THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

CONST. PARVULESCO

Sur les amas globulaires d'étoiles et leurs relations dans l'espace

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1925

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1925__59__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

N° D'ORDRE :
1876.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Const. PARVULESCO

1re **THÈSE.** — SUR LES AMAS GLOBULAIRES D'ÉTOILES ET LEURS RELATIONS DANS L'ESPACE.

2e **THÈSE.** — LES INVARIANTS INTÉGRAUX.

Soutenues le décembre 1925, devant la Commission d'Examen.

MM. ANDOYER, *Président.*
CARTAN, FABRY, } *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1925

ENS BM
M026535

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

	MM.	
Doyen	M. MOLLIARD Professeur	Physiologie végétale.
Doyen honoraire	P. APPELL.	
Professeurs honoraires.	P. PUISEUX, BOUSSINESQ, JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH	
Professeurs	ÉMILE PICARD	Analyse supérieure et Algèbre sup.
	KŒNIGS	Mécanique phys. et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	JANET	Electrotechnique générale.
	WALLERANT	Mineralogie.
	ANDOYER	Astronomie
	PAINLEVÉ	Mecanique analytique et céleste.
	HAUG	Geologie.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique generale et radioactivité.
	CAULLERY	Zool. (Evolution des etres organisés).
	C. CHABRIE	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minerale.
	EMILE BOREL	Calcul des probab. et Phys. math.
	MARCHIS	Aviation.
	JEAN PERRIN	Chimie physique
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Géometrie supérieure.
	LAPICQUE	Physiologie
	VESSIOT	Theorie des groupes et calcul des var.
	COTTON	Physique générale.
	DRACH	Applicat. de l'Analyse à la Géométrie.
	C. FABRY	Physique.
	CHARLES PEREZ	Zoologie.
	LEDUC	Physique theorique et Phys. céleste.
	LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et Géol. région.
	LESPIEAU	Theories chimiques.
	RABAUD	Biologie expérimentale.
	PORTIER	Physiologie comparee.
	BLAISE	Chimie organique.
	P. A. DANGEARD	Botanique
	MAURAIN	Physique du globe.
	MONTEL	Mecanique rationnelle.
	WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	DUBOSCQ	Biologie maritime
	TIFFENEAU	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JULIA	Mathematiques generales.
	N	Géographie physique.
	N	Chimie generale.
	HEROUARD	Zoologie.
	REMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	SAGNAC	Physique theorique et Phys céleste.
	PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	AUGER	Chimie analytique.
	M. GUICHARD	Chimie minérale.
	GUILLET	Physique.
	MAUGUIN	Mineralogie.
	BLARINGHEM	Botanique.
	MICHEL LEVY	Pétrographie.
Secrétaire	D. TOMBECK.	

77232 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

AUX

TRAVAILLEURS DE LA PENSÉE

POST-SCRIPTUM

Je suis heureux, en terminant ce travail, d'avoir l'occasion d'exprimer toute ma reconnaissance à MM. les Professeurs Baillaud, Andoyer et Fabry pour leur bienveillante attention dans ce qui fut l'objet de mes préoccupations.

Je remercie également M. le Dr Aitken, Directeur de l'Observatoire de Lick, d'avoir bien voulu me confier des clichés d'amas globulaires pris avec le Crossley réflecteur, dont quelques-uns ont pu être utilisés dans la présente étude.

Mme Dorothea-Klumpke-Roberts de ses encouragements accordés pour « l'avancement du problème des amas et des nébuleuses ».

M. J. Baillaud pour ses conseils qui me furent si précieux pour la rédaction de ce travail.

Enfin, je remercie tous les membres de l'Observatoire pour leur bon accueil pendant mon stage à l'Observatoire ainsi que la SociétéAstronomique de France qui a bien voulu me confier les vingt-deux clichés qui illustrent ce travail.

C. P.

PREMIÈRE THÈSE

SUR LES

AMAS GLOBULAIRES D'ÉTOILES

ET LEURS

RELATIONS DANS L'ESPACE

INTRODUCTION.

Il y a dans l'Univers une centaine de nodosités, les amas globulaires, qui ont soulevé dernièrement des problèmes du plus haut intérêt.

Quelques-uns de ces amas furent connus des Grecs; la plupart furent découverts par Messier, Herschel, Roberts, etc., et c'est seulement de nos jours qu'ils ont fait l'objet d'études approfondies, de la part d'Eddington, Jeans, Charlier, von Zeipel, Bailey, Shapley, etc. Mais, ils constituent encore un chapitre nouveau de la Mécanique céleste, moins étudié, par exemple, que le système planétaire, auquel les dernières méthodes de l'analyse, ainsi que tous les perfectionnements de la science d'observation, ont été appliqués par des générations d'astronomes.

J'avais résolu d'entreprendre l'étude comparative des lois de la distribution des masses dans les divers amas globulaires, d'après les clichés obtenus par les instruments géants de l'Amérique et d'obtenir ainsi une base certaine pour l'étude de la dynamique des amas globulaires et spécialement pour l'étude des formes d'orbites possibles dans ces systèmes.

Mais, comme dans tous les sujets nouveaux, d'autres problèmes se sont présentés aussi et imposés à mes recherches.

De l'ensemble des observations nous avons trouvé des indications qui permettent de conclure (Chap. I), contrairement aux idées de Bohlin, Charlier, Shapley, Lundmark, etc., que ces objets ont une position extragalactique et qu'ils sont étrangers à notre système.

En étudiant la distribution des étoiles dans 3 amas globulaires et dans une boule de gaz théorique en équilibre adiabatique, nous avons trouvé une famille de courbes intégrales de l'equation différentielle, à laquelle satisfait cette densité, et qui constitue une base nouvelle et solide pour l'etude analytique des conditions dynamiques, qui régissent les mouvements à l'intérieur de ces nodosités, les conditions d'équilibre et leur évolution.

Des problèmes posés par la distribution dans les amas, des étoiles de divers types spectraux, ou de diverses grandeurs, par la présence des variables céphéides et des géantes a leur intérieur, par la loi des luminosités, de densités et par d'autres caractéristiques des amas, il résulte que ces nodosites stellaires constituent un point de convergence de tous les grands problèmes cosmiques.

Et comme elles sont susceptibles d'être etudiees par tous les instruments d'observation, ainsi qu'avec l'Analyse mathématique, grâce à leur structure symétrique, elles se sont assurées une place de première importance dans l'evolution future de la Science.

Aussi, constituent-elles une excellente pierre de touche pour les solutions de beaucoup de problèmes de l'Astronomie moderne. Par exemple, l'identité qui existe entre les étoiles constituant la Voie Lactée et les amas extragalactiques, dont quelques-uns sont à des distances d'un million d'années, nous indique que cet intervalle de temps est négligeable par rapport à la vie moyenne des étoiles, ce qui est contraire aux idées que l'on se faisait sur l'âge des étoiles et que l'on doit modifier de ce fait.

L'accumulation des variables céphéides et des étoiles géantes, spécialement dans ces régions denses de l'Univers, suggère l'idée d'une corrélation entre le nombre des céphéides ou des géantes et le degré de concentration des amas.

En d'autres termes, la concentration joue un rôle important

dans la transformation des étoiles simples en géantes de petite densité, ou en variables pourvues des marées et de pulsations.

Dans le Chapitre V, nous indiquons une méthode qui permet de faire correspondre au degré de concentration d'un amas une valeur numérique, et ainsi de pouvoir étudier cette corrélation. Mais les observations sont encore insuffisantes, par leur manque d'homogénéité, pour pouvoir se prononcer définitivement.

Dans les amas, spécialement ceux globulaires, l'effet de l'équipartition de l'énergie se manifeste beaucoup plus que dans les systèmes irréguliers tels que les Nuages de Magellan, ou la Voie Lactée où son effet commence à peine à se ressentir.

La distribution des étoiles de grandes masses vers le centre et de celles de petites masses jusqu'aux périphéries, distribution nécessaire pour l'équilibre et réalisée dans les amas globulaires, comme nous les montrent les observations, est en effet son œuvre.

Grâce au fait que sur les orbites circulaires, ou elliptiques, les mouvements des étoiles sont plus gênés par les chocs que dans les mouvements radiaux (Chap. III), il s'établit avec le temps, dans les amas globulaires, un ordre d'une autre nature, qui constitue une nouvelle condition nécessaire de l'équilibre des amas. Les orbites s'aplatissent et les étoiles tendent à acquérir toutes des mouvements radiaux, ou elliptiques très aplatis, seules formes d'orbites qui donnent une distribution stable, conservant la distribution des masses et des vitesses, et compatible avec le principe de l'équipartition de l'energie.

D'ailleurs, les mouvements radiaux ne peuvent jamais manquer complètement dans aucune phase de l'évolution d'un amas stellaire, sans quoi le système serait creux au centre, ce qui est contraire à toutes les observations.

Pendant toutes les transformations qu'il subit, avant d'atteindre son état d'equilibre stable, l'amas effectue un certain travail mécanique. Dans l'etat d'equilibre, et seulement alors, le travail mécanique total de l'amas est nul.

Il réapparaît dès qu'on perturbe cet état d'équilibre (Chap. IV).

Ni l'observation, ni la théorie (Chap. VIII), ne laissent de doute que les amas dits « globulaires » ont un moment angulaire différent de zéro et qu'ils sont déjà fortement aplatis. Cela nous a

porté à étudier la relation entre les lois de densités dans le plan et dans l'espace de ces objets et d'étendre la méthode de von Zeipel aux amas ellipsoïdaux (§ 17).

Les parallaxes des amas, leurs relations avec la Voie Lactée, leurs vitesses, dimensions, constitution, mouvements observés, distribution dans l'espace, etc., nous montrent qu'il existe une certaine parenté entre les nébuleuses spirales, systèmes extragalactiques, et les autres systèmes extragalactiques, purement stellaires réguliers ou irréguliers Dans cet ensemble, les globulaires ne seraient qu'une phase, d'une classe en quelque sorte spéciale, due soit à un moment de rotation d'une valeur plus petite, soit à un milieu intérieur moins résistant que dans les autres systèmes.

Il semble que la liaison entre ces classes de systèmes est faite grâce à une résistance aux mouvements des étoiles, à l'intérieur seulement, sans quoi leurs moments de rotation seraient nuls.

Cette résistance pourrait être due, soit à la présence dans les amas d'une matière obscure, telle qu'on observe aujourd'hui dans les spirales, ainsi que dans la Voie Lactée, dans des proportions inattendues (Curtiss et Hagen), soit aussi à d'autres causes, encore inconnues, mais dont l'effet serait le même, d'opposer une résistance aux mouvements, de diminuer ainsi les amplitudes des oscillations et d'agglomérer à la longue les étoiles d'un pareil système isolé au centre de gravité (Chap. II).

Nous admettons que le corps central qui résulte de cette concentration, dont la masse, la densité et surtout la vitesse angulaire sont excessivement grandes, donne naissance à une spirale, un système de nature stellaire dans ses parties périphériques et aussi nébulaire dans la région centrale.

Cette évolution des systèmes isolés, que nous venons d'esquisser, nous est suggérée d'abord par les mouvements observés dans les spirales (van Maanen et Lundmark) et qui montrent que la matière s'échappe du noyau central le long de deux bras, tendant à l'épuisement du noyau avec le temps, puis par la grande masse des systèmes spiraux (Hubble), ainsi que par les recherches théoriques (Schwarzschild, Eddington, etc.), qui démontrent qu'une masse 5 fois plus grande que celle du Soleil ne pourrait pas subsister sans éclater. Enfin, on ne pourrait pas expliquer

autrement aujourd'hui la provenance d'un si grand nombre de noyaux, aussi massifs que ceux des spirales, qu'en admettant préalablement l'agglomération des étoiles d'un système stellaire dans un point.

Toutes les observations, de même que la théorie, concourent à nous indiquer cette évolution comme possible, même très probable, et nulle objection sérieuse ne pourrait lui être opposée à présent.

Dans le Chapitre VIII, nous esquissons une méthode permettant d'étudier les conditions dynamiques à l'intérieur des spirales (distribution des vitesses et la variation de l'accélération), déduites de l'examen des formes geometriques des spires.

La comparaison des résultats obtenus par cette analyse, aux résultats donnés par l'analyse spectroscopique, ou par le Blink-microscope, sera de même instructive pour la connaissance de ces systèmes.

Les amas globulaires ont posé aussi d'autres problèmes grandioses, mais dont la solution paraît être réservée aux générations futures.

Lord Kelvin fut le premier à se demander s'il n'y avait pas une similitude mécanique entre les deux extremités des granulations de la matière, étoiles et molécules; en d'autres termes, s'il n'est pas possible, en connaissant les lois des mouvements d'un amas de molécules, d'en déduire, par un groupe de formules de transformation, les lois qui gouvernent une boule globulaire d'étoiles, ou inversement.

S'il en était ainsi, la théorie cinétique des gaz, ainsi que la dynamique stellaire, verraient le patrimoine de leurs théorèmes considérablement augmenté, sans parler de la portée philosophique du résultat.

H. Poincaré s'est occupé aussi de ce problème, mais sans y insister beaucoup.

Il avait probablement l'intuition que le problème n'était pas encore mûr et que les éléments manquaient pour en décider.

Les molécules sont plus eloignées de nous que les étoiles. On ne peut observer que l'effet des agglomérations moléculaires qui nous fournissent des donnees insuffisantes pour pouvoir décider si elles se soumettent à la même loi de gravitation que les étoiles. On ne

sait pas s'il n'y intervient aussi d'autres forces, spécialement répulsives. C'est là notre problème même.

Pour le résoudre, l'astronome ne dispose d'autres moyens que de comparer les expériences et les observations sur les gaz terrestres (qui se trouvent à une grande densité et dans un champ de forces, celui de la Terre, immense et étranger à leur propre champ), avec les observations sur les amas globulaires, observations peu nombreuses du point de vue qui nous intéresse.

En dehors de l'équipartition de l'énergie, qui règne dans les deux systèmes, la loi de la distribution des densités seulement a encore un caractère cinétique et ainsi utilisable dans la discussion.

On s'est débarrassé du champ de la Terre, en calculant la loi de la densité dans une boule de gaz, soumise à sa seule attraction, mais on a gardé pourtant un aspect terrestre, contenu dans la prémisse que la pression, la température et la densité sont reliées adiabatiquement (§ 19), comme dans notre atmosphère.

Ce sont des caractéristiques du mouvement cinétique, type Brownien.

Alors le libre parcours est beaucoup plus petit que les dimensions de la boule, comme cela a lieu dans les gaz de grande densité ou terrestres.

Les premières recherches approfondies, dans le but de comparer la densité dans une boule à la densité observée dans les amas globulaires, sont dues au professeur von Zeipel. Dans ses *Recherches sur la constitution des amas globulaires,* il trouve que les deux courbes sont très rapprochées. Nous obtenons le même résultat dans le Mémoire présent (Chap. I).

Mais a-t-on le droit d'en conclure une première preuve pour l'identité des deux infinis? Surtout, a-t-on le droit d'en tirer des conclusions sur la constitution physique des amas, de la valeur, par exemple, du rapport des « chaleurs spécifiques » des amas observés comme le fait M. von Zeipel?

D'abord, la supposition des mouvements cinétiques des étoiles dans les amas globulaires est inadmissible. Le libre parcours des étoiles d'un amas est loin d'être négligeable par rapport au rayon de l'amas. On est tenté de le supposer par l'aspect extrêmement dense des plaques photographiques.

Pour toutes, le centre est irrésoluble. Mais les diamètres des images des étoiles photographiées sont de l'ordre de 10^7 fois plus grands qu'en réalité.

Le covolume de 1^{cm^3} d'azote, dans les conditions normales, est égal à $12,54 \times 10^{-9}$. En admettant que la Voie Lactée a un rayon de 12000 années seulement, puis qu'elle est constituée par 2 milliards d'étoiles, et en admettant les parallaxes adoptées aujourd'hui pour les amas globulaires, leurs covolumes sont de l'ordre de 217×10^{-29}. Ainsi, la densité cinétique des systèmes stellaires connus est de 5×10^{18} fois plus petite que celle des gaz terrestres. Aussi petite que celle des gaz les plus raréfiés que les physiciens peuvent produire dans les laboratoires.

Dans les amas, le libre parcours entre deux chocs capables de produire une déviation d'un degré seulement est de l'ordre du diamètre de l'amas.

Les mouvements des étoiles dans les amas sont ainsi d'une nature différente par rapport à ceux des molécules dans une boule de gaz.

Dans ces conditions, l'analogie des courbes de distribution de la matière, dans les deux systèmes, qui est une condition nécessaire pour leur similitude mécanique, est loin d'être suffisante.

D'ailleurs, cette analogie est plutôt une preuve que les distributions sont différentes car, dans les amas, on ne connaît que quelques types spectraux et quelques grandeurs stellaires (Chap. I). Les étoiles les plus faibles, qui sont les plus nombreuses, échappent aux observations, et il n'est pas certain qu'en les faisant intervenir, la courbe observée se conserverait.

Aujourd'hui, pas plus qu'hier, nous ne voyons pas d'éléments suffisants pour décider de ce grand problème. Mais cela ne diminue pas l'immense intérêt du problème posé par Lord Kelvin.

CHAPITRE I.

LES CARACTÉRISTIQUES DES AMAS GLOBULAIRES ET LEUR POSITION DANS L'ESPACE.

1. La distribution des amas globulaires. — Des nombreuses recherches ont été faites sur la distribution des amas globulaires.

Mais, dernièrement, les observations et les classifications des observatoires de Mont Wilson, Lick, Harvard, Helvan, etc., ont apporté certaines modifications dans les idées que l'on se faisait sur la nature de beaucoup de ces objets. Aussi, nous avons trouvé nécessaire de comparer les descriptions, données par les observatoires nommés ci-dessus, de tous les amas considérés comme globulaires, ainsi que de les vérifier sur les Cartes de Franklin-Adams et de Palisa.

Parmi ces classifications, nous en avons retenu 91, dont on trouvera la liste complète dans le Tableau X.

La figure 1 schématise la distribution de ces 91 amas sur la sphère céleste.

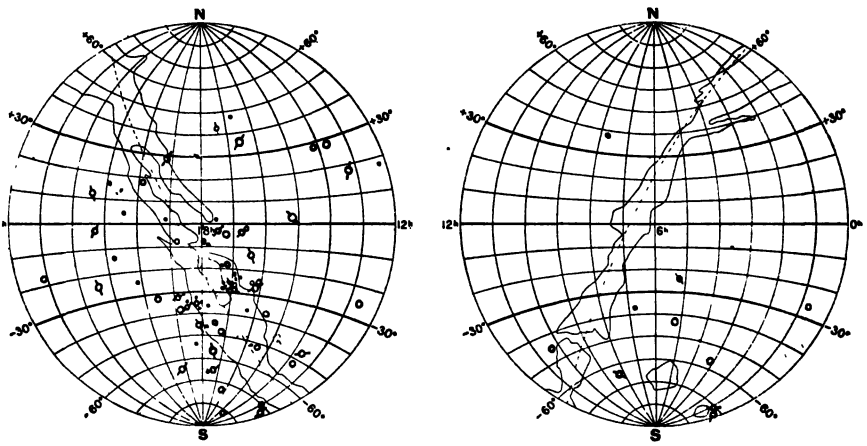

Fig. 1. — Distribution de 91 amas globulaires.

○ = globulaires de grands diamètres (> 2').
● = globulaires de petits diamètres (< 2').
ø = globulaires aplatis et la direction de l'aplatissement.

Nous avons omis de cette étude les amas ouverts galactiques, dont la parenté avec notre Voie Lactée est hors de toute discussion. Nous avons omis aussi certains amas ramassés autour des Nuages de Magellan, qui introduisent des caractères spéciaux dus à leur parenté évidente avec ces nuages.

Nous avons omis également M.11 et M.37 de formes globulaires, considérés généralement comme ouverts, mais avec regret, car ces amas ont aussi d'autres caractères spécifiques aux globulaires.

La distribution obtenue présente les caractéristiques suivantes :

1° Il y a une concentration remarquable de globulaires dans la région du Sagittarius (voir *fig.* 1).

2° Ils manquent complètement dans le plan galactique, ainsi qu'à des petites latitudes galactiques (± 5°) (*fig.* 2).

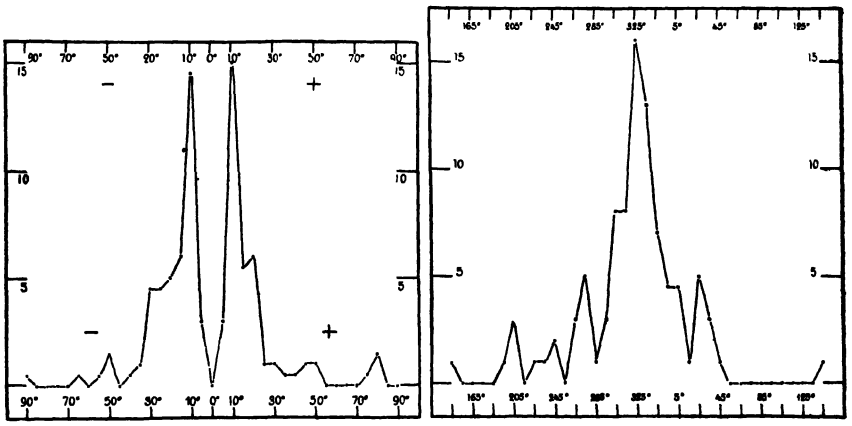

Fig. 2.

A gauche : distribution de 91 globulaires à diverses latitudes galactiques.
A droite : distribution de 91 globulaires à diverses longitudes galactiques.

3° On peut les considérer comme répartis sur toute la sphère, plus ou moins nombreux, et non dans un seul hémisphère, sans exception.

4° La distribution en latitude galactique est assez symétrique par rapport au plan galactique. C'est un des motifs qui ont permis d'affirmer une parenté de ces nodosités de l'Univers avec le système galactique.

Nous verrons plus loin que ces objets sont extérieurs à la Voie Lactée, qu'ils n'ont pas d'origine commune avec elle, que leur distribution dans l'Univers peut être considérée comme uniforme, sauf un archipel plus dense placé d'un côté de la Voie Lactée. Nous pensons que la symétrie de leur distribution n'est qu'une simple coïncidence qui aujourd'hui s'impose comme la seule solution possible.

D'ailleurs, en cherchant le centre O de la distribution des glo-

bulaires sur la sphère, on trouve que sa position est assez loin du plan galactique. La position cherchée est donnée par le maximum de l'expression

$$\Sigma \cos OS,$$

où S spécifie la position d'un amas globulaire quelconque. En notant avec α, δ les coordonnées équatoriales courantes des amas et avec α_0, δ_0 les coordonnées cherchées de O, nous avons

$$\cos OS = \sin\delta_0 \sin\delta + \cos\delta_0 \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_0).$$

Il faut donc chercher le maximum de l'expression

$$\sin\delta_0 \Sigma \sin\delta + \cos\delta_0 \Sigma \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_0).$$

Annulons dans ce but les expressions

$$\frac{d(\Sigma \cos OS)}{d\delta_0} = \cos\delta_0 \Sigma \sin\delta - \sin\delta_0 (\cos\alpha_0 \Sigma \cos\delta \cos\alpha + \sin\alpha_0 \Sigma \cos\delta \sin\alpha) = 0,$$

$$\frac{d(\Sigma \cos OS)}{d\alpha_0} = -\sin\alpha_0 \cos\delta_0 \Sigma \cos\delta \cos\alpha + \cos\alpha_0 \cos\delta_0 \Sigma \cos\delta \sin\alpha = 0,$$

La dernière de ces deux relations s'écrit

$$\frac{\Sigma \cos\delta \sin\alpha}{\Sigma \cos\delta \cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha_0,$$

relation qui nous donne la valeur de α_0 qui, portée dans la première, nous fournit δ_0.

Le centre de la distribution ainsi calculée est à

$$\alpha_0 = 15^h 56^m,2; \qquad \delta_0 = -27^\circ 50',1;$$

ou en coordonnées galactiques

$$G_0 = 312^\circ, \qquad g = +20^\circ.$$

La symétrie de la distribution est donc loin d'être complète [1].

---

[1] Cette position est très différente de celle trouvée par Hertzsprung (*A. N.*, 4600, 1912),

$$[\alpha_0 = 17^h 6^m 6^s, \quad \delta_0 = -50^\circ,7] \qquad [G = 307^\circ \quad g = -14^\circ]$$

parce qu'il a employé un nombre différent des globulaires (65), et puis nous avons éliminé tous les amas des Nuages de Magellan, qui ont des grandes latitudes galactiques négatives.

5° Un quart de la sphère céleste, déterminé par les méridiens galactiques de longitudes 320° et 50°, contient 60 pour 100 des amas globulaires et seulement 10 pour 100 des nébuleuses spirales à grands diamètres apparents, plus grands de 2′. Il paraît donc que ces deux classes d'objets célestes ont des distributions complémentaires.

6° On croyait, faute de données complètes, que les spirales de petits diamètres fuyaient aussi les globulaires, comme le font les spirales de grands diamètres.

Cette opinion est due au fait que les spirales de petits diamètres sont invisibles dans le plan galactique et son voisinage, précisément là où se trouve l'archipel des globulaires qui contient la majorité de ces objets. Pour les amas, qui ont de grandes latitudes galactiques, cette cause ne subsiste plus et les spirales sont nombreuses autour de ces amas.

On peut juger d'après le tableau suivant, contenant quelques-uns des globulaires, pris au hasard, de grandes latitudes galactiques, photographiés à l'Observatoire de Lick, et le nombre respectif des spirales observées sur chaque cliché.

N. G. C.	Nombre des spirales.	N. G. C.	Nombre des spirales.
5024	19	6864	9
5904	4	6934	8
6205	10	6981	13
6229	26	7078	17
6341	24	7089	8
6809	4	7099	25

La densité moyenne (14) de ces clichés dépasse même la densité moyenne (8) des 732 clichés de l'Observatoire de Lick contenant 5925 spirales au total. Cela s'explique par le fait que dans la collection de Lick se trouvent aussi des clichés pris en pleine Voie Lactée, où les spirales manquent.

7° On a présenté les amas globulaires comme un système qui s'approche de nous, c'est-à-dire de vitesses radiales négatives, et les spirales, au contraire, comme s'éloignant de nous, ayant des vitesses radiales positives. Nous croyons qu'il ne faut pas attribuer un caractère définitif et surtout général, à cette conclusion. En effet, sur 91 amas globulaires connus, on a étudié la

vitesse radiale de 10 amas, donc de 10,9 pour 100, dont la distribution n'a aucun caractère systématique par rapport à la Voie Lactée. De ceux-là, on a trouvé que 7,6 pour 100 du nombre total de 91 ont des vitesses radiales négatives, 2,2 pour 100 positives et 1,0 pour 100 des vitesses radiales nulles. En considérant comme connues seulement les spirales enregistrées à l'Observatoire de Lick (5925), puisque l'on connaît les vitesses radiales de 36 spirales seulement, on a donc 0,60 pour 100 spirales du nombre total, avec des vitesses radiales connues, dont 0,50 pour 100 du nombre total ont des vitesses radiales positives, 0,08 pour 100 négatives et 0,02 pour 100 des vitesses nulles. Puis, leurs mouvements propres nous sont complètement inconnus.

La statistique nous enseigne que toute conclusion basée sur des données si restreintes risque fortement d'être erronée. Il ne faut donc en conclure rien encore. Le problème est très important, et les recherches dans cette direction apporteront sans doute des conclusions de toute première importance.

Puisque nous en aurons besoin dans ce qui va suivre, examinons la distribution de quelques autres objets, comme celle des spirales, des nébuleuses planétaires, ainsi que de la matière obscure qui se trouve répandue dans notre système galactique.

2. La distribution des nébuleuses spirales. — Pour la distribution des spirales nous avons pris comme base, pour sauver l'homogénéité des données, un seul Catalogue, celui de H.-D. Curtis (1).

A l'Observatoire de Lick on a exploré avec le Crossley réflecteur 732 régions, qui contiennent en total 5925 spirales. Ces régions sont à peu près uniformément distribuées sur la sphère céleste, excepté la région polaire sud jusqu'à — 30°, qui n'a pas été étudiée à cause de la position géographique de l'Observatoire. La distribution de ces objets que nous avons obtenue est impossible à reproduire, à cause de la petite surface couverte par un cliché ($\frac{9}{10}$ d'un degré carré), et du grand nombre des spirales contenues dans beaucoup des clichés. Dans la figure 4, nous nous sommes contenté de donner le nombre moyen des spirales, trouvées dans des grandes surfaces de 15°/15°. On retrouve encore leur caractère principal de distribution : l'absence dans la Voie Lactée et

son voisinage. La région du pôle Nord de la Voie Lactée est caractérisée par quelques points de concentration plus grands, mais le pôle Sud ne présente pas ce caractère. Près du pôle Nord ($\alpha = 12^h 55^m$, $\delta = +28^\circ 30'$) se trouve une région remarquable, découverte par H.-D. Curtis, qui contient plus de 300 spirales dans une surface de $50' \times 40'$. D'ailleurs, on a trouvé de pareils points de concentration un peu partout, même dans le voisinage de la Voie Lactée ($\alpha = 2^h 50^m$, $\delta = +45^\circ$ et $\alpha = 7^h 30^m$, $\delta = +51^\circ$). Généralement, ces concentrations couvrent de petites surfaces, un

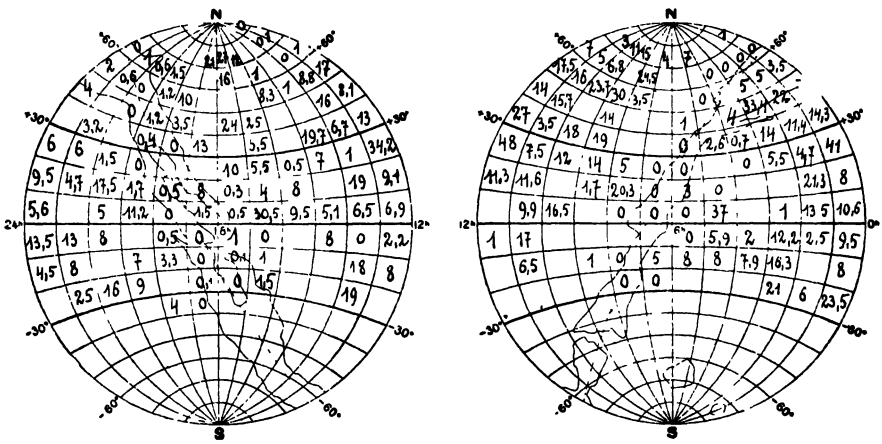

Fig. 1. — Distribution des spirales.
Densité moyenne dans des surfaces de 10/10 degrés carrés.

cliché ou deux, et sont entourées par des régions de faibles densités. D'après les observations de Lick, où l'on a étudié très systématiquement ces régions de concentration, on dirait que les spirales sont agglomérées dans des amas de spirales, composés de quelques centaines de membres visibles.

Les recherches de Hincks (2), Hardcastle (3) et Reynolds (4), sur la distribution des spirales de grands diamètres, montrent que la longitude galactique est aussi importante pour leur distribution que la latitude. D'après la distribution de 100 spirales de diamètres plus grands de 2', Reynolds trouve une bande large de spirales dans l'hémisphère galactique Nord (H. G. N.), qui, allant de Ursa Major jusqu'à Virgo, traverse le pôle Nord galactique, sans présenter une concentration spéciale autour du pôle.

Dans l'hémisphère galactique Sud (H. G. S.), il n'existe pas des régions de concentration spéciales pour aucune de ces deux classes de spirales. Comme nous l'avons déjà vu, les spirales de grands diamètres fuient en général la région occupée par les globulaires.

Dans l'H. G. N., les spirales de grands diamètres sont plus nombreuses que dans l'H. G. S. En compensation, cinq spirales ayant de grands diamètres apparents se trouvent dans l'H. G. S., ainsi qu'une belle collection de nébuleuses sphéroïdales, indiquant un degré d'évolution différente de celui du reste de l'Univers visible.

Brown et Reynolds (5), ainsi que Gregory (6), trouvent que les plans des spirales de grands diamètres sont distribués indifféremment par rapport au plan de la Voie Lactée. La distribution de leurs vitesses radiales ne paraît avoir, non plus, aucun caractère systématique de relation avec la Voie Lactée.

Beaucoup de spirales étudiées, parmi celles de grands diamètres apparents, sont certainement des systèmes très grands et complexes. Nous citons seulement les dernières observations, celles de Hubble (7), de cette année même, sur M.33 et M.31, observations qui ont été faites avec les grands réflecteurs de 100 et 60 inches de Mont Wilson. Ces systèmes sont comparables en dimensions, et sont aussi complexes que le système galactique. Ils comprennent des étoiles simples, des étoiles nébuleuses, des nébuleuses à raies brillantes, des novæ, des variables céphéides, de la matière obscure aussi abondante que dans la Voie Lactée. Il est probable qu'ils ne sont pas tous de même grandeur, comme tous les corps célestes d'ailleurs, mais ils sont des systèmes complexes et non pas des minuscules systèmes de l'ordre de grandeur d'un système planétaire, et en état corpusculaire comme le pense, entre autres, Lindemann (8).

Leur absence, dans le plan galactique et son voisinage, ne peut pas être expliquée comme un effet de la pression de la lumière (8), ou par d'autres hypothèses aussi curieuses, mais seulement par leurs positions en dehors de la Voie Lactée, et par la présence d'un anneau de matière obscure, entourant le système galactique, comme on en voit dans les systèmes spiraux, vus par la tranche (voir *fig.* 5).

3. Sur la présence de la matière obscure dans le système galactique. — On ne peut plus douter de la présence des forts nuages de matière obscure, au sein de la Voie Lactée. Il suffirait d'examiner les cartes de Franklin-Adams pour s'en apercevoir.

On trouve des nombreuses régions dépourvues d'étoiles au milieu de la Voie Lactée même. Leur existence ne peut être expliquée que par l'occultation des étoiles, qui se trouveraient derrière un nuage obscur. Nous citons seulement quelques exemples des plus éloquents.

Un cliché de 0,25 degré carré de surface, pris avec le Crossley réflecteur de Lick, en $1^h 50^m$ de pose en pleine Voie Lactée ($\alpha = 18^h 4^m$, $\delta = +27^\circ 30'$), donne 76000 étoiles; un autre, pris dans des conditions identiques, et dans son voisinage immédiat ($17^h 24^m + 25^\circ 30'$), toujours en pleine Voie Lactée, donne seulement 124 étoiles (9).

Une vingtaine de carrés (5'/5') d'un cliché de la Carte du Ciel, autour de $\alpha = 18^h 55^m$, $\delta = -37^\circ$, donc dans le voisinage de la Voie Lactée et dans une région riche en étoiles, après deux heures de pose, ne donne aucune étoile. Nulle autre explication, en dehors de la présence d'abondants nuages obscurs à l'intérieur de la Voie Lactée, n'est admissible. Pannekoek (10) signale l'existence des grands nuages obscurs, situés près de la constellation de Taurus, et qui s'étendent, avec une plus faible densité, vers Perseus, Cameleopardus ainsi que vers Ophiuchus et Scorpius. Leur présence est mise en évidence par une étude sur la distribution des étoiles de diverses grandeurs. Il signale enfin d'autres nuages, au nord de Cygnus, Lacerta, Cassiopeia, etc., et il croit que, même la bifurcation de la Voie Lactée entre Aquila et Cygnus est due également à ces nuages. A l'Observatoire du Vatican, J.-G. Hagen (11) a dressé même une carte de toutes ces nébuleuses obscures du système galactique.

D'une étude faite avec le Crossley reflecteur de Lick sur 500 spirales, dont 32 vues par la tranche, Curtis (1) déduit l'existence indiscutable de fortes masses obscures à l'intérieur et à l'extérieur des systèmes spiraux. Toutes les spirales, vues par la tranche, accusent la présence d'un fort anneau de matière obscure dans leurs plans équatoriaux (voir *fig.* 5).

Puisque les spirales sont entourées par des bandes obscures,

tout le long de leurs équateurs, et puisqu'elles sont des systèmes analogues à la Voie Lactée, il est donc possible qu'elle en ait aussi, de la matière obscure, non seulement à son intérieur, où la présence est indiscutable, mais aussi à l'extérieur. Le manque des spirales dans le plan galactique et son voisinage en serait une preuve. Alors, le manque total des globulaires dans le plan de la Voie Lactée peut être l'effet de l'absorption totale de la lumière, due à la même bande obscure. D'ailleurs, nulle autre explication ne paraît acceptable.

On peut donc conclure, d'après leur distribution, que les amas globulaires sont des systèmes extérieurs par rapport au système galactique, ce qui est une première indication sur leurs positions.

4. **Distribution des nébuleuses planétaires.** — Une autre distribution, nécessaire dans la suite de la discussion, est celle des nébuleuses planétaires. La figure 6 est reproduite d'après les données de Curtis (1).

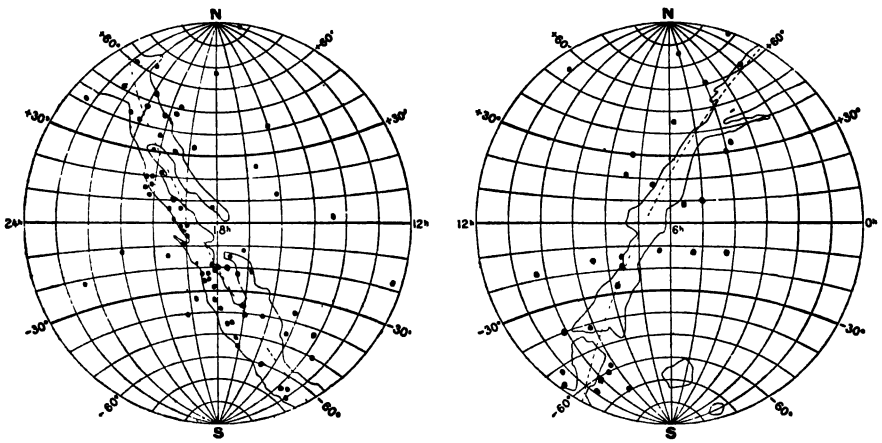

Fig. 6. — Distribution des nébuleuses planétaires d'après l'Observatoire de Lick.

