

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

PIERRE HUMBERT

Sur les surfaces de Poincaré

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1918

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1918__14__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1918__14__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE

1595.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. PIERRE HUMBERT,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

1^{re} THÈSE. — SUR LES SURFACES DE POINCARÉ.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

18

juin 1918 devant la Commission d'Examen.



MM. P. APPELL,

Président.

PAINLEVÉ,

CL. GUICHARD,

} *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1918

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen..... P. APPELL, professeur. Mécanique analytique et Mécanique céleste.

Professeurs honoraires... { CH. WOLF.
P. PUISEUX.

LIPPMANN..... Physique.
BOUTY..... Physique.
BOUSSINESQ..... Physique mathématique et Calcul des probabilités.

É. PICARD..... Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
YVES DELAGE..... Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
GASTON BONNIER..... Botanique.

KOENIGS..... Mécanique physique et expérimentale.

VELAIN..... Géographie physique.

GOURSAT..... Calcul différentiel et Calcul intégral.

HALLER..... Chimie organique.

JOANNIS..... Chimie (Enseignement P. C. N.).

P. JANET..... Physique (Enseignement P. C. N.).

WALLERANT..... Minéralogie.

ANDOYER..... Astronomie.

PAINLEVÉ..... Mécanique rationnelle.

HAUG..... Géologie.

HOUSSAY..... Zoologie.

Professeurs..... H. LE CHATELIER... Chimie.

GABRIEL BERTRAND... Chimie biologique.

M^{me} P. CURIE..... Physique générale.

CAULLERY..... Zoologie (Évolution des êtres organisés).

C. CHABRIÉ..... Chimie appliquée.

G. URBAIN..... Chimie.

ÉMILE BOREL..... Théorie des fonctions.

MARCHIS..... Aviation.

JEAN PERRIN..... Chimie physique.

G. PRUVOT..... Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.

MATRUCHOT..... Botanique.

ABRAHAM..... Physique.

CARTAN..... Calcul différentiel et Calcul intégral.

CL. GUICHARD..... Mathématiques générales.

MOLLIARD..... Physiologie végétale.

N..... Application de l'Analyse à la Géométrie.

N..... Histologie.

N..... Géométrie supérieure.

N..... Physiologie.

LEDUC..... Physique.

MICHEL..... Minéralogie.

HÉROUARD..... Zoologie.

LÉON BERTRAND..... Géologie.

Professeurs adjoints..... RÉMY PERRIER..... Zoologie (Enseignement P. C. N.).

COTTON..... Physique.

LESPIEAU..... Chimie.

GENTIL..... Pétrographie.

SAGNAC..... Physique (Enseignement P. C. N.).

PEREZ..... Zoologie (Évolution des êtres organisés).

Secrétaire..... D. TOMBECK.

A

MA FEMME

A

MONSIEUR PAUL APPELL

Hommage reconnaissant.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES SURFACES DE POINCARÉ.

Le but de ce travail est de perfectionner et de compléter, sur quelques points de détail, la théorie des figures d'équilibre infiniment voisines des ellipsoïdes de Jacobi, pour une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, et soumise à l'action des seules forces newtoniennes.

C'est à ces figures que nous donnons le nom de *surfaces de Poincaré* ⁽¹⁾.

Après avoir, dans l'Introduction, rappelé les divers travaux se rattachant à la question, nous étudions, dans le Chapitre I, le calcul des axes des Jacobiens de bifurcation; quelques propositions nouvelles sur les fonctions de Legendre et de Lamé de seconde espèce nous permettent de compléter et de simplifier la méthode générale de M. Liapounov.

Les Chapitres II et III traitent de la forme des surfaces de Poincaré d'ordre 3 et 4; la première de ces surfaces est la figure dite *piriforme*. La question de l'existence de points d'inflexion dans les sections de cette surface par ses plans de symétrie est spécialement étudiée.

La méthode exposée au Chapitre I est appliquée, dans le Chapitre IV, au calcul des éléments de la surface de Poincaré d'ordre 5 et, au Chapitre V, à la surface d'ordre 6.

Enfin le Chapitre VI contient quelques remarques géométriques générales.

Je prie mon maître, M. Paul Appell, doyen de la Faculté des Sciences, de

(1) Le terme a déjà été employé incidemment par Schwarzschild.

trouver ici l'expression de ma plus profonde reconnaissance : il ne m'a jamais cessé ses conseils et ses encouragements et a toujours accueilli mes résultats avec sa bienveillance accoutumée. Je dois également adresser tous mes remerciements à M. G. Fayet, pour l'amabilité avec laquelle il a mis à ma disposition, en vue de recherches bibliographiques, la Bibliothèque de l'Observatoire de Nice.

INTRODUCTION.

HISTORIQUE DE LA QUESTION.

La théorie qui nous occupe a donné lieu à des travaux formant deux groupes distincts, et totalement indépendants l'un de l'autre : d'une part, les célèbres études de Poincaré, complétées au point de vue pratique par G.-H. Darwin et M. Ladislav Bénès; d'autre part, les très importants Mémoires de M. Liapounov. Nous allons les passer en revue successivement.

Les travaux de Poincaré.

C'est en 1885 que, dans une courte Note ⁽¹⁾, Henri Poincaré annonça qu'il venait de découvrir une infinité de nouvelles figures d'équilibre pour un fluide en rotation, dérivées des ellipsoïdes de Jacobi. Presque en même temps, l'auteur publiait, dans les *Acta mathematica*, l'exposé détaillé de ses recherches, en un Mémoire ⁽²⁾ qui reste toujours l'Ouvrage capital sur la question. Poincaré commence par y donner la démonstration de plusieurs propositions énoncées par Tait et Thomson, en particulier à propos de l'anneau fluide, puis, développant les principes dont il vient de se servir, il passe à l'étude des figures ellipsoïdales et obtient, pour les ellipsoïdes de Jacobi, des résultats qu'on peut résumer ainsi :

1° Il existe des figures d'équilibre non ellipsoïdales, infiniment voisines de certains ellipsoïdes de Jacobi, dits *de bifurcation* ou *critiques*.

2° L'axe de rotation étant pris pour axe des x , les axes φ , $\sqrt{\varphi^2 - b^2}$ et $\sqrt{\varphi^2 - a^2}$

⁽¹⁾ *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. CI, 1885.

⁽²⁾ *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII, 16 septembre 1885).

d'un ellipsoïde critique doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R_n S_n}{2n+1}.$$

Dans ces équations, $R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}$, $R_2 = \rho \sqrt{\rho^2 - b^2}$; R_n est une fonction de Lamé de ρ , d'ordre n , qui n'est divisible ni par $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, ni par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, et dont tous les zéros sont inférieurs à b^2 ; les S sont les fonctions de Lamé de seconde espèce correspondantes. Ces deux équations permettent de déterminer les axes du Jacobien critique, dont on suppose en outre le volume donné.

3° La figure infiniment voisine d'un Jacobien critique défini par la fonction R_n de la coordonnée elliptique ρ s'obtient en portant sur la normale au Jacobien, en chaque point défini par les deux autres coordonnées elliptiques μ et ν , une longueur ζ , dont la valeur, *en première approximation*, est

$$\zeta = \varepsilon \frac{M_n(\mu) N_n(\nu)}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}},$$

M_n et N_n étant les fonctions de Lamé associées à R_n , et ε une constante arbitraire très petite, dont on néglige le carré.

4° Le premier Jacobien critique donnant naissance à une série de figures d'équilibre non ellipsoïdales correspond à la valeur $n = 3$ du paramètre de l'équation de Lamé; la surface d'équilibre infiniment voisine coupe le Jacobien suivant la petite ellipse principale, et suivant deux lignes de courbure de cet ellipsoïde. C'est cette surface qu'on a appelée depuis *piriforme*.

5° Les surfaces ont *rigoureusement*, c'est-à-dire même si l'on cesse de s'en tenir à la première approximation, trois plans de symétrie si n est pair : ce sont les trois plans principaux du Jacobien. Si n est impair, il n'y a que deux plans de symétrie, les deux plans principaux passant par le grand axe. L'axe de rotation n'est donc pas alors un axe de symétrie.

Ajoutons que l'expression

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_n S_n}{2n+1}$$

a reçu de Poincaré le nom de *coefficient de stabilité d'ordre n*.

La fin du Mémoire des *Acta* est consacrée à l'exposition de la remarquable théorie de l'échange des stabilités; l'auteur croit pouvoir en déduire que la figure piriforme est stable.

En 1900, Poincaré prit pour sujet de son cours de Physique mathématique à la Faculté des Sciences les fluides en rotation; ses leçons ont été rédigées par M. L. Dreyfus et publiées en Volume sous le titre : *Figures d'équilibre d'une*

masse fluide ⁽¹⁾. Les Chapitres VI et VII de cet Ouvrage se rapportent au sujet qui nous occupe : ils présentent un bon résumé des points essentiels du Mémoire des *Acta* et sont d'une lecture plus facile.

A la suite d'une remarque de Schwarzschild ⁽²⁾, faisant observer que le principe de l'échange des stabilités ne pouvait pas être appliqué sans modification au cas de la figure piriforme, Poincaré reprit la question de la stabilité dans un important Mémoire ⁽³⁾ publié dans les *Philosophical Transactions*, de Londres. Par une méthode remarquable, basée sur l'expression de l'énergie d'une double couche, il va jusqu'à la deuxième approximation pour la forme de la surface et en déduit la condition nécessaire et suffisante pour que la stabilité ait lieu. Il s'agit de reconnaître quel est le signe d'une quantité se composant d'un nombre infini de termes, tous positifs, sauf deux. Si elle est négative, il y aura instabilité, et il suffira pour le constater de calculer un nombre fini de termes; s'il y a stabilité, il faudra calculer la somme des termes positifs ou une limite supérieure de cette somme. Poincaré n'aborde pas ce calcul, mais il en indique tous les éléments.

Les travaux de Darwin et de M. Bénès.

Les divers Mémoires de G.-H. Darwin sur la question, tous réunis au Tome III de ses *Scientific Papers* ⁽⁴⁾, ne sont, comme il le dit lui-même dans la Préface de ce Volume, que des traductions numériques des résultats théoriques de Poincaré. L'emploi de notations inaccoutumées, et d'une méthode assez différente, au moins pour la forme, de celle de Poincaré, rend la lecture de ces travaux un peu déconcertante. Un excellent sommaire, joint à chacun de ces Mémoires, facilite heureusement beaucoup la compréhension du texte.

Darwin a abordé la question en 1887, par un travail sur les ellipsoïdes de Jacobi ⁽⁵⁾, qui, quoique en dehors du problème dont nous parlons, est d'une lecture utile pour connaître la méthode de calcul que l'auteur reprendra plus tard dans le cas du Jacobien critique.

Les trois Mémoires les plus importants sont de 1901-1902 et ont été écrits sur l'invitation de Poincaré, dans le but d'étudier la stabilité de la surface

⁽¹⁾ Paris, C. Naud (Gauthier-Villars), 1902.

⁽²⁾ *Die Poincaresche Theorie des Gleichgewichts (Annalen der K. Sternwarte, München, Bd III, 1898).*

⁽³⁾ *Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation (Phil. Trans. of the Royal Soc. of London, vol. 198, 1901).*

⁽⁴⁾ *Scientific Papers*, by Sir George Howard DARWIN. Cambridge University Press, 1910.

⁽⁵⁾ *On Jacobi's figure of equilibrium for a rotating mass of liquid (Proc. Roy. Soc., t. XLI, 1887; Sc. Pap., t. III, n° 8).*

piriforme. Le premier ⁽¹⁾ expose la façon dont l'auteur considère les fonctions de Lamé, sujet sur lequel nous reviendrons. Dans le second ⁽²⁾, Darwin applique sa méthode au calcul des axes du Jacobien critique correspondant à la figure piriforme, et donne pour la première fois les dimensions exactes, avec des figures, de cette surface en première approximation. Enfin le troisième Mémoire ⁽³⁾ aborde la question de la stabilité. Se reconnaissant trop peu au courant des fonctions de Weierstrass pour pouvoir suivre la méthode indiquée par Poincaré dans les *Philosophical Transactions*, Darwin reprend avec ses notations la marche suivie par Poincaré et déduit de son calcul que la figure piriforme est stable : du moins il lui paraît impossible que le résidu non calculé de la série puisse changer le résultat. A la suite des travaux de M. Liapounov concluant à l'instabilité de la figure, Darwin a refait tous ses calculs et a indiqué ⁽⁴⁾ en 1908 qu'il tenait toujours son résultat pour exact.

Il y avait donc là une question en litige. M. Ladislav Bénès a essayé de la résoudre, sans toutefois y parvenir d'une façon définitive ⁽⁵⁾. Il a effectué tous les calculs du Mémoire de Poincaré, partant exactement des formules de l'auteur : mais il n'est pas arrivé à la solution complète pour laquelle il aurait fallu pousser les calculs beaucoup plus loin. Néanmoins, d'après l'allure des premiers résultats, il semble possible d'affirmer que la figure piriforme est instable et de considérer ainsi la question comme tranchée.

Travaux divers.

Au groupe de Poincaré se rattache le Mémoire déjà cité de Schwarzschild qui d'ailleurs, sauf le point que nous avons signalé et une intéressante discussion des propriétés des coefficients de stabilité, n'apporte rien de très nouveau sur les figures dont nous parlons, et s'étend plutôt sur les problèmes d'Edouard Roche.

Le travail de M. Globa-Mikhaïlenko ⁽⁶⁾, quoique en dehors de la question,

⁽¹⁾ *Ellipsoidal harmonic analysis* (*Phil. Trans. of R. S.*, vol. 197, 1901; *Sc. Pap.*, t. III, n° 10).

⁽²⁾ *On the pear-shaped figure of equilibrium for a rotating mass of liquid* (*Phil. Trans.*, vol. 198, 1901; *Sc. Pap.*, t. III, n° 11).

⁽³⁾ *The stability of the pear-shaped figure of equilibrium, etc.* (*Phil. Trans.*, vol. 200, 1902; *Sc. Pap.*, t. III, n° 12).

⁽⁴⁾ *Further consideration of the stability, etc.* (*Phil. Trans.*, vol. 208, 1908; *Sc. Pap.*, t. III, n° 12).

⁽⁵⁾ *Ueber das Vorzeichen des Poincareschen Ausdrucks für die Stabilität des birnenförmigen Figur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse* (*Astron. Nachr.*, t. 186, n° 4439, 1910).

⁽⁶⁾ *Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation* (Thèse de doctorat, Paris, 1916).

y est intimement lié par l'emploi qu'y fait l'auteur de la méthode de Poincaré. Son objet est la recherche des figures d'équilibre infiniment voisines d'un cylindre elliptique ; les résultats obtenus avaient déjà été établis, en suivant une autre voie, par M. J.-H. Jeans ⁽¹⁾.

Les travaux de M. Liapounov.

M. Liapounov a publié sur la question un grand nombre de Mémoires qui, malgré leur intérêt, sont encore peu connus en France. On nous excusera donc de nous y arrêter quelque peu.

Ainsi que M. Liapounov le dit lui-même, c'est vers 1883 que, sur l'invitation de Tchebychev, il a commencé à étudier les figures ellipsoïdales d'équilibre d'un fluide en rotation. La question suivante avait été proposée par Tchebychev à divers savants russes : « Étant donné qu'on peut passer, pour certaines valeurs de la vitesse angulaire, de la série des figures d'équilibre représentées par les ellipsoïdes de Maclaurin à la série représentée par les ellipsoïdes de Jacobi, existe-t-il d'autres séries de figures d'équilibre auxquelles on pourrait passer à partir des figures ellipsoïdales ? »

Les études que M. Liapounov entreprit sur la question le conduisirent à publier, en 1884, un important Mémoire, constituant ce que nous nommerions la *thèse* de l'auteur, et que les universités russes appellent *dissertation*. Il ne semble pas que ce travail, intitulé : *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'un liquide animé d'un mouvement de rotation*, et écrit en langue russe, ait été connu hors de Russie, autrement que par une courte Notice de Radau dans le *Bulletin astronomique*, jusqu'à ce que M. Davaux en ait donné une traduction française ⁽²⁾, parue en 1904, avec des notes et quelques corrections de l'auteur. Ni Poincaré ni Darwin n'en ont eu connaissance ; et ce travail contient cependant quelques-unes des propositions du Mémoire des *Acta*, quelquefois même traitées d'une façon plus complète ⁽³⁾. A la fin de l'Ouvrage l'auteur, suivant l'usage russe, énonce quelques résultats sans démonstration. Or l'un de ces résultats est formulé de la façon suivante :

⁽¹⁾ *Philos. Trans. of the Roy. Soc.*, 1903. Voir également, de ce même auteur, *The motion of tidally distorted masses* (*Memoirs of the Roy. Astr. Soc.*, vol. LXII, part I, 1917).

⁽²⁾ *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, mars 1904.

⁽³⁾ Ainsi, dans le Mémoire des *Acta*, Poincaré a démontré que les équations

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R_{0,3} S_{0,3}}{7}$$

avaient une solution, mais non qu'elles n'en avaient qu'une seule : la démonstration de ce dernier point est donnée dans le travail de M. Liapounov.

« Étant donné un entier n quelconque, surpassant 2, on peut trouver $E_{\frac{n}{2}} + 2$ surfaces algébriques infiniment voisines de celles des figures ellipsoïdales d'équilibre, et vérifiant, à une première approximation, la condition d'équilibre. Parmi les figures délimitées par ces surfaces, une est infiniment voisine d'un ellipsoïde de Jacobi, et les $E_{\frac{n}{2}} + 1$ autres sont infiniment voisines des ellipsoïdes de Maclaurin. »

M. Liapounov a donc connu dès cette époque l'existence des figures infiniment voisines des ellipsoïdes d'équilibre : mais il n'a pas cherché à tirer parti du résultat qu'il avait entrevu, et a même complètement abandonné le problème après avoir donné ce simple énoncé. Vingt ans plus tard, à la suite des travaux de Poincaré, il a repris la question, en cherchant à la résoudre sans s'arrêter à la première ou à la deuxième approximation ; les résultats qu'il a obtenus sont exposés dans un grand travail, composé de quatre Parties publiées à des dates différentes, et que nous analyserons plus loin. Mais auparavant, l'auteur a publié un sommaire de ses recherches ⁽¹⁾, qui est d'une importance capitale, en ce qu'il expose la méthode suivie et les notations employées, indique les principaux résultats et permet d'aborder avec plus de facilité la lecture un peu ardue du grand Mémoire. La méthode de M. Liapounov se présente de la façon suivante :

L'axe des z étant l'axe de rotation, l'équation du problème s'écrit

$$U + \Omega(x^2 + y^2) = \text{const.},$$

U et Ω étant, à des facteurs constants près, le potentiel et le carré de la vitesse angulaire.

L'ellipsoïde à partir duquel on veut chercher de nouvelles figures d'équilibre a pour équation

$$\frac{x^2}{\rho + 1} + \frac{y^2}{\rho + q} + \frac{z^2}{\rho} = 1$$

ou

$$x = \sqrt{\rho + 1} \sin \theta \cos \psi,$$

$$y = \sqrt{\rho + q} \sin \theta \sin \psi,$$

$$z = \sqrt{\rho} \cos \theta,$$

où l'on suppose $q \leq 1$, le cas $q = 1$ correspondant aux ellipsoïdes de Maclaurin.

⁽¹⁾ *Sur un problème de Tchebychev (Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, vol. XVII, n° 3, 1905).* A partir de ce moment, tous les travaux de l'auteur sur la question sont écrits en français.

Les coordonnées de la figure infiniment voisine sont mises sous la forme

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\rho + \zeta + 1} \sin \theta \cos \psi, \\y &= \sqrt{\rho + \zeta + q} \sin \theta \sin \psi, \\z &= \sqrt{\rho + \zeta} \cos \theta.\end{aligned}$$

M. Liapounov développe alors la fonction inconnue ζ en série procédant suivant les puissances entières de η ou de $\sqrt{\eta}$, η étant la différence entre les valeurs de Ω , correspondant à l'ellipsoïde et à la figure infiniment voisine. Il annonce avoir prouvé la convergence de ces séries et avoir obtenu, relativement à la question de la stabilité de la figure piriforme, un résultat en contradiction avec celui de Darwin. Les hypothèses faites sur la fonction ζ sont au nombre de deux :

- a. ζ reste inférieur à un nombre fixe suffisamment petit, δ ;
- b. Si ζ' est la valeur de ζ au point θ' , ψ' , et si l'on pose

$$\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\psi' - \psi) = \cos \varphi,$$

la valeur absolue du rapport

$$\frac{\zeta' - \zeta}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

reste inférieure à un nombre fixe suffisamment petit δ_1 .

Voici à présent, brièvement analysé, le contenu du Mémoire fondamental ⁽¹⁾ :

La première Partie, portant le sous-titre : *Étude générale du problème*, n'est que le développement des principes dont le *Problème de Tchebychev* est le résumé, avec cependant de notables améliorations. L'auteur y expose en particulier la théorie des fonctions de Lamé.

Nous ne nous occuperons pas de la deuxième Partie (*Figures dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin*), puisque complètement en dehors de notre sujet. Disons seulement que le problème y est résolu dans toute sa généralité, y compris la question de la stabilité pour toute figure de ce type, quel que soit son ordre.

La troisième Partie (*Figures dérivées des ellipsoïdes de Jacobi*) est d'un

⁽¹⁾ *Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation* (Saint-Petersbourg, imprimerie de l'Académie impériale des Sciences) : 1^{re} Partie, 1906; 2^e Partie, 1909; 3^e Partie, 1912; 4^e Partie, 1914.

grand intérêt, bien que l'auteur s'excuse de n'y pas apporter de conclusions générales. Elle débute par une étude des équations qui définissent les ellipsoïdes de bifurcation, avec une méthode de résolution numérique de ces équations, sur laquelle nous insisterons particulièrement dans le cours de ce travail. L'existence et la stabilité des figures sont ensuite discutées, mais la complication des formules est telle que l'auteur a dû se borner à l'examen des cas particuliers les plus simples, les figures définies par $n = 3$ et $n = 4$, ainsi que les surfaces très allongées à trois plans de symétrie, pour lesquelles les fonctions de Lamé peuvent être remplacées par des fonctions de Bessel. Les calculs de M. Liapounov, comme nous l'avons déjà dit, concluent à l'instabilité de la figure piriforme, mais à la stabilité de l'une des deux figures correspondant à $n = 4$.

