sur une arête seulement par cycle ; le nombre $\mathcal{N}'_4$ des formes *impropres* situées sur les arêtes réduites d'ordre *deux* ; le nombre $\mathcal{N}'_6$ des formes *impropres* situees sur les arêtes réduites d'ordre *trois*. (M. Humbert démontre qu'il ne peut y avoir de formes propres sur les arêtes d'ordre trois).

Soient $\mathcal{H}(\Delta)$, $\mathcal{H}'(\Delta)$ le nombre de classes de formes (ou de réduites) de discriminant Δ, qu'il s'agit de trouver. On a par définition, en appelant $\mathcal{N}_2$ le nombre de réduites propres de discriminant Δ non situées sur une arête elliptique,

$$\mathcal{H}(\Delta) = \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_4.$$

Par définition également, on a pour la mesure

$$\mathcal{M}(\Delta) = \frac{1}{2}\mathcal{N}_2 + \frac{1}{4}\mathcal{N}_4.$$

Entre ces deux relations éliminons $\mathcal{N}_2$, il vient

$$\mathcal{H}(\Delta) = 2\mathcal{M}(\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{N}_4. \tag{85}$$

On trouve exactement de même

$$\mathcal{H}'(\Delta) = 2\mathcal{M}'(\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{N}'_4 + \frac{2}{3}\mathcal{N}'_6. \tag{86}$$

Ainsi les *nombres de classes* $\mathcal{H}(\Delta)$ et $\mathcal{H}'(\Delta)$ seront connus, puisqu'on connaît les *mesures* $\mathcal{M}(\Delta)$ et $\mathcal{M}'(\Delta)$, toutes les fois que l'on aura pu trouver les nombres $\mathcal{N}_4, \mathcal{N}'_4, \mathcal{N}'_6$, de réduites de discriminant Δ situées sur les arêtes elliptiques du groupe $\Gamma(\sqrt{-P})$.

C'est ce que M. Humbert a fait pour les *corps* $\mathcal{C}(\sqrt{-1})$, $\mathcal{C}(\sqrt{-2})$ et *l'anneau* $\mathcal{A}(\sqrt{-3})$ (pour les formes propres seulement).

45. M. Humbert a proposé en 1919 à l'auteur du présent travail de prolonger les résultats qui précèdent dans la direction suivante :

Former le domaine fondamental du groupe modulaire dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$, et l'anneau $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$, lorsque $P \equiv 3 \pmod{4}$; trouver *a priori* ses sommets singuliers ;

Étudier les arêtes elliptiques du domaine du groupe modulaire des corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$,

$P \equiv 1$ ou $2 \pmod{4}$, et des anneaux $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$, $P \equiv 3$, pour les premières valeurs de P;

Énumérer les réduites propres et impropres de discriminant donné Δ situées sur ces arêtes, ce qui conduit au nombre de classes de formes de discriminant Δ.

On trouvera dans les Chapitres VI à X les réponses à ces questions.

46. J'étudie d'abord dans le Chapitre VI les formes d'Hermite et de Dirichlet à coefficients entiers. La distinction de deux espèces de formes de Dirichlet, suivant que la norme $\mathcal{D}\mathcal{D}_0$ de leur déterminant $\mathcal{D}$ est ou non un carré parfait, correspond à des différences essentielles dont certaines avaient été signalées dans son mémoire de 1892 par M. Bianchi. Les formules donnant les coefficients d'une forme d'Hermite définie ou indéfinie située sur une forme de Dirichlet généralisent des formules que M. Humbert avait établies pour les formes d'Hermite définies et les formes de Dirichlet de déterminant 1 et 3 seulement.

47. Dans le Chapitre VII j'étudie les substitutions du groupe modulaire. Dans une Thèse *Sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes ou à indéterminées conjuguées* (1917), travail extrêmement riche en résultats variés, M. Julia avait démontré que les substitutions loxodromiques du groupe de Picard ne pouvaient admettre comme rotation composante que des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ ou incommensurable à π. L'interprétation arithmétique de la relation entre les éléments géométriques d'une substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et la somme $(\alpha+\delta)$ de ses coefficients extrêmes, que j'ai établie dans la Première Partie, m'a conduit à démontrer que les substitutions loxodromiques du groupe Γ du corps ou de l'anneau $(\sqrt{-P})$ étaient, soit d'angle incommensurable à π, soit d'angle $\frac{2\pi}{n}$, où n ne peut prendre que les valeurs 1, 2, 3, 4 ou 6.

Je montre ensuite que pour que dans le groupe $\Gamma(\sqrt{-P})$ n puisse prendre les valeurs 4 ou 6, il est *nécessaire* que les formes réelles suivantes soient équivalentes :

$$n=4 \begin{cases} \text{P pair}, & x^2 - Py^2 \backsim 2x^2 - Py^2, \\ \text{P impair}, & x^2 - Py^2 \backsim 2x^2 + 2xy - \dfrac{P-1}{2}y^2, \end{cases}$$

$$n = 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x^2 - 3Py^2 \backsim 3x^2 - Py^2.$$

Ces conditions montrent en particulier que dans le groupe de Picard on ne peut avoir ni $n=4$ ni $n=6$, ce qui est d'accord avec le théorème de M. Julia.

J'étudie ensuite le sous-groupe du groupe Γ conservant une forme de Dirichlet $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ et les formes semblables. Je montre quelle est la structure de ce sous-groupe. Je forme l'expression des substitutions qu'il contient ; je cherche quels sont les différents types possibles auxquels elles peuvent appartenir, et trouve certains critériums dépendant du déterminant $\mathcal{D}$ de la forme $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$. Je donne des exemples de tous les cas possibles. Les sous-groupes composés de substitutions paraboliques, et conservant des formes à déterminant nul, donnent lieu à une étude spéciale.

Je construis enfin les différents sous-groupes de Γ qui sont d'ordre fini, et qui conservent une forme d'Hermite définie.

48. Dans le Chapitre VIII, je montre comment la méthode de M. Humbert pour la formation du domaine fondamental du groupe Γ s'étend aux cas des *corps* ou des *anneaux* $(\sqrt{-P})$, $P \equiv 3 \pmod{4}$.

Les sommets singuliers du domaine de $\Gamma(\sqrt{-P})$, $P \equiv 1$ ou $2 \pmod{4}$, avaient été rattachés par M. Humbert aux réduites de Gauss de déterminant $-P$, lesquelles sont toutes de l'ordre propre. Je montre que dans le cas de *l'anneau* $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$, les sommets singuliers correspondent aux réduites de Gauss, tant propres qu'impropres, et que dans le cas du *corps* $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$, $P \equiv 3 \pmod{4}$, ils correspondent aux réduites impropres seulement.

Je montre comment dans un domaine $(\sqrt{-P})$ donné on peut déterminer la correspondance des faces, les cycles d'arêtes, les arêtes elliptiques et les substitutions qui les conservent.

49. Dans le Chapitre IX j'étudie la question du nombre de classes de formes d'Hermite, définies, positives, de discriminant donné. Énumérer les formes de discriminant Δ situées sur une arête de déterminant $-D$ du polyèdre fondamental équivaut à énumérer les représentations d'un nombre par la forme $Dq^2 - Pr^2$, pour lesquelles $\frac{q}{r}$ est compris entre deux limites correspondant aux extrémités de ladite arête. Ce nombre n'est pas connu en général. Mais je montre que si l'on groupe plusieurs cycles d'arêtes en une *famille de cycles*, de manière que toutes les arêtes de la famille, prolongées indéfiniment, supportent la même suite périodique de segments, l'intervalle de variation de $\frac{q}{r}$ correspondant à cette période de segments est une fraction rationnelle de l'intervalle $\left(\frac{T}{U} \ldots . \infty\right)$, [$(T, U)$ étant la plus petite solution de l'équation de Pell $t^2 - DPu^2 = 1$], intervalle pour lequel Dirichlet a résolu le problème du nombre de représentations. Le problème de l'énumération des formes de discriminant Δ, bien que ne pouvant être résolu (en général) pour chaque arête du polyèdre fondamental considérée seule, peut donc être résolu pour l'ensemble des arêtes d'une même famille de cycles, et par suite pour le polyèdre complet.

La fraction rationnelle dont nous venons de parler est égale pour des arêtes elliptiques à $\frac{2}{stu}$, où l'on pose :

$s = 2$ ou 1 selon que l'arête est conservée, ou non, par des substitutions loxodromiques d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{3}$;

$t = 2$ ou 1 selon qu'il existe, ou non, des arêtes elliptiques d'ordre deux rencontrant perpendiculairement l'arête en question ;

$u = 3$ ou 1 selon qu'un domaine de la substitution réelle H_a, correspondant à la plus petite translation du groupe Γ conservant l'arête, est égal à $\frac{2}{3}$ ou à 2 domaines de la plus petite substitution conservant la forme réelle $Dx^2 - Py^2$.

Pour chaque valeur numérique donnée à P, on à donc à faire une étude assez approfondie des arêtes elliptiques du polyèdre fondamental, qui conduit à les classer en cycles, ceux-ci en familles, et à déterminer pour chaque famille les nombres s, t, u. Il reste encore à distinguer par ses *caractères* la forme $q^2 - DPr^2$ des autres formes du même *système* S de Dirichlet, et à distinguer les formes d'Hermite propres des formes impropres d'après la parité des coefficients a et c. Ces recherches sont naturellement assez longues, mais on est assuré d'aboutir.

Les valeurs de Δ correspondant aux sommets où se rencontrent plusieurs arêtes elliptiques donnent lieu à des remarques empiriques (par. 100) dont je n'ai pu démontrer la généralité.

50. Dans le Chapitre x je donne les résultats de l'étude de tous les corps et anneaux depuis $P = 1$ jusqu'à $P = 21$. Le tableau final X donne pour chacune de ces valeurs de P les expressions de $\mathcal{H}_4, \mathcal{H}'_4, \mathcal{H}'_6$ en fonction de Δ. Ce tableau ne fait malheureusement apparaître aucune loi générale ; tout au plus certaines analogies, d'ailleurs soumises à des exceptions, se présentent-elles entre les valeurs de $P \equiv 1, 2$ ou $3 \pmod{4}$. Il semble qu'on puisse en inférer que la formule générale qui donnerait le nombre de classes de formes propres de discriminant Δ dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$, et celle donnant le nombre de classes de formes impropres, devraient être obtenues par un raisonnement direct tel que celui qui a permis à Lejeune-Dirichlet de trouver le nombre de classes de formes réelles, ou à M. Humbert, la mesure des formes d'Hermite, et non être dérivée de la dernière de ces deux formules.

CHAPITRE VI

FORMES D'HERMITE ET DE DIRICHLET A COEFFICIENTS ENTIERS

51. Dans la Première Partie de ce travail nous avons considéré des nombres complexes du type

$$a = a_1 + a_2 i$$

où a_1 et a_2 étaient des nombres réels, rationnels ou irrationnels, et $i = \sqrt{-1}$.

Dans cette Seconde Partie nous considérerons, à moins d'indication contraire, des nombres complexes du type

$$a = a_1 + a_2\sqrt{-\mathrm{P}} \tag{87}$$

où a_1 et a_2 sont des nombres entiers, et P un entier positif sans facteur carré.

Si $\mathrm{P} \equiv 1$ ou 2 (mod. 4), les nombres (87) seront les entiers du *corps quadratique* imaginaire $\mathcal{C}_{1,2}(\sqrt{-\mathrm{P}})$. Si $\mathrm{P} \equiv 3$ (mod. 4), les entiers du corps quadratique $\mathcal{C}_3(\sqrt{-\mathrm{P}})$ sont les nombres $a_1 + a_2\dfrac{1+\sqrt{-\mathrm{P}}}{2}$, et les nombres (87) forment à l'intérieur du corps un *anneau* que nous appellerons, n'ayant pas à craindre d'ambiguïté avec d'autres anneaux du même corps, l'anneau $\mathcal{A}(\sqrt{-\mathrm{P}})$.

Soit

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{88}$$

une substitution linéaire entre variables complexes z et z' (variables continues, non nécessairement entières), $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des entiers complexes du corps $\mathcal{C}(\sqrt{-\mathrm{P}})$ ou de l'anneau $\mathcal{A}(\sqrt{-\mathrm{P}})$, satisfaisant à la relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1. \tag{89}$$

Dans chacun de ces cas l'ensemble des substitutions (88) forme un groupe, comme le montre immédiatement la formule qui donne le produit de deux substitutions [1]. Ce groupe est le *groupe modulaire* Γ attaché au corps ou à l'anneau.

---

[1] Soit S $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ la substitution (88), T une autre substitution $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ du même type, nous désignerons par TS la substitution obtenue en opérant sur la variable z d'abord par S, $z' = \mathrm{S}(z)$, puis par T, $z'' = \mathrm{T}(z') = \mathrm{T}[\mathrm{S}(z)]$, et nous aurons :

$$\mathrm{TS} = \begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta\\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta\end{pmatrix}.$$

Nous appellerons *formes d'Hermite et de Dirichlet* les formes

$$f = axx_0 + bx_0y + b_0xy_0 + cyy_0,$$
$$F = \mathcal{A}x^2 + 2\mathcal{B}xy + \mathcal{C}y^2$$

où a, c sont des entiers réels, b, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des entiers complexes du corps ou de l'anneau $(\sqrt{-P})$.

Tout en gardant présente à l'esprit la représentation de ces formes dans l'espace cayleyen, nous nous servirons principalement, au cours de cette Deuxième Partie, de leur représentation dans le demi-espace de Poincaré.

52. *Famille de formes de Dirichlet.* — Nous appellerons ainsi l'ensemble discontinu des formes qui ont même représentation géométrique. Si l'on multiplie les coefficients d'une forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ par un entier complexe quelconque, on obtient une forme de la famille, ou, comme nous dirons encore, *semblable* à la forme donnée; mais deux formes semblables ne dérivent pas nécessairement l'une de l'autre par cette opération, car il peut y avoir plusieurs décompositions, irréductibles les unes aux autres, d'un entier complexe en produits d'entiers du corps. Comme conséquence, alors qu'une famille de formes semblables, à coefficients entiers ordinaires, dérive d'une *forme primitive* unique, il peut y avoir, pour une même famille de formes de Dirichlet, *plusieurs* formes primitives distinctes. Soit par exemple dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-5})$ la forme [1]

$$6x^2 + 6(1 + \sqrt{\ })xy - 3(1 - \sqrt{\ })y^2, \qquad \mathfrak{D} = -18.$$

On peut diviser ses coefficients soit par 3, soit par $(1 + \sqrt{\ })$, soit par $(1 - \sqrt{\ })$, et l'on obtient ainsi les trois formes primitives

$$\begin{array}{lll} 2x^2 + 2(1 + \sqrt{\ })xy - (1 - \sqrt{\ })y^2, & & \mathfrak{D} = -2, \\ (1 - \sqrt{\ })x^2 + 6xy & + (2 + \sqrt{\ })y^2, & \mathfrak{D} = 2 + \sqrt{\ }, \\ (1 + \sqrt{\ })x^2 - 2(2 - \sqrt{\ })xy - 3y^2, & & \mathfrak{D} = 2 - \sqrt{\ }. \end{array}$$

Dans cet exemple, les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ de la forme proposée admettaient pour idéal plus grand commun diviseur unique l'idéal

$$G = \alpha\beta\beta_0 = (2, 1 + \sqrt{\ })(3, 1 + \sqrt{\ })(3, 2 + \sqrt{\ })$$

---

[1] Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre, il nous arrivera d'écrire $\sqrt{\ }$ au lieu de $\sqrt{-P}$.

et il y avait trois manières de faire apparaître un idéal principal diviseur de G, un tel idéal étant $\beta\beta_0 = (3)$, ou $\alpha\beta = (1 + \sqrt{\ })$, ou $\alpha\beta_0 = (1 - \sqrt{\ })$. Dans le cas général, on obtiendra de cette façon un nombre fini de formes primitives, semblables à une forme donnée. Nous conserverons donc la notion très commode de forme primitive, en notant seulement qu'il peut ici y en avoir plusieurs pour une même famille (¹).

Nous dirons, comme en arithmétique ordinaire, qu'une forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ primitive est *de l'ordre propre* ou *de l'ordre impropre*, suivant que les entiers $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ne seront pas, ou seront, pairs à la fois. Une forme primitive ne peut avoir pour diviseur de $\mathcal{A}$, $2\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, que des diviseurs de 2, soit 1 ou 2. Le *diviseur* σ d'une forme primitive propre est donc $\sigma = 1$, celui d'une forme primitive impropre $\sigma = 2$. Les corps $\mathcal{C}(\sqrt{-1})$ et $\mathcal{C}(\sqrt{-2})$ font exception, $\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-2}$ étant des diviseurs de 2.

53. Il y a lieu d'établir entre les familles de formes de Dirichlet à coefficients entiers une distinction importante. Soit $\mathcal{D} = \mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}$ le déterminant de l'une des formes de la famille. Sa norme $\mathcal{D}\mathcal{D}_0$ est un entier positif ordinaire. Nous appellerons *formes de première espèce* celles pour lesquelles $\mathcal{D}\mathcal{D}_0$ est carré parfait; et *formes de deuxième espèce* celles pour lesquelles $\mathcal{D}\mathcal{D}_0$ n'est pas carré parfait. Il est évident que ce caractère sera commun à toutes les formes d'une même famille. Si en effet les coefficients d'une forme F sont multipliés par μ, la norme du déterminant de cette forme devient $\mathcal{D}\mathcal{D}_0(\mu\mu_0)^2$.

Les trois propriétés suivantes appartiennent aux formes de première espèce, à l'exclusion des formes de deuxième espèce.

I. — *Une famille de formes de première espèce contient une infinité de formes à déterminant réel.*

Soit $\mathcal{D} = a + b\sqrt{-\mathrm{P}}$ le déterminant d'une forme de la famille. Cherchons à déterminer un facteur μ de manière que $\mathcal{D}\mu^2$, ou $\left(a + b\sqrt{-\mathrm{P}}\right)\left(g + h\sqrt{-\mathrm{P}}\right)^2$, soit réel. Nous trouvons la relation :

$$(bg + ah)^2 = (a^2 + \mathrm{P}b^2)h^2.$$

(¹) Cette difficulté ne se présente pas pour les formes d'Hermite; les coefficients a et c devant être des entiers réels, deux formes semblables ne peuvent différer que par un facteur de proportionnalité réel.

Or cette relation, où toutes les lettres représentent des nombres entiers ordinaires, ne peut être vérifiée que si l'on peut poser :

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}_0 = a^2 + \mathrm{P}b^2 = c^2$$

c'est-à-dire que si la forme dont nous sommes partis est de première espèce.

Dans ce cas l'on pourra poser, K étant un entier réel quelconque,

$$g = (-a \pm c)\mathrm{K}, \qquad h = b\mathrm{K},$$

d'où

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\mu^2 = 2\mathrm{K}^2 c^2 (a \mp c).$$

On aura donc deux séries de formes de Dirichlet, à déterminants réels et de signes contraires. Dans chaque série les formes sont semblables à un facteur de proportionnalité réel près, et les formes d'une série sont semblables à celles de l'autre, le facteur de proportionnalité étant $\sqrt{-\mathrm{P}}$.

II. — *Une famille de formes de première espèce est représentée dans l'espace cayleyen par deux droites conjuguées dont les coordonnées pluckériennes sont des nombres entiers.*

Supposons en effet $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_0$ carré parfait, on pourra trouver une forme de la famille ayant un $\mathfrak{D}$ réel et négatif, d'après la propriété (1). Les formules (28) et (29), (par. 16) donneront alors pour les p_{ij} et q_{ij} des valeurs entières. La condition est donc suffisante.

Si par contre $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_0$ n'est pas carré parfait, on peut bien reprendre le même calcul, mais à la condition de poser $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_0 = \mathrm{Q}$, nombre positif réel, et d'introduire la nouvelle irrationnelle $\sqrt{\mathrm{Q}}$. Les nombres p_{ij} et q_{ij} que l'on en déduira seront des entiers du corps quadratique réel $\mathcal{C}(\sqrt{\mathrm{Q}})$, du type $a+b\sqrt{\mathrm{Q}}$ (a, b, entiers ordinaires).

III. — ***Une famille de formes de Dirichlet de première espèce contient une infinité de formes d'Hermite définies et indéfinies, à coefficients entiers.***

Nous entendons par là qu'il y a une infinité de formes d'Hermite à coefficients entiers dont le point représentatif dans l'espace cayleyen est sur l'une des droites représentant la forme de Dirichlet, son plan représentatif passant par la droite conjuguée. En d'autres termes il y a sur ces droites une infinité de points à coordonnées entières, ce qui est une conséquence de la propriété (II).

54. Il nous sera utile par la suite d'avoir l'expression des coefficients $a, b, c,$ de ces formes d'Hermite, en fonction des coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, de la forme de Dirichlet.

Point sur la première droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ — Nous avons trouvé (1^re partie, par. 17) les expressions suivantes pour a, b, c, Δ :

$$\left\{\begin{aligned} a &= \lambda + \mu, \\ b &= -(\lambda m + \mu n), \\ c &= \lambda m m_0 + \mu n n_0, \\ \Delta &= \lambda\mu(m-n)(m_0-n_0), \end{aligned}\right. \tag{31}$$

λ, μ étant des paramètres continus réels et $m, n,$ les zéros de $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ Prenons pour forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ une forme à déterminant réel et négatif $\mathcal{D} = -\mathrm{D}$, ce qui est possible si la famille de formes est de première espèce et dans ce cas seulement. Posons

$$\left\{\begin{aligned} \lambda + \mu &= \mathcal{A}\mathcal{A}_0 q, \\ \lambda - \mu &= \mathcal{A}\mathcal{A}_0 \sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{D}}}\, r, \end{aligned}\right.$$

q et r étant aussi des paramètres continus réels; il vient

$$\left\{\begin{aligned} a &= \mathcal{A}\mathcal{A}_0 q, \\ b &= \mathcal{A}_0(\mathcal{B}q - r\sqrt{-\mathrm{P}}), \\ c &= (\mathcal{B}\mathcal{B}_0 + \mathrm{D})q + (\mathcal{B} - \mathcal{B}_0) r\sqrt{-\mathrm{P}}, \\ \Delta &= \mathcal{A}\mathcal{A}_0(\mathrm{D}q^2 - \mathrm{P}r^2). \end{aligned}\right. \tag{90}$$

Il est manifeste que si q et r sont des nombres entiers, il en sera de même de $a, b, c.$ Mais de plus, soit k le plus grand commun diviseur entier réel des coefficients de q $\mathcal{A}\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_0\mathcal{B}$ et $(\mathcal{B}\mathcal{B}_0 + \mathrm{D})$, soit k' le plus grand commun diviseur entier réel des coefficients de $r\sqrt{-\mathrm{P}}$, $\mathcal{A}_0$ et $(\mathcal{B} - \mathcal{B}_0)$, on obtiendra toutes les formes (abc) possibles, à coefficients entiers, en remplaçant dans les formules (90) q et r par $\dfrac{q}{k}$ et $\dfrac{r}{k'}$, et donnant à q et r toutes les valeurs entières.

Nous observerons, comme dans la Première Partie, que Δ peut être positif ou négatif Il est positif lorsque

$$\left|\frac{q}{r}\right| > \sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{D}}},$$

le point (abc) appartenant alors au segment de la première droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ qui est intérieur à l'absolu.

Les formules (90) sont une généralisation de celles que M. Humbert a employées (*C. R.*, 1^er^ mars 1920) pour donner l'expression paramétrique d'une forme d'Hermite définie située sur une arête elliptique d'ordre deux ou d'ordre trois.

Points sur la deuxième droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$. — Nous avons trouvé (1^re^ partie, par. 17) les expressions suivantes pour a, b, c, Δ :

$$\left\{\begin{aligned} a &= \lambda + \lambda_0, \\ b &= (\lambda m + \mu n), \\ c &= \lambda m n_0 + \lambda_0 m_0 n, \\ \Delta &= -\lambda\lambda_0(m-n)(m_0-n_0), \end{aligned}\right. \tag{33}$$

λ étant un paramètre continu complexe. $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ étant comme précédemment une forme de la famille proposée à déterminant réel et négatif $\mathfrak{D} = -\mathrm{D}$, posons

$$\left\{\begin{aligned} \lambda + \lambda_0 &= \mathcal{A}\mathcal{A}_0 q, \\ \lambda - \lambda_0 &= \frac{\mathcal{A}\mathcal{A}_0 r}{\sqrt{-\mathrm{D}}}, \end{aligned}\right.$$

q et r étant des paramètres continus réels. Il vient

$$\left\{\begin{aligned} a &= \mathcal{A}\mathcal{A}_0 q, \\ b &= \mathcal{A}_0(\mathcal{B}q + r), \\ c &= (\mathcal{B}\mathcal{B}_0 - \mathrm{D})q + (\mathcal{B} + \mathcal{B}_0)r, \\ \Delta &= -\mathcal{A}\mathcal{A}_0(\mathrm{D}q^2 + r^2). \end{aligned}\right. \tag{91}$$

Pour que les formules (91) nous donnent toutes les formes (abc) à coefficients réels situés sur la deuxième droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ et celles-là seulement, il faut et il suffit que q et r soient des fractions rationnelles, le dénominateur de q étant le plus grand commun diviseur entier réel de $\mathcal{A}\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_0\mathcal{B}$, $(\mathcal{B}\mathcal{B}_0 - \mathrm{D})$, et celui de r le plus grand commun diviseur entier réel de $\mathcal{A}_0$ et $(\mathcal{B}+\mathcal{B}_0)$.

Le discriminant Δ est toujours négatif, la deuxième droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ étant toute entière à l'extérieur de l'absolu.

CHAPITRE VII

ÉTUDE DES SUBSTITUTIONS DU GROUPE MODULAIRE

55. Nous allons à présent étudier les substitutions du groupe Γ (par. 51). La liaison du groupe Γ et des formes de Dirichlet qui viennent d'être étudiées apparaît immédiatement, la substitution (88), comme nous l'avons déjà vu dans la Première Partie (par. 30), conserve la forme

$$\gamma x^2 + (\delta - \alpha)xy - \beta y^2 \tag{66}$$

et les formes semblables, et ces formes sont ici à coefficients entiers.

56. Nous allons d'abord chercher à reconnaître, à l'examen d'une substitution du groupe Γ, à quel type elle appartient.

Nous avons vu (par 31) qu'une substitution loxodromique correspond à un déplacement hélicoïdal, composé d'une translation de longueur d et d'une rotation d'angle φ. Nous proposons d'appeler la quantité complexe, $\frac{d}{R} + i\varphi$, *l'amplitude généralisée* ou *amplitude complexe* de la substitution envisagée, nous dirons aussi que cette substitution est de *longueur* d et d'*angle* φ.

On a (par. 33)

$$2c = (\alpha + \delta)^2 - 2 = 2ch\left(\frac{d}{R} + i\varphi\right). \tag{72}$$

Nous poserons

$$\alpha + \delta = a + b\sqrt{-P} \tag{92}$$

a et b étant des entiers ordinaires. Il vient en développant les deux membres de la relation (72)

$$a^2 - Pb^2 - 2 + 2ab\sqrt{-P} = 2ch\frac{d}{R}\cos\varphi + 2ish\frac{d}{R}\sin\varphi.$$

Cette égalité en nombre complexes équivaut aux deux égalités réelles

$$\left\{\begin{aligned} a^2 - Pb^2 - 2 &= 2ch\frac{d}{R}\cos\varphi, && (93)\\ 2ab\sqrt{P} &= 2sh\frac{d}{R}\sin\varphi. && (94)\end{aligned}\right.$$

De ces deux égalités je tire

$$(a^2 + Pb^2)^2 = 4\left(ch\frac{d}{R} + \cos\varphi\right)^2$$

d'où je puis conclure

$$a^2 + Pb^2 = 2\left(ch\frac{d}{R} + \cos\varphi\right) \tag{95}$$

sans ambiguïté de signe, attendu que les deux membres sont essentiellement positifs ou nuls.

De (93) et (95) résulte que $ch\frac{d}{R}$ et $\cos\varphi$ sont racines de l'équation du second degré

$$2X^2 - (a^2 + Pb^2)X + (a^2 - Pb^2 - 2) = 0. \tag{96}$$

Il est bien connu que le type d'une substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ ne dépend que de la somme $\alpha + \delta$ de ses coefficients extrêmes; il est également classique qu'une substitution loxodromique correspond à un déplacement hélicoïdal de l'espace cayleyen. Mais nous croyons avoir signalé pour la première fois (*C. R.*, 2 janvier 1924) cette équation (96) qui relie de façon simple les amplitudes de la translation et de la rotation composantes à la somme des coefficients extrêmes.

57. De cette équation (96) résulte aussitôt une conséquence remarquable. Cette équation a toujours deux racines réelles, l'une comprise entre -1 et $+1$, c'est $\cos\varphi$; l'autre supérieure à 1, c'est $ch\frac{d}{R}$. Ces racines sont ensemble ou rationnelles, et alors l'équation se décompose, ou incommensurables. Je dis que dans ce dernier cas l'angle φ lui-même est incommensurable à 2π. En effet, l'équation du n^e degré qui donne les cosinus de $\frac{2k\pi}{n}$, k allant de 1 à n, a toutes ses racines réelles et comprises entre -1 et $+1$, et il en est de même des équations de degré moindre en lesquelles elle peut éventuellement se décomposer. Il est donc impossible d'identifier aucune de ces équations avec l'équation (96), qui a toujours une racine supérieure à 1 ; par suite son autre racine, $\cos\varphi$, comprise entre -1 et $+1$, correspond à un angle φ incommensurable à 2π. Ce raisonnement est en défaut si l'équation (96) se décompose en facteurs du premier degré, et dans ce cas $\cos\varphi$ sera un nombre rationnel. Ce nombre, comme on sait, ne peut être alors que 0, ± 1 ou $\pm\frac{1}{2}$, et les angles φ correspondants sont égaux à $\frac{2\pi}{n}$, n étant égal à 1, 2, 3, 4, ou 6. Nous avons donc démontré ce théorème :

L'angle d'une substitution loxodromique modulaire, à coefficients entiers dans le corps ou l'anneau $(\sqrt{-P})$, *est ou bien incommensurable à* 2π, *ou bien égal à* $\frac{2\pi}{n}$, *n ne pouvant prendre que les valeurs* 1, 2, 3, 4, *ou* 6.

Ce théorème a été démontré, dans le cas particulier du groupe de Picard ($P=1$), par M. Julia, dans sa Thèse. Dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-1})$ n ne prend que les valeurs 1, 2, et 3; nous reviendrons plus loin sur ce point (par. 60).

Ajoutons encore une remarque : nous avons posé

$$\alpha+\delta = a + b\sqrt{-P} \tag{92}$$

a et b entiers ordinaires; cela suppose α et δ entiers du corps $\mathcal{C}_{1,2}(\sqrt{-P})$, ou de l'anneau $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$. Si nous nous plaçons dans un corps $\mathcal{C}_3(\sqrt{-P})$, nous devrons poser

$$\alpha+\delta = a + b\frac{1+\sqrt{-P}}{2}.$$

L'équation (96) devient alors

$$8X^2-(4a^2+4ab+b^2+Pb^2)X+(4a^2+4ab+b^2-Pb^2-8)=0 \tag{97}$$

mais le raisonnement que nous avons fait reste valable, c'est pourquoi nous disons, dans l'énoncé précédent, « le corps ou l'anneau $(\sqrt{-P})$ », sans particulariser les valeurs de P.