Les recherches de Curtis attribuent à ces objets des masses un peu plus grandes que celles des étoiles. D'après les valeurs de leurs parallaxes, elles feraient partie du système galactique. Elles sont distribuées à peu près uniformément dans la Voie Lactée. Entre Cygnus et Sagittarius elles ont une faible concentration, correspondant à celle des étoiles dans cette région. Comme elles ont des

parallaxes assez grandes, il est naturel d'en trouver quelques-unes vers les pôles, comme les étoiles galactiques.

Dans tous les cas, elles n'ont pas une grande dispersion en latitude galactique, comme les amas globulaires; elles s'éloignent beaucoup plus timidement de la Voie Lactée que les amas globulaires, plutôt comme les étoiles (voir *fig.* 6 et *fig.* 1).

Le plan galactique et son voisinage immédiat ne sont pas dépourvus de planétaires, comme ils le sont de globulaires et de spirales. D'après ces données, les plus récentes et les plus complètes, il n'y a pas d'analogie dans la distribution de ces deux classes d'objets, pour pouvoir en conclure d'après cette analogie seulement, comme le fait Charlier, que les amas globulaires font partie de la Voie Lactée ainsi que les planétaires.

Charlier (12) trouve que la distribution des amas galactiques est semblable à la distribution des étoiles de type B, qui constituent un groupe d'étoiles lumineuses, au centre de la Voie Lactée. Le centre du système des amas galactiques est situé dans la même direction que le centre des étoiles B. Après avoir établi les parallaxes relatives des amas galactiques, grâce à la relation entre les parallaxes et les diamètres apparents, la supposition que leurs centres coïncident lui fournit l'échelle, donc les parallaxes absolues. Il trouve ainsi que les amas galactiques s'étalent entre 2000 et 9000 années de lumière. Il trouve également que la dispersion des amas galactiques, perpendiculaire au plan galactique, est la même que celle des étoiles B, tandis que la dispersion dans le plan de la Voie Lactée est deux fois plus grande que celle des étoiles B.

Quant aux globulaires, il suppose que le centre de leur système se trouve aussi dans le plan galactique, mais dans une direction perpendiculaire à la direction du centre de la Voie Lactée, des étoiles B et des amas galactiques, car, la ressemblance des distributions des globulaires et des planétaires connues alors, distributions qui sont d'ailleurs différentes des nôtres, plus récentes et plus complètes, lui suggère l'idée que les amas globulaires font partie de la Voie Lactée, comme les planétaires. De cette supposition il déduit l'échelle des parallaxes relatives des globulaires, établie préalablement sur la relation entre les parallaxes et les diamètres apparents. Il détermine alors que leur dispersion perpendi-

culaire au plan galactique est la même que celle des étoiles B et des amas galactiques. Or, les caractères des distributions des amas globulaires et des planétaires sont loin de nous indiquer, sans discussion, que les positions par rapport à la Voie Lactée de ces deux classes d'objets sont semblables. Puis, les grandeurs absolues intégrales des amas globulaires, déduites des grandeurs apparentes intégrales et de parallaxes données par Charlier, sont positives, donc égales à celles des étoiles simples, des naines même, ce qui est inadmissible et constitue une preuve que les globulaires sont à des distances plus grandes que celles trouvées par Charlier.

LES CARACTÉRISTIQUES DES AMAS GLOBULAIRES.

5. **Définitions.** — Soient $f(\lambda)$ la courbe de l'intensité énergétique du spectre d'une étoile, λ la longueur d'onde. *L'éclat apparent*, c'est la somme de l'énergie reçue de l'étoile.

Si l'instrument employé à enregistrer cette énergie est l'œil, la grandeur apparente déduite s'appelle *visuelle*. Mais, comme l'œil est très variable dans ses appréciations, il est remplacé par la plaque photographique sensibilisée pour la région visible du spectre, les autres régions étant éliminées par un écran. Par définition, la grandeur obtenue de cet éclat (E) s'appelle *grandeur photovisuelle* (m_{ph-v}) :

$$m_{ph-v} = 2{,}5 \log \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\, v(\lambda)\, d\lambda, \qquad E = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\, d\lambda,$$

où λ_1 et λ_2 sont les limites du spectre visible, et $v(\lambda)$ une fonction dépendant de la plaque et de l'écran.

Si l'on emploie les plaques courantes en photographie, sensibles spécialement dans la région violette du spectre limitée par d'autres longueurs d'ondes (λ_3, λ_4), les grandeurs obtenues sont différentes des photovisuelles, et variables d'un type à l'autre. La grandeur apparente obtenue s'appelle *grandeur photographique* (m_{ph}) :

$$m_{ph} = 2{,}5 \log \int_{\lambda_3}^{\lambda_4} f(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda,$$

où $p(\lambda)$ est une fonction dépendant de la plaque photographique.

Si l'instrument qui enregistre l'énergie est une pile thermo-électrique, ou un bolomètre, les grandeurs ainsi obtenues s'appellent *bolométriques*. Mais les observations sur les grandeurs bolométriques, qui sont les plus précises, sont très restreintes.

Par définition :

$$\textit{Indice de coloration} = m_{ph} - m_{ph-v}.$$

La grandeur absolue d'une étoile est la grandeur apparente qu'aurait cette étoile placée à l'unité de distance (parsec), correspondant à la parallaxe d'une seconde d'arc.

6. Relation entre l'indice de coloration et le type spectral. — On a trouvé, il y a une vingtaine d'années, une relation entre les indices de colorations et les types spectraux des étoiles, relation qui est donnée dans la figure 7.

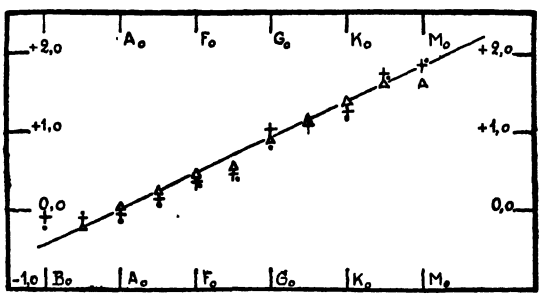

Fig. 7. — Relation entre le type spectral (abscisses) et l'indice de coloration (ordonnées).

(△) observations faites à Yerkes.
(•) observations faites à Harvard.
(†) observations faites à Göttingen.

Par convention internationale, le point zéro de l'indice de coloration a été choisi ainsi tel que les grandeurs photographiques et photovisuelles soient égales pour les étoiles de 6e grandeur et de type A_0. Les étoiles de type B ont un indice de coloration négatif, celles de type A_0 nul, et les autres positifs et d'autant plus grand que le type est plus avancé depuis A_0 vers M.

Deux clichés, un photographique, un deuxième photovisuel, sont nécessaires pour nous donner l'indice de coloration des étoiles d'un amas et, par cette relation, leurs types spectraux.

7. Relation entre les types spectraux et les grandeurs absolues des étoiles d'un amas. — Comme toutes les étoiles d'un amas sont pratiquement à la même distance, les rapports de leurs éclats absolus sont égaux à ceux de leurs éclats apparents.

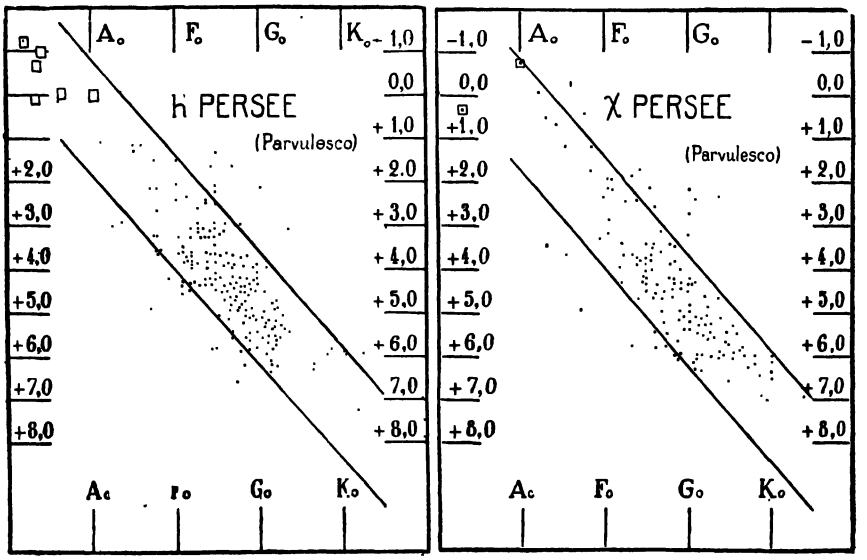

Fig. 8. — Relation entre les types spectraux et les grandeurs absolues dans *h* et χ Perseus.

Grâce à ce fait, on a trouvé une relation entre les grandeurs absolues et les types spectraux (relation d'Adams), ainsi que deux classes distinctes d'étoiles, en ce qui concerne leurs luminosités et masses, les géantes et les naines.

Les plus lumineuses des naines sont du côté A de la classification spectrale, et ont une grandeur absolue, par convention, égale au zéro. Les moins lumineuses des naines sont du côté K et M et ont des grandeurs absolues positives. Pour les géantes, c'est le contraire, les étoiles A sont les moins lumineuses et les K et M les plus lumineuses. Par convention, les grandeurs absolues des géantes sont négatives.

Les amas galactiques, qui sont beaucoup moins condensés au centre que les globulaires, sont composés, à quelques exceptions près, seulement de naines (voir *fig.* 8 et 9), les globulaires de naines et de géantes (voir *fig.* 10 et 11).

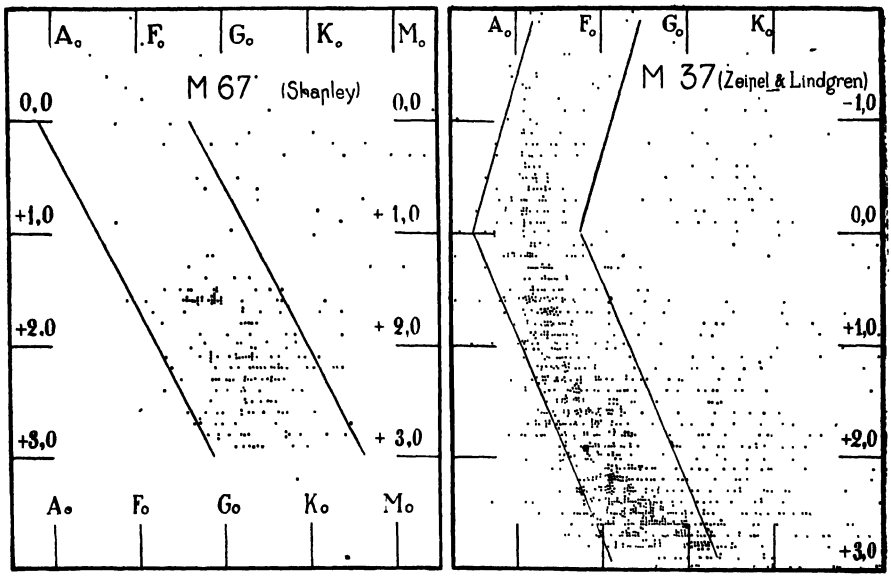

Fig. 9. — Relation entre les types spectraux et les grandeurs absolues dans M.67 et M.37.

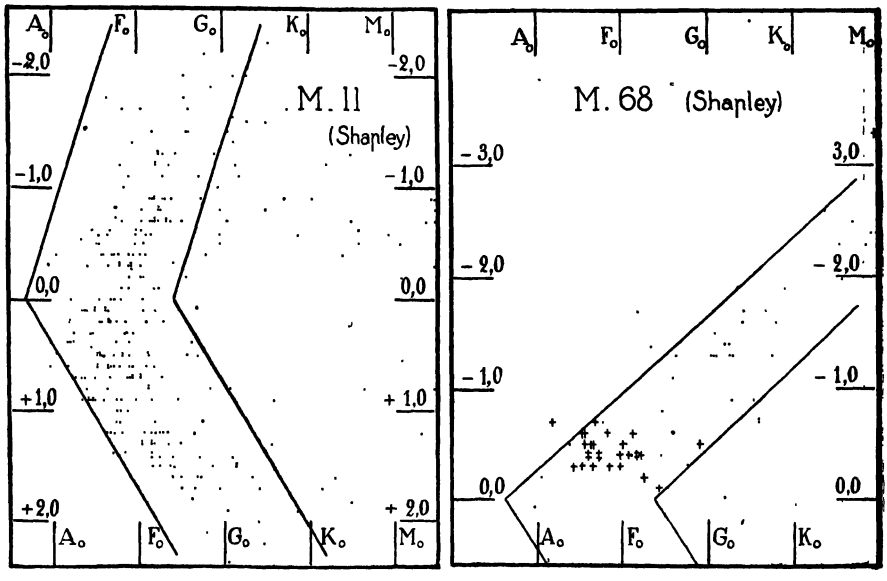

Fig. 10. — Relation entre les types spectraux et les grandeurs absolues dans M.11 et M.68.

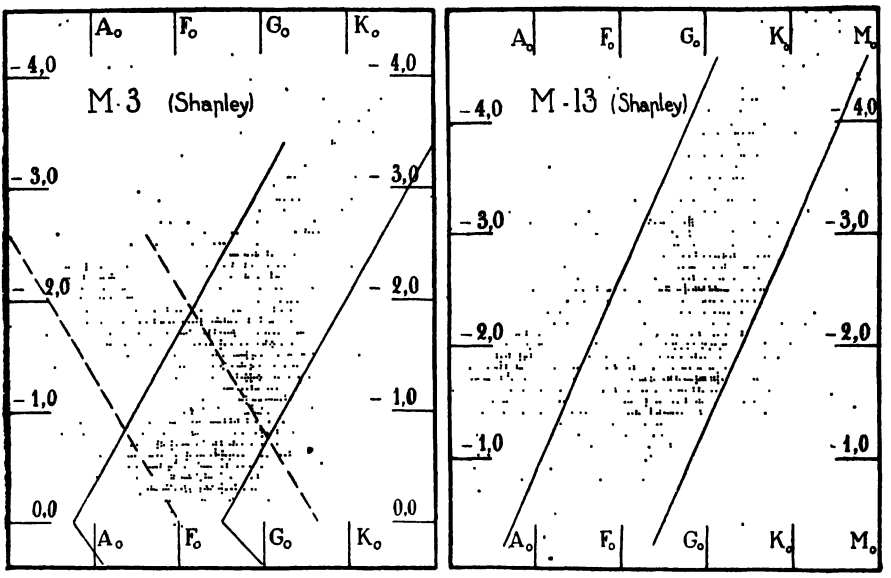

Fig. 11. — Relation entre les types spectraux et les grandeurs absolues dans M. 3 et M. 13.

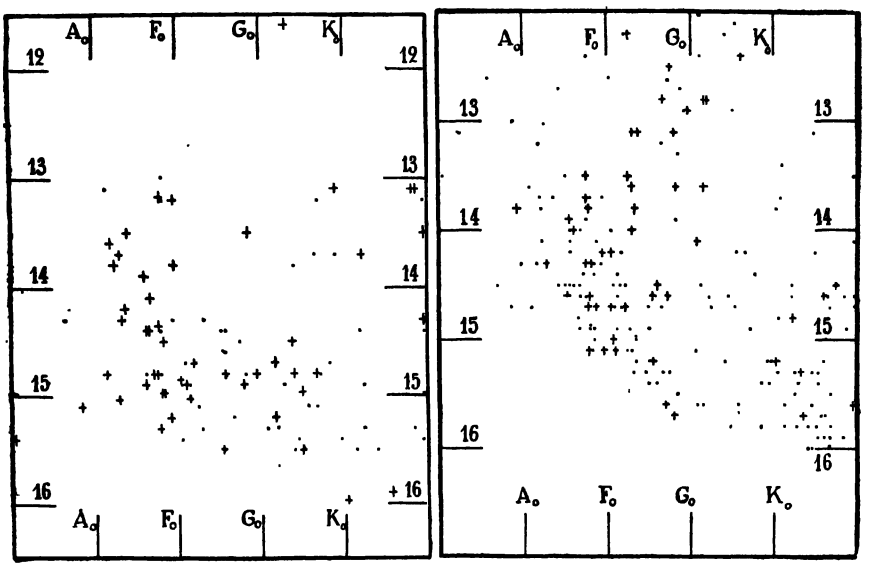

Fig. 12. — Relation entre les types spectraux et les grandeurs absolues dans quatre régions autour de M.11.

Dans les régions du ciel, où les étoiles ne sont pas ramassées dans des amas, les grandeurs apparentes et absolues ne se correspondent plus et cette relation n'existe plus (voir *fig.* 12).

8. L'indice de l'âge relatif des amas. — Les deux bandes d'Adams, qui limitent la relation statistique des grandeurs absolues et des types spectraux des géantes et des naines, indiquent le chemin de l'évolution des étoiles, d'après la théorie de Russel. Alors, le point de départ de la relation d'Adams, dans divers amas, du côté des géantes, devrait indiquer l'âge relatif de ces amas.

Comme nous le verrons au Chapitre III, il y a de fortes raisons de penser que la symétrie, et la concentration des amas, sont d'autant plus grandes que leurs âges sont plus avancés. Les amas globulaires seraient donc des systèmes très âgés, dans cette forme stellaire, en tout cas plus âgés que les amas ouverts galactiques, peu symétriques et peu concentrés, et surtout que les nuages irréguliers de la Voie Lactée. Dans ce cas, la présence en abondance des géantes dans les globulaires, et le manque total dans la grande majorité des amas galactiques, ne dépendrait plus seulement de leurs âges relatifs, mais aussi de leurs degrés de concentration et, peut-être, d'autres causes encore. Dans les amas très concentrés, comme les globulaires, les chocs des étoiles, c'est-à-dire les passages très rapprochés, sont plus fréquents. Il est à prévoir de fortes marées, transmises jusqu'à de grandes profondeurs à l'intérieur des étoiles.

Les frottements intérieurs qui se produisent inévitablement élèvent les températures des étoiles affectées par ces marées, augmentent leur volume, diminuent leur densité, et les rendent probablement de nouveau géantes, et variables à cause de ces pulsations.

Les amas galactiques peu concentrés, comme les Pléiades, les Hyades, l'amas double de Persée, M.68, etc., n'ont pas de géantes ni de céphéides, tandis que ceux, plus concentrés M.37 et M.11, considérés peut-être injustement comme galactiques, en renferment, de même que tous les amas globulaires qui sont très concentrés et où les géantes ne manquent jamais.

Les données des observations sont encore insuffisantes pour

pouvoir se prononcer sur la corrélation éventuelle entre le degré de condensation et le nombre des céphéides ou des géantes. Il est intéressant de constater dans le Tableau I que M.3 par exemple, qui est très condensé au centre, a un grand nombre de céphéides, tandis que 47 Toucanæ, et ω Centauri, qui sont des globulaires parmi les moins condensés, en ont un nombre plus petit. M.13, qui lui aussi est très condensé, fait exception, ayant un nombre restreint de variables. Mais, les données de ce tableau que nous avons établi d'après des travaux de divers auteurs, faits avec des instruments différents, et dans des conditions et des buts différents, sont incomplets, et surtout très peu homogènes, autant en ce qui concerne le nombre des variables qu'en ce qui concerne le nombre total des étoiles et les lois de la densité, qui dans la majorité des amas sont encore inconnus.

TABLEAU I.

Amas.	Nombre des variables pour 100.	Amas.	Nombre des variables pour 100.
M.3	14,3	N. G. C. 6293	2
N. G. C. 6779	12,5	M.22	1,03
N. G. C. 6864	10	N. G. C. 7006	1
M.5	9	M.28	1
N. G. C. 5024	6,6	M.13	0,7
M.15	5,5	N. G. C. 7492	0,5
N. G. C. 6981	3,3	M.55	0,4
ω Centauri	2,1	N. G. C. 6397	0,4
N. G. C. 6553	2	47 Toucanæ	0,1

Le but du Chapitre V est d'indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur numérique correspondant au degré de concentration d'un amas, et déduite des valeurs observées de la loi sont densités. Elle permettra donc de chercher ensuite, par les méthodes connues de la Statistique mathématique, la corrélation entre le degré de condensation des amas et le nombre des céphéides et des géantes.

9. **Les céphéides des amas et leurs caratéristiques.** — La présence en abondance des variables de types céphéides dans les globulaires est une caractéristique spécifique à cette catégorie

d'amas, par opposition aux amas galactiques qui en sont dépourvus. On a trouvé, par contre, 92 variables de ce type, ou des types rapprochés, dans la Voie Lactée (13), plus de 1000 dans le petit Nuage de Magellan, 36 et 37 dans les nébuleuses spirales M.31 et M.33.

Elles ont généralement des périodes très courtes. Dans les Nuages de Magellan la majorité ont une période d'un jour, quelques-unes seulement ont des périodes plus grandes de deux jours, et les 3 pour 100 plus petites d'un jour. Miss Leavitte a trouvé une relation entre la période et les grandeurs apparentes, donc aussi absolues. D'où il en résulte une autre entre la période et les indices de coloration. Shapley a retrouvé les mêmes relations, légèrement différentes, pour les céphéides des amas globulaires. Ces relations sont données dans la figure 13.

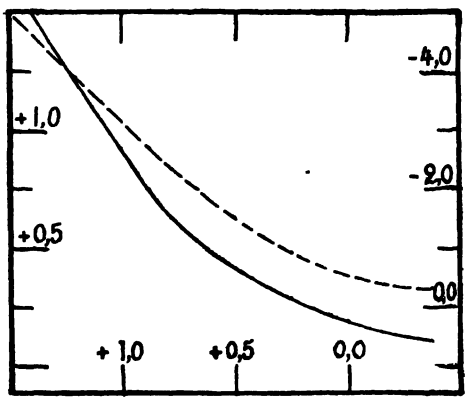

Fig. 13. — *Courbe pointillée :* relation entre le logarithme de la période (abscisses) et les grandeurs absolues moyennes (en ordonnées et à droite) de 330 céphéides). *Courbe continue :* relation entre le logarithme de la période (abscisses) et les indices de coloration (en ordonnées et à gauche) des mêmes céphéides.

De l'étude des mouvements parallactiques des céphéides galactiques, et des parallaxes qu'on en conclut, il résulte que les céphéides sont des étoiles géantes et ont généralement de grandes vitesses radiales. Les courbes de lumière des céphéides des amas (voir *fig.* 14) sont identiques à celles de la Voie Lactée, ou des Nuages de Magellan. Elles ne sont pas régulières. En général, un maximum aigu est suivi d'une série de maximums de plus en plus arrondis. Les céphéides de longues périodes ont une variation

photographique plus grande que la visuelle. La variation visuelle est rarement plus grande de 1,5 grandeur, généralement de 0,8 grandeur. La variation photographique est de 1,5 fois et même de trois fois plus grande. Il s'ensuit donc une variation continuelle de l'indice de coloration et du type spectral, simultanés avec la variation de la lumière.

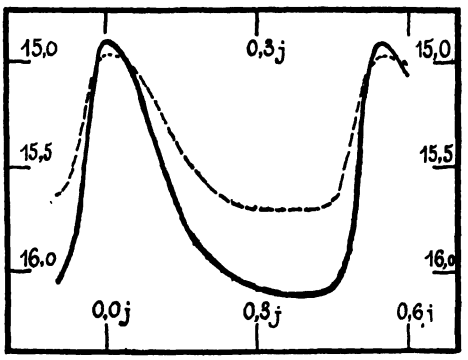

Fig. 14. — Courbe de lumière moyenne photographique (pleine) et photovisuelle (pointillée) de 103 variables céphéides de M.3.

Elles sont plus rouges au minimum, qu'au maximum. Cette variation indique des changements de nature physique à l'intérieur même des étoiles.

Les vitesses radiales, déduites du déplacement des raies de leurs spectres, varient aussi avec l'indice de coloration, le type et l'éclat. Le maximum et le minimum de la vitesse radiale, coïncident respectivement avec le maximum et le minimum de l'éclat.

Mais, les lignes du spectre n'indiquent pas toutes la même vitesse. Spécialement entre les lignes d'absorption (obscures) et d'émission (lumineuses) il y a des différences notables, ce qui indique de même des changements intérieurs complexes et pas encore connus.

La couleur moyenne des céphéides de courtes périodes est bleue, celle des grandes périodes rouge, et jaune pour des valeurs intermédiaires. On a tenté d'expliquer la variation des céphéides par la supposition qu'elles sont des étoiles doubles.

Mais, dans les amas, même galactiques et peu concentrés, les doubles manquent complètement. Puis, il est difficile à expliquer par cette hypothèse la variation de la forme de la courbe de

lumière. Enfin, elles n'ont pas de spectres secondaires, et d'autre part, on démontre que le satellite devrait avoir une orbite d'un rayon plus petit que le rayon de l'étoile principale. Cette hypothèse doit donc être abandonnée.

L'explication la plus rationnelle des caractéristiques des céphéides est de les considérer comme des étoiles affectées par de fortes marées et des pulsations. On a démontré que pour une masse homogène (Lord Kelvin), ou polytrope (Emden), la période des vibrations est indépendante du volume ou de la masse, considérés séparément, et dépend seulement de la densité moyenne. Cette dernière hypothèse explique pourquoi les céphéides de grand éclat absolu ont des longues périodes et des petites densités, et celles de petit éclat ont, contrairement, des grandes densités et des courtes périodes. Elle explique aussi les irrégularités de la courbe de lumière ainsi que les variations de l'indice de coloration et du type spectral.

Elle est en plein accord avec la théorie de Russell, sur l'ordre de l'évolution des étoiles. La présence des céphéides dans les concentrations stellaires de grandes densités nous fait croire que les chocs des étoiles, qui sont là plus fréquents, sont une cause de la variation de ces étoiles ainsi que de la naissance des géantes.

10. La loi des luminosités dans les amas. — La fonction des fréquences des étoiles de diverses grandeurs apparentes ou absolues d'un système stellaire, fonction qu'on appelle loi des luminosités, est une donnée importante et très négligée.

La forme précise de cette fonction peut nous renseigner sur la dispersion des diverses caractéristiques des étoiles, ainsi que sur le nombre total des étoiles d'un amas.

Les variations éventuelles de cette courbe dans divers amas, globulaires, ou irréguliers, pourraient nous donner des renseignements très instructifs sur la constitution de chaque amas séparément. Elles pourraient nous fournir des nouveaux points de différenciation ou de ressemblance entre les diverses catégories des amas.

Soit $\varphi(m, x)$ la fonction des fréquences (dans l'unité de volume) des étoiles de diverses grandeurs (m) à diverses distances (x) du

centre de l'amas. Elle peut être considérée, soit comme loi de la densité séparément pour chaque grandeur apparente (si m est const.), soit comme loi des luminosités, dans chaque couche sphérique (si x est const.). Alors, la loi des luminosités [F(m)] de l'amas est

$$F(m) = \int_0^R \varphi(m, x\ dx,$$

où R représente le rayon de l'amas. Le nombre total (N) des étoiles de l'amas est donné alors par

$$N = \int_{m_1}^{m_2} F(m)\, dm,$$

où m_1 et m_2 sont les grandeurs limites.

Les lois des luminosités, observées dans divers amas, sont représentées par des courbes croissantes, et assez régulières. Mais ces courbes ne sont pas connues dans tout leur domaine. En ce qui concerne leur forme, du côté des étoiles faibles, partie qui n'est pas encore connue, les opinions des astronomes sont partagées. Kapteyn et van Rhijn admettent une forme symétrique, comme celle de la courbe des erreurs, donc de forme

$$c\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2(m-m_0)^2},$$

tandis que Seares et Shapley les considèrent comme des courbes toujours croissantes. Il est possible que la vérité soit entre ces deux conceptions, c'est-à-dire que la courbe soit dissymétrique, la dérivée dans la branche descendante décroissant plus vite qu'elle ne croît dans la branche ascendante.

Les observations seules pourront décider dans cette question. Puisque les plus petites grandeurs absolues observées sont égales à +11 et que les grandeurs apparentes peuvent être enregistrées jusqu'à la vingt et unième, il est évident que cette question ne peut être résolue que d'après des amas rapprochés, tout au plus jusqu'à 1000 années de lumière, telle que les Pléiades par exemple.

Dans presque tous les amas observés, ces courbes présentent une irrégularité, indiquant la présence d'un nombre plus grand d'étoiles lumineuses que le nombre obtenu d'une courbe croissant

régulièrement. La figure 15 donne la loi des luminosités dans divers amas. Mais les données sont peu uniformes, car nous les

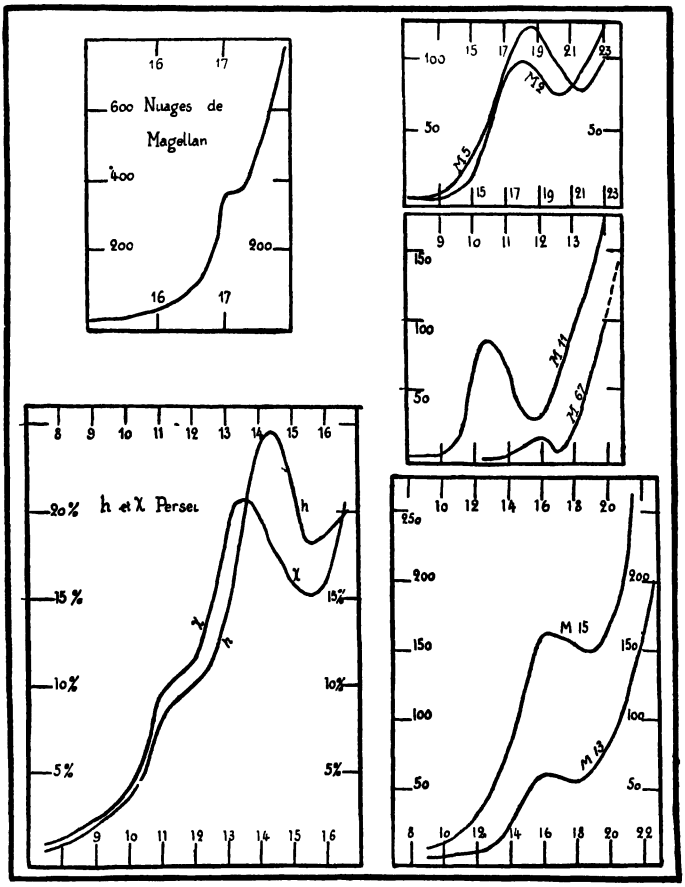

Fig. 15. — La loi des luminosités dans : Petit Nuage de Magellan, *h* et χ Perseus, M.2 — M.5 — M.11 — M.67 — M.15 — M.13. Abscisses : les grandeurs apparentes des étoiles. Ordonnées : le nombre des étoiles de diverses grandeurs.

avons recueillies dans des catalogues des divers auteurs, faits avec des instruments très différents.

11. Distribution des étoiles de diverses grandeurs dans les amas. — Tous les astronomes qui se sont occupés de ces objets ont remarqué la concentration des étoiles lumineuses vers le centre. Le fait est réel, car le rayon apparent d'un amas croît de 1 à 4

avec le temps de pose. Également, si l'on détermine le rayon, uniquement d'après les étoiles les plus lumineuses, on trouve une valeur en moyenne 4 fois plus petite que la valeur déterminée par les étoiles les plus faibles. Dans les parties périphériques des amas, il n'y a donc que des étoiles très faibles.

12. L'aplatissement des amas globulaires. — Un tiers des amas (exactement 30), considérés comme globulaires, présentent un fort aplatissement (voir *fig.* 16 et 17). Il est si évident qu'on peut tracer la direction de l'aplatissement simplement en examinant une photographie. Shapley trouve, par des dénombrements des étoiles, des valeurs très concordantes avec celles obtenues par simple estimation.

L'aplatissement, déduit de la distribution des variables des amas globulaires, concorde aussi en ce qui concerne la direction, mais donne des valeurs plus grandes (Shapley).

Comme la forme aplatie de la Voie Lactée accuse un mouvement de rotation, si les globulaires étaient des pièces détachées de la Voie Lactée à cause de cette rotation, ils devraient avoir, dans ce cas, leurs axes de rotation plus ou moins parallèles à l'axe de la Voie Lactée. Nous avons un exemple de cette nature dans le système planétaire.

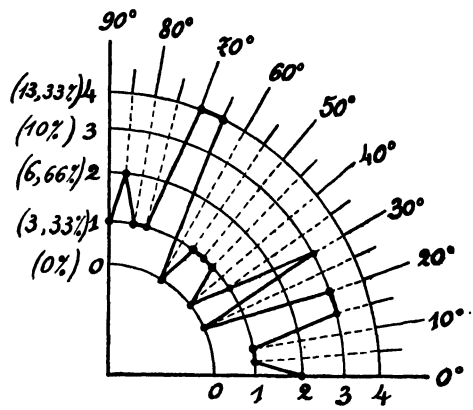

Fig. 17. — Fréquence des amas aplatis, pour diverses inclinaisons de leurs grands axes par rapport à la Voie Lactée.

La figure 17 nous donne la fréquence des globulaires aplatis, en fonction de l'angle formé par la direction de l'aplatissement

et la direction de la Voie Lactée. Puisque la majorité des globulaires ont des petites latitudes galactiques, on devrait avoir un maximum vers 0° d'inclinaison. Or, il n'en est pas ainsi, ce qui permet de conclure que les amas globulaires n'ont pas une origine commune avec la Voie Lactée, ou du moins, qu'ils ne se sont détachés du système galactique par suite de son mouvement de rotation.

13. Les grandeurs intégrales apparentes (μ) et absolues ($\mathfrak{M}$) des globulaires. — Les amas globulaires présentent dans des instruments modestes, ou sur des clichés de grande échelle comme la carte de Franklin-Adams, des aspects semblables à ceux des étoiles lumineuses, mais avec des bords moins nets. Il est possible donc d'estimer leurs grandeurs apparentes, par rapport à celles des étoiles. Holetschek a estimé ainsi les grandeurs visuelles de quelques amas globulaires. Nous avons également évalué les grandeurs photographiques d'un certain nombre d'amas globulaires d'après la carte Franklin-Adams (voir *fig.* 18). Ces estimations sont évidemment peu certaines, à cause de l'aspect présenté par les amas. Des estimations très précises pourraient être obtenues par la méthode employée par M. Ch. Fabry (23) pour l'étude de l'éclat intrinsèque du ciel, ce qui serait désirable à entreprendre.

Connaissant les grandeurs apparentes des étoiles d'un amas, on peut calculer la grandeur apparente intégrale (μ) de l'amas. En effet, supposons d'abord que toutes les étoiles de l'amas, en nombre n, sont de même grandeur apparente m.

Soit b l'éclat apparent d'une de ces étoiles, c'est-à-dire la somme de l'énergie enregistrée. Alors l'éclat apparent intégral de l'amas (B) est égal à nb. Or, d'après Pogson,

$$m = -2{,}5 \log b \qquad \text{ou} \qquad b = 10^{-0{,}4m},$$

de même

$$B = nb = 10^{-0{,}4\mu},$$

donc

$$n = \frac{10^{-0{,}4\mu}}{10^{-0{,}4m}} = 10^{-0{,}4(\mu - m)},$$

ce qui nous donne

$$\mu = m - 2{,}5 \log n.$$

Si l'amas est formé par des étoiles de diverses grandeurs appa-

rentes, et si m_1 et m_2 sont les limites de ces grandeurs, et $f(m)$ la loi des luminosités, on a alors

$$B = \int_{m_1}^{m_2} 10^{-0,4m} f(m)\, dm = \int_{m_1}^{m_2} e^{-0,921m} f(m)\, dm.$$

Puisque la forme de $f(m)$ n'est pas encore connue, il faut nous contenter de calculer la grandeur intégrale apparente de chaque classe d'étoiles et puis de les totaliser. Les valeurs ainsi obtenues sont légèrement inférieures à celles observées. Pour M. 13, par exemple, Holetschek trouve $\mu = 5,8$. En lui attribuant une loi des luminosités identique à celle qui résulte des observation de Shapley (14) sur M. 13, pour les étoiles les plus lumineuses, depuis 12,50 jusqu'à 15,50; après cette grandeur, en considérant que l'allure de la loi des luminosités est pareille à celle observée dans les Nuages de Magellan (15), avec la condition, imposée d'avance, de donner jusqu'à la 21e grandeur un total de 50000 étoiles, tel qu'il résulte de certaines observations de Pease; enfin, en prolongeant la courbe jusqu'à la 22,5 grandeur, nous avons trouvé que l'éclat de M. 13 est égal à l'éclat de 237,11 étoiles de 12,5 grandeur. Donc $\mu = 6,54$, valeur légèrement différente (+0,74 grandeur) de celle de Holetschek (5,8).

Nous avons admis une dispersion de 10 unités parmi les grandeurs des étoiles, ce qui donne alors un total de 172800 étoiles M. 13. Si nous admettons une dispersion de 19 unités pour les grandeurs absolues, telles qu'on les a observées en dehors des amas (de — 8 à + 11), on obtient un total de 1500000 étoiles, depuis 12,5 à 31,5 grandeurs. D'ailleurs, ces étoiles étant très peu lumineuses, malgré leur grand nombre, ont un effet très petit sur la grandeur apparente de l'amas, et ne peuvent pas expliquer la différence.

La valeur intégrale absolue ($\mathfrak{M}$) de l'amas peut être calculée, évidemment, de la même manière. En prenant comme base les observations de Shapley (14) sur les indices des colorations, dans M. 13 les étoiles les plus lumineuses sont des géantes de type M. La grandeur absolue (M) correspondant à ce type, toujours d'après les observations de Shapley (16), est $M = -5$. La valeur qui en résulte pour $\mathfrak{M}$ est $-10,96$. En apportant la correction (0,74), trouvée pour la grandeur apparente, on a $\mathfrak{M} = -11,70$.

Le Tableau II, établi d'après les données de Shapley, nous donne la fréquence des globulaires pour diverses grandeurs absolues.

TABLEAU II.

$\mathfrak{M}$.	de −5 à −5,5.	−5,5 à −6.	−6 à −6,5.	−6,5 à −7.	−7 à −7,5.	−7,5 à −8.	−8 à −8,5.	−8,5 à −9	−9 à −9,5.	−9,5 à −10.
Nombre des amas.	0	1	0	2	0	5	7	13	7	5

Les grandeurs absolues ont été calculées d'après les parallaxes adoptées par Shapley et les grandeurs apparentes de Holetschek (μ).