Dans la quatrième Partie (*Nouvelles formules pour la recherche des figures d'équilibre*), l'auteur reprend sa théorie dès le début, en adoptant pour les coordonnées de la surface la forme

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{1+Z} \sqrt{\rho+1} \sin\theta \cos\psi, \\y &= \sqrt{1+Z} \sqrt{\rho+q} \sin\theta \sin\psi, \\z &= \sqrt{1+Z} \sqrt{\rho} \cos\theta,\end{aligned}$$

ce qui lui permet de parfaire certains résultats de la deuxième Partie.

En même temps qu'il publiait cet Ouvrage, M. Liapounov donnait divers travaux connexes : en 1908, un Mémoire ⁽¹⁾ dans lequel il reprend, avec de nouvelles méthodes, quelques points de sa thèse, et obtient des résultats déjà donnés par Poincaré dans les *Philosophical Transactions*; en 1909, une Note ⁽²⁾ où, revenant aux hypothèses que nous avons indiquées ci-dessus, il démontre qu'il n'existe pas de figures d'équilibre vérifiant l'hypothèse a , mais non l'hypothèse b , et que par conséquent les conclusions de ses premiers travaux sont valables sans aucune réserve.

Enfin une Note ⁽³⁾, parue en 1916 et où les équations de la surface sont présentées sous diverses formes, contenant toujours une série, prouve que M. Liapounov n'a pas cessé de s'intéresser à la question.

On voit par cet exposé l'importance des travaux du géomètre russe sur le sujet; toute étude nouvelle sur les figures d'équilibre des fluides ne peut que

⁽¹⁾ *Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation* (*Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Petersbourg*, vol. XXII, n° 5, 1908).

⁽²⁾ *Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. XXVI, 1909).

⁽³⁾ *Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes d'un liquide homogène en rotation* (*Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Petrograd*, 1916).

s'inspirer de ses méthodes; malheureusement, beaucoup de questions intéressantes ont été laissées de côté par lui, et la plupart de ses formules semblent susceptibles de grandes simplifications.

Notations. Fonctions de Lamé.

L'usage de notations très différentes rend difficiles la lecture de ces divers travaux et la comparaison de ces résultats. Nous allons indiquer très brièvement les principales notations des différents auteurs, puis celles que nous comptons employer dans la suite de ce Mémoire, en insistant particulièrement sur la question, capitale dans la théorie qui nous occupe, des fonctions de Lamé :

1° Poincaré rapporte les coordonnées elliptiques ρ, μ, ν à un ellipsoïde de référence dont les axes sont $0, b$ et c ; le Jacobien critique est défini par le paramètre ρ ; la surface infiniment voisine, par l'épaisseur ζ , positive ou négative, de la couche distribuée sur la surface du Jacobien critique. La fonction de Laplace est mise sous la forme d'un produit de Lamé, $R(\rho)M(\mu)N(\nu)$; à côté de R on considère la fonction de Lamé de seconde espèce S . La fonction $R(\rho)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2) \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho(2\rho^2 - b^2 - c^2) \frac{dR}{d\rho} = [n(n+1)\rho^2 - B]R.$$

Pour distinguer entre elles les fonctions de Lamé des différents types, Poincaré a recours à trois indices; une fonction s'écrira $R_{n,i}^{(k)}$, avec la signification suivante des indices : n est le degré de R ;

K a la valeur 1 si R est un polynôme entier en ρ ,

»	2	»	multiplié par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$,
»	3	»	multiplié par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$,
»	4	»	multiplié par $\sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\rho^2 - c^2}$.

Enfin i est choisi de telle sorte que $R_{n,i}$ devienne, pour $b = c$, égal à un facteur constant près à

$$(\rho^2 - b^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^{n+i}}{d\rho^{n+i}} (\rho^2 - b^2)^n,$$

en vertu de la relation qui lie les fonctions de Lamé aux fonctions sphériques générales.

Ce mode de définition des fonctions de Lamé par trois indices (') est théori-

(') C'est aussi la notation employée par Schwarzschild.

quement parfait; pratiquement, il est un peu compliqué; et Poincaré l'abandonne aussitôt après l'avoir posé en principe; il désigne simplement les fonctions de Lamé par $R_1, R_2, \dots$, le choix des indices étant laissé au hasard. Il en résulte une grande complication; et un même symbole désigne parfois, dans les *Acta*, dans les *Philosophical Transactions* et dans les *Figures d'équilibre*, trois fonctions de Lamé différentes. A part cet inconvénient, les notations de Poincaré sont dans leur ensemble remarquablement simples et claires; elles sont d'une symétrie parfaite ⁽¹⁾ et conformes à l'usage général. On peut leur adresser le reproche d'être un peu compliquées pour le calcul.

2° M. Liapounov, comme nous l'avons vu, met l'équation du Jacobien critique sous la forme

$$\frac{x^2}{\rho + 1} + \frac{y^2}{\rho + q} + \frac{z^2}{\rho} = 1,$$

avec $q < 1$. Nous avons vu également de quelle façon il présente les équations de la surface de Poincaré. Les deux notations suivantes sont d'un usage courant dans tous ses Mémoires :

$$\Delta(\rho) = \sqrt{\rho(\rho + 1)(\rho + q)},$$

$$R = \frac{1}{2} \rho \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho \Delta(\rho)}.$$

La fonction de Lamé est désignée par le symbole $E_{m,s}(\rho)$; m en est l'ordre, et l'équation de Lamé s'écrit

$$4\Delta \frac{d}{d\rho} \left(\Delta \frac{dE}{d\rho} \right) - [\beta + m(m+1)\rho] E = 0.$$

s , qui est inférieur à $2m$, est défini comme il suit; on pose $\rho = x^2$:

Si $E(x)$ est de la forme Polynome en x , on aura

$$2m - s \equiv 0 \pmod{4};$$

Si $E(x)$ est de la forme $\sqrt{x^2 + q} \times \text{Polyn.}$, on aura

$$2m - s \equiv 1 \pmod{4};$$

Si $E(x)$ est de la forme $\sqrt{x^2 + 1} \times \text{Polyn.}$, on aura

$$2m - s \equiv 2 \pmod{4};$$

⁽¹⁾ Surtout dans le Mémoire des *Philosophical Transactions*, où les axes de l'ellipsoïde de référence sont désignés par a, b, c au lieu de α, β et c .

Si $E(x)$ est de la forme $\sqrt{(x^2 + 1)(x^2 + q)} \times \text{Polyn.}$, on aura

$$2m - s \equiv 3 \pmod{4}.$$

Lorsque m est grand, il peut y avoir ambiguïté; mais on n'a guère alors à considérer qu'une seule fonction de Lamé de chaque ordre.

Les fonctions de seconde espèce s'écrivent $F_{m,s}(\rho)$. Les coefficients de stabilité, qui sont

$$\frac{1}{3} E_{1,0} F_{1,0} - \frac{1}{2m+1} E_{m,s} F_{m,s},$$

sont désignés par le symbole $T_{m,s}$. La fonction $E_{m,s}$ qui y figure est de la forme

$$(\rho + h_1)(\rho + h_2) \dots$$

ou

$$\sqrt{\rho + 1}(\rho + h_1)(\rho + h_2) \dots$$

Les notations de M. Liapounov ont l'avantage de se prêter aux calculs numériques avec une grande souplesse; elles ont l'inconvénient de détruire complètement la symétrie et, ce qui est plus grave, l'homogénéité des formules.

3° La symétrie est également abandonnée de parti pris par Darwin, qui considère même la forme habituelle des produits de Lamé comme impropre au calcul. Le cas d'un ellipsoïde de révolution conduisant à une fonction de Laplace de la forme

$$P_i^s(\mu) P_i^s(\nu) \frac{\sin}{\cos} \varphi,$$

les P étant les fonctions sphériques générales, de degré i et d'ordre s , Darwin cherche à mettre le produit de Laplace pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux sous une forme analogue. Partant d'un ellipsoïde de référence dont il désigne

les axes par $k\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$, k , 0 , il introduit trois coordonnées ν , μ , φ et considère les fonctions suivantes :

α . Des fonctions de μ et ν , désignées soit par $\mathfrak{P}_i^s$, soit par P_i^s , suivant que ce sont des polynomes en β , ou de tels polynomes multipliés par le radical

$$\sqrt{\frac{\nu^2 - \frac{1+\beta}{1-\beta}}{\nu^2 - 1}}$$

(ou le même radical en μ). Les coefficients de ces polynomes sont des fonctions sphériques ordinaires de μ ou ν . Ainsi la fonction $\mathfrak{P}_3$, qui définit la surface piri-

forme, s'écrira

$$P_3(\nu) + \frac{1}{4} \beta P_3^2(\nu).$$

b. Des fonctions de φ désignées par $\mathfrak{C}_i^s$ ou $\mathfrak{S}_i^s$, si i et s sont de même parité, et exprimées par des polynômes en β où le coefficient de β^k est $\cos(s \pm 2k)\varphi$ ou $\sin(s \pm 2k)\varphi$. Si i et s sont de parités différentes, on est conduit à des polynômes analogues, mais multipliés par $\sqrt{1 - \beta \cos 2\varphi}$, et les fonctions résultantes sont désignées par $\mathbf{C}_i^s$ ou $\mathbf{S}_i^s$.

La fonction de Laplace sera le produit de deux fonctions semblables de μ et ν , et de l'une quelconque des fonctions de φ : donc en tout huit solutions.

De plus, à côté des fonctions $\mathfrak{P}$ et $\mathbf{P}$ s'introduisent des fonctions de seconde espèce, $\mathfrak{Q}_i^s$ et $\mathbf{Q}_i^s$, que l'on met sous la forme de séries infinies en β , dont les coefficients sont les fonctions sphériques de seconde espèce.

On a peine à reconnaître sous cette forme les fonctions de Lamé, et il est bien difficile de s'assimiler cette méthode, malgré les avantages qu'elle présente peut-être pour les calculs ultérieurs. Remarquons qu'elle conduit à l'introduction des intégrales elliptiques de Legendre.

Dans ses deux derniers Mémoires, Darwin change un peu ses notations initiales : il désigne les axes de l'ellipsoïde de référence par $\cos \gamma$, $1 - k^2 \sin \gamma$ et 1 , et les coordonnées μ et ν par $\frac{1}{k \sin \psi}$ et $\sin \theta$. Avec ces notations, on a

$$\mathfrak{P}_3 = \frac{1 - q^2 \sin^2 \psi}{\sin^2 \psi},$$

q étant une fonction de k , d'ailleurs très compliquée.

Ajoutons que les coefficients de stabilité sont désignés par $\mathfrak{K}_i^s$ ou $\mathbf{K}_i^s$.

Enfin Darwin, dans ses calculs numériques, fait toujours le volume des Jacobiens égal à $4 \frac{\pi}{3}$. Les axes A, B, C d'un Jacobien sont alors donnés, en fonction des éléments ρ et q de M. Liapounov, par les formules

$$A^3 = \frac{\rho}{\sqrt{(\rho+1)(\rho+q)}}, \quad B^3 = \frac{\rho+q}{\sqrt{\rho(\rho+1)}}, \quad C^3 = \frac{\rho+1}{\sqrt{\rho(\rho+q)}}.$$

4° Nous emploierons, dans ce Mémoire, les notations de Poincaré, en les modifiant légèrement.

a. L'axe de rotation sera pris pour axe des x .

b. Les axes de l'ellipsoïde de référence seront a , b , o .

c. Le Jacobien critique sera défini par le paramètre ρ ; ses axes seront

désignés par A, B, C, avec $A < B < C$, et $ABC = 1$. On aura donc

$$\rho = C, \quad \sqrt{\rho^2 - b^2} = B, \quad \sqrt{\rho^2 - a^2} = A.$$

d. Nous désignerons les fonctions de Lamé, solutions de l'équation

$$(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)y'' - (2\rho^2 - b^2 - a^2)\rho y' = [n(n+1)\rho^2 - B]y,$$

par le symbole $R_{n,s}$, n étant l'ordre et s défini comme il suit :

Si R est un polynôme en ρ ,

$$s \equiv 0 \pmod{4};$$

si R est un polynôme multiplié par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$,

$$s \equiv 1 \pmod{4};$$

si R est un polynôme multiplié par $\sqrt{\rho^2 - a^2}$,

$$s \equiv 2 \pmod{4};$$

si R est un polynôme multiplié par $\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}$,

$$s \equiv 3 \pmod{4},$$

avec $s < 2n$. Il pourra y avoir ambiguïté dans certains cas : nous affecterons alors la plus petite valeur de s au polynôme ayant les plus petites racines.

Les fonctions de Lamé que nous aurons à considérer seront toutes du type $R_{n,i}$. Nous les écrirons, si n est pair,

$$(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\dots,$$

et si n est impair

$$\rho(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2)\dots,$$

les α étant tous inférieurs à b^2 .

La concordance entre les α_i et les h_i de M. Liapounov est

$$1 - h_i = \frac{\alpha_i}{a^2}.$$

Ajoutons que nous traiterons certaines questions avec les notations de M. Liapounov, sans les modifier.

Afin d'illustrer ce que nous venons de dire sur les fonctions de Lamé, nous donnons un Tableau indiquant les diverses notations pour les fonctions des ordres 0, 1, 2 et pour les plus importantes des ordres 3 et 4. La première

colonne donne la valeur de ces fonctions; les trois suivantes, les symboles employés par Poincaré dans les *Acta*, les *Figures d'équilibre* et les *Philosophical Transactions*; enfin les trois dernières indiquent les notations de Darwin, de M. Liapounov, et celles dont il sera fait usage dans ce travail.

Valeur des fonctions.	<i>Acta.</i>	<i>Fig. équil.</i>	<i>Ph. Tr.</i>	Darwin.	Liapounov.	Présent travail.
1.....		R_0	R_1	$\mathfrak{p}_0$	$E_{0,0}$	$R_{0,0}$
$\sqrt{\rho^2 - a^2}$	$R_{1,1}^{(3)}$	R_1	R_2	$\mathbf{P}_1^1$	$E_{1,0}$	$R_{1,2}$
$\sqrt{\rho^2 - b^2}$		R_2		$\mathfrak{p}_1^1$	$E_{1,1}$	$R_{1,1}$
ρ		R_3		$\mathfrak{p}_1$	$E_{1,2}$	$R_{1,0}$
$\rho^2 - \alpha_1 \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 > \alpha_2 \end{array} \right\}$	$R_{2,2}^{(1)}$	R_7	R_4	$\mathfrak{p}_2^2$	$E_{2,4}$	$R_{2,4}$
$\rho^2 - \alpha_2 \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 > \alpha_2 \end{array} \right\}$	$R_{0,2}^{(1)}$	R_8	R_3	$\mathfrak{p}_2$	$E_{2,0}$	$R_{2,0}$
$\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - a^2)}$		R_6		$\mathbf{P}_2^2$	$E_{2,1}$	$R_{2,3}$
$\rho \sqrt{\rho^2 - b^2}$	R_2	R_4		$\mathfrak{p}_2^1$	$E_{2,3}$	$R_{2,1}$
$\rho \sqrt{\rho^2 - a^2}$		R_5		$\mathbf{P}_2^1$	$E_{2,2}$	$R_{2,2}$
$\rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - a^2)}$		R_9		$\mathbf{P}_3^2$		$R_{3,3}$
$\rho(\rho^2 - \alpha), (\alpha < b^2)$	$R_{0,3}^{(1)}$	$R_{0,3}$	R_5	$\mathfrak{p}_3$		$R_{3,0}$
$(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2 < b^2)$		$R_{0,4}$		$\mathfrak{p}_4$		$R_{4,0}$

CHAPITRE I.

LES BIFURCATIONS DES ELLIPSOÏDES DE JACOBI.

La première question qui se pose au sujet des surfaces de Poincaré est la détermination des éléments de ces surfaces, c'est-à-dire des axes du Jacobien critique correspondant, ou des quantités ρ, a, b , ainsi que des α . Nous avons vu qu'entre ces inconnues ρ, a, b existaient les deux équations de Poincaré

$$(1) \quad \frac{R_{1,2} S_{1,2}}{3} = \frac{R_{2,1} S_{2,1}}{5},$$

$$(2) \quad \frac{R_{1,2} S_{1,2}}{3} = \frac{R_{n,0} S_{n,0}}{2n+1},$$

avec, comme troisième condition, la valeur donnée du volume. Darwin a résolu ces équations pour $n = 3$; M. Liapounov a donné une méthode générale pour

leur résolution et l'a appliquée à la surface de Poincaré d'ordre 4. C'est cette méthode que nous nous proposons de reprendre, de compléter et de simplifier. Traduite avec nos notations, voici de quelle façon elle se présente :

a. On commence par s'affranchir de la condition de volume, en fixant a , par exemple en faisant $a = 1$; on reviendra ensuite par une simple proportion aux axes du Jacobien ayant le volume $\frac{4\pi}{3}$.

b. A toute valeur approchée ρ_0 de ρ correspond une valeur approchée b_0 de b qu'on peut calculer au moyen de l'équation (1). On cherche alors, par des essais successifs, quel doit être ρ_0 pour que l'équation (2) soit satisfaite par ρ_0 et b_0 . Si deux valeurs ρ_1 et ρ_2 donnent à l'expression

$$(3) \quad \frac{R_{1,2} S_{1,2}}{3} - \frac{R_{n,0} S_{n,0}}{2n+1}$$

des signes différents, la vraie valeur ρ sera comprise entre ρ_1 et ρ_2 , et b entre b_1 et b_2 . L'application de la méthode comporte donc trois stades :

1° La recherche d'une solution approchée pour ρ . Sur ce point, que nous étudierons tout à l'heure, M. Liapounov n'a donné aucun renseignement.

2° Le calcul de b par l'équation (1), ρ étant donné. Ici la méthode de M. Liapounov est remarquablement pratique : nous ne la modifierons pas et n'en parlerons même pas dans ce Chapitre ; nous l'exposerons plus tard, en l'appliquant à la recherche des éléments de la surface de Poincaré d'ordre 5.

3° Le calcul de l'expression (3). Observons que la deuxième partie du calcul a déjà donné la valeur de $\frac{1}{3} R_{1,2} S_{1,2}$: il suffit donc de calculer $\frac{1}{2n+1} R_{n,0} S_{n,0}$. La formule de réduction qu'a donnée M. Liapounov est d'une grande complication et conduit à des calculs très ardu. Nous allons donner une formule de réduction beaucoup plus simple, et nous la traduirons ensuite avec les notations de M. Liapounov.

Recherche d'une solution approchée.

A mesure qu'on avance dans la série des valeurs de n , le Jacobien tend de plus en plus à s'approcher de la forme de révolution ; si l'on consulte le Tableau, dressé par Darwin, donnant les axes de divers Jacobiens, on constate qu'à partir de $C = 3$, les axes A et B sont égaux à 0,1 près. On obtiendra donc des résultats approchés satisfaisants en faisant A et B , ou a et b égaux, c'est-à-dire en assimilant le Jacobien à un ellipsoïde de révolution (1). Cela revient, avec les notations de M. Liapounov, à faire $q = 0$.

(1) Cette méthode d'approximation a été proposée par Darwin, mais il n'en dit qu'un mot et ne la développe pas.

Des deux équations de Poincaré il ne subsiste que la seconde; voyons ce qu'elle devient. A la fonction de Lamé $R_{1,2}$ se substitue la fonction adjointe de Legendre, $P_1^1 = \sqrt{r^2 - 1}$; à la fonction de seconde espèce $\frac{S_{1,2}}{3}$ se substitue la fonction adjointe de deuxième espèce

$$Q_1' = -\frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} + \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 1} \log \frac{r+1}{r-1}.$$

La première partie de l'expression devient donc

$$-r + \frac{1}{2} (r^2 - 1) \log \frac{r+1}{r-1}.$$

Quant à la deuxième partie, comme les fonctions $R_{n,0}$ ne contiennent pas de radical, elles se transforment en polynômes de Legendre d'ordre n , et les fonctions $\frac{1}{2n+1} S_{n,0}$ deviennent les fonctions de Legendre de seconde espèce, Q_n . L'équation de Poincaré deviendra donc

$$-r + \frac{1}{2} (r^2 - 1) \log \frac{r+1}{r-1} = P_n(r) Q_n(r).$$

Si l'on applique ce procédé au cas $n = 3$, cas très défavorable puisque c'est le premier, on trouve comme valeurs approchées des axes

$$C = 1,79; \quad A = B = 0,77,$$

les vraies valeurs étant

$$C = 1,88; \quad A = 0,65; \quad B = 0,81,$$

la moyenne de ces deux derniers nombres étant 0,73.

Dans le cas $n = 4$, nous trouvons comme valeurs approchées

$$C = 2,33; \quad A = B = 0,65,$$

alors que les vraies valeurs sont

$$C = 2,36; \quad A = 0,60; \quad B = 0,69,$$

la moyenne de ces deux derniers nombres étant 0,655. On sera donc certain, à partir de $n = 5$, de trouver des nombres dont la première décimale sera sûrement exacte.

Cas où n est très grand.

Lorsque n est très grand, le calcul devient très compliqué, par suite de la forme de moins en moins simple que prennent P_n et Q_n . Comme il ne s'agit toujours que de rechercher une solution approchée, on simplifiera beaucoup le calcul en remplaçant P_n et Q_n par des expressions approchées pour n grand.