58. La connaissance de l'équation (96) permet de déterminer très simplement à quel type appartient une substitution donnée $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ du groupe Γ, à l'examen de la somme $\alpha+\delta = a+b\sqrt{-P}$ de ses coefficients extrêmes. L'angle φ de la rotation composante étant $\frac{2\pi}{n}$, on doit avoir les relations suivantes entre a et b, suivant la valeur de n :

$n=1$,	$\cos\varphi = 1$,	$b=0$,	type H,	(98)
2,	-1,	$a=0$,	L_2,	(99)
3,	$-\frac{1}{2}$,	$3a^2-Pb^2=3$,	L_3,	(100)
4,	0,	$a^2-Pb^2=2$,	L_4,	(101)
6,	$\frac{1}{2}$,	$a^2-3Pb^2=3$,	L_6.	(102)

D'autre part une substitution elliptique est caractérisée par une translation nulle, ou $\frac{d}{R} = 0$. L'équation (96) a donc une racine, $ch\frac{d}{R}$, égale à 1, d'où $b = 0$; puis, l'équation (96) devenant alors

$$(X - 1)(2X - a^2 + 2) = 0,$$

il faut que $\cos\varphi = \frac{a^2 - 2}{2}$ soit inférieur ou égal à 1 en valeur absolue, ce qui ne laisse plus subsister que les hypothèses $\alpha + \delta = 0, \pm 1, \pm 2$.

Si $\alpha + \delta = 0$, on a $\cos\varphi = -1$, et une rotation d'angle π, c'est-à-dire une substitution elliptique d'ordre deux,

si $\alpha + \delta = \pm 1$, on a $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ et une rotation d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$, c'est-à-dire une substitution elliptique d'ordre trois,

si $\alpha + \delta = \pm 2$, on a une substitution parabolique,

si enfin aucune des relations précédentes n'a lieu, la substitution est à angle de rotation φ incommensurable, nous dirons qu'elle est du type L.

Le tableau de tous les cas possibles est donc le suivant :

$$\alpha + \delta = a + b\sqrt{-P}.$$

$b = 0$	$a = 0$	elliptique d'angle π	E_2,
	$\lvert a\rvert = 1$	elliptique d'angle $\frac{2\pi}{3}$	E_3,
	$\lvert a\rvert = 2$	parabolique	P,
	$\lvert a\rvert > 2$	hyperbolique	H.
$b \neq 0$	$a = 0$	loxodromique d'angle π	L_2,
	$3a^2 - Pb^2 = 3$	» » $\frac{2\pi}{3}$	L_3,
	$a^2 - Pb^2 = 2$	» » $\frac{\pi}{2}$	L_4,
	$a^2 - 3Pb^2 = 3$	» » $\frac{\pi}{3}$	L_6,
	tous autres cas	loxodrom. d'angle incommens.	L_i.

59. On traite par la même méthode les corps $\mathcal{C}_1(\sqrt{-P})$, substituant seulement l'équation (97) à l'équation (96) Le tableau qui en résulte est le suivant :

$$\alpha + \delta = a + b\frac{1+\sqrt{-P}}{2}.$$

$$b = 0 \left\{\begin{array}{ll} a = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & E_2, \\ |a| = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & E_3, \\ |a| = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & P, \\ |a| > 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & H. \end{array}\right.$$

$$b \neq 0 \left\{\begin{array}{ll} 2a + b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & L_2, \\ 3(2a+b)^2 - Pb^2 = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots & L_3, \\ (2a+b)^2 - Pb^2 = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots & L_4, \\ (2a+b)^2 - 3Pb^2 = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots & L_6, \\ \text{tous autres cas} \ldots\ldots\ldots\ldots & L_t. \end{array}\right.$$

60. Il existe dans chaque corps ou anneau des substitutions E_2 et E_3. En effet, on y trouve au moins les substitutions $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, conservant la forme $x^2 + y^2$, et $E_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, conservant la forme $2x^2 - 2xy + 2y^2$. Ces formes sont encore conservées par des substitutions H et par conséquent aussi par des substitutions L_2 et L_3 respectivement. Il existe donc des L_2 et L_3 dans tous les corps et anneaux.

Mais il n'en est pas de même pour les L_4 et L_6. En effet, pour que dans un corps ou anneau il puisse y avoir une L_4, il *faut*, d'après le paragraphe précédent, que l'on puisse avoir en nombres entiers

$$a^2 - Pb^2 = 2. \tag{101}$$

Supposons d'abord P pair, le nombre 2 sera quel que soit P représentable par la forme $2x^2 - \frac{P}{2}y^2$. Pour que l'équation (101) admette des solutions entières, les formes $x - Py^2$ et $2x^2 - \frac{P}{2}y^2$ doivent donc être équivalentes :

$$(1, 0, -P) \backsim \left(2, 0, -\frac{P}{2}\right). \tag{103}$$

Supposons P impair, le nombre 2 est alors représentable par la forme $2x^2 + 2xy - \frac{P-1}{2}y^2$ et une condition *nécessaire* pour que le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$, ou l'anneau $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$, admette des L_4 est que

$$(1, 0, -P) \backsim \left(2, 1, -\frac{P-1}{2}\right). \tag{104}$$

De même enfin, une condition *nécessaire* pour que le corps $\mathcal{C}_{1,2}(\sqrt{-P})$, ou l'anneau $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$, admette des L_6 est que l'équation $a^2 - 3Pb^2 = 3$ puisse être résolue en nombres entiers, ou bien que les deux formes suivantes soient équivalentes :

$$(1, 0, -3P) \backsim (3, 0, -P) \qquad (105)$$

Comme cas particulier considérons le *groupe de Picard,* $P = 1$. L'équation $a^2 - b^2 = 2$ est impossible ; d'autre part les deux formes $x^2 - 3y^2$, $3x^2 - y^2$, sont de familles différentes. *Il n'y a donc dans le groupe de Picard ni* L_4 *ni* L_6, comme l'a démontré M. Julia.

*
* *

61. Dans les paragraphes 56 à 60 nous avons déterminé les différents types possibles de substitutions du groupe Γ et nous avons appris à reconnaître à quel type appartenait une substitution donnée $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, laquelle, comme nous le savons, conserve une famille de formes de Dirichlet. Nous allons chercher à résoudre le problème inverse : étant donné une famille de formes de Dirichlet, composée de toutes les formes semblables à une forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, trouver toutes les substitutions du groupe Γ qui la conservent et déterminer à quel type elles appartiennent.

Nous traiterons ce problème pour les corps $\mathcal{C}_{1,2}(\sqrt{-P})$ et les anneaux $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$, mais les mêmes raisonnements appliqués à l'équation (97) au lieu de l'équation (96) conduisent encore pour les corps $\mathcal{C}_3(\sqrt{-P})$ au tableau du paragraphe 76.

62. Les substitutions du groupe Γ qui transforment la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ en une forme semblable, étant de déterminant $+1$, conservent en tous cas le déterminant de la forme sur laquelle elles opèrent. Si donc la forme nouvelle est semblable à la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ elle lui est identique au signe près. Les substitutions que nous cherchons sont donc de deux sortes, suivant qu'elles transforment $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ en $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ ou en $(-\mathcal{A}, -\mathcal{B}, -\mathcal{C})$.

L'interprétation géométrique est immédiate : les déplacements qui font correspondre une droite à elle-même conservent ses points à l'infini (sur l'absolu) et sont donc de deux sortes :

1° les déplacements qui conservent chacun de ces points et qui sont les déplacements hélicoïdaux ayant cette droite pour axe ;

2° les déplacements qui permutent entre eux les points sur l'absolu, et il est assez évident que ce sont des retournements ayant pour axe une droite rencontrant perpendiculairement la droite donnée. L'analyse nous conduira aussi à ce résultat.

Les déplacements de la première sorte forment un groupe G ; éventuellement, ce groupe peut être amplifié par l'adjonction de retournements (2°). Le groupe G et le groupe G amplifié ou G′ sont les deux types possibles de groupes conservant une droite de l'espace projectif, ou *groupes à deux points-limites* (Fricke-Klein, *Automorphe Funkt.*, I, p. 234 : *Nichtrotationsgruppe mit zwei Grenzpunkten*).

63. La structure du groupe G est fort simple. On se rappellera que : 1° le groupe modulaire Γ ne contient pas de substitutions infinitésimales (correspondant à un déplacement infiniment petit) ; 2° en conséquence il ne peut contenir de loxodromiques d'amplitude infiniment petite et d'angle fini (Fricke-Klein, *Autom. Funkt.*, I, p. 96).

Par suite si le groupe G existe, il contient au moins une substitution, soit L, de longueur d égale ou inférieure à celles de toutes les autres. Il contient donc le groupe cyclique formé des puissances de L. Supposons qu'il contienne une substitution, L′, distincte des précédentes. La longueur de L′ devra, d'après (2°), être commensurable avec celle de L ; et comme la longueur d de L est minima, la longueur de L′ sera égale à d ou pourra y être ramenée. Le groupe G contiendra alors la substitution $L'L^{-1}$, qui est elliptique.

Donc, *si le groupe* G *ne contient aucune substitution elliptique, il est formé des puissances d'une substitution unique* L ; *c'est un groupe cyclique. Si le groupe* G *contient une substitution elliptique, il admet deux substitutions génératrices,* L *et* E.

64. Nous pouvons préciser davantage ce premier résultat. Reprenons l'équation fondamentale (96). Elle a pour déterminant

$$(a^2 + Pb^2)^2 - 8(a^2 - Pb^2 - 2);$$

d'autre part le déterminant $\mathfrak{D}$ de la forme (66) conservée par $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est

$$\begin{aligned} 4\mathfrak{D} &= (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma \\ &= (\alpha + \delta)^2 - 4 \\ &= a^2 - Pb^2 - 4 + 2ab\sqrt{-P} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 16\mathfrak{D}\mathfrak{D}_0 &= (a^2 - Pb^2 - 4)^2 + 4a^2b^2P \\ &= (a^2 + Pb^2)^2 - 8(a^2 - Pb^2 - 2). \end{aligned}$$

Ainsi l'équation (96) se décompose si $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_0$ est carré parfait, et en ce cas seulement. En d'autres termes,

IV. — *Les substitutions loxodromiques conservant des formes de première espèce sont d'angle commensurable à 2π, celles conservant des formes de deuxième espèce sont d'angle incommensurable* (¹)

65. Cherchons à obtenir explicitement les substitutions du groupe G Écrivons pour cela qu'une substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ conserve la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ Nous avons

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}\alpha^2 + 2\mathcal{B}\alpha\gamma + \mathcal{C}\gamma^2 &= \mathcal{A}, \\ \mathcal{A}\alpha\beta + \mathcal{B}(\alpha\delta + \beta\gamma) + \mathcal{C}\gamma\delta &= \mathcal{B}, \\ \mathcal{A}\beta^2 + 2\mathcal{B}\beta\delta + \mathcal{C}\delta^2 &= \mathcal{C}. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières de ces équations s'écrivent, en tenant compte de la relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1, \tag{89}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha^2 - 1) + 2\mathcal{B}\alpha\gamma + \mathcal{C}\gamma^2 &= 0, \\ \mathcal{A}\alpha\beta + 2\mathcal{B}\beta\gamma + \mathcal{C}\gamma\delta &= 0 \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathcal{A}}{\gamma} = \frac{2\mathcal{B}}{\delta - \alpha} = \frac{-\mathcal{C}}{\beta}.$$

Nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} \gamma &= \mathcal{A}u, \\ \beta &= -\mathcal{C}u, \\ \delta - \alpha &= 2\mathcal{B}u, \end{aligned}\right. \tag{106}$$

puis, $\delta+\alpha$ restant encore arbitraire,

$$\delta + \alpha = 2t. \tag{107}$$

L'expression générale des substitutions conservant la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ est donc

$$\begin{pmatrix} t - \mathcal{B}u & -\mathcal{C}u \\ \mathcal{A}u & t + \mathcal{B}u \end{pmatrix} \tag{108}$$

t et u étant de plus liés par la relation, équivalente à (89),

$$t^2 - \mathfrak{D}u^2 = 1. \tag{109}$$

(¹) Voir la note à la fin du Chapitre

Jusqu'ici les formules obtenues sont celles de l'Arithmétique ordinaire (Lejeune-Dirichlet, *Zahlentheorie*, 4ᵉ éd, par. 62). A partir de ce point nous devons abandonner le chemin classique. En Arithmétique en effet les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ont un p. g. c. d. entier. On démontre alors que les nombres t et u sont des fractions de dénominateur σ, ou, ce qui revient au même, sont des entiers, ou demi-entiers, si l'on prend pour $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, les coefficients de la forme primitive *unique* de la famille ($\sigma = 1$ ou 2).

Ici, comme nous savons, on ne peut parler de p. g. c. d. Tout ce que l'on peut dire sur t et u, c'est, d'après (107), que t est un entier du corps ou la moitié d'un entier, et, d'après (106), que u est une fraction du corps. De plus, si l'on a formé, par un procédé quelconque, toutes les solutions (t, u) de l'équation (109) satisfaisant à ces conditions, il se pourra qu'*une partie seulement* de ces solutions rendent $t \pm \mathcal{B}u, \mathcal{A}u, \mathcal{C}u$, entiers du corps et conduisent à des substitutions (108) faisant partie du groupe Γ.

Soit maintenant $(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}')$ une forme semblable à $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$. Les substitutions du groupe Γ

$$\begin{pmatrix} t' - \mathcal{B}'u' & -\mathcal{C}'u' \\ \mathcal{A}'u' & t' + \mathcal{B}'u' \end{pmatrix} \tag{110}$$

où

$$t'^2 - \mathcal{D}'u'^2 = 1, \tag{111}$$

conservent la forme $(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}')$. Je dis que ces substitutions sont identiques à celles qu'a déjà fournies la forme primitive $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$. En effet, à une solution (t, u) quelconque de (109) donnant lieu à une substitution de Γ je fais correspondre les nombres

$$t' = t, \qquad u' = \frac{\mathcal{A}u}{\mathcal{A}'} = \frac{\mathcal{B}u}{\mathcal{B}'} = \frac{\mathcal{C}u}{\mathcal{C}'};$$

t' est bien un entier complexe ou la moitié d'un entier, u' une fraction du corps (qui peut ici se présenter sous trois formes égales irréductibles); t' et u' satisfont à (111) et donnent la substitution (110) identique à (108). Inversement à toute solution acceptable de (111) je fais correspondre une solution de (109), également acceptable.

Donc *toutes* les substitutions conservant les formes de la famille sont obtenues de la manière indiquée à partir des formules (108) et (109) où $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ sont les coefficients d'une forme *quelconque* de la famille. Le raisonnement du paragraphe précédent nous apprend que les solutions *complexes* et, s'il y a lieu, fractionnaires, de l'équation (109) conduisant à des substitutions du groupe Γ forment une suite linéaire infinie, exactement comme les solutions entières de l'équation de Pell dans le champ réel, sauf lorsque $\mathcal{D} = -1$ ou $\mathcal{D} = -3$.

On observera que des relations

$$ch\left(\frac{d}{R}+i\varphi\right)=\frac{(\alpha+\delta)^2}{2}-1 \qquad (70) \text{ et } (72)$$

$$2t=\alpha+\delta \qquad (107)$$

on peut tirer

$$t=ch\frac{1}{2}\left(\frac{d}{R}+i\varphi\right)$$

ce qui donne, dans le cas général où le groupe G est formé des puissances d'une substitution $L(d, \varphi)$, la loi de formation des t correspondant aux diverses substitutions L^n de G :

$$t_n=ch\frac{n}{2}\left(\frac{d}{R}+i\varphi\right).$$

Cette formule généralise la loi de formation classique des solutions de l'équation de Pell.

66. On peut trouver par une voie différente de celle du paragraphe 56 l'équation fondamentale (96), en se servant de l'expression (108) d'une substitution linéaire que nous venons de former.

Soient d'abord

$$S=\begin{pmatrix} t-\mathfrak{B}u & -\mathfrak{C}u \\ \mathfrak{A}u & t+\mathfrak{B}u \end{pmatrix}, \qquad T=\begin{pmatrix} t'-\mathfrak{B}u' & -\mathfrak{C}u' \\ \mathfrak{A}u' & t'+\mathfrak{B}u' \end{pmatrix}$$

deux substitutions conservant la même forme $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$. Leur produit TS aura une expression analogue caractérisée par les nouveaux coefficients (t'', u'') et l'on aura (note du par. 51)

$$\begin{cases} t''=tt'+\mathfrak{D}uu', \\ u''=tu'+ut' \end{cases}$$

(on observera que les substitutions S et T sont permutables : $ST=TS$, du fait de l'hypothèse qu'elles conservent le même couple de droites).

Supposons maintenant que la forme $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ ait un déterminant réel et négatif, ce qui est toujours admissible si nous cessons pour un instant de soumettre les nombres à la condition d'être entiers (par. 16). Nous considérerons les substitutions suivantes qui toutes conservent le couple de droites correspondant à la forme $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ et ne diffèrent par conséquent que par leur amplitude complexe $\left(\frac{d}{R}+i\varphi\right)$, ou par leurs coefficients (t, u) :

1° Une substitution S quelconque, ses paramètres étant (d, φ) ou (t, u) ;

2° La substitution inverse S^{-1} de paramètres $(-d, -\varphi)$ ou $(t, -u)$;

3° La substitution T, de longueur d et d'angle $-\varphi$. Ses paramètres sont :

$$ch \frac{1}{2}\left(\frac{d}{R} - i\varphi\right) = t_0 \quad \text{et} \quad u_0 ;$$

(c'est en vue de cette simplification qu'on a supposé $\mathfrak{D}$ réel) ;

4° La substitution TS ; c'est une substitution hyperbolique de longueur $2d$; nous poserons :

$$X = ch\left(\frac{2d}{2R} + 0\right) = ch \frac{d}{R} ;$$

5° La substitution TS^{-1} ; c'est une substitution elliptique d'angle 2φ ; nous poserons :

$$X' = ch\left(0 + i\frac{2\varphi}{2}\right) = \cos\varphi .$$

On a alors, d'après les formules de multiplication ci-dessus :

$$\begin{cases} X = tt_0 - Duu_0, \\ X' = tt_0 + Duu_0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} X + X' &= 2tt_0, \\ XX' &= t^2t_0^2 - D^2u^2u_0^2 \\ &= t^2 + t_0^2 - 1 . \end{aligned}$$

Les quantités X et X', ou $ch \dfrac{d}{R}$ et $\cos\varphi$, sont donc racines de l'équation du second degré

$$X^2 - 2tt_0X + t^2 + t_0^2 - 1 = 0 . \qquad (96\text{-}bis)$$

Si maintenant nous reprenons nos restrictions arithmétiques, et posons :

$$2t = a + b\sqrt{-P} \qquad a \text{ et } b \text{ entiers,}$$

nous retombons sur l'équation (96), dont on peut déduire des conséquences arithmétiques. L'équation (96 *bis*) peut mieux convenir à des questions géométriques.

La relation (96 *bis*) est symétrique en t, t_0 et λ (ou λ') ce qui s'explique par les relations entre substitutions

$$S^{-1}.TS = T = S.TS^{-1}.$$

67. Employons de nouveau la méthode du paragraphe 65 pour obtenir les substitutions $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ transformant la forme $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ en $(-\mathcal{A}, -\mathcal{B}, -\mathcal{C})$. Nous avons

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}\alpha^2 + 2\mathcal{B}\alpha\gamma + \mathcal{C}\gamma^2 &= -\mathcal{A}, \\ \mathcal{A}\alpha\beta + \mathcal{B}(\alpha\delta + \beta\gamma) + \mathcal{C}\gamma\delta &= -\mathcal{B}, \\ \mathcal{A}\beta^2 + 2\mathcal{B}\beta\delta + \mathcal{C}\delta^2 &= -\mathcal{C}; \end{aligned}\right.$$

les deux premières de ces équations s'écrivent, en tenant compte de la relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1, \tag{89}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha^2 + 1) &+ (2\mathcal{B}\alpha + \mathcal{C}\gamma)\gamma = 0, \\ \mathcal{A}\alpha\beta \quad &+ (2\mathcal{B}\alpha + \mathcal{C}\gamma)\alpha = 0. \end{aligned}\right.$$

Écrivons que ces équations sont compatibles, il vient

$$\alpha + \delta = 0.$$

La substitution S doit donc être elliptique d'ordre deux. Si cela est, les deux équations ci-dessus se réduisent à

$$\mathcal{A}\beta - 2\mathcal{B}\alpha - \mathcal{C}\gamma = 0 \tag{112}$$

et ceci (par 20) est la condition pour que la forme $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et la forme $(\gamma, -\alpha, -\beta)$ conservée par S soient conjuguées, ou encore que les couples de droites les représentant se rencontrent deux à deux orthogonalement. Nous avons donc trouvé analytiquement les conditions prévues au paragraphe 62.

On peut éliminer γ et δ entre les relations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1, \qquad \alpha + \delta = 0, \qquad \text{et } (112),$$

et l'on est ramené à satisfaire en nombres entiers complexes à l'équation

$$\mathcal{C}\alpha^2 - 2\mathcal{B}\alpha\beta + \mathcal{A}\beta^2 + \mathcal{C} = 0,$$

ce qui n'est pas toujours possible. Étant donné une forme $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, il n'existera pas en général de substitution du groupe Γ la transformant en $(-\mathcal{A}, -\mathcal{B}, -\mathcal{C})$.

68. Nous avons trouvé au paragraphe 63 quelle est la structure du groupe G, *si* ce groupe existe. Nous allons montrer qu'il existe certainement dans le cas de formes de première espèce à déterminant non carré parfait.

En effet, soit $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ une pareille forme, on peut (par. 53, 1), en multipliant ses coefficients par un entier complexe μ, rendre son déterminant réel et positif : $\mathfrak{D}\mu^2 = D_1$, et D_1, par suite de l'hypothèse faite, n'est pas carré parfait. L'équation en nombres entiers réels

$$t^2 - D_1 u^2 = 1$$

est alors une équation de Pell et admet toujours des solutions, auxquelles correspondent *des* substitutions hyperboliques conservant la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$. L'existence du groupe G est donc démontrée.

Nous n'obtenons pas ainsi nécessairement *toutes* les substitutions hyperboliques conservant $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$. Mais en tous cas toutes ces substitutions sont les puissances de l'une d'entre elles, H, dont l'amplitude est la plus petite longueur dont on puisse, dans le groupe Γ, faire glisser la droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ sur elle-même sans rotation. Nous appellerons H la substitution hyperbolique *attachée* à la famille de formes, ou à la droite, $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$.

69. On peut pousser plus loin la recherche de la substitution hyperbolique attachée dans le cas, important pour la suite, où la droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ est conservée par des substitutions elliptiques.

Nous avons vu (par. 58) que les substitutions elliptiques du groupe Γ sont d'ordre deux ou trois, suivant que $|\alpha + \delta| = 0$ ou 1.

Les *substitutions elliptiques d'ordre deux* sont par conséquent du type

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \tag{113}$$

avec

$$-\alpha^2 - \beta\gamma = +1. \tag{114}$$

La substitution (113) conserve la forme de Dirichlet

$$\gamma x^2 - 2\alpha xy - \beta y^2 \tag{115}$$

qui est de déterminant -1, et les formes semblables.

Inversement, soit une forme de déterminant $-\mu^2$ et de plus telle qu'on puisse la ramener, en divisant ses coefficients par l'entier complexe μ, à une forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$

de déterminant -1. Cette forme et les formes semblables seront conservées par la substitution elliptique d'ordre deux

$$E_2 = \begin{pmatrix} -\mathcal{B} & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix}.$$

D'après le paragraphe 65, la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ de déterminant -1 est aussi conservée par les substitutions hyperboliques

$$\begin{pmatrix} t-\mathcal{B}u & -\mathcal{C}u \\ \mathcal{A}u & t+\mathcal{B}u \end{pmatrix} \tag{108}$$

où

$$t^2 + u^2 = 1, \tag{116}$$

$t > 1$ entier réel ou demi-entier,
u fraction complexe.

u doit donc être ici un entier complexe ou un demi-entier, et son carré étant négatif on peut poser

$$t = \frac{t'}{2}, \qquad u = \frac{u'\sqrt{-P}}{2}$$

et l'on est ramené à l'équation en nombres entiers réels

$$t'^2 - Pu'^2 = 4. \tag{117}$$

Toutes les substitutions hyperboliques du groupe Γ conservant la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ dérivent de l'équation (117), mais toutes les solutions de cette équation ne conduisent pas nécessairement à une substitution (108) à coefficients entiers. Pour certaines valeurs de P l'équation (117) admet des solutions $(t'u')$ composées de nombres impairs, et il se pourra alors que pour certaines formes $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ les coefficients de (108) ne soient pas entiers. Dans ce cas, on devra n'accepter que les solutions *paires* de l'équation (117), ou, ce qui revient au même, lui substituer l'équation

$$t^2 - Pu^2 = 1. \tag{118}$$

En résumé, toutes les substitutions hyperboliques du groupe Γ conservant la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ de déterminant -1 correspondent à toutes les solutions, soit de l'équation (117), soit de l'équation (118).

La substitution hyperbolique attachée à l'arête correspond dès lors à la plus petite solution de l'une ou de l'autre équation.

On remarquera que E_2 rentre également dans la formule (108), lorsqu'on y fait $t = 0$, $u = 1$.

70. Pour les *substitutions d'ordre trois*, on a $|\alpha + \delta| = 1$, et l'on peut toujours se ramener au cas $\alpha + \delta = 1$, ces substitutions sont donc du type

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 1 - \alpha \end{pmatrix} \tag{119}$$

avec

$$\alpha(1 - \alpha) - \beta\gamma = +1. \tag{120}$$

La substitution (119) conserve la forme de Dirichlet

$$2\gamma x^2 + 2(1 - 2\alpha)xy - 2\beta y^2 \tag{121}$$

qui est de déterminant -3 et de l'ordre impropre (par 52, a et c pairs à la fois), ainsi que les formes semblables.

Inversement, soit une forme de determinant $-3\mu^2$ et de plus telle qu'on puisse la ramener, en divisant ses coefficients par l'entier complexe μ, à une forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ de déterminant -3 et de l'ordre impropre. Cette forme et les formes semblables seront conservées par les substitutions elliptiques d'ordre trois

$$E_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - \mathcal{B}}{2} & \dfrac{-\mathcal{C}}{2} \\ \dfrac{\mathcal{A}}{2} & \dfrac{1 + \mathcal{B}}{2} \end{pmatrix}, \qquad E'_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + \mathcal{B}}{2} & \dfrac{-\mathcal{C}}{2} \\ \dfrac{\mathcal{A}}{2} & \dfrac{1 - \mathcal{B}}{2} \end{pmatrix}$$

La forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ est aussi conservée par les substitutions hyperboliques

$$\begin{pmatrix} t - \mathcal{B}u & -\mathcal{C}u \\ \mathcal{A}u & t + \mathcal{B}u \end{pmatrix} \tag{108}$$

où

$$t^2 + 3u^2 = 1 \tag{122}$$

t entier réel ou demi-entier, u fraction du corps. Le carré de cette fraction étant négatif, elle est de la forme

$$u = u'\sqrt{-P}$$

u' fraction rationnelle réelle, d'où en posant $t = \dfrac{t'}{2}$, t' entier réel > 2,

$$t'^2 - 12Pu'^2 = 4.$$

Par hypothèse P ne contient pas de facteurs carrés. Il y a toutefois deux cas à distinguer, suivant que P est ou non multiple de 3.

Si P n'est pas multiple de 3, u' fraction rationnelle réelle ne peut avoir pour dénominateur que 1 ou 2, soit $u = \dfrac{u''}{2}$. Nous sommes alors amenés à l'équation en nombres entiers

$$t''^2 - 3Pu''^2 = 4. \tag{123}$$

Si P est multiple de 3, soit $P = 3P'$, le coefficient $12P$ contient le facteur carré 36 et u' pourra être une fraction de dénominateur 6, soit $u' = \dfrac{u''}{6}$, d'où l'équation en nombres entiers

$$t''^2 - P'u''^2 = 4. \tag{124}$$

Mais les solutions de cette équation ne conduisent pas toujours toutes à des substitutions (110) à coefficients entiers. Les substitutions hyperboliques dépendront, dans chaque cas particulier, soit de l'équation (124), soit de l'équation

$$t_1^2 - P'u_1^2 = 1 \tag{125}$$

dans lesquelles u_1 pourra de plus être assujetti à être multiple de 2, 3 ou 6 [1].

L'équation (122) admet d'ailleurs toujours les solutions $t = \dfrac{1}{2}$, $u = \pm\dfrac{1}{2}$, qui conduisent aux substitutions E_1 et E'_3.

---

[1] Comme exemple de l'un des nombreux cas possibles, considérons dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-6})$ la forme

$$\sqrt{-6}\,x^2 + 6xy - 2\sqrt{-6}\,y^2, \qquad \mathfrak{D} = -3.$$

L'équation

$$t^2 + 3u^2 = 1 \tag{122}$$

devient en nombres entiers ordinaires

$$t''^2 - 2u''^2 = 4. \tag{124}$$

Celle-ci n'admet que des solutions paires $(2t_1, 2u_1)$, t_1 u_1 satisfaisant à

$$t_1^2 - 2u_1^2 = 1 \tag{125}$$

dont la plus petite solution est $t_1 = 3$, $u_1 = 2$, d'où la solution de (122)

$$t = 3, \qquad u = \frac{2\sqrt{-6}}{3}$$

donnant la substitution hyperbolique attachée à l'arête

$$\begin{pmatrix} 3 - 2\sqrt{-6} & -8 \\ -4 & 3 + 2\sqrt{-6} \end{pmatrix}.$$

71. C'est encore l'équation fondamentale (96) qui va nous permettre de trouver certaines conditions nécessaires que doivent remplir les déterminants des formes de première espèce conservées par des substitutions loxodromiques d'un type donné.

Soit $\mathfrak{D}$ le déterminant d'une forme de première espèce conservée par une substitution (108), on a

$$t^2 - \mathfrak{D}u^2 = 1 \tag{109}$$

et

$$2t = \alpha + \delta = a + b\sqrt{-P}. \tag{92, 107}$$

1° Supposons que S soit une *loxodromique d'angle* $\frac{2\pi}{3}$:

On a

$$3a^2 - Pb^2 = 3 \tag{100}$$

d'où

$$3(t^2 - \mathfrak{D}u^2) - (3a^2 - Pb^2) = 0$$

ou

$$3(a + b\sqrt{-P})^2 - 12\mathfrak{D}u^2 - 12a^2 + 4Pb^2 = 0.$$

ou

$$-12\mathfrak{D}u^2 - (3a - b\sqrt{-P})^2 = 0$$

ou

$$\mathfrak{D} = -3\left(\frac{3a - b\sqrt{-P}}{6u}\right)^2.$$

$\mathfrak{D}$ étant entier est donc du type $3\mu^2$ où μ est entier.

2° *Loxodromique d'angle* $\frac{\pi}{2}$:

On a

$$a^2 - Pb^2 = 2 \tag{101}$$

d'où par un calcul semblable au précédent

$$\mathfrak{D} = -\left(\frac{a - b\sqrt{-P}}{2u}\right)^2, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{D} = -\mu^2.$$

3° *Loxodromique d'angle* $\frac{\pi}{3}$:

On a

$$a^2 - 3Pb^2 = 3 \tag{102}$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{D} = -3\left(\frac{a - 3b\sqrt{-P}}{6u}\right)^2, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{D} = -3\mu^2.$$

En résumé, pour qu'une forme soit conservée par une loxodromique de type L_3, L_4 ou L_6, il est *nécessaire* que l'on ait

pour une L_4 $\mathfrak{D} = -\mu^2$,
pour une L_3 ou une L_6 $\mathfrak{D} = -3\mu^2$.