La classe modale est $-8,75$, valeur qui paraît trop modeste. Rappelons-nous qu'on a trouvé des étoiles simples de grandeur absolue égale à -8 et que la présence des géantes dans les globulaires est la caractéristique la plus spécifique de ces systèmes.

Des relations

$$\mathfrak{M} = \mu + 5 + 5 \log \pi,$$
$$M = m + 5 + 5 \log \pi,$$

on a

$$\mathfrak{M} - M = \mu - m.$$

Pour M. 13, $\mu - m = -6,7$, valeur assez bien connue et qui ne doit pas varier beaucoup d'un amas à l'autre, car les lois des luminosités et les nombres des étoiles des amas varient assez peu aussi. La dernière relation nous permet alors de nous rendre compte de la valeur de $\mathfrak{M}$ des globulaires.

Comme les géantes sont toujours présentes dans ces amas, M doit être égale à -5, sinon même à -8. Donc, $\mathfrak{M}$ peut être comprise entre $-11,7$ et $-14,7$. Les parallaxes de Shapley paraissent donc trop grandes, quant aux parallaxes de Charlier, elles sont certainement beaucoup trop grandes, car elles nous donnent des valeurs positives même pour $\mathfrak{M}$.

LA LOI DES DENSITÉS DANS LES AMAS GLOBULAIRES.

La loi de distribution de la matière à l'intérieur des amas globulaires est certainement une des données les plus importantes. Car, de l'allure de cette distribution dépend toute la Dynamique des amas. A l'aide de ces lois on pourrait décider de la parenté éventuelle entre le degré de concentration des amas, et la naissance

des géantes et des variables céphéides, ainsi que de trouver le degré de stabiltité de ces systèmes.

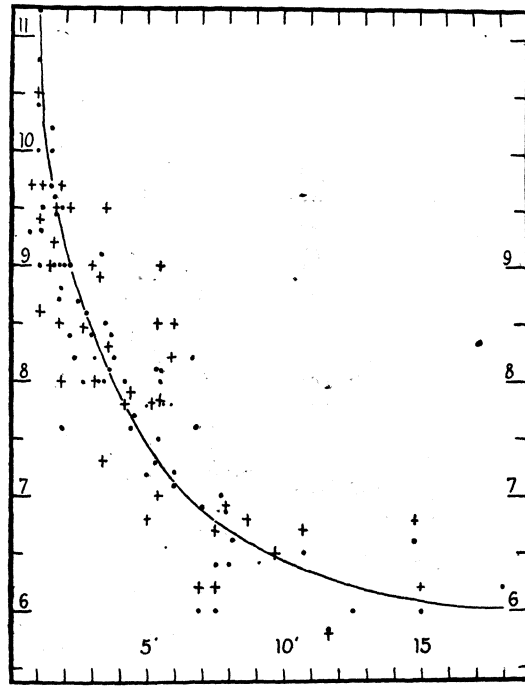

Fig. 18. — Relation entre les grandeurs intégrales des globulaires (ordonnées) et leurs diamètres apparents (abscisses).

(†) grandeur intégrale apparente visuelle observée par Holetschek.
(•) grandeur intégrale apparente photographique observée par Parvulesco.

14. Relations entre diverses lois de densités. — Soit R le rayon de l'amas, pris comme unité. Soit $\Phi(\rho)$ la loi de distribution dans l'espace, à diverses distances ρ du centre. Soit $f(x)$ la loi de densité apparente, sur le cliché, à diverses distances x, du centre. Considérons un système de coordonnées $Oxyz$, ayant l'origine au centre de l'amas, et l'axe Oz dirigé vers l'observateur. Désignons un point A, à l'intérieur de l'amas et dans le plan xOz [$A(x, O, z)$]. Soient B sa projection sur Ox, $r = \overline{OA}$ sa distance au centre, et désignons l'angle $\widehat{AOB}$ par α. Alors

$$r = \sqrt{z^2 + x^2},$$

$$\Phi(r) = \Phi\left(\sqrt{z^2 + x^2}\right)$$

et

$$f(x) = 2\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \Phi(\sqrt{z^2+x^2})\, dz.$$

Le nombre des étoiles, à l'intérieur d'un cylindre élémentaire, qui traverse l'amas le long du rayon visuel AB est

$$\int \Phi(r)\, dz\,;$$

or

$$z = x \tang \alpha = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Donc, la densité apparente est liée à la densité dans l'espace par l'équation

$$f(x) = 2\int_x^1 \frac{r\Phi(r)\, dr}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

De même, la loi apparente totalisée $\sigma(x)$, depuis $x = 0$ jusqu'à la distance x, est liée à la loi apparente $f(x)$ par la relation évidente

$$\sigma(x) = 2\pi\int_0^x x f(x)\, dx.$$

La loi de la densité lamellaire $F(x)$, obtenue par une étude lamellaire de l'amas, entre les plans $x \pm \frac{1}{2}\, dx$, est liée à la loi dans l'espace $\Phi(\rho)$ par la relation

$$F(x) = \iint \Phi(\rho)\, dy\, dz = 2\pi\int_x^1 \rho\Phi(\rho)\, d\rho.$$

Enfin, soit $\Sigma(x)$ la densité lamellaire totalisée depuis le plan $x = 0$, à x. Nous avons évidemment

$$\Sigma(x) = \int_0^x F(x)\, dn.$$

Le problème est de trouver $\Phi(\rho)$ sous forme explicite, d'après les données des observations sur la densité dans l'espace à diverses distances du centre. Comme ce problème dépasse les forces actuelles de l'analyse, ces quatre relations entre les cinq expressions des densités sont très utiles, car il suffirait de trouver l'expression analytique d'une de ces cinq fonctions, les autres pouvant alors être obtenues par des opérations analytiques.

Ajoutons, enfin, aussi les relations

$$M(x) = 4\pi\overline{m}\int_0^x \Phi(x)\,x^2\,dx$$

où $M(x)$ est la masse à l'intérieur d'une sphère de rayon x, et $\overline{m}$ la masse moyenne d'une étoile. La masse totale peut être obtenue aussi par la relation

$$M = \lim_{x=R} \sigma(x).$$

Nous avons donc aussi

$$[2\Sigma(r)]^2 = M\sigma(r).$$

15. Les valeurs de la densité dans l'espace déduites des observations. — Le professeur Zeipel (17) fut le premier à étudier la densité dans l'espace de plusieurs amas : M. 2 — 3 — 13 et 15. Il a obtenu les valeurs de $\Phi(r)$ à diverses distances du centre, d'après des observations faites sur des clichés, pris à Mont Wilson, grâce à la relation

$$(1) \qquad f(x) = 2\int_x^1 \frac{r\Phi(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dr$$

qui par la transformation

$$h = 1 - x^2,$$
$$t = 1 - r^2,$$
$$f(x) = \varphi(h),$$
$$\Phi(r) = \psi'(t) = \frac{d\psi}{dt}$$

se réduit à une équation fonctionnelle connue, et étudiée par Abel

$$\varphi(h) = \int_0^h \frac{\psi'(t)\,dt}{\sqrt{h-t}}$$

dont la solution est

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{t-h}}.$$

Pour pouvoir obtenir la relation (1) sous une forme commode pour le calcul des valeurs de $\Phi(r)$, connaissant seulement diverses valeurs de $f(x)$, intégrons par partie. Alors

$$f(x) = -2\int_x \sqrt{r^2 - x^2}\,.\,\Phi'(r)\,dr$$

ou, en dérivant par rapport à x,

$$f'_x(x) = 2x \int_x^1 \frac{\Phi'(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr.$$

Or,

$$r^2 = x^2 + z^2, \qquad dr = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} dz \qquad \text{et} \qquad dz = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

donc

$$f'_x(x) = 2x \int^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\Phi'(r)}{r} dz,$$

x étant la coordonnée courante ou la distance de l'origine jusqu'à la projection sur le cliché du rayon visuel. En intégrant le long de la droite $x = x_1$, $z = 0$ et en tenant compte que

$$y^2 = x^2 - x_1^2, \qquad dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - x_1^2}},$$

nous avons

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f'(x)}{x} dy = 2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\Phi'(r)}{r} dz$$

ou encore

$$\int_{x_1}^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 - x_1^2}} dx = \pi \int_{x_1}^1 \Phi'(r)\, dr,$$

$$\int_{x_1}^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 - x_1^2}} dx = -\pi\, \Phi(x_1),$$

$$\Phi(x_1) = -\frac{1}{\pi} \int_{x_1}^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 - x_1^2}} dx.$$

Pour enlever l'indétermination que cette relation présente pour $x = x_1$, intégrons de nouveau par partie, en remarquant que $f'(1) = 0$. Nous obtenons alors

$$\Phi(x_1) = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^1 \sqrt{x^2 - x_1^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d f(x)}{dx} \right] dx$$

ou, d'après les notations conventionnelles,

$$(2) \qquad \Phi(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_\rho^1 \sqrt{x^2 - \rho^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d f(x)}{dx} \right] dx.$$

Connaissant la valeur de $f(x)$, à diverses distances x du centre,

on peut calculer successivement les valeurs des expressions

$$\frac{df(x)}{dx};\quad \frac{1}{x}\frac{df(x)}{dx};\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{df(x)}{dx}\right]\quad \text{et}\quad \sqrt{x^2-\rho^2}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{df(x)}{dx}\right]$$

puis, calculer les valeurs de $\Phi(\rho)$, en remplaçant le deuxième membre de la relation (2) par l'expression

$$\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{n}\left\{\sqrt{x^2-\rho^2}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{df(x)}{dx}\right]\right\}_{x=r_n}\Delta x_n.$$

Cette méthode, très intéressante au point de vue théorique, est longue et laborieuse, comme on peut s'en rendre compte d'après le grand nombre des formules qu'il faut calculer pour chaque amas séparément. Nous avons étudié la loi dans l'espace de M.9 — M.10 et M.12, sur quelques clichés, pris avec le Crossley réflecteur de Lick, à l'aide d'une méthode différente, exposée dans le paragraphe suivant. Cette méthode présente l'avantage qu'une série d'expressions étant calculée, une fois pour toutes, elles peuvent être appliquées à tous les amas, en réduisant ainsi beaucoup les calculs. Elle est recommandable surtout quand il s'agit d'étudier la densité d'un grand nombre d'amas, pour une étude comparative.

16. Soient $f(x)$ la loi de la densité apparente, et $\Phi(r)$ la loi de la densité dans l'espace. Nous avons comme plus haut

$$r=\sqrt{z^2+x^2},$$
$$\Phi(r)=\Phi\left(\sqrt{z^2+x^2}\right),$$
$$f(x)=2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\Phi\left(\sqrt{z^2+x^2}\right)dz.$$

Si la matière est uniformément distribuée à l'intérieur de l'amas et si d est sa densité, alors

$$\Phi\left(\sqrt{z^2+x^2}\right)=d$$

et

$$f(x)=2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}d\,dz=2\,d\sqrt{1-x^2}$$

et la courbe représentant la loi de la densité apparente est

l'ellipse

$$\frac{x^2}{1}+\frac{f(x)^2}{4d^2}-1=0$$

dont l'excentricité est $e=\sqrt{1-4d^2}$.

Dans ce cas particulier, en connaissant sur le cliché la valeur de cette fonction en un point quelconque, la fonction est complètement déterminée, ainsi que la densité de la sphère homogène.

Supposons l'amas formé par un nombre n d'amas homogènes et concentriques, de rayons respectivement égaux à

$$\frac{n}{n}R;\quad \frac{n-1}{n}R;\quad \frac{n-2}{n}R;\quad \ldots;\quad \frac{1}{n}R$$

dont les projections sur le cliché déterminent n cercles concentriques. Connaissant la densité de chaque amas homogène composant, on connaît la densité spatiale de l'amas, à chaque point. Supposons de même n cylindres coaxiaux, dont l'axe commun, dirigé suivant le rayon visuel, se projette sur le cliché au centre de l'amas, et dont les cercles directeurs se projettent sur les n cercles concentriques. Leurs intersections avec l'amas déterminent n volumes cylindro-sphériques et leurs valeurs sont données par

$$V=\int\int z\,dx\,dy,$$

l'intégrale double s'étendant à tout le volume, et où

$$z^2=R^2-(x^2+y^2).$$

Alors

$$V=\int_0^{2\pi}d\omega\int_{r_1}^{r_2}r\sqrt{R_2-r^2}\,dr$$

ou

$$V=\frac{\pi}{6}\left[(R-r_1^2)^{\frac{3}{2}}-(R-r_2^2)^{\frac{3}{2}}\right],\tag{3}$$

r_1 et r_2 étant les rayons des cercles qui limitent leurs projections.

L'observation nous donne le nombre des étoiles de la première couronne extérieure.

Nous pouvons donc calculer le nombre total des étoiles appartenant à la première sphère homogène, de rayon $\frac{n}{n}R$, et corres-

pondant à la formule

$$4d\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4d\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi d$$

ainsi que par la formule (3), le nombre des étoiles dans chaque couronne, dues à la projection de cette sphère. En soustrayant du nombre des étoiles donné par l'observation dans la deuxième couronne le nombre des étoiles dû à la première sphère, nous obtenons le nombre des étoiles appartenant à la deuxième sphère homogène dans cette couronne, donc le nombre et la densité de la deuxième sphère concentrique et ainsi de suite.

La densité stellaire d'une sphère homogène de rayon $\frac{n-m}{n}$ R étant d_m, la densité dans l'espace de l'amas non homogène, en ce point, est donc

$$\sum_{m=0}^{m} d_m.$$

Il est évident que, plus n est grand, plus les valeurs de la courbe des densités dans l'espace sont exactes. Nous avons étudié les trois amas, en prenant $n = 20$.

Dans ce cas, on a besoin de calculer par la formule (3)

$$\sum_{n=1}^{20} n = 210$$

éléments de volumes cylindro-sphériques, qui une fois calculés sont applicables à tout autre amas.

En dirigeant les calculs dans le sens inverse, on peut calculer facilement l'aspect sur un cliché, des amas de diverses lois de concentrations.

On peut s'assurer facilement qu'un nombre restreint d'étoiles, de plus ou de moins, vers le centre de l'amas produit des grandes variations dans l'aspect de la courbe de densité. Comme au centre des amas les images se superposent, et le nombre des étoiles est mal connu, les courbes ne sont pas aussi exactement déterminées dans cette région que dans les autres parties.

17. Cas d'un amas ellipsoïdal. — La forme ellipsoïdale doit être le résultat d'un mouvement de rotation autour du petit axe.

Soit Ox cet axe, Oy, Oz étant dans le plan équatorial de l'amas. La loi de la densité dans l'espace (Φ) est évidemment une fonction de x et de r (r étant la distance au petit axe). Nous avons donc

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad \Phi = \Phi(\bar{x}, r).$$

Considérons d'abord le cas où l'observateur se trouve dans le plan équatorial.

Nous allons voir que ce problème est résoluble par les mêmes méthodes que dans le cas d'un amas sphérique.

Le problème revient à trouver, grâce aux observations, la loi de la distribution $f(r)$, dans le cercle $x = \bar{x}$, parallèle au plan équatorial de l'amas.

Pratiquement, nous devons remplacer ces cercles par des lamelles parallèles au grand axe. Considérons l'axe Oz, dirigé vers l'observateur. La loi de la densité $F(y)$, observée dans une lamelle quelconque, n'est autre chose que la loi $f(r)$, dans le cercle considéré et que nous cherchons, projeté sur son diamètre. Or, elles sont reliées par l'équation intégrale évidente

$$F(y) = 2\int_y^1 f(r)\,dr$$

ou encore

$$F(y) = 2\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{f(\sqrt{y^2+z^2})\,z}{\sqrt{y^2+z^2}}\,dz,$$

et par la substitution

$$1 - y^2 = \xi,$$
$$y^2 + z^2 = 1 - \zeta,$$
$$F(y) = F_1(\xi),$$
$$f(\sqrt{y^2+z^2}) = f'_1(\zeta),$$

elle devient

$$F_1(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{f'_1(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta}}\,d\zeta,$$

équation intégrale, type Abel, déjà rencontrée dans l'étude d'un amas sphérique.

Il fallait nous y attendre, car ces deux problèmes représentent les projections des densités d'une multiplicité, sur la multiplicité diamétrale d'une dimension moindre.

En traitant donc les lois des densités observées dans les lamelles à diverses distances $x = \bar{x}$, par la même méthode qu'on applique

à la loi plane d'un amas sphérique, on obtient les lois cherchées des cercles parallèles à diverses distances $\bar{x}$ du centre de l'ellipsoïde. Une pareille étude nous permettrait de résoudre un problème important. Elle pourrait nous apprendre si la densité sur des ellipsoïdes homofocaux à l'amas est constante ou non, c'est-à-dire s'il existe ou non un plan du maximum des aires dans les amas.

Dans le cas où l'observateur est en dehors du plan équatorial, le problème est pratiquement insoluble. Remarquons d'abord que c'est le dernier cas à examiner, car les deux axes équatoriaux de l'amas sont égaux.

L'inclinaison du petit axe peut être déterminée, en connaissant les projections des pôles de l'ellipsoïde sur le cliché, positions qui peuvent être fournies par une étude lamellaire du cliché. Si cette inclinaison est nulle, la variation des « indices de stabilité » (m) [*voir* Chap. V] que l'on obtient de l'étude de chaque lamelle de diverses distances (x), nous donne une courbe

$$m = \psi(x),$$

d'une allure régulière, sans maxima, minima ou points d'inflexions.

Si l'axe polaire est incliné, la courbe $m = \psi(x)$ présentera un point d'inflexion, correspondant à la lamelle qui contient la projection du pôle.

L'inclinaison de l'axe polaire peut être tirée des observations, mais la loi dans l'espace de l'amas est pratiquement insoluble. Car, une lamelle représente la projection d'une ellipse dans l'amas. De la loi de la densité observée dans une lamelle, nous pouvons déduire la loi de la densité dans l'ellipse, qui se projette suivant cette lamelle, c'est-à-dire sur son grand axe. Elles sont liées par une équation intégrale, de même type que plus haut. Pour obtenir des informations sur les lois de densités des cercles parallèles au plan équatorial de l'amas, ce qui est le but du problème, nous devons faire une nouvelle étude lamellaire de cette ellipse. Or, les nouvelles lamelles obtenues ainsi correspondent, dans les observations faites sur le cliché, à un seul point. Nous devons donc obtenir les lois cherchées, de l'étude d'un élément de surface, ce que dépasse de beaucoup la précision des observations dans les amas.

18. La loi de la densité dans M.9, M.10 et M.12. — Nous avons étudié ces amas, en les considérant sphériques. D'ailleurs, de l'étude du Dr Shapley (18) sur l'aplatissement des amas, il résulte qu'ils ne sont pas aplatis.

La surface d'un cliché, telle qu'elle résulte de l'échelle communiquée par le Dr Aitken ($1^{mm} = 38'',7$) est de 1,137 degré carré. Nous avons utilisé seulement la partie centrale d'une surface de 0,620 degré carré. Au-dessus des clichés, nous avons mis un réseau orthogonal photographique, gélatine sur gélatine. Le côté d'un carré du réseau était de $0^{mm},318$. Les positions des étoiles, à l'intérieur de chaque petit carré, ont été relevées à l'aide d'un microscope grossissant environ 4 fois. L'étude concerne le nombre et les positions des étoiles, et non pas leurs grandeurs. Des grossissements jusqu'à 60 fois, que nous avons essayés, nous paraissent très utiles dans l'étude des amas globulaires, surtout de leurs parties centrales. C'est un moyen excellent, de déceler les vraies et fausses images des étoiles, ainsi que les images très rapprochées.

Le nombre total des étoiles des clichés étudiés, des étoiles considérées comme appartenant aux amas, etc., est donné dans le Tableau III.

TABLEAU III.

Amas.	Coordonnées équatoriales α, δ et galactiques G et g (1900).	Rayon apparent.	Temps de pose.	Nombre des étoiles du cliché.	appartenant à l'amas.	%	dues au fond du ciel.	%
M.9 (1) N.G.C. 6333	α = 17h13m20s δ = −18°24′,7 G = 334° g = + 9°	13′,3	h m 2.00	3277	807	24,6	2470	75,4
M.10 N.G.C. 6254	α = 16h51m53s δ = −3°56′,7 G = 343° g = +22°	20,1	2.00	4562	3264	71,5	1290	28,5
M.12 N.G.C. 6218	α = 16h 42m 0s δ = −1°46′ G = 344° g = + 25°	21	1.05	2681	2144	79,9	537	20,1

(1) Les observations concernant M.9 ont été faites par Mme Grigouroff, du

Les valeurs observées des lois apparentes, et celles qui en résultent pour les densités dans l'espace, sont données dans les Tableaux IV et V. Les valeurs qui sont douteuses, à cause du grand nombre d'images près du centre, sont mises entre crochets.

TABLEAU IV.

x.	M.9.	C = 6,1.	M.12.	C = 5,7.	M.10.	C = 5.
0.....	[177,835]	179,350	[138,695]	142,290	[87,162]	87,172
0,1...	[149,659]	141,953	[118,260]	114,223	76,689	74,280
0,2...	[87,433]	80,118	73,913	68,303	55,741	49,064
0,3...	49,433	40,041	41,260	35,928	33,614	28,462
0,4...	28,299	20,134	21,782	18,785	19,763	16,010
0,5...	14,175	10,665	11,217	10,205	10,135	9,172
0,6...	5,932	6,000	6,087	5,843	5,844	5,446
0,7...	3,556	3,577	3,391	3,526	3,378	3,344
0,8...	2,247	2,242	2,173	2,227	2,172	2,172
0,9...	1,453	1,489	1,391	1,468	1,440	1,449
1,0...	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

TABLEAU V.

x.	M.9.	C = 6,1.	M.12.	C = 5,7.	M.10.	C = 5.	x^{3}.	x^{-4}.
0.....	[6723,333]	7831,88	[5643,057]	5707,012	[257,190]	267,473	∞	∞
0,1...	[502,013]	493,51	[433,550]	372,577	216,681	218,961	1000	10000
0,2...	[252,060]	226,93	230,506	195,925	143,338	130,296	125	625,00
0,3...	119,933	101,46	113,322	87,919	85,714	66,019	37,04	123,4
0,4...	62,006	42,79	58,886	39,024	45,043	32,157	15,62	39,06
0,5...	26,053	19,35	25,322	18,205	19,761	16,019	8,00	16,00
0,6...	10,400	9,46	9,531	9,136	8,576	8,325	4,63	7,72
0,7...	5,326	4,96	5,069	4,819	4,762	4,588	2,92	4,16
0,8...	2,853	2,75	2,729	2,714	2,381	2,645	1,95	2,44
0,9...	1,533	1,61	1,601	1,608	1,576	1,598	1,37	1,52
1,0...	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Le Tableau IV et la figure 19 nous permettent d'en tirer les caractéristiques suivantes, concernant les lois de la densité dans l'espace :

a. Les courbes de distributions des étoiles sont très rapprochées pour ces amas, jusque vers 0,2R.

Service de la Carte du Ciel de l'Observatoire de Paris. La distribution des étoiles, dues au fond du Ciel, étant très dissymétrique sur ce cliché, à cause de la proximité de la Voie Lactée, la loi déduite en est moins précise.

b. Ces amas sont 4000 fois (en moyenne) plus concentrés dans la région centrale qu'à la périphérie. Mais, ce rapport dépend beaucoup de l'estimation du rayon apparent, qui est une donnée très incertaine.

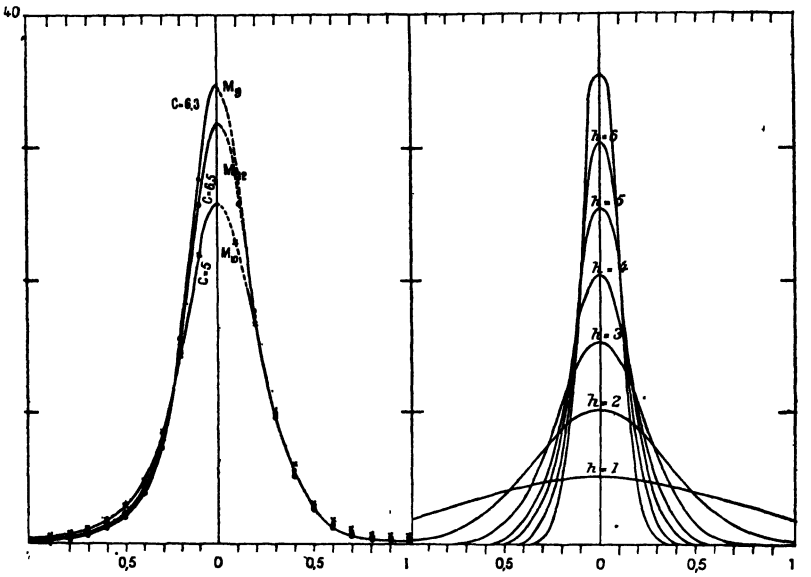

Fig. 19.

A gauche : les lois de la distribution des étoiles, observées dans M.9, M.10 et M.12 (premier quadrant) et les distributions des molécules dans des boules gazeuses en équilibre adiabatique (deuxième quadrant).

A droite : les courbes des erreurs correspondent à divers modules de précision

c. Les amas plus concentrés au centre (M.9 par exemple) ont des densités plus petites vers la périphérie, et inversement (M. 10). Le centre paraît s'enrichir au détriment de la périphérie.

Observations. — En estimant le rayon apparent plus grand, la densité centrale augmente par rapport à la densité périphérique. La valeur du rayon apparent dépend beaucoup du temps de pose. Une étude instructive serait d'étudier la variation que produirait éventuellement le temps de pose sur la loi de la densité. Puisque les lois apparentes conservent l'ordre d'une classification des amas d'après leur degré de concentration dans l'espace, il serait suffisant d'étudier cette variation seulement sur les lois apparentes.

19. Dans les colonnes 3, 5 et 7 des Tableaux IV et V se trouvent les densités, planes et dans l'espace, correspondant à des distributions données par des courbes de la famille :

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{3\alpha^2\beta}}\left(\frac{3\alpha^2\beta}{3+\alpha^4\beta^2x^2}\right)^2 \quad \text{pour le plan,}$$

et

$$\Phi(r) = \left(\frac{3\alpha^2\beta}{3+\alpha^4\beta^2r^2}\right)^{\frac{5}{2}} \quad \text{dans l'espace,}$$

où $\alpha^2\beta = c$.

Cette dernière famille de courbes représente la distribution des molécules dans une boule de gaz en équilibre adiabatique, correspondant au problème suivant :

Soient $\Phi(r)$, $p(r)$ et $t(r)$ la densité, la pression et la température, dans la boule considérée, à la distance r du centre. En cas d'équilibre adiabatique (convectif), nous avons entre ces fonctions les relations

$$p(r) = at(r).\Phi(r) = b\,\Phi^{\gamma}(r),$$

où a et b sont des constantes, et γ le rapport des chaleurs spécifiques (c_p et c_v), à pression et volume constants :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Pour l'équilibre adiabatique, $n = 5$, $\gamma = 1,2$

La masse, totale à l'intérieur d'une sphère de rayon (r), étant (m_r),

$$m_r = 4\pi\int r^2\Phi(r)\,dr$$

et

$$(2) \qquad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\Phi(r).$$

Écrivons l'équation fondamentale de l'équilibre d'un gaz, dite *l'équation du baromètre*, qui régit en Hydrostatique la variation de la pression avec l'altitude, ou encore la relation qui existe à chaque point de la boule entre l'énergie cinétique et potentielle,

$$(3) \qquad \frac{dp(r)}{dr} = -\frac{cm\Phi(r)}{r^2},$$

où c est une constante.

Les équations (2) et (3) nous donnent, en simplifiant les nota-

tions,

$$\frac{dp}{dr} = b\frac{d\Phi^\gamma}{dr} = -\frac{cm\Phi}{r^2}$$

où

$$\frac{br^2}{\Phi}\frac{d\Phi^\gamma}{dr} = -cm,$$

d'où, en dérivant,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{br^2}{\Phi}\frac{d\Phi^\gamma}{dr}\right] = -c\frac{dm}{dr} = -4\pi c\, r^2\Phi,$$

et après un choix convenable des constantes

$$\frac{d^2(r\Phi^{\gamma-1})}{dr^2} + r^2\Phi = 0.$$

Équation qui nous donne la densité spatiale cherchée en fonction de r. Elle peut s'écrire encore

$$\frac{d^2\Phi^{\gamma-1}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi^{\gamma-1}}{dr} + \Phi = 0.$$

Et, par la substitution

$$\Phi = x^{\frac{1}{\gamma-1}} = x^n,$$

elle devient

$$\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dx}{dr} + x^n = 0.$$

Dans notre cas ($n = 5$), elle admet la famille des courbes intégrales

$$x = \left(\frac{3\alpha^2\beta}{3 + \alpha^4\beta^2 r^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

où α et β sont des constantes.

Donc, la loi dans l'espace que nous cherchons est

$$\Phi(r) = \left(\frac{3\alpha^2\beta}{3 + \alpha^4\beta^2 r^2}\right)^{\frac{5}{2}}.$$

Les lois : apparente $f(x)$, lamellaire $F(r)$, lamellaire totalisée $\Sigma(r)$, et plane totalisée $\sigma(r)$, qui leur correspondent, sont :

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{3\alpha^2\beta}}\left(\frac{3\alpha^2\beta}{3 + \alpha^4\beta^2 x^2}\right)^2, \qquad F(r) = \frac{6\pi}{3\alpha^2\beta}\left(\frac{3\alpha^2\beta}{3 + \alpha^4\beta^2 r^2}\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$\Sigma(r) = 2\pi r\left(\frac{3\alpha^2\beta}{3 + \alpha^4\beta^2 r^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \sigma(r) = \frac{12\pi}{\sqrt{3\alpha^2\beta}}\left(\frac{\alpha^4\beta^2 r^2}{3 + \alpha^4\beta^2 r^4}\right).$$

Ces courbes sont assez rapprochées des courbes observées dans M.9, M.10 et M.12, comme on peut en juger d'après les Tableaux IV et V où sont données les lois planes et dans l'espace, ainsi que les valeurs des distributions, planes et spatiales, de ces courbes, les plus rapprochées de nos amas, c'est-à-dire

$c = 6{,}1$ pour M.9, $c = 5{,}7$ pour M.12 et $C = 5$ pour M.10,

où $c = \alpha^2\beta$.

Mais, nous ne voyons pas dans ces rapprochements de raisons à pousser jusqu'à une identité la similitude qui existe sur certains points entre un amas globulaire et une boule de gaz.

Dans certaines recherches (*voir* Chap. VI), nous avons substitué ces courbes théoriques aux courbes observées. Dans d'autres (*voir* Chap. III), nous avons substitué la famille des courbes

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2},$$

qui sont également assez rapprochées, dans leur ensemble, des courbes observées dans les amas et des courbes théoriques du paragraphe précédent. L'aspect, de ces trois familles de courbes, est donné dans la figure 19.

20. La colonne 8, du Tableau V, nous donne les valeurs de la densité dans l'espace $[\rho(x) = \text{const.}x^{-3}]$ d'un amas globulaire théorique, dont les étoiles oscillent toutes le long des diamètres déterminés par leurs rayons vecteurs, par des mouvements uniformes, donc, d'un amas en régime permanent (*voir* Chap. IV), mais artificiel à cause de l'hypothèse des mouvements uniformes. Comme dans les amas, les vitesses des étoiles augmentent en s'approchant du centre, la densité à leurs intérieurs devrait être plus petite que dans cet amas artificiel. Or, les observations nous donnent, au contraire, des valeurs plus grandes; il en résulte donc que, dans les amas globulaires, il y a un grand nombre d'étoiles qui, dans leurs oscillations, n'arrivent pas jusqu'à la périphérie.

CHAPITRE II.

LE PRINCIPE DE L'ÉQUIPARTITION DE L'ÉNERGIE DANS LES AMAS GLOBULAIRES.

21. On a observé, depuis une quinzaine d'années, une relation entre le type spectral des étoiles de notre système galactique, et leurs vitesses radiales (19), ainsi qu'une autre entre le type et le mouvement propre (20).

Dans le Tableau VI nous reproduisons, d'après Boss et Campbell, les valeurs moyennes des mouvements propres et des vitesses radiales des étoiles de diverses classes spectrales. Ces relations sont évidemment une conséquence de la relation qui existe entre les types et les vitesses absolues des étoiles, puisque les mouvements propres et les vitesses radiales moyennes sont proportionnels aux vitesses absolues d'un groupe d'étoiles. Quand on eut trouvé que les types des étoiles étaient des fonctions de leurs masses et que les étoiles du côté A de la classification d'Harvard étaient plus massives que celles du côté M, le principe de l'équipartition de l'énergie commença à se dévoiler aux astronomes.

Des recherches, faites par des méthodes différentes, sur les masses des étoiles de divers types spectraux et sur la vitesse moyenne des étoiles de diverses classes spectrales, n'ont fait que préciser davantage la relation de l'équipartition :

$$\frac{1}{2}\overline{m}\,V_m^2 = \text{const.}$$

TABLEAU VI.

Type.	Vitesse radiale (km/sec).	Mouvement propre (secondes d'arc par année).
B	6,3	6,3
A	10,5	10,2
F	14,4	16,2
G	15,9	18,6
K	16,8	15,1
M	17,1	17,1

TABLEAU VII.

Type.	Grandeur absolue.	Log $\overline{m}$.	Log V_m^2.	Log $\overline{m}V_m^2$.	Résidu.
B_3.....	—0,6	0,95	2,34	(3,29)	(+0,28)
$B_{8,5}$.....	+0,4	0,81	2,40	(3,21)	(+0,36)
A_0.....	0,7	0,78	2,78	3,56	+0,01
A_2.....	1,0	0,70	2,87	3,57	0
A_5.....	1,5	0,60	2,95	3,55	+0,02
F_0.....	2,4	0,40	3,11	3,51	+0,06
F_5.....	3,3	0,19	3,36	3,55	+0,02
G_0.....	4,4	$\bar{1}$,99	3,62	3,61	—0,04
G_5.....	5,2	$\bar{1}$,88	3,78	3,66	—0,09
K_0.....	5,9	$\bar{1}$,83	3,80	3,63	—0,06
K_5.....	7,1	$\bar{1}$,79	3,74	3,53	+0,04
M_2.....	9,8	$\bar{1}$,77	3,78	3,55	+0,02

Le Tableau VII, reproduit d'après Seares (21), constitue une vérification éclatante du principe, telle qu'elle résulte des valeurs moyennes des masses ($\overline{m}$) et des vitesses moyennes (V_m) les plus probables, déduites par diverses voies.

Dans ce Chapitre, nous abordons la démonstration de ce principe, et ses conséquences immenses, concernant la structure des amas, en appliquant les méthodes de la Mécanique statistique, développées par Maxwell (22), Gibbs (23), Poincaré (24), etc.

22. Soit n le nombre des étoiles qui composent un amas donné. Soient

$$x_n, y_n, z_n; u_n, v_n, w_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

les coordonnées de ces étoiles (par rapport à un système de trois axes orthogonaux, ayant l'origine au centre de l'amas) et les projections de leurs vitesses sur les mêmes axes. Représentons l'amas donné, dans un espace généralisé ($\mathcal{G}$), ayant autant de dimensions qu'il y a de variables nécessaires pour caractériser complètement la distribution des étoiles et de leurs vitesses.

L'espace $\mathcal{G}$ aura donc $6n$ dimensions. A toute configuration de l'amas, accompagnée d'une distribution quelconque des vitesses, correspond dans l'espace $\mathcal{G}$ un point représentatif (π). Si nous considérons les étoiles comme des points mathématiques, la réciproque est aussi vraie. Mais, puisque les étoiles ont un diamètre

moyen — d — fini, en vertu du principe de l'impénétrabilité de la matière, toute configuration pour laquelle nous aurons

$$(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2 < d^2 \qquad [m; n = 1, 2, \ldots, n]$$

est physiquement impossible. Cette inégalité est limitée par le cas où deux étoiles sont en contact. L'espace $\mathfrak{S}$ est donc lacunaire. Les lacunes sont des multiplicités d'ordre inférieur à $6n$, et de dimensions négligeables par rapport aux dimensions de l'espace $\mathfrak{S}$. Les dimensions d'un amas, et les vitesses de ses étoiles étant finies, l'espace $\mathfrak{S}$ l'est également.

Quand l'amas se transforme, son point représentatif π décrit dans l'espace $\mathfrak{S}$ une trajectoire quelconque, qui caractérise l'ensemble des transformations subies par l'amas, par suite son évolution.

Considérant un nombre infini d'amas, de mêmes nombres d'étoiles, mais de configurations différentes et de distributions de vitesses différentes, ou encore considérant le même amas, dans un nombre infini de configurations et de distributions de vitesses différentes, leurs points représentatifs remplissent tout l'espace $\mathfrak{S}$, sauf les lacunes. La densité des points représentatifs peut être agrandie autant que nous voulons. Nous pouvons donc considérer $\mathfrak{S}$ comme un milieu continu.

Par un point quelconque de l'espace $\mathfrak{S}$, ne peut passer qu'une seule trajectoire représentative de l'évolution d'un système, car il est évidemment impossible que deux de nos amas, ayant exactement la même configuration et la même distribution de vitesses, ne subissent pas d'évolutions identiques.

Si nous fixons donc, à un certain moment, les positions et les vitesses des étoiles d'un amas, son évolution et la trajectoire de son point représentatif π, dans l'espace $\mathfrak{S}$, sont définitivement et uniformément déterminées. Quand deux étoiles de l'amas viennent en contact dans l'espace $\mathfrak{S}$ la trajectoire du point π est tangente à une lacune et réciproquement.

La densité de l'espace $\mathfrak{S}$, en points représentatifs peut être laissée arbitraire. Mais, nous verrons que leur distribution est uniforme.