On connaît la valeur approchée de P_n , lorsque n est très grand, donnée par Laplace,

$$P_n(\operatorname{ch} \theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \operatorname{sh} \theta}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right]$$

Par la formule

$$Q_n(z) = P_n(z) \int_3^\infty \frac{dt}{(t^2 - 1)[P_n(t)]^2}$$

on arrive également à la valeur approximative

$$Q_n(\operatorname{ch} \theta) = \frac{1}{2n+1} \sqrt{\frac{2n\pi}{\operatorname{sh} \theta}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right].$$

Nous aurons donc

$$P_n(z) Q_n(z) = - \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1) \operatorname{sh} \theta},$$

θ étant défini par

$$\operatorname{ch} \theta = z.$$

On pourra encore écrire

$$P_n(z) Q_n(z) = - \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1}$$

et l'équation approchée deviendra

$$- \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} = \sqrt{r^2 - 1} \left[-r + \frac{1}{2} (r^2 - 1) \log \frac{r+1}{r-1} \right]$$

avec

$$\operatorname{ch} \theta = r.$$

La résolution de cette équation ne sera plus bien compliquée; on se servira utilement des Tables de fonctions hyperboliques publiées par l'Institut Smithsonian de Washington.

Expression de la fonction de Legendre de seconde espèce.

Revenons au cas ordinaire. L'équation que nous avons à résoudre pour obtenir une solution approchée contient la fonction de seconde espèce Q_n , qui,

sous forme d'intégrale, s'écrit

$$Q_n(z) = P_n(z) \int_z^\infty \frac{dt}{(t^2 - 1)[P_n(t)]^2}$$

et peut être mise sous la forme

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \log \frac{z+1}{z-1} - f_{n-1}(z),$$

où f_{n-1} est un polynôme de degré $n-1$. Diverses expressions de ce polynôme ont été données; la plupart contiennent les polynômes de Legendre de degrés inférieurs à n . Ainsi, la formule de Christoffel est

$$f_{n-1}(z) = \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(z) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(z) + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5}(z) + \dots,$$

celle de Schäfli et Hermite est

$$f_{n-1}(z) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} P_{n-i}(z) P_{i-1}(z).$$

Toutes ces expressions sont compliquées, et la formation par ce moyen du polynôme f_{n-1} , donc de Q_n , est longue et fastidieuse. Nous allons démontrer que f_{n-1} est susceptible d'une forme beaucoup plus simple, et pour cela introduire le polynôme $B_n(z)$, de degré inférieur à n , dépendant de P_n par l'identité

$$(1) \quad A_n(z) P_n(z) + B_n(z) P'_n(z) \equiv 1,$$

A_n étant un polynôme de degré inférieur à $n-1$.

Nous commencerons par démontrer la propriété suivante :

Entre deux polynômes B correspondant à deux polynômes de Legendre de degrés consécutifs existe la relation de récurrence

$$(2) \quad P_{n-1}(z) B_n(z) - P_n(z) B_{n-1}(z) + \frac{z^2-1}{n} = 0.$$

Le premier membre est un polynôme en z de degré $2n-2$: nous allons démontrer qu'il s'annule pour $2n-1$ valeurs de z , à savoir les n racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, de $P_n(z)$ et les $n-1$ racines $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$, de $P_{n-1}(z)$. On a en effet, d'après (1),

$$B_n(\alpha_i) = \frac{1}{P'_n(\alpha_i)}.$$

Pour $z = \alpha_i$, l'expression (2) deviendra donc

$$\frac{P_{n-1}(\alpha_i)}{P'_n(\alpha_i)} + \frac{\alpha_i^2 - 1}{n};$$

elle est nulle d'après l'une des formules de récurrence des fonctions de Legendre,

$$(z^2 - 1)P'_n(z) = n z P_n(z) - n P_{n-1}(z).$$

De même, pour une racine β , on aura

$$B_{n-1}(\beta_i) = \frac{1}{P'_{n-1}(\beta_i)}.$$

et l'expression (2) devient

$$-\frac{P_n(\beta_i)}{P'_{n-1}(\beta_i)} + \frac{\beta_i^2 - 1}{n};$$

elle est également nulle, en vertu de la formule de récurrence déjà citée, et de la suivante :

$$z P'_n(z) - P'_{n-1}(z) = n P_n(z),$$

d'où l'on tire en effet

$$(z^2 - 1)P'_{n-1}(z) - n P_n(z) = n z P_{n-1}(z).$$

Dans la formule (2), qui se trouve ainsi démontrée, faisons alors $z = 1$: sachant que $P_n(1) = 1$, nous en tirons

$$B_n(1) = B_{n-1}(1)$$

et, comme $B_1(z) = 1$,

$$B_n(1) = 1.$$

De même, faisant $z = -1$, et nous souvenant que $P_n(-1) = (-1)^n$, nous obtenons

$$B_n(-1) = (-1)^{n+1}$$

Ceci posé, considérons Q_n sous forme d'intégrale, et écrivons, la variable d'intégration étant t ,

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \int_z^\infty \frac{A_n P_n + B_n P'_n}{P'_n} \frac{dt}{t^2 - 1}.$$

Intégrons par parties le terme contenant P'_n ; nous obtenons

$$(3) \quad \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{B_n(z)}{(z^2 - 1)P_n(z)} + \int_z^\infty \left[\frac{A_n + B'_n}{P_n} - \frac{2tB_n}{(t^2 - 1)P_n} \right] \frac{dt}{t^2 - 1}.$$

De l'identité (1) nous dérivons

$$(4) \quad A_n P'_n + A'_n P_n + B_n P''_n + B'_n P'_n = 0,$$

d'où

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = -\frac{A'_n}{P'_n} - \frac{B_n P''_n}{P_n P'_n}.$$

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ les racines de P_n , et $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ celles de P'_n . On sait que les racines de ces deux polynômes sont toutes simples. Nous écrirons, par décomposition en éléments simples,

$$\begin{aligned} \frac{A'_n}{P'_n} &= \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{A'_n(b_i)}{P'_n(b_i)} \frac{1}{z - b_i}, \\ \frac{B_n P''_n}{P_n P'_n} &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{B_n(a_i) P''_n(a_i)}{[P'_n(a_i)]^2 (z - a_i)} + \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{B_n(b_i)}{P_n(b_i)} \frac{1}{z - b_i}, \end{aligned}$$

donc, les sommes portant sur les b se détruisant en vertu de (4),

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{B_n(a_i) P''_n(a_i)}{[P'_n(a_i)]^2} \frac{1}{z - a_i}.$$

Or nous tirons de l'équation différentielle de Legendre la relation suivante :

$$\frac{P''_n(a_i)}{P'_n(a_i)} = - \frac{2a_i}{a_i^2 - 1};$$

donc

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2a_i B_n(a_i)}{(a_i^2 - 1) P'_n(a_i)} \frac{1}{z - a_i}.$$

Considérons alors la fraction rationnelle

$$\frac{2z B_n(z)}{(z^2 - 1) P_n(z)}$$

et décomposons-la en éléments simples; nous obtenons, en tenant compte des résultats que nous avons établis sur $B_n(1)$ et $B_n(-1)$,

$$\frac{2z B_n(z)}{(z^2 - 1) P_n(z)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2a_i B_n(a_i)}{(a_i^2 - 1) P'_n(a_i)} \frac{1}{z - a_i} + \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1}.$$

d'où

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} - \frac{2zB_n}{(z^2 - 1)P_n} = \frac{1}{z + 1} - \frac{1}{z - 1}.$$

Le premier membre est justement l'expression entre crochets dans l'intégrale figurant dans la formule (3), et par conséquent nous obtenons en intégrant,

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{B_n(z)}{(z^2 - 1)P_n(z)} + \frac{1}{2} \log \frac{z + 1}{z - 1} - \frac{z}{z^2 - 1}$$

ou

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \log \frac{z + 1}{z - 1} - \frac{z P_n(z) - B_n(z)}{z^2 - 1}.$$

C'est là une expression très simple de Q_n , et nous voyons que

$$f_{n-1}(z) = \frac{z P_n(z) - B_n(z)}{z^2 - 1}.$$

En utilisant la formule de récurrence que nous avons établie pour la fonction B , nous trouvons la formule de récurrence pour f :

$$f_{n-1}(z) P_{n-1}(z) - f_{n-2}(z) P_n(z) = \frac{1}{n}.$$

Au moyen de cette formule, il sera possible de donner à f_{n-1} la forme suivante :

$$f_{n-1}(z) = \frac{1}{P_1 P_2 \dots P_{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -P_2 & P_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -P_3 & P_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -P_{n-1} & P_{n-2} & \frac{1}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -P_n & \frac{1}{n} \end{vmatrix},$$

le déterminant contenant n lignes. En le simplifiant à l'aide de la formule de récurrence liant trois polynomes de Legendre consécutifs, nous obtiendrons f_{n-1}

sous la forme très simple d'un déterminant à $(n-1)$ lignes :

$$f_{n-1}(z) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 3z & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5z & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 7z & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9z & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 11z & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (2n-1)z \end{vmatrix}$$

Signalons également les formules suivantes, aisées à établir, donnant les polynômes A_n et B_n , sous forme de déterminants, le premier à $(n-2)$ lignes, le second à $(n-1)$ lignes ⁽¹⁾ :

$$A_n(z) = -\frac{2}{(n-1)!} \begin{vmatrix} 5z & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 7z & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 5 & 9z & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 6 & 11z & 5 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{vmatrix},$$

$$B_n(z) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 2z & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 5z & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 7z & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & 9z & 5 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}$$

Le calcul des éléments approchés des Jacobiens critiques sera beaucoup simplifié par l'emploi de ces formules.

Réduction de la fonction de Lamé de seconde espèce.

Nous avons vu que, pour le calcul des éléments exacts, il faut calculer, entre autres termes, l'expression

$$\frac{1}{2n+1} R_{n,0} S_{n,0},$$

et par conséquent la fonction de Lamé de seconde espèce, d'ordre n , liée à R_n

⁽¹⁾ La seconde de ces expressions nous a été communiquée par M. Whittaker, professeur à l'Université d'Edimbourg, à la suite d'un échange de vues sur la question.

par la formule

$$S = (2n + 1)R \int_{\rho}^{\infty} \frac{dt}{R^2(t) \sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}}.$$

Les fonctions $R_{n,0}$ que nous avons à considérer étant des polynômes en ρ , nous pouvons chercher à appliquer à la fonction $S_{n,0}$ le procédé de réduction qui nous a réussi pour la fonction de Legendre de seconde espèce.

D'une façon générale, considérons une fonction de Lamé du type $R_{n,4i}$, c'est-à-dire un polynôme en ρ , et la fonction de seconde espèce correspondante. Nous les désignerons par R et S , supprimant momentanément les indices pour simplifier l'écriture. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ les racines de R , ou compris s'il y a lieu. Nous poserons

$$W(\rho) = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}.$$

L'équation de Lamé s'écrivant alors

$$W^2 R'' + WW'R' - [n(n+1)\rho^2 + K]R = 0,$$

nous avons la relation

$$\frac{R''(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)} = -\frac{W'(\alpha_i)}{W(\alpha_i)}.$$

D'ailleurs

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \int_{\rho}^{\infty} \frac{dt}{R^2 W},$$

la variable d'intégration étant t .

Introduisons les polynômes A et B , de degrés respectivement inférieurs aux degrés de R' et R , et définis par l'identité

$$(1) \quad AR + BR' \equiv 1.$$

Écrivons alors

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \int \left(\frac{A}{R} + \frac{BR'}{R^2} \right) \frac{dt}{W}$$

ou, après une intégration par parties,

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \frac{B}{RW} + \int \frac{dt}{W} \left(\frac{A+B'}{R} - \frac{BW'}{RW} \right)$$

La décomposition en éléments simples, jointe aux propriétés exprimées par l'identité obtenue en dérivant l'identité (1), nous donne

$$\frac{A+B'}{R} = - \sum \frac{B(\alpha_i) R''(\alpha_i)}{R'^2(\alpha_i)} \frac{1}{\rho - \alpha_i}$$

et, par conséquent,

$$\frac{A+B'}{R} = \sum \frac{B(\alpha_i) W'(\alpha_i)}{W(\alpha_i) R'(\alpha_i)} \frac{1}{\rho - \alpha_i}.$$

Si nous décomposons en éléments simples l'expression $\frac{2WW'B}{W^2R}$, qui est une fraction rationnelle, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{W'B}{WR} = & \frac{1}{2} \left[\frac{B(a)}{R(a)} \frac{1}{\rho - a} + \frac{B(-a)}{R(-a)} \frac{1}{\rho + a} + \frac{B(b)}{R(b)} \frac{1}{\rho - b} + \frac{B(-b)}{R(-b)} \frac{1}{\rho + b} \right] \\ & + \sum \frac{B(\alpha_i) W'(\alpha_i)}{W(\alpha_i) R'(\alpha_i)} \frac{1}{\rho - \alpha_i}. \end{aligned}$$

Nous en tirons la valeur de $\frac{A+B'}{R}$ et, portant dans l'intégrale à calculer, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{S}{(2n+1)R} = & \frac{B}{RW} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{W} \left[\frac{B(a)}{R(a)} \frac{1}{t-a} + \frac{B(-a)}{R(-a)} \frac{1}{t+a} \right. \\ & \left. + \frac{B(b)}{R(b)} \frac{1}{t-b} + \frac{B(-b)}{R(-b)} \frac{1}{t+b} \right]. \end{aligned}$$

Or, si n est pair, R ne contient que des termes de degrés pairs en ρ , et B ne contient que des termes de degrés impairs. Si n est impair, c'est le contraire. Dans les deux cas, on a

$$\begin{aligned} \frac{B(a)}{R(a)} &= - \frac{B(-a)}{R(-a)}, \\ \frac{B(-b)}{R(-b)} &= - \frac{B(b)}{R(b)}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \frac{B}{RW} - a \frac{B(a)}{R(a)} \int \frac{dt}{W} \frac{1}{t^2 - a^2} - b \frac{B(b)}{R(b)} \int \frac{dt}{W} \frac{1}{t^2 - b^2}.$$

Mais rappelons-nous que

$$R_{1,2} = \sqrt{\rho^2 - a^2},$$

$$R_{1,1} = \sqrt{\rho^2 - b^2}.$$

Par conséquent

$$\int \frac{dt}{W} \frac{1}{t^2 - a^2} = \frac{S_{1,2}}{3R_{1,2}},$$

$$\int \frac{dt}{W} \frac{1}{t^2 - b^2} = \frac{S_{1,1}}{3R_{1,1}};$$

H.

d'où la formule de réduction suivante, donnant $S_{n,4i}$ en fonction de $S_{1,1}$ et $S_{1,2}$

$$\frac{S_{n,4i}(\rho)}{2n+1} = \frac{B_{n,4i}(\rho)}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}} - \frac{a}{3} \frac{B_{n,4i}(a)}{R_{n,4i}(a)} \frac{S_{1,2}(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} R_{n,4i}(\rho) \\ - \frac{b}{3} \frac{B_{n,4i}(b)}{R_{n,4i}(b)} \frac{S_{1,1}(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} R_{n,4i}(\rho).$$

L'application de cette formule nécessite donc le calcul de $S_{1,1}$ et $S_{1,2}$. Or, dans le cas qui nous occupe, nous avons vu qu'avant de passer à la deuxième équation de Poincaré on avait dû considérer la première équation, et par conséquent calculer les fonctions $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$. Ce qui serait utile actuellement, ce serait donc une formule de réduction donnant $S_{n,0}$ en fonction de $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$; nous allons la rechercher tout à l'heure. La formule que nous venons d'établir n'est donc d'aucune utilité pratique pour nous; nous l'avons donnée néanmoins, d'abord à cause de sa simplicité; ensuite parce qu'elle est valable, que n soit pair ou impair, à l'inverse des formules que nous établirons ultérieurement; enfin parce qu'elle sera peut-être utile dans d'autres théories.

Avant d'abandonner cette expression, signalons l'élégante formule qu'on en tire en faisant $n = 1$:

$$\frac{S_{1,0}}{R_{1,0}} + \frac{S_{1,1}}{R_{1,1}} + \frac{S_{1,2}}{R_{1,2}} = \frac{3}{R_{3,3}}.$$

Afin de faire connaître quelque peu les méthodes de Darwin, nous allons transcrire cette formule avec ses notations, et la démontrer directement en utilisant les expressions qu'il a données pour les fonctions de Lamé.

En nous reportant au Tableau de concordance de l'Introduction, et en nous souvenant que les fonctions de seconde espèce introduites par Darwin diffèrent des fonctions S par le facteur $\frac{1}{2n+1}$, nous écrirons notre formule

$$\frac{Q_1}{P_1} + \frac{Q'_1}{P'_1} + \frac{Q''_1}{P''_1} = \frac{1}{P^2_3}.$$

Or, d'après Darwin,

$$P_1 = \frac{1}{K \sin \psi}, \\ P'_1 = \frac{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \psi}}{K \sin \psi}, \\ P''_1 = \frac{\cot \psi}{K}.$$

Quant aux fonctions de seconde espèce, Darwin, posant

$$K' = \sqrt{1 - K^2}, \\ \Delta = \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \psi},$$

donne leurs valeurs sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_1 &= \frac{K}{\sin^2 \psi} \left(\frac{1}{K^2} F - \frac{1}{K^2} E \right), \\ \mathfrak{P}_1' \mathfrak{Q}_1' &= \frac{K \Delta^2}{\sin^2 \psi} \left(-\frac{1}{K^2} F + \frac{1}{K^2 K'^2} E - \frac{\sin \psi \cos \psi}{K'^2 \Delta} \right), \\ \mathbf{P}_1' \mathbf{Q}_1' &= K \cot^2 \psi \left(\frac{1}{K'^2} \Delta \tan \psi - \frac{1}{K'^2} E \right). \end{aligned}$$

E et F sont des intégrales elliptiques, du type de Legendre, $\int \Delta d\psi$ et $\int \frac{d\psi}{\Delta}$.

De plus,

$$\mathbf{P}_3^2 = \frac{\Delta \cos \psi}{K^3 \sin^3 \psi}.$$

Portant dans notre formule, nous trouvons

$$\begin{aligned} (KF - KE) + \left(\frac{K}{K'} E - KF - \frac{K^3}{K'^2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta} \right) \\ + \left(\frac{K^3}{K'^2} \Delta \tan \psi - \frac{K^3}{K'^2} E \right) = K^3 \frac{\sin^3 \psi}{\Delta \cos \psi}. \end{aligned}$$

Les termes en F disparaissent; quant à E, il a pour coefficient

$$-K + \frac{K}{K'^2} - \frac{K^3}{K'^2} = \frac{-K(1 - K^2) + K - K^3}{K'^2} = 0.$$

Il vient donc, en divisant par K^3 ,

$$\Delta \tan \psi - \frac{1}{\Delta} \sin \psi \cos \psi = K'^2 \frac{\sin^3 \psi}{\Delta \cos \psi}$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta^2 - \cos^2 \psi &= (1 - K^2) \sin^2 \psi, \\ 1 - K^2 \sin^2 \psi - \cos^2 \psi &= (1 - K^2) \sin^2 \psi. \end{aligned} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Nouvelle formule de réduction.

Cas de n pair.

Cherchons donc à obtenir une formule de réduction introduisant les fonctions déjà calculées, c'est-à-dire les produits

$$M = \frac{R_{1,2} S_{1,2}}{3}$$

et

$$N = \frac{R_{2,1} S_{2,1}}{3}.$$

D'après la première équation de Poincaré, ces deux expressions sont égales.

Lorsque n est pair, on a

$$R_{n,0} = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \dots$$

Posons $\rho^2 = r$, et prenons désormais r comme variable. $R_{n,0}$, considéré comme fonction de r , satisfait alors à l'équation différentielle

$$r(r - b^2)(r - a^2)y'' + \frac{1}{2}(3r^2 - 2b^2r - 2a^2r + a^2b^2)y' - \frac{1}{4}[n(n+1)r + K]y = 0.$$

Si nous posons

$$F(r) = \sqrt{r(r - b^2)(r - a^2)},$$

nous aurons

$$M = N = \frac{r - a^2}{2} \int_r^\infty \frac{dt}{(t - a^2)F(t)} = \frac{r(r - b^2)}{2} \int_r^\infty \frac{dt}{t(t - b^2)F(t)}$$

et

$$S_{n,0}(r) = \frac{2n+1}{2} R_{n,0}(r) \int_r^\infty \frac{dt}{F(t)} \frac{1}{R^2(t)}.$$

Tout ce qui suit s'applique d'ailleurs à toute fonction $S_{n,4i}$ quand n est pair.

De l'équation de Lamé nous tirons

$$(1) \quad \frac{F'(\alpha_i)}{F(\alpha_i)} = - \frac{R''(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)}.$$

Comme nous l'avons fait plus haut, introduisons les polynômes A et B par l'identité fondamentale

$$AR + BR' \equiv 1.$$

Nous allons commencer par démontrer une propriété du polynôme B , dont nous aurons à faire usage dans la suite.

Écrivons, par décomposition en éléments simples,

$$\frac{B(r)}{rR(r)} = \frac{B(0)}{rR(0)} + \sum \frac{B(\alpha_i)}{\alpha_i R'(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i};$$

mais, d'après l'identité fondamentale,

$$B(\alpha_i) = \frac{1}{R'(\alpha_i)};$$

donc

$$\frac{B(r)}{rR(r)} = \frac{B(o)}{rR(o)} + \sum \frac{1}{\alpha_i R'^2(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i}.$$

Multiplions les deux membres par r et faisons tendre r vers l'infini : observons que le degré de B est inférieur à celui de r et par conséquent que le premier membre tendra vers zéro. Nous obtenons

$$\frac{B(o)}{R(o)} = \sum \frac{1}{\alpha_i R'^2(\alpha_i)}.$$

Le même procédé nous permettra d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{B(b^2)}{R(b^2)} &= \sum \frac{1}{(\alpha_i - b^2) R'^2(\alpha_i)}, \\ \frac{B(a^2)}{R(a^2)} &= \sum \frac{1}{(\alpha_i - a^2) R'^2(\alpha_i)}. \end{aligned}$$

Or la relation (1), que nous avons tirée de l'équation de Lamé, peut s'écrire

$$\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i - b^2} + \frac{1}{\alpha_i - a^2} = -2 \frac{R''(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)}.$$

Multipliant par $R'^2(\alpha_i)$ au dénominateur et sommant, nous obtenons

$$\frac{B(o)}{R(o)} + \frac{B(b^2)}{R(b^2)} + \frac{B(a^2)}{R(a^2)} = -2 \sum \frac{R''(\alpha_i)}{R'(\alpha_i)},$$

somme qui est nulle, comme étant la somme des résidus de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{R^2(r)}$.