Ces conditions sont plus étendues que celles du paragraphe précédent, car les coefficients d'une forme de déterminant $-\mu^2$ ou $-3\mu^2$ ne sont pas pour cela divisibles séparément par μ. Si l'on a ramené la forme donnée $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ à l'*une* des formes primitives qui lui sont semblables (par. 52), $\mathfrak{D} = -1$ ou -3 seront alors les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que la famille de formes $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ soit conservée par une substitution elliptique d'ordre 2 ou 3, $\mathfrak{D} = -\mu^2$ ou $-3\mu^2$ seront les conditions *nécessaires* pour qu'elles soient conservées soit par une L_4, soit par une L_3 ou une L_6.

72 Considérons une L_2; la somme $\alpha+\delta$ est d'après (99)

$$\alpha + \delta = 2t = b\sqrt{-P}$$

d'ailleurs :

$$t^2 - \mathfrak{D}u^2 = 1$$

donc :

$$-\mathfrak{D}u^2 = 1 + \frac{Pb^2}{4}$$

ou

$$\mathfrak{D} = -\frac{Pb^2+4}{4\mu^2}.$$

Si donc Pb^2+4 est un carré, le déterminant $\mathfrak{D}$ est du type $-\mu^2$; et réciproquement.

Soit maintenant une L_4; la somme $\alpha+\delta$ correspondante est d'après (101)

$$\alpha + \delta = a + b\sqrt{-P} \quad \text{avec} \quad a^2 - Pb^2 = 2.$$

Si nous élevons cette L_4 au carré nous trouvons une L_2, mais non une L_2 quelconque, en effet la somme $\alpha'+\delta'$ est pour cette L_2

$$\begin{aligned}\alpha' + \delta' &= (\alpha+\delta)^2 - 2\\ &= 2ab\sqrt{-P} = b'\sqrt{-P}\end{aligned}$$

et la quantité (Pb'^2+4) est

$$\begin{aligned} Pb'^2 + 4 &= 4Pa^2b^2 + 4 \\ &= 4(a^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

C'est donc toujours un carré ; par suite une substitution L_4 ne peut conserver qu'une forme de discriminant $\mathfrak{D} = -\mu^2$, ce qui confirme un des résultats du paragraphe précédent.

73. Nous avons maintenant à considérer les formes que nous avons exclues des raisonnements précédents, les *formes à déterminant carré parfait*. Celles-ci sont de deux types, suivant que le déterminant $\mathfrak{D}$ est nul ou non.

Supposons d'abord $\mathfrak{D}$ *nul*, d'où il suit $|\alpha+\delta| = 2$. Prenons $\alpha+\delta = 2$, cas auquel on peut toujours se ramener, la relation (107) devient

$$\alpha + \delta = 2 = 2t$$

d'où l'expression générale des substitutions paraboliques qui conservent une forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ primitive de déterminant nul

$$\begin{pmatrix} 1 - \mathcal{B}u & -\mathcal{C}u \\ \mathcal{A}u & 1 + \mathcal{B}u \end{pmatrix} \tag{126}$$

u étant une fraction du corps telle que $\mathcal{A}u, \mathcal{B}u, \mathcal{C}u$ soient entiers.

La substitution (126) peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 + h\omega & -h\omega^2 \\ h & 1 - h\omega \end{pmatrix}$$

ou bien

$$\frac{1}{z' - \omega} = \frac{1}{z - \omega} + h$$

en posant

$$\omega = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}, \qquad h = \mathcal{A}u,$$

expression où le *pôle* ω et l'*amplitude* h de la substitution sont mis en évidence.

Le groupe (126) contient au moins toutes les substitutions que l'on obtient en prenant pour u un entier quelconque du corps, $m+n\sqrt{-P}$. Ces substitutions forment un groupe, qui a deux substitutions génératrices, S et T, la première d'amplitude **a**, la seconde d'amplitude **a** $\sqrt{-P}$, une substitution $S^m T^n$ du groupe ayant pour amplitude $\mathbf{a}\left(m+n\sqrt{-\mathrm{P}}\right)$. Si le groupe (126) contient d'autres substitutions, correspondant à des valeurs fractionnaires de u, il sera encore construit sur deux substitutions génératrices, U et V (car une troisième conduirait à des substitutions infinitésimales). Soient $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$ les amplitudes de U et V, il faudra que

$$\mathbf{a} = p\mathbf{h}, \qquad \mathbf{a}\sqrt{-\mathrm{P}} = q\mathbf{k},$$

p et q entiers, afin que le groupe comprenne les substitutions déjà trouvées; de plus, il faudra que

$$\mathbf{h}\sqrt{-\mathrm{P}} = r\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k}\sqrt{-\mathrm{P}} = s\mathbf{h},$$

r et s entiers.

Ce cas plus général du groupe parabolique ne peut se présenter que dans les corps où il existe des classes d'idéaux non ambigues. En effet, u ne peut être une fraction que si les idéaux principaux $(\mathcal{A}), (\mathcal{B}), (\mathcal{C})$ ont un idéal p. g. c. d. I différent de (1). S'ils n'en ont pas, u est nécessairement entier. Or, mettons le quotient des idéaux principaux $(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{A})$ sous la forme du quotient de deux idéaux b et a premiers entre eux : $\dfrac{(\mathcal{B})}{(\mathcal{A})} = \dfrac{b}{a}$. Cela est possible d'une seule manière, et les idéaux a et b sont de la même classe. La forme $(x-\omega y)^2$, à coefficients rationnels, est formellement semblable à la forme

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2. \tag{127}$$

Si les idéaux a et b appartiennent à une classe non ambigue, cette notation est dépourvue de sens, et il faut entendre que si l'on multiplie les idéaux a^2, ab, b^2, par un idéal quelconque J de la classe conjuguée, on obtiendra des idéaux principaux $(\mathcal{A}), (\mathcal{B}), (\mathcal{C})$, qui conduiront à une forme $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ à coefficients entiers. Le nombre u pourra dans ce cas être fractionnaire.

Si au contraire les idéaux a et b appartiennent à une classe ambigue, les idéaux a^2, ab, b^2, sont principaux et premiers entre eux, et conduisent directement à une forme primitive unique $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, le nombre u devant alors être entier[1].

---

[1] Le groupe des substitutions paraboliques conservant le point à l'infini

$$\begin{pmatrix} 1 & m+n\sqrt{-\mathrm{P}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{128}$$

est dans tous les corps $\mathcal{C}_{1,2}(\sqrt{-\mathrm{P}})$ un exemple du cas simple où il existe une forme primitive unique, ici y^2. Pour donner un exemple du cas général, plaçons-nous dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-14})$ où il existe quatre classes : la classe principale, une classe ambigue A et deux classes non ambigues B et C et prenons pour pôle

$$\omega = \frac{1+\sqrt{\ }}{3}, \qquad \text{d'où } \frac{(1+\sqrt{\ })}{(3)} = \frac{(3,\ 1+\sqrt{\ })(5,\ 1+\sqrt{\ })}{(3,\ 1+\sqrt{\ })(3,\ 2+\sqrt{\ })} = \frac{(5,\ 1+\sqrt{\ })}{(3,\ 2+\sqrt{\ })} = \frac{b}{a}.$$

Les idéaux a et b sont de la classe B, leurs carrés sont de la classe A (ambigué) ; nous ob-

74. Considérons à présent les *formes à déterminant carré parfait et non nul.* Les substitutions conservant une pareille forme sont données par (108), t et u satisfaisant à la relation

$$t^2 - \mathfrak{D}u^2 = 1. \tag{109}$$

Posons

$$t' = 2t, \qquad u' = 2u\sqrt{\mathfrak{D}},$$

t' et u' seront des entiers du corps satisfaisant à

$$t'^2 - u'^2 = 4. \tag{129}$$

Pour une substitution hyperbolique, t' devra être un entier réel > 2 en valeur absolue, u' sera donc aussi un entier réel. L'équation (129) n'a pas dans ces conditions d'autres solutions que $t' = \pm 2$, $u' = 0$, ce qui donne les deux substitutions que nous avons appelées 1 et I,

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui correspondent l'une et l'autre à un déplacement nul.

Une forme à déterminant carré parfait n'est donc conservée par aucune substitution hyperbolique. Elle ne peut l'être non plus par une substitution loxodromique d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$, dont la puissance n serait une substitution hyperbolique. Elle ne l'est pas non plus par une substitution loxodromique d'angle incommensurable à π, puisque celles-ci exigent que $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_0$ ne soit pas carré parfait, ni par une substitution parabolique, ce qui exigerait que $\mathfrak{D}$ fût nul. Il reste qu'elle pourrait être conservée par une substitution elliptique. Si celle-ci est d'ordre deux, il faut nécessairement que $\mathfrak{D} = -1$, lequel n'est carré parfait que dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-1})$, si elle est d'ordre trois il faut $\mathfrak{D} = -3$, qui n'est carré parfait que dans l'anneau $\mathcal{A}(\sqrt{-3})$.

---

tenons deux formes primitives en multipliant les coefficients idéaux de la forme (127) par les idéaux $c_1 = (2, \sqrt{\ })$ ou $c_2 = (7, \sqrt{\ })$ de la classe A, ce qui donne les formes

$$\mathrm{F}_1 = (2 + \sqrt{\ })x^2 + 2(4 - \sqrt{\ })xy - (6 + \sqrt{\ })y^2,$$

$$\mathrm{F}_2 = (7 - \sqrt{\ })x^2 - 2(7 + 2\sqrt{\ })xy - (7 - 3\sqrt{\ })y^2.$$

Le groupe parabolique conservant le pôle ∞ est

$$\mathrm{U}^m\mathrm{V}^n = \begin{pmatrix} -3 + \sqrt{\ } & 6 + \sqrt{\ } \\ 2 + \sqrt{\ } & 5 - \sqrt{\ } \end{pmatrix}^m \times \begin{pmatrix} 8 + 2\sqrt{\ } & -7 + 3\sqrt{\ } \\ 7 - \sqrt{\ } & -6 - 2\sqrt{\ } \end{pmatrix}^n$$

les amplitudes de U et V sont respectivement

$$\mathbf{h} = 2 + \sqrt{\ }, \qquad \mathbf{k} = 7 - \sqrt{\ }$$

et l'on a bien

$$\mathbf{h}\sqrt{-\mathrm{P}} = -2\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k}\sqrt{-\mathrm{P}} = 7\mathbf{h}.$$

On peut conclure, en exceptant ces deux cas, *qu'une forme de déterminant carré parfait et non nul n'est conservée par aucune substitution en dehors de la substitution identique.*

75. A ces formes correspondent, géométriquement, des demi-circonférences qui ne traversent qu'un nombre fini de domaines. Celles-ci, en effet, doivent atteindre l'absolu à l'intérieur de l'angle polyèdre aboutissant à un sommet singulier; autrement dit, il faut que les points-racines de la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ soient d'abcisse rationnelle, c'est-à-dire soient de ces points que nous venons de rencontrer comme pôles de substitutions paraboliques. Et la condition pour que les zéros de $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ soient rationnels est précisément que $\mathcal{D}$ soit carré parfait.

76. Rassemblons les résultats obtenus dans les paragraphes 63 à 75. Nous obtenons le tableau suivant, où $\mathcal{D}$ désigne le déterminant de l'une des formes primitives de la famille de formes considérée, et P, 1, ..., etc., le type auquel appartiennent les substitutions qui conservent les formes de la famille :

$\mathcal{D}$ nul			P		
$\mathcal{D}$ carré parfait			1		
$\mathcal{D}$ non carré parfait	$\mathcal{D}\mathcal{D}_0$ carré parfait	$\mathcal{D} = -1$	H_1, E_2	et parfois	L_4
		$\mathcal{D} = -3$	H_1, E_3	»	L_6
		$\mathcal{D} = -\mu^2$	H	»	L_2, L_4
		$\mathcal{D} = -3\mu^2$	H	»	L_3, L_6
		tous autres cas	H	»	L_2
	$\mathcal{D}\mathcal{D}_0$ non carré parfait		L_1		

77. *Tous les différents cas prévus par le tableau précédent existent effectivement;* il est nécessaire de le montrer sur des exemples particuliers, car il résulte seulement des raisonnements précédents que ce sont des cas possibles.

On trouvera au Chapitre x de nombreux exemples d'arêtes elliptiques, conservées par conséquent par des L_2 et L_3, et tantôt admettant aussi des L_4 ($P = 2$ et 14) et des L_6 ($P = 2$ et 11), tantôt n'en admettant pas. Nous dirons que de pareilles L_2 et L_3, situées sur des arêtes elliptiques, sont *décomposables dans le groupe* Γ; elles sont en effet le produit d'une H et d'une E appartenant toutes deux au groupe Γ.

Mais il existe aussi des L_2 et des L_3 situées sur des arêtes non elliptiques. On peut bien décomposer géométriquement ces substitutions en une H et une E, mais la E ne sera pas alors du groupe Γ (ses coefficients ne seront pas entiers dans le corps ou l'anneau), et par suite la H non plus. Nous dirons que de pareilles L_2 et L_3 sont *indécomposables dans le groupe* Γ (l'expression *indécomposable* n'écartant pas d'ailleurs la possibilité que ces L_2 ou L_3 soient le carré d'une L_4 ou d'une L_6). Voici des exemples des quatre cas possibles, pris tous dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-2})$.

1° L_2 *indécomposable, sans* L_4 :

forme $x^2 + 2\sqrt{\;}\,xy + 7y^2$, $\quad \mathfrak{D} = -9$

conservée par $L_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\;} & -7 \\ 1 & 3\sqrt{\;} \end{pmatrix}$, $\quad t = 2\sqrt{\;}, \quad u = 1$;

2° L_2 *indécomposable, avec* L_4.

forme $2x^2 + 2xy + \sqrt{\;}\,y^2$, $\quad \mathfrak{D} = -(1 + \sqrt{\;})^2$

conservée par $L_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{\;} & 2 + \sqrt{\;} \\ -2 + 2\sqrt{\;} & -1 + 3\sqrt{\;} \end{pmatrix}$, $\quad t = 2\sqrt{\;}, \quad u = -1 + \sqrt{\;}$,

et par $L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\;} & 1 + \sqrt{\;} \end{pmatrix}$, $\quad t = \dfrac{2 + \sqrt{\;}}{2}, \quad u = \dfrac{\sqrt{\;}}{2}$;

3° L_3 *indécomposable, sans* L_6.

forme $(-2 + 60\sqrt{\;})\,x^2 + 2(5 - 6\sqrt{\;})\,xy - 2y^2$, $\quad \mathfrak{D} = -3(5 - 2\sqrt{\;})^2$

conservée par $L_3 = \begin{pmatrix} 6\sqrt{\;} & 1 \\ -1 + 30\sqrt{\;} & 5 \end{pmatrix}$, $\quad t = \dfrac{5 + 6\sqrt{\;}}{2}, \quad u = \dfrac{1}{2}$;

4° L_3 *indécomposable, avec* L_6 :

forme $2(1 - 3\sqrt{\;})\,x^2 - 2(3 - \sqrt{\;})\,xy + 2y^2$, $\quad \mathfrak{D} = -3(1 - \sqrt{\;})^2$

conservée par $L_3 = \begin{pmatrix} 8 + 3\sqrt{\;} & -3 - \sqrt{\;} \\ 9 - 8\sqrt{\;} & -3 + 3\sqrt{\;} \end{pmatrix}$, $\quad t = \dfrac{5 + 6\sqrt{\;}}{2}, \quad u = \dfrac{3 + \sqrt{\;}}{2}$

et par $L_6 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 - 3\sqrt{\;} & \sqrt{\;} \end{pmatrix}$, $\quad t = \dfrac{3 + \sqrt{\;}}{2}, \quad u = \dfrac{1}{2}$.

*
* *

78 *Sous-groupes du groupe* Γ *conservant une forme définie d'Hermite.* — Soit (abc) une forme définie d'Hermite, de discriminant non nul, il lui correspond un point intérieur à l'absolu. Or, les substitutions elliptiques sont les seuls déplacements qui conservent des points intérieurs à l'absolu (cela résulte de l'interprétation géométrique des substitutions de Γ). Si donc le point (abc) n'appartient pas à une demi-circonférence conservée par une substitution elliptique, — nous dirons pour abréger à une *arête elliptique*, — il ne sera conservé que par un déplacement nul. Il y a deux substitutions de Γ qui correspondent à un déplacement nul : la substitution unité, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et la substitution $I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, dans le cas général une forme d'Hermite définie admet dans le groupe *deux* transformations en elle-même, ou *automorphies*, savoir 1 et I.

Si le point (abc) est situé sur une arête elliptique d'ordre deux, la forme (abc) sera conservée par les *quatre* substitutions du sous-groupe (1, E, I, EI). De même si le point (abc) est situé sur une arête elliptique d'ordre trois, la forme (abc) admettra les *six* automorphies (1, E, E^2, I, EI, E^2I).

Supposons maintenant que deux arêtes elliptiques aient un point commun. Ce point commun sera conservé par toutes les substitutions du groupe polyédrique dont les deux substitutions elliptiques sont les substitutions génératrices. Nous conviendrons de l'appeler *sommet polyédrique*.

On ne peut pas obtenir ainsi tous les types de groupes polyédriques possibles, puisque le groupe Γ ne contient que des substitutions elliptiques d'ordre deux ou trois. En se reportant au tableau connu des groupes d'ordre fini (p. ex. Klein, *Ikosaeder*, p. 21), on voit qu'on ne peut avoir ici que des groupes de trois types :

Le groupe *trirectangle* d'ordre quatre (trois arêtes elliptiques d'ordre deux se rencontrant à angle droit),

Le groupe *diédrique* d'ordre six (une arête d'ordre trois perpendiculaire à trois arêtes d'ordre deux formant des angles de 120° dans un même plan);

Le groupe *tétraédrique* d'ordre douze (trois arêtes d'ordre deux formant un sous-groupe trirectangle; quatre arêtes d'ordre trois disposées comme les diagonales d'un cube).

On rencontre effectivement ces trois types.

Comme une forme conservée par une substitution S de Γ est aussi conservée par la substitution SI, on voit qu'en définitive une forme (abc) correspondant à un sommet polyédrique admet, suivant les cas, *huit*, *douze*, ou *vingt-quatre automorphies*.

Nous avons ainsi énuméré tous les sous-groupes d'ordre fini du groupe Γ.

79. Au lieu de nous appuyer sur les résultats classiques de l'*Icosaèdre*, nous pouvons démontrer directement que ces sous-groupes existent et qu'il n'en existe pas d'autres, comme il suit :

Une substitution elliptique d'ordre deux $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ conserve la forme de déterminant -1

$$F_2 = \gamma x^2 - 2\alpha xy - \beta y^2.$$

Une substitution elliptique d'ordre trois $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 1-\alpha \end{pmatrix}$ conserve la forme de déterminant -3

$$F_3 = 2\gamma x^2 + 2(1-2\alpha)xy - 2\beta y^2.$$

L'invariant simultané de deux formes des types précédents est, pour deux formes F_2 :

$$H_{22} = -\gamma\beta' - \gamma'\beta - 2\alpha\alpha';$$

pour une forme F_2 et une forme F_3 :

$$H_{23} = -2\gamma\beta' - 2\gamma'\beta + 2\alpha(1-2\alpha');$$

pour deux formes F_3 :

$$H_{33} = -4\gamma\beta' - 4\gamma'\beta - 2(1-2\alpha)(1-2\alpha').$$

La condition pour que deux arêtes elliptiques d'ordre deux se rencontrent est (par. 26) que H_{22} soit réel et inférieur en valeur absolue à $2\sqrt{\mathcal{D}\mathcal{D}'}$ ou 2. Comme tous les coefficients que nous considérons sont entiers, les seules valeurs admissibles pour H_{22} sont alors 0 et ± 1.

Dans le premier cas, les arêtes elliptiques qui se rencontrent font entre elles l'angle φ donné par

$$\cos\varphi = \frac{H}{2\sqrt{\mathcal{D}\mathcal{D}'}} = 0;$$

elles sont donc orthogonales, et à partir des substitutions correspondantes on construit le *groupe trirectangle.*

Dans le second cas, on a

$$\cos\varphi = \frac{H}{2\sqrt{\mathcal{D}\mathcal{D}'}} = \frac{\pm 1}{2};$$

c'est le cas du groupe *diédrique d'ordre six.*

Pour qu'une arête d'ordre deux rencontre une arête d'ordre trois, il faut que H_{23} soit réel et inférieur en valeur absolue à $2\sqrt{\mathcal{D}\mathcal{D}'}$ ou $2\sqrt{3}$. Mais il résulte de l'expression de H_{23} que H_{21} est toujours un nombre pair. On peut donc seulement avoir $H = 0$ ou ± 2.

Dans le premier cas on a

$$\cos\varphi = \frac{H}{2\sqrt{\mathcal{D}\mathcal{D}'}} = 0;$$

les deux arêtes sont orthogonales, c'est le cas du *groupe diédrique d'ordre six.*

Dans le second cas on a

$$\cos\varphi = \frac{H}{2\sqrt{\mathcal{D}\mathcal{D}'}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}};$$

l'angle φ est celui que fait la droite $x = y = z$ avec les axes de coordonnées. C'est le cas du *groupe tétraédrique.*

Enfin pour que deux arêtes d'ordre trois se rencontrent il faut que H_{31} soit réel et inférieur en valeur absolue à $2\sqrt{\mathcal{D}\mathcal{D}'}$ ou 6. Mais il résulte de l'expression de H_{33} que H_{31} est toujours mult. 4 plus 2. On peut donc avoir seulement $H_{33} = \pm 2$ et l'angle des deux arêtes est donné par

$$\cos\varphi = \frac{H}{2\sqrt{\mathcal{D}\mathcal{D}'}} = \pm\frac{1}{3};$$

l'angle φ est celui que font entre elles les diagonales d'un cube. C'est le cas du *groupe tétraédrique.*

80. Nous venons d'étudier les sous-groupes du groupe Γ conservant une forme de Dirichlet (par. 61 à 77) ou une forme définie d'Hermite (par. 78 et 79) ainsi que les formes semblables. Les sous-groupes conservant une forme indéfinie d'Hermite, sous-groupes dont l'étude a été inaugurée par M. Picard (v. Chap. V, par. 37) offrent un champ de recherches beaucoup plus vaste et que nous n'aborderons pas ici. Si-

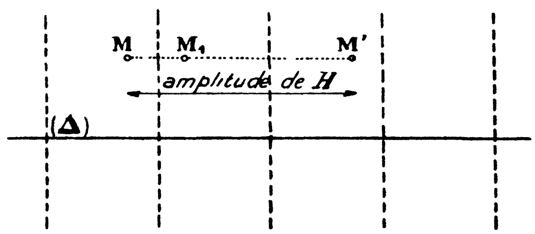


FIG. 3.

gnalons seulement un exemple élémentaire de ces sous-groupes. Lorsqu'une droite (Δ) rencontre à angle droit l'axe d'une substitution elliptique d'ordre deux E, elle en rencontre une infinité ; les axes de ces retournements sont distants entre eux (par. 34) de la moitié de l'amplitude MM' de la substitution hyperbolique H attachée à la droite (Δ), et sont tous dans un même plan de l'espace cayleyen (demi-sphère du demi-espace de Poincaré) qui est ainsi conservé par toutes les substitutions du groupe construit sur H et E. Nous nous servirons plus loin de cette remarque (par. 93).

NOTE

Nous avons trouvé quatre propriétés (I, II, III, par. 53 ; IV, par. 64) caractérisant les formes de première espèce par opposition à celles de seconde espèce. La distinction posée est donc véritablement essentielle. Il est intéressant dans ces conditions de rechercher quels sont les entiers $\mathfrak{D}$ d'un corps quadratique $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$ dont le module est carré parfait.

Posons

$$\mathfrak{D} = a + b\sqrt{-P},$$

nous devrons avoir

$$a^2 + Pb^2 = c^2. \qquad (1)$$

Supposons d'abord que les idéaux principaux $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}_0)$ soient premiers entre eux. Décomposons $(\mathfrak{D})$ en ses idéaux premiers. Ceux-ci ne peuvent être ni des idéaux principaux, ni des idéaux ambigus, sans quoi ils seraient aussi des facteurs de $(\mathfrak{D}_0)$. On a donc nécessairement

$$(\mathfrak{D}) = \Pi \times \Pi' + \ldots,$$
$$(\mathfrak{D}_0) = \Pi_0 \times \Pi'_0 \times \ldots,$$

Π et Π' étant des idéaux non ambigus, et Π_0, Π'_0, .. leurs conjugués

D'autre part, puisque $(\mathfrak{D})(\mathfrak{D}_0) = c^2$, et que $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}'_0)$ n'ont pas de facteurs communs, il faut aussi que

$$(\mathfrak{D}) = \mathrm{A}^2 \qquad (2)$$

et

$$(\mathfrak{D}_0) = \mathrm{A}_0^2,$$

A étant un certain idéal.

Deux cas sont alors à distinguer, suivant que le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-\mathrm{P}})$ admet des classes ambigues ou non

S'il n'admet pas de classes ambigues, jamais A^2 ne pourra être un idéal principal, comme l'exige l'équation (2), à moins que A ne soit lui-même un idéal principal. Il n'y aura donc pas d'autres solutions de (1) que celles dérivant de

$\mathrm{A} = (u)$, idéal principal premier avec son conjugué,

d'où

$$\mathfrak{D} = u^2$$

et

$$c = uu_0.$$

Si le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-\mathrm{P}})$ admet des classes ambigues, soit I un idéal non ambigu d'une classe ambigue, on pourra poser

$$(\mathfrak{D}) = \mathrm{I}^2$$

d'où

$$c = \mathfrak{N}\mathrm{I},$$

et l'on aura des solutions de (1) qui ne rentreront pas dans le type précédent.

Considérons par exemple le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-5})$ où il existe deux classes, la classe principale et la classe ambigue Soit

$$u = v + w\sqrt{-5},$$

d'où

$$u^2 = v^2 - 5w^2 + 2vw\sqrt{-5}$$

et

$$uu_0 = v^2 + 5w^2,$$

on a l'identité

$$(v^2 - 5w^2)^2 + 5(2vw)^2 = (v^2 + 5w^2)^2$$

et les entiers complexes du type

$$\mathfrak{D} = (v^2 - 5w^2) + 2vw\sqrt{-5}$$

répondent à la question. Ainsi en prenant

$$u = 1 + \sqrt{-5} \quad \text{on trouve} \quad 4^2 + 5 \times 2^2 = 6^2,$$

$$u = 2 + \sqrt{-5} \quad \text{on trouve} \quad 1^2 + 5 \times 4^2 = 9^2,$$

etc. .

D'autre part, prenons un idéal non ambigu de la classe ambigue, par exemple

$$I = (3, 2 + \sqrt{-5})$$

il vient

$$I^2 = (2 + \sqrt{-5}),$$

d'où la solution

$$\mathfrak{D} = 2 + \sqrt{-5}, \qquad 2^2 + 5 \times 1^2 = 3^2,$$

qui ne rentre pas dans le type précédent, où le coefficient de $\sqrt{-5}$ était nécessairement un nombre pair.

En géneral, le determinant $\mathfrak{D}$ d'une forme de première espèce sera, si l'on ne suppose plus que $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}_0)$ soient premiers entre eux,

$$\mathfrak{D} = \alpha^2 d,$$

α étant un entier complexe quelconque du corps, et d un entier complexe tel que $(d) = I^2$, (I idéal non ambigu de la classe ambigue).

L'analyse précédente est due à M. Humbert, qui dans son Cours du Collège de France en 1918-1919 résolvait l'equation, plus générale que celle qui nous intéresse,

$$x^2 - my^2 = z^h.$$

Il s'agit alors de savoir s'il y a, ou non, dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{m})$, des idéaux I tels que l'idéal I^h soit principal.

CHAPITRE VIII

FORMATION ET ÉTUDE DU DOMAINE FONDAMENTAL DU GROUPE MODULAIRE

81. La méthode de M. Humbert pour la formation du domaine du groupe modulaire du corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$ suppose $P \equiv 1$ ou 2 (mod. 4). Nous allons montrer qu'elle s'étend avec de légères modifications aux corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$ et aux anneaux $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$, $P \equiv 3$ (mod. 4).

Étudions d'abord le cas du groupe modulaire Γ'' attaché à l'*anneau* $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$. Nous avons à considérer, comme dans le corps $\mathcal{C}_{1,2}(\sqrt{-P})$, une prisme à base rectangle de côtés 1 et $\sqrt{-P}$, et à le fermer par le bas à l'aide de sphères (λ, ν). Mais il y a lieu de reviser les conditions auxquelles doivent être soumis les entiers λ et ν. Pour appliquer la méthode de M. Humbert, on a besoin de pouvoir trouver deux autres entiers, μ, ρ, tels que l'on ait

$$\lambda\rho - \mu\nu = +1. \tag{130}$$

Il suit de là que l'idéal le moins étendu, contenant à la fois tous les nombres de l'idéal principal (λ) et de l'idéal principal (ν), est l'idéal (1). Dans la théorie des corps quadratiques on démontre que cet idéal est le plus grand commun diviseur des idéaux (λ) et (ν) et l'on dit que les entiers λ et ν sont premiers entre eux. Or les idéaux d'un anneau ne sont pas susceptibles, comme ceux d'un corps, d'une décomposition unique en idéaux premiers ; il n'y a donc pas dans un anneau de plus grand commun diviseur, ni d'entiers premiers entre eux. Mais pour nous assurer que la relation (130) a lieu, ce qui suffit pour le développement de la méthode, nous n'aurons qu'à former le plus petit idéal de l'anneau contenant à la fois l'idéal (λ) et l'idéal (ν) [idéal que nous n'avons pas le droit, ici, d'appeler le plus grand commun diviseur de (λ) et (ν)], et à voir si cet idéal est, ou non, l'idéal (1) de l'anneau. La pratique de ce procédé conduit d'ailleurs à un algorithme suffisamment simple.

On trouvera au Chapitre X les domaines fondamentaux du groupe Γ'' dans les anneaux $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$, $P = 3, 7, 11, 15, 19$, obtenus de cette manière.

82. Étudions maintenant le cas du groupe modulaire Γ' attaché à un *corps* $\mathcal{C}_3(\sqrt{-P})$. La modification va porter ici sur le prisme vertical à l'intérieur duquel doit se trouver une forme réduite.

Le sous-groupe du groupe Γ formé par des substitutions paraboliques qui ont pour point double le point à l'infini sur l'axe $o\zeta$ est formé des substitutions

$$\begin{pmatrix} 1 & m+n\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{131}$$

$\left(m, n \text{ entiers ordinaires}; \ \omega = \dfrac{1+\sqrt{-P}}{2}\right)$. Les points homologues du point o par rapport à ces substitutions sont tous les points d'affixe entière dans le corps $\mathcal{C}_3(\sqrt{-P})$; ils forment une grille qui n'est pas rectangulaire comme dans les corps et anneaux que nous venons d'étudier, mais qui a la disposition indiquée *fig. 4*. Si nous appliquons la méthode du rayonnement, nous trouvons pour domaine fondamental du sous-groupe considéré, dans le plan $\zeta = 0$, l'hexagone *abcdef*.