23. Admettons qu'il existe une fonction des coordonnées de l'es-

pace $\mathcal{G}$, qui reste constante pendant toute l'évolution de notre amas. Par exemple, l'énergie totale (E) du système. Il est clair que E sera la même tout le long de la trajectoire du point π. La trajectoire se trouve donc sur un certain lieu géométrique de l'espace généralisé. Également, s'il existe d'autres invariants de cette nature, $E_1, E_2, \ldots, E_p$, fonctions des coordonnées du point π, le point représentatif devant se trouver sur tous les lieux géométriques correspondants, sa trajectoire, qui représente l'évolution du système, doit se trouver à l'intersection de ces lieux. Car, leur intersection est le seul lieu qui satisfait à l'ensemble des conditions :

$$E = \text{const.}, \qquad E_1 = \text{const.}, \qquad E_2 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad E_p = \text{const.}$$

24. Comme suite de ces considérations, il est évident que le problème : quelle est la probabilité pour qu'un amas satisfasse à une condition donnée (E), est identique au problème : pour quelle région de l'espace $\mathcal{G}$, cette condition (E) est satisfaite.

Soit δ la densité d'un milieu de l'espace ordinaire en un point $M(x, y, z)$. La probabilité pour qu'à un moment donné, un point du milieu soit à l'intérieur d'un élément de volume,

$$dv = dx\, dy\, dz,$$

est proportionnelle à

$$\delta.\, dx\, dy\, dz.$$

La probabilité pour que le même point soit à l'intérieur d'un volume fini, V, est proportionnelle à l'intégrale triple, étendue au volume V,

$$\int\int\int_V \delta.\, dx\, dy\, dz.$$

Si $f(x, y, z)$ est une fonction quelconque des coordonnées du point M, sa valeur moyenne à l'intérieur du volume V est donnée par

$$\frac{1}{V}\int\int\int_V \delta.\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Par analogie, si δ est la densité de l'espace $\mathcal{G}$ en points représentatifs π, la probabilité qu'un point quelconque $\pi(x_m, y_m, z_m, u_m, v_m, w_m)$ soit à un certain moment à l'intérieur d'une multiplicité V, est proportionnelle de l'intégrale multiple, étendue au

volume V,

$$\int\int\ldots\int \delta.\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_n\, dz_1 \ldots dz_n\, du_1 \ldots dw_n,$$

et la valeur moyenne d'une certaine fonction, $f(x_1, \ldots, x_n, \ldots, z_n, u_1, \ldots, w_n)$, à l'intérieur de V sera

$$\frac{1}{V}\int\int\ldots\int \delta.\, f.\, dx_1 \ldots dw_n.$$

Elle représente l'espérance mathématique d'un joueur, qui gagne la somme f chaque fois que π se trouve à l'intérieur de V.

25. Soient N le degré de liberté de l'amas (donc $N = 3n$), et

$$q_1 q_2 \ldots q_N q'_1 q'_2 \ldots q'_N$$

les coordonnées de π dans un espace $\mathcal{G}$, à 2N dimensions, où

$$q_N \text{ et } q'_N \quad (N = 1, 2, 3, \ldots, 3n)$$

sont, respectivement, les coordonnées des étoiles de l'amas et les projections de leurs vitesses. Soient U, T et $E = T + U$ les énergies potentielle, cinétique et totale. U est fonction de q_N et T est fonction de q_N et de q'_N. Posons

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 3n).$$

Puisque T est fonction de IIème degré par rapport à q'_i, les p_i sont des fonctions linéaires par rapport à q'_i.

Remplaçons les coordonnées du point π par les coordonnées canoniques

$$q_1, q_2, \ldots, q_N, \quad p_1, p_2, \ldots, p_N.$$

Les mouvements des étoiles de l'amas seront donc représentés par les équations canoniques

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, N).$$

Posons

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} = Q_i, \qquad -\frac{\partial E}{\partial q_i} = P_i.$$

Les équations canoniques deviennent alors

$$\frac{dq_i}{Q_i} = \frac{dp_i}{P_i} = dt.$$

Puisque les p_i et q_i sont les coordonnées du point π dans l'espace $\mathcal{G}$, et les P_i et Q_i les composantes de leurs vitesses, ces dernières équations déterminent la trajectoire du point π dans l'espace $\mathcal{G}$.

Or, les P_i et Q_i sont uniformément déterminées pour un point π donné. Il en résulte que, par un point quelconque de l'espace $\mathcal{G}$, passe une seule trajectoire.

D'un autre côté, puisque P_i et Q_i sont indépendantes du temps (t), il en résulte encore que les lignes de courant, dans l'espace $\mathcal{G}$, se confondent avec les trajectoires du point π.

Le mouvement des points qui remplissent l'espace $\mathcal{G}$ est donc gouverné par les lois du régime permanent.

Il est facile de s'assurer que l'équation de l'incompressibilité,

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{dQ_i}{dq_i} + \frac{dP_i}{dp_i} \right) = 0,$$

est également satisfaite dans le milieu de l'espace $\mathcal{G}$.

26. Soit δ la densité du milieu de l'espace $\mathcal{G}$, en un point M de coordonnées

$$p_N, \quad q_N \quad (N = 1, 2, 3, \ldots, N).$$

Le nombre des points π qui se trouvent à un moment donné dans l'élément de volume dv,

$$dv = dq_1\, dq_2 \ldots dq_N\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_N,$$

défini par les faces $p_1 \pm \frac{1}{2} dp_1 \ldots, q_N \pm \frac{1}{2} dq_N$, est égal à

$$\delta\, dv.$$

Les points représentatifs doivent être regardés comme entrant et sortant de cet élément de volume, à chaque instant, par chaque face ds, à $2N - 1$ dimensions.

Évaluons le flux des points π à travers l'élément de volume dv dans le temps dt. Il est égal à la variation de $\delta . dv$, pendant l'élé-

ment de temps dt, c'est-à-dire à

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta . dv)\, dt.$$

Il est égal aussi à la somme des flux à travers chaque paire de faces, directement opposées, de l'élément de volume.

Soit $2ds$ la surface de deux faces opposées, perpendiculaires à un même axe de coordonnées, et portées aux distances $p_1 \pm \frac{1}{2} dp_1$. Nous avons donc

$$dp_1\, ds = dv.$$

Les points π, qui franchissent la face p_1 dans un sens, ont une vitesse perpendiculaire à cette face et égale à $\frac{dp_1}{dt}$. Le flux de l'élément dv à travers cette face est donc

$$\delta \frac{dp_1}{dt}\, ds\, dt.$$

Le flux, dans le sens contraire, est égal et de signe contraire. Le flux à travers la face opposée est donné par

$$-\delta \frac{dp_1}{dt}\, ds\, dt$$

sans être nécessairement égal et de signe contraire, car les deux faces sont séparées par une certaine distance. Leur somme algébrique est

$$-\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\delta \frac{dp_1}{dt}\right) dp_1\, ds\, dt = -\frac{\partial}{\partial p_1}(\delta p'_1)\, dv\, dt.$$

En calculant la somme des flux à travers chaque paire de faces nous obtenons la variation $\delta\, dv$, pendant dt. Donc

$$-\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial p_i}(\delta p'_i) + \frac{\partial}{\partial q_i}(\delta q'_i)\right] dv . dt = \frac{\partial}{\partial t}(\delta\, dv)\, dt,$$

ou

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial p_i}(\delta p'_i) + \frac{\partial}{\partial q_i}(\delta q'_i)\right] = 0,$$

ou encore

$$(4) \qquad \frac{\partial \delta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial \delta}{\partial p_i} p'_i + \frac{\partial \delta}{\partial q_i} q'_i\right] + \delta \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial p'_i}{\partial p_i} + \frac{\partial q'_i}{\partial q_i}\right] = 0.$$

Mais, puisque δ est fonction de p_i, q_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ ainsi que de t, nous avons

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{\partial\delta}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial\delta}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial\delta}{\partial q_N}\frac{dq_N}{dt}$$

ou

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial\delta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial\delta}{\partial p_i}p'_i + \frac{\partial\delta}{\partial q_i}q'_i\right]$$

et l'équation (4) devient

$$\frac{d\delta}{dt} + \delta\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial p'_i}{\partial p_i} + \frac{\partial q'_i}{\partial q_i}\right] = 0$$

ou encore

$$\frac{d\delta}{dt} + \delta\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial P_i}{\partial p_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_i}\right] = 0.$$

Et en vertu de l'équation de l'incompressibilité

$$\frac{d\delta}{dt} = 0.$$

Donc, le milieu des points π dans l'espace $\mathcal{G}$ a une densité constante.

27. Cas d'un amas non conservatif. — Il est intéressant d'examiner ce qui se passe dans le cas où l'énergie de l'amas ne se conserverait pas. En ce qui concerne l'aspect mécanique de l'énergie, il semble que ce soit le cas général dans la nature. Supposons donc qu'il existe une fonction de dissipation F. Si nous nous mettons au point de vue de l'énergie mécanique, alors, même l'énergie qui se transforme dans d'autres aspects physiques peut être considérée comme « perdue ». Dans ce cas

$$F = -\frac{dE}{dt}.$$

Si nous envisageons tous les aspects de l'énergie, alors l'énergie réellement perdue est une fraction de $\frac{dE}{dt}$, donc

$$F = -\frac{1}{\mu}\frac{dE}{dt},$$

où μ est une constante positive.

Les équations canoniques du mouvement deviennent

$$(5)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial q'_i}.$$

Posons

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} = Q_i \qquad \text{et} \qquad -\frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial q'_i} = P_i.$$

Les équations canoniques deviennent

$$\frac{dq_i}{Q_i} = \frac{dp_i}{P_i} = dt.$$

Puisque E est une fonction quadratique de q'_i, dans ce cas aussi les composantes des vitesses du point π sont des fonctions seulement des coordonnées de l'espace $\mathfrak{S}$, et la trajectoire qui représente l'évolution du système est univoque et définitivement déterminée. De même, dans ce cas aussi, les mouvements des points représentatifs sont régis par les lois du régime permanent.

28. Mais, l'identité qui a existé jusqu'ici entre les propriétés des espaces $\mathfrak{S}$, d'un amas conservatif et d'un autre non conservatif, ne subsiste plus, en ce qui concerne la densité du milieu des points π. Car, si l'amas n'est pas conservatif, au sens thermodynamique, ou seulement mécanique, et si la fonction de dissipation F existe, alors les points représentatifs ne constituent plus un milieu homogène.

La densité croît à mesure que E décroît, et les points π tendent à s'agglomérer vers la région de l'espace $\mathfrak{S}$, ou E est minime. Les dimensions de l'espace $\mathfrak{S}$ également diminuent, jusqu'à ce qu'il soit réduit à l'origine, si F ne cesse pas son action. En effet, des équations (5) qui régissent le mouvement dans ce cas, nous obtenons

$$\frac{\partial p'_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial^2 E}{\partial p_i\,\partial q_i} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial p_i\,\partial q'_i},$$

$$\frac{\partial q'_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_i\,\partial q_i},$$

donc

$$\frac{\partial p'_i}{\partial p_i} + \frac{\partial q'_i}{\partial q_i} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial p_i\,\partial q'_i}$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial p'_i}{\partial p_i} + \frac{\partial q'_i}{\partial q_i}\right) = -\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 F}{\partial p_i\,\partial q'_i}.$$

Mais puisque

$$\frac{d\delta}{dt} + \delta \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial p'_i}{\partial p_i} + \frac{\partial q'_i}{\partial q_i} \right) = 0,$$

nous avons

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\delta}{\mu} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \, \partial q'_i}.$$

Or, comme F est une fonction de q_i et q'_i, nous avons

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\delta}{\mu} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial q'_i \, \partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial p_i}$$

ou encore

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\delta}{\mu} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial q'_j \, \partial q'_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_j \, \partial p_i}.$$

Par une transformation linéaire, effectuée sur les p_i, E devient une somme des carrés

$$E = \frac{1}{2} \sum a_i p_i^2,$$

et puisque F a une forme quadratique,

$$F = \frac{1}{2} \sum b_i q_i'^2 + \sum \sum c_{jk} q'_j q'_k \qquad (a,\ b,\ c, \text{ constantes}),$$

la variation de la densité (δ), par rapport au temps, peut être mise alors sous la forme

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\delta}{\mu} \sum a_i b_i.$$

Or, F et E doivent être positives. Alors, les a_i et b_i sont nécessairement positifs et la densité des points π croît donc avec le temps. Dans notre amas, cela correspond à une agglomération des étoiles vers le centre. Si, au contraire, F est négatif, l'énergie augmente, et le système subit une expansion.

29. Les amas sont-ils conservatifs ? — Si l'on n'admet pas la création de l'énergie « ex nihilo », l'existence de l'énergie cinétique et potentielle dans l'Univers, auquel il faut attribuer un âge infini, ainsi que dans les amas stellaires, nous permettrait de donner une réponse affirmative, sans beaucoup insister.

Les amas isolés, tels que le système galactique où les globulaires, étant des systèmes soumis à l'action des forces intérieures seulement, qui ne dépendent que de la distribution de leurs étoiles, sont nécessairement conservatifs.

En effet, supposons que nous transformons l'amas, de la configuration A_0, dans laquelle il se trouve à un certain moment, dans une autre configuration A_1.

Supposons, également, que cette transformation se fait sans vitesses, ni initiale ni finale. Soit S l'arc de la trajectoire décrit par le point π dans l'espace $\mathcal{C}_l$, arc qui caractérise l'ensemble des transformations de A_0 à A_1.

La variation de la force vive étant nulle, la somme des travaux des forces intérieures ($\mathfrak{T}_i$), et extérieures ($\mathfrak{T}_e$), est nul

$$\mathfrak{T}_i + \mathfrak{T}_e = 0.$$

Supposons $\mathfrak{T}_i < 0$ (au cas contraire le raisonnement est identique). Alors, $\mathfrak{T}_e > 0$, c'est-à-dire, il faudrait dépenser un travail extérieur pour réaliser la transformation.

Transformons l'amas, de A_0 en A_1, toujours sans vitesses initiales et finales, mais par une autre série de configurations S', comprenant les configurations extrêmes A_0 et A_1. Le point π va décrire dans l'espace $\mathcal{C}_l$ un autre arc $S' \neq S$, mais ayant les mêmes extrémités.

Entre le travail des forces intérieures ($\mathfrak{T}'_i$), et extérieures ($\mathfrak{T}'_e$), mises en jeu pendant la série de transformations S', nous avons évidemment la relation

$$\mathfrak{T}'_i + \mathfrak{T}'_e = 0.$$

Si l'amas revenait de la configuration A_1 à la configuration A_0, par la série de transformation S', le travail des forces intérieures serait $-\mathfrak{T}'_i$, car les positions des étoiles dans cette transformation étant les mêmes que dans la précédente, les forces intérieures sont les mêmes, les déplacements sont égaux, mais de signes contraires à ceux de la transformation précédente.

Également, le travail des forces extérieures, quand l'amas revient de A_1 à A_0, pour la série S', sera $-\mathfrak{T}'_e$. Mais, nous devons avoir

$$\mathfrak{T}'_i = \mathfrak{T}i.$$

Car, si par exemple $\mathfrak{T}'_i < \mathfrak{T}_i$, nous aurons aussi $\mathfrak{T}'_e > \mathfrak{T}_e$, et alors,

en transformant l'amas de la configuration A_0 dans la configuration A_1 par la série S, nous dépensons un travail extérieur $\mathfrak{T}_e$, puis, en le ramenant de A_1 à A_0, par la série S', les forces extérieures nous restitueraient un travail, $-\mathfrak{T}'_e$, plus grand. De cette double transformation, on réaliserait un travail T,

$$T = \mathfrak{T}_e - \mathfrak{T}'_e.$$

En répétant l'opération, on pourrait créer une quantité indéfiniment grande de travail. Nous devons donc avoir

$$\mathfrak{T}'_i = \mathfrak{T}i,$$

quelle que soit la trajectoire, S ou S', du point π dans l'espace $\mathfrak{J}$, entre deux configurations quelconques. Le système est donc conservatif.

Au cas où il existerait un milieu cosmique résistant à l'intérieur de l'amas, le principe de la conservation de l'énergie paraît n'être plus satisfait. Or, l'existence d'une résistance au mouvement dans les amas stellaires paraît probable. Sa source pourrait se trouver dans l'existence d'une poussière cosmique, pareille à celle observée en abondance dans le système galactique et les spirales.

Cette poussière des amas pourrait provenir, soit des restes d'une origine commune, soit de la volatilisation des étoiles à cause des chocs réels. Ou bien de ces deux sources, à des périodes différentes. En aucun cas elle ne pourrait provenir de l'extérieur, car si l'espace dans lequel sont plongés ces amas serait résistant, leur moment de rotation finirait par s'annuler.

Si nous admettons l'existence d'un pareil milieu, une des conséquences inévitable est que les masses, et donc aussi les luminosités des étoiles, croissent avec le temps.

Une deuxième conséquence est la diminution des vitesses des étoiles, et donc de l'énergie cinétique de l'amas. Les amplitudes des mouvements sont également diminuées, et si cette cause persiste, les étoiles finissent par s'agglomérer au centre de l'amas.

Dans cette position, les énergies cinétique et potentielle sont nulles, si nous considérons les étoiles comme des points matériels. L'énergie totale semble diminuer à chaque instant, donc le principe de l'énergie paraît être en défaut.

Dans l'espace $\mathfrak{J}$, les points π s'agglomèrent aussi vers le centre.

A la limite, au moment de l'évanouissement de l'énergie, le point π occupe l'origine de l'espace $\mathcal{E}$. Cette phase du système correspondrait à un moment cataclysmique, en ce qui concerne l'existence individuelle des étoiles de l'amas. Mais, cette perte de l'énergie n'est qu'apparente, et elle ne figure que dans les équations de la Mécanique. Car, en dehors des manifestations visibles, dans notre cas, de l'énergie cinétique, dont s'occupe la Mécanique céleste, il existe d'autres mouvements, invisibles, des molécules, etc., qui font l'objet de la Physique, et qui constituent la chaleur, la lumière, etc. Le principe de l'énergie est satisfait, mais l'énergie cinétique est contenue dans des mouvements invisibles ou stationnaires. L'énergie potentielle aussi est transformée sous d'autres aspects.

Le point π, représentatif de l'évolution de l'amas, loin de perdre son rôle dans l'analyse des transformations du système, depuis le moment cataclysmique recommence la carrière représentative de la nébuleuse qui naît en ce moment et à laquelle on peut appliquer aussi toutes les considérations développées dans ce Chapitre.

Il est très probable que, durant la longue histoire de l'évolution de chaque amas stellaire isolé, ce moment cataclysmique se produit en règle générale, car il est très probable que les amas ne sont pas conservatifs, au sens mécanique du mot.

30. **Le postulat de Maxwell.** — Si le système admet une intégrale première, par exemple l'intégrale de l'énergie $E = \text{const.}$, le point π se déplacera sur ce lieu, dont la densité est constante.

Si sa trajectoire remplit toute la surface, la densité (δ) étant constante, la loi de la densité sera

$$\delta = f(E).$$

Le postulat de Maxwell consiste à admettre qu'en effet, la trajectoire remplit toute la surface. Nous admettons, dans ce qui va suivre, que la trajectoire remplit toute cette multiplicité, à $2N - 1$ dimensions, comme les courbes de Lissajous, qui se produisent dans un mouvement oscillatoire défini par les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_2 x = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \beta^2 y = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + \gamma^2 z = 0,$$

où α, β, γ sont des constantes incommensurables entre elles,

remplissent tout un parallélépipède (24). En d'autres termes, nous admettons, *a priori*, que notre amas dans son évolution passe par toutes les configurations compatibles avec l'intégrale de l'énergie; où encore, que chaque point de la multiplicité à $2N - 1$ dimensions est réalisé au cours de l'évolution de l'amas. Cela n'est pas évident pour tous les systèmes. Par exemple, les systèmes à orbites périodiques ne couvrent pas toute la multiplicité sur lesquels se trouvent leurs points représentatifs. Car, étant donnée une certaine configuration, il s'établit un cycle, et aucune autre phase en dehors de ce cycle ne peut être obtenue. La moyenne d'une certaine fonction ne peut pas être prise alors sur toute la multiplicité, mais seulement sur cette partie qui est couverte par la trajectoire du point π. En admettant le postulat, on admet que toutes les autres configurations, en dehors du cycle, peuvent être réalisées, par exemple en perturbant légèrement le système. S'il en est ainsi, il est indifférent de prendre la moyenne sur toute la multiplicité, ou seulement sur la partie qui est couverte par la trajectoire fractionnée de π, même si notre système est périodique.

Comme nous le verrons, l'admission du postulat, sous cette première forme, nous conduira à la distribution maxwellienne des vitesses

$$\Phi(u^2 + v^2 + w^2) = C e^{A(u^2+v^2+w^2)}, \tag{6}$$

ce qui peut conduire aussi, à l'équipartition de l'énergie (25).

Sous sa deuxième forme, le postulat revient à admettre qu'il n'existe aucune relation entre les composantes des vitesses, u, v, w, sur les trois axes, ainsi qu'entre la vitesse et les coordonnées spatiales. Cette dernière supposition n'est démontrée que seulement pour des milieux très raréfiés (Burbury).

Alors, on peut démontrer que la distribution des vitesses est donnée par l'équation (6).

31. De même, s'il existe aussi d'autres expressions, fonctions des coordonnées de l'espace ξ, qui restent constantes au cours de l'évolution du système, le point π devant se trouver sur chaque multiplicité à $2N - 1$ dimensions

$$E_1 = \text{const.}, \qquad E_2 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad E_m = \text{const.},$$

il se trouvera sur leur intersection, multiplicité à $2N - m$ dimensions.

Et la loi de la densité sera évidemment

$$\delta = f(E_1, E_2, \ldots, E_m).$$

Conformément au postulat admis, nous considérons toute cette multiplicité remplie par la trajectoire de π.

32. Appliquons les considérations développées, aux amas globulaires. La Dynamique nous donne trois classes d'intégrales du mouvement : 1° l'intégrale de l'énergie; 2° les six intégrales du centre de gravité du système; 3° les trois intégrales des aires. Utilisons seulement l'intégrale de l'énergie et les trois premières intégrales du centre, puisqu'elles sont les seules à caractère constant.

Comme on le sait, il n'y a pas d'autres intégrales, ni algébriques ni transcendantes uniformes.

Dans l'espace à $2N$ dimensions, de coordonnées courantes q_i, p_i, l'intégrale de l'énergie

$$E = \text{const.} \tag{7}$$

représente une multiplicité à $2N - 1$ dimensions. Cherchons quelle est la distribution des vitesses, à un moment donné, donc dans une configuration donnée. Alors, il faut fixer des coordonnées des étoiles

$$q_1 = \text{const.}, \quad q_2 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad q_N = \text{const.} \tag{8}$$

Il s'ensuit que l'énergie potentielle est déterminée aussi. Cherchons quelle est la probabilité, pour que cette valeur de l'énergie soit réalisée. Cela revient à calculer la probabilité, pour que le point π se trouve sur la multiplicité (7), ainsi que sur les plans (8), c'est-à-dire sur la multiplicité, à $N - 1$ dimensions, qui résulte de leur intersection, dont l'équation est

$$\frac{1}{2}\sum p_i^2 = \text{const.} \tag{9}$$

Cette équation représente une sphère à $N - 1$ dimensions. Comme la densité des points π sur cette sphère est constante, la probabilité cherchée est proportionnelle à la surface de la sphère,

ainsi qu'à la surface d'une zone de cette sphère, limitée par les plans $p_1 = p_1^0$ et $p_1 = p_1^0 + dp_1^0$. L'équation de la sphère peut encore s'écrire

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots + p_N^2 = r^2 = N k^2,$$

où r est le rayon de cette sphère, N le degré de liberté du système et k^2 la moyenne arithmétique de toutes les p_i^2.

L'aire d'une surface dans l'espace à trois dimensions est donnée par l'intégrale double suivante, où γ est l'angle que fait la normale à la surface avec l'axe Oz :

$$S = \int\int \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

Pour une sphère de rayon r, elle devient

$$S = \int\int \frac{r\,dx\,dy}{z}.$$

Généralisons ces formules à l'espace à N dimensions. La surface de l'hypersphère cherchée est alors donnée par l'intégrale multiple (de l'ordre N — 1)

$$\int\int \cdots \int \frac{r\,dp_1 \ldots dp_{N-1}}{p_N}$$

étendue au domaine défini par l'inégalité

$$r^2 > p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots + p_N^2$$

et où

$$p_N = \sqrt{r^2 - p_1^2 - p_2^2 - \ldots - p_{N-1}^2}.$$

L'élément de surface de l'hypersphère est donc

$$d\sigma = \frac{r\,dp_1\,dp_2 \ldots dp_{N-1}}{p_N}.$$

Effectuons le changement

$$\begin{aligned}
p_1 &= r\cos\theta_1,\\
p_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
p_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
p_{N-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{N-1}\cos\theta_{N-1},\\
p_N &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{N-2}\sin\theta_{N-1}.
\end{aligned}$$

Alors

$$dp_1\,dp_2\ldots dp_{N-1} = \frac{D(p_1 p_2 \ldots p_{N-1})}{D(\theta_1\theta_2\ldots\theta_{N-1})}\,d\theta_1\,d\theta_2\ldots d\theta_{N-1},$$

où $\frac{D(p_1 p_2 \ldots p_{N-1})}{D(\theta_1\theta_2\ldots\theta_{N-1})}$ est le jacobien de la transformation, qui est facile à calculer :

$$\frac{D(p_1 p_2 \ldots p_{N-1})}{D(\theta_1\theta_2\ldots\theta_{N-1})} = \begin{vmatrix} -p_1\operatorname{tg}\theta_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ p_2\cot\theta_1 & -p_2\operatorname{tg}\theta_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ p_3\cot\theta_1 & p_3\cot\theta_2 & -p_3\operatorname{tg}\theta_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \cdot & \cdot \\ p_{N-2}\cot\theta_1 & p_{N-2}\cot\theta_2 & p_{N-2}\cot\theta_3 & \ldots & -p_{N-2}\operatorname{tg}\theta_{N-2} & 0 \\ p_{N-1}\cot\theta_1 & p_{N-1}\cot\theta_2 & p_{N-1}\cot\theta_3 & \ldots & p_{N-1}\cot\theta_{N-1} & -p_{N-1}\operatorname{tg}\theta_{N-1} \end{vmatrix}$$

$$= p_1\ldots p_{N-1}\cot\theta_1\ldots\cot\theta_{N-1}$$

$$\times \begin{vmatrix} -\operatorname{tg}^2\theta_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\operatorname{tg}^2\theta_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\operatorname{tg}^2\theta_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & -\operatorname{tg}^2\theta_{N-2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & -\operatorname{tg}^2\theta_{N-1} \end{vmatrix}$$

$$= r^{N-1}\sin^{N-1}\theta_1\sin^{N-2}\theta_2\ldots\sin^2\theta_{N-2}\sin\theta_{N-1}$$

et donc

$$dp_1\ldots dp_{N-1} = r^{N-1}\sin^{N-1}\theta_1\sin^{N-2}\theta_2\ldots\sin\theta_{N-1}\,d\theta_1\,d\theta_2\ldots d\theta_{N-1}$$

et

$$d\sigma = \frac{r}{p_N}\,r^{N-1}\sin^{N-1}\theta_1\sin^{N-2}\theta_2\ldots\sin\theta_{N-1}\,d\theta_1\,d\theta_2\ldots d\theta_{N-1}$$

ou encore

$$d\sigma = r^{N-1}\sin^{N-2}\theta_1\sin^{N-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{N-2}\,d\theta_1\,d\theta_2\ldots d\theta_{N-1}.$$

La probabilité cherchée étant proportionnelle à la surface de la zone, obtenue en faisant varier θ_1 entre $\theta_1 \pm \frac{1}{2}d\theta_1$, est donc proportionnelle à

$$\sin^{N-2}\theta\,d\theta,$$

car les autres intégrales sont indépendantes de θ.

Mais comme nous avons

$$p_1^0 = r\cos\theta,$$
$$dp_1^0 = -r\sin\theta\,d\theta,$$

cette probabilité est proportionnelle à

$$\left(1-\frac{p_1^{0\,2}}{r^2}\right)^{\frac{N-3}{2}} dp_1^0$$

ou encore à

$$\left(1-\frac{p_1^{0\,2}}{Nk^2}\right)^{\frac{N-3}{2}} dp_1^0 = e^{\frac{N-3}{2}\log\left(1-\frac{p_1^{0\,2}}{Nk^2}\right)} dp_1^0 = e^{\frac{N-3}{2}\left(-\frac{p_1^{0\,2}}{Nk^2}-\frac{p_1^{0\,4}}{2N^2k^4}-\cdots\right)} dp_1^0,$$

N étant très grand, nous pouvons négliger les termes contenant N en dénominateur, et la probabilité cherchée est

$$e^{-\frac{p_1^{0\,2}}{2k^2}} dp_1^0,$$

qui n'est que la répartition maxwellienne des vitesses.

33. Les intégrales du centre de gravité nous montrent que la somme des projections des quantités de mouvement de toutes les étoiles sur une même direction, de cosinus directeurs α_1, α_2, α_3, est constante. Désignant par x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'une étoile, et par m_1, m_2, ou m_3, indifféremment (pour la symétrie des formules), sa masse; par x_4, x_5, x_6 et m_4, m_5, ou m_6 les mêmes éléments d'une deuxième étoile, et ainsi de suite, alors

$$q_i = \sqrt{m_i}\,x_i,$$

$$p_i = \sqrt{m_i}\,\frac{dx_i}{dt} = \sqrt{m_i}\,x_i'$$

et

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m_i x_i'^2 = \frac{1}{2}\Sigma q_i'^2 = \frac{1}{2}\Sigma p_i^2.$$

Et en posant

$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu+3} = \alpha_{\nu+6} \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

toujours par raisons de symétrie des formules, nous obtenons pour la quantité de mouvement de la première étoile, projeté sur la direction α_1 α_2 α_3, l'expression

$$\alpha_1 m_1 x_1' + \alpha_2 m_2 x_2' + \alpha_3 m_3 x_3' = \alpha_1\sqrt{m_1}\,p_1 + \alpha_2\sqrt{m_2}\,p_2 + \alpha_3\sqrt{m_3}\,p_3$$

et l'intégrale du centre peut s'écrire

$$\Sigma\alpha_i\sqrt{m_i}\,p_i = \text{const.} \tag{10}$$

Elle représente un plan, dans l'espace $\mathcal{G}$. Le point π se trouve

à l'intersection de ce plan avec la sphère (9), donc sur une multiplicité à N — 2 dimensions, présentant encore la symétrie sphérique. Par le changement

$$p_i = p_i^0 + p'_i,$$

où les p_i^0 représentent les coordonnées du centre de cette sphère, et les p'_i les vitesses des étoiles par rapport au centre de gravité du système, l'équation de la sphère (9) devient

$$\Sigma p'^2_i = \text{const.}$$

et celle du plan (10)

$$\Sigma \alpha_i \sqrt{m_i} p'_i = 0.$$

Le point π se trouve toujours à l'intersection de ces deux surfaces.

34. La densité de la sphère (9) étant constante, toutes les p_i^2 ont la même valeur moyenne, $\overline{p_i^2}$. En faisant $i = 1, 2, 3$ nous obtenons

$$\overline{p_1^2} = \overline{p_2^2} = \overline{p_3^2}. \tag{11}$$

Or, les $\overline{p_i^2}$ représentent la force vive d'une étoile, suivant les trois axes Ox, Oy, Oz et alors les relations (11) nous montrent que la force vive moyenne des étoiles de l'amas est la même sur les trois directions. Les $\overline{p_i^2}$ représentent aussi la force vive moyenne, de trois étoiles différentes, projetées sur un même axe et alors les relations (11) nous montrent que les forces vives moyennes des étoiles sont les mêmes suivant une direction donnée. En désignant donc la vitesse moyenne par v_m, l'intégrale de l'énergie nous conduit à la relation

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = \text{const.} \tag{12}$$

35. En utilisant l'intégrale du centre, ainsi que l'intégrale de l'énergie, nous obtenons la sphère à N — 2 dimensions,

$$\Sigma p'^2_i = \text{const.}$$

de densité constante, et remplie entièrement par la trajectoire de π.

Un raisonnement analogue conduit au même résultat (12) sur l'équipartition de l'énergie des étoiles.

36. Dans ce problème, la Mécanique statistique nous conduit à des valeurs moyennes, comme dans tous ses problèmes et sans nous donner d'informations sur le mécanisme du transfert.

Le professeur Eddington (26) a cherché une démonstration du principe, en étudiant le choc de deux étoiles, de masses et de vitesses différentes. Il a cherché ainsi des valeurs spécifiques à un seul système, non pas des valeurs moyennes. Mais, jusqu'aux termes de deuxième ordre, où il s'est arrêté, il n'a pas trouvé le mécanisme du transfert de l'énergie. Il pressent qu'il se trouve dans les termes d'ordres élevés.

Le professeur Charlier (27) a analysé également ce problème dans deux Mémoires approfondis. Il a donné une démonstration, en appliquant les méthodes de la Mécanique rationnelle, basée sur la loi newtonienne. Mais sa démonstration garde tout de même un certain aspect statistique, par l'introduction du postulat de Maxwell sur la répartition des vitesses.

CHAPITRE III.

LA FRÉQUENCE DES CHOCS DANS LES GLOBULAIRES SUR DES ORBITES DE DIVERSES FORMES.

37. Puisqu'un des effets des chocs est de changer les formes des orbites, cette étude peut nous conduire, comme nous le verrons, à déterminer l'évolution d'un système pendant sa période stellaire, ainsi que la structure la plus stable d'un amas globulaire.

Supposons que la loi de densité soit donnée par la famille des courbes

$$\rho = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 r^2}$$

bien connues dans le calcul des probabilités. Toutes les autres courbes de densités rendent les calculs très compliqués, et les privent de généralisation et de discussion systématique. Il en est de même en coordonnées polaires, à cause du facteur r^2 de l'exposant.

D'ailleurs, dans leur ensemble, ces courbes sont assez rapprochées de celles observées, et l'écart qui existe entre elles est tout à fait en faveur de nos conclusions.

Considérons une orbite elliptique à l'intérieur de l'amas, d'éléments a, b, c, ε ayant un des foyers au centre de l'amas, origine d'un système de coordonnées rectangulaires. Son équation est alors

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Un arc S de cette ellipse est donné par

$$S=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\,\frac{(x-c)^2}{a^2-(x-c)^2}}\,dx,$$

et le nombre des chocs, qu'une étoile subit sur une telle orbite, est proportionnel à

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2b^2}\int_{-(a+c)}^{+(a+c)}e^{-h^2x^2}\,e^{h^2\frac{b^2}{a^2}(x-c)^2}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\,\frac{(x-c)^2}{a^2-(x-c)^2}}\,dx.$$

Désignons par d la distance entre le centre de l'ellipse et le centre de l'amas. Nous pourrons ainsi introduire dans la discussion le cas d'une ellipse concentrique à l'amas, qui est différent du cas $c=0$, condition spécifique au cercle. Alors le nombre des chocs sur cette ellipse est

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2b^2\left(1+\frac{d^2}{a^2}\right)}\int_{-(a+d)}^{+(a+d)}e^{-h^2x^2\varepsilon^2}\,e^{-\frac{2h^2b^2dx}{a^2}}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\,\frac{(x-d)^2}{a^2-(x-d)^2}}\,dx.$$

Calculons le nombre des chocs sur une ellipse, ayant le centre au centre de l'amas, en faisant $d=0$. Tout ce que nous trouverons pour une telle ellipse étant, *a fortiori*, vrai pour des ellipses excentriques et de mêmes dimensions. D'ailleurs, le nombre des orbites elliptiques, surtout de celles dont les centres ne coïncident pas avec le centre de l'amas, doit être très restreint, sans quoi la densité au centre de l'amas serait plus petite que dans son voisinage, ce qui est contraire aux observations.

Le nombre cherché est proportionnel à

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2a^2}\int_{-a}^{+a}e^{h^2\varepsilon^2(a^2-x^2)}\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx.$$

Sur un cercle ($b = a$, $\varepsilon = 0$), le nombre des chocs est proportionnel à

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2a^2} \int_{-a}^{+a} \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\pi}\, ha\, e^{-h^2a^2},$$

et dans un mouvement radial ($\varepsilon = 1$, $b = 0$) il est proportionnel à

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2x^2}\, dx.$$

38. **Cas d'un amas homogène.** — Les diverses orbites possibles sont des cercles, des ellipses concentriques à l'amas, ou des mouvements radiaux. Les mouvements étant tautochrones, le nombre des chocs que subit une étoile sur un cercle est plus grand que le nombre sur une ellipse, ou le long d'un diamètre (mouvement radial). Le rapport, par exemple, entre ce nombre sur un cercle et dans un mouvement radial est égal à $\frac{\pi}{2}$. Il s'ensuit que les orbites circulaires subissent un nombre plus grand de transformations en d'autres orbites. Un amas homogène est donc instable, les orbites circulaires qu'il pourrait contenir tendant à se transformer dans des mouvements radiaux ou elliptiques, ce qui change la loi de distribution uniforme dans une loi à condensation centrale. D'ailleurs, un amas homogène est instable aussi pour d'autres raisons. Dans un pareil système, il devrait y avoir des orbites de petites amplitudes dans la région centrale. Or, dans ce cas, la distribution des vitesses est telle, que le maximum de la vitesse absolue a lieu à la périphérie, tandis qu'au centre elle est nulle. Le principe de l'équipartition de l'énergie ne tarderait pas longtemps de changer, par le mécanisme des chocs, cette distribution des vitesses incompatible avec lui, et donc de changer aussi la loi de la densité.

39. **Cas d'un amas non homogène.** — Pour un amas non homogène le fait n'est plus aussi évident, mais, comme nous le verrons, il existe même pour des concentrations très grandes.

Variation du nombre des chocs (N_c) sur des orbites circulaires, avec le degré de condensation. — Nous avons vu que

$$N_c = \sqrt{\pi}\, ha\, e^{-h^2a^2}.$$

Pour une orbite circulaire de rayon constant (a_0), le nombre des chocs quand h croît, donc quand l'amas se concentre, décroît proportionnellement à la dérivée $-2ha^2e^{-h^2a^2}$. Vers la périphérie ($a_0 = 1$) de l'amas, la variation est très petite, comme la variation de la dérivée de la courbe des erreurs. Cette variation atteint son maximum dans le voisinage du point d'inflexion de la loi des densités $\left(a = \frac{1}{h\sqrt{2}}\right)$. Comme N_c dépend uniquement du produit ha, toutes les conclusions concernant une orbite de rayon a_0, dans un amas de concentration h, s'appliquent à une orbite circulaire de rayon $\frac{a_0}{n}$, pour une concentration de l'amas égale à nh.