Nous pouvons donc écrire la formule

$$(2) \quad \frac{B(o)}{R(o)} + \frac{B(b^2)}{R(b^2)} + \frac{B(a^2)}{R(a^2)} = 0;$$

c'est celle que nous voulions obtenir.

Ceci posé, nous écrirons

$$(3) \quad \frac{S}{(2n+1)R} = \frac{1}{2} \int \frac{AR + BR'}{R^2} \frac{dt}{F} = \frac{B}{2FR} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{A+B'}{R} - \frac{BF'}{RF} \right) \frac{dt}{F}.$$

D'autre part,

$$\frac{A+B'}{R} = - \sum \frac{B(\alpha_i) R''(\alpha_i)}{R'^2(\alpha_i) (r - \alpha_i)} = \sum \frac{B(\alpha_i) F'(\alpha_i)}{R'(\alpha_i) F(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i},$$

Si nous décomposons en ses éléments simples la fraction rationnelle

$${}_2 \frac{B(r) F(r) F'(r)}{R(r) F^2(r)},$$

nous trouverons

$$\sum \frac{B(\alpha_i) F'(\alpha_i)}{R'(\alpha_i) F(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i} = \frac{B(r) F'(r)}{R(r) F(r)} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{B(0)}{R(0)} + \frac{1}{r - b^2} \frac{B(b^2)}{R(b^2)} + \frac{1}{r - a^2} \frac{B(a^2)}{R(a^2)} \right].$$

Portons ces expressions dans (3) et tenons compte de la formule (2); nous pourrons écrire

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \frac{B}{2FR} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{F} \left\{ - \frac{B(a^2) F'}{R(a^2) F} + \frac{3}{t - a^2} \frac{B(a^2)}{R(a^2)} + \frac{b^2}{t(t - b^2)} \left[\frac{B(b^2)}{R(b^2)} - \frac{B(0)}{R(0)} \right] \right\},$$

ce qui donne

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \frac{B}{2FR} + \frac{B(a^2)}{4FR(a^2)} + \frac{3}{2} \frac{B(a^2)}{R(a^2)} M + \frac{b^2}{2} \left[\frac{B(b^2)}{R(b^2)} - \frac{B(0)}{R(0)} \right] N.$$

Faisant $N = M$; nous verrons alors, en remontant par un calcul inverse, que le coefficient de M est

$$- \frac{1}{2} \frac{B(a^2) F'}{R(a^2) F} - \frac{BF'}{RF} + \frac{A + B'}{R}.$$

Nous avons ainsi obtenu une expression de S en fonction de M , quantité déjà connue. Si nous portons cette expression dans la seconde équation de Poincaré, dont le premier membre, c'est-à-dire le *coefficient de stabilité* d'ordre n , est

$$\mathcal{C}(r) = M - \frac{RS}{2n+1},$$

nous obtenons

$$\mathcal{C}(r) = M \left[1 + \frac{B(a^2)}{2R(a^2)} \frac{F'R^2}{F} + \frac{BRF'}{F} - AR - B'R \right] - \frac{BR}{2F} - \frac{B(a^2)}{4R(a^2)} \frac{R^2}{F};$$

la quantité entre crochets se simplifie en vertu de l'identité fondamentale, et si nous posons

$$\frac{1}{2} \frac{B(a^2)}{R(a^2)} + \frac{B(r)}{R(r)} = F(r) \Pi(r),$$

nous pourrions écrire

$$\varepsilon(r) = - \frac{R^2(r)}{2} [{}_2M F(r) \Pi'(r) + \Pi(r)].$$

C'est là une expression très simple pour le coefficient de stabilité. En la transcrivant avec les notations de M. Liapounov, nous verrons combien la formule donnée par cet auteur est compliquée en comparaison. Mais nous allons traiter auparavant le cas de n impair.

Cas de n impair.

Dans ce cas, plus compliqué, nous avons

$$R_{n,0}(\rho) = \rho(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \dots$$

et, en prenant encore pour variable $\rho^2 = r$,

$$R(r) = \sqrt{r}(r - \alpha_1)(r - \alpha_2) \dots$$

Nous poserons

$$R(r) = \sqrt{r} \Psi(r)$$

et nous reprendrons la notation

$$F(r) = \sqrt{r(r - b^2)(r - a^2)}.$$

L'équation de Lamé nous donnera les relations

$$\frac{\Psi''(\alpha_i)}{\Psi'(\alpha_i)} = - \frac{1}{\alpha_i} - \frac{F'(\alpha_i)}{F(\alpha_i)}.$$

Nous introduirons alors les deux polynômes $\mathfrak{A}(r)$ et $\mathfrak{B}(r)$, de degrés respectivement inférieurs à ceux de Ψ' et Ψ , tels que

$$\mathfrak{A}(r) \Psi(r) + \mathfrak{B}(r) \Psi'(r) \equiv 1.$$

Nous écrirons alors

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \int_r^\infty \frac{dt}{R^2 F} = \int \frac{dt}{t \Psi^2 F} = \int \frac{\mathfrak{A} \Psi + \mathfrak{B} \Psi'}{t \Psi^2} \frac{dt}{F},$$

ou, après une intégration par parties,

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \frac{\mathfrak{B}}{r \Psi F} + \int \left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}{t \Psi} - \frac{\mathfrak{B}}{t^2 \Psi} - \frac{\mathfrak{B} F'}{t \Psi F} \right) \frac{dt}{F}.$$

Nous poserons momentanément

$$f(r) = F^2(r) = r(r - a^2)(r - b^2).$$

Afin de faire apparaître les termes qui figurent dans l'intégrale, nous décomposerons en éléments simples l'expression

$$\frac{\mathfrak{B} f'}{r \Psi f} = \frac{\mathfrak{B}(0) f'}{r \Psi(0) f}.$$

On a, en remarquant qu'il y a une racine double, $r = 0$, d'où une complication plus grande que dans le cas précédent,

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{B} f'}{r \Psi f} = \sum \frac{\mathfrak{B}(\alpha_i) f'(\alpha_i)}{\alpha_i \Psi'(\alpha_i) f(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i} + \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{a^2 \Psi'(a^2)} \frac{1}{r - a^2} + \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{b^2 \Psi'(b^2)} \frac{1}{r - b^2} + \frac{\mathfrak{B}(0)}{r^2 \Psi(0)} \\ + \frac{\mathfrak{B}'(0)}{r \Psi(0)} + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{B}(0) f''(0)}{r \Psi(0) f'(0)} - \frac{\mathfrak{B}(0) \Psi'(0)}{r \Psi^2(0)} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\mathfrak{B}(0) f'}{r \Psi(0) f} = \frac{\mathfrak{B}(0)}{r^2 \Psi(0)} + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{B}(0) f''(0)}{r \Psi(0) f'(0)} + \frac{\mathfrak{B}(0)}{a^2 \Psi(0)} \frac{1}{r - a^2} + \frac{\mathfrak{B}(0)}{b^2 \Psi(0)} \frac{1}{r - b^2}.$$

Nous en tirerons

$$\begin{aligned} \sum \frac{\mathfrak{B}(\alpha_i) f'(\alpha_i)}{\alpha_i \Psi'(\alpha_i) f(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i} = \frac{\mathfrak{B} f'}{r \Psi f} - \frac{\mathfrak{B}(0) f'}{r \Psi(0) f} - \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{a^2 \Psi'(a^2)} \frac{1}{r - a^2} - \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{b^2 \Psi'(b^2)} \frac{1}{r - b^2} \\ - \frac{\mathfrak{B}(0)}{r \Psi(0)} + \frac{\mathfrak{B}(0) \Psi'(0)}{r \Psi^2(0)} + \frac{\mathfrak{B}(0)}{a^2 \Psi(0)} \frac{1}{r - a^2} + \frac{\mathfrak{B}(0)}{b^2 \Psi(0)} \frac{1}{r - b^2}. \end{aligned}$$

Les relations que nous avons tirées de l'équation de Lamé nous permettent d'écrire d'autre part

$$\sum \frac{\mathfrak{B}(\alpha_i) f'(\alpha_i)}{\alpha_i \Psi'(\alpha_i) f(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i} = -2 \sum \frac{\mathfrak{B}(\alpha_i) \Psi''(\alpha_i)}{\alpha_i \Psi'^2(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i} - 2 \sum \frac{\mathfrak{B}(\alpha_i)}{\alpha_i^2 \Psi'(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i}.$$

La décomposition en éléments simples nous permet d'ailleurs d'écrire la relation suivante :

$$\frac{\mathfrak{B} \Psi''}{r \Psi \Psi'} = \sum \frac{\mathfrak{B}(\alpha_i) \Psi''(\alpha_i)}{\alpha_i \Psi'^2(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i} + \sum \frac{\mathfrak{B}(\beta_i)}{\beta_i \Psi(\beta_i)} \frac{1}{r - \beta_i} + \frac{\mathfrak{B}(0) \Psi''(0)}{r \Psi(0) \Psi'(0)},$$

les β_i étant les racines de Ψ' , ainsi que

$$\frac{\mathfrak{B}}{r^2 \Psi} = \sum \frac{\mathfrak{B}(\alpha_i)}{\alpha_i^2 \Psi'(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i} + \frac{\mathfrak{B}(0)}{r^2 \Psi(0)} + \frac{\mathfrak{B}'(0)}{r \Psi'(0)} - \frac{\mathfrak{B}(0) \Psi'(0)}{r \Psi^2(0)}.$$

D'ailleurs

$$\sum \frac{\mathfrak{B}(\beta_i)}{\beta_i \Psi'(\beta_i)(r - \beta_i)} = - \sum \frac{\mathfrak{A}'(\beta_i)}{\beta_i \Psi''(\beta_i)} \frac{1}{r - \beta_i}$$

et

$$\frac{\mathfrak{A}'}{r \Psi'} = \sum \frac{\mathfrak{A}'(\beta_i)}{\beta_i \Psi''(\beta_i)} \frac{1}{r - \beta_i} + \frac{\mathfrak{A}'(0)}{r \Psi'(0)}.$$

Toutes ces relations nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \sum \frac{\mathfrak{B}(\alpha_i) f'(\alpha_i)}{\alpha_i \Psi'(\alpha_i) f(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i} = & - \frac{2 \mathfrak{B} \Psi''}{r \Psi \Psi'} + \frac{2 \mathfrak{B}(0) \Psi''(0)}{r \Psi(0) \Psi'(0)} - \frac{2 \mathfrak{B}}{r^2 \Psi} + \frac{2 \mathfrak{B}(0)}{r^2 \Psi(0)} \\ & + \frac{2 \mathfrak{B}'(0)}{r \Psi'(0)} - \frac{2 \mathfrak{B}(0) \Psi'(0)}{r \Psi^2(0)} - \frac{2 \mathfrak{A}'}{r \Psi'} + \frac{2 \mathfrak{A}'(0)}{r \Psi'(0)}, \end{aligned}$$

ou enfin, après réductions, en tenant compte de l'identité fondamentale,

$$\sum \frac{\mathfrak{B}(\alpha_i) f'(\alpha_i)}{\alpha_i \Psi'(\alpha_i) f(\alpha_i)} \frac{1}{r - \alpha_i} = \frac{2 \mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}{r \Psi} - \frac{2 \mathfrak{B}}{r^2 \Psi} + \frac{2 \mathfrak{B}(0)}{r^2 \Psi(0)} - \frac{2}{r \Psi^2(0)}.$$

Comparant alors les deux expressions que nous avons trouvées pour cette somme et reprenant la notation F , en nous souvenant que

$$\frac{f'}{f} = \frac{F'}{F},$$

nous obtenons la relation

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{2 \mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}{r \Psi} - \frac{2 \mathfrak{B}}{r^2 \Psi} - \frac{2 \mathfrak{B} F'}{r \Psi F} \\ & = \frac{2}{r^2 \Psi(0)} - \frac{2 \mathfrak{B}(0)}{r^2 \Psi(0)} - \frac{2 \mathfrak{B}(0) F'}{r \Psi(0) F} - \frac{\mathfrak{B}'(0)}{r \Psi'(0)} + \frac{\mathfrak{B}(0) \Psi'(0)}{r \Psi^2(0)} \\ & \quad - \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{a^2 \Psi(a^2)} \frac{1}{r - a^2} - \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{b^2 \Psi(b^2)} \frac{1}{r - b^2} + \frac{\mathfrak{B}(0)}{a^2 \Psi(0)} \frac{1}{r - a^2} + \frac{\mathfrak{B}(0)}{b^2 \Psi(0)} \frac{1}{r - b^2}. \end{aligned}$$

Nous avons au premier membre l'expression qui figure dans l'intégrale que nous voulons réduire. En y portant cette valeur et en effectuant une intégration

par parties; nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{{}_2S}{(2n+1)R} &= {}_2 \frac{\mathfrak{B}}{r\Psi F} - {}_2 \frac{\mathfrak{B}(o)}{r\Psi(o)F} \\ &+ \int_r^\infty \frac{dt}{F} \left[\frac{{}_2}{t\Psi^2(o)} - \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{a^2\Psi(a^2)} \frac{1}{t-a^2} - \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{b^2\Psi(b^2)} \frac{1}{t-b^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathfrak{B}(o)}{a^2\Psi(o)} \frac{1}{t-a^2} + \frac{\mathfrak{B}(o)}{b^2\Psi(o)} \frac{1}{t-b^2} - \frac{\mathfrak{B}'(o)}{t\Psi(o)} + \frac{\mathfrak{B}(o)\Psi'(o)}{t\Psi^2(o)} \right]. \end{aligned}$$

Nous simplifierons l'expression entre crochets en nous servant de la formule (1) ci-dessus. Multiplions par r les deux membres de cette égalité, et faisons ensuite r infini. Nous obtenons

$$(2) \quad \frac{{}_2}{\Psi^2(o)} - \frac{\mathfrak{B}'(o)}{\Psi(o)} + \frac{\mathfrak{B}(o)\Psi'(o)}{\Psi^2(o)} + \frac{\mathfrak{B}(o)}{a^2\Psi(o)} + \frac{\mathfrak{B}(o)}{b^2\Psi(o)} - \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{a^2\Psi(a^2)} - \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{b^2\Psi(b^2)} = 0.$$

C'est cette formule qui va jouer ici le rôle que jouait, pour n pair, la formule

$$\frac{B(o)}{R(o)} + \frac{B(b^2)}{R(b^2)} + \frac{B(a^2)}{R(a^2)} = 0.$$

Afin de simplifier l'écriture, posons pour un instant

$$\begin{aligned} \frac{{}_2}{\Psi^2(o)} - \frac{\mathfrak{B}'(o)}{\Psi(o)} + \frac{\mathfrak{B}(o)\Psi'(o)}{\Psi^2(o)} &= l, \\ \frac{\mathfrak{B}(o)}{a^2\Psi(o)} - \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{a^2\Psi(a^2)} &= m, \\ \frac{\mathfrak{B}(o)}{b^2\Psi(o)} - \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{b^2\Psi(b^2)} &= n. \end{aligned}$$

La formule (2) s'écrira alors

$$(3) \quad l + m + n = 0,$$

et l'expression figurant entre crochets sous le signe d'intégration s'écrira

$$\frac{l}{t} + \frac{m}{t-a^2} + \frac{n}{t-b^2},$$

ce qui, en se servant de (3), pourra être mis sous la forme

$$\frac{3}{2} \frac{m}{t-a^2} - \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-b^2} + \frac{1}{t-a^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{b^2}{t(t-b^2)} (n-l)$$

ou

$$-m \frac{F'}{F} + \frac{3}{2} \frac{m}{t-a^2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{t(t-b^2)} (n-l).$$

En portant cette valeur dans l'intégrale, nous ferons apparaître les quantités M et N , et nous obtiendrons

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \frac{\mathfrak{B}}{r\Psi F} - \frac{\mathfrak{B}(0)}{r\Psi(0)F} - \frac{1}{2} \frac{m}{F} + \frac{3}{2} \frac{m}{r-a^2} M + \frac{1}{2} \frac{b^2}{r(r-b^2)} (n-l) N.$$

Comme $M = N$, l'expression qui multiplie M est

$$\frac{3}{2} \frac{m}{r-a^2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{r(r-b^2)} (n-l) = m \frac{F'}{F} + \frac{l}{r} + \frac{m}{r-a^2} + \frac{n}{r-b^2},$$

ce qui est égal, d'après (1), à

$$2 \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}{r\Psi} - 2 \frac{\mathfrak{B}}{r^2\Psi} - 2 \frac{\mathfrak{B}F'}{r\Psi F} + 2 \frac{\mathfrak{B}(0)}{r^2\Psi(0)} + 2 \frac{\mathfrak{B}(0)}{r\Psi(0)} \frac{F'}{F} - \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{a^2\Psi(a^2)} \frac{F'}{F}.$$

Le coefficient de stabilité étant

$$\mathcal{C}(r) = M - \frac{RS}{2n+1} = M - \sqrt{r} \frac{\Psi S}{2n+1},$$

nous aurons, en portant dans cette expression la valeur trouvée pour S , et posant

$$\frac{1}{2a^2} \left[\frac{\mathfrak{B}(a^2)}{\Psi(a^2)} - \frac{\mathfrak{B}(0)}{\Psi(0)} \right] + \frac{\mathfrak{B}}{r\Psi} - \frac{\mathfrak{B}(0)}{r\Psi(0)} = F\Pi,$$

$$\mathcal{C}(r) = -\frac{R^2(r)}{2} [2MF(r)\Pi'(r) + \Pi(r)].$$

C'est la même expression que dans le cas n pair; mais la fonction Π n'a plus la même signification : le rôle qui était joué par la fonction $\frac{\mathfrak{B}}{R}$ est joué ici par la fonction

$$\frac{\mathfrak{B}(r)}{r\Psi(r)} - \frac{\mathfrak{B}(0)}{r\Psi(0)}.$$

Il serait également possible d'obtenir une formule de réduction analogue, et d'apparence plus simple, en introduisant le polynôme

$$\Phi(r) = \sqrt{r} R(r)$$

et en considérant les deux polynômes A et B associés à Φ . Mais il est inutile

d'insister sur ce point, puisque l'on serait conduit au fond à des calculs plus compliqués, le degré de Φ étant supérieur d'une unité à celui de Ψ . Nous nous en tiendrons donc à la formule que nous venons de donner.

Remarques générales sur les fonctions de Lamé.

Ainsi que nous l'avons dit au début, ces formules sont spécialement adaptées au cas actuel, c'est-à-dire au cas où l'on connaît les fonctions $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$. Nous ferons remarquer que, suivant les besoins, on pourrait introduire d'autres fonctions S . Revenons en effet au cas où n est pair : nous étions arrivés à la relation

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \frac{B}{2FR} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{F} \left[\frac{B(0)}{R(0)} \frac{1}{r} + \frac{B(b^2)}{R(b^2)} \frac{1}{r-b^2} + \frac{B(a^2)}{R(a^2)} \frac{1}{r-a^2} \right].$$

Telle qu'elle est écrite, cette formule est une formule de réduction de $S_{n,4i}$ aux trois fonctions S d'ordre 1, $S_{1,0}$, $S_{1,1}$ et $S_{1,2}$. En nous servant de la relation

$$\frac{B(0)}{R(0)} + \frac{B(b^2)}{R(b^2)} + \frac{B(a^2)}{R(a^2)} = 0,$$

nous avons conduit le calcul de façon à faire apparaître $S_{2,1}$ et avons eu la formule cherchée en fonction de $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$. En suivant une marche parallèle, nous aurions pu obtenir une formule de réduction aux fonctions $S_{1,1}$ et $S_{2,2}$, ou $S_{1,0}$ et $S_{2,3}$. Ces relations, inutiles ici, pourraient peut-être trouver leur application dans d'autres problèmes.

De même, dans le cas de n impair, nous avons obtenu la formule

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \frac{\mathfrak{B}}{r\Psi F} - \frac{\mathfrak{B}(0)}{r\Psi(0)F} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{F} \left(\frac{l}{t} + \frac{m}{t-a^2} + \frac{n}{t-b^2} \right)$$

ou

$$\begin{aligned} l &= \frac{2}{\Psi^2(0)} - \frac{\mathfrak{B}'(0)}{\Psi(0)} + \frac{\mathfrak{B}(0)\Psi'(0)}{\Psi^2(0)}, \\ m &= \frac{\mathfrak{B}(0)}{a^2\Psi(0)} - \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{a^2\Psi(a^2)}, \\ n &= \frac{\mathfrak{B}(0)}{b^2\Psi(0)} - \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{b^2\Psi(b^2)}, \end{aligned}$$

formule qui, en tenant compte de la relation

$$l + m + n = 0,$$

permet de la même manière la réduction soit aux trois fonctions S d'ordre 1, soit à une fonction S d'ordre 1 combinée avec une fonction S d'ordre 2.