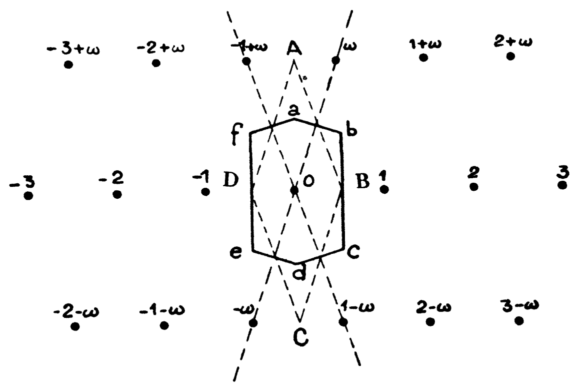


FIG. 4.

Klein a montré (*Autom. Funkt.*, I, pp. 214-225) qu'il y avait en général trois manières de transformer cet hexagone en un parallélogramme équivalent et que la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe parabolique fût susceptible d'être amplifié par symétrie était que l'on puisse transformer l'hexagone en un rectangle ou un losange.

Le groupe Γ ainsi que le groupe Γ' est, comme on peut le voir analytiquement, susceptible d'amplification par symétrie Dans les corps ou anneaux que nous avons étudiés jusqu'ici, le rectangle de côtés $\left(\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{-P}}{2}\right)$ se présentait de lui-même. Ici il conviendra de choisir comme domaine fondamental du sous-groupe parabolique le losange ABCD, équivalent à l'hexagone *abcdef*, qui a pour sommes les points $\pm\dfrac{1}{2}$, $\pm\dfrac{\sqrt{-P}}{2}$.

Une forme réduite dans le corps $\mathcal{C}_3(\sqrt{-P})$ devra donc comme première condition se trouver à l'intérieur du prisme qui a pour base le losange ABCD et dont les arêtes sont parallèles à $o\zeta$. Pour achever de définir le domaine fondamental du groupe Γ il faudra « fermer ce prisme par le bas », ce qui se fera à l'aide de sphères (λ, ν) exactement comme pour le corps $\mathcal{C}_{1,2}(\sqrt{-P})$.

On trouvera au Chapitre X les domaines du groupe dans les corps $\mathcal{C}_3(\sqrt{-P})$, $P = 3, 7, 11, 15, 19$, obtenus de cette manière.

83. La méthode de M. Humbert pour la formation du domaine fondamental du groupe $\Gamma(\sqrt{-P})$, $P \equiv 1$ ou 2 (mod. 4) permet d'en déterminer *a priori* les *sommets singuliers*. Nous allons étendre ces résultats aux corps $\mathcal{C}_3(\sqrt{-P})$ et aux anneaux $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$.

Pour les corps $\mathcal{C}_3(\sqrt{-P})$, le raisonnement de M. Humbert s'applique sans modification, le résultat seul est différent. Parmi les formes réduites de Gauss de discriminant $P \equiv 3$ (mod. 4), les unes sont de l'ordre propre, les autres de l'ordre impropre. D'autre part, dans le corps $\mathcal{C}_3(\sqrt{-P})$, un idéal normal $(q, g+\omega)$ correspond à la forme de Gauss

$$2qx^2 + 2(2g+1)xy + 2hy^2, \qquad 4qh - (2g+1)^2 = P,$$

qui est de l'ordre impropre. Mais les sommets singuliers du domaine correspondent, d'après M. Humbert, aux classes d'idéaux du corps. Nous sommes donc amenés à conclure que les sommets singuliers du domaine fondamental du groupe modulaire, dans le corps $\mathcal{C}_3(\sqrt{-P})$, ont pour affixe les quantités

$$\begin{cases} r = qm + (g+\omega)n, \\ s = q \end{cases}$$

où m est un entier ordinaire quelconque, n un entier ordinaire premier à q et $(2q, 2g+1, 2h)$ une forme réduite de Gauss de discriminant $+P$ et de *l'ordre impropre*.

C'est ainsi que dans les cas $P = 3, 7, 11, 19$, où il n'y a qu'une réduite impropre, il n'y a pas d'autre sommet singulier que le sommet à l'infini $o\zeta$, lequel correspond, quel que soit P, à la réduite $\left(2, 1, \frac{P+1}{2}\right)$.

Dans le cas $P = 15$, où il existe une deuxième réduite impropre, savoir :

$$4x^2 + 2xy + 4y^2 \quad \text{ou} \quad (4, 1, 4),$$

nous aurons pour sommet singulier le point $\frac{1+\omega}{2}$ et les points homologues, notamment le point $\frac{\omega}{2}$, obtenu en changeant le signe de g, nous sommes en effet dans le cas signalé par M. Humbert où les deux coefficients extrêmes de la réduite de Gauss étant égaux, on doit, pour obtenir tous les sommets singuliers, affecter successivement le coefficient médian des signes $+$ et $-$, ce qui ne change pas la classe.

La formation effective des domaines $P = 3, 7, 11, 15, 19$ (V. Chapitre x) vérifie ces prévisions.

84. La méthode de M. Humbert ne s'applique pas immédiatement aux *anneaux* $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$. En effet, elle s'appuie sur la notion d'idéal plus grand commun diviseur des idéaux (r) et (s), et lorsque (r) et (s) sont deux idéaux d'un anneau on ne peut pas leur attribuer de plus grand commun diviseur.

On peut tourner cette difficulté en raisonnant sur des formes quadratiques réelles au lieu d'employer les idéaux correspondants, comme il suit :

Soit $\frac{r}{s}$ un point d'affixe rationnelle du plan. Il s'agit de démontrer qu'il peut être couvert, ou tout au moins atteint, par des sphères (λ, ν).

Je forme comme dans un corps l'idéal I de l'anneau, le plus petit possible, contenant les idéaux (r) et (s) [ce n'est pas leur p. g. c. d.]. Cet idéal $I = \left(q, g + \sqrt{-P}\right)$ correspond à la forme

$$f = qx^2 + 2gxy + hy^2, \qquad qh - g^2 = P,$$

forme qui peut ici être de l'ordre propre ou de l'ordre impropre, et l'on a

$$r = qz + (g + \sqrt{-P})\,t, \qquad s = qu + (g + \sqrt{-P})\,v,$$

z, t, u, v entiers ordinaires.

Par une substitution modulaire réelle quelconque $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ effectuée sur les variables (x, y), je transforme la forme $f(x, y)$ en la forme

$$f'(x'y') = q'x'^2 + 2g'x'y' + h'y'^2.$$

J'applique aux couples de variables (z, t), (u, v), la transformation inverse $\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$; soient $(z'\,t')$, $(u'\,v')$, les valeurs ainsi obtenues.

Je pose

$$\begin{cases} r' = q'z' + (g' + \sqrt{-P})\,t', \\ s' = q'u' + (g' + \sqrt{-P})\,v'. \end{cases}$$

Je dis que l'on a $\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s}$. En effet, on trouve en développant

$$\begin{aligned} r' &= [qz + (g + \sqrt{-P})t]\alpha + [(g - \sqrt{-P})z + ht]\gamma \\ &= [qz + (g + \sqrt{-P})t]\alpha + \frac{g - \sqrt{-P}}{q}[qz + (g + \sqrt{-P})t]\gamma \\ &= \left(\alpha + \frac{g - \sqrt{-P}}{q}\gamma\right) r \end{aligned}$$

et de même

$$s' = \left(\alpha + \frac{g - \sqrt{-P}}{q}\gamma\right) s.$$

Étant donné une fraction rationnelle de l'anneau $\frac{r}{s}$ dont dépend d'une certaine manière une forme réelle f, nous en avons donc déduit une fraction égale $\frac{r'}{s'}$, qui correspond de la même manière à une forme f' prise au hasard dans la classe de f.

Si pour forme f' nous choisissons la forme *réduite* équivalente à f, nous obtenons une fraction $\frac{r'}{s'}$, bien déterminée, sur laquelle nous pouvons poursuivre le raisonnement en suivant maintenant de près celui de M. Humbert. J'en indique le schéma.

Pour que le point $\frac{r}{s}$, quelconque, soit couvert par une sphère (λ, ν), il faut que je puisse trouver λ et ν entiers et satisfaisant à la relation $\lambda\rho - \mu\nu = 1$ (130), tels que

$$\mathfrak{N}(\nu r - \lambda s) \leqslant \mathfrak{N} s;$$

si l'on a le signe $=$, le point $\frac{r}{s}$ sera atteint et non recouvert.

Je remplace $\frac{r}{s}$ par la fraction égale $\frac{r'}{s'}$ correspondant à la réduite f', ce qui ne change pas le point. Le nombre s' appartenant à l'idéal I' qui correspond à f' est de la forme

$$s' = q'x + (g' + \sqrt{-P})y$$

et l'on a par conséquent

$$\mathfrak{N}s' = q'f'(x, y) \geqslant q'^2$$

puisque f' est réduite.

Inversement, je puis exprimer q' et $(g'+\sqrt{-\mathrm{P}})$ en fonction de r' et de s' sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} q' &= \nu r' - \lambda s', \\ g'+\sqrt{-\mathrm{P}} &= -\rho r' + \mu s' \end{aligned}\right. \quad \text{avec} \quad \lambda\rho - \mu\nu = \pm 1,$$

ce qui montre que l'idéal (1) est le plus petit idéal contenant les idéaux (λ) et (ν).

Si donc il se trouve que $\mathfrak{N}s' > q'^2$, les nombres λ et ν définiront une sphère (λ, ν) qui recouvrira le point $\frac{r}{s}$ dont nous étions partis, puisqu'on aura

$$\mathfrak{N}(\nu r' - \lambda s') = q'^2 < \mathfrak{N}s'.$$

Si par contre l'on a $\mathfrak{N}s' = q'^2$, alors le point $\frac{r}{s}$ ne pourra pas être recouvert, mais seulement atteint; ce sera un des sommets singuliers. On montrerait, comme pour les corps $\mathcal{C}(\sqrt{-\mathrm{P}})$, que l'on a explicitement

$$\left\{\begin{aligned} r &= qm + (g+\sqrt{-\mathrm{P}})n, \\ s &= q, \end{aligned}\right.$$

m étant un entier quelconque, n un entier premier à q, et (q, g, h) une forme réduite de discriminant $+\mathrm{P}$ *qui peut être de l'ordre propre ou de l'ordre impropre.*

Les domaines du groupe Γ'' dans les anneaux $\mathrm{P} = 3, 7, 11, 15, 19$, que l'on trouvera au Chapitre X, vérifient ces prévisions.

En résumé, nous avons montré que la méthode de M. Humbert convenablement étendue donne l'expression des affixes des sommets singuliers du domaine fondamental, pour *tous* les corps et anneaux $(\sqrt{-\mathrm{P}})$. Elle les rattache aux réduites de Gauss de discriminant $+\mathrm{P}$,

de l'ordre *propre* pour les corps $(\sqrt{-\mathrm{P}})$, $\mathrm{P} \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$;
de l'ordre *impropre* — — $\mathrm{P} \equiv 3 \pmod 4$;
de l'ordre *propre* et de l'ordre *impropre* pour les anneaux.

85. J'observe en passant que si on considère, au lieu du domaine fondamental seul, la division du demi-espace en une infinité de domaines, on a une propriété analogue à celle du groupe modulaire réel, d'après laquelle tout point d'abcisse rationnelle $\frac{m}{n}$ de l'axe Ox est sommet d'un domaine (et même d'une infinité de domaines, correspondant aux puissances d'une même substitution parabolique). En effet, soit $\frac{r}{s}$ un point d'affixe rationnelle du plan $\zeta = 0$, I l'idéal p. g. c. d.

de (r) et (s), I' l'idéal $(q,\ g+\sqrt{\ })$ de même classe que I correspondant à la réduite de Gauss $(q,\ g,\ h)$; j'ai, entre idéaux,

$$(r) = \mathrm{IA}, \qquad (s) = \mathrm{IB}.$$

Je pose

$$(r') = \mathrm{I'A}, \qquad (s') = \mathrm{I'B}.$$

J'ai $\dfrac{r}{s} = \dfrac{r'}{s'}$, et de plus je puis exprimer r' et s' en fonction de la base $(q,\ g+\sqrt{-\mathrm{P}})$ de I' :

$$\begin{cases} r' = \alpha(g+\sqrt{-\mathrm{P}}) + \beta q, \\ s' = \gamma(g+\sqrt{-\mathrm{P}}) + \delta q \end{cases}$$

de telle sorte que $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ (¹).

(¹) M. Humbert indiquait dans son Cours du Collège de France de 1918-1919 que M. Hurwitz avait énoncé ce théorème et donné l'expression développée (131) des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sans démonstration. La démonstration peut être restituée comme il suit : il s'agit de démontrer que si (λ), (ρ), (λ'), (ρ') sont deux couples d'idéaux principaux admettant *le même p. g. c. d. I, on peut trouver* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *tels que*

$$\lambda' = \alpha\lambda + \beta\rho, \qquad \rho' = \gamma\lambda + \delta\rho \qquad \text{avec} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

(et non pas seulement ± 1, ce qui serait évident). Soit H le nombre de classes d'idéaux dans le corps considéré, $\mathrm{I^H}$ est un idéal principal, je l'appelle (τ). L'idéal (τ) est le p. g. c. d. de (λ^{H}) et de (ρ^{H}), par suite, je puis écrire

$$\tau = m\lambda^{\mathrm{H}} + n\rho^{\mathrm{H}} \qquad \text{et de même} \qquad \tau = m'\lambda'^{\mathrm{H}} + n'\rho'^{\mathrm{H}}$$

m, n, m', n', étant des entiers du corps. Cela posé, je veux une substitution modulaire, transformant $\dfrac{\lambda}{\rho}$ en $\dfrac{\lambda'}{\rho'}$. Il me suffira de trouver une substitution S transformant $\dfrac{\lambda}{\rho}$ en ∞, puis une substitution T transformant ∞ en $\dfrac{\lambda'}{\rho'}$, la substitution TS, produit de S par T, répondra à la question. La substitution S doit être de la forme $\begin{pmatrix} * & * \\ -\rho & \lambda \end{pmatrix}$, je la prends égale à $\begin{pmatrix} m\lambda^{\mathrm{H}-1} & n\rho^{\mathrm{H}-1} \\ -\rho & \lambda \end{pmatrix}$. La substitution T doit être de la forme $\begin{pmatrix} \lambda' & * \\ \rho' & * \end{pmatrix}$; je la prends égale à $\begin{pmatrix} \lambda' & -n'\rho'^{\mathrm{H}-1} \\ \rho' & m'\lambda'^{\mathrm{H}-1} \end{pmatrix}$. Mais les substitutions S et T ne sont pas modulaires, le déterminant de chacune d'elles est égal à τ. J'aurai donc une substitution modulaire en faisant leur produit et en divisant chacun de ses coefficients par τ. Je trouve ainsi les entiers

$$\alpha = \frac{m\lambda'\lambda^{\mathrm{H}-1} + n'\rho\rho'^{\mathrm{H}-1}}{\tau}, \qquad \beta = \frac{n\lambda'\rho^{\mathrm{H}-1} - n'\lambda\rho'^{\mathrm{H}-1}}{\tau},$$
$$\gamma = \frac{m\rho'\lambda^{\mathrm{H}-1} - m'\rho\lambda'^{\mathrm{H}-1}}{\tau}, \qquad \delta = \frac{n\rho'\rho^{\mathrm{H}-1} + m'\lambda\lambda'^{\mathrm{H}-1}}{\tau}; \tag{131}$$

c'est le théorème de M. Hurwitz, sur lequel je m'appuie ci-dessus.

Le point $\frac{r}{s}$ correspond donc, par une substitution du groupe Γ, au point $\frac{g+\sqrt{-P}}{q}$, qui est un sommet singulier du polyèdre fondamental. Tous les points d'affixe rationnelle $\frac{r}{s}$ se groupent donc en H classes, s'il y a H classes d'idéaux, ou de formes de Gauss, pour la valeur de P considérée, théorème que M. Bianchi a démontré d'une autre manière dans son Mémoire de 1892. Tous les points d'une même classe sont homologues entre eux dans le groupe Γ, et ce sont des sommets singuliers de la division du demi-espace, centres de sous-groupes paraboliques du groupe Γ.

86. Nous savons construire le domaine fondamental du groupe Γ et nous connaissons ses sommets singuliers. Nous allons maintenant nous proposer de reconnaître, parmi les arêtes de ce polyèdre, quelles sont celles qui sont *arêtes elliptiques d'ordre deux ou trois*.

Un premier pas dans cette direction consiste à déterminer la *correspondance des faces*. Poincaré a montré que les faces du polyèdre fondamental se correspondent deux à deux par des substitutions S, qui sont les substitutions génératrices du groupe. Soient alors $(\lambda\nu)$, $(\lambda'\nu')$ deux faces correspondantes du domaine fondamental, ou domaine (1), correspondant à la substitution identique. Soit $S\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ \nu & \rho\end{pmatrix}$ la substitution génératrice de Γ qui transforme le domaine (1) en le domaine (S) et la face $(\lambda'\nu')$ de (1) en la face $(\lambda\nu)$ du même domaine. Soit $S'\begin{pmatrix}\lambda' & \mu'\\ \nu' & \rho'\end{pmatrix}$ la substitution génératrice de Γ qui transforme le domaine (1) en le domaine (S') et la face $(\lambda\nu)$ de (1) en la face $(\lambda'\nu')$ du même domaine. On aura d'après cela

$$(S')^{-1} = S$$

et

$$S = \begin{pmatrix}\lambda & -\frac{\lambda\lambda'+1}{\nu}\\ \nu & -\lambda'\end{pmatrix}, \qquad S' = \begin{pmatrix}\lambda' & -\frac{\lambda\lambda'+1}{\nu}\\ \nu & -\lambda\end{pmatrix}.$$

Pour trouver la face correspondante à une face $(\lambda\nu)$ quelconque du domaine fondamental, on cherchera donc parmi les faces de même ν s'il y a une, $(\lambda'\nu)$, dont le λ' permette la formation d'une substitution modulaire S du type ci-dessus.

Il y en aura au moins une d'après la théorie générale. Mais il peut y en avoir plusieurs, et cependant la face $(\lambda\nu)$ n'a qu'une correspondante.

Pour distinguer entre les faces possibles on étudiera comme il suit la *correspondance des sommets*.

87. Soit S $\begin{pmatrix} \lambda' & \mu \\ \nu & -\lambda \end{pmatrix}$ la substitution génératrice du groupe Γ qui transforme la face $(\lambda\nu)$ en la face $(\lambda'\nu)$. Les formules de transformation du demi-espace correspondantes sont, en transformant légèrement les formules de Poincaré (*Œuvres*, t. II, p. 263)

$$\left\{\begin{aligned} z' &= \frac{(\lambda' z + \mu)(\nu_0 z_0 - \lambda_0) + \lambda'\nu_0\zeta^2}{(\nu z - \lambda)(\nu_0 z_0 - \lambda_0) + \nu\nu_0\zeta^2}, \\ \zeta' &= \frac{\zeta}{(\nu z - \lambda)(\nu_0 z_0 - \lambda_0) + \nu\nu_0\zeta^2} \end{aligned}\right.$$

et les formules inverses sont :

$$\left\{\begin{aligned} z &= \frac{(\lambda z' + \mu)(\nu_0 z'_0 - \lambda'_0) + \lambda\nu_0\zeta'^2}{(\nu z' - \lambda')(\nu_0 z'_0 - \lambda'_0) + \nu\nu_0\zeta'^2}, \\ \zeta &= \frac{\zeta'}{(\nu z' - \lambda')(\nu_0 z'_0 - \lambda'_0) + \nu\nu_0\zeta'^2}. \end{aligned}\right.$$

Il en résulte lorsque le point (z, ζ) est sur la surface de la sphère $(\lambda\nu)$, c'est-à-dire que

$$(\nu z - \lambda)(\nu_0 z_0 - \lambda_0) + \nu\nu_0\zeta^2 = 1,$$

le point transformé $(z'\zeta')$ est sur la sphère $(\lambda'\nu)$ et l'on a les formules de transformation simplifiées

$$\left\{\begin{aligned} \nu z' - \lambda' + \nu_0 z_0 - \lambda_0 &= 0, \\ \zeta &= \zeta'. \end{aligned}\right.$$

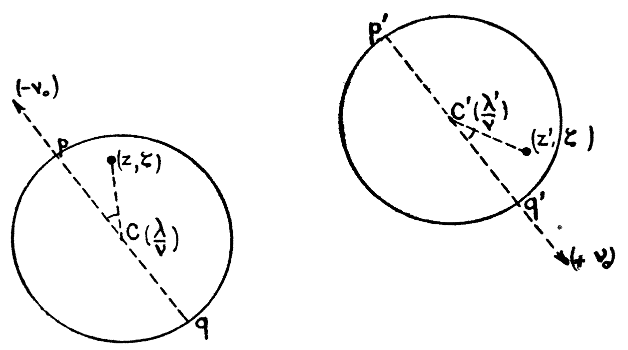


FIG 5.

L'interprétation géométrique de ces formules est bien simple (*fig* 5) les points homologues (z, ζ) et (z', ζ') ont même cote, et les projections horizontales des rayons qui passent par ces points font, la demi-droite Cz avec la direction $(-\nu_0)$, la demi-droite $C'z'$ avec la direction (ν_0), des angles égaux et de signes contraires.

Dans le cas d'une substitution parabolique, la substitution S peut s'écrire

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & -\dfrac{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 + 1) + 1}{\nu} \\ \nu & -\lambda_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & -\dfrac{\lambda_1^2}{\nu} \\ \nu & -\lambda_1 - 1 \end{pmatrix},$$

les deux faces correspondantes étant $(\lambda_1 - 1, \nu)$ et $(\lambda_1 + 1, \nu)$.

Les deux demi-sphères sont alors tangentes extérieurement ; et la ligne des centres est parallèle aux directions $(\pm \nu_0)$ (*fig.* 6).

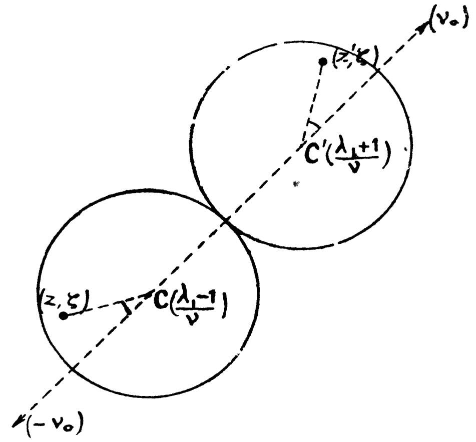


FIG. 6.

Revenant donc au problème que nous nous posions tout à l'heure de distinguer entre les différentes faces $(\lambda'\nu)$ qui paraissent pouvoir correspondre à une face donnée $(\lambda\nu)$, il suffit d'examiner, d'après les règles ci-dessus, quel est l'effet géométrique de chaque transformation $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & -\lambda' \end{pmatrix}$ à essayer. On trouvera nécessairement qu'il n'y en a qu'une qui sur les deux sphères en question fasse correspondre les deux polygones sphériques qui sont faces du domaine fondamental. Les autres feront correspondre à la face $(\lambda\nu)$ la symétrique de la face $(\lambda'\nu)$ par rapport à un certain plan ou à un certain axe. Cette discrimination se fait très rapidement dans la pratique.

88. Lorsqu'on a déterminé la correspondance, deux à deux, des faces du domaine fondamental (et que l'on a trouvé par là même l'expression des substitutions génératrices du groupe Γ) on en déduit très aisément les *cycles d'arêtes* par la méthode donnée par Poincaré (*Œuvres*, t. II, p. 274). Les cycles d'arêtes étant déterminés, il est facile d'en déduire quelles sont les *arêtes elliptiques*. En effet, la somme des dièdres relatifs aux différentes arêtes d'un même cycle est une partie aliquote de 2π (Poincaré, p. 275), elle est en général égale à 2π; elle est égale à π si le cycle est formé d'arêtes elliptiques d'ordre deux, et à $\frac{2\pi}{3}$ s'il est formé d'arêtes d'ordre trois On calculera donc le cosinus de l'angle extérieur θ de deux faces qui se coupent, et l'on verra si la somme de ces angles est 2π, π ou $\frac{2\pi}{3}$ pour les arêtes d'un même cycle

Le $\cos\theta$ cherché s'obtient comme il suit partant des deux formes d'Hermite f et f', qui correspondent aux faces $(\lambda\nu)$ et $(\lambda'\nu)$ définies par la relation (81)

$$f = \nu\nu_0 xx_0 - \nu_0\lambda x_0 y - \nu\lambda_0 xy_0 + (\lambda\lambda_0 - 1)yy_0$$

on a

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{I}^2}{4\Delta\Delta'}. \tag{41}$$

Posant pour simplifier l'écriture

$$\nu\nu_0 = n, \quad \nu'\nu'_0 = n', \quad \sigma = \lambda'\nu + \lambda\nu', \quad \tau = \lambda'\nu - \lambda\nu', \quad \tau\tau_0 = t,$$

il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \nu\nu_0(\lambda'\lambda'_0 - 1) + \nu'\nu'_0(\lambda\lambda_0 - 1) - \nu_0\lambda\nu'\lambda'_0 - \nu\lambda_0\nu'_0\lambda' \\ &= t - n - n'\end{aligned}$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{t-n-n'}{2\sqrt{nn'}}.$$

90 Les arêtes elliptiques étant ainsi déterminées, il s'agit de former les *substitutions elliptiques* qui leur correspondent.

A cet effet, nous calculerons la forme de Dirichlet que représente l'arête, intersection de deux faces $(\lambda\nu)$, $(\lambda'\nu')$

D'après la formule (36) cette forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ s'écrit

$$\begin{vmatrix} \nu\nu_0 x - \nu_0\lambda y & -\nu_0\lambda x + (\lambda\lambda_0 - 1)y \\ \nu'\nu'_0 x - \nu'_0\lambda' y & -\nu'_0\lambda' x + (\lambda'\lambda'_0 - 1)y \end{vmatrix}$$

ou bien

$$[2\nu\nu'\tau_0 x - (\sigma\tau_0 + n' - n)y]^2 + [4nn' - (t-n-n')^2]y^2 \tag{132}$$

et on observera que son déterminant étant toujours un nombre réel cette forme est toujours de première espèce (par. 53).

$\mathfrak{D}$ est négatif si les deux sphères $(\lambda\nu)$, $(\lambda'\nu')$ se coupent, ce qui est le cas qui nous intéresse en ce moment, il est positif dans le cas contraire (¹).

Or, soit $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}$ une substitution elliptique d'ordre deux (par. 69), elle conserve la forme de Dirichlet

$$\gamma x^2 - 2\alpha xy - \beta y^2 \tag{115}$$

ou

$$(\gamma x - \alpha y)^2 + y^2; \tag{133}$$

de même la substitution elliptique d'ordre trois $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & 1-\alpha\end{pmatrix}$ conserve la forme de Dirichlet

$$2\gamma x^2 - 2(2\alpha - 1)xy - 2\beta y^2 \tag{121}$$

ou

$$[2\gamma x - (2\alpha - 1)y]^2 + 3y^2. \tag{134}$$

On construira donc la forme (132) à partir des deux sphères $(\lambda\nu)$, $(\lambda'\nu')$ dont l'intersection est l'arête elliptique considérée et on l'identifiera avec l'une des deux formes (133) ou (134) suivant le cas.

On trouvera au Chapitre x l'indication des substitutions elliptiques de chacun des groupes étudiés.

(¹) On a souvent besoin de connaître la forme correspondant à l'intersection d'une sphère (λ, ν) avec son plan diamétral, parallèle soit à $o\xi\zeta$ soit à $o\eta\zeta$, ces formes sont respectivement

$$(\nu\nu_0 x - \lambda\nu_0 y)^2 - \nu\nu_0 y^2$$

et

$$(\nu\nu_0 x - \lambda\nu_0 y)^2 + \nu\nu_0 y^2.$$

CHAPITRE IX

NOMBRE DE CLASSES DE FORMES D'HERMITE POSITIVES DE DISCRIMINANT Δ DONNÉ

91. Nous avons indiqué au Chapitre v comment, connaissant les expressions de la mesure $\mathcal{M}(\Delta)$ des formes propres de discriminant Δ, et de la mesure $\mathcal{M}'(\Delta)$ des formes impropres, données par M. Humbert, on pouvait en déduire le nombre $\mathcal{H}(\Delta)$ de classes de formes propres, et le nombre $\mathcal{H}'(\Delta)$ de classes de formes impropres, de discriminant Δ. On a en effet les deux formules

$$\mathcal{H}(\Delta) = 2\mathcal{M}(\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{N}_4(\Delta), \tag{85}$$

$$\mathcal{H}'(\Delta) = 2\mathcal{M}'(\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{N}'_4(\Delta) + \frac{2}{3}\mathcal{N}'_6(\Delta). \tag{86}$$

Revenons un instant sur ces formules pour préciser les hypothèses faites.

Il convient de définir dans tous les cas ce que nous appelons une forme *réduite*. Soit f son point représentatif, la forme f sera réduite dans les cas suivants : 1° Si le point f est intérieur au polyèdre fondamental, $\mathcal{L}_0$; la forme f admet alors deux automorphies, 1 et I, et on a $K = 2$; 2° si le point f est situé sur certaines faces de $\mathcal{L}_0$, choisies en principe arbitrairement, à raison d'une face par couple de faces correspondantes ; on a encore $K = 2$; 3° si le point f est situé sur certaines arêtes de $\mathcal{L}_0$, choisies arbitrairement à raison d'une arête par cycle d'arêtes. On a alors $K = 2$, s'il s'agit d'une arête ordinaire, $K = 4$ ou $K = 6$ s'il s'agit d'une arête elliptique d'ordre deux ou trois, 4° si le point f est situé en certains sommets de $\mathcal{L}_0$, choisis arbitrairement à raison de un par groupe de sommets homologues.

Nous appellerons ces faces, ces arêtes et ces sommets faces *réduites*, arêtes *réduites* et sommets *réduits*.

Nous avons supposé pour arriver aux formules (85) et (86) que Δ ne prenait aucune des valeurs correspondant aux formes situées en un sommet polyédrique. Nous examinerons plus loin (par. 94) la portée de cette restriction.

Cela posé, on voit ce qu'il y a à faire pour connaître $\mathcal{H}(\Delta)$ et $\mathcal{H}'(\Delta)$: chercher, sur les arêtes elliptiques réduites, combien il existe de formes de discriminant donné Δ, soit de l'ordre propre, $\mathcal{N}_4$, soit de l'ordre impropre, $\mathcal{N}'_4$ et $\mathcal{N}'_6$.