Pour que le nombre des chocs subis sur une orbite circulaire se conserve, il faut que le rayon de l'orbite varie en sens inverse de h.

40. Variation du nombre des chocs dans un mouvement radial (N_R) avec la concentration. — Alors

$$N_R = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2x^2}\, dx.$$

Considérons les deux cas suivants :

1° Amas peu condensés, $0 < h < 1$. Puisque $0 < x < 1$, nous pouvons développer

$$e^{-h^2x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}x^{2n}}{n!}.$$

Donc N_R est

$$\frac{2ha}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}a^{2n}}{n!(2n+1)} \right].$$

Au début de la concentration donc, pour un mouvement radial, h et a sont inversement proportionnelles.

2° Amas concentrés, donc $h > 1$. Alors

$$N_R = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2x^2}\, dx - \lambda(h) = \text{const.} - \lambda.$$

Si l'on néglige λ, qui est une quantité négligeable par rapport à N_R si $h > 1$, quantité qui correspond à la surface comprise entre

l'axe des x (depuis $x = 1$ à l'infini), vers laquelle la courbe tend asymptotiquement, et la courbe $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ (voir *fig.* 17), alors N_R reste constante, par rapport au degré de concentration de l'amas.

Au début de la concentration, N_R croît et les amplitudes des mouvements radiaux de même nombre de chocs sont en raison inverse du module de concentration (h).

Pour des grandes concentrations, le nombre des chocs sur des orbites rectilignes devient pratiquement constant, spécialement pour des amplitudes de l'ordre de grandeur du rayon de l'amas. Mais alors, la grande majorité des chocs se produit à des distances de plus en plus petites du centre. Le maximum des chocs commence depuis le point d'inflexion de la courbe de densité (ρ) dont la position est donnée par

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = 2h^3 e^{-h^2x^2}[2h^2x^2 - 1] = 0;$$

donc

$$x = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

La distance au centre (x) de ce point est donc en rapport inverse avec le module de concentration (h).

41. La variation du rapport $\frac{N_c}{N_R}$ avec le degré de concentration (h). — Nous avons

$$\frac{N_c}{N_R} = \frac{\pi h a e^{-h^2a^2}}{2h\int_0 e^{-h^2x^2}dx}.$$

1° Pour un amas homogène, nous avons vu que

$$\frac{N_c}{N_R} = \frac{\pi}{2};$$

2° Pour un amas peu condensé ($0 < h < 1$),

$$\frac{N_c}{N_R} = \frac{\pi e^{-h^2a^2}}{2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{h^{2n}a^{2n}}{n!(2n+1)}\right]}; \tag{11}$$

3° Pour un amas condensé ($1 < h < \infty$),

$$\frac{N_c}{N_R} = \text{const.}\ \sqrt{\pi}\, hae^{-h^2a^2}. \tag{12}$$

Dans ces deux derniers cas, le rapport dépend encore uniquement du produit ha, à quoi il fallait nous attendre, d'après les propriétés connues de N_c et N_R.

Considérons le cas des orbites d'amplitudes égales au rayon de l'amas ($a = 1$) et construisons les courbes (11) et (12), en nous servant de la formule (11) pour $h < 1$ et de la formule (12) pour $h > 1$. Nous obtenons alors pour la variation du rapport cherché, en fonction du degré de concentration, les courbes représentées dans la figure 20.

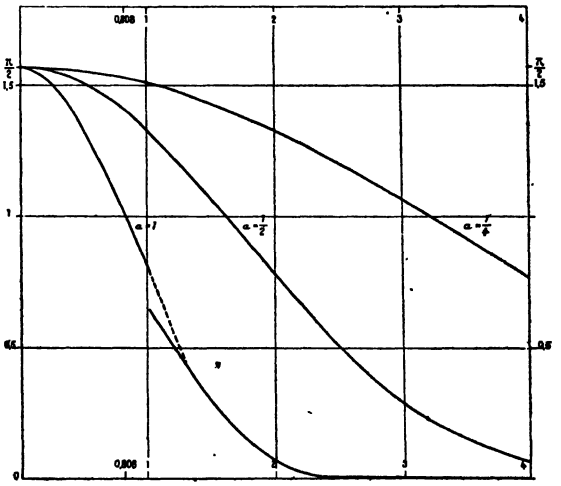

Fig. 20. — Variation du nombre $\frac{N_c}{N_R}$, pour divers degrés de concentrations (h).

Le rapport $\frac{N_c}{N_R} \geqq 1$, pour $h \leqq 0,809$. Jusqu'à ce degré de concentration donc (assez petit, car la concentration est alors seulement de 2 fois plus grande au centre qu'à la périphérie de l'amas) les orbites circulaires, d'un rayon égal au rayon de l'amas, tendent à se transformer, à cause des chocs, dans des orbites d'autres formes. De toutes, les orbites radiales sont les plus stables, étant les moins gênées.

Mais, comme le rapport $\frac{N_c}{N_R}$ dépend simplement du produit ha, il en résulte que, pour des orbites d'amplitudes plus petites, les orbites radiales sont les moins gênées jusqu'aux concentrations plus grandes. De l'étude de la distribution des étoiles dans les amas (28) ou de la variation de leurs rayons apparents avec le temps de pose (ce qui revient au même), il en résulte que les plus petites amplitudes sont de l'ordre d'un quart du rayon de l'amas. Pour cette valeur, les mouvements radiaux sont moins gênés que les mouvements circulaires ou elliptiques, jusqu'aux très grandes concentrations, correspondant à $h = 3,236$. Alors, l'amas est de 35300 fois plus dense au centre qu'à la périphérie.

42. Il en résulte donc que les étoiles de petites amplitudes de mouvement, même dans les amas très concentrés, ne peuvent pas conserver leurs orbites sous une forme circulaire, ou elliptique peu aplatie, et qu'en raison des chocs, l'amas tend à imprimer à ces étoiles des mouvements radiaux, ou elliptiques très aplatis.

Pour les étoiles de grandes amplitudes, cette cause n'intervient qu'au début de la concentration. Pour des grandes concentrations, les orbites circulaires de la région périphérique sont d'autant moins gênées que le degré de concentration est plus grand.

Mais alors interviennent d'autres causes qui les empêchent de conserver leurs formes circulaires. Aussi rares qu'ils soient, les chocs se produisent pourtant; les orbites circulaires, même dans ces conditions, se déforment, tandis que les transformations contraires se produisent plus rarement. Parce que : 1° les orbites circulaires, par exemple d'un rayon égal au rayon de l'amas, ne peuvent être engendrées que par des chocs qui se produisent à cette distance; 2° la vitesse de l'étoile après le choc doit avoir une valeur déterminée; 3° la direction de la vitesse doit être perpendiculaire au rayon vecteur. Ces conditions sont rarement réalisées simultanément.

43. La structure la plus stable d'un amas est celle dont les étoiles ont des mouvements radiaux. Alors, les chocs ne se produisent qu'au centre de l'amas et ils n'ont pour effet que de dévier la direction du mouvement, sans en changer la forme.

La distribution des vitesses est alors inverse à celle d'un

amas homogène. Le maximum a lieu au centre de l'amas et le minimum à la périphérie, où la vitesse s'annule. Cette distribution des vitesses est compatible avec le principe de l'équipartition de l'énergie.

Les mouvements radiaux ne peuvent pas manquer complètement dans un amas, car autrement on aurait un amas creux au centre, ce qu'on n'a jamais observé. Puis, pour une telle structure, le nombre des chocs sur des orbites elliptiques de petit axe, égal au rayon de la région creuse de la sphère, serait évidemment plus grand que pour un mouvement radial. Les étoiles n'hésiteraient pas à changer les orbites elliptiques pour des mouvements radiaux.

De même, on ne peut pas supposer que les étoiles de la région centrale ont de petites amplitudes et ne quittent pas cette région, car cette structure est incompatible avec le principe de l'équipartition de l'énergie.

44. L'évolution d'un amas globulaire d'étoiles. — La loi de la densité dans un amas globulaire est en transformation continuelle, jusqu'à son état d'équilibre. Toute orbite circulaire ou elliptique, transformée en mouvement radial ou elliptique très applati, tend à augmenter la densité au centre, et inversement.

Il est possible qu'il y ait des moments où l'amas se décongestionne au centre, mais, dans l'ensemble, les amas évoluent des états de petites concentrations vers des états plus concentrés. En effet, considérons un système stellaire pendant tout le temps (T), où il se trouve sous la forme d'amas globulaire, et soient

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3, \quad \ldots, \quad E_n$$

les états par lesquels il passe au cours de sa transformation.

Soient enfin

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad \ldots, \quad t_n$$

les durées totales de ces états successifs, considérées chacune comme la somme des diverses périodes de temps pendant lesquelles l'amas se trouve dans un de ces états. Alors la probabilité d'un état E_n est égale à

$$\frac{t_n}{T}$$

ou

$$T = \sum_{n=1}^{n} t_n.$$

La somme des probabilités de tous les états est évidemment égale à l'unité

$$\frac{\sum_{n=1}^{n} t_n}{T} = 1.$$

L'état le plus probable alors de cette série $E_1, \ldots, E_n$ est celui qui dure le plus, donc celui le plus souvent observé, c'est-à-dire celui de grande concentration.

Considérons deux états voisins E_{i-1} et E_i. L'amas peut se transformer successivement d'un état à l'autre, un nombre quelconque de fois m.

Évidemment, il se transforme de E_{i-1} en E_i autant de fois (m) que de E_i en E_{i-1}. Il semble alors qu'on ne puisse décider quel est le sens de l'évolution. Mais, comme les états peu concentrés sont moins nombreux que les états concentrés, ce même nombre (m) représente une fraction plus grande d'amas peu concentrés, qui se transforment dans des amas plus concentres, que le contraire. Le sens de l'évolution est donc bien précisé : l'amas se transforme en des états de plus en plus concentrés.

CHAPITRE IV.

LES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN AMAS ISOLÉ ET DÉPOURVU DE ROTATION.

Par définition, nous dirons qu'un amas se trouve en *équilibre stable* si sa forme, ses dimensions, les lois de la distribution des étoiles et des vitesses, restent invariables par rapport au temps.

Cet état étant caractérisé par le fait que, s'il n'est pas atteint, ces quatre éléments varient et le système tend vers lui. S'il est atteint et si nous y perturbons la forme, les dimensions, la distribution des étoiles ou des vitesses, l'amas tend à revenir à son état initial d'équilibre. Dans cet état les orbites sont de telle forme que, sous l'action des forces intérieures, les étoiles changent continuel-

lement de position, sans apporter aucun changement sur la forme, les dimensions ou sur la loi de la distribution des étoiles et donc aussi de leurs vitesses.

45. Supposons un nuage stellaire, isolé et dépourvu de rotation et d'une forme aussi irrégulière que l'on veut. Il prendra inévitablement la forme sphérique, qui constitue une *première condition nécessaire* de l'équilibre, car en vertu d'un théorème classique, la sphère est la seule figure d'équilibre d'une masse soumise aux forces intérieures, ainsi qu'à cause des chocs, qui dispersent les étoiles dans toutes les directions sans aucune préférence.

46. Dans un amas sphérique, la vitesse moyenne (v_m) d'une étoile, définie soit comme la moyenne des vitesses qu'elle prend pendant une révolution complète T, soit comme la moyenne, à un moment donné, des vitesses de toutes les étoiles de même orbite, en nombre p, c'est-à-dire

$$v_m = \frac{1}{T}\int_0^T v\,dt \qquad \text{ou} \qquad v_m = \frac{1}{p}\sum_1^p v_p,$$

est donnée, pour un mouvement radial, elliptique ou circulaire, respectivement par

$$\sqrt{2}\,\frac{\pi}{T}a; \quad \sqrt{2}\,\frac{\pi}{T}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,a; \qquad 2\,\frac{\pi}{T}a;$$

donc, elle est proportionnelle à l'amplitude (a) du mouvement (considérant comme amplitude pour l'ellipse la diagonale du rectangle circonscrit) (*voir* notre note *C. R. Ac. Sc.*, t. 178, p. 375, ou *Bull. astron.*, t. III, fasc. 3, p. 413). Et, en vertu de l'équipartition de l'énergie ($mv_m^2 = \text{const.}$), il en résulte que les amplitudes des étoiles dans un amas sphérique sont en raison inverse de la racine carrée de leurs masses.

Si l'amas est constitué par des étoiles de mêmes masses, leurs amplitudes sont égales et elles arrivent toutes jusqu'à la périphérie dans leurs mouvements d'oscillations.

Si leurs masses sont différentes, les plus massives s'éloignent peu du centre, et celles des petites masses s'éloignent d'autant plus que leurs masses sont plus petites.

Une étoile, par exemple 10000 fois plus massive que le Soleil, ne s'éloignerait du centre au delà de la vingtième partie du rayon de l'amas. L'amas présente, soit une structure stratifiée, soit une tendance vers cette structure (*deuxième condition nécessaire*).

Nous avons vu (Chap. III) que dans un amas à distribution homogène le nombre des chocs sur un cercle (N_C) est plus grand que sur une ellipse (N_E) ou que dans un mouvement radial (N_R). Un tel amas est instable, car les mouvements circulaires tendent à se transformer en mouvements radiaux ou elliptiques aplatis, d'où une concentration au centre.

Pour des amas à distribution hétérogène, dont les densités seraient données par les courbes des erreurs (h étant leurs modules de concentration) jusqu'à des concentrations correspondantes à $h \leqq 0{,}809$, les mouvements radiaux sont moins gênés aussi les amas impriment-ils à leurs étoiles surtout ce genre d'orbites.

Pour les grandes oscillations circulaires, dont les amplitudes sont de l'ordre de grandeur du rayon de l'amas, cet effet n'est sensible qu'au début de la concentration ($h \leqq 0{,}809$), ensuite ces orbites sont plus stables, à ce point de vue, que les orbites radiales.

Mais, pour de petites amplitudes, les orbites radiales sont moins gênées que les circulaires, jusqu'à des concentrations beaucoup plus grandes que celles observées dans les amas globulaires. Les petites oscillations ne peuvent pas conserver des formes circulaires ou elliptiques, et en raison des chocs l'amas tend à imposer à ses étoiles des mouvements radiaux, ou elliptiques très aplatis. Quant aux oscillations de grandes amplitudes, d'autres causes interviennent qui les empêchent de garder des formes circulaires (*voir* Chap. III).

Ces transformations produisent des changements sur la loi de la distribution des étoiles et des vitesses, et rendent l'amas de plus en plus condensé au centre. Elles cessent seulement quand l'amas imprime à ses étoiles des mouvements radiaux ou elliptiques aplatis. Alors l'amas a la distribution la plus concentrée au centre. Cette phase est donc une *troisième condition nécessaire* de l'équilibre. Les trois conditions, ensemble, sont suffisantes pour l'équilibre défini plus haut. Quand les trois conditions sont réalisées, l'amas est en *régime permanent*. Alors les chocs ne se produisent qu'au centre de l'amas et ils n'ont pour effet que de dévier

la direction du mouvement, sans changer la forme de l'orbite ou de l'amas, les lois de la densité ou de la distribution des vitesses. La structure est compatible avec le principe de l'équipartion de l'énergie, et les lignes de courant coïncident avec les trajectoires.

47. Le travail ($\mathfrak{T}$) des forces intérieures $F_r(X, Y, Z)$, effectué pendant un mouvement, dépend des extrémités M_0, M_1 de l'arc décrit pour une étoile, et non pas de sa forme.

Car la force dans les amas dérivant d'un potentiel (U), fonction uniforme

$$\mathfrak{T} = \int_{M_0}^{M_1} X\,dx + Y\,dy\,Z\,dz = U_1 - U_0.$$

Sur une trajectoire (c) fermée, de surface (s), qui, par des transformations successives, peut se réduire à un point, sans passer par des points où X, Y, Z sont discontinus, ou sans dérivées primes, $\mathfrak{T}$ est nul car

$$\mathfrak{T} = \int_c X\,dn + Y\,dn + Z\,dz = \int\int_{(s)} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dx\,dz$$
$$+ \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\,dz = 0,$$

la force dérivant d'un potentiel. A cause des chocs, les trajectoires dans un amas ne sont pas fermées. Le travail total ($\mathfrak{T}$) d'un amas est donc différent de zéro pendant les phases qui ne conservent pas la loi de la distribution des étoiles. Le travail est une certaine fonction $\mathfrak{T}(p, t)$ dépendant du degré de perturbation (p) de l'amas, par rapport à son état stable, ainsi que du temps (t), et qui tend continuellement à s'annuler.

L'état d'équilibre stable est caractérisé par $\mathfrak{T}(p, t) = 0$, *condition nécessaire* et aussi *suffisante* s'il n'existe qu'une seule phase d'équilibre.

48. En faisant abstraction des mouvements de rotation des amas globulaires, du fait que tous les amas ont : 1° des formes sphériques; 2° les étoiles les plus massives qui sont aussi les plus lumineuses, agglomérées vers leurs centres; 3° des lois de distribution de leurs étoiles très semblables, on peut en conclure qu'ils ont tous réalisé les trois conditions nécessaires de l'équilibre stable

ou qu'ils sont tous en régime permanent, ou dans des états très voisins.

Par définition, *temps de mélange*, c'est le temps nécessaire pour que toutes les étoiles d'un amas accomplissent une révolution complète. Il est fonction de la densité de l'amas et il est de même ordre de grandeur que le temps de révolution d'une étoile sous l'action d'un milieu homogène, de mêmes dimensions et masse que notre amas.

Temps de relâchement, c'est le temps nécessaire à l'amas pour arriver à son régime permanent, en partant d'un état perturbé. Il est fonction du degré de sa perturbation initiale, ainsi que de la masse du système. Il est également évident qu'il doit être un multiple du temps de mélange.

CHAPITRE V.

LE DEGRÉ DE CONDENSATION ET L'INDICE DE STABILITÉ D'UN AMAS GLOBULAIRE.

49. L'étude de la Dynamique des amas, de la corrélation entre le nombre des géantes, des céphéides, et le degré de condensation, ainsi que la classification des amas d'après leur degré de condensation, ou de stabilité, nécessitent la connaissance de la loi de distribution des masses à l'intérieur de ces systèmes.

Pour le premier problème, qui exige une forme finie et explicite de cette distribution, nous avons substitué des lois approchées. Pour les autres, cette forme analytique spéciale n'est plus indispensable. Dans ce Chapitre, nous indiquons une méthode qui pourra donner le degré de concentration d'un amas et donc son indice de stabilité, d'après des observations seulement.

Elle est applicable aux amas symétriques, ainsi que dissymétriques, tels qu'il s'en trouve quelques-uns parmi les amas galactiques. Cette méthode nous donne la densité, en fonction de la surface (y) limitée par l'ordonnée du point considéré, l'axe des abscisses, d'un côté, et par la courbe de la densité de l'autre. Elle permet d'obtenir des valeurs numériques, correspondant, l'une à l'indice de stabilité ou au degré de concentration, l'autre à la dissymétrie de l'amas.

50. Soient $\rho = F(x)$ la loi de la densité dans l'espace; S la

surface totale sous cette courbe :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx,$$

où x_1 et x_2 sont les points où la courbe coupe l'axe des x, respectivement du côté des abscisses positives et négatives. Soit y défini comme plus haut. Alors

$$y = \int_{x_1}^{x} \rho \, dx = \int_{x_1}^{x} F(x) \, dx = f(x).$$

Considérons l'expression

$$\frac{dy}{dx} = k y^m (S - y)^n, \tag{13}$$

où k, m, n sont des constantes quelconques.

Elle est égale, évidemment, à

$$\rho = F(x) = F_1(y).$$

Cherchons l'intégrale de ρ, c'est-à-dire :

$$y = k \int_{x_1}^{x} y^m (S - y)^n \, dx = \int_{x_1}^{x} \rho \, dx = f(x)$$

et calculons les dérivées :

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = k^2 y^{2m-1} (S - y)^{2n-1} [S_m - (m + n) y],$$

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{d^3 y}{dx^3} = k^3 y^{3m-2} (S - y)^{3n-1} . \varphi(y),$$

où

$$\varphi(y) = (m + n)[2(m + n) - 1] y^2 - 2 m S [2(m + n) - 1] y + S^2 m (2m - 1).$$

La courbe $\rho = F(x)$ a deux minima, où elle s'annule, correspondant à $y = 0$ et $y = S$, où $\rho = 0$. Elle a aussi un maximum, pour lequel

$$y = \frac{S m}{m + n}.$$

L'ordonnée maxima divise la surface S en deux parties :

$$\frac{S m}{m + n} \quad \text{et} \quad \frac{S n}{m + n}.$$

Si $m = n$, la courbe est symétrique par rapport à cette ordonnée. Si $m < n$, la surface qui se trouve à gauche de l'ordonnée maxima est plus petite que celle de droite et inversement.

Quand on fait varier $\frac{m}{m + n}$ de 0 à 1, on obtient tous les

degrés de dissymétrie. Toutes sortes de courbes peuvent être obtenues en variant les valeurs de m et de n. Par exemple, pour des valeurs négatives de m et n, entre o et — 1, on obtient des courbes de la forme J ou U, qui ne nous intéressent pas dans ce problème. Dans les cas qui nous intéressent, des courbes de distributions symétriques ou dissymétriques, les courbes présentent deux points d'inflexion correspondant aux valeurs de y pour lesquelles nous avons :

$$\varphi(y) = 0.$$

Ces valeurs sont données par la relation

$$y = \frac{S}{2}\left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{4m-1}}\right] = \frac{S}{2} \pm \chi,$$

où

$$\chi = \frac{S}{2\sqrt{4m-1}}$$

au cas où la distribution est symétrique, ou par

$$y = \frac{S}{m+n}\left[m \pm \sqrt{\frac{mn}{2(m+n)-1}}\right]$$

pour une distribution dissymétrique.

La position du point d'inflexion est donc fixée par lès valeurs de m et de n en cas de dissymétrie, et par la valeur de m seulement en cas de symétrie.

Nous appelons n, *indice de dissymétrie* et m, *degré de concentration* ou *indice de stabilité*, car les amas s'approchent de leur état le plus stable, par des concentrations de plus en plus grandes au centre.

Pour que χ et donc y soient réels et finis, dans le cas d'une distribution symétrique, on doit avoir

$$m > \frac{1}{4}$$

et pour que la courbe ait les deux points d'inflexion dans l'intervalle $x_1 x_2$, telle qu'elle a dans les amas, il faut que

$$m > \frac{1}{2}.$$

Pour des valeurs entre ces deux limites, la courbe n'a pas de points d'inflexion à l'intérieur de l'amas, ce qui n'est possible que pour la distribution apparente d'un amas homogène. Quand m

varie de $\frac{1}{2}$ à l'infini, le point d'inflexion se déplace depuis l'extrémité de la courbe, où $\rho = 0$, vers la classe modale. Pour $m = \infty$, le point d'inflexion arrive au point maximum, qui devient un point de rebroussement.

51. On peut obtenir facilement les valeurs de m, n et k au besoin, de données de l'observation, grâce à la forme spéciale de l'équation (13), à l'aide des fonctions eulériennes et des moments statistiques M_0, M_1, M_2, de la courbe $\rho = F_1(y)$. Nous avons alors :

$$M_0 = \int_0^S \rho\, dy = \int_{x_1}^{x_2} \rho^2\, dx,$$
$$M_1 = \int_0^S \rho y\, dy = \int_{x_1}^{x_2} \rho^2 y\, dx,$$
$$M_2 = \int_0^S \rho y^2\, dy = \int_{x_1}^{x_2} \rho^2 y^2\, dx$$

ou encore

$$M_0 = k \int_0^S y^m (S - y)^n\, dy,$$
$$M_1 = k \int_0^S y^{m+1} (S - y)^n\, dy,$$
$$M_2 = k \int_0^S y^{m+2} (S - y)^n\, dy$$

et par la substitution $y = St$

$$M_0 = kS^{m+n+1} \int_0^1 t^m (1 - t)^n\, dt = kS^{m+n+1} B(m + 1, n + 1),$$
$$M_1 = kS^{m+n+2} \int_0^1 t^{m+1} (1 - t)^n\, dt = kS^{m+n+2} B(m + 2, n + 1),$$
$$M_2 = kS^{m+n+3} \int_0^1 t^{m+2} (1 - t)^n\, dt = kS^{m+n+3} B(m + 3, n + 1).$$

Et par la relation bien connue :

$$B(m + 1, n + 1) = \frac{\Gamma(m + 1)\Gamma(n + 1}{\Gamma(m + n + 2)},$$

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} M_0 &= kS^{m+n+1} \frac{\Gamma(m + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(m + n + 2)} = kS^{m+n+1} \frac{m!\,n!}{(m + n + 1)!}, \\ M_1 &= kS^{m+n+2} \frac{\Gamma(m + 2)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(m + n + 3)} = kS^{m+n+2} \frac{(m + 1)!\,n!}{(m + n + 2)!}, \\ M_2 &= kS^{m+n+3} \frac{\Gamma(m + 3)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(m + n + 4)} = kS^{m+n+3} \frac{(m + 2)!\,n!}{(m + n + 3)!}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en désignant :

$$\alpha = \frac{M_1}{M_0}, \qquad \beta = \frac{M_2}{M_1},$$

nous avons

$$\alpha = \frac{S(m+1)}{m+n+2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{S(m+2)}{m+n+3}$$

et donc

$$m = \frac{S(M_2M_0 - 2M_1^2) + M_2M_1}{S(M_1^2 - M_2M_0)} \quad \text{et} \quad n = \frac{SM_2(2M_0 - SM_1) - M_2M_1}{S(M_1^2 - M_2M_0)}.$$

Quant à k, il peut être obtenu d'une des relations (14).

Dans le cas d'un amas à distribution symétrique, nous avons :

$$M_0 = kS^{2m+1}\frac{m!\,m!}{(2m+1)!},$$

$$M_1 = kS^{2m+2}\frac{(m+1)!\,m!}{(2m+2)!},$$

$$M_2 = kS^{2m+3}\frac{(m+2)!\,m!}{(2m+3)!};$$

$$\alpha = \frac{M_1}{M_0} = \frac{S}{2}; \quad \beta = \frac{M_2}{M_1} = S\frac{m+2}{2m+3}; \quad m = n = \frac{2SM_1 - 3M_2}{2M_2 - SM_1} = \frac{2S - 3\beta}{2\beta - S}.$$

Dans ce cas donc, α est toujours égal à $\frac{S}{2}$. Et puisque $m \geqq \frac{1}{2}$, nous avons pour β la condition

$$\beta \leqq 0{,}625\,S.$$

Et finalement, comme conséquence de la condition $m > 0$,

$$0{,}5\,S < \beta \leqq 0{,}625\,S.$$

52. Pratiquement, on obtient les valeurs des moments statistiques, de données des observations, par les relations approchées suivantes, qui sont d'autant plus exactes que le nombre des points observés est plus grand :

$$M_0 = \int_{x_1}^{x_2} \rho^2\,dx = \Sigma\,\rho^2\,\Delta x,$$

$$M_1 = \int_{x_1}^{x_1} \rho^2 y\,dx = \Sigma\,\rho^2 y\,\Delta x,$$

$$M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \rho^2 y^2\,dx = \Sigma\,\rho^2 y^2\,\Delta x.$$

où Δx sont les intervalles entre les ordonnées observées, ou la base d'une ordonnée.

Nous avons obtenu, par cette méthode, les valeurs numériques suivantes pour les degrés de concentration ou les indices de stabilité (m) des trois amas étudiés :

M.9(m = 45,100), M.12(m = 42,054), M.10(m = 13,860).

M.9 est donc le plus concentré et le plus stable et M.10 le moins stable. Le Tableau VIII est un modèle de la méthode appliquée sur M.12. Il est évident que la division de ρ par S simplifie les calculs, sans modifier les valeurs qui nous préoccupent.

TABLEAU VIII.

x.	ρ.	$\frac{\rho}{S}$.	$\left(\frac{\rho}{S}\right)^2$.	y.	$\left(\frac{\rho}{S}\right)^2 \times y$.	$\left(\frac{\rho}{S}\right)^2 \times y^2$.
0- 2	0,158	0,000135	0,000000	0,000067	0,0000000	0,0000000
2- 4	0,253	0,000215	0,000000	0,000242	0,0000000	0,0000000
4- 6	0,430	0,000367	0,000000	0,000533	0,0000000	0,0000000
6- 8	0,801	0,000685	0,000000	0,001059	0,0000000	0,0000000
8-10	1,506	0,001287	0,000002	0,002045	0,0000000	0,0000000
10-12	4,001	0,003419	0,000012	0,004398	0,0000000	0,0000000
12-14	9,304	0,007951	0,000063	0,010083	0,0000006	0,0000000
14-16	17,905	0,015301	0,000234	0,021709	0,0000051	0,0000001
16-18	36,420	0,031122	0,000969	0,044911	0,0000435	0,0000021
18-20	68,501	0,058540	0,003427	0,089752	0,0003076	0,0000276
20-22	891,603	0,761948	0,580566	0,500005	0,2902850	0,1451415
22-24	68,501	0,058540	0,003427	0,910249	0,0031193	0,0028393
24-26	36,420	0,031122	0,000969	0,955080	0,0009252	0,0008836
26-28	17,905	0,015301	0,000234	0,978291	0,0002290	0,0000224
28-30	9,304	0,007951	0,000063	0,989917	0,0000626	0,0000619
30-32	4,001	0,003419	0,000012	0,995602	0,0000116	0,0000116
32-34	1,506	0,001287	0,000002	0,997955	0,0000016	0,0000016
34-36	0,801	0,000685	0,000000	0,998941	0,0000005	0,0000000
36-38	0,430	0,000367	0,000000	0,999467	0,0000001	0,0000000
38-40	0,253	0,000215	0,000000	0,999758	0,0000000	0,0000000
40-42	0,158	0,000135	0,000000	0,999933	0,0000000	0,0000000

S=1170,160 S'=1,000000 M_0=0,589980 M_1=0,2949910 M_2=0,1491933

CHAPITRE VI.

SUR LA DYNAMIQUE DES AMAS GLOBULAIRES.

53. Considérons

$$\rho(r) = \left(\frac{3\alpha^2\beta}{3+\alpha^4\beta^2 r^2}\right)^{\frac{5}{2}} \qquad (0 < r < 1)$$

comme lois de la distribution des étoiles à l'intérieur des amas.

Ces courbes sont assez rapprochées de celles observées et peuvent nous donner des divers degrés de concentration. Puis, elles présentent l'avantage, qui n'est pas à négliger, de pouvoir généraliser les résultats et d'étudier les variations qui se produisent quand la concentration de l'amas varie.

La masse (M_r) à l'intérieur d'une sphère de rayon r est alors

$$M_r = 4\pi \int_0^r r^2 \rho(r)\, dr = 4\pi . \alpha^4\beta^2\sqrt{3\alpha^2\beta} \cdot \frac{r^3}{(3+\alpha^4\beta^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La force (F_r) qui s'exerce sur un point, à la distance r, est

$$F_r = -4\pi\alpha^4\beta^2\sqrt{3\alpha^2\beta} \cdot \frac{r}{(3+\alpha^4\beta^2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et la fonction des forces (U) est

$$U = -\int 4\pi\alpha^4\beta^2\sqrt{3\alpha^2\beta}\,\frac{r}{(3+\alpha^4\beta^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}\, dr = -\frac{4\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{\sqrt{3+\alpha^4\beta^2 r^2}} + h,$$

où h est la constante des forces vives. Les surfaces de niveaux sont donc des sphères concentriques. Les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi\alpha^4\beta^2\sqrt{3\alpha^2\beta} \cdot \frac{x}{(3+\alpha^4\beta^2 r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4\pi\alpha^4\beta^2\sqrt{3\alpha^2\beta} \cdot \frac{y}{(3+\alpha^4\beta^2 r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -4\pi\alpha^4\beta^2\sqrt{3\alpha^2\beta} \cdot \frac{z}{(3+\alpha^4\beta^2 r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

On vérifie aisément que

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{ou encore} \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \text{»} \quad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = A,$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad \text{»} \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = B,$$

d'où, en multipliant par z, x, y respectivement et en ajoutant,

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Le mouvement s'effectue donc dans un plan et les équations du mouvement se réduisent aux deux premières. En introduisant les coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

nous obtenons l'intégrale des aires

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

et le mouvement se fait suivant la loi des aires.

54. En multipliant les équations du mouvement respectivement par dx, dy, dz et en ajoutant, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz = dU(x, y, z)$$

ou encore

$$d\frac{v^2}{2} = dU.$$

Et en intégrant de t_0 à t,

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = U(x, y, z) - U_0(x_0 y_0 z_0),$$

donc

$$(14) \qquad v^2 = 2\left(U + \frac{h}{2}\right) \quad \text{ou} \quad h = v_0^2 - 2U_0(x_0 y_0 z_0).$$

Cette relation, qui n'est que l'intégrale des forces vives, nous montre que la vitesse d'une étoile redevient à la même valeur avec U. Comme U est une fonction uniforme pour les amas, les

vitesses des étoiles devraient avoir la même valeur sur une même surface de niveau $U(x, y, z) = \text{const.}$

Il en serait ainsi rigoureusement, si toutes les étoiles avaient la même masse. Mais, les étoiles d'un amas ont des masses différentes et en vertu du principe de l'équipartition de l'énergie, les étoiles de grandes masses ont des petites amplitudes et leurs vitesses s'annulent à l'intérieur de l'amas même, tandis que les étoiles de masses plus petites annulent leurs vitesses à la périphérie de l'amas. Sur une même surface de niveau nous avons donc des étoiles à vitesses différentes, mais de même énergie cinétique.

55. L'intégrale des forces vives (14) nous montre encore que, si une étoile est soumise seulement à l'action de l'ensemble du système, elle ne peut pas sortir de la région de l'espace pour laquelle

$$U(x, y, z) + \frac{h}{2} > 0.$$

Cette région est limitée par la surface de niveau

$$U(x, y, z) + \frac{h}{2} = 0$$

dont les dimensions dépendent de la constante des forces vives (h), c'est-à-dire de la position et de la vitesse initiales de l'étoile et non pas de sa direction. Dans ces conditions, la masse totale du système se conserve. Seulement par le mécanisme des chocs on pourrait arracher quelques étoiles à l'amas. Mais alors, la vitesse transmise par un choc, à la distance r du centre de l'amas, devrait être plus grande que la vitesse acquise par l'étoile, en tombant de l'infini jusqu'à la distance r, sous l'attraction du système. On peut considérer les amas comme des systèmes conservatifs au point de vue masse.

56. Si une étoile de l'amas est soumise à un certain moment, en dehors de la force d'attraction (X, Y, Z) qui dérive du potentiel $U(x, y, z)$, à l'attraction par exemple d'une autre étoile (cas de choc), la nouvelle force (X_1, Y_1, Z_1) qui s'ajoute, dérivant elle aussi d'un potentiel U_1, la résultante de ces deux forces ($X + X_1$, $Y + Y_1$, $Z + Z_1$) dérive du potentiel $U + U_1$,

Car

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$X_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x}, \qquad Y_1 = \frac{\partial U_1}{\partial y}, \qquad Z_1 = \frac{\partial U_1}{\partial z};$$

donc

$$X + X_1 = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial (U + U_1)}{\partial x},$$

$$Y + Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial (U + U_1)}{\partial y},$$

$$Z + Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{\partial (U + U_1)}{\partial z}.$$

S'il existe une étoile double dans l'amas, le travail pendant une révolution complète est donc nul. L'existence des doubles n'est ainsi pas incompatible avec l'état d'équilibre stable, à condition que les étoiles doubles accomplissent toutes des orbites fermées.

Il est évident de même que les formes des orbites des étoiles doubles d'un amas sont différentes de celles isolées. C'est dans ce fait, ajouté à l'effet des chocs, que réside l'explication du manque des doubles dans les amas, même galactiques, comme nous l'indiquent les observations.

D'ailleurs, si une double se formait à un certain moment et si elle avait la tendance de se conserver, elle devrait se soumettre au principe de l'équipartion de l'énergie. La masse étant augmentée par cette capture, l'amplitude de son mouvement sera diminuée. Elle devra vivre vers la région centrale de l'amas, région très dangereuse pour son existence de double, à cause des chocs nombreux.

57. **La variation de la force d'attraction avec le degré de concentration.** — Désignons pour simplifier

$$\alpha^2 \beta = c \text{(quantité toujours} > 0) \qquad \text{et} \qquad -4\pi 3^{\frac{1}{2}} = K \text{(const.} < 0).$$

L'expression de la force F_r est alors

$$F = K.c^{\frac{3}{2}} \frac{cr}{(3 + c^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Elle s'annule à l'origine et à l'infini. Étant toujours de même

signe, elle a donc un maximum. Calculons les expressions suivantes :

$$(15)\qquad \frac{\partial F}{\partial c} = \frac{Kr}{2}\cdot\frac{c^{\frac{3}{2}}}{(3+c^2r^2)^{\frac{5}{2}}}(15-c^2r^2),$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{K.c^{\frac{5}{2}}}{(3+c^2r^2)^{\frac{5}{2}}}(3-2c^2r^2),$$

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{3.K.c^{\frac{9}{2}}.r}{(3+c^2r^2)^{\frac{7}{2}}}(2c^2r^2-9),$$

$$C = \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} = \frac{3K.r}{4}\cdot\frac{c^{\frac{1}{2}}}{(3+c^2r^2)^{\frac{7}{2}}}\cdot(15c^4r^4-140c^2r^2+45),$$

$$B = \frac{\partial^2 F}{\partial c\,\partial r} = \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial c} = \frac{K.c^{\frac{3}{2}}}{2}\,\frac{2c^4r^4-69c^2r^2+45}{(3+c^2r^2)^{\frac{7}{2}}},$$

$$B^2-AC = \frac{-K^2.c^3}{4(3+c^2r^2)^7}(266c^8r^8-3459c^6r^6+7209c^4r^4 + 2565c^2r^2-2025),$$

De l'expression (15), on voit que la force a un maximum relatif pour $cr = 3{,}87$. Donc, pour les concentrations plus grandes que celles correspondant à $c = 3{,}87$, le maximum de la force se trouve à l'intérieur de l'amas, dont le rayon est pris comme unité. Pour des concentrations plus petites que $c = 3{,}87$, le maximum est « en dehors » de l'amas. Mais cela n'est qu'une manière de s'exprimer, car en dehors la densité est nulle. Dans cette région, la force décroît toujours, en raison inverse du carré de la distance.