Enfin, on peut très facilement étendre la méthode que nous venons de donner à des fonctions de Lamé d'un type autre que celui qui figure dans les équations de Poincaré. Ainsi considérons la fonction S associée à une fonction R de la forme

$$R = \sqrt{\rho^2 - a^2} P(\rho^2),$$

P étant un polynôme en ρ^2 . Nous poserons encore $\rho^2 = r$ et

$$R(r) = \sqrt{r - a^2} \Psi(r).$$

Les équations de condition seront

$$\frac{\Psi''(\alpha_i)}{\Psi'(\alpha_i)} = -\frac{1}{\alpha_i - a^2} - \frac{F'(\alpha_i)}{F(\alpha_i)}.$$

On introduira les polynômes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ dépendant de Ψ et Ψ' , et l'on suivra pour la réduction une marche absolument parallèle à celle que nous avons suivie précédemment, quand nous avons traité le cas de n impair; mais les fractions rationnelles que nous aurons à considérer admettront, au dénominateur, a^2 comme racine double. On arrivera à la formule

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \frac{\mathfrak{B}(r)}{(r-a^2)\Psi F} - \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{(r-a^2)\Psi(a^2)F} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{F} \left[\frac{l}{t-a^2} + \frac{m}{t} + \frac{n}{t-b^2} \right]$$

avec

$$\begin{aligned} l &= \frac{2}{\Psi^2(a^2)} - \frac{\mathfrak{B}'(a^2)}{\Psi(a^2)} + \frac{\mathfrak{B}(a^2)\Psi'(a^2)}{\Psi^2(a^2)}, \\ m &= \frac{\mathfrak{B}(0)}{a^2\Psi(0)} - \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{a^2\Psi(a^2)}, \\ n &= \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{(b^2-a^2)\Psi(a^2)} - \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{(b^2-a^2)\Psi(b^2)}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation

$$l + m + n = 0,$$

nous réduirons de la même manière S à une fonction d'ordre 1 et une fonction d'ordre 2.

Une fonction S associée à une fonction R du type

$$R = \sqrt{\rho^2 - b^2} P(\rho^2) = \sqrt{r - b^2} \Psi(r)$$

admettra une formule de réduction tout à fait analogue

$$\frac{S}{(2n+1)R} = \frac{\mathfrak{B}}{(r-b^2)\Psi F} - \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{(r-b^2)\Psi(b^2)F} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{F} \left[\frac{l}{t-b^2} + \frac{m}{t} + \frac{n}{t-a^2} \right]$$

avec

$$l = \frac{2}{\Psi^2(b^2)} - \frac{\mathfrak{B}'(b^2)}{\Psi(b^2)} + \frac{\mathfrak{B}(b^2)\Psi'(b^2)}{\Psi^2(b^2)},$$

$$m = \frac{\mathfrak{B}(0)}{b^2\Psi(0)} - \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{b^2\Psi(b^2)},$$

$$n = \frac{\mathfrak{B}(b^2)}{(a^2-b^2)\Psi(b^2)} - \frac{\mathfrak{B}(a^2)}{(a^2-b^2)\Psi(a^2)}$$

et

$$l + m + n = 0.$$

Ajoutons, sans insister davantage, que l'on peut obtenir ainsi des formules de réduction pour les fonctions des divers autres types. La fonction S associé à

$$R = \sqrt{\rho^2 - b^2} P(\rho) = r \sqrt{r - b^2} \Psi(r),$$

par exemple, se traitera de la même façon, en introduisant des fractions rationnelles ayant deux racines doubles au dénominateur.

Passage aux notations de M. Liapounov.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que la première équation de Poincaré avait été préalablement résolue par la méthode de M. Liapounov. Cette méthode donne le moyen de calculer la quantité $\Delta \frac{R}{\rho}$, étant posé, comme nous l'avons déjà signalé,

$$\Delta = \sqrt{\rho(\rho+1)(\rho+q)},$$

$$R = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho \Delta},$$

Δ est par conséquent ce que nous avons appelé F , et R n'est autre chose que ce que nous avons désigné par M . Nos résultats s'écrivent alors de la façon suivante :

1° *Cas de n pair.* — Le coefficient de stabilité pourra être mis sous la forme

$$T_{m,s} = - \frac{E^2(\rho)}{2} [{}_2R \Delta(\rho) \Pi'(\rho) + \Pi(\rho)],$$

avec

$$\Delta(\rho) \Pi(\rho) = \frac{1}{2} \frac{B(0)}{E(0)} + \frac{B(\rho)}{E(\rho)},$$

B étant le polynome de degré inférieur à celui de E, défini par l'identité

$$AE + BE' \equiv 1,$$

A étant un polynome de degré inférieur à celui de E'.

2° *Cas de n impair.* — Nous avons, dans ce cas,

$$E = \sqrt{\rho+1} (\rho + h_1)(\rho + h_2) \dots$$

et nous poserons

$$E = \sqrt{\rho+1} \Psi.$$

Nous considérerons alors les polynomes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ associés à Ψ et Ψ' , et nous obtiendrons

$$T_{m,s} = - \frac{E^2(\rho)}{2} [{}_2R \Delta(\rho) \Pi'(\rho) + \Pi(\rho)],$$

avec

$$\Delta(\rho) \Pi(\rho) = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathfrak{B}(0)}{\Psi(0)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{\Psi(-1)} \right] + \frac{\mathfrak{B}(\rho)}{(\rho+1)\Psi(\rho)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{(\rho+1)\Psi(-1)}.$$

Il convient de présenter ces expressions sous une forme un peu différente, plus propre au calcul. M. Liapounov, en effet, mettant en évidence la quantité $\Delta \frac{R}{\rho}$, qui est déjà calculée, considère, non plus $T_{m,s}$, mais une expression égale à $T_{m,s}$, à un facteur positif près, et qui, par conséquent, a le même signe que $T_{m,s}$ et s'annule avec lui. C'est cette expression, qui joue un rôle fondamental dans le calcul des axes du Jacobien, qu'il désigne par le symbole

$$\frac{\Delta R}{\rho} = J.$$

Nous trouvons pour J la valeur suivante :

$$\frac{1}{J} = \rho \left(\frac{{}_2\Delta'}{\Delta} - {}_2\frac{H'}{H} \right),$$

avec, pour n pair,

$$H = \frac{1}{2} \frac{B(0)}{E(0)} + \frac{B(\rho)}{E(\rho)},$$

et, pour n impair,

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathfrak{B}(0)}{\Psi(0)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{\Psi(-1)} \right] + \frac{\mathfrak{B}(\rho)}{(\rho+1)\Psi(\rho)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{(\rho+1)\Psi(-1)}.$$

Identité avec les formules de M. Liapounov.

M. Liapounov présente la quantité J sous la forme suivante :

$$J = \frac{K \Delta^2}{L},$$

avec les significations, pour le cas n pair,

$$K = E(\rho) \left[P + g \frac{E}{\rho} + g \left(\frac{q}{\rho+1} + \frac{1}{\rho+q} \right) E \right],$$

$$L = \rho + gq E^2 + g \frac{q(1-q)^2 \rho E^2}{(\rho+1)(\rho+q)},$$

où

$$P = \sum \frac{1}{2 h_i (1-h_i) (h_i-q)} \frac{E(\rho)}{\rho+h_i} \frac{1}{E'^2(-h_i)},$$

$$g = \frac{3}{4q} \sum \frac{1}{h_i E'^2(-h_i)},$$

$$g = \frac{1}{4q} \sum \frac{1}{(1-h_i) (h_i-q) E'^2(-h_i)}.$$

Dans le cas n impair, on a, en posant

$$\Phi(\rho) = \sqrt{\rho+1} E(\rho),$$

$$K = \frac{(\rho)}{\sqrt{\rho+1}} \left[P + g \frac{\Phi}{\rho} - g \left(\frac{q}{\rho+1} + \frac{1}{\rho+q} \right) \Phi \right]$$

avec

$$P = \frac{\Phi(\rho)}{(1-q) \Phi'^2(-1) (\rho+1)} + \Phi(\rho) \sum \frac{1}{2 h_i (h_i-q) \Phi'^2(-h_i) (\rho+h_i)},$$

$$g = \frac{3}{4q} \sum \frac{1-h_i}{h_i \Phi'^2(-h_i)},$$

$$g = \frac{1}{2q(1-q) \Phi'^2(-1)} + \frac{1}{4q} \sum \frac{1}{(h_i-q) \Phi'^2(-h_i)}.$$

L a la même expression que dans le cas n pair.

Il est inutile de faire remarquer à quel point ces formules sont plus compliquées que celles que nous avons indiquées. Même pour le cas le plus simple, $n=4$, M. Liapounov est conduit à de très longs calculs pour exprimer les sommes figurant dans K et dans L, et il est obligé, pour les simplifier, de faire appel aux équations de condition tirées de l'équation de Lamé. Dans les formules que nous proposons, la seule difficulté réside dans la formation du polynôme B

(ou $\mathfrak{B}$), qui d'ailleurs se déduit de E et de E' par des opérations rationnelles, et sans que l'on ait besoin de connaître les racines de E .

Étant donnée la profonde différence de forme qui existe entre les formules de M. Liapounov et les nôtres, il est nécessaire de prouver qu'elles sont identiques. Nous allons partir des formules de M. Liapounov, et les simplifier par l'introduction du polynôme B associé à E et E' . Commençons par le cas de n pair.

Cherchons à exprimer les sommes figurant dans K . Par décomposition en éléments simples, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{B(\rho)}{\rho(\rho+1)(\rho+q)E(\rho)} &= \frac{B(0)}{q\rho E(0)} + \frac{B(-1)}{(1-q)(\rho+1)E(-1)} \\ &+ \frac{B(-q)}{q(q-1)(\rho+q)E(-q)} \\ &+ \sum \frac{B(-h_i)}{h_i(1-h_i)(h_i-q)E'(-h_i)} \frac{1}{\rho+h_i}. \end{aligned}$$

Comme, d'après l'identité fondamentale, on a

$$B(-h_i) = \frac{1}{E'(-h_i)},$$

la somme qui figure dans cette relation n'est autre que $2P$.

Écrivons de même

$$\frac{B(\rho)}{\rho E(\rho)} = \frac{B(0)}{\rho E(0)} + \sum \frac{1}{h_i E'^2(-h_i)(\rho+h_i)}.$$

En multipliant les deux membres par ρ , et faisant tendre ρ vers l'infini, nous obtenons

$$\sum \frac{1}{h_i E'^2(-h_i)} = \frac{B(0)}{E(0)},$$

d'où

$$g = \frac{3}{4q} \frac{B(0)}{E(0)}.$$

Le même procédé nous donnera

$$\sum \frac{1}{(1-h_i)(h_i-q)E'^2(-h_i)} = \frac{B(-1)}{(q-1)E(-1)} + \frac{B(-q)}{(1-q)E(-q)},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$g = \frac{B(-1)}{4q(q-1)E(-1)} + \frac{B(-q)}{4q(1-q)E(-q)}.$$

Portons ces valeurs dans l'expression de K, en tenant compte de la décomposition

$$\frac{1}{\Delta^2} = \frac{1}{q\rho} + \frac{1}{(1-q)(\rho+1)} + \frac{1}{q(q-1)(\rho+q)},$$

nous obtenons

$$\frac{K\Delta^2}{E^2} = \frac{1}{2} \frac{B(\rho)}{E(\rho)} + \frac{1}{4} \frac{B(0)}{E(0)} - \left[\frac{1}{4(\rho+1)(1-q)} + \frac{1}{4(\rho+q)q(q-1)} \right] \left[\frac{B(0)}{E(0)} + \frac{B(-1)}{E(-1)} + \frac{B(-q)}{E(-q)} \right].$$

Il est facile de voir que le second crochet est nul; on le démontrerait à partir des équations de condition tirées de l'équation de Lamé :

$$\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_i - q} + \frac{1}{h_i - 1} = 2 \frac{E'(-h_i)}{E'(-h_i)},$$

en suivant exactement la marche que nous avons suivie plus haut pour démontrer la formule

$$\frac{B(0)}{R(0)} + \frac{B(b^2)}{R(b^2)} + \frac{B(a^2)}{R(a^2)} = 0.$$

Nous obtenons donc enfin

$$\frac{K\Delta^2}{E^2} = \frac{1}{2} \frac{B(\rho)}{E(\rho)} + \frac{1}{4} \frac{B(0)}{E(0)}$$

ou

$$K\Delta^2 = \frac{1}{2} E^2(\rho) H(\rho).$$

Passons maintenant à l'expression L.

Nous écrirons

$$L = \rho + \rho E^2 \left\{ \frac{3}{4\rho} \frac{B(0)}{E(0)} + \frac{q-1}{4(\rho+1)(\rho+q)} \left[\frac{B(-1)}{E(-1)} - \frac{B(-q)}{E(-q)} \right] \right\}.$$

Or

$$\frac{q-1}{(\rho+1)(\rho+q)} = \frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{\rho+q}.$$

En tenant compte de cette identité, ainsi que de

$$\frac{B(0)}{E(0)} + \frac{B(-1)}{E(-1)} + \frac{B(-q)}{E(-q)} = 0,$$

nous aurons

$$L = \rho + \rho E^2 \left\{ \frac{1}{4} \frac{B(0)}{E(0)} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho+q} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho} \frac{B(0)}{E(0)} + \frac{1}{\rho+1} \frac{B(-1)}{E(-1)} + \frac{1}{\rho+q} \frac{B(-q)}{E(-q)} \right] \right\}.$$

Par les procédés de décomposition en éléments simples que nous avons déjà si souvent employés, et en utilisant les équations de condition, nous trouverons

$$2 \frac{B\Delta'}{E\Delta} = \frac{1}{\rho} \frac{B(0)}{E(0)} = \frac{1}{\rho+1} \frac{B(-1)}{E(-1)} + \frac{1}{\rho+q} \frac{B(-q)}{E(-q)} = 2 \frac{A+B'}{E}.$$

Donc

$$L = \rho + \rho E^2 \left[\frac{1}{2} \frac{B(0)}{E(0)} \frac{\Delta'}{\Delta} + \frac{B\Delta'}{E\Delta} - \frac{A+B'}{E} \right]$$

ou

$$L = \rho \left[1 + H E^2 \frac{\Delta'}{\Delta} - A E + B' E \right].$$

Mais, en remarquant que

$$1 - A E = B' E$$

et que

$$B' E - B E' = E^2 H',$$

nous obtiendrons

$$L = \rho E^2 \left[H \frac{\Delta'}{\Delta} - H' \right],$$

d'où enfin

$$\frac{L}{K \Delta^2} = \frac{1}{J} = 2 \rho \left(\frac{\Delta'}{\Delta} - \frac{H'}{H} \right),$$

ce qui est exactement la formule à laquelle nous étions arrivés directement.

Passons maintenant au cas n impair.

Nous calculerons les sommes d'une façon analogue, mais il faudra considérer des fractions rationnelles ayant la racine double $\rho = -1$ au dénominateur.

Nous trouverons ainsi

$$g = \frac{3}{4q} \left[\frac{\mathfrak{B}(0)}{\Psi(0)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{\Psi(-1)} \right]$$

et

$$g = \frac{1}{4q(q-1)} \left[\frac{\mathfrak{B}(-q)}{(q-1)\Psi(-q)} + \frac{\mathfrak{B}(-1)}{\Psi(-1)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)\Psi'(-1)}{\Psi^2(-1)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{(q-1)\Psi(-1)} - \frac{2}{\Psi^2(-1)} \right].$$

En nous servant de l'identité

$$\frac{1}{(\rho+1)\Delta^2} = \frac{1}{q\rho} - \frac{1}{q(q-1)^2(\rho+q)} \\ - \frac{1}{(q-1)(\rho+1)^2} - \frac{1}{(q-1)(\rho+1)} + \frac{1}{(q-1)^2(\rho+1)},$$

nous mettrons aisément K sous la forme suivante :

$$\frac{K}{E^2} = \frac{\mathfrak{B}}{2(\rho+1)\Delta^2\Psi} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{2(\rho+1)\Delta^2\Psi(-1)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{4\Delta^2\Psi(-1)} + \frac{\mathfrak{B}(0)}{4\Delta^2\Psi(0)} \\ + \left[\frac{1}{4(q-1)(\rho+1)} - \frac{1}{4q(q-1)(\rho+q)} \right] \\ \times \left[\frac{\mathfrak{B}(0)}{\Psi(0)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{\Psi(-1)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)\Psi'(-1)}{\Psi^2(-1)} \right. \\ \left. - \frac{2}{\Psi^2(-1)} + \frac{\mathfrak{B}'(-1)}{\Psi(-1)} - \frac{\mathfrak{B}(-q)}{(q-1)\Psi(-q)} + \frac{\mathfrak{B}(-1)}{(q-1)\Psi(-1)} \right].$$

On démontrera sans difficulté, à partir des équations de condition, que le second crochet est nul, et l'on obtiendra par conséquent

$$K \Delta^2 = \frac{1}{2} E^2 H.$$

Une marche analogue permettra de calculer L. On trouvera

$$\frac{L - \rho}{\rho\Psi^2} = 2 \frac{K \Delta \Delta'}{\Psi^2} + \frac{1}{\rho+1} \left[\frac{\mathfrak{B}}{\Psi} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{\Psi(-1)} \right] - \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}{\Psi}$$

ou

$$L = \rho \left[H E^2 \frac{\Delta'}{\Delta} + \mathfrak{B} \Psi' - \mathfrak{B}' \Psi \right] + \frac{\rho}{(\rho+1)^2} E^2 \left[\frac{\mathfrak{B}}{\Psi} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{\Psi(-1)} \right].$$

Or, comme nous avons

$$H' = - \frac{1}{(\rho+1)^2} \left[\frac{\mathfrak{B}}{\Psi} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{\Psi(-1)} \right] + \frac{\mathfrak{B}'\Psi - \mathfrak{B}\Psi'}{(\rho+1)\Psi^2},$$

nous pourrions écrire

$$L = \rho E^2 \left[H \frac{\Delta'}{\Delta} - H' \right],$$

d'où

$$\frac{1}{J} = 2\rho \left(\frac{\Delta'}{\Delta} - \frac{H'}{H} \right),$$

ce qui est bien la formule voulue.

Applications.

A titre d'exemples, indiquons les résultats qu'on obtient pour les deux cas les plus simples :

1° $n = 3$. — Nous écrirons alors, avec M. Liapounov,

$$E(\rho) = \sqrt{\rho + 1}(\rho + h),$$

$$\Psi(\rho) = \rho + h.$$

Donc

$$\mathfrak{B}(\rho) = 1$$

avec

$$\Psi(0) = h, \quad \Psi(-1) = h -$$

Nous avons donc

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h-1} \right) + \frac{1}{(\rho+1)(\rho+h)} - \frac{1}{(\rho+1)(h-1)},$$

ce qui, après réduction au même dénominateur et simplifications, devient

$$H = \frac{\rho + 3h}{2h(1-h)(\rho+h)}$$

et par conséquent

$$\frac{H'}{H} = - \frac{2h}{(\rho+h)(\rho+3h)},$$

d'où

$$\frac{1}{J} = \rho \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho+q} + \frac{4h}{(\rho+h)(\rho+3h)} \right].$$

C'est bien le résultat auquel est parvenu M. Liapounov, après un assez long calcul, et qu'il présente sous la forme suivante :

$$J = \frac{(\rho+h)(\rho+3h)}{4h\rho + \left(1 + \frac{\rho}{\rho+1} + \frac{\rho}{\rho+q}\right)(\rho+h)(\rho+3h)}.$$

2° $n = 4$. — Écrivant dans ce cas, toujours suivant les notations employées par M. Liapounov,

$$E = \rho^2 + s\rho + r$$

nous aurons

$$B = \frac{2\rho + s}{s^2 - 4r},$$

d'où

$$H = \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 - 4r} + \frac{2\rho + s}{(s^2 - 4r)(\rho^2 + s\rho + r)}.$$

Nous en tirons

$$\frac{H'}{H} = - \frac{4r}{sE + 2rE'} - \frac{2r(s^2 - 4r)}{E(sE + 2rE')}$$

et enfin

$$\frac{1}{J} = \rho \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho + 1} + \frac{1}{\rho + q} + \frac{4r(2E + s^2 - 4r)}{E(sE + 2rE')} \right],$$

expression qui se prêterait un peu mieux au calcul que celle qu'a employée M. Liapounov.

Nous verrons, dans les Chapitres suivants, deux exemples complets de l'application de la méthode de M. Liapounov, modifiée par l'emploi de nos formules, au calcul des éléments des Jacobiens critiques correspondant aux surfaces de Poincaré d'ordres 5 et 6.

CHAPITRE II.

LA SURFACE DE POINCARÉ D'ORDRE 3.

Après avoir recherché d'une façon générale les éléments des surfaces de Poincaré, nous allons en étudier quelques-unes en particulier. Aux valeurs $n = 0$, 1 et 2 du paramètre de l'équation de Lamé ne correspondent pas de surfaces de Poincaré : la première qu'on rencontre est donc la surface de Poincaré d'ordre 3; c'est celle à qui Darwin a donné le nom de *pear-shaped figure*, et qui est devenue classique sous le nom de *figure piriforme* ou *piroïde*. Nous allons présenter quelques observations sur la forme de cette surface.

La figure qu'a donnée Poincaré dans les *Acta* est bien connue. Elle a été reproduite dans les *Figures d'équilibre*, ainsi que dans le Mémoire de Schwarzschild. Elle affecte, en effet, la forme d'une poire, avec des inflexions nettement accusées. Mais elle ne repose sur aucun calcul, et lorsque Darwin, après avoir calculé les axes du Jacobien critique, fait à son tour le dessin des sections de la surface par ses plans de symétrie, il trouve une forme bien différente, beaucoup plus allongée, convexe et plutôt ovoïde que piriforme. Ces deux schémas, celui de Darwin comme celui de Poincaré, ne tiennent compte que de la première approximation. Ultérieurement, Darwin a donné une nouvelle figure, en poussant jusqu'à la deuxième approximation; et la forme de la surface s'écarte encore beaucoup plus de la forme proposée par Poincaré.

Les résultats de Darwin relatifs à la première approximation appellent quelques remarques.

Son dessin a été fait en donnant, à la quantité ε qui figure dans la définition de la surface, une valeur arbitraire. Nous sommes alors en droit de nous demander si, en donnant à ε quelque autre valeur, on n'obtiendrait pas une surface dont la section par ses plans de symétrie présentât des inflexions, rappelant par conséquent le schéma de Poincaré. Nous allons démontrer de façon rigoureuse que c'est impossible et que la surface piriforme, définie au point de vue mécanique et considérée en première approximation, est toujours convexe.