92. *Nombre de formes situées sur une arête déterminée.* — Soit $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ la forme de Dirichlet correspondant à une arête déterminée du polyèdre fondamental. Nous connaissons l'expression générale — formules (90), par. 54 — des formes d'Hermite f ou (abc) situées sur cette arête; dans ces formules q et r représentent, avons-nous dit, des fractions ordinaires de dénominateurs k et k' respectivement. Soit h le plus petit commun multiple de k et k'; nous pouvons considérer q et r comme des entiers ordinaires, sauf à multiplier f par l'entier ordinaire h. Exprimons alors que le discriminant de la forme $\frac{f}{h}$ est Δ, c'est-à-dire que celui de f est Δh^2, nous aurons

$$\Delta = \frac{\mathcal{A}\mathcal{A}_0}{h^2}(\mathrm{D}q^2 - \mathrm{P}r^2).$$

Pour savoir combien il y a de formes, tant propres qu'impropres, de Δ donné, sur un arc quelconque $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ de la demi-circonférence $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$, il faudra calculer les paramètres $\frac{q_1}{r_1}$, $\frac{q_2}{r_2}$, de ses extrémités; puis chercher combien il y a de représentations du nombre $\frac{\Delta h^2}{\mathcal{A}\mathcal{A}_0}$ par la forme $\mathrm{D}q^2 - \mathrm{P}r^2$, satisfaisant à la condition que $\frac{q}{r}$ soit compris entre les deux limites $\frac{q_1}{r_1}$ et $\frac{q_2}{r_2}$.

Les limites $\frac{q_1}{r_1}$ et $\frac{q_2}{r_2}$ entre lesquelles doit être compris $\frac{q}{r}$ se déterminent facilement. En effet, nous connaissons pour chaque valeur de P les équations des sphères $(\lambda\nu)$ qui limitent le domaine fondamental. L'arête particulière sur laquelle nous cherchons à énumérer les formes de discriminant Δ a ses extrémités sur deux de ces faces, $(\lambda\nu)$, $(\lambda'\nu')$. Écrivons donc que le point $\frac{q}{r}$, ou (abc), se trouve sur la sphère $(\lambda\nu)$, dont l'équation est

$$a\lambda\lambda_0 + b\lambda_0\nu + b_0\lambda\nu_0 + c\nu\nu_0 = a; \tag{81}$$

utilisant la condition (par. 13)

$$\mathrm{I} = ac' + ca' - b_0 b' - bb'_0 = 0$$

et posant

$$\varpi = \lambda\mathcal{A} + \nu\mathcal{B},$$

il vient

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{(\varpi_0\nu - \varpi\nu_0)\sqrt{-\mathrm{P}}}{\varpi\varpi_0 + \mathrm{D}\nu\nu_0 - \mathcal{A}\mathcal{A}_0} \tag{137}$$

et une formule analogue pour $\frac{q_2}{r_2}$.

Le problème est donc de trouver le nombre de représentations d'un entier n par la forme quadratique réelle $Dq^2 + Pr^2$, lorsque $\frac{q}{r}$ est compris entre deux limites données. Or, ce nombre n'est pas connu en général. Dirichlet a seulement résolu le problème de la représentation d'un nombre par le *système de formes* S dont fait partie la forme proposée, dans le cas particulier où ces limites sont $\frac{T}{U}$ et ∞, T et U étant les plus petites solutions de l'équation de Pell $t^2 - DPu^2 = 1$; ou en d'autres termes, lorsque $\frac{q}{r}$ fait partie, sur l'axe réel, d'un domaine de la *substitution fondamentale*

$$G = \begin{pmatrix} T & PU \\ DU & T \end{pmatrix} \tag{138}$$

attachée à la forme $Dq^2 - Pr^2$. Ce nombre est (*Zahlentheorie, 5ter Abschnitt*)

$$N = \Sigma\left(\frac{DP}{d}\right); \tag{139}$$

$\left(\frac{DP}{d}\right)$ désignant un symbole de Legendre et d parcourant tous les diviseurs de n supposé premier à $2DP$.

M. Humbert a cherché le nombre de classes de formes propres de discriminant Δ dans les cas les plus simples, $P = 1$ et 2 (*C. R.*, 23 juin 1919), $P = 3$ (*C. R.*, 1er mars 1920), en évaluant le nombre de formes situées sur les diverses arêtes elliptiques du polyèdre fondamental ; et il a trouvé que les $\frac{q}{r}$ correspondant aux extrémités de ces arêtes étaient dans chaque cas particulier le $\frac{T}{U}$ de Dirichlet, de sorte que la formule précédente pouvait être appliquée. Mais cette coïncidence cesse d'avoir lieu pour des valeurs plus élevées de P, de sorte que cette méthode directe échouerait, si l'on ne disposait pas de la notion de *famille de cycles* que nous allons introduire.

93. Considérons une arête AB du polyèdre fondamental $\mathfrak{L}_0$, et supposons d'abord que cette arête ne soit pas elliptique. Il y a, remplissant l'espace autour de cette arête, p polyèdres égaux non-euclidiennement au polyèdre $\mathfrak{L}_0$, si cette arête appartient sur $\mathfrak{L}_0$ à un cycle d'ordre p.

Prolongeons par la pensée cette arête de part et d'autre de AB ; nous rencontrerons une suite de segments, en général infinie (¹), qui seront tous arêtes de polyèdres

---

(¹) Infinie si le déterminant $\mathfrak{D}$ de la forme correspondante $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ n'est pas carré parfait (par. 75) ; ce qui est le cas pour les arêtes elliptiques ($\mathfrak{D} = -1$ et -3) qui seules nous intéressent pour l'énumération des classes de formes d'Hermite.

de la division du demi-espace[1]. Soit H la substitution hyperbolique attachée à l'arête AB, c'est-à-dire (par. 68) faisant glisser cette droite (non-euclidienne) sur elle-même de la moindre longueur possible; soit A′ le point de l'arête transformé de A par H. Il est clair que A′ devra être extrémité de segments, et que la suite de segments AB, BC.... LA′ se reproduit indéfiniment sur l'arête AB dans les deux sens, par l'effet de la substitution H et de ses puissances positives et négatives.

Parmi les segments AB, BC.. LA′, il peut y en avoir qui soient homologues à AB dans le groupe Γ, et cela dans les deux cas suivants : 1° il se peut (par. 63) qu'il existe une substitution loxodromique (L) conservant l'arête AB, et dont une certaine puissance s ($s = 2, 3, 4$ ou 6) reproduise H : $L^s = H$. Alors le segment AB se trouvera reproduit s fois, avec son sens, dans l'intervalle AA′. S'il n'existe pas de pareilles substitutions loxodromiques, nous poserons $s = 1$. 2° Il se peut (par. 67) qu'il existe une substitution elliptique d'ordre deux dont l'axe rencontre perpendiculairement l'arête AB. Il y en aura alors une seconde dans l'intervalle AA′, car il existe en ce cas une infinité d'arêtes elliptiques perpendiculaires à AB, dont l'intervalle constant est $\frac{AA'}{2}$ (par. 80). Le segment AB sera alors reproduit alternativement avec le sens $\overline{AB}$ et le sens $\overline{BA}$, dans chacun des intervalles de longueur $\frac{AA'}{2}$. Soit t un coefficient égal à 2 si cette circonstance se présente, à 1 dans le cas contraire. Il y aura en définitive parmi la suite AB, BC, ... LA′, $k = st$ segments homologues à AB dans le groupe Γ.

Il se peut que ces segments épuisent la suite AB, BC.... LA′. S'il n'en est pas ainsi, soit BC un segment non homologue à AB; le même raisonnement s'applique au segment BC, qui sera reproduit k fois dans l'intervalle AA′.

Par suite nous voyons que la chaîne de segments AB, BC, ... LA′ se compose d'un certain nombre m de segments AB, BC.... non homologues dans le groupe Γ, et dont chacun est répété le même nombre k de fois.

Considérons les demi-circonférences, supportant celles des arêtes du polygone fondamental A_1B_1, A_2B_2, ... qui avec AB constituent un cycle. Sur chacune de ces demi-circonférences, la période ($A_1A'_1$, ou $A_2A'_2$, ...) est composée des mêmes segments dans le même ordre que sur la demi-circonférence supportant AB. Cela résulte de ce qu'il y a une substitution de Γ qui transporte AB sur A_1B_1, une autre qui transporte AB sur A_2B_2, . etc.

Le segment BC, situé quelque part dans le prolongement de AB, et non homologue à AB, ne fait pas partie du polyèdre fondamental, mais puisque tous les polyèdres de la division du demi-espace sont égaux non-euclidiennement, il y a une

---

[1] Cette propriété, essentielle par le raisonnement qui suit, provient de ce que les groupes Γ et Γ′ sont susceptibles d'amplification par symétrie (*erweiterungsfähig*) de sorte qu'ils donnent lieu à une division régulière de l'espace (*reguläre Einteilung des Raumes*) (Fricke).

certaine arête du polyèdre fondamental, soit B_1C_1, qui est égale à BC. Il y en a même p, si p est l'ordre du cycle d'arêtes contenant B_1C_1. Je dis que cet ordre est nécessairement le même que celui du cycle contenant AB. En effet, il est égal au nombre de polyèdres qui remplissent l'espace au voisinage de BC ; et ce nombre est le même que pour AB, puisque toute sphère qui contient une face du polyèdre fondamental aboutissant à AB est encore limite de polyèdres tout le long de l'arc AB prolongé, et par conséquent suivant BC.

Sur toutes les demi-circonférences, supportant les arêtes du cycle B_1C_1, la période $B_1B'_1$ est composée des mêmes segments dans le même ordre, et ce sont les mêmes segments, dans le même ordre, que sur la demi-circonférence supportant AB, puisqu'on peut amener celle-ci sur l'une des autres par la substitution de Γ qui amène BC sur B_1C_1 ou sur B_2C_2, ... etc.

Nous voyons donc que si la période AA', sur une demi-circonférence supportant une arête quelconque du polyèdre fondamental, comprend m segments AB, BC.... non homologues entre eux dans le groupe Γ, on pourra grouper mp arêtes du polyèdre fondamental en m cycles d'arêtes, tous du même ordre p. Autour de chacune des mp demi-circonférences supportant ces mp arêtes, les angles dièdres formés par les faces de polyèdres qui y aboutissent seront les mêmes dans le même ordre, et la période des segments appartenant aux divers polyèdres sera composée des mêmes segments dans le même ordre. Nous dirons que ces m cycles constituent une *famille de cycles*.

Nous avons supposé dans ce qui précède que les arêtes en question n'étaient pas elliptiques. Le raisonnement est cependant général. Si l'arête AB est elliptique d'ordre deux, il faut seulement substituer à l'espace environnant cette arête l'espace compris dans un dièdre d'ouverture π ; c'est le nombre de polyèdres compris dans ce dièdre qui est l'ordre p du cycle dont fait partie AB. De même si AB est elliptique d'ordre trois, il faut considérer un dièdre d'ouverture $\frac{2\pi}{3}$. Dans le cas d'une arête elliptique, il résulte du tableau du paragraphe 76 que s ne peut être égal qu'à 1 ou 2.

94. Revenons maintenant à la recherche du nombre des formes de discriminant Δ, situées sur les arêtes elliptiques réduites. Soit AB une telle arête. Nous ne devons énumérer que les formes situées sur AB et non celles situées sur les arêtes du même cycle A_1B_1, A_2B_2, ... etc. Nous avons à ajouter à ces formes celles qui sont situées sur l'arête B_1C_1 réduite, mais non celles situées sur les autres arêtes du cycle dont fait partie B_1C_1. Et ainsi de suite.

Je dis qu'aux formes propres de discriminant Δ situées sur l'arête B_1C_1 je puis substituer celles situées sur le segment homologue BC, segment qui fait partie de la demi-circonférence contenant AB, et non situé par conséquent dans le domaine -

fondamental. En effet, il y a une substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ du groupe Γ qui transporte B_1C_1 sur BC, et cette substitution étant modulaire ne change pas le discriminant Δ des formes d'Hermite auxquelles on l'applique. Elle ne change pas non plus l'*ordre* de la forme, c'est-à-dire qu'une forme propre est transformée en une forme propre, une forme impropre en une forme impropre. En effet, on a les formules de transformation (note du par. 29)

$$\begin{cases} a' = \delta\delta_0 a - \delta_0\gamma b - \delta\gamma_0 b_0 + \gamma\gamma_0 c, \\ c' = \beta\beta_0 a - \beta_0\alpha b - \beta\alpha_0 b_0 + \alpha\alpha_0 c; \end{cases}$$

si donc a et c sont pairs à la fois il en est de même de a' et c', et la réciproque est vraie en considérant les formules de la transformation inverse, qui est aussi une substitution de Γ.

Donc pour avoir le nombre de formes propres de discriminant Δ, situées sur les arêtes réduites d'une même famille de cycles, il suffit d'avoir celui des formes propres situées sur les segments AB, BC... non homologues de la période AA′ caractéristique de la famille, et de même pour les formes impropres. Or, d'après ce que nous avons vu, les formes situées sur le segment tout entier AA′ sont les formes précédentes propres et impropres reproduites k fois. Nous aurons donc, pour chaque famille de cycles d'arêtes, à déterminer le nombre $k = st$, puis à chercher combien il y a de formes, tant propres qu'impropres, de discriminant Δ, contenues dans une période AA′.

Considérons dans ce but la substitution hyperbolique H attachée à la demi-circonférence $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ et qui amène A en A′. Elle effectue sur les points de l'arête définis par le paramètre $\frac{q}{r}$ une substitution homographique réelle, que j'appellerai H_a, et qui conserve la forme $Dq^2 - Pr^2$ (1). J'appelle G la substitution fonda-

---

(1) Prenons pour substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ la substitution

$$\begin{pmatrix} t - \mathcal{B}u & -\mathcal{C}u \\ \mathcal{A}u & t + \mathcal{B}u \end{pmatrix}$$

non nécessairement hyperbolique ; remplaçons, dans les formules de la note du paragraphe 29, (abc) par leurs valeurs (90) (par. 54) en fonction de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, q, r)$, et de même pour $(a'b'c')$. Nous obtenons les équations explicites de la substitution réelle H_a effectuée sur le point (q, r) de la première droite $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$:

$$\begin{cases} q' = (tt_0 + Duu_0)\,q + P\dfrac{ut_0 - u_0 t}{\sqrt{-P}}\,r, \\ r' = D\dfrac{ut_0 - u_0 t}{\sqrt{-P}}\,q + (tt_0 + Duu_0)\,r. \end{cases}$$

mentale conservant la forme $Dq^2 - Pr^2$,

$$G = \begin{pmatrix} T & PU \\ DU & T \end{pmatrix};$$

T et U étant les plus petites solutions de l'équation de Pell

$$t^2 - DPu^2 = 1. \tag{140}$$

Les substitutions réelles H_a et G ayant les mêmes points doubles, ne diffèrent que par leurs multiplicateurs. Nous verrons dans un instant qu'il y a une relation simple entre ces deux substitutions : on a, soit

$$H_a = G^2,$$

soit

$$(H_a)^3 = G^2.$$

Nous désignerons par u la puissance à laquelle il faut élever H_a pour reproduire G ; ainsi $u = 1$ ou 3. On sait, d'après Dirichlet, trouver le nombre N de représentations de $n = \frac{\Delta h}{\mathcal{A}\mathcal{A}_0}$ par $Dq^2 - Pr^2$ et par les formes de la famille S, pour un domaine de G (formule 139) ; le nombre de représentations dans un domaine de H_a, sera $\frac{2N}{u}$; et le nombre de représentations dans un intervalle correspondant à la famille de cycles sera k fois moindre, soit $\frac{2N}{stu}$. Ainsi nous sommes certains que *la formule de Dirichlet, inapplicable en général pour déterminer le nombre des formes situées sur une arête, sera toujours applicable lorsque nous l'étendrons à une famille de cycles d'arêtes.*

95. A titre d'exemple de famille de cycles considérons dans l'anneau $\mathcal{A}(\sqrt{-7})$ (V. Chap. X) les arêtes $\beta\beta_1$, βa, $\beta_1 a_1$, constituant chacune un cycle. Nous avons à énumérer les représentations de Δ par la forme $q^2 - 7r^2$ dans les intervalles

$$\infty \ldots \frac{14}{5} \quad \text{correspondant à l'arc } o\beta \text{ (moitié de } \beta\beta_1\text{)},$$

$$\infty \ldots \frac{7}{2} \qquad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \beta a.$$

D'après la note du paragraphe précédent, à un déplacement cayleyen conservant une droite $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ correspond une homographie du type $(q' = aq + Pbr,\ r' = Dbq + ar)$, conservant la forme $Dq^2 - Pr^2$. En d'autres termes, la métrique de l'espace cayleyen sur une droite $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ dont les points sont définis par le paramètre $\frac{q}{r}$ a pour absolu les deux points $\pm\sqrt{\frac{P}{D}}$

Pour mettre bout à bout, par un déplacement cayleyen, les deux segments $\left(\infty \ldots \frac{14}{5}\right)$, $\left(\infty \ldots \frac{7}{2}\right)$, l'absolu étant constitué par les deux points $\pm\sqrt{7}$, nous emploierons donc la substitution $\begin{pmatrix} 14 & 35 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$, qui conserve l'absolu et amène le point ∞ en $\frac{14}{5}$ Le point $\frac{7}{2}$ tombe alors en $\frac{8}{3}$ Le segment $\left(\infty \ldots \frac{8}{3}\right)$ est précisément un domaine $\left(\infty \ldots \frac{T}{U}\right)$ de Dirichlet. Les trois arêtes (ou cycles) $\beta\beta_1$, βa, $\beta_1 a_1$, couvrent ainsi deux domaines de Dirichlet et constituent une famille de cycles. Nous devions bien trouver ici deux domaines, car $s = t = u = 1$, $\frac{2}{stu} = 2$.

96. Nous venons de dire qu'il existait une *relation entre les deux substitutions* H_a *et* G, opérant sur (q, r).

Considérons d'abord le cas des arêtes elliptiques d'ordre deux. D'après le paragraphe 69, la substitution hyperbolique H attachée à l'arête est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{T' - \mathcal{B}U'\sqrt{-P}}{2} & \dfrac{-\mathcal{C}U'\sqrt{-P}}{2} \\ \dfrac{\mathcal{A}U'\sqrt{-P}}{2} & \dfrac{T' + \mathcal{B}'U'\sqrt{-P}}{2} \end{pmatrix} \tag{141}$$

où (T', U') sont les plus petits entiers réels impairs satisfaisant à

$$t'^2 - Pu'^2 = 4; \tag{117}$$

ou bien, — soit que l'équation (117) n'ait que des solutions paires, soit que les solutions impaires ne conduisent pas à une substitution (141) à coefficients entiers et par suite doivent être laissées de côté, — la substitution H est

$$\begin{pmatrix} T - \mathcal{B}U & -\mathcal{C}U \\ \mathcal{A}U & T + \mathcal{B}U \end{pmatrix}; \tag{110}$$

T, U étant les plus petits entiers réels satisfaisant à

$$t^2 - Pu^2 = 1. \tag{118}$$

Le multiplicateur $\mathcal{M}(H)$ de la substitution (141) est donné (par. 33) par

$$\mathcal{M} + \frac{1}{\mathcal{M}} = (\alpha + \delta)^2 - 2 = T'^2 - 2$$

d'où

$$\mathcal{M}(H) = \left(\frac{T' + U'\sqrt{P}}{2}\right)^2, \qquad \frac{1}{\mathcal{M}(H)} = \left(\frac{T' - U'\sqrt{P}}{2}\right)^2.$$

Cette substitution, envisagée comme une transformation de l'espace cayleyen complet, conserve une première droite (Δ) qui supporte l'arête elliptique considérée, et sa conjuguée (D) ; et nous avons vu (par. 30) qu'elle opère sur les points de (Δ) une homographie H_a dont le multiplicateur est le carré de celui de H :

$$\mathcal{M}(H_a) = [\mathcal{M}(H)]^2$$

par suite,

$$\mathcal{M}(H_a) = \left(\frac{T' + U'\sqrt{P}}{2}\right)^4.$$

De même le multiplicateur de la substitution (110) est

$$\mathcal{M}(H) = (T + U\sqrt{P})^2$$

et celui de l'homographie H_a correspondante

$$\mathcal{M}(H_a) = (T + U\sqrt{P})^4.$$

Quant à la substitution fondamentale G conservant la forme $q^2 - Pr^2$, c'est

$$G = \begin{pmatrix} T & PU \\ U & T \end{pmatrix},$$

(T, U) étant toujours la plus petite solution de (118), et son multiplicateur est

$$\mathcal{M}(G) = (T + U\sqrt{P})^2.$$

Les relations annoncées en découlent. En effet, dans le cas où la substitution H est la substitution (110), on a

$$\mathcal{M}(H_a) = [\mathcal{M}(G)]^2$$

ou

$$H_a = G^2.$$

Dans le cas où la substitution H est la substitution (141), on remarquera que la solution de rang n de (117) est donnée par

$$\frac{t_n + u_n\sqrt{P}}{2} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{P}}{2}\right)^n$$

et que les solutions de (118) sont $\left(\frac{t'_n}{2}, \frac{u'_n}{2}\right)$, pour toutes les valeurs de n telles que (t'_n, u'_n) soient pairs. Or $(T'\ U')$ étant impairs et $P \equiv 1 \pmod{4}$, $(t'_2\ u'_2)$ sont impairs et $(t'_3\ u'_3)$ pairs. Les plus petites solutions de (117) et (118) sont donc liées par

$$T + U\sqrt{P} = \frac{t'_3 + u'_3\sqrt{P}}{2} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{P}}{2}\right)^3$$

d'où en élevant à la puissance quatrième

$$(T + U\sqrt{P})^4 = \left(\frac{T' + U'\sqrt{P}}{2}\right)^{12}$$

ou bien

$$[\mathcal{M}(G)]^2 = [\mathcal{M}(H_a)]^3$$

d'où finalement

$$G^2 = H_a^3.$$

Les relations annoncées sont donc démontrées en ce qui concerne les arêtes d'ordre deux (1).

---

(1) A titre d'exemple considérons dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-5})$ l'arête αs (v. Chap. x). Il lui correspond la forme $2x^2 - 2\sqrt{\ }\,xy - 2y^2$, conservée par la substitution elliptique d'ordre deux $\begin{pmatrix}\sqrt{\ } & 2\\ 2 & -\sqrt{\ }\end{pmatrix}$. Les formules (90) donnent, après division par $h = 2$,

$$a = 2q, \quad b = -\sqrt{\ }(q + r), \quad c = 3q + 5r, \quad \Delta = q^2 - 5r^2,$$

et nous avons à énumérer les représentations de Δ par la forme $q^2 - 5r^2$ dans l'intervalle $(\infty \ldots\ldots 5)$. La substitution $\begin{pmatrix}5 & 5\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ répétée deux fois amène le segment cayleyen $(\infty \ldots 5)$ en $(5 \ldots\ldots 3)$, puis en $\left(3 \ \ \frac{5}{2}\right)$, et le segment $\left(\infty \ldots \frac{5}{2}\right)$ est la moitié du domaine $\left(\infty \ . \ \frac{9}{4}\right)$ de Dirichlet. La famille de cycles, qui comprend l'arête αs et sa symétrique, correspond donc à un tiers de domaine de Dirichlet. Ceci est bien d'accord avec le fait que l'équation $t^2 - 5u^2 = 4$ admet des solutions impaires, auxquelles correspondent des substitutions du groupe Γ, ainsi, à la plus petite solution $T = 6$, $U = 1$ correspond la substitution hyperbolique attachée à l'arête $\left(\frac{-1}{\sqrt{\ }} \ \ \frac{\sqrt{\ }}{4}\right)$. On a donc $u = 3$, et comme d'autre part $s = 1$, $t = 2$, la famille de cycles doit bien couvrir $\frac{2}{stu} = \frac{1}{3}$ de domaine de Dirichlet.

97. Pour les arêtes d'ordre trois, nous avons vu (par. 70) que lorsque P n'est pas multiple de 3, la substitution hyperbolique attachée dépend de la plus petite solution de l'équation

$$t''^2 - 3Pu''^2 = 4. \tag{123}$$

La substitution H_α correspondante conserve la forme $3q^2 - Pr^2$, et la substitution fondamentale conservant cette forme est

$$G = \begin{pmatrix} T & PU \\ 3U & T \end{pmatrix};$$

(T, U) étant la plus petite solution de l'équation

$$t^2 - 3Pu^2 = 1. \tag{142}$$

On peut refaire exactement sur les solutions des équations (123) et (142) le raisonnement que nous venons de faire à propos des équations (117) et (118), et on arrivera aux mêmes conclusions $H_\alpha = G^2$ ou $H_\alpha^3 = G^2$.

Lorsque P est multiple de 3, il y a un plus grand nombre de cas possibles et d'autres relations entre H_α et G pourraient se présenter Mais nous laisserons les arêtes d'ordre trois de côté lorsque $P = 3P'$ pour la raison suivante :

Afin de pouvoir appliquer les résultats de Dirichlet, nous ne cherchons à énumérer que les formes de discriminant Δ premier à 2P. Or, lorsque $P = 3P'$, du moins jusqu'à $P = 21$ ($P = 6, 15, 21$), les discriminants des formes situées sur les arêtes d'ordre trois sont toujours multiples de 3, donc non premiers à 2P. Et il y a lieu de penser que cette circonstance se présente en général pour P multiple de 3.

98. Il reste encore deux recherches à faire pour obtenir enfin les nombres n_4, n'_4, n'_6, que nous cherchons.

La formule de Dirichlet (139) dont nous nous sommes servi donne le nombre de représentations d'un nombre n, ici $\frac{\Delta h^2}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_0}$, à l'intérieur d'un certain domaine par les formes d'un *système de formes* S Or, nous avons besoin du nombre de représentations du nombre n par une seule forme, la forme $Dq^2 - Pr^2$ (où $D = 1$ ou 3 suivant que l'arête considérée est elliptique d'ordre deux ou trois) Ce nombre de représentations sera $N = \Sigma\left(\frac{DP}{d}\right)$ (formule 139) dans le cas seulement où les formes indéfinies de déterminant $+$ PD ne forment qu'une seule classe. S'il y a plusieurs classes de formes de déterminant $+$ PD, on doit prendre un représentant de chacune d'elles (pas nécessairement une forme réduite) pour constituer un système S au sens de Dirichlet. Les formes de ce système peuvent se grouper en un certain nombre de *genres;* les formes d'un même genre pouvant représenter les mêmes nombres, à l'exclusion des formes des autres genres. Ces nombres se distinguent les uns des autres par leurs *caractères*, qui sont un certain nombre de symboles de Legendre, pour la formation desquels on ne dispose pas d'une règle générale, mais qui se trouvent, pour les valeurs du déterminant inférieures à 100, dans les tables de Cayley (*Journal de Crelle*, t. LX). Montrons sur un exemple comment l'on devra procéder pour obtenir le nombre de représentations de n par la forme $Dq^2 - Pr^2$ seule. Prenons le cas de la forme $q^2 - 15r^2$ qui fait partie d'un système S comportant quatre formes, toutes de genres différents (Tableau X). Ces genres se distinguent au moyen de deux caractères, $\alpha = \left(\frac{n}{3}\right)$ et $\beta = \left(\frac{n}{5}\right)$, pouvant prendre chacun les deux valeurs $+1$ et -1. La forme $q^2 - 15r^2$ ayant pour caractères $\alpha = +1$ et $\beta = +1$, le nombre de représentations d'un nombre par la seule forme $q^2 - 15r^2$, et non plus par le système S, sera

$$\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{4}\Sigma\left(\frac{15}{d}\right).$$

En effet, si le nombre n dont on veut les représentations est tel que, pour ce nombre, $\left(\frac{n}{3}\right) = \alpha = +1$ et $\left(\frac{n}{5}\right) = \beta = +1$, il sera représenté par la forme $q^2 - 15r^2$ et par aucune des trois autres; le nombre de représentations cherché sera donc $\Sigma\left(\frac{15}{d}\right)$. Dans les trois autres cas, il ne pourra pas être représenté par cette forme, et le nombre de représentations cherché sera zéro. La formule ci-dessus couvre donc bien les quatre cas possibles.

On voit qu'il y a lieu d'affecter la somme $\Sigma\left(\frac{P}{d}\right)$ relative aux arêtes d'ordre deux d'un coefficient ρ, fonction de P et de $\Delta\left(\rho = \frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{2}\right.$ dans l'exemple ci-dessus$\left.\right)$ et qui prendra les valeurs 1 ou 0 suivant que n sera ou non représentable par la forme $q^2 - Pr^2$. La formation de ce coefficient pour les différentes valeurs de P est immédiate à partir des tables de Cayley; on trouvera au Chapitre X un extrait de ces tables, avec l'indication du coefficient ρ, pour les valeurs de $P \leqslant 21$ (Table V). De même on devra affecter la somme $\Sigma\left(\frac{3P}{d}\right)$ relative aux arêtes d'ordre trois d'un coefficient ρ' dont l'expression pour chaque valeur de P est donnée dans la Table VI.

Nous avons trouvé (par. 94) que le nombre de représentations de $n = \frac{\Delta h^2}{\delta_1\delta_0}$ dans un intervalle correspondant à une famille de cycles, était $\frac{2N}{stu}$. Comme N était le nombre de représentations de n par les formes du système S, le nombre de représentations par la forme $Dq^2 - Pr^2$ seule sera $\frac{2N}{stu}$ affecté du facteur ρ ou ρ'. *Le nombre de formes d'Hermite, propres et impropres, situées sur les arêtes d'une même famille, est donc*

$$n_4 + n'_4 = \rho \frac{2}{stu} \Sigma \left(\frac{P}{d} \right) \quad \textit{pour les arêtes d'ordre deux,}$$

et

$$n'_6 = \rho' \frac{2}{stu} \Sigma \left(\frac{3P}{d} \right) \quad \textit{pour les arêtes d'ordre trois.}$$

99. Il reste enfin à distinguer les formes propres des formes impropres sur les arêtes elliptiques d'ordre deux afin d'obtenir pour chaque famille de cycles les nombres n_4 et n'_4 dont nous ne connaissons encore que la somme.

La distinction se fera au moyen des formules (90), où l'on aura remplacé $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, par leurs valeurs numériques, la forme $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$ correspondant à l'une quelconque des mp arêtes de la famille que l'on étudie. Les formes (abc) impropres sont celles pour lesquelles a et c sont pairs à la fois; il en résulte des conditions de parité pour q et r, d'où enfin des conditions pour Δ. Dans l'étude des corps et anneaux jusqu'à $P = 21$, les trois circonstances suivantes, seulement, se présentent :

1° Pour certaines familles des corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$, $P \equiv 1 \pmod{4}$, toutes les formes de discriminant Δ situées sur les arêtes de la famille sont de l'ordre propre, si $\Delta \equiv 1$ (mod. 4); elles sont toutes de l'ordre impropre si $\Delta \equiv 3$ (mod. 4). Δ, devant être premier à $2P$, est d'ailleurs toujours impair. On voit que si l'on pose, comme dans les tables de Cayley,

$$\delta = \left(\frac{-1}{\Delta} \right) = (-1)^{\frac{\Delta - 1}{2}} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad \Delta \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si} \quad \Delta \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

on aura

$$n_4 = \frac{1 + \delta}{2} (n_4 + n'_4) = f(n_4 + n'_4),$$

$$n'_4 = \frac{1 - \delta}{1} (n_4 + n'_4) = f'(n_4 + n'_4).$$

Les coefficients f et f', comme les coefficients ρ et ρ', ne sont susceptibles que des valeurs 0 et 1.

2° Dans les anneaux $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$ on a toujours $n_4 = n'_4$, c'est-à-dire que les formes propres et impropres sont en nombre égal dans chaque famille (mais non nécessairement sur chaque arête).

3° Dans tous les autres cas, les formes situées sur les arêtes d'une même famille soit toutes à la fois soit propres, soit impropres.

Par exemple, sur l'arête, axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspondant à la forme x^2+y^2, on a quel que soit P

$$a = c = q, \qquad b = -r\sqrt{-P}, \qquad \Delta = q^2 - Pr^2.$$

La forme (abc) est propre ou impropre suivant que q est impair ou pair.