En considérant r et c comme des coordonnées courantes, alors l'expression de la force représente une surface dans l'espace. Nous pouvons donc examiner la structure de cette surface dans toutes les régions de l'espace. Comme nous avons

$$B^2-AC = \frac{-K^2c^3}{4(3+c^2r^2)^7}(c^2r^2+0{,}35)cr+3{,}24)(cr+1{,}3)(cr+1{,}1) \times(cr-3{,}24)(cr-1{,}3)(cr-1{,}1).$$

Alors

Pour	$0 < cr < 1{,}1$,	la surface de la force	n'a ni max. ni min.;
»	$1{,}1 < cr < 1{,}3$,	»	»	a un minimum;
»	$1{,}3 < cr < 3{,}24$,	»	»	n'a ni max. ni min.;
»	$3{,}24 < cr < +\infty$,	»	»	a un maximum.

LE MOUVEMENT CIRCULAIRE.

58. Supposons que la vitesse initiale soit perpendiculaire sur le rayon vecteur, et considérons l'équation du mouvement sur le rayon vecteur :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = F(r) + \frac{C^2}{r^3} \qquad \text{(C, const. des aires).}$$

La vitesse initiale $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$ de ce mouvement est nulle et le mouvement s'effectue comme si le rayon vecteur étant fixe, le mouvement se faisait le long de ce rayon sous l'action d'une force égale à

$$F(r) + \frac{C^2}{r^3}.$$

Si cette force est négative, r va en décroissant au commencement. Supposons

$$Fr_0 + \frac{C^2}{r_0^3} = 0.$$

Dans ce cas, pour un observateur entraîné avec le rayon vecteur, le point reste immobile. Sa trajectoire sera donc une circonférence de rayon r_0 et en vertu du théorème des aires le mouvement sera uniforme.

Donc, pour qu'une étoile décrive une orbite circulaire, elle doit satisfaire aux deux conditions :

1° Vitesse initiale perpendiculaire au rayon vecteur :

$$F(r) + \frac{C^2}{r^3} = 0.$$

Soit γ, l'angle que fait la vitesse à un certain moment avec le rayon vecteur.

Alors :

$$C = r_0 V_0 \sin \gamma.$$

La première condition devient

$$C = \pm r_0 V_0$$

et la deuxième

$$V_0 = \sqrt{-F r_0}.$$

Puisque la force est attractive, les orbites circulaires sont possibles si les deux conditions sont satisfaites.

59. Soit ω la vitesse angulaire d'une étoile, qui a un mouvement circulaire de rayon r_0

$$r = r_0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

L'accélération tangentielle (J_T) est nulle et l'accélération normale (J_N) est

$$J_N = \frac{V^2}{r_0} = -\omega^2 r.$$

Donc

$$-\omega^2 r_0 = \frac{-4\pi\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^2\sqrt{3\alpha^2\beta}.r_0}{(3+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^2 r_0^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\omega^2 = \frac{4\pi\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^2\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^2 r_0^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\sqrt{\pi}.\alpha^2\beta\sqrt[4]{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^2 r_0^2)^{\frac{3}{4}}}$$

$$dt = \frac{(3+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^2 r_0^2)^{\frac{3}{4}}}{2\sqrt{\pi}.\alpha^{\frac{1}{2}}\beta\sqrt[4]{3\alpha^2\beta}}\,d\theta$$

et le temps d'une révolution complète est donc

$$T = \frac{(3+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^2 r_0^2)^{\frac{3}{4}}}{2\sqrt{\pi}.\alpha^2\beta\sqrt[4]{3\alpha^2\beta}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}.(3+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^2 r_0^2)^{\frac{3}{4}}}{\alpha^2\beta\sqrt[4]{3\alpha^2\beta}}.$$

Et puisque le mouvement est uniforme :

$$V = \frac{2\sqrt{\pi}\,r_0\alpha^2\beta\sqrt[4]{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^2 r_0^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Le mouvement est donc complètement déterminé.

60. **La variation de la vitesse angulaire (ω) avec la concentration.** — Mettons

$$\alpha^2\beta = c \qquad \text{et} \qquad 2\sqrt{\pi}.\sqrt[4]{3} = K,$$

quantités toujours positives. Alors

$$\omega = K\frac{c^{\frac{5}{4}}}{(3+c^2 r^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

La vitesse angulaire ne s'annule au centre que si l'amas est homogène. Calculons

$$\frac{d\omega}{dc} = K\frac{c^{\frac{1}{4}}}{4}\frac{15 - c^2r^2}{(3 + c^2r^2)^{\frac{7}{4}}},$$

$$(16) \qquad \frac{d\omega}{dr} = -\frac{3}{2}Kc^{\frac{9}{4}}\frac{c\,r_0}{(3 + c^2r^2)^{\frac{7}{4}}}.$$

Dans un point quelconque de l'amas ($r = r_0 =$ const.),

Pour $c^2r_0^2 < 15$, ω croît avec la concentration;
» $c^2r_0^2 = 15$, ω a un maximum;
» $c^2r_0^2 > 15$, ω décroît avec la concentration.

La formule (16) nous montre que pour une concentration donnée ($c =$ const.) la vitesse angulaire décroît toujours quand r_0 croît.

61. La variation de la vitesse (V) avec la concentration. — Avec les mêmes définitions de c et K, comme plus haut, l'expression de la vitesse devient

$$(17) \qquad V = \frac{Kc^{\frac{5}{2}}r}{(3 + c^2r^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Calculons

$$(18) \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Kc^{\frac{5}{4}}(6 - c^2r^2)}{2(3 + c^2r^2)^{\frac{7}{4}}},$$

$$(19) \qquad \frac{\partial V}{\partial c} = \frac{Kr\,c^{\frac{1}{4}}(15 - c^2r^2)}{4(3 + c^2r^2)^{\frac{7}{4}}};$$

$$A = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{3Kc^{\frac{13}{4}}r(c^2r^2 - 18)}{4(3 + c^2r^2)^{\frac{11}{4}}},$$

$$B = \frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial c} = \frac{Kc^{\frac{1}{4}}(90 - 93c^2r^2 + c^4r^4)}{8(3 + c^2r^2)^{\frac{11}{4}}},$$

$$C = \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \frac{Kr(45 - 237c^2r^2 + 14c^4r^4)}{16c^{\frac{3}{4}}(3 + c^2r^2)^{\frac{11}{4}}},$$

$$B^2 - AC = \frac{-K^2c^{\frac{1}{2}}(c^2r^2 - 0{,}623)(c^2r^2 - 2{,}47)(c^2r^2 - 32{,}77)(c^2r^2 + 12{,}56)}{64(3 + c^2r^2)^{\frac{11}{2}}}.$$

L'équation (18) nous montre que, dans un amas d'une concen-

tration donnée ($c =$ const.), la vitesse croît, quand r décroît, jusqu'à la valeur $cr = \sqrt{6}$. Pour cette valeur la vitesse atteint le maximum, puis elle décroît.

L'équation (19) nous montre, qu'à un certain point à l'intérieur de l'amas ($r =$ const.), dont la concentration est variable, la vitesse croît avec la concentration jusqu'à $cr = \sqrt{15}$, pnis elle décroît.

L'énergie cinétique de l'amas croît donc avec la concentration.

En considérant comme plus haut, r et c comme coordonnées courantes, la surface de la vitesse (17) présente les régions suivantes :

Pour $0 < cr < 0{,}783$, ou il n'y a ni maximum ni minimum;
» $0{,}783 < cr < 1{,}57$, ou la vitesse a un maximum;
» $1{,}57 < cr < 5{,}72$, ou la vitesse n'a ni maximum ni minimum;
» $5{,}72 < cr < +\infty$, ou la vitesse a un minimum.

A la périphérie de l'amas, par exemple (donc $r = 1$), la vitesse croît toujours jusqu'à des concentrations correspondant à $0 < c < 0{,}783$, sans atteindre un maximum qui se trouve *en dehors* de l'amas. Pour des concentrations plus grandes $0{,}783 < c < 1{,}57$, la vitesse à la périphérie est maxima, par rapport aux vitesses intérieures ou extérieures. Pour des concentrations encore plus grandes, le maximum de la vitesse a lieu cette fois à l'intérieur de l'amas. Pour des grandes concentrations $5{,}72 < c < \infty$ comme c'est le cas de M. 9 ($c = 6{,}1$), le plus concentré de ceux observés par nous, la vitesse périphérique est minime.

Sur des orbites circulaires, de très petites amplitudes, par exemple $\frac{1}{10} r$, les vitesses des étoiles croissent, sans atteindre le maximum, jusqu'à des concentrations correspondant à $c < 7{,}83$. Seulement pour des très grandes concentrations, beaucoup plus grandes que celles observées par nous, correspondant à

$$7{,}83 < c < 15.7,$$

leurs vitesses présentent un maximum. Enfin, pour des concentrations excessivement grandes, correspondant plutôt à un corps central de grande masse, entouré d'un nuage stellaire très raréfié, concentration qui ne paraît pas réalisable, et pour laquelle

$$57{,}2 < c < \infty,$$

leurs vitesses atteignent la région du minimum, sur la surface des vitesses (17).

62. **Variation de la période d'oscillation** (T) **avec la concentration.** — Le temps d'une révolution complète est donné par

$$(20) \qquad T = Kc^{-\frac{5}{4}}(3 + c^2 r^2)^{\frac{3}{4}}, \quad \text{où} \quad c = \alpha^2 \beta \quad \text{et} \quad K = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Cette expression ne s'annule pas à l'origine, où d'ailleurs elle donne la plus petite valeur du temps dans l'orbite. Ses dérivées successives sont :

$$(21) \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{3Kc^{\frac{3}{4}}}{2} \frac{r}{(3 + c^2 r^2)^{\frac{1}{4}}},$$

$$(22) \qquad \frac{\partial T}{\partial c} = \frac{Kc^{-\frac{3}{4}}}{4} \frac{c^2 r^2 - 15}{(3 + c^2 r^2)^{\frac{1}{4}}},$$

$$(23) \qquad A = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{3Kc^{\frac{3}{4}}}{4} \frac{6 + c^2 r^2}{(3 + c^2 r^2)^{\frac{5}{4}}},$$

$$B = \frac{\partial^2 T}{\partial c\, \partial r} = \frac{3Kr(c^2 r^2 + 9)}{8c^{\frac{1}{4}}(3 + c^2 r^2)^{\frac{5}{4}}},$$

$$(24) \qquad C = \frac{\partial^2 T}{\partial c^2} = -\frac{3K}{16} \frac{c^4 r^4 - 54c^2 r^2 - 135}{c^{\frac{13}{4}}(3 + c^2 r^2)^{\frac{5}{4}}}.$$

$$B^2 - AC = \frac{9K^2}{32c^{\frac{5}{2}}(3 + c^2 r^2)^{\frac{5}{2}}}(c^6 r^6 - 15c^4 r^4 - 189c^2 r^2 - 405).$$

De l'expression (21) on voit que, pour un amas d'une concentration donnée ($c =$ const.), T croît toujours avec r. Cette croissance n'a pas d'inflexions (23)

De l'expression (22), on voit qu'à un point donné dans l'amas ($r =$ const.), quand la concentration croît, T décroît et a un minimum correspondant à $cr = 3{,}87$. La décroissance de T a deux points d'inflexions (24), correspondant aux $cr = \sqrt{51{,}37}$ et $cr = \sqrt{2{,}63}$.

En considerant c et r comme coordonnées courantes, la surface (20) du temps a une région de minimum pour

$$0 < cr < 4{,}49,$$

les autres régions de la surface n'ayant ni maximum, ni minimum.

LE MOUVEMENT ELLIPTIQUE.

63. Le mouvement elliptique se fait conformément à la loi des aires

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C \tag{25}$$

et admet l'intégrale des forces vives

$$d\frac{V^2}{2} = F(r)\,dr.$$

En substituant la valeur de $F(r)$, nous avons successivement

$$V^2 = -8\pi\alpha^4\beta^2\sqrt{3\alpha^2\beta}\int\frac{r\,dr}{(3+\alpha^4\beta^2r^2)^{\frac{3}{2}}} + h,$$

$$V^2 = h + \frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2r^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Considérons l'expression de V^2

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}, \tag{26}$$

alors

$$h + \frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2r^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2},$$

d'où

$$t = \int\frac{dr}{\sqrt{h + \frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{C^2}{r^2}}}.$$

Éliminons dt, dans les expressions (26) et 25), en remplaçant $\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$ par $\left[\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right]^2$. Nous obtenons l'expression de la vitesse bien connue

$$V^2 = c^2\left[\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right],$$

donc

$$h + \frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2r^2)^{\frac{1}{2}}} = c^2\left[\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right],$$

d'où enfin

$$\theta = \pm \frac{c}{r^2} \int \frac{dr}{\sqrt{h + \frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2 r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{C^2}{r^2}}},$$

qui pour la transformation

$$z = \sqrt{\frac{3\alpha^2\beta}{3+\alpha^4\beta^2 r^2}}$$

devient

$$\theta = \pm C\alpha^4\beta^2 \int \frac{dz}{(\alpha^2\beta - z^2)\sqrt{-24\pi z^3 - (3h + C^2\alpha^4\beta^2)z^2 + 24\alpha^2\beta z + 3\alpha^2\beta h}}.$$

L'équation

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{h + \frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2 r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{C^2}{r^2}}$$

égalée à zéro, nous donne le péricentre et l'apocentre du mouvement. Nous avons donc

$$(27) \qquad h + \frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2 r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{C^2}{r^2} = 0.$$

Mais puisque au moment initial

$$V_0^2 = 2\left(U_0 + \frac{h}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad C = v_0 r_0 \sin\delta_0,$$

nous avons

$$h = V_0^2 - 2U_0 = V_0^2 - \frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{\sqrt{3+\alpha^4\beta^2 r_0^2}}$$

et l'équation (27) devient

$$(28) \qquad \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2\delta_0}{r^2} - \frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2 r^2)^{\frac{1}{2}}} + \left[\frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{\sqrt{3+\alpha^4\beta^2 r_0^2}} - V_0^2\right] = 0,$$

équation de quatrième degré en r, qui nous donne les apsides en fonction des conditions initiales.

LE MOUVEMENT RADIAL.

64. Dans ce cas, nous avons la constante des aires nulle ($C = 0$) et la constante des forces vives

$$h = -\frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2 r_0^2)^{\frac{1}{2}}};$$

donc, l'expression de t devient,

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2 r^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{(3+\alpha^4\beta^2 r_0^2)^{\frac{1}{2}}}}};$$

ou encore, par la transformation

$$\alpha^2\beta r = z \quad \text{et} \quad \alpha^2\beta r_0 = z_0,$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sqrt{3(\alpha^2\beta)^5}}} \int \frac{dz}{\sqrt{\dfrac{2}{(3+z^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{2}{(3+z_0^2)^{\frac{1}{2}}}}}.$$

Enfin, par une nouvelle transformation

$$z = \sqrt{3}\tang\psi, \qquad \sin\frac{\psi}{2} = K\sin\frac{\chi}{2} \qquad \text{ou} \qquad K = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\dfrac{3}{3+r_0^2}}}{2}},$$

on a

$$t + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi\sqrt{(\alpha^2\beta)^5}}} \int \frac{d\chi}{(1-2K^2\sin^2\chi)^2\sqrt{1-K^2\sin^2\chi}},$$

intégrale elliptique de troisième espèce.

65. **L'amplitude du mouvement radial.** — Reprenons l'équation (28) des apsides, du mouvement elliptique de tout à l'heure. Dans le cas du mouvement radial, la constante des aires est nulle

$$V_0 r_0 \sin\delta_0 = 0.$$

Le mouvement radial peut être obtenu dans deux cas :

1° Si $V_0 = 0$, et l'équation (28) se réduit à

$$\frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{\sqrt{2+\alpha^4\beta^2 r_0^2}} = \frac{8\pi\sqrt{3\alpha^2\beta}}{\sqrt{3+\alpha^4\beta^2 r^2}} \qquad \text{ou} \qquad r = r_0,$$

et l'étoile a alors un mouvement oscillatoire, le long d'un diamètre de la sphère $r = r_0$, sans jamais sortir de l'intérieur de cette sphère. Ou bien :

2° Si, $\sin\delta_0 = 0$, et l'équation (28) se réduit à

$$r^2 = \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3+c^2 r_0^2}} - \dfrac{V_0^2}{8\pi\sqrt{3c}}\right)^2} - 3\right], \qquad \text{où } c = h^2\beta.$$

Cette équation nous donne l'éloignement maximum d'une étoile, qui acquiert une vitesse V_0 dirigée suivant le rayon vecteur, due par exemple à un choc, à une certaine ditance r_0 du centre. On voit que l'oscillation est encore symétrique par rapport au centre de l'amas. Puisque r est indépendant du signe de V_0, il en résulte que l'étoile s'éloigne jusqu'à la même distance du centre, que V_0 soit dirigé vers le centre ou vers la périphérie.

On voit, de même, que la valeur de l'amplitude du mouvement radial dépend de c, le degré de condensation de l'amas.

Par cette formule, annulant r_0, on peut calculer à quelle distance du centre peut arriver une étoile, qui part du centre de l'amas, avec une vitesse initiale donnée. Ou inversement, de quelle distance doit partir une étoile avec une vitesse initiale nulle, pour traverser le centre de l'amas avec une vitesse V_0, c'est-à-dire quel est le rayon (r) de l'amas de concentration (c) qui imprime au centre une vitesse V_0 à une étoile.

66. Si toutes les racines de l'équation (28) qui est de quatrième degré en r sont égales, l'orbite est un cercle de rayon égal à la distance péricentrique trouvée, r_0.

Si elle a deux racines doubles, l'orbite est une ellipse avec l'origine au centre de l'amas.

Si elle a une seule racine double et les deux autres réelles et quelconques, l'orbite est une ellipse, ayant le centre de l'amas, dans un des foyers.

Si elle a deux racines égales et les deux autres nulles, le mouvement est radial. En imposant ces conditions à l'équation (28), on trouve les relations entre les données initiales V_0, r_0, δ_0 et le degré de concentration c, qui doivent être satisfaisantes, pour que ces orbites soient réalisées.

LA VARIATION DES DIMENSIONS DES ORBITES AVEC LE DEGRÉ DE CONCENTRATION DE L'AMAS.

67. Reprenons l'équation du mouvement relatif, sur le rayon vecteur.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = F(r, t), \tag{29}$$

où le deuxième membre est une fonction seulement de r, au cas où la distribution des masses est stable. Sa forme, dans ce cas, nous l'avons vue au paragraphe 53.

Si la distribution des masses est variable avec le temps, $F(r, t)$ est une fonction de deux variables r et t.

Introduisons une fonction $\varphi(r, t)$, d'une seule variable (r), ou de deux variables (r et t), suivant la nature de F, définie par l'équation

$$\varphi(r, t) = -\int F(r, t)\, dr.$$

Elle n'est donc que la fonction potentielle du mouvement relatif sur le rayon vecteur. Alors, si φ est fonction seulement de r, l'équation (29) devient

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dr} = 0 \tag{30}$$

ou, en intégrant,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \varphi = h$$

ou

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2(h - \varphi)},$$

où h est la constante des forces vives.

Dans ce cas, le maximum et le minimum de r sont les racines de

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

Si φ et F sont des fonctions de deux variables, r et t, nous avons

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2 r}{dt^2}\right)\frac{dr}{dt}.$$

Or la parenthèse est nulle, en vertu de l'équation (30). Donc

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \text{ou} \qquad h = \varphi.$$

La constante d'intégration étant nulle, h et φ s'annulent ensemble.

Si φ est fonction aussi de t, alors sa valeur φ_0, dans un point r_0,

$$\varphi_0 = h \tag{31}$$

définit encore les distances apocentrique et péricentrique, mais seulement pendant la période dans laquelle φ ne varie pas sensiblement avec t.

Pour une orbite circulaire, le péricentre est égal à l'apocentre comme distance, et l'équation

$$\varphi = h$$

a une racine double, qui vérifie donc aussi l'équation

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \tag{32}$$

et réciproquement.

Supposons, qu'à un mouvement donné t, ces deux dernières équations ont une racine commune (r_0). Alors, l'étoile a un mouvement circulaire de rayon r_0.

Étudions la variation de r_0 par rapport à t, si la force est variable avec le temps, c'est-à-dire si la concentration de l'amas varie.

Dérivons dans ce but l'équation (31) par rapport à t,

$$\frac{d\varphi_0}{dr_0}\frac{dr_0}{ds} + \frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{dh}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{33}$$

Mais, puisque r_0 est peu différent de r sa nouvelle valeur, nous pouvons ecrire

$$\frac{d\varphi_0}{dr_0} = \frac{d\varphi}{dr} + (r_0 - r)\frac{d^2\varphi}{dr^2}$$

et

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + (r_0 - r)\frac{d^2\varphi}{dr\,dt}.$$

En introduisant ces valeurs, ainsi que la relation (32) dans (33), nous obtenons

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{dr_0}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dr\,dt} = 0.$$

Or, puisque r diffère peu de r_0,

$$\frac{d^2\varphi}{dr\,dt} + \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{dr}{dt} = 0.$$

Le premier membre n'est que la dérivée, par rapport à t, de $\frac{d\varphi}{dr}$. Donc, si $\frac{d\varphi}{dr}$ est nulle à un certain moment t, elle reste nulle à l'époque $t + dt$ et l'orbite reste circulaire, conformément à la

réciproque de plus haut. Quand l'amas se concentre, les formes des orbites circulaires ne sont pas influencées par ce fait, mais leurs rayons varient. Si la force augmente, la vitesse angulaire (ω) augmente aussi et le rayon diminue, et inversement.

Pour un mouvement radial, il est évident que l'amplitude du mouvement diminue si la force augmente, et inversement.

Pour une orbite elliptique, puisqu'elle est la résultante de deux mouvements radiaux, nons pouvons aussi conclure, que ces dimensions diminuent si la force augmente et inversement.

Or nous avons vu (§ 57) qu'il existe une certaine sphère, à l'intérieur de l'amas, dans laquelle la force augmente avec la concentration de l'amas et à l'extérieur de laquelle la force diminue, pendant que l'amas se concentre.

Les orbites des étoiles, dont les amplitudes sont plus petites que le rayon de cette sphère, diminuent quand l'amas se concentre, tandis que les orbites de grandes amplitudes, extérieures à cette sphère, s'agrandissent pendant que l'amas se concentre.

Donc, une concentration de l'amas, provenant par exemple de l'augmentation du nombre des orbites radiales, par le mécanisme des chocs (*voir* Chap. III), amène après elle deux autres causes de concentration : une par le rapetissement des orbites de petites amplitudes, une deuxième par l'agrandissement des dimensions des orbites de grandes amplitudes.

68. **Recherches de H. Gylden.** — La loi de la densité proposée, permet de faire une étude complète sur la variation des éléments des orbites, quand la structure de l'amas varie. Nous n'avons abordé en detail que le cas des orbites circulaires, les orbites elliptiques nécessitant une étude trop longue par suite du grand nombre de cas qu'il faudrait étudier séparément pour pouvoir généraliser.

Mais, H. Gylden a étudié un cas analogue (29) et les conclusions de son étude sont très intéressantes. Nous trouvons utile de les résumer ici.

Il considère un amas de structure un peu spéciale, formé par un noyeau central entouré par une atmosphère stellaire homogène. Le problème n'est pas réel, mais il nous donne une idée approchée de ce qui doit se passer dans un amas. Dans ce cas, la fonction des

forces et les équations du mouvement sont

$$U = \frac{\mu_1}{r} - \frac{\mu_2 r^2}{2}$$

(μ et μ_2 const. et r la distance au centre),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

On vérifie aisément que le mouvement est plan et se fait suivant la loi des aires.

Au lieu de la variable t, introduisons avec Gylden une nouvelle variable u, définie par

$$t = f(u),$$

où $f(u)$ est arbitraire pour un moment. Les équations du mouvement deviennent alors

$$(34) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{du^2} - \dfrac{dx}{du}\dfrac{f''(u)}{f'(u)} = [f'(u)]^2 \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ \dfrac{d^2y}{du^2} - \dfrac{dy}{du}\dfrac{f''(u)}{f'(u)} = [f'(u)]^2 \dfrac{\partial U}{\partial y}. \end{cases}$$

En multipliant (34) respectivement par x et y, puis en ajoutant, et en introduisant les coordonnées polaires (r et θ), on a

$$(35) \qquad r\frac{d^2r}{du^2} + \left(\frac{dr}{du}\right)^2 - \left[\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2\right] - r\frac{dr}{du}\frac{f''(u)}{f'(u)}$$
$$= [f'(u)]^2\left[x\frac{\partial U}{\partial u} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right].$$

En multipliant (34) par $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, et ajoutant nous avons

$$\frac{d\left[\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2\right]}{du} - 2\frac{f''(u)}{f'(u)}\left[\left(\frac{dx^2}{du} + \left(\frac{dy}{du}\right)^2\right]\right.$$
$$= 2[f'(u)]^2\left(\frac{dx}{du}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dy}{du}\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 2[f'(u)]^2\frac{dU}{du};$$

donc

$$(36) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = -[f'(u)]^2(h - 2U),$$

h étant la constante des forces vives. Les équations (35) et (36)

nous donnent

$$r\frac{d^2r}{du^2}+\left(\frac{dr}{du}\right)^2-r\frac{dr}{du}\frac{f''(u)}{f'(u)}=[f'(u)]^2\left[x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}-h+2U\right].$$

Déterminons maintenant la fonction arbitraire $f(u)$ par la condition

$$\left(\frac{dr}{du}\right)^2-r\frac{dr}{du}\frac{f''(u)}{f'(u)}=0,$$

qui nous donne successivement

$$\frac{dr}{r}=\frac{f''(u)}{f'(u)}du,$$
$$f'(u)=\beta r,$$
$$t=f(u)=\beta\int r\,du,$$

où β est une constante d'intégration.

Alors (35) devient

$$r\frac{d^2r}{du^2}=[f'(u)]^2\left(x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}-h+2U\right)$$

ou encore

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{dr}{du}\right)^2=-c+2\mu_1 r-hr^2-\mu_2 r^4.$$

C'est l'équation du mouvement relatif sur le rayon vecteur. Puisque $\frac{dr}{du}$ doit avoir aussi des valeurs réelles, l'équation

$$-c+2\mu_2 r-hr^2-\mu_2 r^4=0$$

a au moins deux racines réelles. Soit r_1 et r_2 leurs valeurs. Alors

$$-c+2\mu_1 r-hr^2-\mu_2 r^4=-(r-r_1)(r-r_2)(\gamma_0+\gamma_1 r+\gamma_2 r^2).$$

Gylden étudie les cas : 1° $\mu_1=0$ (amas homogène), alors les racines de l'équation en γ, de deuxième degré, sont négatives; 2° $\mu_2=0$ (problème de 2 corps), alors les racines sont égales, et 3° le cas le plus général, d'un amas homogène, ayant un noyau central, quand les racines sont réelles et quelconques. Les principales conclusions dans ce dernier cas sont :

1° Dans un mouvement elliptique, l'anomalie vraie ne reprend pas les mêmes valeurs avec u, après une révolution complète. Le maximum et le minimum de r tombent donc dans des directions

différentes, avec le temps et leurs positions s'éloignent, avec le temps des positions initiales.

2° Le temps pendant lequel r varie, du minimum au maximum, est toujours le même.

3° Les orbites peu excentriques sont spécifiques du cas $\mu_2 = 0$ (problème de 2 corps), tandis que les amas sont caractérisés par des orbites très aplaties.

4° Le déplacement des lignes des apsides disparaît seulement dans le cas $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$.

Les amas sont caractérisés par un déplacement continuel des lignes des apsides.

CHAPITRE VII.

LA PARALLAXE DES AMAS GLOBULAIRES.

69. Indices de position. — Nous avons vu que la distribution des amas globulaires ne se rapproche pas assez de la distribution des objets appartenant au système galactique, et qu'elle ne permet guère de déduire que les globulaires sont des pièces de la Voie Lactée.

Leur distribution s'approche plutôt de celle des spirales, systèmes aussi complexes que notre système galactique et en dehors de lui.

Le manque de globulaires dans le plan galactique indique : 1° que la Voie Lactée a dans son plan équatorial une frontière de matière obscure; 2° leurs positions extérieures par rapport à la Voie Lactée.

L'idée de Shapley, que les globulaires sont une banlieue de la Voie Lactée et que « le segment dépourvu des globulaires paraît plutôt une région d'attraction et de démolition », qu'un effet de l'obstruction de la lumière dans le segment équatorial (31), et que « la Voie Lactée s'est accrue et s'accroît encore, en s'attachant d'autres systèmes tels que les globulaires qui, une fois arrivés au sein de la Voie Lactée, se démolissent, en donnant naissance aux amas ouverts et nuages galactiques (32) », est insoutenable. Car, on ne pourrait pas expliquer pourquoi cette attraction n'agit seulement que dans le plan équatorial, et pourquoi les amas

qui se trouvent dans le voisinage de ce plan restent muets à l'appel de cette attraction.

Puis, si une parenté de cette nature existait entre les globulaires et les amas galactiques, la dissymétrie de la distribution des globulaires, agglomérés vers le Sagittarius, devrait se traduire par une dissymétrie dans la distribution des nuages et des amas galactiques, qui pourtant sont uniformément parsemés à toutes les longitudes galactiques.

D'ailleurs, Shapley paraît avoir quitté dernièrement ce point de vue. Il exprime sa dernière pensée sur ce problème de la manière suivante : « Des traces de nébulosité obscure existent certainement dans le système galactique et à des distances par trop grandes de nous et il est tout à fait possible que le manque apparent des amas globulaires à de petites latitudes soit dû à la présence d'une telle substance (33). »

70. Un seul fait paraît se dresser encore contre un trop grand éloignement des globulaires par rapport à la phériphérie de la Voie Lactée. C'est la présence des étoiles du même ordre de grandeur que celles des amas, dans quelques régions du ciel et autour des amas globulaires. Shapley, par exemple, a trouvé dans la région de XX Cygni ($g = +13^\circ$) des étoiles de 13e grandeur à indice de coloration négatif ou nul; autour de M. 11 ($g = -11^\circ$) des étoiles de type A, de 13,5 grandeur; autour des amas de Perseus [Shapley et nous aussi (28)], des étoiles de même type et de 14e grandeur.

D'autres régions en sont dépourvues, comme la région polaire (Seares) ($g = +28^\circ$), N.G.C. 1647 (Seares et Hertzsprung) ($g = -15^\circ$), M. 67 ($g = +34^\circ$) et M. 13 ($g = +40^\circ$) [Shapley].

Leur présence n'indique ni une continuité du milieu, au point de vue de la densité stellaire, entre la Voie Lactée et les globulaires, ni la proximité des globulaires par rapport à notre système, malgré l'égalité des grandeurs apparentes des étoiles. Car, les étoiles les plus lumineuses des amas ont une grandeur absolue de 5 unités plus grandes (au moins) et donc, peuvent être placées à des distances au moins 10 fois plus grandes que ces dernières étoiles galactiques.

D'ailleurs, il n'est pas impossible que l'espace cosmique entre la

Voie Lactée et les autres systèmes stellaires soit aussi peuplé par des étoiles, formant un milieu continu, mais plus raréfié.

Ce problème pourrait être élucidé par une étude statistique. Grâce à la présence de l'anneau équatorial obscur de la Voie Lactée, toute classe d'objets extérieurs à la Voie Lactée doit manquer dans le plan galactique et réciproquement. J.-H. Oort (34) a trouvé, par exemple, que les étoiles de grandes vitesses radiales (>80 km/sec) manquent complètement dans le plan galactique, comme les globulaires et les spirales. Si, après des données plus complètes, ce caractère de leurs distributions se maintient, on pourrait en conclure que ces objets sont aussi extragalactiques et peuplent l'espace entre la Voie Lactée et les autres systèmes stellaires.

Le problème présente un grand intérêt, mais est encore loin d'être élucidé.

71. **L'indice de l'origine des globulaires.** — Nous avons vu (Chapitre I), que les directions des axes de rotation des amas « globulaires » sont dépourvues de toute distribution systématique par rapport à l'axe de la Voie Lactée, ce qui indiquerait que ces systèmes n'ont pas une origine commune avec la voie Lactée, spécialement qu'ils ne se sont pas détachés de la Voie Lactée par suite de sa rotation.

La grande dispersion des globulaires en latitude galactique et la présence de quelques amas globulaires dans les régions galactiques polaires plaident également contre une origine commune de ces systèmes.

Tous les systèmes aplatis, à cause de leur rotation, comme la Voie Lactée et les spirales, indiquent que la plus grande dispersion en latitude se produit autour de l'axe de rotation, conformément aux lois de la Mécanique.

Plus on s'écarte dans le plan de rotation, moins la matière est dispersée en latitude. Si les amas globulaires avaient une origine commune avec la Voie Lactée, leur distribution ferait une exception impossible à expliquer à présent et difficile à admettre *a priori*.

72. **Indices de parallaxes.** — Un premier indice des paral-

laxes des amas, connu depuis Herschel, est évidemment l'*éclat de leurs étoiles*. Puisque nous ne connaissons généralement que les étoiles les plus lumineuses des géantes dont les éclats absolus sont très différents (de o à — 5 au moins) et puisque les étoiles les plus lumineuses ne sont pas de même type dans tous les amas, cet indice n'est rigoureux que si nous tenons compte de ces différences.

Les amas galactiques n'ont pas de géantes. Leurs étoiles les plus lumineuses sont de même type A ou B. Pour ces amas, la relation est rigoureuse.

Si les globulaires avaient toute la collection des géantes, l'indice serait pour eux ausi rigoureux. Mais il n'en est pas ainsi. M.37 et M.11, par exemple, ont respectivement des géantes jusqu'au type F et G, et en établissant les positions relatives des amas d'après cet indice, il faut tenir compte du type des étoiles les plus lumineuses.

73. Un deuxième indice a été trouvé par Bailey (35). C'est une corrélation presque linéaire (voir *fig.* 21 et Tabl. IX), entre les

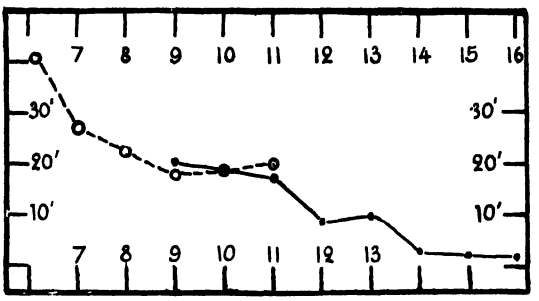

Fig. 21. — Relation entre les diamètres des amas (ordonnées) galactiques (courbe pointillée) ou globulaires (courbe pleine) et la grandeur des étoiles les plus lumineuses (abscisses).

diamètres des amas et les grandeurs apparentes de leurs étoiles les plus lumineuses. Cette relation est valable pour les amas globulaires ainsi que pour ceux galactiques. En tenant compte du premier indice, elle indiquerait que les amas ont des diamètres linéaires de même ordre de grandeur. Mais comme les amas des Nuages de Magellan sont pratiquement à la même distance, la variation de leurs diamètres apparents nous permet de con-

clure que les étoiles n'ont pas tendance à se grouper dans des amas de mêmes diamètres.

Il y a donc un certain degré d'incompatibilité. Cette relation ne peut donc être regardée que comme une relation moyenne.

Il serait intéressant de voir quelles modifications apporteront dans cette relation de nouvelles déterminations des diamètres des amas, qui sont très mal connus aujourd'hui. Puis, pour être rigoureux, il faudrait chercher la relation avec l'éclat des étoiles d'un même type, A par exemple, dans tous les amas et non pas avec les étoiles les plus lumineuses dont le type est variable d'un amas à l'autre.

TABLEAU IX.

Grandeur des ★.	Nombre des amas observés.	Diamètres moyens.
		′
9	1	20
10	0	..
11	1	18
12	7	9,4
13	25	10,0
14	5	4,4
15	3	3,3
16	1	3,0

La relation de Bailey montre qu'en moyenne, les diamètres apparents constituent également un indice de parallaxes relatives.

74. Shapley, d'un autre côté, a trouvé une relation entre les diamètres et les grandeurs intégrales visuelles des amas globulaires, déterminées par Holetschek. Cette relation est évidemment une conséquence de la relation entre les parallaxes et les éclats des étoiles. Nous avons poursuivi cette corrélation pour les amas globulaires dont les grandeurs intégrales n'étaient pas déterminées par Holetschek. Nous nous sommes servis dans ce but de la moyenne des diamètres apparents donnés par divers auteurs et en observant leurs grandeurs intégrales photographiques sur les Cartes de Franklin-Adams et Palisa. La relation trouvée (voir *fig.* 18) nous permet de conclure que les grandeurs apparentes intégrales des amas constituent un troisième indice de parallaxes relatives pour les globulaires.

75. Théorème de Charlier. — Concernant la corrélation entre les distances des globulaires et leurs diamètres apparents, il faut mentionner un important théorème dû au professeur Charlier, d'autant plus qu'il s'applique à tous les attributs des étoiles qui varient avec la distance.

Charlier (12) trouve que s'il y a une dispersion quelconque parmi les diamètres linéaires (D) d'une répartition d'amas globulaires, répartition supposée pareille dans toutes les directions, alors : 1° la distance moyenne (r) des amas est en raison inverse du diamètre apparent (d) pour des grandes valeurs seulement de ces diamètres, mais 2° pour des petites valeurs des diamètres apparents, la distance moyenne (r) déterminée, tend vers une limite finie.