Propriétés et équations de la surface.

Nous allons commencer par résumer les propriétés déjà connues de cette surface.

Les axes du Jacobien critique (en supposant toujours son volume égal à $\frac{4}{3}\pi$) sont, d'après Darwin,

$$C = 1,885827;$$

$$B = 0,814975;$$

$$A = 0,650659.$$

M. Liapounov, par un calcul plus précis, a corrigé quelque peu ces nombres. Des résultats qu'il obtient,

$$0,135165 < p < 0,135170,$$

$$0,076908 < q < 0,076913,$$

il déduit

$$1,885627 < C < 1,885652,$$

$$0,815031 < B < 0,815040,$$

$$0,650674 < A < 0,650678.$$

Dans la suite de ce Chapitre, comme il s'agit de comparer les résultats de Darwin à ceux de Poincaré, nous prendrons les nombres de Darwin, quoique légèrement erronés, et nous adopterons les valeurs

$$C = 1,8858;$$

$$B = 0,8150;$$

$$A = 0,6507.$$

Nous en déduirons

$$a^2 = 3,1327;$$

$$b^2 = 2,8919.$$

La surface de Poincaré d'ordre 3 est définie par le *déplacement normal*

$$\zeta = \varepsilon \frac{M_{3,0}(\mu) N_{3,0}(\nu)}{\sqrt{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)}}$$

à partir du point μ, ν du Jacobien critique (déterminé par $\rho = C$).

Les fonctions $M_{3,0}$ et $N_{3,0}$ sont les fonctions de Lamé conjuguées de la fonction

$$R_{3,0} = \rho(\rho^2 - \alpha),$$

où α est inférieur à b^2 ; ou, en explicitant cette constante α ,

$$R_{3,0} = \rho \left[\rho^2 - \frac{2}{5}(\alpha^2 + b^2) + \frac{1}{5} \sqrt{4\alpha^4 - 7a^2b^2 + 4b^4} \right].$$

On a d'ailleurs

$$\alpha = 1,8000.$$

Les deux plans des zx et des yz sont des plans de symétrie.

L'intersection de la surface et de l'ellipsoïde dont elle dérive se compose de l'ellipse principale, section de cet ellipsoïde par le plan des xy , et de deux lignes de courbure de l'ellipsoïde, définies par

$$\nu = \pm \sqrt{\alpha}.$$

Nous rappelons que c'est l'axe des x qui est l'axe de rotation.

Cherchons à présent les équations de la surface

Les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde étant x, y, z , et les coordonnées du point *correspondant* ⁽¹⁾ de la surface de Poincaré étant X, Y, Z , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{x}{A^2} \zeta \left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ Y &= y + \frac{y}{B^2} \zeta \left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ Z &= z + \frac{z}{C^2} \zeta \left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La fonction ζ , exprimée en fonction des coordonnées x, y, z , a d'ailleurs pour

⁽¹⁾ Nous disons qu'un point P d'une surface de Poincaré est le correspondant d'un point Q du Jacobien quand il est situé sur la normale en Q à l'ellipsoïde, à la distance ζ .

valeur

$$\zeta = \varepsilon z \left(\frac{x^2}{a-a^2} + \frac{y^2}{a-b^2} + \frac{z^2}{a} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Si nous représentons l'ellipsoïde au moyen des coordonnées elliptiques μ et ν , comme on a

$$\begin{aligned} x &= A \sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}}, \\ y &= B \sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(A^2 - B^2)(C^2 - B^2)}}, \\ z &= C \frac{\mu\nu}{ab}, \end{aligned}$$

on mettra les équations de la surface piriforme sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X &= A \sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}} \\ &\quad + \frac{\varepsilon \mu \nu}{A \sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}} \frac{(\mu^2 - a)(\nu^2 - a)}{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)} \sqrt{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}, \\ Y &= B \sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(A^2 - B^2)(C^2 - B^2)}} \\ &\quad + \frac{\varepsilon \mu \nu}{B \sqrt{(A^2 - B^2)(C^2 - B^2)}} \frac{(\mu^2 - a)(\nu^2 - a)}{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)} \sqrt{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}, \\ Z &= C \frac{\mu\nu}{ab} + \frac{\varepsilon}{Cab} \mu^2 \nu^2 \frac{(\mu^2 - a)(\nu^2 - a)}{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)}. \end{aligned}$$

Cette forme, qui peut être utile à l'occasion, ne serait pas satisfaisante pour le but que nous nous proposons. Il sera préférable d'introduire les angles φ et ψ , tels que

$$\begin{aligned} x &= A \cos \varphi \cos \psi, \\ y &= B \cos \varphi \sin \psi, \\ z &= C \sin \varphi. \end{aligned}$$

On écrira alors

$$\begin{aligned} X &= A \cos \varphi \cos \psi + BC \zeta \cos \varphi \cos \psi P^{-\frac{1}{2}}, \\ Y &= B \cos \varphi \sin \psi + CA \zeta \cos \varphi \sin \psi P^{-\frac{1}{2}}, \\ Z &= C \sin \varphi + AB \zeta \sin \varphi P^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

avec

$$P = B^2 C^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + A^2 C^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + A^2 B^2 \sin^2 \varphi$$

H.

$$= C\varepsilon \sin \varphi \left(\frac{A^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\alpha - a^2} + \frac{B^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi}{\alpha - b^2} + \frac{C^2 \sin^2 \varphi}{\alpha} - 1 \right) P^{-\frac{1}{2}}.$$

Discussion de l'équation des points d'inflexion.

Considérons la section de la surface piriforme par un de ses plans de symétrie. Soit, par exemple, le plan des zy . Les équations de la courbe s'obtiendront en faisant $\cos \psi = 0$; on aura donc

$$Y = B \cos \varphi + C \zeta_0 \cos \varphi (C^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}},$$

$$Z = C \sin \varphi + B \zeta_0 \sin \varphi (C^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}},$$

avec

$$\zeta_0 = C\varepsilon \sin \varphi \frac{\alpha - C^2}{\alpha(\alpha - b^2)} (b^2 \sin^2 \varphi - \alpha)(C^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous écrirons

$$Y = B \cos \varphi - \eta C \cos \varphi \Phi,$$

$$Z = C \sin \varphi - \eta B \sin \varphi \Phi,$$

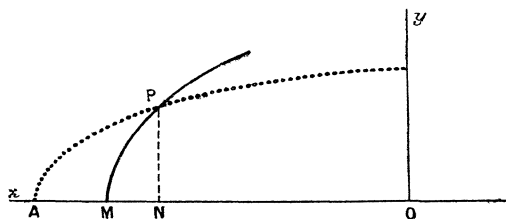
avec

$$\Phi = \sin \varphi (b^2 \sin^2 \varphi - \alpha)(b^2 \sin^2 \varphi - C^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le coefficient η est égal à ε multiplié par un facteur constant. Avant de former l'équation des points d'inflexion, cherchons si l'on peut dire quelque chose sur la grandeur de η .

Considérons l'aspect de la section entre les points $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire le sommet A de l'ellipse principale, et $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{\alpha}}{b}$, c'est-à-dire un point de rencontre P avec cette ellipse. Représentons l'ellipse en ponctué, et la section du piroïde en trait plein.

Fig. 1.



Remarquons que, le point P étant fixe, la longueur AN est indépendante de η ; la distance AM au contraire dépend de η , étant égale à

$$B\eta(b^2 - \alpha)(b^2 - C^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Lorsque η augmente, le point M tend par conséquent à se rapprocher de N;

des valeurs convenables de η auraient même pour effet de faire passer M entre N et O; la surface aurait alors un rentrant sur l'axe des z , ce qui, au point de vue mécanique, ne peut évidemment pas se concevoir. Cette idée avait déjà été esquissée par Darwin ⁽¹⁾, lorsque, construisant la section du piroïde pour une valeur particulière de ε , il regrettait de ne pouvoir exagérer cette valeur, ce qui aurait pu être intéressant pour donner une idée de l'évolution de la surface.

Cela va nous conduire à une limite pour η . Si nous traduisons en effet en nombres l'inégalité

$$AM < AN,$$

nous trouvons

$$\eta < 0,2228.$$

Il est d'ailleurs inutile de faire remarquer que c'est une limite très supérieure. Nous ferons remarquer aussi qu'il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$; on n'obtient ainsi qu'un quart de la section; mais d'une part cette section est symétrique par rapport à l'axe des z ; et d'autre part, on peut considérer le second quart comme correspondant à $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, avec η négatif. Nous donnerons donc à η des valeurs tant positives que négatives.

Formons à présent l'équation des points d'inflexion, c'est-à-dire

$$Y'Z'' - Z'Y''.$$

Nous trouvons

$$Y'Z'' - Z'Y'' = BC - \eta[(2C^2 - b^2)\Phi + b^2 \sin \varphi \cos \varphi \Phi' + (b^2 \sin^2 \varphi - C^2)\Phi''] \\ + \eta^2 BC(2\Phi'^2 + \Phi^2 - \Phi\Phi'').$$

Cette expression se compose donc de trois termes :

- 1° Le terme constant BC, dont la valeur est 1,537;
- 2° Un terme contenant η^2 en facteur; il serait facile de voir qu'il est toujours petit et positif; nous le négligerons;
- 3° Un terme contenant η en facteur. Si nous posons $b^2 \sin^2 \varphi = t$, nous écrirons le coefficient de $-\eta$ sous la forme suivante :

$$f(t) = \frac{1}{b} \frac{\sqrt{t}}{(t - C^2)^2} [-2t^3 + 7C^2 t^2 + t(-11C^4 + 3C^2 \alpha) \\ + 3C^2(C^2 \alpha - 2b^2 \alpha + 2b^2 C^2)].$$

(1) « It is impossible to construct an exaggerated figure, for if we do so the blunt end acquires a dimple, which is absurd. »

Calculons $f'(t)$.

Si nous désignons le polynôme entre crochets par

$$lt^3 + mt^2 + nt + p,$$

la dérivée $f'(t)$ s'annulera avec le polynôme

$$-9lt^4 + t^3(7C^2l - 7m) + t^2(5C^2m - 5n) + t(3C^2n - 3p) + C^2p.$$

Dans l'intervalle considéré, c'est-à-dire

$$0 < t < b^2,$$

il n'y a qu'une racine, voisine de $t = 0,4$, et correspondant à un maximum pour $f(t)$; d'autre part, $f(t)$ est toujours positif.

Le cas le plus défavorable serait donc celui où $f(t)$ serait maximum, et où η serait également maximum. Or dans ce cas, le calcul donne

$$\log. \text{ maximum de } f = 0,81671;$$

$$\log. \text{ maximum de } \eta = 1,34796$$

et par conséquent

$$\text{Maximum de } \eta f = 1,464.$$

Comme nous avons $BC = 1,537$, la différence entre BC et ηf est $0,073$, quantité positive. Il n'y a donc pas d'inflexion, et nous pouvons conclure par ce théorème général :

« Quel que soit ε , la surface de Poincaré d'ordre 3, considérée en première approximation et définie au point de vue mécanique, est toujours convexe. »

Remarques géométriques.

Si l'on veut construire la section par un de ses plans principaux, le plan des xz par exemple, de la figure piriforme, il faut fixer une valeur de ε et tracer la courbe par points. Nous allons présenter quelques remarques géométriques, qui faciliteront cette construction et permettront d'effectuer le tracé avec autant d'exactitude que possible.

Dans le plan des xz , les coordonnées d'un point de la figure piriforme seront données par

$$X = A \cos \varphi + CH \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$Z = C \sin \varphi + AH \sin^2 \varphi,$$

avec

$$H = \gamma \frac{a^2 \sin^2 \varphi - \alpha}{C^2 - a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Remarquons que la constante η n'a pas la même valeur que dans le paragraphe précédent.

Pour simplifier les énoncés, nous appellerons :

Sommets de la figure, les deux points situés sur l'axe des z , définis par $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$;

Pseudo-sommets, les deux points situés sur l'axe des x , qui coïncident avec les sommets du petit axe de l'ellipse principale; ils correspondent à $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$;

Points fondamentaux, les points de rencontre, autres que les pseudo-sommets, avec l'ellipse principale. Ils sont définis par $\sin^2 \varphi = \frac{\alpha}{a^2}$.

Considérons deux points fondamentaux symétriques par rapport au petit axe de l'ellipse, et définis par les arguments φ_0 et $-\varphi_0$. Les coefficients angulaires des tangentes à la section en ces deux points seront

$$m = \frac{C \cos \varphi_0 (C^2 - a^2 \sin^2 \varphi_0) + 2 \eta a^2 A \sin^3 \varphi_0 \cos \varphi_0}{-A \sin \varphi_0 (C^2 - a^2 \sin^2 \varphi_0) + 2 \eta a^2 C \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}$$

et

$$m_1 = \frac{C \cos \varphi_0 (C^2 - a^2 \sin^2 \varphi_0) - 2 \eta a^2 A \sin^3 \varphi_0 \cos \varphi_0}{A \sin \varphi_0 (C^2 - a^2 \sin^2 \varphi_0) + 2 \eta a^2 C \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}.$$

Si l'on calcule alors l'angle V que font entre elles ces deux tangentes, on constate que les termes contenant η se trouvent être en facteurs communs au numérateur et au dénominateur, et l'on obtient

$$\text{tang } V = \frac{2 A C \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{C^2 \cos^2 \varphi_0 - A^2 \sin^2 \varphi_0},$$

d'où la première de nos remarques :

Quelle que soit la valeur que l'on donne à ε , les tangentes en deux points fondamentaux symétriques par rapport à l'axe des x font entre elles un angle constant, et égal, ce qui est évident, à l'angle que font entre elles les tangentes à l'ellipse en ces deux points (cas correspondant à $\varepsilon = 0$).

Signalons également la propriété suivante, dont la démonstration est aisée :

La perpendiculaire abaissée d'un sommet sur la tangente en l'un des pseudo-sommets passe par un point fixe.

Il y a quatre points de cette espèce, dont les coordonnées sont

$$X = \pm \frac{C^2}{A} \cot^2 \varphi_0,$$

$$Z = \pm C.$$

On pourrait en donner une construction géométrique assez simple.

Quelques remarques peuvent être faites aussi sur le *centre de courbure* en un pseudo-sommet. Les coordonnées du centre de courbure K au pseudo-sommet $\varphi = 0$ sont

$$x = A - \frac{C^2}{A} \frac{C^4 + \eta \alpha^2}{C^4 + 2\eta^2 \alpha^2},$$

$$z = -\frac{\eta \alpha}{A} \frac{C^4 + \eta^2 \alpha^2}{C^4 + 2\eta^2 \alpha^2}.$$

Le lieu de K est donc une cubique unicursale. Si l'on transporte l'origine au pseudo-sommet, l'axe des x étant pris pour axe polaire, on voit que cette cubique se déduit, par la combinaison

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$

des deux courbes

$$\rho_1 = -\frac{C^2}{2A} \frac{\cos \omega}{1 + \sin^2 \omega}$$

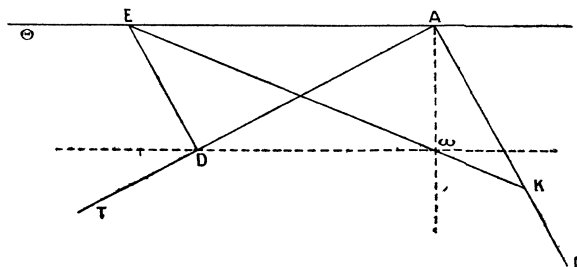
et

$$\rho_2 = -\frac{C^2}{2A \cos \omega},$$

qui sont, la première une ellipse passant par le pseudo-sommet, et la seconde une droite tangente à cette ellipse. Le centre de courbure K se déduit d'ailleurs du centre de courbure ω de l'ellipse par la construction simple suivante, dont la démonstration est évidente :

Menons en A la tangente AT et la normale AN à la section, la tangente A Θ

Fig. 2.



à l'ellipse, et par ω la parallèle à A Θ ; AT coupe cette droite en D : menons DE

perpendiculaire à AD, jusqu'à sa rencontre E avec AΘ. La droite Eω coupe AN au point cherché K.

Nous énoncerons enfin la remarque suivante :

Le lieu des points de la section où la tangente est parallèle à la tangente au point correspondant de l'ellipse se compose des normales à l'ellipse aux points définis par

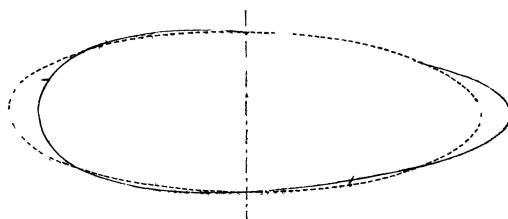
$$\sin \varphi = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{3C^2 - C\sqrt{9C^2 - 8\alpha}},$$

et du grand axe de l'ellipse, solution évidente.

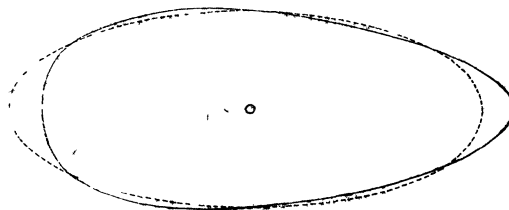
Dimensions des sections.

Pour compléter ce Chapitre, qui est en quelque sorte une monographie de la surface piriforme, nous donnons les valeurs des axes et les coordonnées des

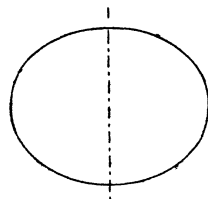
Fig. 3. — Surface de Poincaré, d'ordre 3.



Section par le plan des xz .



Section par le plan des yz .



Section par le plan des xy .

points fondamentaux des sections par les deux plans de symétrie. Nous partons

cette fois des résultats exacts de M. Liapounov; il y aura donc une très légère différence avec les nombres donnés par Darwin.

Axes du Jacobien critique :

$$A = 0,65067;$$

$$B = 0,81503;$$

$$C = 1,8856;$$

d'où

$$a^2 = 3,13213;$$

$$b^2 = 2,89123,$$

et

$$\alpha = 1,79983.$$

Section par le plan des xz . — Coordonnées des points fondamentaux :

$$x = 0,42438;$$

$$z = 1,42935.$$

Section par le plan des yz . — Coordonnées des points fondamentaux :

$$y = 0,50066;$$

$$z = 1,47786,$$

et, dans chaque section, les symétriques par rapport aux axes.

Nous donnons en outre, dans la figure 3, les sections, par les trois plans de coordonnées, du Jacobien critique et de la surface de Poincaré. Cette figure est, à très peu près, la reproduction de celle qu'a donnée Darwin (¹).

CHAPITRE III.

LES SURFACES DE POINCARÉ D'ORDRE 4.

Les éléments du Jacobien critique correspondant à $n = 4$ ont été calculés par M. Liapounov, qui a donné les nombres suivants :

$$0,0709 < p < 0,0710,$$

$$0,02355 < q < 0,02362.$$

(¹) *Sc. Pap.*, t. III, p. 314.

Pour la fonction de Lamé

$$E(\rho) = \rho^2 + s\rho + r,$$

M. Liapounov trouve

$$\begin{aligned} 1,15340 < s < 1,15343, \\ 0,23702 < r < 0,23705. \end{aligned}$$

En prenant toujours le volume du Jacobien égal à $4\frac{\pi}{3}$, nous déduisons de ces nombres les valeurs suivantes :

$$C = 2,3556;$$

$$B = 0,6998;$$

$$A = 0,6066,$$

et

$$a^2 = 5,1712;$$

$$b^2 = 5,0594.$$

Si, conformément à nos notations, nous écrivons la fonction de Lamé sous la forme

$$R = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2),$$

nous calculerons facilement α_1 et α_2 . Ces deux quantités, et la constante K de l'équation de Lamé, satisfont aux équations

$$h(\alpha_1 + \alpha_2) = 4(a^2 + b^2)(\alpha_1 + \alpha_2) - 20\alpha_1\alpha_2 + 4a^2b^2,$$

$$K = 16(a^2 + b^2) - 14(\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$2a^2b^2(\alpha_1 + \alpha_2) = K\alpha_1\alpha_2.$$

On en tirera $\alpha_1 + \alpha_2$ par l'équation du troisième degré

$$49x^3 - 98(a^2 + b^2)x^2 + 4x[12(a^2 + b^2) + 13a^2b^2] - 48a^2b^2(a^2 + b^2) = 0$$

dont on devra prendre la racine comprise entre 0 et $2b^2$; puis on calculera α_1, α_2 , d'où α_1 et α_2 , inférieurs à b^2 . On vérifiera ces calculs au moyen des résultats de M. Liapounov. Nous avons signalé en effet que, entre les α_i et les h_i , existait la relation

$$\alpha_i = a^2(1 - h_i).$$

Nous trouvons, dans le cas actuel,

$$\alpha_1 = 3,7879;$$

$$\alpha_2 = 0,5905.$$

Poincaré a indiqué que le déplacement normal à partir du Jacobien critique

est en première approximation

$$\zeta = \varepsilon \frac{M_{4,0}(\mu) N_{4,0}(\nu)}{\sqrt{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)}},$$

ce qui s'exprime en fonction des coordonnées cartésiennes par la formule

$$\begin{aligned} \zeta = \varepsilon & \left(\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_1 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_1} - 1 \right) \\ & \times \left(\frac{x^2}{\alpha_2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On voit de suite qu'il y a deux surfaces de Poincaré d'ordre 4 : la première, que nous appellerons *surface positive*, correspond à des valeurs positives de ε ; la seconde, *surface négative*, est définie par les valeurs négatives de ε ⁽¹⁾.

On trouve dans les *Figures d'équilibre* un schéma de la surface positive, ne reposant sur aucun calcul; M. Liapounov, quoique ayant calculé les éléments de ces surfaces, ne parle pas de leur forme et ne donne aucune figure. Nous nous proposons d'étudier la forme des surfaces de Poincaré d'ordre 4, considérées en première approximation.