Si $P \equiv 1 \pmod 4$, Δ étant impair, q et r sont de parités opposées. On a donc les deux cas suivants

q impair,	r pair,	$\Delta \equiv 1 \pmod 4$,	forme (abc) propre,
q pair,	r impair,	$\Delta \equiv 3 \pmod 4$,	forme (abc) impropre.

Si $P \equiv 2 \pmod 4$ q doit être impair, la forme (abc) est nécessairement impropre.

Si $P \equiv 3 \pmod 4$ on ne peut rien dire de général.

100. Nous avons jusqu'ici exclu de nos raisonnements les valeurs de Δ correspondant aux *sommets polyédriques*. Ce sont les discriminants des formes d'Hermite primitives correspondant à ces sommets, et les produits de ces discriminants par un carré arbitraire. Pour ces valeurs de Δ la mesure des classes de formes propres, $\mathfrak{M}(\Delta)$, ne comprend pas seulement des termes en $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_4$, $\mathcal{H}_6$, mais encore des termes d'indice 8, 12 ou 24, suivant l'ordre du sous-groupe polyédrique (par. 78), et de même pour les formes impropres. Il y a donc lieu d'examiner spécialement ces valeurs de Δ.

Toutefois, il se trouve, au moins pour les corps et anneaux jusqu'à $P = 21$, qu'elles doivent être exclues pour un autre motif. La formule de Dirichlet pour la représentation d'un nombre par un système de formes réelles, ainsi que la formule de la mesure donnée par M. Humbert, supposent Δ premier à 2P. Or, nous constaterons au Chapitre suivant (Tableau IV) que les discriminants des formes primitives situées aux sommets polyédriques des domaines $(\sqrt{-P})$, $P \leqslant 21$, ne sont jamais premiers avec P et même que l'on a (parfois à un facteur carré près)

pour un sommet trirectangle	(α)	$\Delta = P$,
pour un sommet diédrique	(β)	$\Delta = 3P$,
pour un sommet tétraédrique	(γ)	$\Delta = 2P$.

Je ne suis pas parvenu à démontrer la généralité de ces formules.

Enfin, la comparaison des Tableaux III et IV paraît montrer qu'il y a concordance entre l'existence de sommets trirectangles et celle de solutions de l'équation $t^2 - Pu^2 = -1$ (pour $P = 2, 5, 10, 13, 17$), ce que d'autres considérations paraissent aussi indiquer.

CHAPITRE X

MONOGRAPHIES

On trouvera dans ce Chapitre les données particulières suivantes sur tous les corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$ et anneaux $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$ jusqu'à $P = 21$: sommets singuliers et faces du domaine fondamental, correspondance des faces, arêtes elliptiques, sommets polyédriques, cycles d'arêtes elliptiques. Et dans les corps $\mathcal{C}_{1,2}(\sqrt{-P})$, et les anneaux $\mathcal{A}(\sqrt{-P})$ la composition des familles de cycles et l'énumération, pour chaque famille, des formes propres sur les arêtes elliptiques d'ordre deux n_4, et des formes impropres sur les arêtes elliptiques d'ordre deux et trois n_4 et n_6.

Groupe de Picard

Les corps $\mathcal{C}(\sqrt{-1})$ et $\mathcal{C}(\sqrt{-3})$ diffèrent de tous les autres en ce qu'il y existe d'autres *unités* (facteurs de 1) que ± 1. Il en résulte en particulier que tandis que dans le groupe modulaire $\Gamma(\sqrt{-P})$ des substitutions du type $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ 0 & \delta\end{pmatrix}$ sont nécessairement paraboliques ($z' = z+\beta$) les groupes $\Gamma(\sqrt{-1})$ et $\Gamma(\sqrt{-3})$ contiennent une infinité de substitutions elliptiques conservant une verticale (perpendicu-

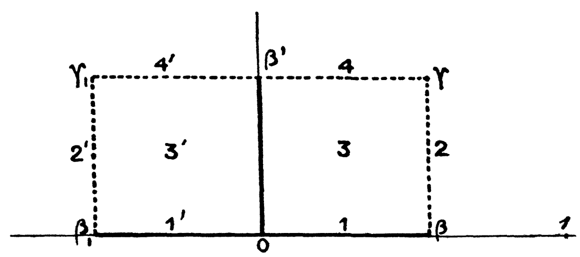


FIG. 7

laire au plan des $z\zeta$). Ces substitutions sont d'ordre deux dans le groupe de Picard, d'ordre trois dans le groupe $\Gamma(\sqrt{-3})$. On se trouve donc dans le cas particulier où le point choisi comme centre pour l'application de la méthode du rayonnement (ici le point à l'infini sur $O\zeta$) est situé sur un axe de substitution elliptique. On doit alors (Humbert, *C. R.*, 4 août 1919) ne garder que la moitié ou le tiers du domaine fourni par la méthode générale[1].

---

[1] Dans les figures 7 et 9 ainsi que dans les planches placées à la fin de ce travail, les arêtes elliptiques d'ordre deux sont mises en évidence par un trait plein épais et les arêtes d'ordre trois par un trait pointillé épais.

Dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-1})$ on a les unités ± 1, $\pm i$. Le prisme de côtés $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{\sqrt{-P}}{2}$, soit $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{i}{2}$, qui limite d'ordinaire le domaine du corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$, doit ici être divisé en deux parties, homologues dans le groupe par la substitution S (V. ci dessous).

SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES

$S(z) = -z$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	échange les faces verticales $1 - 1'$,
$T(z) = z - 1$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	transforme la face verticale 2 en la face $2'$.
$U(z) = -\frac{1}{z}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	échange les polygones sphériques $3 - 3'$ sur la sphere de centre o et de rayon unité;
$V(z) = -z + i$	$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	échange les faces verticales $4 - 4'$

Les substitutions S, U, V, sont elliptiques d'ordre deux, la substitution T est parabolique.

Les substitutions S et V, qui ont pour axes des verticales, sont des cas particuliers des substitutions

$$\begin{pmatrix} -i & \beta \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

où β est un entier $a+bi$ quelconque. Ces substitutions conservent la forme

$$2ix\bar{y} - \beta y^2,$$

elles représentent une rotation d'angle π autour de la verticale d'affixe $\frac{\beta}{2i}$, c'est-à-dire que chaque point d'un quadrillage de côté $\frac{1}{2}$ dans le plan $\zeta = 0$ est le pied de l'axe vertical d'une substitution elliptique d'ordre deux.

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE DEUX

verticale	o	axe de la substitution			$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$,
»	β	»	»	»	$\begin{pmatrix} -i & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$,
»	β_1	»	»	»	$\begin{pmatrix} -i & -i \\ 0 & i \end{pmatrix}$,

verticale	β'	axe de la substitution			$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$,
»	γ	»	»	»	$\begin{pmatrix} -i & -1+i \\ 0 & i \end{pmatrix}$,
»	γ_1	»	»	»	$\begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 0 & i \end{pmatrix}$,
arc	$\beta_1 0 \beta$	»	»	»	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$,
»	$0\beta'$	»	»	»	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE TROIS

arc	$\beta\gamma$	axe de la substitution			$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
»	$\gamma_1\beta'\gamma$	»	»	»	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$,
»	$\beta_1\gamma_1$	»	»	»	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

SOMMETS POLYÉDRIQUES (premier quadrant).

Sommet	trirectangle	0 :	$xx_0 + yy_0$	$\Delta = 1$,
»	diédrique	β :	$2xx_0 - x_0y - xy_0 + 2yy_0$	$\Delta = 3$,
»	diédrique	β' :	$2xx_0 - ix_0y + ixy_0 + 2yy_0$	$\Delta = 3$,
»	tétraédrique	γ :	$2xx_0 - (1+i)x_0y - (1-i)xy_0 + 2yy_0$	$\Delta = 2$.

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

1. Cycle d'ordre un 0,
2. » » » β',
3. » » » $0\beta'$,
4. Cycle d'ordre deux $\gamma - \gamma_1$,
5. » » » $\beta - \beta_1$,
6. » » » $0\beta - 0\beta_1$.

Arêtes d'ordre trois :

1'. Cycle d'ordre deux $\beta\gamma - \beta_1\gamma_1$,
2'. » » » $\beta'\gamma - \beta'\gamma_1$.

FAMILLES DE CYCLES

1^re famille :	cycles		1,
2^e	»	»	2 — 3,
3^e	»	»	4,
4^e	»	»	5 — 6,
5^e	»	»	1′ — 2′.

NOMBRE DE RÉDUITES SITUÉES SUR LES ARÊTES DE CHAQUE FAMILLE

1^re famille. — Pour les formes situées sur la verticale O à l'extérieur de la sphère de rayon un, on a $b = 0$, d'où $\Delta = ac$, et $\dfrac{c}{a} > 1$.

Le nombre de décompositions de $\Delta = ac$ en produits de deux facteurs a et c sans tenir compte de l'ordre des facteurs est évidemment $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{T}(\Delta)$, $\mathrm{T}(\Delta)$ étant le nombre des diviseurs de Δ, y compris 1 et Δ. $\mathrm{T}(\Delta)$ est d'ailleurs un nombre pair, sauf si Δ est un carré, cas que nous examinerons spécialement.

Il y a donc $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{T}(\Delta)$ réduites d'Hermite de discriminant Δ pour la 1^re famille.

Si Δ est impair, a et c sont tous deux impairs, ces réduites sont donc toutes de l'ordre propre.

2^e famille. — Nous voulons énumérer les formes de discriminant Δ situées sur l'arc $\mathrm{o}\beta'$ et sur la verticale β' à l'extérieur de la sphère de rayon un. Pour cela nous remarquons, ce que le calcul vérifie, qu'une rotation de $\dfrac{2\pi}{3}$ autour de l'arête d'ordre

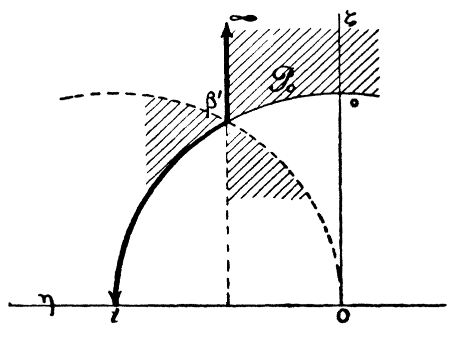


FIG. 8.

dre trois $\gamma_1\beta'\gamma$ amène la verticale $\beta'\infty$ en βi sur le prolongement de $\mathrm{o}\beta'$ (*fig. 8*, qui est faite dans le plan vertical $\mathrm{O}\eta\zeta$). Nous avons donc à énumérer les formes de discriminant Δ situées sur l'arc oi. Pour les formes situées sur cet arc on a, q et r étant des entiers positifs,

$$a = c = q, \quad b = -ri, \quad \Delta = q^2 - r^2,$$

$-\frac{b}{a}$ variant de o à i, $\frac{q}{r} > 1$. On peut écrire aussi

$$\Delta = (q+r)(q-r) = dd' \quad \text{avec} \quad d > d'$$

ce qui montre que le nombre de représentations de Δ par $q^2 - r^2$, avec $q > r$, est encore $\frac{1}{2}\,\mathrm{T}(\Delta)$.

Si Δ est impair, q et r doivent être de parités opposées. Il y a deux cas à distinguer :

q pair, r impair, $\Delta \equiv 3 \pmod{4}$, les réduites sont toutes de l'ordre impropre;
q impair, r pair, $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$, les réduites sont toutes de l'ordre propre.

3e famille. — Nous voulons énumérer les formes de discriminant Δ situées sur la verticale γ_1 seulement, et à l'extérieur de la sphère de rayon un. Pour ces formes on a

$$a = 2q - 2r, \quad b = (q-r)(1-i), \quad c = 2q, \quad \Delta = 2(q^2 - r^2),$$

q et r entiers positifs, et $\frac{q}{r} > 1$. Il n'y a donc pas ici de formes de discriminant Δ impair.

4e famille. — Nous voulons énumérer les formes de discriminant Δ situées sur l'arc $o\beta_1$, et sur la verticale β_1 à l'extérieur de la sphère de rayon un. Comme pour la 2e famille, nous remarquerons qu'une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'arête d'ordre trois $\beta_1\gamma_1$ amène la verticale $\beta_1\infty$ en $\beta_1(-1)$ sur le prolongement de $o\beta_1$. On a ici

$$a = c = q, \quad b = -r, \quad \Delta = q^2 - r^2 \quad \text{et} \quad \frac{q}{r} > 1.$$

On a donc, comme pour la 2e famille, $\frac{1}{2}\,\mathrm{T}(\Delta)$ réduites, toutes de l'ordre propre ou de l'ordre impropre suivant que $\Delta \equiv 1$ ou $3 \pmod{4}$.

Nous avons ainsi épuisé les arêtes d'ordre deux. En résumant nous voyons que

si $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$, ou $\delta = \left(\frac{-1}{\Delta}\right) = +1$, il y a $\frac{1}{2}\mathrm{T}(\Delta) + \frac{1}{2}\mathrm{T}(\Delta) + \frac{1}{2}\mathrm{T}(\Delta)$ $= \frac{3}{2}\mathrm{T}(\Delta)$ réduites de l'ordre propre, et aucune de l'ordre impropre;

si $\Delta \equiv 3 \pmod{4}$, ou $\delta = \left(\frac{-1}{\Delta}\right) = -1$, il y a $\frac{1}{2}\mathrm{T}(\Delta)$ réduites de l'ordre propre et $\frac{1}{2}\mathrm{T}(\Delta) + \frac{1}{2}\mathrm{T}(\Delta) = \mathrm{T}(\Delta)$ réduites de l'ordre impropre,

ce qui s'écrit en définitive

$$\mathfrak{N}_4 = \frac{2+\delta}{2}\mathrm{T}(\Delta),$$

$$\mathfrak{N}'_4 = \frac{1-\delta}{2}\mathrm{T}(\Delta),$$

Δ étant supposé impair.

5[e] *famille* (ordre trois). — Sur l'arête $\beta_1\gamma_1$, on a

$$a = c = 2q, \quad b = -q - ri, \quad \Delta = 3q^2 - r^2, \ \frac{q}{r} > 1$$

et sur l'arête $\beta'\gamma_1$

$$a = c = 2q, \quad b = -qi - r, \quad \Delta = 3q^2 - r^2, \ \frac{q}{r} > 1.$$

La substitution $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ conserve la forme $3q^2 - r^2$; elle amène l'infini en $+$ et $+1$ en $\frac{2}{3}$, ce qui est le $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{U}}$ de Dirichlet.

On a donc $\Sigma\left(\frac{3}{d}\right)$ représentations de Δ par l'ensemble des deux formes $q^2 - 3r^2$, $3q^2 - r^2$.

Le coefficient ρ' est égal à $\frac{1-\delta}{2}$ (Tableau VI), c'est-à-dire que la forme $3q^2 - r^2$ ne représente que des Δ (impairs) $\equiv 3 \pmod{4}$.

On a donc finalement

$$\mathfrak{N}'_5 = \frac{1-\delta}{2}\Sigma\frac{3}{d}$$

toujours avec Δ impair.

Cas particuliers : 1° $\Delta = 1$, *ou un carré* m^2. — Lorsque $\Delta = 1$ ou m^2, il y a une forme d'Hermite réduite de discriminant Δ située en o, la forme $mxx_0 + myy_0$; cette forme est de l'ordre propre et admet huit automorphies. La formule du nombre de classes de formes *propres*

$$\mathcal{H}(\Delta) = 2\mathcal{M}(\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{N}_4 \tag{85}$$

doit donc s'écrire ici

$$\mathcal{H}(\Delta) = 2\mathcal{M}(\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{N}_4 + \frac{3}{4}\mathcal{N}_8.$$

Nous allons montrer que la formule (85), où l'on remplace N_4 par l'expression $\dfrac{3}{2}T(\Delta)$ que nous avons trouvée plus haut ($\delta = +1$), ne cesse pourtant pas d'être valable.

En effet, lorsque Δ est carré parfait, le nombre de ses diviseurs est impair, soit $T(\Delta) = 2p + 1$. Sur chacune des trois familles d'arêtes d'ordre deux se trouvent p réduites de discriminant Δ, en mettant à part la décomposition de Δ en deux facteurs égaux qui donne chaque fois la réduite située en o. On a donc, lorsque $\Delta = m^2$,

$$\mathcal{N}_4 = 3p = \frac{3}{2}[T(\Delta) - 1]$$

de plus

$$\mathcal{N}_8 = 1, \qquad\qquad \text{(savoir, la réduite située en o)}$$

donc

$$\frac{1}{2}\mathcal{N}_4 + \frac{3}{4}\mathcal{N}_8 = \frac{3}{4}[T(\Delta) - 1] + \frac{3}{4} = \frac{2}{2}T(\Delta).$$

Ainsi la formule (85) donnant le nombre de classes de formes propres, de discriminant Δ impair, reste vraie lorsque Δ est carré, bien que recouvrant un fait arithmétique différent de celui qui correspond à Δ non carré.

2° $\Delta = 3$ *ou le triple d'un carré.* — Lorsque $\Delta = 3$ ou $3m^2$, il y a deux formes d'Hermite réduites de discriminant Δ situées en β_1 et en β', savoir

$$\begin{array}{lll} \text{en} & \beta_1 & 2mxx_0 + mx_0y + mxy_0 + 2myy_0 \\ \text{et en} & \beta' & 2mxx_0 - imx_0y + imxy_0 + 2myy_0. \end{array}$$

Ces formes sont de l'ordre impropre et admettent douze automorphies. La formule du nombre de classes de formes *impropres*

$$\mathcal{H}'(\Delta) = 2\mathcal{M}'(\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{N}'_4 + \frac{2}{3}\mathcal{N}'_6 \tag{86}$$

doit donc s'écrire ici

$$\mathcal{H}'(\Delta) = 2\mathcal{M}'(\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{N}'_4 + \frac{2}{3}\mathcal{N}'_6 + \frac{5}{6}\mathcal{N}'_{12}.$$

Nous allons montrer que la formule (86) ne cesse pourtant pas d'être valable, si l'on y remplace $\mathfrak{N}'_4$ et $\mathfrak{N}'_6$ par leurs valeurs $T(\Delta)$ et $\Sigma\left(\frac{3}{d}\right)$ trouvées plus haut ($\delta = -1$).

En effet, la 1re famille d'arêtes ne contient pas de formes propres. La 2e et la 4e familles d'arêtes contiennent chacune $\frac{1}{2}T(\Delta) - 1$ réduites de discriminant Δ, en ne comptant pas les réduites situées en β_1 et en β'. La 5e famille contient de même $\Sigma\left(\frac{3}{d}\right) - 1$ réduites, en ne comptant pas la réduite frontière située indifféremment soit en β_1, soit en β' (l'énumération de Dirichlet s'applique expressément à un domaine bien constitué de la substitution G, c'est-à dire que le cas échéant elle comprend une seule des deux frontières) On a donc lorsque $\Delta = 3m^2$

$$\mathfrak{N}'_4 = T(\Delta) - 2,$$

$$\mathfrak{N}'_6 = \Sigma\left(\frac{3}{d}\right) - 1,$$

$$\mathfrak{N}'_{12} = 2 \qquad \text{(savoir, les réduites } \beta_1 \text{ et } \beta'\text{)}$$

et l'on a identiquement

$$\frac{1}{2}(-2) + \frac{2}{3}(-1) + \frac{5}{6} \times 2 = 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-2})$

FACES ET SUBSTITUTION GÉNÉRATRICE CORRESPONDANTE

Une seule sphère (λ, ν) : $\lambda = 0$, $\nu = 1$. La substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, elliptique d'ordre deux, d'axe $\alpha\alpha_1$, fait se correspondre les deux faces $1 - 1'$.

ARÊTES ELLIPTIQUES (premier quadrant).

Arêtes d'ordre deux : $\alpha\alpha_1$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$\gamma\gamma_1$ » » » $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{\ } \\ \sqrt{\ } & 1 \end{pmatrix}$.

Arêtes d'ordre trois : $\gamma\gamma_4$ » » » $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

SOMMETS POLYÉDRIQUES (premier quadrant).

Sommet trirectangle α : $2xx_0 - \sqrt{\ } x_0y + \sqrt{\ } xy_0 + 2yy_0$ $\Delta = 2.$

Sommet tétraédrique γ : $2xx_0 - (1 + \sqrt{\ })x_0y - (1 - \sqrt{\ })xy_0 + 2yy_0$ $\Delta = 1.$

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES (constituant chacun une famille).

1. Cycle d'ordre un $\alpha\alpha_1$;
2. Cycle d'ordre quatre $\alpha\gamma - \alpha\gamma_2 - \alpha_1\gamma_3 - \alpha_1\gamma_4$;

1'. Cycle d'ordre deux $\gamma\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3$.

Pour les autres éléments du calcul des nombres $\mathfrak{N}_4$, $\mathfrak{N}'_4$, $\mathfrak{N}'_6$, voir les **Tableaux V à X**.

PARTICULARITÉS DE CE CORPS

1° *Arête* γ^2. — La forme de Dirichlet correspondant à cette arête est

$$\sqrt{\ }x^2 + 2xy - \sqrt{\ }y^2$$

forme primitive de déterminant -1 Les coefficients $\mathcal{A} = \sqrt{\ }$, $2\mathcal{B} = 2$, $\mathcal{C} = -\sqrt{\ }$, admettent le *diviseur* commun $\sigma = \sqrt{\ }$. C'est le cas signalé au paragraphe 52.

L'arête γ^2 est conservée par une loxodromique d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$S = \begin{pmatrix} t - \mathcal{B}u & -\mathcal{C}u \\ \mathcal{A}u & t + \mathcal{B}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - u & u\sqrt{\ } \\ u\sqrt{\ } & t + u \end{pmatrix}, \quad t^2 + u^2 = 1,$$

$$H = \begin{pmatrix} 3 - 2\sqrt{\ } & -4 \\ -4 & 3 + 2\sqrt{\ } \end{pmatrix}, \qquad t = 3, \qquad u = \sqrt{\ },$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{\ } \\ \sqrt{\ } & 1 \end{pmatrix}, \qquad t = 0, \qquad u = 1,$$

$$L_2 = HE = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\ } - 3 & 3\sqrt{\ } \\ 3\sqrt{\ } & -2\sqrt{\ } - 3 \end{pmatrix}, \qquad t = -2\sqrt{\ }, \qquad u = 3,$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 1 + \sqrt{\ } \\ 1 + \sqrt{\ } & 2 \end{pmatrix}, \qquad t = \frac{2 + \sqrt{\ }}{2}, \qquad u = \frac{2 - \sqrt{\ }}{2}.$$

2° *Arête* $\gamma\gamma_4$ — Cette arête est conservée par une loxodromique d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Forme correspondante $2x^2 - 2xy - 2y^2$.

$$S = \begin{pmatrix} t - \mathcal{B}u & -\mathcal{C}u \\ \mathcal{A}u & t + \mathcal{B}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - u & -2u \\ 2u & t + u \end{pmatrix}, \qquad t^2 + 3u^2 = 1,$$

$$H = \begin{pmatrix} 5 + 2\sqrt{\ } & -4\sqrt{\ } \\ 4\sqrt{\ } & 5 - 2\sqrt{\ } \end{pmatrix}, \qquad t = 5, \qquad u = 2\sqrt{\ },$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t = \frac{1}{2}, \qquad u = -\frac{1}{2},$$

$$L_6 = HE_3 = \begin{pmatrix} 5 - 2\sqrt{\ } & -5 - 2\sqrt{\ } \\ 5 + 2\sqrt{\ } & 4\sqrt{\ } \end{pmatrix}, \qquad t = \frac{5 - 6\sqrt{\ }}{2}, \qquad u = \frac{5 + 2\sqrt{\ }}{2},$$

$$L_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 - \sqrt{\ } \\ 1 + \sqrt{\ } & 1 - \sqrt{\ } \end{pmatrix}, \qquad t = \frac{3 - \sqrt{\ }}{2}, \qquad u = \frac{1 + \sqrt{\ }}{2}.$$

3° *Formes en* γ : $\Delta = 1$, *ou un carré* m^2 — La forme γ étant impropre nous avons à voir ce qui advient de la formule relative au nombre de classes d'Hermite *impropres*.

$$\mathcal{H}'(\Delta) = 2\mathcal{A}'(\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{N}'_4 + \frac{2}{3}\mathcal{N}'_6.$$

Nous avons (Tableau X)

$$\mathcal{N}'_4 = \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{2}{d}\right), \qquad \mathcal{N}'_6 = \frac{1 + \delta\varepsilon}{2}\Sigma\left(\frac{6}{d}\right).$$

Si $\Delta = m^2$ cette formule doit s'écrire

$$\mathcal{H}'(\Delta) = 2\mathcal{A}'(\Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{N}'_4 + \frac{2}{3}\mathcal{N}'_6 + \frac{11}{12}\mathcal{N}'_{24}.$$

Or, les sommes $\Sigma\left(\frac{2}{d}\right)$ et $\Sigma\left(\frac{6}{d}\right)$ donnent le nombre de représentations de Δ par les formes $q^2 - 2r^2$, $3q^2 - 2r^2$, respectivement, et dans le cas de $\Delta = 1$ ou m^2 il y a une de ces représentations qui correspond à la forme située en γ, elle ne doit donc pas figurer dans les sommes précédentes, la forme γ étant comptée par ailleurs comme admettant 24 automorphies. Nous devons donc écrire

$$\mathcal{N}'_4 = \frac{1}{2}\left[\Sigma\left(\frac{2}{d}\right) - 1\right], \qquad \mathcal{N}'_6 = \frac{1 + \delta\varepsilon}{2}\left[\Sigma\left(\frac{6}{d}\right) - 1\right], \qquad \mathcal{N}'_{24} = 1,$$

mais comme on a identiquement

$$-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} \times 1\right) + \left(\frac{11}{12} + 1\right) = 0,$$

on en conclut que la formule

$$\mathcal{H}'(\Delta) = 2\mathcal{N}'(\Delta) + \frac{1}{4}\Sigma\left(\frac{2}{d}\right) + \frac{1+\delta\varepsilon}{2}\Sigma\left(\frac{6}{d}\right)$$

continue à être exacte pour $\Delta = 1$ ou m^2, comme les formules analogues relatives au groupe de Picard

ANNEAU $\mathcal{A}(\sqrt{-3})$

FACES ET SUBSTITUTION GÉNÉRATRICE CORRESPONDANTE

Une seule sphère $(\lambda, \nu): \lambda = 0,\ \nu = 1$. La substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, elliptique d'ordre deux, d'axe $\beta\beta_1$, fait se correspondre les deux faces $1 - 1'$.

ARÊTES ELLIPTIQUES (premier quadrant).

Arête d'ordre deux $\beta\beta_1$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Arête d'ordre trois $\Omega\Omega_4$ » » » $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

» » » $\Omega\Omega_2$ » » » $\begin{pmatrix} +2 & -\sqrt{\ } \\ -\sqrt{\ } & -1 \end{pmatrix}$.

SOMMET POLYÉDRIQUE (premier quadrant).

Sommet diédrique β : $2xx_0 - \sqrt{\ }\, x_0y + \sqrt{\ }\, xy_0 + 2yy_0,\ \Delta = 1$.

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES (constituant chacun une famille).

1 Cycle d'ordre un $\beta\beta_1$,

1'. Cycle d'ordre deux $\Omega\Omega_4,\ \Omega_2\Omega_3$;

2'. Cycle d'ordre quatre $\beta\Omega,\ \beta\Omega_2,\ \beta_1\Omega_3,\ \beta_1\Omega_4$.

1re famille — Sur l'arête $\beta\beta_1$, il y a un nombre égal de formes propres et de formes impropres et le coefficient relatif au système S est $\rho = \frac{1+\delta}{2}$, on a donc

$$\mathfrak{N}_4 = \mathfrak{N}'_4 = \frac{1+\delta}{2}\Sigma\left(\frac{3}{d}\right).$$

2^e *famille.* — On a sur l'arête $\Omega\Omega_4$

$$a = c = 2q, \qquad b = -q + r\sqrt{\ }, \qquad \Delta = 3q^2 - 3r^2.$$

le discriminant Δ est donc toujours multiple de 3, en d'autres termes il n'y a sur les arêtes de cette famille aucune forme de Δ premier à $2P$ ou 6. Cette circonstance se retrouvera sur toutes les arêtes d'ordre trois des domaines $(\sqrt{-P})$, P multiple de 3 (par. 97).

3^e *famille.* — On a sur l'arête $\beta\Omega_2$ correspondant à la forme $2\sqrt{\ }x^2 + 2xy - 2\sqrt{\ }y^2$

$$a = c = 2q, \qquad b = -q\sqrt{\ } + r, \qquad \Delta = q^2 - r^2, \qquad \frac{q}{r} > 1.$$

Nous avons donc à trouver le nombre de représentations de $\Delta = q^2 - r^2$, satisfaisant à $\dfrac{q}{r} > 1$. Nous avons vu à l'occasion du groupe de Picard que ce nombre est $\mathfrak{N}'_4 = \dfrac{1}{2}\,T(\Delta)$.

Cas particulier : $\Delta = 1$ *ou carré parfait.* — La forme correspondante β étant impropre, il y a lieu d'examiner ce que devient la formule donnant le nombre de formes *impropres*

$$\mathcal{H}'(\Delta) = 2\mathfrak{M}'(\Delta) + \frac{1}{2}\mathfrak{N}'_4 + \frac{2}{3}\mathfrak{N}'_6.$$

Nous avons trouvé

$$\mathfrak{N}'_4 = \frac{1+\delta}{2}\,\Sigma\left(\frac{3}{d}\right), \qquad \mathfrak{N}'_6 = \frac{1}{2}\,T(\Delta).$$

Si $\Delta = m^2$ cette formule doit s'écrire

$$\mathcal{H}'(\Delta) = 2\mathfrak{M}'(\Delta) + \frac{1}{2}\mathfrak{N}'_4 + \frac{2}{3}\mathfrak{N}'_6 + \frac{5}{6}\mathfrak{N}'_{12}.$$

Nous avons à retrancher une unité de $\Sigma\left(\dfrac{3}{d}\right)$; on doit également retrancher une unité de $T(\Delta)$ pour exclure la décomposition $\Delta = m \times m$. On devra donc poser

$$\mathfrak{N}'_4 = \frac{1+\delta}{2}\left[\Sigma\left(\frac{3}{2}\right) - 1\right], \qquad \mathfrak{N}'_6 = \frac{1}{2}[T(\Delta) - 1], \qquad \mathfrak{N}'_{12} = 1.$$

Mais comme on a identiquement $\dfrac{1}{2}(-1) + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{5}{6} + 1 = 0$, on en conclut qu'ici encore la formule donnant $\mathcal{H}'(\Delta)$ continue à être exacte pour $\Delta = m^2$.

Cette difficulté ne se rencontre plus pour les valeurs supérieures de P (par. 100).

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-5})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1.	$\lambda = 0,$	$\nu = 1,$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	du type	$E_2,$
2.	$\sqrt{\ },$	$2,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 2 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$E_2;$
3.	$4+\sqrt{\ },$	$2\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} 4+\sqrt{\ } & -2\sqrt{\ } \\ 2\sqrt{\ } & 4-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	H.

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE DEUX (premier quadrant).

$\alpha\alpha_1$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

αs » » » $\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 2 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,

αa » » » $\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{\ } \\ \sqrt{\ } & 2 \end{pmatrix}$.