Nous avons d'abord la relation évidente

$$D = rd.$$

Soient $\varphi_1(r)dr$ le nombre des globulaires à la distance $r \pm \frac{1}{2}dr$, et $\varphi_2(D)dD$ le nombre des amas globulaires de diamètres $D \pm \frac{1}{2}dD$, et supposons

$$\varphi_1(0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(0) \neq 0.$$

Soient $f_1(d)$ et $f_2(r)$ les courbes des fréquences obtenues par des sections respectivement $r =$ const. et $d =$ const. dans la surface des fréquences des diamètres et des distances des amas. Alors,

$$f_1(d) = \varphi_1(r)\,\varphi_2(rd)r,$$
$$f_2(r) = \varphi_1(r)\,\varphi_2(rd)r.$$

Malgré les apparences, les deuxièmes membres de ces équations ne sont pas les mêmes. Dans la première formule, $r =$ const. et d variable, et dans la deuxième inversement.

La valeur moyenne de $d(r =$ const.$)$ est donnée par

$$M_r(d) = \frac{\int_0^\infty f_1(d)\,d.d\,d}{\int_0^\infty f_1(d)\,d\,d} = \frac{\int_0^\infty D\,\varphi_2(D)\,dD}{r\int_0^\infty \varphi_2(D)\,dD} = \frac{1}{r}M(D),$$

c'est-à-dire la valeur moyenne des diamètres apparents est égale à la valeur moyenne des diamètres linéaires, divisée par la distance. Résultat évident.

Quant à la valeur moyenne de la distance $(r)(d = \text{variable})$, elle est donnée par

$$M_d(r) = \frac{\int_0^\infty f_1(d)\, r\, dr}{\int_0^\infty f_1(d)\, dr} = \frac{\int_0^\infty \varphi_1(r)\, \varphi_2(rd)\, r^2\, dr}{\int_0^\infty \varphi_1(r)\, \varphi_2(rd)\, r\, dr}.$$

La valeur moyenne de la distance dépend encore de d, non pas simplement en raison inverse, mais d'une manière plus compliquée.

Si d est très petit nous avons

$$M_d(r) = \frac{\int_0^\infty \varphi_1(r) r^2\, dr}{\int_0^\infty \varphi_1(r) r\, dr} = \text{const.},$$

et la deuxième partie du théorème est démontrée.

Pour des grandes valeurs de d, effectuons le changement $y = rd$. Alors

$$M_d(r) = \frac{\int_0^\infty \varphi_1\left(\frac{y}{d}\right) \varphi_2(y) y^2\, dy}{d \int_0^\infty \varphi_1\left(\frac{y}{d}\right) \varphi_2(y) y\, dy}.$$

Mais, dans ces conditions, $\varphi_1\left(\frac{y}{d}\right)$ tend vers $\varphi_1(0) \neq 0$, donc

$$M_d(r) = \frac{\int_0^\infty \varphi_2(y) y^2\, dy}{d \int_0^\infty \varphi_2(y) y\, dy} = \frac{\text{const.}}{d}$$

et la première partie est démontrée aussi.

La conclusion qui nous intéresse dans ce Chapitre est : Les parallaxes déduites des diamètres apparents des amas globulaires ne sont justes que pour les amas de grands diamètres apparents. De même, pour les parallaxes déduites des grandeurs apparentes intégrales des globulaires, ou des grandeurs apparentes de leurs étoiles, car le théorème de Charlier s'applique identiquement à tous les attributs qui varient avec la distance.

Au delà d'une certaine limite pour ces attributs, les estimations des parallaxes risquent d'être plus grandes qu'en réalité.

76. Les parallaxes absolues des amas globulaires. — On dispose à présent de plusieurs méthodes permettant de calculer les parallaxes des amas. Une première est due aux relations qui existent entre M (grandeur absolue d'une étoile), m (grandeur apparente de la même étoile) et π sa parallaxe, ou d sa distance exprimée en parsecs, ou enfin A, sa distance exprimée en années de lumière.

Il est facile, en partant de la loi de Fechner et de la formule de Pogson, d'établir les relations

$$M = m + 5 + 5 \log \pi,$$
$$M = m + 5 - 5 \log d,$$
$$M = m + 7{,}5661 - 5 \log A.$$

C'est sans doute la méthode la plus précise d'aujourd'hui.

77. Méthode de Kapteyn. — Dans la méthode de Kapteyn, il y a un *a priori*, qui nous force de la mettre en réserve jusqu'à ce que des observations concluantes soient faites. Il suppose que la loi des luminosités est une courbe symétrique et que sa dérivée, qui donne la probabilité de la grandeur absolue M, ait la forme d'une fonction d'erreurs

$$\frac{d\,F(M)}{dM} = C\, e^{-h^2(M-M_0)^2},$$

où C, h^2 et M_0 sont des constantes. D'après cette loi, les grandeurs absolues $M_0 + \Delta$ et $M_0 - \Delta$ sont également probables. Or, nous avons vu (Chap. I) que cela n'est pas encore prouvé, surtout pour des grandes valeurs de Δ, et que les opinions sont partagées.

En substituant

$$M = m + 5 + 5 \log \pi,$$

on a

$$F(m)\, dm = C\, e^{-h^2(m+5+5\log\pi-M_0)^2}\, dm.$$

Soit $\overline{m}$ la valeur moyenne des grandeurs apparentes (m) des étoiles de l'amas, plus brillantes que m_1. Alors

$$\overline{m} = \frac{\int_{-\infty}^{m_1} m\, e^{-h^2(m+5+5\log\pi-M_0)^2}\, dm}{\int_{-\infty}^{m_1} e^{-h^2(m+5+5\log\pi-M_0)}\, dm}$$

ou en substituant

$$m = (m + 5 + 5 \log \pi - M_0) + (M_0 - 5 - 5 \log \pi),$$

puis en désignant

$$h(m_1 - M_0 + 5 + 5 \log \pi) = P$$

et

$$h(m + 5 + 5 \log \pi - M_0) = z,$$

on obtient

$$\overline{m} = M_0 - 5 - 5 \log \pi - \frac{1}{2h} \frac{e^{-P^2}}{\int_{-\infty}^{P} e^{-z^2} dz},$$

formule qui nous fournit la parallaxe π, en connaissant h, m_1, $\overline{m}$, déduites de l'étude de la courbe des fréquences des grandeurs apparentes.

78. **Méthodes de Shapley.** — Les plus sérieuses tentatives faites pour obtenir les parallaxes des globulaires sont certainement celles de Shapley. Il a employé dans ce but plusieurs méthodes (36).

a. Grâce à la relation entre les grandeurs absolues et les périodes des variables céphéides, en déterminant les périodes des variables des amas et en supposant qu'elles sont identiques aux céphéides de la Voie Lactée, il en déduit leurs grandeurs absolues et après les parallaxes. Il a calculé ainsi les parallaxes de six amas globulaires : N. G. C., 5139, 5272, 5904, 6205, 6656, 7078.

C'est la plus précise de ses méthodes.

Je me contente de rappeler que des astronomes très autorisés n'admettent pas, sans réserve, l'identité des variables des amas globulaires avec celles de la Voie Lactée. Une étude approfondie du problème serait bien venue pour décider entre les opinions et sur un problème d'un si haut intérêt.

b. Dans les globulaires pourvus de céphéides de courtes périodes, Shapley a observé que la différence de la moyenne de leurs grandeurs et de la grandeur moyenne de 25 des plus lumineuses étoiles est une constante (1,35) pour tous les amas observés. Pour les amas où il n'a pas trouvé des variables, pour pouvoir appliquer la première méthode, il suppose qu'il existe des céphéides de courtes périodes. Il déduit de cette supposition leurs grandeurs absolues. En ce qui concerne la grandeur appa-

rente moyenne de ces variables hypothétiques, il la détermine de la moyenne des grandeurs de 25 étoiles des plus lumineuses, corrigées de 1,35. Il calcule ainsi les parallaxes de 28 amas globulaires. Cette méthode paraît être un peu empirique.

c. D'après ses observations, il trouve qu'entre les grandeurs intégrales apparentes (μ) des amas globulaires observées par Holetschek et la grandeur moyenne (m_{25}) de 25 étoiles des plus lumineuses des amas existe la relation

$$\mu - m_{25} = +7,40.$$

Il calcule ainsi les m_{25} des amas globulaires dont les μ sont connus, après leurs parallaxes. Cette méthode n'est juste que si la méthode *b* est juste et si les amas ont la même loi des luminosités.

d. De la relation qui existe entre les parallaxes et les diamètres apparents des amas globulaires, qui n'est qu'une conséquence de la relation de Bailey, il calcule les parallaxes de 41 globulaires pour lesquels on n'a pas d'autres données que leurs diamètres apparents.

Les parallaxes déduites par Shapley par diverses méthodes, pour un même amas, sont très concordantes, ce qui évidemment augmente le poids de ses méthodes.

Mais, puisque les amas globulaires sont en dehors de la Voie Lactée et n'ont pas une origine commune avec elle et puisque les parallaxes de Shapley sont dispersées entre 0",000153 (ω Centauri) et 0",000015 (N. G. C. 7006) il en résulte que les distances de 20000 années à 220000 entre lesquelles sont parsemés les globulaires sont trop petites par rapport au rayon de la Voie Lactée adopté, de 12000 années de lumière.

Étant données les grandes vitesses radiales des amas globulaires et leurs grandes dimensions, la circulation paraît un peu génée. Les chocs des systèmes stellaires, qu'on n'a jamais observés, seraient presque inévitables.

Nous ne voulons pas critiquer l'œuvre immense du savant astronome de Harvard, mais l'histoire nous enseigne que la conquête de la vérité n'a jamais été faite du premier coup, mais par des approximations successives. L'histoire nous permet donc d'admettre, *a priori*, des rectifications possibles sur les parallaxes de Shapley.

Shapley admet une erreur probable de 10 pour 100 pour la méthode *a*, de 20 pour 100 pour la méthode *b* et 25 pour 100 pour la méthode *d*.

Mais, depuis la publication de ses premières recherches sur les parallaxes, il y a eu des modifications, et il y en aura probablement encore, sur les valeurs des attributs des étoiles (spécialement de M), modifications qui ont des répercussions considérables sur les parallaxes adoptées.

Prenons comme exemple l'amas le mieux étudié par lui, M. 13.

D'après ses observations (14), seize des plus lumineuses étoiles de l'amas ont une grandeur photographique moyenne de 13,80 et, visuelle de 12,39, donc un indice de coloration moyenne de + 1,42. Alors, leur grandeur absolue moyenne correspondante est de — 4,5, comme il résulte d'après d'autres observations de Shapley (16).

Préalablement, dans ce calcul nous avons éliminé les étoiles à indices négatifs ou même positifs, mais très petites et qui, d'après la relation d'Adams sont probablement étrangères à l'amas. Comme la grandeur de Holetschek (μ) est égale à 5,8, les relations

$$\mathrm{M} = m + 5 + 5 \log \pi, \tag{21}$$

$$\mathfrak{M} - \mu = \mathrm{M} - m \tag{22}$$

nous donnent $\pi = 0'',0000219$ et $\mathfrak{M} = -12,50$. Tandis que Shapley trouve, en s'appuyant sur d'autres données, $\pi = 0'',00009$ et $\mathfrak{M} = -9,43$.

Tout système des valeurs $\mathfrak{M}$, M, μ, m et π doit satisfaire aux deux équations (21) et (22) et non pas seulement (21).

En substituant les valeurs de M, μ, m, citées plus haut et extraites des dernières recherches de Shapley, ainsi que les valeurs de π et $\mathfrak{M}$, adoptées par lui sur M. 13, on vérifie que les deux équations ne sont compatibles que seulement si l'on a : soit $m = 10,73$, ce qui est inadmissible, soit $\mathfrak{M} = -12,50$ et alors la valeur de π adoptée par Shapley change aussi, soit que $m = -1,43$, ce qui est en désaccord avec ses dernières observations (16).

Des modifications de même ordre résultent d'une analyse identique sur les parallaxes d'autres amas globulaires. Quoique les nouvelles valeurs des M soient relativement peu différentes de

celles adoptées premièrement par Shapley, leurs effets sont grands sur les distances des amas globulaires.

79. **Influence d'une erreur ε du module de parallaxe M — m, sur les distances.** — On peut se rendre compte de l'effet produit sur les distances, en partant des relations

$$M = m + 5 - 5 \log d.$$
$$M = (m + \varepsilon) + 5 - 5 \log d',$$

où d et d' sont les distances avant et après la correction ε, apportée au module M — m. On trouve facilement

$$d' = d \times 10^{\frac{\varepsilon}{5}}.$$

Pour $\varepsilon = 1$	$d' = 1{,}58\,d$
» $\varepsilon = 2$	$d' = 2{,}51\,d$
» $\varepsilon = 3$	$d' = 3{,}98\,d$
» $\varepsilon = 4$	$d' = 10\,d$
» $\varepsilon = 5$	$d' = 100\,d$
.....	.....

Dans notre cas $\varepsilon = 3{,}07$, donc les nouvelles distances peuvent être considérées quatre fois plus grandes que celles adoptées par Shapley, valeurs déjà plus acceptables.

80. D'autres causes pourraient intervenir pour changer encore les parallaxes.

D'abord, de nouvelles modifications sur les valeurs des grandeurs absolues des géantes des globulaires ne sont pas impossibles. Les géantes sont la caractéristique la plus spécifique des globulaires. La plus grande valeur attribuée aux géantes des globulaires est — 5. Or, on a trouvé dans les Nuages de Magellan des grandeurs absolues de — 8. Il paraît très possible que les géantes des globulaires aient des grandeurs absolues plus grandes qu'on leur attribue généralement.

Toute nouvelle modification apportée sur le module de parallaxe augmente la distance exponentiellement. Par exemple, une nouvelle modification seulement de 0,93 pour M éloignerait les globulaires à des distances 10 fois plus grandes.

D'autre part, on n'est pas certain que l'échelle des grandeurs

photographiques soit définitive, surtout vers l'extrémité, depuis la 13e grandeur. Quand il s'agit de mesurer des sources aussi faibles que les étoiles, dont l'intensité du rayonnement varie depuis 1, pour les étoiles de 20e grandeur, jusqu'à 100 millions, les étoiles de 1re grandeur, on doit s'attendre d'avance à certaines erreurs, surtout s'il s'agit de les mesurer d'après leurs effets sur les plaques photographiques, dont l'impression est une fonction très peu connue du temps de pose, de l'intensité des régions environnantes (37), etc.

On a trouvé d'ailleurs [Shapley (14)] des différences notables entre diverses échelles. Entre Harvard et Mont Wilson par exemple, la différence depuis la 13e grandeur jusqu'à la 20e varie entre — 0,30 à 0,90 grandeur, donc de 1,20 grandeur.

Des différences encore plus grandes ont été trouvées pour les autres échelles.

Or, comme les étoiles des globulaires sont plus faibles que la 13e, il est possible que l'échelle adoptée depuis la 13e soit aussi une des causes qui rendent les distances des globulaires si petites par rapport aux dimensions du système galactique.

On pourrait contrôler des fractions de l'échelle, de trois unités de m, grâce à la variation des céphéides des amas globulaires.

Mais, un contrôle plus rigoureux serait possible si l'on pouvait calculer les parallaxes des globulaires, par des méthodes indépendantes de la grandeur apparente (m) de leurs étoiles.

80[1]. Nous avons vu (Chap. VI) que la vitesse spatiale des étoiles, à une distance r du centre, peut être calculée.

Cette vitesse dépend évidemment de la masse du système (M), de la distribution de cette masse (ρ), ainsi que des dimensions et de la forme des orbites (a, e)

$$V = f(M, R, \rho, a, e). \tag{22}$$

La vitesse maxima est atteinte dans le mouvement radial ($a = R$, $e = 0$) et au centre de l'amas. Il est possible, inversement, de calculer la distance linéaire R, d'où doit partir une étoile avec vitesse initiale nulle, pour acquérir au centre la vitesse maxima V,

$$R = \varphi(V, M, \rho). \tag{23}$$

Les lignes du spectre intégral d'un amas doivent être affectées par les mouvements des étoiles de l'amas, de même que les lignes des étoiles doubles ou multiples.

Spécialement, elles doivent être élargies, en vertu du principe Doppler-Fizeau.

La distribution du noircissement à l'intérieur des lignes du spectre, grâce à la symétrie des mouvements radiaux, doit être parfaitement symétrique.

Or, la valeur de l'élargissement des lignes, traduite en vitesse, représente le double de la valeur maxima de V. En comparant la valeur du rayon R de l'amas, calculé par la formule (23) au rayon apparent, on pourrait obtenir la parallaxe par une méthode indépendante des grandeurs des étoiles.

La méthode n'est pas applicable aujourd'hui, à cause du faible éclat des amas globulaires et de la petite dispersion spectroscopique qu'on est obligé d'employer.

E.-A. Fath a étudié, à l'Observatoire de Lick et Mont Wilson, le spectre intégral de 15 amas globulaires (38, 39, 40). Mais, les spectres obtenus sont excessivement petits.

L'intervalle, entre λ3700 et λ5000, est à peine de 3^{mm}.

Malgré leur petitesse, il a trouvé des traces de cet élargissement des lignes. Par exemple : la ligne $420^{m\mu}$, qui est présente dans tous les spectres, est élargie à tel point qu'elle devrait être appelée, d'après Fath, plutôt une bande.

Les lignes Hγ et G sont également signalées comme élargies.

81. Sans oser présenter aucune conclusion comme définitive, sur les parallaxes des amas globulaires, vu l'incertitude des données, nous remarquons seulement que leurs distances peuvent être considérées de même ordre de grandeur que celle des spirales, qui sont des systèmes très éloignés par rapport à la Galaxie. Le fait que le rapport (3,1) de la vitesse radiale moyenne de 33 spirales observées (473 km/sec) à la vitesse radiale moyenne de 10 amas globulaires étudiés (150 km/sec) est approximativement égal au rapport (2,3) du mouvement propre annuel moyen de 66 spirales observées (0″,33) au mouvement propre de M.13 (0″,00143), le seul amas à mouvement propre mesurable indique également des parallaxes moyennes égales à ces deux classes d'objets célestes.

L'étude théorique nous indique également la possibilité d'une parenté entre les amas extragalactiques et les spirales, qui pourrait être considérée comme une certitude en cas qu'il existe dans les amas un milieu résistant.

Un pareil milieu pourrait nous expliquer aussi les grandes masses et une des causes des grandes luminosités des étoiles d'un amas globulaire, par rapport aux étoiles galactiques et des spirales.

CHAPITRE VIII.

L'ÉVOLUTION DES AMAS STELLAIRES ISOLÉS.

82. Le problème de la parenté des nébuleuses spirales avec les systèmes stellaires isolés et indépendants, comme la Voie Lactée, les Nuages de Magellan, le Nuage de Barnard (1), les globulaires, etc., remonte au XVIIIe siècle.

Le grand Herschel fut le premier à penser, d'une manière assez vague, que les nébuleuses et les amas stellaires extragalactiques peuvent être deux phases différentes d'un même système en évolution. « These clusters may be the Laboratoires of the Universe, if I may express myself, wherein the most salutary remedies for the decay of the whole are prepared » (11).

Mais, les idées erronées qu'on se faisait après lui jusqu'à nos jours sur les dimensions et la relation avec la Voie Lactée, des spirales, globulaires et d'autres amas extragalactiques, ont retardé de beaucoup le développement de sa pensée.

Aujourd'hui nous avons des connaissances certaines sur ces systèmes et qui plaident toutes en faveur d'une parenté de cette nature entre ces amas et les nébuleuses spirales :

1° Les deux classes sont extérieures á la Voie Lactée, isolées et indépendantes d'elle dont quelques-unes sont de même ordre de grandeur que le système galactique;

---

(1) Ce nuage ($\alpha = 19^h 39^m, \delta = -15°0'$), découvert par Barnard, ressemble beaucoup comme constitution aux Nuages de Magellan. On y trouve des nébuleuses à raies brillantes (4), des planétaires (3), des variables (12). Ses étoiles les plus lumineuses sont de 18,5 grandeur. Il est considéré comme étant à une distance plusieurs fois plus grande que le globulaire le plus éloigné. Il a aussi un grand mouvement de rotation car il est fortement aplati (16'/8').

2° Les parallaxes de ces deux classes sont de même ordre de grandeur;

3° Elles ont toutes des grands mouvements de rotation, sauf peut-être les globulaires qui paraissent avoir des rotations plus modestes;

4° Quoique le nombre des spirales soit beaucoup plus grand que celui des amas stellaires extragalactiques, la proportion de leurs fréquences dans l'espace paraît se conserver jusqu'à une certaine distance. Au delà, le nombre des spirales augmente considérablement par rapport aux systèmes stellaires (*fig.* 22). Mais les données des observations sont loin d'être définitives.

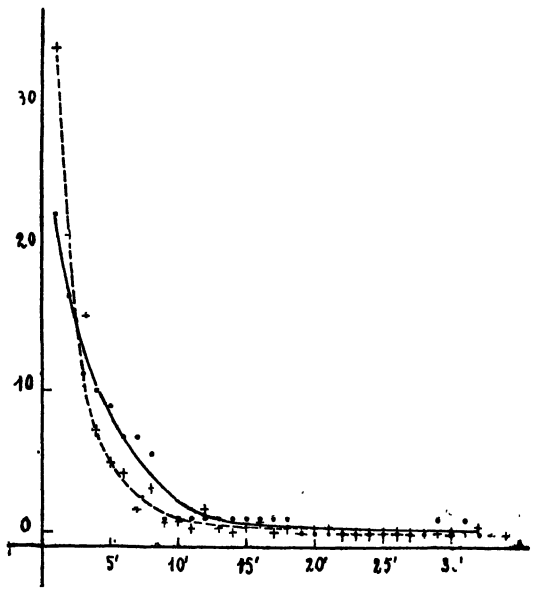

Fig. 22. — Fréquence des globulaires (ligne continue) et des spirales (ligne discontinue) de divers diamètres apparents (abscisses).

(+) spirales.
(•) globulaires.

83. A ce point de vue, est très suggestive la distribution de 32 objets, d'un diamètre apparent plus petit qu'une minute, que nous avons trouvés parmi les objets photographiés à l'Observatoire de Lick (1).

Ils présentent un disque circulaire, d'aspect nébulaire, avec un noyau lumineux, mais sans structure ni spirale, ni stellaire.

Les spectres de ceux étudiés (par exemple, N.G.C.4486) sont de type G, comme le spectre intégral des amas globulaires ou des spirales.

Ils peuvent être considérés soit comme des globulaires, mais alors très condensés, soit comme des spirales au début de leur évolution. Leur distribution est caractérisée par le fait qu'ils se trouvent juste dans les régions où les globulaires sont très rares (*fig.* 23 et 1).

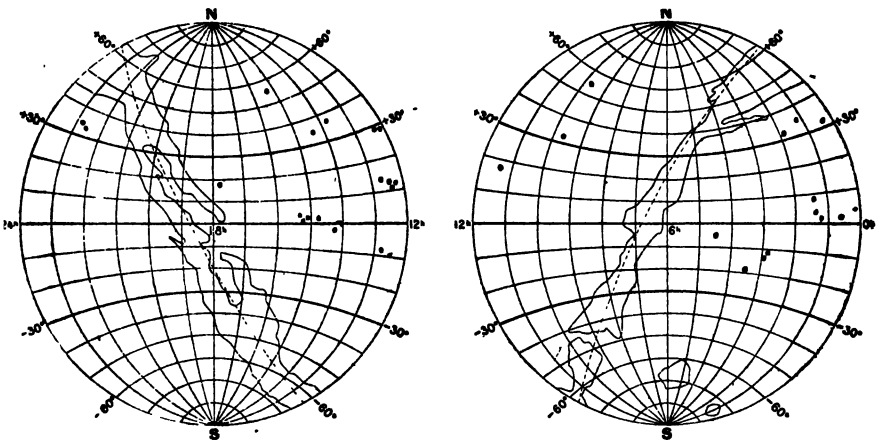

Fig. 23. — Distribution de 32 objets douteux.

Remarquons encore que la région du ciel investiguée minutieusement ne représente qu'une infime partie du ciel et que la découverte d'autres objets douteux pareils est très probable.

LE MOMENT DE ROTATION DES AMAS STELLAIRES.

84. C'est un problème important de savoir exactement si les amas stellaires isolés ont un moment de rotation nul ou différent de zéro. Leur évolution dépend beaucoup de l'existence et de la valeur de ce moment.

Ces systèmes étant très aplatis, de même que les amas dits « globulaires », ce fait constitue une preuve qu'ils ont un moment de rotation.

D'ailleurs, théoriquement on peut démontrer que la probabilité qu'un système soit dépourvu d'un moment de rotation est nulle.

En effet, imaginons tous les vecteurs qui représentent les moments des quantités de mouvement de chaque étoile d'un amas par rapport à son centre de gravité. Ils seront orientés dans toutes les directions et auront des grandeurs différentes. Leur somme géométrique — qui n'est que le moment de rotation du système — serait très petite par rapport à leur somme arithmétique.

En tout cas elle ne peut être nulle qu'au cas d'une symétrie parfaite, autant de la matière que des vitesses. Or, au commencement de l'évolution d'un système stellaire, la distribution des masses et des vitesses est loin d'être parfaite. Ainsi, nous pouvons donc considérer comme certaine l'existence d'un moment de rotation dans les systèmes irréguliers qui sont au début de leurs carrières. Sa valeur reste constante pendant toute son évolution, s'il n'intervient pas de forces extérieures. Dans la période où le système a une distribution d'une symétrie sphérique, les forces extérieures dues à l'attraction des autres masses de l'Univers (qui sont assez grandes si l'on en juge d'après les grandes vitesses radiales des spirales, etc.) ne sont plus en état de changer la valeur du moment de rotation. Mais, elles peuvent l'influencer beaucoup pendant la période de distribution dissymétrique.

On peut donc considérer tous les systèmes stellaires isolés comme ayant un moment de rotation. Quant à la galaxie et aux spirales, il n'y a plus de doute.

85. *La valeur du moment d'un amas sphérique homogène* est donnée par

$$\mathfrak{M} = I \times \omega,$$

où I est le moment d'inertie et ω la vitesse de rotation. Ou encore

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{5} M R^5 \omega$$

ou

$$\mathfrak{M} = M K^2 \omega,$$

K étant le rayon de giration, M la masse du système et R son rayon.

Puisque $\mathfrak{M}$ est constant ainsi que M, il est évident que si R augmente, ω diminue rapidement, étant en raison inverse de la cinquième puissance du R.

86. **Amas non homogène.** — Calculons la valeur probable du moment de rotation d'un amas globulaire.

Nous arriverons à une autre expression du moment de rotation, fonction du nombre (n) des particules qui composent l'amas, du moment d'inertie (I) et de la masse totale du système (M).

Soient $f(x, y, z).dx.dy.dz$, et $\varphi(u, v, w).du.dv.dw$, respectivement, la probabilité pour qu'une étoile quelconque de l'amas se trouve dans l'élément de volume élémentaire $d\tau = dx\,dy\,dz$, à la distance $P(x, y, z)$ du centre, et la probabilité que les composantes (u, v, w), de sa vitesse, à la distance $P(x, y, z)$ soient comprises entre $u \pm \frac{1}{2}du$, $v \pm \frac{1}{2}dv$, $w \pm \frac{1}{2}dw$. On a évidemment :

$$\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = 1,$$

$$\int \varphi(u, v, w)\,du\,dv\,dw = 1,$$

la première intégrale étant étendue à tout le volume de l'amas, et la deuxième à toutes les valeurs des vitesses possibles à la distance $P(x, y, z)$.

Soient : $vz - wy$; $wx - uz$; $uy - vx$, les moments des quantités de mouvement, par rapport à 3 axes, d'une étoile placée à la distance $P(x, y, z)$, et de vitesse : u, v, w.

Soit encore $f(x,y,z).\varphi(u,v,w,x,y,z)\,dx.dy.dz.du.dv.dw$ la probabilité composée pour qu'une étoile soit comprise dans le volume $d\tau$, à la distance P et que les composantes de sa vitesse soient comprises entre $u \pm \frac{1}{2}du$; $v \pm \frac{1}{2}dv$; $w \pm \frac{1}{2}dw$.

Alors, les valeurs probables des moments des quantités de mouvement par rapport aux trois axes sont :

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_x &= \int (vz - wy) f(x, y, z)\,\varphi(u, v, w, x, y, z)\,du\,dv\,dw\,dx\,dy\,dz, \\ \mu_y &= \int (wx - uz)\, f(x, y, z)\,\varphi(u, v, w, x, y, z)\,du\,dv\,dw\,dx\,dy\,dz, \\ \mu_z &= \int (uy - vx)\, f(x, y, z)\,\varphi(u, v, w, x, y, z)\,du\,dv\,dw\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas d'un amas globulaire à distribution sphérique, ces trois expressions sont nulles.

Mais les valeurs probables des carrés des quantités de mouvement par rapport aux mêmes axes évidemment ne sont pas nuls.

Leurs expressions sont :

$$(25)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_x^2 = \int (vz - wy)^2 f(x, y, z)\, \varphi(u, v, w, x, y, z)\, du\, dv\, dw\, dx\, dy\, dz, \\ \mathfrak{M}_y^2 = \int (wx - uz)^2 f(x, y, z)\, \varphi(u, v, w, x, y, z)\, du\, dv\, dw\, dx\, dy\, dz, \\ \mathfrak{M}_z^2 = \int (uy - vx)^2 f(x, y, z)\, \varphi(u, v, w, x, y, z)\, du\, dv\, dw\, dx\, dy\, dz. \end{cases}$$

Pour un amas globulaire, à distribution symétrique, nous avons :

$$\mathfrak{M}_x^2 = \mathfrak{M}_y^2 = \mathfrak{M}_z^2 = \frac{2}{3} \int V^2(r)\, r^2 f(r)\, dx\, dy\, dz = W^2 K^2,$$

où K représente le rayon de giration, V^2 le carré de la vitesse moyenne des étoiles dans le volume $d\tau$, à la distance P, et W^2 le carré d'une vitesse moyenne de rotation du système, telle qu'elle résulte des expressions des carrés des moments dans lesquelles elle figure.

Le carré du moment de rotation résultant de l'amas est :

$$\mathfrak{M}^2 = m^2 \left\{ \left[\sum_1^n v_n z_n - w_n y_n) \right]^2 + \left[\sum_1^n (w_n x_n - u_n z_n) \right]^2 + \left[\sum_1^n (u_n y_n - v_n x_n) \right]^2 \right\}.$$

Si

$$f_n(x_n y_n z_n)\, \varphi(u_n v_n w_n x_n y_n z_n)\, du_n\, dv_n\, dw_n\, dx_n\, dy_n\, dz_n$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

est la probabilité composée pour que les étoiles S_i soient dans l'élément $d\tau_i = dx_i\, dy_i\, dz_i$, aux distances $P_i(x_i y_i z_i)$, que les composantes de leurs vitesses soient comprises entre $u_i \pm \frac{1}{2} du_i$, $v_i \pm \frac{1}{2} dv_i$, $w_i \pm \frac{1}{2} dw_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ alors la valeur moyenne probable du carré du moment de rotation résultant de l'amas est

$$\overline{\mathfrak{M}^2} = m^2 \int \left\{ \left[\sum_1^n (v_n z_n - w_n y_n) \right]^2 + \left[\sum_1^n (w_n x_n - u_n z_n) \right]^2 + \left[\sum_1^n (w_n y_n - v_n x_n) \right]^2 \right\}$$
$$\times f(x_1 y_1 z_1)\, \varphi(u_1 v_1 w_1 x_1 y_1 z_1) f(x_2 y_2 z_2)\, \varphi(u_2 v_2 w_2 x_2 y_2 z_2) \ldots$$
$$\times f(x_n y_n z_n)\, \varphi(u_n v_n w_n x_n y_n z_n)$$
$$\times du_1\, dv_1\, dw_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1 \ldots du_n\, dv_n\, dw_n\, dx_n\, dy_n\, dz_n,$$

où l'intégrale s'étend à toutes les valeurs possibles de u_n, v_n, w_n, x_n, y_n, z_n ($n = 1, 2, 3, \ldots, n$). Ou encore :

$$\overline{\mathfrak{M}^2} = m^2 \int \Bigg[\sum_1^n (v_n z_n - w_n y_n)^2 + \sum_1^n (w_n x_n - u_n z_n)^2$$

$$+ \sum_1^n (w_n y_n - v_n x_n)^2$$

$$+ 2 \sum_{h,\, i=1}^n (v_h z_h - w_h y_h)(v_i z_i - w_i y_i) + \ldots \ldots \Bigg]$$

$$\times f(x_1 y_1 z_1)\, \varphi(u_1 \ldots z_1) \ldots f(x_n y_n z_n)\, \varphi(u_n \ldots z_n)\, du_1 \ldots dz_n,$$

$$= m^2 \Bigg[\sum_1^n \int (v_n z_n - w_n y_n)^2 f(x_n y_n z_n)$$

$$\times \varphi(u_n, v_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$\times du_n\, dv_n\, dw_n\, dx_n\, dy_n\, dz_n + \ldots$$

$$+ 2 \sum_{h,\, i=1}^n \int (v_h z_h - w_h y_h) f(x_h y_h z_h)$$

$$\times \varphi(u_h \ldots z_h)\, du_h\, dv_h\, dw_h$$

$$\times dx_h\, dy_h\, dz_h \int (v_i z_i - w_i y_i) f(x_i \ldots z_i)$$

$$\times \varphi(u_i \ldots z_i)\, du_i\, dv_i\, dw_i\, dx_i\, dy_i\, dz_i + \ldots \Bigg].$$

Mais les produits doubles, en vertu des relations (24) sont nuls, et les premiers termes en vertu des relations (25) nous donnent :

$$\overline{\mathfrak{M}^2} = m^2 n (\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2) = m^2 n . 3 W^2 K^2 = \frac{3 M^2 W^2 K^2}{n},$$

donc

$$(26) \qquad \mathfrak{M} = WKM \sqrt{\frac{3}{n}},$$

ou, en substituant $MK^2 = I$,

$$(27) \qquad \mathfrak{M} = W \sqrt{\frac{3MI}{n}}.$$

Puisque $\mathfrak{M}$ et M restent invariables pendant toute l'évolution

du système, si à un moment donné le système se transforme d'un état stellaire en état nébulaire et admettons — pour fixer les idées — sans changer le rayon de giration (K) alors n croît ainsi que le carré de la vitesse moyenne (W) de rotation (27).

Si cette transformation se fait avec une grande expansion du système (comme dans le cas des spirales par exemple), la matière étant écartée à des grandes distances de l'axe de rotation, le moment d'inertie (I), ainsi que le rayon de giration, augmentent par cette transformation. En tout cas l'augmentation de I ne peut pas égaler celle de n. Nous pouvons donc soupçonner que les vitesses de rotation des systèmes en états nébulaires sont plus grandes que celles des systèmes stellaires (27).

On voit de même que si le système ne subit pas de transformamations de cette nature (n = const.), alors, si le rayon de giration diminue, la vitesse moyenne de rotation augmente, ces deux quantités étant en raison inverse (26).

Or, comme les amas globulaires évoluent en se concentrant, leurs rayons de giration diminuent, donc leurs vitesses de rotation augmentent de plus en plus.

87. Les étoiles des amas décrivent des orbites surtout sous l'influence de l'ensemble du système, c'est-à-dire, leur libre parcours n'est pas négligeable par rapport aux dimensions de l'amas (comme dans le cas des molécules d'un gaz).

Alors, la valeur de l'aplatissement ne dépend plus seulement de la vitesse de rotation, car l'effet de la rotation sur les plans des orbites s'accumule avec le temps et tend à créer un plan du maximum des aires dans le plan équatorial du système. L'amas finit par s'aplatir complètement, par suite de la rotation. La densité stellaire s'accroît dans ce plan, ainsi que le nombre des chocs. La transformation du système stellaire en nébuleuse — que nous admettons de forme spirale — devient par cela plus probable.

SUR LA RELATION ENTRE LES AMAS STELLAIRES ET LES SPIRALES.

88. Les spirales ne peuvent pas être considérées ni comme des minuscules systèmes, ni comme des systèmes complexes doués des

mouvements convergents, effet de la rencontre de deux nuages stellaires, comme le pense T.-J.-J. See (42).

Nous n'admettons pas non plus la conception statique, en ce qui concerne leurs formes, conception défendue dernièrement par M. Brown (43).

D'après cette conception, les étoiles qui composent une spirale décrivent des orbites elliptiques fermées, sous l'action de la masse totale du système. Les deux bras ne sont que l'enveloppe de ces familles d'orbites et ils sont dus à la concentration des étoiles sur cette enveloppe. Les nodosités observées dans les bras ne sont que l'intersection, dans une même région, d'un groupe d'orbites sur lesquelles sont parsemées les étoiles. M. Brown considère ces nodosités temporaires et périodiques comme configurations, car les périodes des orbites sont approximativement égales.

Cette conception attribue aux spirales des configurations statiques (indéformables); elle n'admet donc aucune parenté entre les systèmes stellaires réguliers ou irréguliers et les spirales.

Nous n'insistons pas sur ces conceptions qui sont critiquables à plusieurs points de vue. Brown, par exemple, néglige les chocs dont l'effet serait très dangereux pour ces formes statiques.

Nous considérons les spirales comme une configuration transitoire d'un système qui se transforme d'un moment à l'autre, sans revenir à la même forme qu'au bout d'un demi-cycle complet de l'évolution, aux extrémités duquel sont, d'un côté les amas stellaires isolés, de l'autre les nébuleuses spirales.

Les axes des deux spires sont des courbes synchrones, ce sont les lieux occupés à un moment donné par les produits d'une éruption prolongée, se faisant dans deux régions diamétralement opposées d'un noyau qui tourne autour d'un axe.

Au commencement les spires sont petites. Avec le temps elles augmentent au détriment du noyau qui se réduit d'un moment à l'autre (N. G. C. 2503) ou disparaît complètement, comme dans le cas de la Voie Lactée ou des N.G.C. 2403 et 253.

Les spires tendent à devenir pour des distances croissantes normales aux rayons vecteurs. Leurs rayons de courbure diminuent avec le temps et tendent ensuite à devenir constants. Autrement, la masse totale du système ne se conserverait pas.

La matière qui s'échappe du noyau paraît se résoudre très vite

en étoiles, qui s'acheminent à diverses distances du centre sur des cercles ou d'autres courbes, donnant ainsi naissance à un système stellaire de forme lenticulaire dans son ensemble, tel que la Voie Lactée.