Notons que les six sommets de la surface positive (c'est-à-dire les points situés sur les axes de symétrie) sont tous extérieurs au Jacobien critique, tandis que ceux de la surface négative sont tous intérieurs à cet ellipsoïde.

Citons enfin les résultats de M. Liapounov sur la stabilité de ces figures : d'après cet auteur, la surface négative est stable, la surface positive instable.

Équations des surfaces. Points fondamentaux.

Les équations des surfaces de Poincaré d'ordre 4, en fonction des coordonnées elliptiques sur l'ellipsoïde, μ et ν , sont données par

$$\begin{aligned} X &= A \sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}} \\ &+ \frac{\varepsilon}{A \sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}} \frac{(\mu^2 - \alpha_1)(\mu^2 - \alpha_2)(\nu^2 - \alpha_1)(\nu^2 - \alpha_2)}{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)} \sqrt{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}, \\ Y &= B \sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(A^2 - B^2)(C^2 - B^2)}} \\ &+ \frac{\varepsilon}{B \sqrt{(A^2 - B^2)(C^2 - B^2)}} \frac{(\mu^2 - \alpha_1)(\mu^2 - \alpha_2)(\nu^2 - \alpha_1)(\nu^2 - \alpha_2)}{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)} \sqrt{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}, \\ Z &= \frac{C}{ab} \mu\nu + \frac{\varepsilon \mu\nu}{Cab} \frac{(\mu^2 - \alpha_1)(\mu^2 - \alpha_2)(\nu^2 - \alpha_1)(\nu^2 - \alpha_2)}{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)}. \end{aligned}$$

(1) A toute valeur paire de n correspondent ainsi deux surfaces de Poincaré distinctes,

En fonction des angles φ et ψ , on aura

$$\begin{aligned} X &= A \cos \varphi \cos \psi + BC \zeta \cos \varphi \cos \psi P^{-\frac{1}{2}}, \\ Y &= B \cos \varphi \sin \psi + AC \zeta \cos \varphi \sin \psi P^{-\frac{1}{2}}, \\ Z &= C \sin \varphi + AB \zeta \sin \varphi P^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

avec

$$P = B^2 C^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + A^2 C^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + A^2 B^2 \sin^2 \varphi$$

et

$$\begin{aligned} \zeta &= P^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\alpha_1 - a^2} + \frac{B^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi}{\alpha_1 - b^2} + \frac{C^2 \sin^2 \varphi}{\alpha_1} - 1 \right) \\ &\times \left(\frac{A^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\alpha_2 - a^2} + \frac{B^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi}{\alpha_2 - b^2} + \frac{C^2 \sin^2 \varphi}{\alpha_2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Les deux surfaces coupent l'ellipsoïde critique suivant quatre lignes de courbure de cet ellipsoïde, définies par

$$v = \pm \sqrt{\alpha_1}$$

et

$$v = \pm \sqrt{\alpha_2}.$$

Considérons la section des surfaces par les plans des xz et des yz . Il sera facile de calculer les coordonnées des points de rencontre communs des deux sections avec l'ellipse principale. Ce sont les points que nous avons appelés *fondamentaux*.

On trouve ainsi :

Section par le plan des xz . — Premier point fondamental :

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= 0,8559; \\ x_1 &= 0,3137; \\ z_1 &= 2,0161. \end{aligned}$$

Deuxième point fondamental :

$$\begin{aligned} \sin \varphi_2 &= 0,3379; \\ x_2 &= 0,5708; \\ z_2 &= 0,7961, \end{aligned}$$

et les symétriques de chacun de ces points par rapport aux axes des x et des z .

l'une positive, l'autre négative. Au contraire, pour une valeur impaire de n , il n'y a qu'une surface de Poincaré, un changement de signe pour ε se traduisant simplement par une symétrie par rapport au plan des xy .

Section par le plan des yz. — Premier point fondamental :

$$\sin \varphi'_1 = 0,8652;$$

$$y'_1 = 0,3508;$$

$$z'_1 = 2,0335.$$

Deuxième point fondamental :

$$\sin \varphi'_2 = 0,3416;$$

$$y'_2 = 0,6596;$$

$$z'_2 = 0,8047,$$

et les symétriques de chacun de ces points par rapport aux axes des y et des z .

Existence de points d'inflexion.

Il sera facile, avec ces données, de construire la section de chacune de ces deux surfaces par un de leurs plans de symétrie. Dans le plan des xz , par exemple, on a

$$X = A \cos \varphi + CH \cos \varphi,$$

$$Z = C \sin \varphi + AH \sin \varphi,$$

$$H = \eta (a^2 \sin^2 \varphi - \alpha_1) (a^2 \sin^2 \varphi - \alpha_2) (C^2 - a^2 \sin^2 \varphi)^{-1},$$

η étant égal à ε à un facteur constant près. On donnera à η une valeur arbitraire, petite, et l'on construira la courbe par points. Or si l'on fait cette construction, on s'aperçoit que, même pour de très petites valeurs de η , par exemple $\eta = 0,02$, la section semble présenter des inflexions, alors que, même pour des valeurs beaucoup plus grandes de η , la surface piriforme n'en présentait pas.

On pourrait former la quantité

$$X'Z'' - X''Z'$$

comme nous l'avons fait pour la surface d'ordre 3, et chercher son signe : mais ce serait un calcul très compliqué. Nous nous contenterons de prouver que, pour certaines valeurs de η , certains points de la section sont des points d'inflexion.

Quelles remarques peut-on faire sur la grandeur de η ? Dans le cas où η est positif, nous ne pouvons rien dire, sinon que η doit être petit; mais nous ne pouvons pas fixer de limite supérieure à η en nous fondant sur des considérations mécaniques. Dans le cas où η est négatif, au contraire, en faisant un raisonnement identique à celui que nous avons fait pour la surface d'ordre 3, nous pouvons assigner comme limite inférieure à η la valeur $-0,032$.

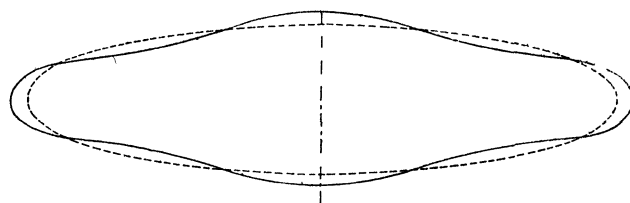
Formons l'équation des inflexions en un des points fondamentaux. Au point défini par $\sin^2 \varphi = \frac{\alpha_2}{\alpha^2}$, on aura

$$\begin{aligned} X'Z'' - Z'X'' = AC - \frac{2\eta}{C^2 - \alpha_2} [\alpha_2(a^2 - \alpha_2)(\alpha_2 - C^2 + 3\alpha_1) - 4(a^2 - 2\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)(C^2 - \alpha_2)] \\ + 8AC\alpha_1 \frac{(\alpha^2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(C^2 - \alpha_2)^2} \eta^2. \end{aligned}$$

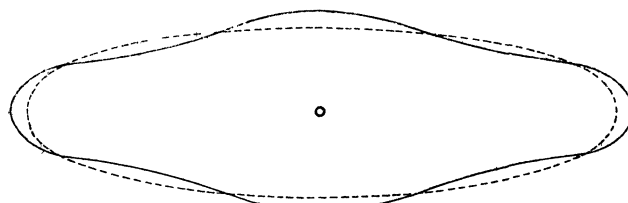
Cette expression s'annule pour $\eta = 0,028$. Donc, même pour cette très faible valeur de η , nous pouvons affirmer qu'il y a des inflexions. De même, pour la surface négative, le point fondamental $\sin^2 \varphi = \frac{\alpha_2}{\alpha^2}$ est un point d'inflexion pour $\eta = -0,028$.

Nous pouvons donc conclure en disant que les sections des surfaces de

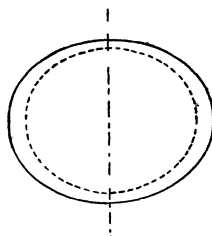
Fig. 4. — Surface de Poincaré positive, d'ordre 4.



Section par le plan des xz .



Section par le plan des yz .

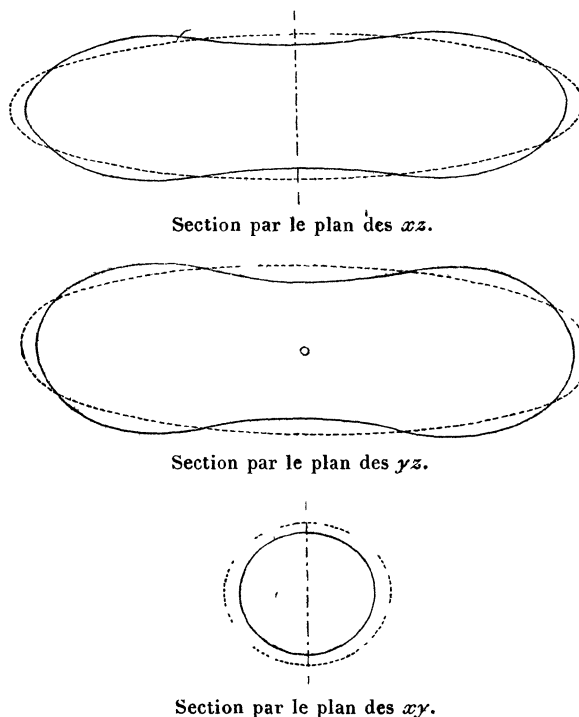


Section par le plan des xy .

Poincaré d'ordre 4 sont susceptibles d'avoir des inflexions, et nous tracerons ces sections en conséquence.

Les figures que nous donnons sont à la même échelle que celle de la surface d'ordre 3. La comparaison du profil exact de la surface positive avec le schéma

Fig. 5. — Surface de Poincaré négative, d'ordre 4.



de Poincaré montre que le Jacobien critique est beaucoup plus allongé qu'il ne le supposait, et que les points fondamentaux ne sont pas disposés de la même façon. Néanmoins l'allure générale de la section n'est pas trop inexacte, et en tout cas ce schéma se rapproche beaucoup plus de la réalité que celui de la surface d'ordre 3.

CHAPITRE IV.

LA SURFACE DE POINCARÉ D'ORDRE 5.

M. Liapounov n'a appliqué sa méthode générale de calcul des éléments du Jacobien critique qu'aux deux cas $n = 3$ et $n = 4$. Nous allons dans ce Chapitre calculer les éléments du Jacobien critique correspondant à la surface de Poincaré d'ordre 5. Ainsi que nous l'avons dit ailleurs, nous emploierons, pour

la première partie du calcul (celle qui est relative à la première équation de Poincaré), le procédé de M. Liapounov, sans modification. Nous allons donc commencer par exposer brièvement cette méthode, dans ses parties essentielles. Le deuxième stade du calcul, relatif à la deuxième équation de Poincaré, sera traité avec les nouvelles formules que nous avons établies au Chapitre I de ce travail. Tout ce qui va suivre sera donc écrit avec les notations de M. Liapounov.

La première équation de Poincaré.

Cette équation s'écrit

$$T_{2,3} = \frac{1}{3} E_{1,0} F_{1,0} - \frac{1}{5} E_{2,3} F_{2,3} = 0.$$

On a posé

$$R = \frac{1}{3} E_{1,0} F_{1,0} = \frac{1}{2} \rho \int_{\rho}^{\infty} \frac{dt}{t \Delta(t)}$$

et

$$Q = \frac{1}{5} E_{2,3} F_{2,3} = \frac{1}{2} (\rho + 1) (\rho + q) \int_{\rho}^{\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+q)\Delta(t)}.$$

L'équation considérée est donc

$$R - Q = 0.$$

Voici de quelle façon M. Liapounov la transforme de façon à rendre sa résolution possible : nous entendons par ce mot de *résolution* le calcul de q , à partir de cette équation, où l'on se donne ρ .

Posant

$$z^2 = \frac{t}{\rho}$$

et

$$\frac{q}{\rho + q} = \lambda,$$

on peut mettre R et Q sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{q}{\rho} + 1} R &= \int_0^1 \frac{z^2 dz}{\sqrt{\rho + z^2} \sqrt{1 - \lambda(1 - z^2)}}, \\ \sqrt{\frac{q}{\rho} + 1} Q &= (\rho + 1) \int_0^1 \frac{z^4 dz}{(\rho + z^2)^{\frac{3}{2}} [1 - \lambda(1 - z^2)]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

On développera alors les intégrales suivant les puissances croissantes de λ , qui

est toujours inférieur à 1, et l'on obtiendra alors les développements suivants :

$$\frac{\Delta R}{\rho} = a_0 + \frac{1}{2} a_1 \lambda + \frac{1.3}{2.4} a_2 \lambda^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} a_3 \lambda^3 + \dots,$$

$$\frac{\Delta Q}{\rho} = b_0 + \frac{3}{2} b_1 \lambda + \frac{3.5}{2.4} b_2 \lambda^2 + \frac{3.5.7}{2.4.6} b_3 \lambda^3 + \dots,$$

avec

$$a_n = (\rho + 1)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{(1 - z^2)^n z^2 dz}{(\rho + z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$b_n = (\rho + 1)^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{(1 - z^2)^n z^4 dz}{(\rho + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'équation devient alors

$$a_0 - b_0 + \left(\frac{1}{2} a_1 - \frac{3}{2} b_1 \right) \lambda + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} a_2 - \frac{5}{4} b_2 \right) \lambda^2 + \dots = 0.$$

Avec les notations suivantes

$$a_0 - b_0 = c,$$

$$\frac{2n+1}{2n} b_n - \frac{1}{2n} a_n = l_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

M. Liapounov l'écrit

$$\lambda = \frac{c}{f(\lambda)},$$

où

$$f(\lambda) = l_0 + \frac{3}{2} l_1 \lambda + \frac{3.5}{2.4} l_2 \lambda^2 + \dots$$

Les coefficients a_n et b_n se calculent aisément au moyen de formules de récurrence. On a tout d'abord

$$a_0 = \frac{1}{2} (\rho + 1) - \frac{1}{2} \rho \sqrt{\rho + 1} \log \frac{1 + \sqrt{\rho + 1}}{\sqrt{\rho}},$$

$$b_0 = (\rho + 1) (3a_0 - 1)$$

Puis, en partant de l'identité

$$\frac{d}{dz} \left[z^3 (1 - z^2)^{n+1} (\rho + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{(2n+5)(1 - z^2)^{n+1} - (2n+2)(1 - z^2)^n}{(\rho + z^2)^{\frac{1}{2}}} z^2 dz - \frac{(1 - z^2)^{n+1}}{(\rho + z^2)^{\frac{1}{2}}} z^4 dz$$

$$= \frac{(2n+4)(1 - z^2)^{n+1} - (2n+1)(1 - z^2)^n}{(\rho + z^2)^{\frac{1}{2}}} z^2 dz - (\rho + 1) \frac{(1 - z^2)^n}{(\rho + z^2)^{\frac{3}{2}}} z^4 dz,$$

on obtient les formules

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+4} a_n + \frac{1}{2n+4} b_n, \\ b_{n+1} &= (\rho+1)[(2n+5)a_{n+1} - (2n+2)a_n]. \end{aligned}$$

On calculera donc, ρ étant donné, les a_i et b_i jusqu'à un certain rang, puis on en déduira c et les l_i ; on formera ensuite l'équation

$$\lambda = \frac{c}{f(\lambda)}$$

dont il s'agit de trouver la racine λ . Comme $f(\lambda)$ est une fonction croissante de λ , si λ_0 est un nombre arbitraire inférieur à 1, la racine sera toujours comprise entre λ_0 et $\frac{c}{f(\lambda_0)}$. On pourra ainsi resserrer les limites de la racine cherchée autant qu'on le voudra. Ce procédé simple donne de très bons résultats.

λ une fois connu, on en déduira q et $\Delta \frac{R}{\rho}$. Le problème sera entièrement résolu, et il n'y aura plus qu'à passer au calcul de la seconde équation.

Conduite générale du calcul.

Ceci posé, examinons la marche du calcul avec son application au cas qui nous occupe. Comme nous l'avons dit au Chapitre I, nous commençons par chercher une solution approximative, devant nous servir de point de départ pour les calculs de précision. Nous avons donc recours aux fonctions de Legendre.

Pour $n = 5$, le polynôme de Legendre est

$$P_5 = \frac{63}{8} z^5 - \frac{35}{4} z^3 + \frac{15}{8} z.$$

Le polynôme f_{n-1} sera donné par

$$f_4(z) = \frac{1}{5!} \begin{vmatrix} 3z & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5z & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 7z & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 9z \end{vmatrix},$$

en utilisant la formule que nous avons établie, c'est-à-dire

$$f_4 = \frac{63}{8} z^4 - \frac{49}{8} z^2 + \frac{8}{15}.$$

On formera ainsi aisément l'équation approchée.

H.

Si ρ_0 est alors la valeur de ρ déduite de cette équation, on calculera les nombres a_i , b_i , l_i de M. Liapounov par les formules

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}(\rho_0 + 1) - \frac{1}{2}\rho_0\sqrt{\rho_0 + 1} \log \frac{1 + \sqrt{\rho_0 + 1}}{\sqrt{\rho_0}}, \\ b_0 &= (\rho_0 + 1)(3a_0 - 1), \\ c &= a_0 - b_0, \\ a_1 &= \frac{a_0 + b_0}{4}, \\ b_1 &= (\rho_0 + 1)(5a_1 - 2a_0), \\ l_0 &= \frac{3b_1 - a_1}{2}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, avec

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= \frac{2i+1}{2i+4}a_i + \frac{1}{2i+4}b_i, \\ b_{i+1} &= (\rho_0 + 1)[(2i+5)a_{i+1} - (2i+2)a_i], \\ l_{i+1} &= \frac{(2i+1)b_i - a_i}{2i}. \end{aligned}$$

Puis on calculera λ , comme nous l'avons dit, par l'équation

$$\lambda = \frac{c}{f(\lambda)},$$

et l'on en déduira q par la formule

$$q = \frac{\rho\lambda}{1-\lambda}.$$

Enfin on formera

$$\frac{\Delta R}{\rho} = a_0 + \frac{1}{2}a_1\lambda + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}a_2\lambda^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}a_3\lambda^3 + \dots$$

Il faudra alors passer à la seconde partie du calcul, c'est-à-dire à la formation de J . Il faut calculer d'abord la fonction de Lamé correspondante :

$$E(\rho) = \sqrt{\rho+1}(\rho^2 + s\rho + 1) = \sqrt{\rho+1}(\rho + h_1)(\rho + h_2)$$

Cherchons à exprimer s et r de façon simple. Les équations de condition tirées de l'équation de Lamé s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} + \frac{3}{h_1-1} + \frac{1}{h_1-q} &= \frac{4}{h_2-h_1}, \\ \frac{1}{h_2} + \frac{3}{h_2-1} + \frac{1}{h_2-q} &= \frac{4}{h_1-h_2}. \end{aligned}$$

De ces deux équations, comme $h_1 + h_2 = s$ et $h_1 h_2 = r$, nous tirerons d'une part

$$r = \frac{sq}{12q + 8 - 9s}$$

et d'autre part

$$27s^3 - 6s^2(10q + 7) + 4s(8q^2 + 17q + 4) - 8q(3q + 2) = 0.$$

Cette équation du troisième degré permet de calculer s en fonction de q . On devra en prendre la plus grande racine; si l'on fait $q = 0$, l'équation devient

$$27s^3 - 42s^2 + 16s = 0,$$

dont les racines sont 0, $\frac{6}{9}$ et $\frac{8}{9}$. La racine s que nous cherchons est donc celle qui se réduit à $\frac{8}{9}$ pour $q = 0$. On pourra alors la développer suivant les puissances croissantes de q , et écrire

$$9s = 8 + 5q + \frac{105}{8}q^2 + \dots$$

Ce développement permettra de calculer aisément s , en fonction de q . On en déduira ensuite r par la formule indiquée ci-dessus (¹). Tout est prêt alors pour le calcul de J . Voyons quelle est sa forme.

Nous avons dit que l'on avait

$$\frac{1}{J} = \rho \left(\frac{2\Delta'}{\Delta} - \frac{2H'}{H} \right)$$

avec

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathfrak{B}(0)}{\Psi(0)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{\Psi(-1)} \right] + \frac{\mathfrak{B}(\rho)}{(\rho+1)\Psi(\rho)} - \frac{\mathfrak{B}(-1)}{(\rho+1)\Psi(-1)}.$$

Dans le cas actuel, nous aurons

$$\begin{aligned} \Psi(\rho) &= \rho^2 + s\rho + r, \\ \Psi(-1) &= 1 - s + r, \\ \Psi(0) &= r \end{aligned}$$

(¹) Dans cette analyse, nous avons suivi une marche parallèle à celle de M. Liapounov dans le cas $n = 4$.

et

$$\mathfrak{B}(\rho) = \frac{2\rho + s}{s^2 - 4r},$$

$$\mathfrak{B}(-1) = \frac{s - 2}{s^2 - 4r},$$

$$\mathfrak{B}(0) = \frac{s}{s^2 - 4r}.$$

D'autre part, nous écrirons

$$H' = \frac{\mathfrak{B}'(\rho)}{(\rho + 1)\Psi(\rho)} - \frac{\mathfrak{B}(\rho)}{(\rho + 1)^2\Psi(\rho)} - \frac{\mathfrak{B}(\rho)\Psi'(\rho)}{(\rho + 1)\Psi^2(\rho)}$$

avec

$$\Psi'(\rho) = 2\rho + s,$$

$$\mathfrak{B}'(\rho) = \frac{2}{s^2 - 4r}.$$

Enfin on se souviendra que

$$2\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho + q} + \frac{1}{\rho + 1}.$$

Avec ces formules, le calcul de J ne présentera aucune difficulté. On formera alors la quantité

$$\frac{\Delta R}{\rho} - J,$$

dont le signe fixera la position de la valeur de départ ρ_0 par rapport à la valeur exacte ρ , par la règle suivante :

$$\frac{\Delta R}{\rho} - J > 0, \quad \rho_0 > \rho,$$

$$\frac{\Delta R}{\rho} - J < 0, \quad \rho_0 < \rho.$$

Une fois ce calcul fait, on partira d'une nouvelle valeur de ρ convenablement choisie, de façon à trouver deux limites, aussi voisines que possible, entre lesquelles se trouve la valeur exacte.