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE TROIS (premier quadrant).

nn_4 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

SOMMET POLYÉDRIQUE (premier quadrant).

Sommet trirectangle α : $5xx_0 - 2\sqrt{\ }\,x_0y + 2\sqrt{\ }\,xy_0 + 5yy_0,\qquad \Delta = 5.$

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

1 Cycle d'ordre un $\alpha\alpha_1$,
2. » » deux $\alpha a - \alpha a_2$,
3. » » deux $\alpha_1 a_3 - \alpha_1 a_4$,
4. » » un αs,
5. » » un $\alpha_1 s_1$.

Arêtes d'ordre trois :

1'. Cycle d'ordre deux $nn_4 - n_2 n_3$.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-6})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1. $\lambda = 0,\quad \nu = 1,\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ du type E_2,
2. $1+\sqrt{\ },\quad 2,\quad \begin{pmatrix} 1+\sqrt{\ } & 3 \\ 2 & 1-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$ » P,
3. $5,\quad -2\sqrt{\ },\quad \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{\ } \\ -2\sqrt{\ } & 5 \end{pmatrix}$ » H.

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE DEUX

aa_1 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

γc » » » $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\ } & 2-\sqrt{\ } \\ 2 & -1-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$.

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE TROIS

$\gamma\gamma_4$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

γn » » » $\begin{pmatrix} 3 & -1-\sqrt{\ } \\ 1-\sqrt{\ } & -2 \end{pmatrix}$;

SOMMET POLYÉDRIQUE

Sommet tétraédrique γ : $6xx_0 - (3+2\sqrt{\ })x_0y - (3-2\sqrt{\ })xy_0 + 6yy_0$, $\Delta = 3$.

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

1. Cycle d'ordre un aa_1,
2. » » deux $c\gamma - c_2\gamma_2$,
3. » » » $c_3\gamma_3 - c_4\gamma_4$.

Arêtes d'ordre trois :

1'. Cycle d'ordre deux $\gamma\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3$,
2'. » » » $\gamma n - \gamma_2 n_2$,
3'. » » » $\gamma_3 n_3 - \gamma_4 n_4$.

ANNEAU $\mathcal{A}(\sqrt{-7})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1.	$\lambda = 0,$	$\nu = 1,$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	du type	$E_2,$
2.	$\sqrt{\ },$	$2,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 3 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$E_2,$
3	$3,$	$1 - \sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} 3 & 1+\sqrt{\ } \\ 1-\sqrt{\ } & 3 \end{pmatrix}$	»	$H.$

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE DEUX

$\beta\beta_1$, axe de la substitution (1),

βa, » » » (2).

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE TROIS

nn_4, axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

pp_2, » » » $\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{\ } \\ -\sqrt{\ } & -2 \end{pmatrix}$.

SOMMET POLYÉDRIQUE

Sommet diédrique β : $14xx_0 - 5\sqrt{\ }x_0y + 5\sqrt{\ }xy_0 + 14yy_0, \qquad \Delta = 21.$

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux

1 Cycle d'ordre un $\beta\beta_1$,

2. » » » βa,

3 » » » $\beta_1 a_1$

Arêtes d'ordre trois :

1' Cycle d'ordre deux $nn_4 - n_2n_3$,

2'. » » » $\beta p_1 - \beta p_2$,

3'. » » » $\beta_1 p_3 - \beta_1 p_4$.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-10})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1. $\lambda = 0$, $\nu = 1$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ du type E_2,

2. $1+\sqrt{\ }$, 2, $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\ } & 5 \\ 2 & 1-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$ » P,

3. $\sqrt{\ }$, 3, $\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 3 \\ 3 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$ » E_2,

4. $1+\sqrt{\ }$, 3, $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\ } & -4 \\ 3 & -1+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$ » L_2,

5. -9, $2\sqrt{\ }$, $\begin{pmatrix} -9 & -4\sqrt{\ } \\ 2\sqrt{\ } & -9 \end{pmatrix}$ » H.

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE DEUX

$\alpha\alpha_1$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

αa » » » $\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 3 \\ 3 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,

cd » » » $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\ } & 4-\sqrt{\ } \\ 2 & -1-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,

bb_2 » » » $\begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{\ } \\ \sqrt{\ } & 3 \end{pmatrix}$.

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE TROIS

nn_4 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

pq » » » $\begin{pmatrix} -4-\sqrt{\ } & -3+2\sqrt{\ } \\ -3+\sqrt{\ } & 5+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$.

SOMMET POLYÉDRIQUE

Sommet trirectangle α : $10xx_0 - 3\sqrt{\ }\, x_0y + 3\sqrt{\ }\, xy_0 + 10yy_0$, $\Delta = 10$.

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'oidre deux :

1 Cycle d'ordre un $\alpha\alpha_1$,
2 » » un αa,
3. » » un $\alpha_1 a_1$,
4. » » deux $cd - c_2 d_2$,
5. » » deux $c_3 d_3 - c_3 d_4$,
6. » » deux $\alpha b - \alpha b_2$,
7. » » deux $\alpha_1 b_3 - \alpha_1 b_4$.

Arêtes d'ordre trois :

1'. Cycle d'ordre deux $nn_3 - n_2 n_3$,
2'. » » » $pp - q_2 q_2$,
3'. » » » $p_3 q_3 - p_4 q_4$.

ANNEAU $\mathcal{A}(\sqrt{-11})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1.	$\lambda = 0,$	$\nu = 1,$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	du type $\mathbf{E}_2,$
2.	$\sqrt{\ },$	$2,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 5 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{E}_2,$
3.	$\sqrt{\ },$	$3,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & -4 \\ 3 & \sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{L}_2,$
4.	$5,$	$1-\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} 5 & 2+2\sqrt{\ } \\ 1-\sqrt{\ } & 5 \end{pmatrix}$	» $\mathbf{H},$
5	$-2+\sqrt{\ },$	$2+\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} -2+\sqrt{\ } & -4 \\ 2+\sqrt{\ } & -2+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{L}_1,$
6 6′.	$4+\sqrt{\ },$ $6+\sqrt{\ },$	$\left.\begin{matrix} 4-\sqrt{\ } \\ 4-\sqrt{\ } \end{matrix}\right\}$	$\begin{pmatrix} 4+\sqrt{\ } & 2-2\sqrt{\ } \\ 4-\sqrt{\ } & -6-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{P},$
7	$3+2\sqrt{\ },$	$6,$	$\begin{pmatrix} 3+2\sqrt{\ } & -6+2\sqrt{\ } \\ 6 & 3+2\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{L}_1.$

ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux

aa_1 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

bc » » » $\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 5 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}.$

Arêtes d'ordre trois :

nn_1 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Pas de *sommets polyédriques*.

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

1 Cycle d'ordre un $aa_1,$

2. » » » $bc,$

3 » » » $b_1c_1.$

Arêtes d'ordre trois :

1′. Cycle d'ordre deux $nn_1 - n_2n_3.$

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-13})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1.	$\lambda = 0$,	$\nu = 1$,	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	du type	E_2,
2.	$\sqrt{\ }$,	2,	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 6 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	E_2,
3.	$\sqrt{\ }$,	3,	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 4 \\ 3 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	E_2,
4.	$1 + \sqrt{\ }$,	3,	$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\ } & -5 \\ 3 & -1+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	L_2,
5.	$2 + \sqrt{\ }$,	4,	$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{\ } & 4 \\ 4 & 2-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	H,
6.	$2 + 2\sqrt{\ }$,	5,	$\begin{pmatrix} 2+2\sqrt{\ } & 11 \\ 5 & 2-2\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	H,
7.	$-12 + \sqrt{\ }$,	$2\sqrt{\ }$,	$\begin{pmatrix} -12+\sqrt{\ } & -6\sqrt{\ } \\ 2\sqrt{\ } & -12-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	H,

ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

$\beta\beta_1$	axe de la substitution			$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
αs	»	»	»	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 6 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,
$\beta\alpha$	»	»	»	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 4 \\ 3 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,
aa_2	»	»	»	$\begin{pmatrix} -5 & 2\sqrt{\ } \\ \sqrt{\ } & 5 \end{pmatrix}$,
$\beta' c$	»	»	»	$\begin{pmatrix} 4 & -2-\sqrt{\ } \\ 2-\sqrt{\ } & -4 \end{pmatrix}$,
$\beta' b$	»	»	»	$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{\ } & 2-\sqrt{\ } \\ 4 & -2-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,
de	»	»	»	$\begin{pmatrix} -4+2\sqrt{\ } & 12+\sqrt{\ } \\ 4+\sqrt{\ } & 4-2\sqrt{\ } \end{pmatrix}$.

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE TROIS

$\beta'\beta'_4$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

nn_2 » » » $\begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{\ } \\ -\sqrt{\ } & 3 \end{pmatrix}$,

pq » » » $\begin{pmatrix} 3+2\sqrt{\ } & -9+2\sqrt{\ } \\ -5 & -2-2\sqrt{\ } \end{pmatrix}$.

SOMMETS POLYÉDRIQUES

Sommet trirectangle α, sommets diédriques β et β'.

Forme d'Hermite	(α)	$a = 13$,	$b = -5\sqrt{\ }$,	$c = 26$,	$\Delta = 13$,
» »	(β)	$a = 26$,	$b = -7\sqrt{\ }$,	$c = 26$,	$\Delta = 39$,
» »	(β')	$a = 26$,	$b = -(13 + 6\sqrt{\ })$,	$c = 26$,	$\Delta = 39$.

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

1 Cycle d'ordre un $\beta\beta_1$,
2. » » » $\beta\alpha$,
3. » » » $\beta_1\alpha_1$,
4. Cycle d'ordre deux $\alpha a - \alpha a_2$,
5 » » » $\alpha_1 a_3 - \alpha_1 a_4$,
6. » » » $\beta' b - \beta'_2 b_2$,
7. » » » $\beta'_3 b_3 - \beta'_4 b_4$,
8. » » » $\beta' c - \beta'_2 c_2$,
9. » » » $\beta'_3 c_3 - \beta'_4 c_4$,
10. » » » $de - d_2 e_2$,
11. » » » $d_3 e_3 - d_4 e_4$,
12. Cycle d'ordre un αs,
13. » » » $\alpha_1 s_1$.

Arêtes d'ordre trois :

1'. Cycle d'ordre deux $\beta'\beta'_4 - \beta'_2\beta'_3$,
2'. » » » $\beta n - \beta n_2$,
3'. » » » $\beta_1 n_3 - \beta_1 n_4$,
4'. » » » $pq - p_2 q_2$,
5'. » » » $p_3 q_3 - p_4 q_4$.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-14})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1.	$\lambda = 0$,	$\nu = 1$,	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	du type E_2,
2.	$1 + \sqrt{\ }$,	2,	$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\ } & 7 \\ 2 & 1-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» P,
3	$\sqrt{\ }$,	3,	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & -5 \\ 3 & \sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» L_2,
4	4,	$1 - \sqrt{\ }$,	$\begin{pmatrix} 4 & 1+\sqrt{\ } \\ 1-\sqrt{\ } & 4 \end{pmatrix}$	» H,
5 5′.	$-3 + \sqrt{\ }$, $-5 + \sqrt{\ }$,	$\left.\begin{matrix} 2+\sqrt{\ } \\ 2+\sqrt{\ } \end{matrix}\right\}$	$\begin{pmatrix} -3+\sqrt{\ } & 6+\sqrt{\ } \\ 2+\sqrt{\ } & 5-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» P,
6	$2\sqrt{\ }$,	5,	$\begin{pmatrix} 2\sqrt{\ } & 11 \\ 5 & -2\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» E_2,
7.	$7 + \sqrt{\ }$,	$4 - \sqrt{\ }$,	$\begin{pmatrix} 7+\sqrt{\ } & -2+3\sqrt{\ } \\ 4-\sqrt{\ } & 7+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» L_4,
8.	$3 + 2\sqrt{\ }$,	6,	$\begin{pmatrix} 3+2\sqrt{\ } & -8+2\sqrt{\ } \\ 6 & 3+2\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» L_4,
9.	-13	$2\sqrt{\ }$,	$\begin{pmatrix} -13 & 6\sqrt{\ } \\ 2\sqrt{\ } & 13 \end{pmatrix}$	» H.

ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

aa_1 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

bc » » » $\begin{pmatrix} 2\sqrt{\ } & 11 \\ 5 & 2\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,

de » » » $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\ } & 6-\sqrt{\ } \\ 2 & -1-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$.

Arêtes d'ordre trois :

nn_1 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

pq » » » $\begin{pmatrix} 7+2\sqrt{\ } & 11-3\sqrt{\ } \\ 5-\sqrt{\ } & -6-2\sqrt{\ } \end{pmatrix}$.

Pas de *sommets polyédriques*

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

1. Cycle d'ordre un aa_1,
2. » » » bc,
3. » » » b_1c_1,
4. Cycle d'ordre deux de, d_2e_2,
5. » » » d_3e_3, d_4e_4.

Arêtes d'ordre trois :

1'. Cycle d'ordre deux nn_1, n_2n_3,
2'. » » » pq, p_2q_2,
3'. » » » p_3q_3, p_4q_4.

ANNEAU $\mathcal{A}(\sqrt{-15})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1. $\lambda = 0$,	$\nu = 1$,	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	du type	$\mathbf{E}_2$,
2. $\sqrt{\ }$,	2,	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 7 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$\mathbf{E}_2$,
3. $1+\sqrt{\ }$,	3,	$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\ } & 5 \\ 3 & 1-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$\mathbf{P}$,
4. $+4$,	$-\sqrt{\ }$,	$\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{\ } \\ -\sqrt{\ } & 4 \end{pmatrix}$	»	$\mathbf{H}$,
5. $2+\sqrt{\ }$,	4,	$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{\ } & -3+\sqrt{\ } \\ 4 & 2+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$\mathbf{L}_1$,
6. 7	$1-\sqrt{\ }$,	$\begin{pmatrix} 7 & 3+3\sqrt{\ } \\ 1-\sqrt{\ } & 7 \end{pmatrix}$	»	$\mathbf{H}$,
7. -11,	$2\sqrt{\ }$,	$\begin{pmatrix} 11 & 4\sqrt{\ } \\ -2 & 11\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$\mathbf{H}$.

ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

aa_1 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

bc » » » $\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 7 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$.

Arêtes d'ordre trois :

nn_1 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

pq » » » $\begin{pmatrix} 2+\sqrt{\ } & 4-\sqrt{\ } \\ 3 & -1-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,

rs » » » $\begin{pmatrix} -5+\sqrt{\ } & 7+2\sqrt{\ } \\ 2+\sqrt{\ } & 6-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$.

Pas de *sommets polyédriques*.

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

1. Cycle d'ordre un aa_1,
2. » » » bc,
3. » » » b_1c_1.

Arêtes d'ordre trois :

1'. Cycle d'ordre deux nn_1, n_2n_3,
2'. » » » pq, p_2q_2,
3'. » » » p_3q_3, p_4q_4,
4'. » » » rs, r_2s_2,
5'. » » » r_3s_3, r_4s_4.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-17})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1.	$\lambda = 0,$	$\nu = 1,$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	du type $\mathbf{E}_2$,
2.	$\sqrt{\ },$	$2,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 8 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{E}_2$,
3.	$\sqrt{\ },$	$3,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & -6 \\ 3 & \sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{L}_2$.
4.	$\sqrt{\ },$	$4,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 4 \\ 4 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{E}_2$,
5.	$2+\sqrt{\ },$	$4,$	$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{\ } & 5 \\ 4 & 2-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{H}$,
6. 6'.	$+5,$ $7,$	$1-\sqrt{\ }$ $1-\sqrt{\ }$	$\begin{pmatrix} -5 & 2+2\sqrt{\ } \\ -1+\sqrt{\ } & 7 \end{pmatrix}$	» $\mathbf{P}$,
7.	$-6+\sqrt{\ },$	$2+\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} -6+\sqrt{\ } & -8-2\sqrt{\ } \\ 2+\sqrt{\ } & -6+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{L}_i$,
8.	$3+2\sqrt{\ },$	$6,$	$\begin{pmatrix} 3+2\sqrt{\ } & -10+2\sqrt{\ } \\ 6 & 3+2\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{L}_i$,
9.	$-3+2\sqrt{\ },$	$5+\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} -3+2\sqrt{\ } & -12 \\ 5+\sqrt{\ } & -3+2\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{L}_i$,
10.	$3+3\sqrt{\ },$	$7,$	$\begin{pmatrix} 3+3\sqrt{\ } & 23 \\ 7 & 3-3\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{H}$,
11.	$-16+\sqrt{\ },$	$2\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} 16-\sqrt{\ } & 8\sqrt{\ } \\ -2\sqrt{\ } & 16+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	» $\mathbf{H}$

ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

$\alpha\alpha_1$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

bc » » » $\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 8 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,

αa » » » $\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 4 \\ 4 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,

γd axe de la substitution $\begin{pmatrix} 2+\sqrt{\ } & 3-\sqrt{\ } \\ 4 & -2-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,

ef » » » $\begin{pmatrix} -5+3\sqrt{\ } & 24+\sqrt{\ } \\ 6+\sqrt{\ } & 5-3\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,

αg » » » $\begin{pmatrix} -4 & \sqrt{\ } \\ \sqrt{\ } & 4 \end{pmatrix}$

Arêtes d'ordre trois :

$\gamma\gamma_4$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

γn » » » $\begin{pmatrix} 5 & -2-\sqrt{\ } \\ 2-\sqrt{\ } & 4 \end{pmatrix}$,

pq » » » $\begin{pmatrix} 4+3\sqrt{\ } & 20-3\sqrt{\ } \\ 7 & -3-3\sqrt{\ } \end{pmatrix}$.

SOMMETS POLYÉDRIQUES

Sommet trirectangle α et sommet tétraédrique γ.

Forme d'Hermite (α) . $a = c = 17$, $b = -4\sqrt{\ }$, $\Delta = 17$.

» » (γ) : $a = c = 34$, $b = 17 - 7\sqrt{\ }$, $\Delta = 34$.

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

1. Cycle d'ordre un $\alpha\alpha_1$,
2. » » » bc,
3. » » » b_1c_1,
4. » » » αa,
5. » » » $\alpha_1 a_1$,
6. Cycle d'ordre deux γd, $\gamma_2 d_2$,
7. » » » $\gamma_3 d_3$, $\gamma_4 d_4$,
8. » » » αg_1, αg_2,
9. » » » $\alpha_1 g_3$, $\alpha_1 g_4$.

Arêtes d'ordre trois :

1'. Cycle d'ordre deux $\gamma\gamma_4$, $\gamma_2\gamma_3$,
2'. » » » γn, $\gamma_2 n_2$,
3'. » » » $\gamma_3 n_3$, $\gamma_4 n_4$.
4'. » » » pq_1, $p_2 q_2$,
5'. » » » $p_3 q_3$, $p_4 q_4$.

ANNEAU $\mathcal{A}(\sqrt{-19})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1.	$\lambda = 0,$	$\nu = 1,$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	du type	$E_2,$
2.	$\sqrt{\ },$	$2,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 9 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$E_2,$
3.	$\sqrt{\ },$	$3,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 6 \\ 3 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$E_2,$
4.	$1+\sqrt{\ },$	$3,$	$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\ } & -7 \\ 3 & -1+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$L_2,$
5.	$\sqrt{\ },$	$4,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & -5 \\ 4 & \sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$L_2,$
6.	$2+\sqrt{\ },$	$4,$	$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{\ } & -4+\sqrt{\ } \\ 4 & 2+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$L_1,$
7.	$9,$	$1-\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} 9 & 4+4\sqrt{\ } \\ 1-\sqrt{\ } & 9 \end{pmatrix}$	»	$H,$
8. 9.	$-7+\sqrt{\ },$ $5,$	$\left.\begin{matrix} 2+\sqrt{\ } \\ 2-\sqrt{\ } \end{matrix}\right\}$	$\begin{pmatrix} -7+\sqrt{\ } & 1+2\sqrt{\ } \\ 2+\sqrt{\ } & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & 1-2\sqrt{\ } \\ 2-\sqrt{\ } & -7-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$		$L_1,$
10. 11.	$-4+\sqrt{\ },$ $9+\sqrt{\ },$	$\left.\begin{matrix} 4+\sqrt{\ } \\ 4-\sqrt{\ } \end{matrix}\right\}$	$\begin{pmatrix} -4+\sqrt{\ } & 5+2\sqrt{\ } \\ 4+\sqrt{\ } & 9-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 9+\sqrt{\ } & 5-2\sqrt{\ } \\ 4-\sqrt{\ } & -4-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$		$H,$
12. 13.	$6+\sqrt{\ },$ $-5+3\sqrt{\ },$	$\left.\begin{matrix} 6-\sqrt{\ } \\ 6+\sqrt{\ } \end{matrix}\right\}$	$\begin{pmatrix} 6+\sqrt{\ } & -11+2\sqrt{\ } \\ 6-\sqrt{\ } & 5+3\sqrt{\ } \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5+3\sqrt{\ } & -11-2\sqrt{\ } \\ 6+\sqrt{\ } & -6+\sqrt{\ } \end{pmatrix}$		$L_1,$
14. 15.	$9,$ $11,$	$\left.\begin{matrix} 2-2\sqrt{\ } \\ 2-2\sqrt{\ } \end{matrix}\right\}$	$\begin{pmatrix} 9 & 2+2\sqrt{\ } \\ 2-2\sqrt{\ } & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 11 & 3+3\sqrt{\ } \\ 2-2\sqrt{\ } & 11 \end{pmatrix}$		$H,$
16 16'.	$-8+\sqrt{\ },$ $-10+\sqrt{\ },$	$\left.\begin{matrix} 2+2\sqrt{\ } \\ 2+2\sqrt{\ } \end{matrix}\right\}$	$\begin{pmatrix} -8+\sqrt{\ } & 7+2\sqrt{\ } \\ 2+2\sqrt{\ } & 10-\sqrt{\ } \end{pmatrix}$		$P.$

ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

aa_1 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

βb » » » $\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 9 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$,

βc » » » $\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 6 \\ 3 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$.

Arêtes d'ordre trois .

nn_4 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

βp » » » $\begin{pmatrix} -7 & -3\sqrt{\ } \\ \sqrt{\ } & 8 \end{pmatrix}$.

SOMMETS POLYÉDRIQUES

Sommet diédrique β : $a = 2 \times 19$, $b = -23\sqrt{\ }$, $c = 14 \times 19$, $\Delta = 3 \times 19$.

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux :

1. Cycle d'ordre un aa_1,
2. » » » βb,
3. » » » $\beta_1 b_1$,
4. » » » βc,
5. » » » $\beta_1 c_1$.

Arêtes d'ordre trois :

1'. Cycle d'ordre deux $nn_4, n_2 n_3$,
2'. » » » $\beta p, \beta p_2$,
3'. » » » $\beta_1 p_3, \beta_1 p_4$.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-21})$

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1.	$\lambda = 0,$	$\nu = 1,$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	du type	$E_2,$
2.	$\sqrt{\ },$	$2,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 10 \\ 2 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$E_2,$
3.	$1 + \sqrt{\ },$	$3,$	$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{\ } & 7 \\ 3 & 1 - \sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$H,$
4.	$2 + \sqrt{\ },$	$4,$	$\begin{pmatrix} 2 + \sqrt{\ } & 6 \\ 4 & 2 - \sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$H,$
5.	$\sqrt{\ },$	$4,$	$\begin{pmatrix} \sqrt{\ } & 5 \\ 4 & -\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$E_2,$
6	$-8,$	$\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} -8 & -3\sqrt{\ } \\ \sqrt{\ } & 8 \end{pmatrix}$	»	$H,$
7. 8	$5,$ $9,$	$\left.\begin{matrix} 1 - \sqrt{\ } \\ 1 - \sqrt{\ } \end{matrix}\right\}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 + 2\sqrt{\ } \\ 1 - \sqrt{\ } & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 9 & 2 + 2\sqrt{\ } \\ 1 - \sqrt{\ } & 5 \end{pmatrix}$		$H,$
9.	$4 + 4\sqrt{\ },$	$9,$	$\begin{pmatrix} 4 + 4\sqrt{\ } & 39 \\ 9 & 4 - 4\sqrt{\ } \end{pmatrix}$	du type	$H,$
10.	$-13,$	$2\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} -13 & -4\sqrt{\ } \\ 2\sqrt{\ } & -13 \end{pmatrix}$	»	$H,$
11.	$-20 + \sqrt{\ },$	$2\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} -20 + \sqrt{\ } & -10\sqrt{\ } \\ 2\sqrt{\ } & -20 - \sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$H,$
12.	$-8 + \sqrt{\ },$	$2\sqrt{\ },$	$\begin{pmatrix} -8 + \sqrt{\ } & -2\sqrt{\ } \\ 2\sqrt{\ } & -8 - \sqrt{\ } \end{pmatrix}$	»	$H.$

(P = 21)

CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

Arêtes d'ordre deux

1.	Cycle d'ordre un	$\beta\beta_1$,
2.	» » »	βa,
3	» » »	$\beta_1 a_1$,
4	Cycle d'ordre deux	$\beta' b, \beta'_2 b_2$,
5	» » »	$\beta'_3 b_3 \ \beta'_4 b_4$.
6.	» » »	$\beta' c, \beta'_2 c_2$,
7	» » »	$\beta'_3 c_3, \beta'_4 c_4$,
8	» » »	$de, d_2 e_2$,
9	» » »	$d_3 e_3, d_4 e_4$,
10.	Cycle d'ordre un	fg,
11	» » »	$f_1 g_1$

Arêtes d'ordre trois :

1'.	Cycle d'ordre deux	$nn_4, n_2 n_3$,
2'.	» » »	$\beta' p, \beta'_2 p_2$,
3'.	» » »	$\beta'_3 p_3, \beta'_4 p_4$,
4'.	» » »	$qr, q_2 r_2$,
5'.	» » »	$q_3 r_3, q_4 r_4$,
6'.	» » »	$st, s_2 t_2$,
7'.	» » »	$s_3 t_3, s_4 t_4$,
8'.	» » »	$\beta u, \beta u_2$,
9'.	» » »	$\beta_1 u_3, \beta_1 u_4$.

SOMMETS POLYÉDRIQUES

Sommets diédriques β et β'

Forme (β) $a = 14$, $b = -3\sqrt{\ }$, $c = 14$, $\Delta = 3 \times 21$;

» (β') : $a = 14$, $b = -(7+4)\sqrt{\ }$, $c = 28$, $\Delta = 7$(ou 3×21).

Nous allons étudier à présent les corps $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$, $P \equiv 3 (\mathrm{mod.}\ 4)$.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-3})$

Dans le corps $\mathcal{C}(\sqrt{-3})$, comme dans le groupe de Picard, il y a d'autres unités que 1 et -1. Les nombres entiers du corps étant tous les nombres $(a + b\omega)$, où

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2},$$

ces autres unités sont

$$\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad \text{soit} \quad \pm\omega \text{ et } \pm\omega_0.$$

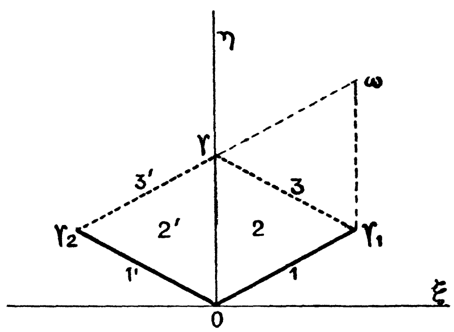


Fig 9.

La méthode du rayonnement, appliquée au point o et aux points voisins ± 1, $\pm\omega$, $\pm\omega_0$, donne un hexagone régulier de centre o que nous devons encore partager en trois, la verticale oζ étant axe d'une substitution elliptique d'ordre trois. Finalement nous prendrons pour prisme vertical limitant le domaine fondamental le prisme $o\gamma_1\gamma\gamma_2$ fermé vers le bas par la sphère de centre o et de rayon unité

SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES

$S(z) = \omega^2 z \quad \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}$ ell d'ordre trois, faces verticales $1 - 1'$;

$U(z) = -\frac{1}{z} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ell d'ordre deux, faces sphériques $2 - 2'$;

$V(z) = \omega^2 z + \omega \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}$ ell. d'ordre trois, faces verticales $3 - 3'$.

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE DEUX

$o\gamma$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$o\gamma_1$ » » » $\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$,

$o\gamma_2$ » » » $\begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$

ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE TROIS

$\gamma\gamma_1$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & \omega_0 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$,

$\gamma\gamma_2$ » » » $\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$

VERTICALES AXES DE SUBSTITUTIONS D'ORDRE TROIS

La substitution elliptique d'ordre trois

$$\begin{pmatrix} \omega & \beta \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}$$

où β est un entier quelconque du corps, conserve la forme

$$(\omega_0 - \omega)\, xy - \beta y^2$$

et a pour axe la verticale dont le pied dans le plan $\zeta = 0$ a pour affixe

$$\frac{x}{y} = \frac{\beta}{\omega_0 - \omega} = \frac{\beta\sqrt{\ }}{3}$$

c'est-à-dire un point quelconque du réseau $o\gamma\gamma_1$

SOMMETS POLYÉDRIQUES

Sommet diédrique o, forme (o) $xx_0 + yy_0$, $\Delta = 1$ (ou 3×3).

Sommet tétraédrique γ, forme (γ) $3xx_0 - \sqrt{\ }\, x_0 y + \sqrt{\ }\, xy_0 + 3yy_0$, $\Delta = 6$.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-7})$

Pas de *sommets singuliers*

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1 $\lambda = 0, \quad \nu = 1, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ du type E_2,

2 $\lambda = \omega, \quad \nu = 1, \quad \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & \omega_0 \end{pmatrix}$ » E_3

ARÊTES ELLIPTIQUES

Ordre deux $\beta\beta_1$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

» » βa » » » $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\omega \end{pmatrix}$

Ordre trois βn » » » $\begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & -\omega \end{pmatrix}$.

SOMMETS POLYÉDRIQUES

Sommet diédrique β

Forme d'Hermite (β) $7xx_0 - 2(\omega - \omega_0)x_0y + 2(\omega - \omega_0)xy_0 + 7yy_0, \quad \Delta = 21$.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-11})$

Pas de *sommets singuliers*.

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1 $\lambda = 0, \quad \nu = 1, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ du type E_2,

2. $\lambda = \omega, \quad \nu = 1, \quad \begin{pmatrix} \omega & 2 \\ 1 & \omega_0 \end{pmatrix}$ » E_3.

ARÊTES ELLIPTIQUES

Ordre deux $\gamma\gamma_1$ axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Ordre trois γn » » » $\begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & \omega_0 \end{pmatrix}$,

» » γp » » » $\begin{pmatrix} 2 & -\omega \\ \omega_0 & -1 \end{pmatrix}$.

SOMMETS POLYÉDRIQUES

Sommet tétraédrique γ.

Forme d'Hermite (γ) : $a = c = 11$, $b = -3(\omega - \omega_0)$, $\Delta = 22$.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-15})$

Sommet singulier (1[er] quadrant). $\Omega = \dfrac{\omega}{2}$.

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1. $\lambda = 0$, $\nu = 1$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ du type E_2,
2. $\lambda = \omega$, $\nu = 1$, $\begin{pmatrix} \omega & 3 \\ 1 & \omega_0 \end{pmatrix}$ » E_2,
3. $\lambda = +4$, $\nu = 1 - 2\omega$, $\begin{pmatrix} 4 & -1 + 2\omega \\ 1 - 2\omega & 4 \end{pmatrix}$ » H.