A l'intérieur, la structure dans cette phase est sans doute variable d'un système à l'autre et dépend de la masse totale du système, de la valeur de son moment de rotation et peut-être d'autres causes encore.

Comme fin de l'évolution d'une spirale, nous considérons donc un amas stellaire de très faible densité. A l'origine également nous considérons un amas, mais très concentré, dont les étoiles, pour des causes qui dissipent l'énergie mécanique, se sont agglomérées jusqu'à ce que leur existence individuelle soit devenue impossible.

Au début de la carrière stellaire du système, après la phase spirale, puisque la masse est dispersée à des grandes distances, la vitesse angulaire est infime et son influence sur l'aplatissement du système peut être négligeable.

L'amas pourrait reprendre une forme sphérique plus ou moins régulière, en repassant par les phases que nous avons spécifiées dans le Chapitre IV.

Mais, si la dissipation de l'énergie mécanique persiste, la masse du système s'agglomère de nouveau vers le centre avec le temps, la vitesse de rotation augmente, et l'amas se transforme de nouveau en spirale.

89. Quelques recherches, très peu d'ailleurs, ont été faites sur les formes géométriques que présentent les spirales. D'après von Palhen (44) M.74 et M.51 ont la forme d'une spirale logarithmique.

H. Groot (45) trouve, approximativement, la même forme pour M.51, M.84, M.88, M.65, M.81, etc. Quant à M.65 et M.81, leurs formes — d'après lui — s'approchent plutôt de la spirale d'Archimède.

D'autres tentatives ont été faites pour trouver l'expression analytique des formes spirales. A cause de la fonction des forces, qui est variable avec le temps par suite des mouvements intérieurs différents d'un régime permanent, il nous semble impossible

aujourd'hui de trouver l'équation des formes observées dans les spirales; spécialement de trouver une équation unique, valable dans tout le domaine de la spirale.

Mais les spirales sont les seuls objets qui nous dessinent les trajectoires, et l'on pourrait faire une étude intéressante, en abordant le problème en sens inverse, de trouver les conditions dynamiques concernant la distribution des vitesses, la variation de l'accélération, etc., dans diverses régions du système par une étude géométrique sur leur structure.

Et il nous semble qu'il est plus naturel d'aborder l'étude des spirales par cette analyse avant toute autre.

90. Considérons les accélérations tangentielle (γ_T) et normale (γ_N).

En se déplaçant le long d'une spire, elles sont évidemment des fonctions du temps (t). Soient $f(t)$ et $\varphi(t)$ leurs formes, arbitraires pour un moment. On peut alors trouver l'équation de la courbe, décrite dans certaines conditions, donc dans une certaine région de la spirale, ainsi que des relations entre le rayon de courbure (R), les accélérations, la vitesse, l'arc s de la courbe, etc.

Ces relations nous permettent, si l'on connaît la forme de la spirale dans certaine région, réciproquement, de trouver les conditions dynamiques que nous cherchons.

Nous avons successivement, par un choix convenable des constantes d'intégration,

$$\frac{dv}{dt} = f(t) \quad (\gamma_T), \qquad \frac{v^2}{R} = \varphi(t) \quad (\gamma_N).$$

Alors

$$v = \int f(t)\,dt \quad \text{et} \quad R = \frac{\left[\int f(t)\,dt\right]^2}{\varphi(t)}.$$

Mais

$$v = \frac{ds}{dt} = \int f(t)\,dt,$$

où s est l'arc de la courbe.

Donc

$$s = \int dt \int f(t)\,dt,$$

relation qui nous donne

$$t = \psi(s) \qquad \text{et} \qquad R = \chi(s).$$

Mais

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \chi(s),$$

où α est l'angle que fait la tangente avec une direction fixe, Ox.

Donc

$$\frac{ds}{\chi(s)} = d\alpha, \qquad s = \pi(\alpha).$$

Or

$$dx = \cos\alpha\, ds, \qquad dy = \sin\alpha\, ds$$

et

$$ds = \pi'(\alpha)\, d\alpha.$$

Donc

$$dx = \pi'(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha, \qquad dy = \pi'(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha$$

et

$$dx \pm i\, dy = \pi'(\alpha) e^{\pm i\alpha} d\alpha;$$

d'où

$$x \pm iy = \int \pi'(\alpha) e^{\pm i\alpha} d\alpha,$$

qui, par les coordonnées polaires

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

deviennent

$$\rho e^{i\theta} = \int \pi'(\alpha) e^{i\alpha} d\alpha = \Phi(\alpha),$$

$$\rho e^{-i\theta} = \int \pi'(\alpha) e^{-i\alpha} d\alpha = \sigma(\alpha);$$

d'où

$$\rho^2 = \Phi(\alpha)\sigma(\alpha) = \zeta^2(\alpha),$$

et donc

$$\rho = \zeta(\alpha) = \zeta_1(\theta),$$

c'est l'équation de la trajectoire que nous cherchons.

91. En variant les formes des fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$, on peut obtenir autant de courbes que l'on veut, toutes différentes, mais de même allure générale que celle des spirales. Chaque courbe peut représenter des fractions seulement des courbes observées dans une spirale, car les conditions dynamiques et physiques ne sont certainement pas les mêmes dans tout son domaine. Une étude comparative entre les courbes observées dans diverses régions et les courbes théoriques pourrait donc nous renseigner sur les conditions dynamiques de ces régions.

92. Considérons, par exemple, les deux accélérations constantes. Il est exclu que ces conditions soient satisfaites dans tout le domaine. Mais elles peuvent être réalisées dans une certaine région, dans le voisinage du noyau.

Alors, dans cette région, les particules décrivent des arcs d'une spirale logarithmique. Et réciproquement, dans la région du système où les spirales ont la forme d'une spirale logarithmique, les accélérations normale et tangentielle sont constantes.

En effet, nous avons successivement, comme plus haut,

$$\frac{dv}{dt} = c_1. \qquad \frac{v^2}{R} = c_2;$$

$$v = c_1 t; \qquad s = \frac{c_1}{2} t^2; \qquad R = Ks; \qquad \text{où} \qquad K = \frac{2c_1}{c_2}.$$

Et finalement, en conduisant les calculs comme dans le paragraphe précédent, on trouve l'équation d'une spirale logarithmique

$$\rho = \frac{+K}{\sqrt{K^2+1}} e^{K\alpha} = \text{const.}\, e^{K\theta}.$$

Observons que, dans ces conditions, la vitesse croît en valeur absolue avec le temps, de même que le rayon de courbure (R) et l'arc (s), ce qui paraît se produire dans les spirales, jusqu'à une certaine distance du centre, comme il en résulte des observations spectroscopiques de Pease (46) sur l'Andromède.

93. D'une manière plus générale, supposons que les accélérations normale et tangentielle varient proportionnellement à la $n^{\text{ième}}$ et à la $m^{\text{ième}}$ puissance du temps. Nous avons alors

$$\frac{dv}{dt} = c_1 t^m, \qquad \frac{v^2}{R} = c_1 t^n, \qquad v = \frac{c_1}{m+1} t^{m+1}, \qquad R = \frac{c_1^2}{c_{2(m+1)^2}} t^{2(m+1)-n},$$

$$s = \frac{c_1}{(m+1)(m+2)} t^{m+2}, \qquad R = Ks \frac{2m+2-n}{m+2},$$

$$K = \frac{c_1^{\frac{n+2}{m+2}} \cdot (m+2)^{\frac{2m+2-n}{m+2}}}{c_2 (m+1)^{\frac{n+2}{m+2}}}.$$

Généralement, v et R croissent avec t.

Pour que v décroisse en valeur absolue avec le temps, il faut

que

$$m < -1.$$

Mais, puisque S doit nécessairement croître avec t, nous avons

$$m > -2.$$

Pour que les deux conditions soient satisfaites, ce qui pourrait être réalisé dans toutes les spirales vers la périphérie, il faut que

$$-2 < m < -1.$$

Pour que R décroisse avec t, ce qui doit également être réalisé vers la périphérie, sans quoi la spirale ne conserverait pas sa masse, il faut que

$$n > -2.$$

Dans ces conditions, plus n est grand, en valeur absolue, plus R décroît rapidement et réciproquement.

94. Pour que v reste constante (et alors le mouvement curviligne s'effectue uniformément) l'accélération tangentielle doit être nulle. Dans ces conditions l'accélération normale varie en raison inverse de R. En effet, nous avons

$$\frac{dv}{dt} = 0, \qquad \frac{v^2}{R} \varphi = (t), \qquad V = C_1;$$

donc

$$\frac{\varphi(t)}{R} = \frac{C_1^2}{R}.$$

Si l'accélération normale est constante aussi, R est de même constant et le mouvement s'accentue uniformément sur un cercle.

Ces conditions peuvent être réalisées également vers les régions périphériques des spirales.

95. Ou bien, d'une manière plus élégante encore, considérons l'arc S, et le rayon de courbure R, comme exprimés en fonction du temps

$$S = f(t), \qquad R = \varphi(t);$$

les expressions de v, γ_T et γ_N, en fonction de t, en résultent immédiatement. On obtient autant de courbes théoriques que l'on veut,

pour les comparer avec celles observées, en variant les formes de $f(t)$ et $\varphi(t)$.

Supposons, d'une façon assez générale, que l'arc croisse comme une puissance de t, et que le rayon de courbure varie lui-même comme une puissance de temps

$$S = c_1 t^p, \qquad R = c_2 t^q \qquad (c_1,\ c_2,\ p \text{ et } q \text{ étant des constantes positives}).$$

On a

$$v = c_1 p t^{p-1}, \qquad \gamma_T = c_1 p(p-1) t^{p-2}, \qquad \gamma_N = \frac{c_1^2 p^2}{c_2} t^{2p-q-2}.$$

Si $p = q$, les particules décrivent une spirale logarithmique. Alors le rapport $\gamma_T : \gamma_N$ est constant et l'arc décrit est proportionnel à R. Si leur valeur commune est plus grande que l'unité, S, R de même que v croissent avec t. Mais, puisque les spirales doivent conserver leur masse, il faut que v et R décroissent dans les régions périphériques, quand t augmente. Alors pour ces régions, $0 < p < 1$ et $q < 0$; l'exposant de t dans γ_T doit être compris entre -1 et -2, celui de t dans γ_N est supérieur à -2, et les accélérations y décroissent.

Si $p = 1$, $q = 0$, alors $\gamma_T = 0$ et γ_N, ainsi que R, sont constants, et le mouvement s'effectue uniformément sur un cercle.

Si $p = q$ et si leur valeur commune est plus grande que 2, les accélérations elles-mêmes croissent avec t, ce qui impliquerait alors là, en dehors de la gravitation, l'existence d'autres forces répulsives, à l'intérieur des bras de la spirale.

96. En redressant d'abord les images des spirales, que les clichés nous présentent vues d'un côté, et en étudiant les formes géométriques des spires principales ou secondaires, nous pouvons donc obtenir des informations très précieuses sur la distribution des vitesses ou de l'accélération, indépendamment de toute analyse spectroscopique, ainsi que sur les forces qui régissent à l'intérieur des spirales.

LA STRUCTURE EXTRAGALACTIQUE DE L'UNIVERS.

97. La région de l'Univers, accessible à nos observations, doit donc être regardée comme constituée par des nodosités où la ma-

tière est agglomérée sous forme de systèmes stellaires, quelques-uns réguliers comme les globulaires, d'autres irréguliers, ou bien sous formes de nébuleuses spirales. Toutes ces nodosités sont pourvues d'immenses mouvements de rotation, sauf peut-être quelques-uns des globulaires.

Il est possible que l'espace entre ces nodosités ne soit pas dépourvu d'étoiles ou d'autres objets célestes. La découverte de J.-H. Oort que la distribution des étoiles à grandes vitesses radiales est pareille à celle des spirales et des globulaires, c'est-à-dire qu'elles manquent complètement dans le plan galactique, rend ce problème de grande actualité.

Les observations nous montrent que les spirales sont beaucoup plus nombreuses que les systèmes stellaires, et que, parmi ces derniers, les plus fréquents, sont les globulaires. Si les spirales et les amas stellaires isolés sont les extrémités d'un demi-cycle dont le nombre, infini en ce cas, représente l'évolution de ces nodosités, il serait intéressant de chercher l'explication de cette observation.

La grande fréquence des spirales par rapport aux systèmes stellaires, excepté les globulaires, pourrait provenir de trois causes :

1° Soit que les systèmes stellaires soient moins visibles, à cause de leur faible éclat intrinsèque qui est 100 fois plus petit que celui des spirales (Seares), et alors il faudrait nous attendre à la découverte de nouveaux amas isolés.

2° Soit que les systèmes, dans leurs évolutions, séjournent peu de temps dans la phase stellaire.

3° Soit que l'évolution de ces pièces de l'Univers se fasse simultanément et que peu de systèmes sont en avant ou en arrière avec leurs évolutions, par rapport à la classe modale, ce qui paraît peu probable.

Le nombre restreint des globulaires, par rapport aux spirales, pourrait être expliqué, soit par l'insuffisance des observations pour ceux de petits diamètres, soit par le fait que les conditions demandées à un amas, pour devenir globulaire : 1° avoir un petit moment de rotation; 2° conserver mieux l'énergie mécanique que les autres, sont plus rarement satisfaites.

Le grand nombre des globulaires, par rapport aux autres amas

isolés, est dû probablement, d'un côté au fait qu'on a classé beaucoup de ces derniers parmi les nébuleuses ou les spirales, d'un autre par le fait que les globulaires ont de nombreuses étoiles géantes, tandis que les autres amas, moins condensés, n'en ont pas et donc sont moins visibles.

Une classification plus rigoureuse, des nébuleuses spirales et des amas isolés et purement stellaires, est tout à fait nécessaire dans la discussion de ce problème important.

L'espace dans lequel se trouvent ces systèmes n'est pas résistant, sans quoi leurs moments de rotation seraient nuls. A l'intérieur des systèmes, il paraît exister un milieu résistant. Son rôle paraît être d'assurer la résurrection des mondes.

Tableau des 91 Amas globulaires.

N°s	N. G. C. (Messier).	α; G	δ. g.	Diamètre moyen.	Nombre des étoiles.	Grandeur des étoiles les plus lumineuses.	Parallaxes Shapley [Charlier].	Grandeur intégrale Holetschek (Parvulesco) [Absolue].	Direction du grand axe. Inclinaison par rapport à la Voie Lactée.	Vitesse radiale.
1	104 47 Toucanæ	0h19m,6; 273°;	-72°38′ -45°	30′	20000	11	0″,000148 [0,0387]		35° [45]	
2	288	0h47m,8; 214°;	-27°8′ -88°	7,6		14,38	0,000053 [0,0129]	(6,8)		
3	362	0h58m,9; 267°;	-71°23′ -46°	7,6	1000	13	0,000066 [0,0129]		110 [15]	
4	1261	3h9m,5; 236°;	-55°36′ -52°	3,3			0,000039 [0,00039]			
5	1851 (79)	5h40m,8; 211°;	-40°9′ -34°,2	5,5	400	15	0,000058 [0,038]	(8,1)	circul.	
6	1904 (79)	5h20m,1; 195°;	-24°37′ -28°,5	3,4	300	15,01	0,000039 [0,0052]	8,0 (8,2) [-9,0]	20 [30]	
7	2298	5h20m,1; 195°;	-24°37′ -28°,5	2,8			0,000041 [0,0039]	(8,5)		
8	2419	7h31m,4; 147°;	+39°6′ +26°	2			0,00002	(9,0)		
9	2808	9h10m; 249°;	-64°27′ -10°,6′	5,3	1000	14	0,000059 [0,0077]	9,4 (7,3) -9,2	20 [65]	
10	3201	10h13m,5; 244°;	-45°54′ +9°,5	8,0	250	12	0,000068 [0,0103]	(6,4)		
11	4147	12h5m; 225°;	+19°6′ +78°,2	1,1	300	16,23	0,000019	9,4 (9,3) [-9,2]		
12	4372	12h0m,1; 269°;	-72°7′ -9°	11,8			0,000088 [0,0193]	(5,7)	30 [65]	
13	4499 (I. C.)	14h45m; 274°;	-81°19′ -21°	3				(8,4)		
14	4590 (68)	12h34m,2; 268°;	-26°12′ +36°	5,9	150	12	0,000062 [0,0064]	8,2 (7,9) [-7,8]	circul.	
15	4833	12h52m,7; 271°;	-70°20′ -8°	5,6	250	13	0,000061 [0,0077]	(7,8)		
16	5024 (53)	13h8m; 307°;	+18°42′ +79°,4	5,2	350	14,94	0,000053 [0,0064]	7,8 (7,8) [-8,6]	165 [75]	-170 km/sec
17	5139 ϖ Centauri	13h20m,8; 277°;	-46°47′ +15°,5	31	6000	13	0,000153 [0,0451]		110 [30]	
18	5272 (3)	13h37m,6; 10°;	+28°53′ +77°,7	9,7	20000	13,92	0,000072	6,6 (6,5) [-9,1]		-125
19	5286	13h40m,1; 279°;	-50°52′ +10°,9	6,0	300	13	0,000051 [0,0129]	(7,1)		

Tableau des 91 Amas globulaires (*suite*).

N°	N. G. C. (Messier).	α; G;	δ. g.	Diamètre moyen.	Nombre des étoiles.	Grandeur des étoiles les plus lumineuses.	Parallaxes Shapley [Charlier].	Grandeur intégrale Holetschek (Parvulesco) [Absolue].	Direction du grand axe. inclinaison par rapport à la Voie Lactée.	Vitesse radiale.
20	5466	$14^h 1^m$, 10°;	+29° +72°	5',4			0",000051	8,5 (8,1) [-8,0]		
21	5634	$14^h 24^m,4$; 309;	-5° 32' +49°	1,9			0,000033	9,7 (9,5) [-7,7]		
22	5897	$15^h 11^m,7$; 311°;	-20° 39' +30°	6,7			0,000067 [0,0103]	10,2 (8,2) [-5,7]		
23	5904 (5)	$15^h 13^m,5$; 332°;	+2° 27' +46°,2	10,7	1000	13,74	0,000080 [0,0155]	6,7 (6,5) [-8,8]	55° [15]	+ 10 km/sec
24	5927	$15^h 20^m,8$; 294°;	-50° 19' +5°	4,5			[0,0129]	(7,7)		
25	5946	$15^h 28^m,2$; 295°;	-50° 19' +4°	1				(10)		
26	5986	$15^h 39^m,5$; 305°;	-37° 27' +13°,3	4,1	350	13	0,000048 [0,0052]		circul.	
27	6093 (80)	$16^h 11^m,1$; 320°;	-22° 44' +19°,3	5,6	500	14,72	0,000050 [0,0064]	7,8 (7,7) [-8,7]		
28	6101	$16^h 14^m,4$; 284°;	-71° 58' -15°,4	3,8			0,000047 [0,0039]	(8,2)		
29	6121 (4)	$16^h 17^m,5$; 318°;	-26° 17' +15°,9	14,8	500	13,18	0,000088 [0,0232]	6,8 (6,6) [-8,5]	115 [70]	
30	6139	$16^h 20^m,9$; 310;	-38° 37' +6°	1				[10,4]		
31	6144	$16^h 21^m,2$; 319°;	-25° 49' +15°	3,7			0,000041	(8,1)		
32	6171	$16^h 26^m,9$; 331°;	-12° 50' +22°,1	5,4	50	13	0,000062 [0,0045]	9,0 (8,0) [-7,0]	65 [30]	
33	6205 (13)	$16^h 38^m,1$; 26°;	+36° 39 +40°	16,6	50000	13,45	0,000090 [0,0193]	5,8 (5,9) [-9,4]	125 [65]	-300°
34	6218 (12)	$16^h 42^m$; 343°;	-1° 46' +25°,2	9,4	2681	13,56	0,000081 [0,0129]	6,8 (6,8) [-8,7]	circul.	
35	6229	$16^h 44^m.2$; 41°;	+47° 42' +41°	2	1540	15,9	0,000023	8,6 (9,0) [-9,6]		
36	6235	$16^h 47^m,4$; 326°;	-22°,1 +13°	1,2			0,000020	9,7 (9,5) [-8,8]		

Tableau des 91 Amas globulaires (*suite*).

N°	N. G. C. (Messier).	α; G; δ. g.	Diamètre moyen.	Nombre des étoiles.	Grandeur des étoiles les plus lumineuses.	Parallaxes Shapley [Charlier].	Grandeur intégrale Holetschek (Parvulesco) [Absolue]	Direction du grand axe. Inclinaison par rapport à la Voie Lactée.	Vitesse radiale.
37	6254 (10)	16h 51m,9; -3° 57′ / 342°; +22°,5	7′,9	4562	13,35	0″,000083 [0,0155]	6,9 (6,8) [-8,5]	presque circul.	
38	6266 (62)	16h 54m,8; -29° 58′ / 320; +7°,1	5,5	1000	14	0,000066 [0,0064]	7,0 (7,5) [-8,9]	75° [35]	
39	6273 (19)	16h 56m,4; -26° 7′ / 324°; +9°,1	5,0	800	13	0,000063 [0,0052]	6,8 (7,2) [-9,2]	15 [20]	
40	6284	16h 58m,4; 24° 37′ / 325°; +9°,9	1,7			0,000027 [0,0026]	9,5 (9,4) [-8,3]	circul.	
41	6287	16h 59m,1; -22° 34′ / 327°; +11°	1,6			0,000023 [0,0032]	9,2 (9,0) [-9,0]		
42	6293	17h 4m; -26° 26′ / 325°; +7°,6	2,7	150	13	0,000038 [0,0039]	8,5 (8,0) [-8,6]	35 [0]	
43	6304	17h 8m,2; -29° 20′ / 323°; +5°,2	1,9			0,000031 [0,0026]	(8,8)	circul.	
44	6316	17h 10m,3; -28° 1′ / 325°; +5°	1			0,000019	(10,5)		
45	6333 (9)	17h 13m,3; -18° 25′ / 333°; +10°,3	3,4	3277	15,08	0,000040 [0,0064]	7,3 (8,0) [-9,7]		+225 km/s
46	6341 (92)	17h 14m,1; +43° 15′ / 36°; +34°	7,6	100	13,60	0,000081 [0,0064]	6,2 (6,4) [-9,7]	20 [15]	-160
47	6342	17h 15m,3; -19° 29′ / 333°; +9°	1						
48	6352	17h 17m,8; -48° 19′ / 308°; -7°	2,8			0,000044	8,6		
49	6355	17h 17m,8; -26° 15′ / 327°; +4°,4	1						
50	6356	17h 17m,8; -17° 43′ / 334°; +9°	1,8		16,86	0,000026 [0,0026]	8,5 (8,7) [-9,4]		
51	6362	17h 21m,6; -66° 58′ / 293°; -17°	7,7			0,000077 [0,0064]	(7,0)	110 [80]	
52	6366	17h 22m,4; -4° 59′ / 346°; +16°	6				(7,2)		
53	6388	17h 29m; -44° 40′ / 312°; -7°	2,5			0,000036 [0,0039]	8,7		
54	6397	17h 32m,5; -53° 37′ / 304°; -12°	18	1000	13	0,000120 [0,0258]	(6,2)	35 [50]	

Tableau des 91 Amas globulaires (*suite*).

Nos	N. G. C. (Messier).	α; G;	δ. g.	Diamètre moyen.	Nombre des étoiles.	Grandeur des étoiles les plus lumineuses.	Parallaxes Shapley [Charlier].	Grandeur intégrale Holetschek (Parvulesco) [Absolue].	Direction du grand axe. Inclinaison par rapport à la Voie Lactée.	Vitesse radiale.
55	6402 (14)	$17^h 32^m,4$; 349°;	−3° 11′ +14°,3	4′,2	5000	14,85	0″,000043 [0,0052]	7,8 (8,0) [−9,0]	110° [70]	
56	6426	$17^h 39^m,9$; 356°;	+3° 13′ +15°	0,8						
57	6440	$17^h 42^m,9$; 336°;	−20° 19′ +2°,5	1,5				(10)		
58	6441	$17^h 43^m,4$; 321′;	−37° 2′ −5°,1	1,5			0,000022 [0,0026]	(9,7)		
59	6496	$17^h 51^m,8$; 315°;	−44° 14′ −11°	1,5						
60	6517	$17^h 56^m,4$; 347°;	−8° 57′ +5°	0,8						
61	6535	$17^h 58^m,7$; 354°;	−0° 18′ +10°	0,8						
62	6539	$17^h 59^m,4$; 348°;	−7° 35′ +5°,8	1,6				(9,6)		
63	6541	$18^h 0^m,8$; 316°;	−43° 44′ −11°,4	7	400	13	0,000068 [0,0103]	(6,9)	45 [20]	
64	6553	$18^h 3^m,2$; 332°;	−25° 56′ −3°,4	1,5				(10)		
65	6558	$18^h 3^m,8$; 327°;	−31° 47′ −7°	1				(9,0)		
66	6569	$18^h 7^m,2$; 328°;	−31° 51′ −7°	1,8			[0,0026]			
67	6584	$18^h 10^m,6$; 309°;	−52° 15′ −16°,4	2,4	75	12	0,000038 [0,0032]	(8,2)	circul.	
68	6624	$18^h 17^m,3$; 330°;	−30° 24′ −9°	2,2			0,000035 [0,0032]	(8,4)		
69	6626 (28)	$18^h 18^m,4$; 335°;	−24° 55′ −6°	4,4	1000	14,49	0,000054 [0,0052]	7,9 (7,6) [−8,4]	50 [20]	km/sec 0
70	6637 (69)	$18^h 24^m,8$; 329°;	−32° 25′ −10°,6	3	100	14	0,000047 [0,0039]	9,0 (8,4) [−7,6]		
71	6638	$18^h 24^m,8$; 335°;	−25° 34′ −8°	1,5			0,000029 [0,0026]	(10,2)		
72	6642	$18^h 25^m,8$; 337°;	−23° 32′ −7°	1,1		15,51	0,000026			
73	6652	$18^h 29^m,2$; 328°;	−33° 4′ −12°,5	1,8	100	15	0,000032 [0,0026]	(9,0)		
74	6656 (22)	$18^h 30^m,3$; 338°;	−23° 59′ −8°	15	70000	12,58	0,000118 [0,0155]	6,2 (6,0) [−8,4]	25 [0]	

Tableau des 91 Amas globulaires (*suite*).

N°	N. G. C. (Messier).	α; G	δ. g.	Diamètre moyen	Nombre des étoiles.	Grandeur des étoiles les plus lumineuses.	Parallaxes Shapley (Charlier).	Grandeur intégrale Koletschek (Parvulesco) (Absolue).	Direction du grand axe. Inclinaison par rapport à la Voie Lactée.	Vitesse radiale.
75	6681 (70)	18h 36m,7; 329°;	−32° 23′ −13°	3′,6	100	13	0″,000055 [0,0052]	9,5 (9,5) [−6,8]	150° [55]	
76	6712	18h 47m,6; 353°;	−8° 50′ −6°	3,3	75	15,65	0,000032 [0,0039]	8,9 (9,1) (−8,6]		
77	6715 (54)	18h 48m,7; 332°;	−30° 36′ −14°,4	3,6			0,000062 [0,0026]	(8,5)	95 [70]	
78	6723	18h 52m,8; 327;	−36° 46′ −17°,5	8,1	1000	13	0,000079 [0,0103]	(6,5)	circul.	
79	6752	19h 2m; 303°;	−60° 8′ −26°	16,1	1000	12	0,000114 [0,0193]		125 [65]	
80	6760	19h 6m,1; 30°;	+0° 52′ −5°	1	1000			10,5 (10,4) [−8,1]		
81	6779 (56)	19h 12m,7; 30°;	+30° +7°,4	3,6	6600	15,5	0,000040 [0,0032]	8,3 (8,3) (−8,7]	150 [85]	
82	6809 (55)	19h 33m,7; 335°;	−31° 10′ −23°,7	12,5	800	12	0,000100 [0,0193]	(6,0)		
83	6838	19h 49m,3; 27°;	+18° 31′ −4°	5				(7,8)		
84	6864 (75)	20h 0m,2; 348°;	−22° 12′ −26°,8	1,9		16,76	0,000022 [0,0032]	8,0 (7,6) [−10,3]		
85	6934	20h 29m,3; 20°;	+7° 4′ −20°	1,5	3370	15,33	0,000030	9,0 (9,0) (−8,6]		−410 km/sec
86	6981 (72)	20h 48m; 30°:	−12° 55′ −34°	2,2		15,53	0,000034 [0,0032]	9,5 (9,0) [−7,8]		
87	7006	20h 56m,8; 32°:	+15° 48′ −20°	1,8	505	17	0,000015	9,7 (9,3) [−9,4]	115 [85]	
88	7078 (15)	21h 25m,2; 33°;	+11° 44′ −27°,8	6,9	1000	14,13	0,000068 [0,0129]	6,2 (6,0) [−9,6]	30 [10]	− 95
89	7089 (2)	21h 28m,3; 21°;	−1° 16′ −36°,6	7,1	800	14,25	0,000064 [0,0103]	6,7 (6,0) [−9,2]	135 [70]	− 10
90	7099 (30)	21h 34m,7; 354°;	−23° 38′ −48°	6	350	13,77	0,000054 [0,0103]	8,5 (7,2) [−7,7]	20 [5]	
91	7492	23h 3m,2; 21°;	−16° 10′ −64°	3,7	1000	13,4	0,00005	(8,4)		

LISTE DES OUVRAGES CITÉS DANS LE MÉMOIRE.

1. *Public. of the Lick. Obs.*, vol. 13. 1918.
2. A. Hinks, *M. N.*, 71, 1911, p. 588 et 693.
3. J.-A. Hardcastle, *M. N.*, 74, 1914, p. 699.
4. J.-H. Reynolds, *M. N.*, 83, 1923, p. 147 et 152, et *Observatory*, 46, 1924, p. 306.
5. F.-G. Brown et J.-H. Reynolds, *M. N.*, 82, 1922, p. 510.
6. Gregory, *M. N.*, vol. 84, p. 456.
7. Ed. Hubble, *Pop. Astr.*, vol. 33, n° 4, 1925.
8. Lindemann, *M. N.*, 1923.
9. H.-D. Curtis, *P. A. S. Pac.*, 31, 1919, p. 223.
10. H. Pannekock, *Publ.* n° 1, *Astron. Instit. of the Univesity d'Amsterdam*, 1924.
11. J.-G. Hagen, *Nebelstrasse*, Hambourg, 1924.
12. C.-V.-L. Charlier, *Lund. Univ. Arsskr.*, Bd 14, n° 19, 1918.
13. F. Henroteau, *Publ. Dom. Obs. Ottawa*, vol. 9, 1925.
14. H. Shapley, *Contrib. Mount Wilson*, n° 116.
15. H. Shapley, *Harvard Circul.*, n° 260.
16. H. Shapley, *Proc. Nat. Acad. Wash.*, vol. 6, 1920, p. 293.
17. H. von Zeipel, *Annales de l'Observatoire national de Paris*, vol. 25, 1906, et *Recherches sur la Constitution des amas globulaires* (*K. Svensk. Vet. Akad. Handl.*, Bd 51, n° 5, 1913).
18. H. Shapley, *Contrib. Mount Wilson*, n° 129.
19. W.-W. Campbell, *Stellar Motions* (Yale Univ. Press, 1913.
20. Bj Boss, *Astron. J.*, t. 27, 1912, p. 83.
21. F.-H. Seares, *Astroph. J.* t. 55, 1912, p. 190.
22. Maxwel, *Collected Works*, vol. 2.
23. Ch. Fabry, *Astroph. J.*, vol. 31, 1910, p. 394.
24. H. Poincare, *Hypothèses cosmogoniques*.
25. Halm, *M. N.*, 71, p. 634.
26. A.-S. Eddington, *Stellar Movements and the Structure of the Universe Macmillan*, 1914.
27. C.-V. L. Charlier, *Ark. for. Mat. Astron. och. Fys.*, Bd 12, n° 18, et Bd 10, n° 29; *Medd. Lund. Obs.*, n°s 69, 70, 79, 1915–1917.
28. C. Parvulesco, *Bull. astron.*, t. 3, fasc. 3.
29. H. Gylden, *Kongl. Svens. Akad. Hand.*, Bd 17, n° 1, 1879.
30. A.-S. Eddington, *A. N.* (Jul. Num.), septembre 1921.
31. H. Shapley, *Contrib. Mount Wilson*, 157.
32. H. Shapley, *Scientia*, vol. 27, 1920, p. 27.
33. H. Shapley, *Publ. Ast. Soc. Pac.*, n° 183, octobre 1919.
34. J.-H. Oori, *Proc. Nat. Acad. Wash.*, 10, 1924, p. 256.
35. S. Bailey, *Cat. of Bright Clusters and Neb.*, 1908.
36. H. Shapley, *Proc. Nat. Acad. Wash.*, 3, 1917, p. 479.
37. J. C. Kapteyn, *Contrib. Mount Wilson*, n° 83; *Astroph. J.*, 40, 1914, p 187; *Phisik Zeitschrift.*, 13, 1912, p. 288.

38. E.-A. Fath, *Lick Obs. Bull.*, 5, 1909, p. 71.
39. E.-A. Fath, *Contrib. Mount Wilson*, n° 49, 1911.
40. E.-A. Fath, *Contrib. Mount Wilson,* n° 67, 1913.
41. W. Herschel, *Philos. Trans.,* 1785, p. 217.
42. T.-J.-J. See, *Researches on the Evolution of the Stellar Systems.* vol. 2, Chap. XIX.
43. E.-W. Brown, *Astroph. J.*, 61, n° 2, 1925.
44. Von Pahlen, *A.-N.*, 4503.
45. H. Groot, *M.-N.*, 85, avril 1925.
46. F.-G. Pease, *Nat. Acad. Wash.*, 4, 1918, p. 21.

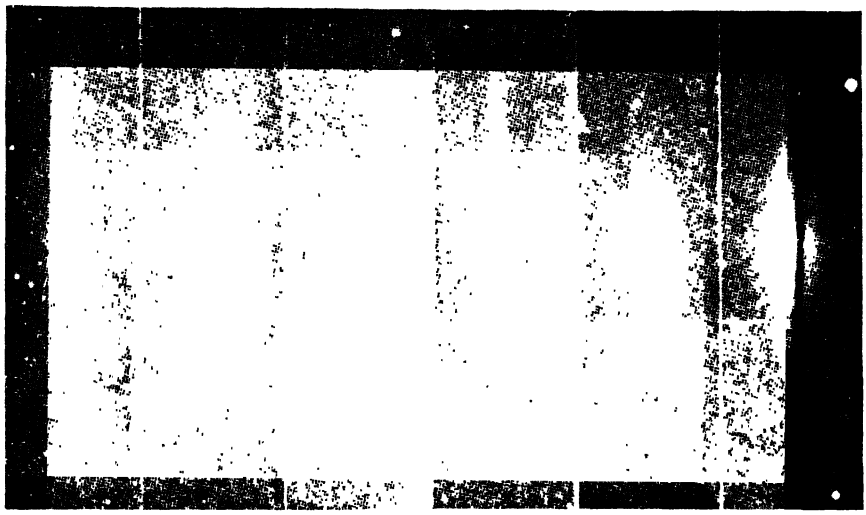

Fig. [illegible] — Spirale vue par la tranche
(montrant l'anneau extérieur de matière obscure).

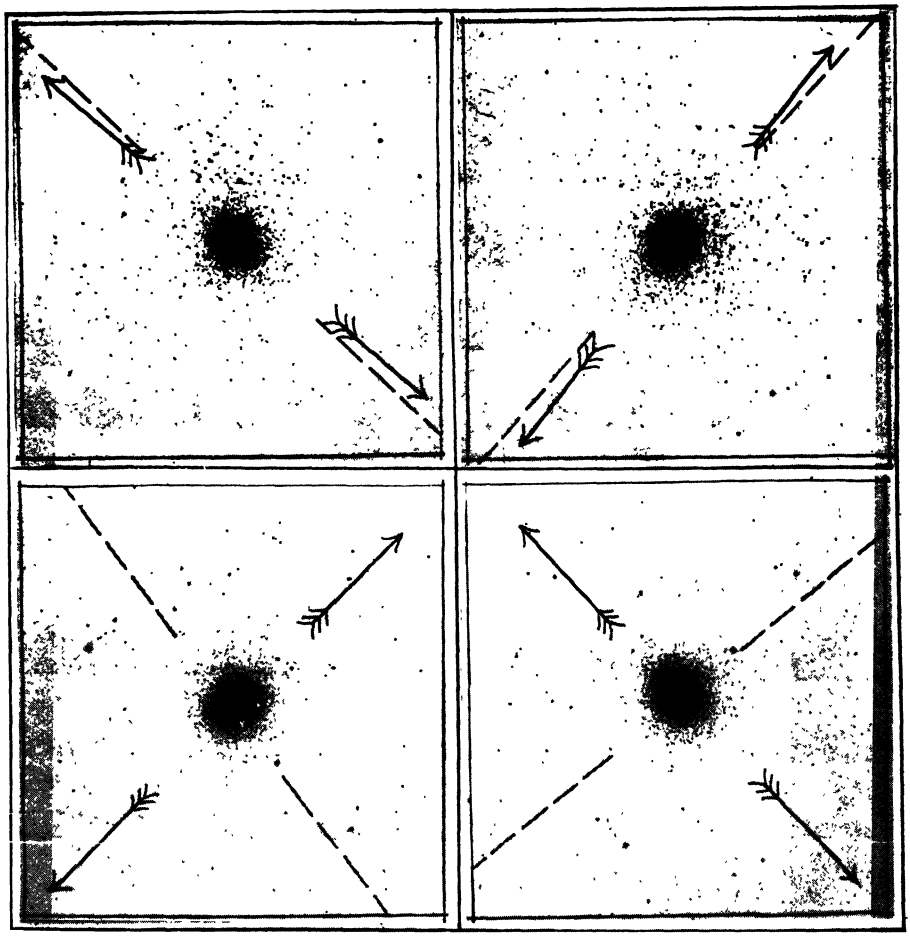

Fig. 16. — M. 2 (en haut) et M. 5 (en bas) présentés dans deux positions différentes, dans le but de montrer leurs aplatissements. Les flèches indiquent les directions de leurs aplatissements. Les lignes pointillées représentent les directions parallèles à la Voie Lactée.