ARÊTES ELLIPTIQUES

Ordre deux aa_1 axe de la substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Ordre trois np » » » $\begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}$.

Pas de *sommets polyédriques*.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-19})$

Pas de *sommets singuliers*.

FACES ET SUBSTITUTIONS GÉNÉRATRICES CORRESPONDANTES

1 $\lambda = 0$, $\quad \nu = 1$, $\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ du type E_2,

2 $\lambda = \omega$, $\quad \nu = 1$, $\quad \begin{pmatrix} \omega & 4 \\ 1 & \omega_0 \end{pmatrix}$ » E_3,

3. $\lambda = \omega$, $\quad \nu = 2$, $\quad \begin{pmatrix} \omega & 2 \\ 2 & \omega_0 \end{pmatrix}$ » E_3.

ARÊTES ELLIPTIQUES

Ordre deux	$\beta\beta_1$	axe de la substitution	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
» »	βa	» » »	$\begin{pmatrix} 2 & -\omega \\ \omega_0 & -2 \end{pmatrix}$,
» »	γb	» » »	$\begin{pmatrix} -3 & -2\omega \\ \omega_0 & 3 \end{pmatrix}$,
Ordre trois	γn	» » »	$\begin{pmatrix} \omega & 4 \\ 1 & \omega_0 \end{pmatrix}$,
» »	$\gamma\beta$	» » »	$\begin{pmatrix} \omega & 2 \\ 2 & \omega_0 \end{pmatrix}$

SOMMETS POLYÉDRIQUES

Sommet diédrique β $\quad a = c = 19, \quad b = -4(\omega - \omega_0), \quad \Delta = 3 \times 19.$

Sommet tétraédrique γ $\quad a = 10, \quad b = -6(\omega - \omega_0), \quad c = 38, \quad \Delta = 2 \times 19.$

Tableau I.

SOMMETS SINGULIERS, $P \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$.

P	Formes réduites de déterminant — P	Sommets singuliers
1	1, 0, 1	∞
2	1, 0, 2	∞
5	1, 0, 5	∞
	2, 1, 3	$\frac{1+\sqrt{\ }}{2}$
6	1, 0, 6	∞
	2, 0, 3	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$
10	1, 0, 17	∞
	2, 0, 5	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$
13	1, 0, 13	∞
	2, 1, 7	$\frac{1+\sqrt{\ }}{2}$
14	1, 0, 14	∞
	2, 0, 7	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$
	3, 1, 5	$\frac{1+\sqrt{\ }}{3}$
	3, —1, 5	»
17	1, 0, 17	∞
	2, 1, 9	$\frac{1+\sqrt{\ }}{2}$
	3, 1, 6	$\frac{1+\sqrt{\ }}{3}$
	3, —1, 6	»
21	1, 0, 21	∞
	3, 0, 7	$\frac{\sqrt{\ }}{3}$
	2, 1, 11	$\frac{1+\sqrt{\ }}{2}$
	5, 2, 5	$\frac{2+\sqrt{\ }}{5}$, $\frac{1+2\sqrt{\ }}{5}$

Tableau II.

SOMMETS SINGULIERS, $P \equiv 3 \pmod{4}$.

P	Formes réduites de déterminant — P		Sommets singuliers	
	propres	impropres	Anneaux	Corps
3	1, 0, 3		∞	—
		2, 1, 2	$\frac{1+\sqrt{\ }}{2}$	∞
7	1, 0, 7		∞	—
		2, 1, 4	$\frac{1+\sqrt{\ }}{2}$	∞
11	1, 0, 11		∞	—
	3, 1, 4		$\frac{1+\sqrt{\ }}{3}$	—
	3, —1, 4		»	—
		2, 1, 6	$\frac{1+\sqrt{\ }}{2}$	∞
15	1, 0, 15		∞	—
	3, 0, 5		$\frac{\sqrt{\ }}{3}$	—
		2, 1, 8	$\frac{1+\sqrt{\ }}{2}$	∞
		4, 1, 4	$\frac{1+\sqrt{\ }}{4}$	$\frac{\omega}{2}$
19	1, 0, 19		∞	—
	4, 1, 5		$\frac{1+\sqrt{\ }}{4}$	—
	4, —1, 5		»	—
		2, 1, 10	$\frac{1+\sqrt{\ }}{2}$	∞

Tableau III.

ÉQUATIONS DE PELL

P	$t^2 - Pu^2 = 1$	$t^2 - Pu^2 = 4$	$t^2 - 3Pu^2 = 1$	$t^2 - Pu^2 = -1$
2	3, 2	—	5, 2	7, 5
3	2, 1	—	—	—
5	9, 4	3, 1	4, 1	2, 1
6	5, 2	—	—	—
7	8, 3	—	55, 12	—
10	19, 6	—	11, 2	3, 1
11	10, 3	—	23, 4	—
13	649, 180	11, 3	25, 4	18, 5
14	15, 4	—	13, 2	—
15	4, 1	—	—	—
17	33, 8	—	50, 7	4, 1
19	170, 39	—	151, 20	—
21	55, 12	5, 1	—	—

— Les nombres qui figurent dans les colonnes 2, 4 et 5 sont les plus petits entiers positifs satisfaisant à l'équation considérée

— Les nombres de la colonne 3 sont les plus petits entiers positifs *impairs* satisfaisant à l'équation

Tableau IV.

SOMMETS POLYÉDRIQUES
ET DISCRIMINANTS DES FORMES CORRESPONDANTES

	P	SOMMETS trirectangles $\Delta = P$	SOMMETS diédriques $\Delta = 3P$	SOMMETS tétraédriques $\Delta = 2P$
$P \equiv 1$	1	—	3	2
	5	5	—	—
	13	13	39	—
	17	17	—	34
	21	—	7 (ou 3 × 21)	—
$P \equiv 2$	2	2	—	1 (ou 2 × 2)
	6	—	—	3 (ou 2 × 6)
	10	10	—	—
	14	—	—	—
$P \equiv 3$ (*corps*)	3	—	1 (ou 3 × 3)	—
	7	—	21	—
	11	—	—	22
	15	—	—	—
	19	—	57	38
$P \equiv 3$ (*anneaux*)	3	—	1 (ou 3 × 3)	—
	7	—	21	—
	11	—	—	—
	15	—	—	—
	19	—	57	—

Tableaux V et VI

Dans ces tableaux P est un entier sans facteurs carrés et admettant au plus deux facteurs premiers impairs, p et p', $p < p'$. On a posé, m étant le nombre que l'on cherche à représenter par une forme réduite de déterminant P ou 3P,

$$\alpha = \left(\frac{m}{p}\right), \qquad \beta = \left(\frac{m}{p'}\right), \qquad \text{symboles de Legendre,}$$

$$\delta = \left(\frac{-1}{m}\right) = \begin{cases} +1 \text{ si } m \equiv 1 & (\text{mod. } 4), \\ -1 \text{ si } m \equiv 3 & (\text{mod. } 4); \end{cases}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{2}{m}\right) \qquad \begin{cases} +1 \text{ si } m \equiv 1 \text{ ou } 7 & (\text{mod. } 8), \\ -1 \text{ si } m \equiv 3 \text{ ou } 5 & (\text{mod. } 8); \end{cases}$$

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{-2}{m}\right) \qquad \begin{cases} +1 \text{ si } m \equiv 1 \text{ ou } 3 & (\text{mod. } 8), \\ -1 \text{ si } m \equiv 5 \text{ ou } 7 & (\text{mod. } 8). \end{cases}$$

ρ et ρ' sont les coefficients introduits au paragraphe 98.

Tableau V.

CARACTERES ET COEFFICIENTS
POUR LES ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE DEUX

P	Formes réduites de déterminant + P	α	β	ρ
2	1, 0, −2			1
3	1, 0, −3 −1, 0, 3	+ −		$\frac{1+\alpha}{2}$
5	1, 0, −5 2, 1, −2	+ +		1
6	1, 0, −6 −1, 0, 6	+ −		$\frac{1+\alpha}{2}$
7	1, 0, −7 −1, 0, 7	+ −		$\frac{1+\alpha}{2}$
10	1, 0, −10 2, 0, −5	+ −		$\frac{1+\alpha}{2}$
11	1, 0, −11 −1, 0, 11	+ −		$\frac{1+\alpha}{2}$
13	1, 0, −13 2, 1, −6	+ −		1
14	1, 0, −14 −1, 0, 14	+ −		$\frac{1+\alpha}{2}$
15	1, 0, −15 −1, 0, 15 2, 1, −7 −2, 1, 7	+ − − +	+ + − −	$\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{4}$
17	1, 0, −17 2, 1, −8	+ +		1
19	1, 0, −19 −1, 0, 19	+ −		$\frac{1+\alpha}{2}$
21	1, 0, −21 −1, 0, 21	+ −	+ −	$\frac{1+\alpha}{2}$

Tableau VI.

CARACTÈRES ET COEFFICIENTS POUR LES ARÊTES ELLIPTIQUES D'ORDRE TROIS

P	Formes réduites de déterminant 3P	Classe à laquelle appartient la forme $3x^2 - Py^2$	α	δ	ε	$\delta\varepsilon$	ρ'
1	1, 0, — 3		+	+			
	—1, 0, 3	3, 0, — 1	—	—			$\frac{1-\alpha}{2}$
2	1, 0, — 6	3, 0, — 2				+	$\frac{1+\delta\varepsilon}{2}$
	—1, 0, 6					—	
5	1, 0, —15		+	+			
	—1, 0, 15		+	—			
	2, 1, — 7		—	+			
	—2, 1, 7	3, 0, — 5	—	—			$\frac{(1-\alpha)(1-\delta)}{4}$
7	1, 0, —21		+				
	—1, 0, 21	3, 0, — 7	—				$\frac{1-\alpha}{2}$
10	1, 0, —30		+			+	
	—1, 0, 30		+			—	
	2, 0, —15	3, 0, —10	—			+	$\frac{(1-\alpha)(1+\delta\varepsilon)}{4}$
	—2, 0, —15		—			—	
11	1, 0, —33	3, 0, —11	+				$\frac{1+\alpha}{2}$
	—1, 0, 33		—				
	2, 1, —16		+				
	—2, 1, 16		—				
13	1, 0, 39		+	+			
	—1, 0, 39	3, 0, —13	+	—			$\frac{(1+\alpha)(1-\delta)}{4}$
	2, 1, —19		—	+			
	—2, 1, 19		—	—			
14	1, 0, —42		+		+		
	—1, 0, 42	3, 0, —14	—		+		$\frac{(1-\alpha)(1+\varepsilon)}{4}$
	2, 0, —21		+		—		
	—2, 0, 21		—		—		
17	1, 0, —51		+	+			
	—1, 0, 51		+	—			
	3, 0, —17	3, 0, —17	—	—			$\frac{(1-\alpha)(1-\delta)}{4}$
	—3, 0, 17		—	+			
19	1, 0, —57		+				
	—1, 0, 57	3, 0, —19	—				$\frac{1-\alpha}{2}$
	2, 1, —28		+				
	—2, 1, 28		—				

Tableau VII.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$, $P \equiv 1 \pmod{4}$.

ÉNUMÉRATION DES FORMES RÉDUITES, PAR FAMILLES DE CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

P	Cycles composant une famille	Composition de la période de segments				ρ ou ρ'	Nombre de réduites situées sur les arêtes de la famille		
		s	t	u	$\frac{2}{stu}$		n_4 $\Sigma\left(\frac{P}{d}\right)$	n'_4 $\Sigma\left(\frac{P}{d}\right)$	n'_6 $\Sigma\left(\frac{3P}{d}\right)$
1	1	pas de période.				1	exc.	exc.	—
	2, 3					»	»	»	—
	4					»	»	»	—
	5, 6					»	»	»	—
	1′, 2′	1	2	1	1	$\frac{1-\alpha}{2}$	—	—	ρ'
5	1	1	2	1	1	1	f	f'	—
	2, 3	1	2	1	1	»	f	f'	—
	4, 5	1	2	3	1/3	»	$\frac{1}{3}$	—	—
	1′	1	1	1	2	$\frac{(1-\alpha)(1-\delta)}{4}$	—	—	$2\rho'$
13	1, 2, 3	1	2	1	1	1	f	f'	—
	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	1	2	1	1	»	f	f'	—
	12, 13	1	2	3	1/3	»	$\frac{1}{3}$	—	—
	1′	1	2	1	1	$\frac{(1+\alpha)(1-\delta)}{4}$	—	—	ρ'
	2′, 3′, 4′, 5′,	1	2	1	1	»	—	—	ρ'
17	1	1	2	1	1	1	f	f'	—
	2, 3, 4, 5	1	2	1	1	»	f	f'	—
	6, 7	1	2	1	1	»	f	f'	—
	8, 9	1	2	1	1	»	f	f'	—
	1′, 2′, 3′, 4′, 5′	1	1	1	2	$\frac{(1-\alpha)(1-\delta)}{4}$	—	—	$2\rho'$
21	1, 2, 3	1	1	1	2	$\frac{1+\alpha}{2}$	$2f\rho$	$2f'\rho$	—
	4, 5, 6, 7, 8, 9	1	1	1	2	»	$2f\rho$	$2f'\rho$	—
	10, 11	1	1	3	2/3	»	$\frac{2}{3}\rho$	—	—

Tableau VIII.

CORPS $\mathcal{C}(\sqrt{-P})$, $P \equiv 2 \pmod{4}$.

ÉNUMÉRATION DES FORMES RÉDUITES, PAR FAMILLES DE CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

P	Cycles composant une famille	Composition de la période de segments				ρ ou ρ'	Nombre de réduites situées sur les arêtes de la famille		
		s	t	u	$\frac{2}{stu}$		$\frac{n_4}{\Sigma\left(\frac{P}{d}\right)}$	$\frac{n'_4}{\Sigma\left(\frac{P}{d}\right)}$	$\frac{n'_8}{\Sigma\left(\frac{3P}{d}\right)}$
2	1	1	2	1	1	1	ρ	—	—
	2	2	2	1	1/2	»	—	$\frac{1}{2}\rho$	—
	1′	2	1	1	1	$\frac{1+\delta\varepsilon}{2}$	—	—	ρ'
6	1	1	1	1	2	$\frac{1+\alpha}{2}$	2ρ	—	—
	2, 3	1	2	1	1	»	—	ρ	—
10	1	1	2	1	1	$\frac{1+\alpha}{2}$	ρ	—	—
	2, 3	1	2	1	1	»	ρ	—	—
	4, 5, 6, 7	1	2	1	1	»	—	ρ	—
	1′, 2′, 3′	1	1	1	2	$\frac{(1-\alpha)(1+\delta\varepsilon)}{4}$	—	—	$2\rho'$
14	1, 2, 3	1	1	1	2	$\frac{1+\alpha}{2}$	2ρ	—	—
	4, 5	2	1	1	1	»	—	ρ	—
	1′, 2′, 3′	1	1	1	2	$\frac{(1-\alpha)(1+\varepsilon)}{4}$	—	—	$2\rho'$

Tableau IX.

ANNEAUX $\mathcal{A}(\sqrt{-\mathrm{P}})$, $\mathrm{P} \equiv 3 \pmod{4}$.

ÉNUMÉRATION DES FORMES RÉDUITES, PAR FAMILLES DE CYCLES D'ARÊTES ELLIPTIQUES

P	Cycles composant une famille	Composition de la période de segments				ρ ou ρ'	Nombre de réduites situées sur les arêtes de la famille		
		s	t	u	$\frac{2}{stu}$		$\frac{n_4}{\Sigma\left(\frac{\mathrm{P}}{d}\right)}$	$\frac{n'_4}{\Sigma\left(\frac{\mathrm{P}}{d}\right)}$	$\frac{n'_6}{\Sigma\left(\frac{3\mathrm{P}}{d}\right)}$
3	1	1	1	1	2	$\frac{1+\alpha}{2}$	ρ	ρ	—
	1'	pas de période.				—	—	—	exc.
	2'					—	—	—	»
7	1, 2, 3	1	1	1	2	$\frac{1+\alpha}{2}$	ρ	ρ	—
	1', 2', 3'	1	2	1	1	$\frac{1-\alpha}{2}$	—	—	ρ'
11	1, 2, 3	1	1	1	2	$\frac{1+\alpha}{2}$	ρ	ρ	—
	1'	2	1	1	1	$\frac{1+\alpha}{2}$	—	—	ρ'
15	1	1	1	1	2	$\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{4}$	ρ	ρ	—
	2, 3	1	1	1	2	»	ρ	ρ	—
19	1, 2, 3, 4, 5	1	1	1	2	$\frac{1+\alpha}{2}$	ρ	ρ	—
	1', 2', 3'	1	2	1	1	$\frac{1-\alpha}{2}$	—	—	ρ'

Tableau X (*final*).

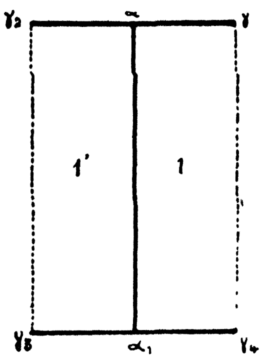
NOMBRES DE CLASSES DE FORMES D'HERMITE
DE DISCRIMINANT DONNÉ ADMETTANT 4 OU 6 AUTOMORPHIES

	P	$\dfrac{\mathfrak{N}_4}{\rho\Sigma\left(\frac{P}{d}\right)}$	$\dfrac{\mathfrak{N}'_4}{\rho\Sigma\left(\frac{P}{d}\right)}$	$\dfrac{\mathfrak{N}'_6}{\rho'\Sigma\left(\frac{3P}{d}\right)}$
$P \equiv 1$ (mod. 4) (*corps*)	1	exc.	exc.	1
	5	$\frac{1}{3} + 2f$	$2f'$	2
	13	$\frac{1}{3} + 2f$	$2f'$	2
	17	$4f$	$4f'$	2
	21	$\frac{2}{3} + 4f$	$4f'$	—
	...	...	...	...
$P \equiv 2$ (mod. 4) (*corps*)	2	1	1/2	1
	6	2	1	—
	10	2	1	2
	14	2	1	2
	...	...	...	...
$P \equiv 3$ (mod. 4) (*anneaux*)	3	1	1	exc.
	7	1	1	1
	11	1	1	1
	15	2	2	—
	19	1	1	1
		...	...	...

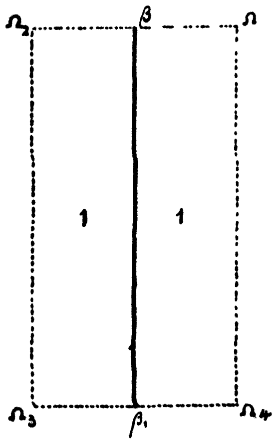
Cas exceptionnels : $P = 1$, $\mathfrak{N}_4 = \dfrac{2+\delta}{2}\,T(\Delta)$,

$$\mathfrak{N}'_4 = \frac{1-\delta}{2}\,T(\Delta),$$

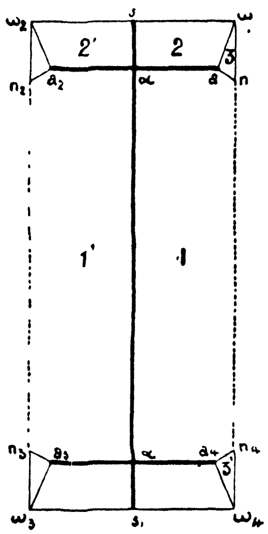
$P = 3$, $\mathfrak{N}'_6 = \dfrac{1}{2}\,T(\Delta)$.



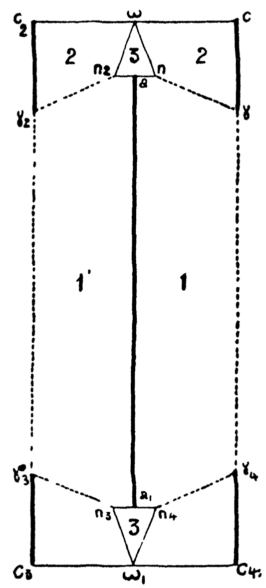
P = 2



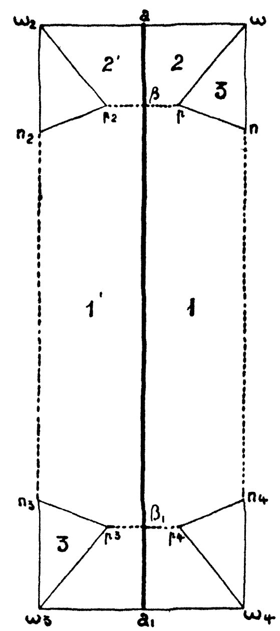
P = 3



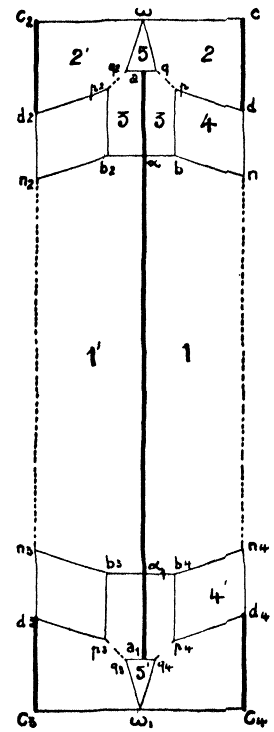
P = 5



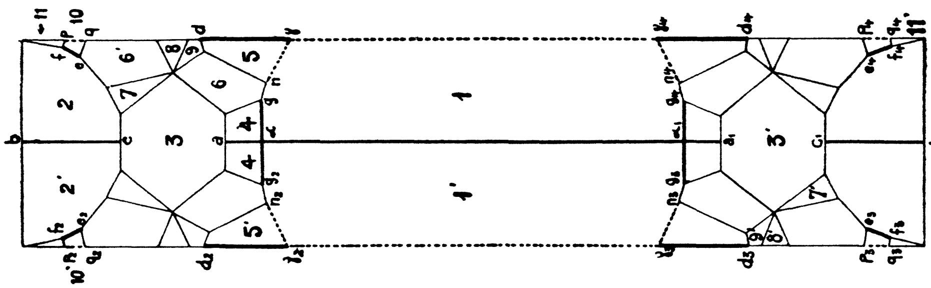
P = 6



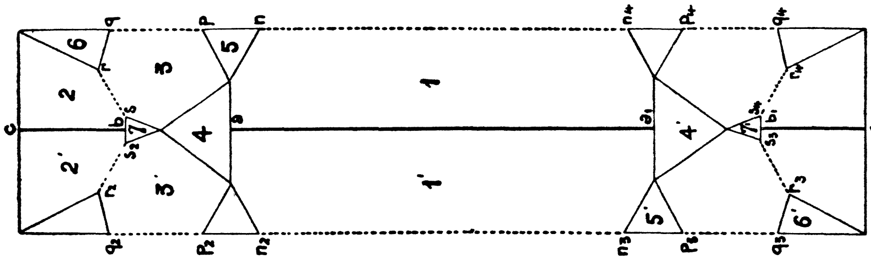
P = 7



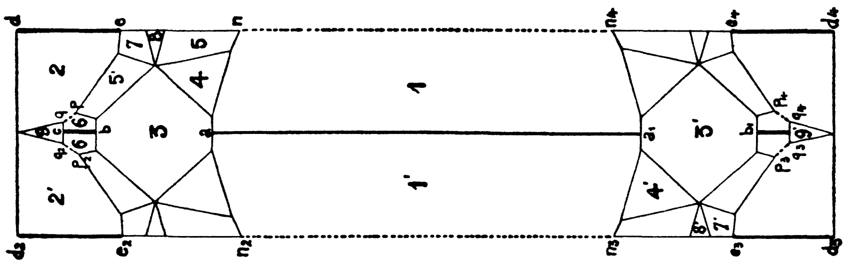
P = 10



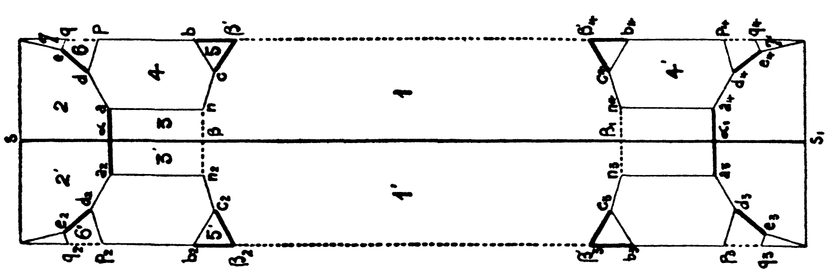
P = 17



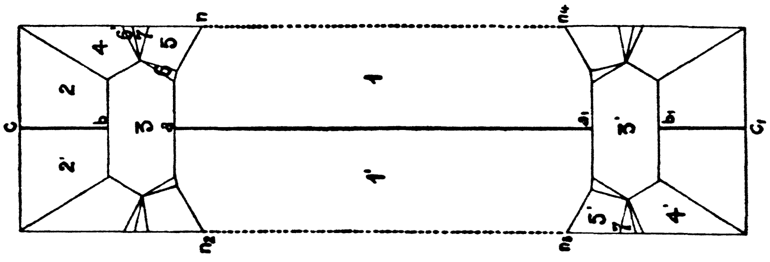
P = 15



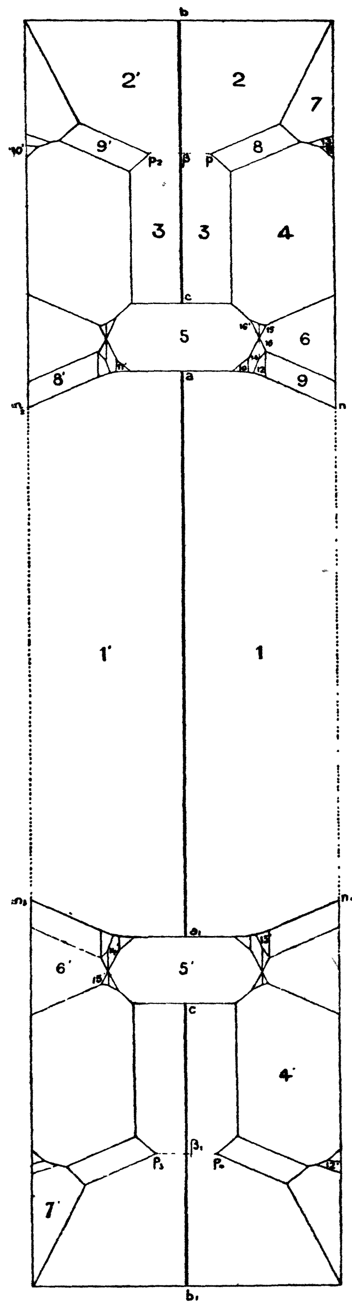
P = 14



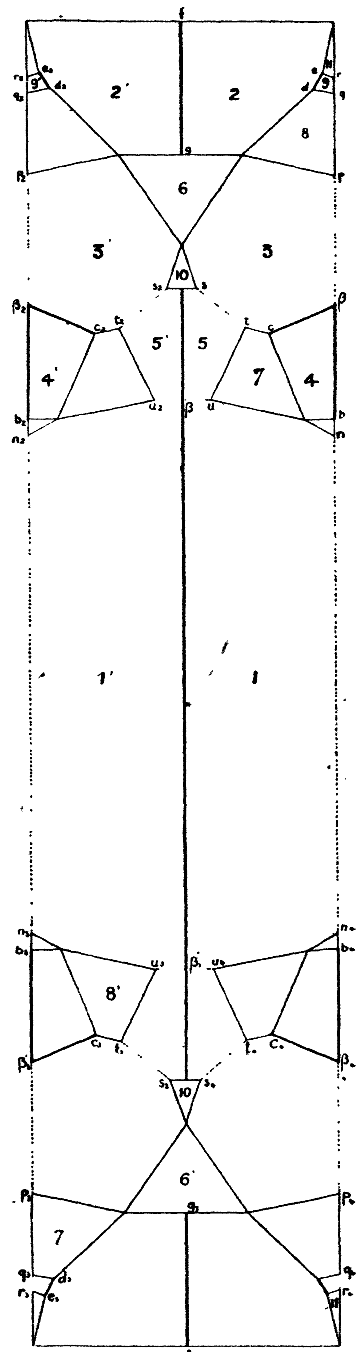
P = 13



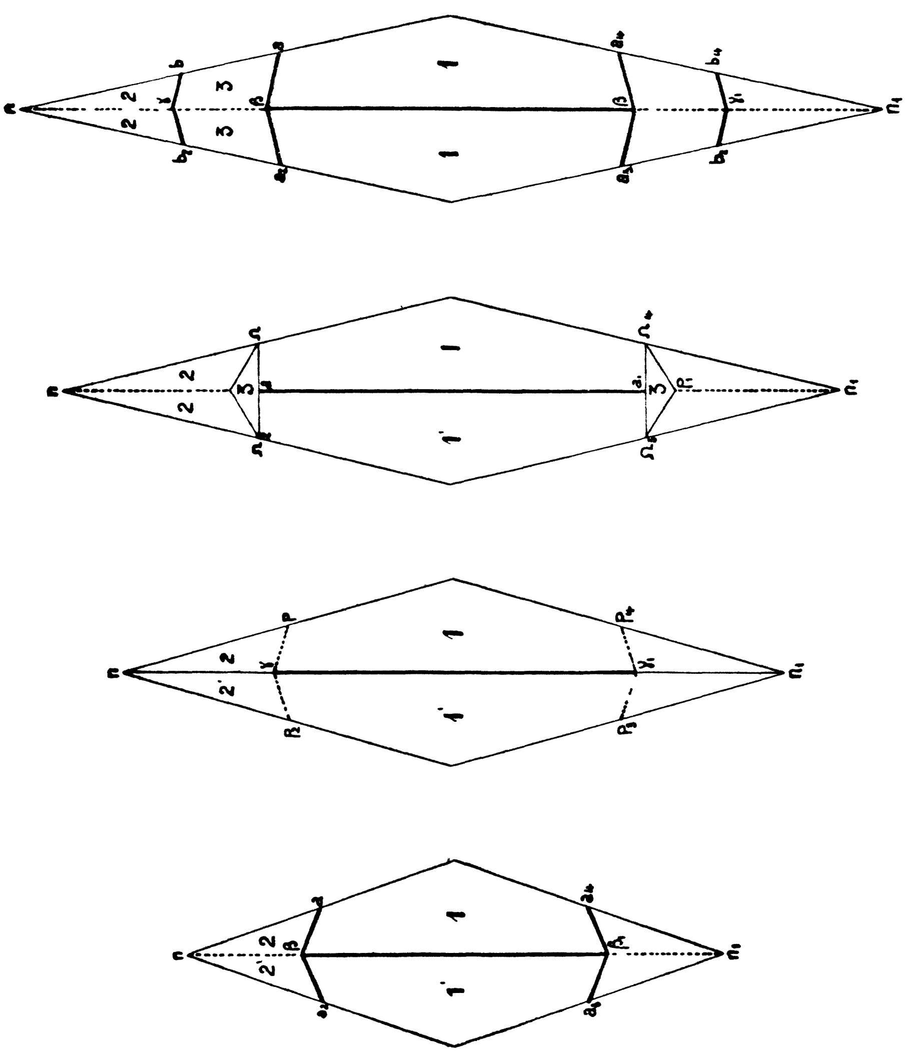
P = 11



P = 19



P = 21



P = 7.

P = 11

P = 15

P = 19

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

Géométrie

DEUXIÈME PARTIE

Arithmétique