Indiquons à présent les résultats que cette méthode nous a donnés.

Le calcul approché nous a montré que ρ devait être voisin de 0,03. Nous avons été conduit ensuite à essayer la valeur 0,02900.

Nous avons trouvé alors, pour $\rho = 0,02900$:

$$a_0 = 0,47816;$$

$$b_0 = 0,44709;$$

$$a_1 = 0,23131;$$

$$b_1 = 0,20603;$$

$$a_2 = 0,14999;$$

$$b_2 = 0,12772;$$

$$a_3 = 0,10971;$$

$$b_3 = 0,08999;$$

$$a_4 = 0,08579;$$

$$b_4 = 0,06798;$$

$$a_5 = 0,07000;$$

$$b_5 = 0,05355;$$

d'où

$$c = 0,03107;$$

$$l_0 = 0,19339;$$

$$l_1 = 0,12215;$$

$$l_2 = 0,08670;$$

$$l_3 = 0,06575;$$

$$l_4 = 0,05190$$

et enfin

$$\lambda = 0,13958;$$

$$q = 0,004705;$$

d'où

$$\frac{\Delta R}{\rho} = 0,49548$$

et

$$s = 0,89159;$$

$$r = 0,12847;$$

d'où

$$J = 0,49420$$

et enfin

$$\frac{\Delta R}{\rho} - J = + 0,00128.$$

Par conséquent on a

$$\rho < 0,02900.$$

Nous avons essayé alors la valeur $\rho = 0,02895$, et trouvé

$$a_0 = 0,47818;$$

$$b_0 = 0,44713;$$

$$a_1 = 0,23133;$$

$$b_1 = 0,20609;$$

$$a_2 = 0,15001;$$

$$b_2 = 0,12836;$$

$$a_3 = 0,10980;$$

$$b_3 = 0,09069;$$

$$a_4 = 0,08593;$$

$$b_4 = 0,06875;$$

$$a_5 = 0,07018;$$

$$b_5 = 0,05458;$$

d'où

$$c = 0,03105;$$

$$l_0 = 0,19347;$$

$$l_1 = 0,12295;$$

$$l_2 = 0,08750;$$

$$l_3 = 0,06660;$$

$$l_4 = 0,05302$$

et

$$\lambda = 0,13936;$$

$$q = 0,004688;$$

d'où

$$\frac{\Delta R}{\rho} = 0,49547;$$

$$s = 0,89152;$$

$$r = 0,12846$$

et

$$J = 0,50150;$$

d'où enfin

$$\frac{\Delta R}{\rho} - J = -0,00603,$$

c'est-à-dire

$$\rho > 0,02895.$$

Nous avons donc deux limites, supérieure et inférieure, pour ρ ; il n'est pas possible de pousser plus loin, sans faire le calcul avec beaucoup plus de décimales. Nous nous en tiendrons donc là, et nous écrirons

$$0,02895 < \rho < 0,02900,$$

$$0,004688 < q < 0,004705,$$

$$0,89152 < s < 0,89159,$$

$$0,12846 < r < 0,12847.$$

Équations et forme de la surface.

Nous passerons alors à nos notations ordinaires, par les formules que nous avons indiquées dans l'Introduction, et nous aurons

$$\begin{aligned} 3,2047 < C < 3,2066, \\ 0,5798 < B < 0,5800, \\ 0,5378 < A < 0,5380. \end{aligned}$$

En remarquant que ρ ne doit pas différer beaucoup de 0,02899, valeur obtenue par interpolation, nous adopterons pour les axes du Jacobien critique les valeurs

$$\begin{aligned} A &= 0,5379; \\ B &= 0,5799; \\ C &= 3,205, \end{aligned}$$

qui peuvent être considérées comme exactes à une unité près de l'ordre du dernier chiffre écrit.

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} a^2 &= 9,9828; \\ b^2 &= 9,9358, \end{aligned}$$

et, la fonction de Lamé s'écrivant

$$R_{1,0} = \rho(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2),$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2,887; \\ \alpha_2 &= 8,179. \end{aligned}$$

La surface de Poincaré d'ordre 5 sera définie, en première approximation, par le déplacement normal

$$\zeta = \varepsilon \frac{M_{5,0}(\mu) N_{5,0}(\nu)}{\sqrt{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)}},$$

et l'on obtiendra ses équations par les formules ordinaires

$$X = x + \frac{x}{A^4} \zeta \left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \dots$$

avec

$$\begin{aligned} \zeta &= \varepsilon z \left(\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_1 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_1} - 1 \right) \\ &\times \left(\frac{x^2}{\alpha_2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pour achever de déterminer la surface, calculons les coordonnées des points fondamentaux de ses sections par les deux plans de symétrie, comme nous l'avons fait pour la surface d'ordre 4. Nous trouvons :

Section par le plan des xz . — Premier point fondamental :

$$x_1 = 0,229;$$

$$z_1 = 2,901.$$

Deuxième point fondamental :

$$x_2 = 0,453;$$

$$z_2 = 1,723.$$

Section par le plan des yz . — Premier point fondamental :

$$y'_1 = 0,247;$$

$$z'_1 = 2,907.$$

Deuxième point fondamental :

$$y'_2 = 0,491;$$

$$z'_2 = 1,728.$$

Il faut y ajouter, outre les symétriques de chacun de ces points par rapport aux axes du Jacobien, les sommets du petit axe de l'ellipse principale. L'intersection de la surface avec le Jacobien critique se compose en effet de la petite ellipse principale, $z = 0$, et des quatre lignes de courbure définies par

$$v = \pm \sqrt{\alpha_1},$$

$$v = \pm \sqrt{\alpha_2}.$$

La section par le plan des yz est donc fort peu différente de la section par le plan des xz , ce qui n'est pas étonnant, puisque, à mesure que n grandit, on obtient des surfaces qui se rapprochent de plus en plus de la forme de révolution.

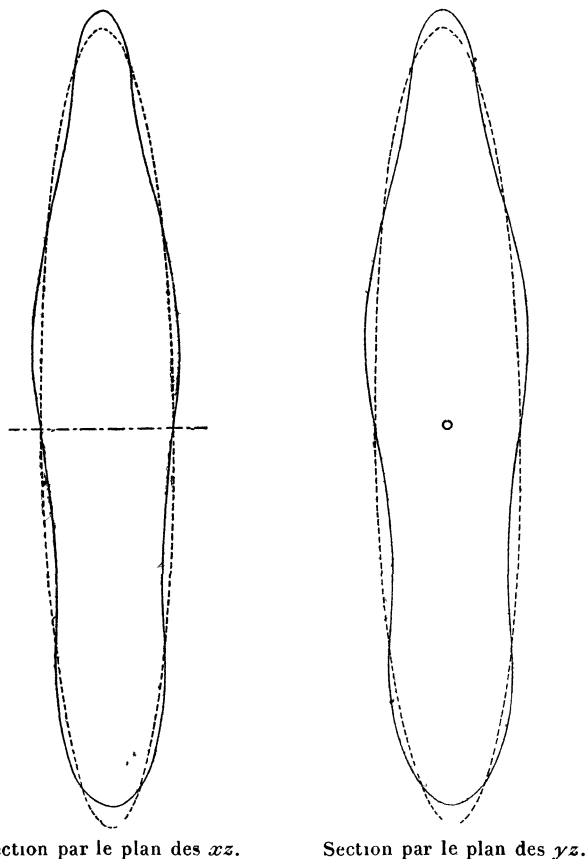
Ces sections sont représentées (*fig. 6*), avec la même échelle que pour les surfaces d'ordres 3 et 4. On voit que le Jacobien critique est très allongé; et il semble probable qu'il y ait des inflexions, même pour de très petites valeurs de ε .

Signalons les propriétés géométriques suivantes, extensions de celles que nous avons données pour la surface de Poincaré d'ordre 3 :

1° En deux points fondamentaux symétriques par rapport au petit axe de l'ellipse, les tangentes à la section font entre elles, quel que soit ε , un angle constant, égal à l'angle des tangentes à l'ellipse en ces points. Ce résultat s'étend d'ailleurs à toute surface de Poincaré d'ordre impair;

2° La construction, donnée pour $n=3$, du centre de courbure en un pseudo-

Fig. 6. — Surface de Poincaré, d'ordre 5.



sommet, subsiste sans modification pour le cas $n=5$, et d'ailleurs pour n impair quelconque.

CHAPITRE V.

LES SURFACES DE POINCARÉ D'ORDRE 6.

Afin de voir de quelle façon s'appliquent nos formules lorsque n est pair, nous allons examiner le cas $n=6$ et chercher à calculer les éléments du Jacobien critique. Nous nous contenterons d'ailleurs d'une précision beaucoup

moindre que dans le cas précédent. Comme au Chapitre IV, nous emploierons les notations de M. Liapounov. La première partie du calcul, c'est-à-dire la détermination des quantités q et $\Delta \frac{R}{\rho}$, ne présente rien de nouveau : elle se fait en effet exactement de la même manière, que n soit pair ou impair. Passons à la deuxième partie, le calcul de J . Il faut commencer par former les polynômes E et B .

Posons

$$E(\rho) = (\rho + h_1)(\rho + h_2)(\rho + h_3) = \rho^3 + s\rho^2 + \varpi\rho + r.$$

Cherchons à en exprimer les coefficients. Les équations de condition, déduites de l'équation de Lamé, s'écriront

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_1-1} + \frac{1}{h_1-q} = \frac{4}{h_2-h_1} + \frac{4}{h_3-h_1}, \\ \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_2-1} + \frac{1}{h_2-q} = \frac{4}{h_1-h_2} + \frac{4}{h_3-h_2}, \\ \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_3-1} + \frac{1}{h_3-q} = \frac{4}{h_1-h_3} + \frac{4}{h_2-h_3}. \end{cases}$$

En multipliant la première de ces équations par $(h_1-1)(h_1-q)$, la deuxième par $(h_2-1)(h_2-q)$, la troisième par $(h_3-1)(h_3-q)$, et ajoutant, nous rappelant que

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + h_3 &= s; \\ h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3 &= \varpi, \\ h_1 h_2 h_3 &= r, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$3s - 6 - 6q + \frac{q\varpi}{r} = 12q + 12 - 8s;$$

d'où

$$(1) \quad r = \frac{q\varpi}{18(q+1) - 11s}.$$

Revenant aux équations (I), et multipliant la première par $h_1(h_1-1)(h_1-q)$, les deux autres par les quantités analogues et ajoutant, nous obtenons

$$(2) \quad 18\varpi = 11s^2 - 10(q+1)s - 9q.$$

Enfin, multipliant la première des équations (I) par $h_1 - q$, la deuxième par $h_2 - q$, la troisième par $h_3 - q$ et ajoutant, nous arrivons à l'équation

$$(3) \quad 21r^2 + 19rs - 20r\varpi - 18r - 2q\varpi r - q\varpi s + \varpi^2 q + \varpi q + 2qsr - 3qr = 0.$$

En éliminant r et ϖ entre ces trois dernières équations, on obtiendrait une équation du sixième degré à laquelle doit satisfaire s ; mais ce calcul serait très

compliqué. Nous procéderons de la façon suivante : cherchons à développer s , ϖ et r suivant les puissances croissantes de q . Comme q est certainement très petit, nous négligerons les termes en q^2 , et nous écrirons

$$\begin{aligned}s &= s_1 + s_2 q, \\ \varpi &= \varpi_1 + \varpi_2 q, \\ r &= r_1 + r_2 q.\end{aligned}$$

Remarquons alors que, si l'on fait $q = 0$, le polynôme de Lamé E se confond avec le polynôme de Legendre d'ordre 6. Avec les notations ordinaires, ce polynôme s'écrit

$$P_6(z) = \frac{1}{48} (603z^6 - 945z^4 + 315z^2 - 15)$$

ou, avec les notations de M. Liapounov, comme $z^2 = \rho + 1$,

$$231\rho^3 + 378\rho^2 + 168\rho + 16,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{18}{11}, \\ \varpi_1 &= \frac{8}{11}, \\ r_1 &= \frac{16}{231}.\end{aligned}$$

D'autre part, l'équation (1) s'écrira

$$r_1 + r_2 q = \frac{q\varpi_1 + q^2\varpi_2}{18q + 18 - (18 + 11qs_2)}$$

ou, en faisant $q = 0$,

$$r_1 = \frac{\varpi_1}{18 - 11s_2};$$

d'où nous tirons

$$s_2 = \frac{15}{22}$$

et, par conséquent,

$$11s = 18 + \frac{15}{2} q.$$

Cette formule donne le moyen de calculer s connaissant q . On en déduira ensuite ϖ par l'équation (2), où l'on continuera à négliger q^2 ; puis on aura r par (1), qui s'écrira plus simplement

$$r = \frac{2\varpi}{21}.$$

Une fois le polynome E formé, il ne reste plus qu'à former B. On y arrivera soit par les opérations du plus grand commun diviseur entre E et E', soit en écrivant l'identité fondamentale sous la forme

$$(\alpha_0 \rho + \alpha_1)(\rho^3 + s\rho^2 + \varpi\rho + r) + (\beta_0 \rho^2 + \beta_1 \rho + \beta_2)(3\rho^2 + 2s\rho + \varpi) = 1$$

et égalant les coefficients des mêmes puissances de ρ dans les deux membres. En éliminant les α , on obtiendra les équations

$$\begin{aligned} s\beta_0 - 3\beta_1 + \frac{\varpi}{r}\beta_2 &= \frac{1}{r}, \\ 2\varpi\beta_0 - 2s\beta_1 + \left(\frac{\varpi s}{r} - 3\right)\beta_2 &= \frac{s}{r}, \\ 3r\beta_0 - \varpi\beta_1 + \left(\frac{\varpi^2}{r} - 2s\right)\beta_2 &= \frac{\varpi}{r}; \end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{6\varpi - 2s^2}{P}, \\ \beta_1 &= \frac{7\varpi s - 2s^3 - 9r}{P}, \\ \beta_2 &= \frac{-s^2\varpi + 4\varpi^2 - 3rs}{P} \end{aligned}$$

avec

$$P = 4s^3r - 18\varpi sr - \varpi^2 s^2 + 4\varpi^3 + 27r^2.$$

Afin de simplifier un peu le calcul, nous poserons

$$\begin{aligned} b_0 &= 6\varpi - 2s^2, \\ b_1 &= 7\varpi s - 2s^3 - 9r, \\ b_2 &= -s^2\varpi + 4\varpi^2 - 3rs; \end{aligned}$$

nous aurons donc

$$\beta_0 = \frac{b_0}{P}, \quad \dots$$

et

$$P = \varpi b_2 - 2rb_1 + 9r^2 - \varpi rs.$$

Tout est connu alors pour le calcul de J : nous avons

$$H = \frac{1}{2} \frac{B(0)}{E(0)} + \frac{B(\rho)}{E(\rho)} = \frac{1}{2} \frac{b_2}{Pr} + \frac{b_0\rho^2 + b_1\rho + b_2}{P(\rho^3 + s\rho^2 + \varpi\rho + r)}$$

et

$$H' = \frac{2b_0\rho + b_1}{P(\rho^3 + s\rho^2 + \varpi\rho + r)} - \frac{(b_0\rho^2 + b_1\rho + b_2)(3\rho^2 + 2s\rho + \varpi)}{P(\rho^3 + s\rho^2 + \varpi\rho + r)^2}$$

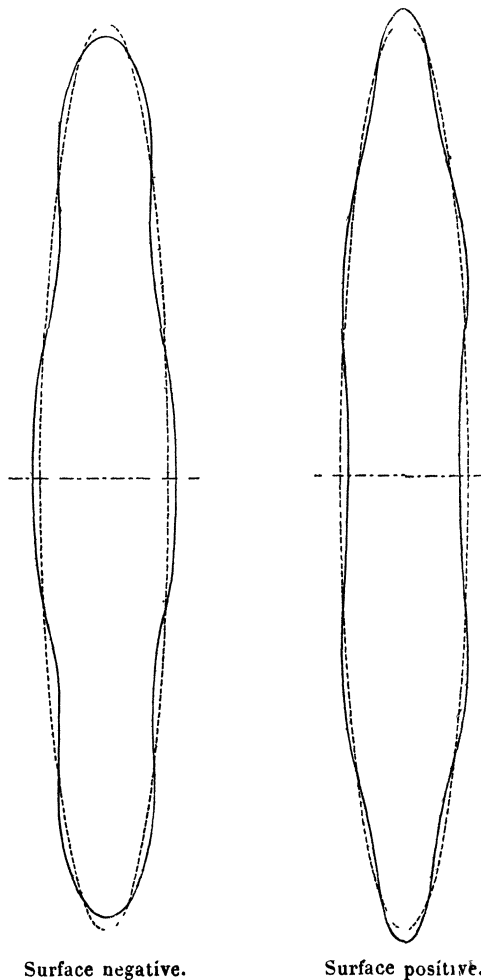
et nous savons que

$$\frac{1}{J} = \rho \left(\frac{2\Delta'}{\Delta} - 2 \frac{H'}{H} \right).$$

Forme des surfaces d'ordre 6.

Nous avons effectué le calcul ci-dessus; sans entrer dans les détails de l'opération, indiquons seulement les conclusions que nous en avons tirées : ρ , cer-

Fig 7. — Surfaces de Poincaré, d'ordre 6 (section par le plan des xz).



tainement compris entre 0,019 et 0,021, est extrêmement voisin de 0,020. C'est cette valeur que nous adopterons.

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\rho &= 0,020; \\ q &= 0,0024; \\ s &= 1,638; \\ \varpi &= 0,726; \\ r &= 0,069.\end{aligned}$$

Passant à nos notations, nous trouvons, pour le Jacobien critique correspondant à $n = 6$, les axes

$$\begin{aligned}A &= 0,51; \\ B &= 0,54; \\ C &= 3,64;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}a^2 &= 12,99; \\ b^2 &= 12,96.\end{aligned}$$

De l'équation

$$\rho^3 + s\rho^2 + \varpi\rho + r = 0$$

nous tirons

$$\begin{aligned}h_1 &= 0,131; \\ h_2 &= 0,577; \\ h_3 &= 0,920;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 11,28; \\ \alpha_2 &= 5,49; \\ \alpha_3 &= 1,04.\end{aligned}$$

Nous pouvons alors, comme nous l'avons fait pour les surfaces précédentes, calculer les coordonnées des points fondamentaux de la section par le plan des xz ; nous aurons :

Premier point fondamental :

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,18; \\ z_1 &= 3,39.\end{aligned}$$

Deuxième point fondamental :

$$\begin{aligned}x_2 &= 0,38; \\ z_2 &= 2,37.\end{aligned}$$

Troisième point fondamental :

$$\begin{aligned}x_3 &= 0,49; \\ z_3 &= 1,03.\end{aligned}$$

La section par le plan des yz serait très peu différente.

Nous donnons, dessinées à la même échelle que dans les Chapitres précédents, les sections par le plan des xz des deux surfaces de Poincaré d'ordre 6, positive et négative.

CHAPITRE VI.

LES SURFACES DE POINCARÉ AU POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE.

Une théorie complète des surfaces de Poincaré considérées au point de vue géométrique serait très ardue, en raison de la complication des équations de ces surfaces. Comme nous l'avons vu, en effet, les coordonnées de la surface d'ordre 3, qui est la plus simple, ont, écrites en fonction des coordonnées elliptiques sur l'ellipsoïde, la forme suivante :

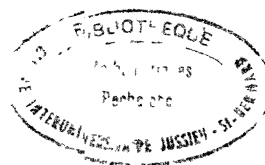
$$\begin{aligned} X &\approx A \sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}} \\ &\quad + \frac{\varepsilon \mu \nu}{A \sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}} \frac{(\mu^2 - \alpha)(\nu^2 - \alpha)}{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)} \sqrt{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - \alpha^2)}, \\ Y &\approx B \sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(A^2 - B^2)(C^2 - B^2)}} \\ &\quad + \frac{\varepsilon \mu \nu}{B \sqrt{(A^2 - B^2)(C^2 - B^2)}} \frac{(\mu^2 - \alpha^2)(\nu^2 - \alpha)}{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)} \sqrt{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}, \\ Z &\approx \frac{C}{ab} \mu \nu + \varepsilon \frac{\mu^2 \nu^2}{C ab} \frac{(\mu^2 - \alpha)(\nu^2 - \alpha)}{(\mu^2 - C^2)(\nu^2 - C^2)}. \end{aligned}$$

La forme la plus simple s'obtient en introduisant les fonctions elliptiques. Nous définissons la fonction pu par ses racines

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{2a^2 - b^2}{3}, \\ e_2 &= \frac{2b^2 - a^2}{3}, \\ e_3 &= -\frac{a^2 + b^2}{3} \end{aligned}$$

et nous posons

$$\begin{aligned} pu &= \mu^2 - \frac{a^2 + b^2}{3}, \\ pv &= \nu^2 - \frac{a^2 + b^2}{3}, \end{aligned}$$



ce qui nous donne

$$\begin{aligned} u^2 - a^2 &= pu - e_1, & v^2 - \alpha^2 &= pv - e_1, \\ u^2 - b^2 &= pu - e_2, & v^2 - b^2 &= pv - e_2, \\ u^2 &= pu - e_3, & v^2 &= pv - e_3. \end{aligned}$$

Introduisons la notation habituelle

$$\sigma_{\alpha 0} u = \sqrt{pu - e_{\alpha}}.$$

Nous pourrions alors mettre les coordonnées d'un point de la surface piriforme sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X &= \frac{A}{\sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}} \sigma_{10} u \sigma_{10} v \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{A \sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}} \sigma_{10} u \sigma_{10} v \sigma_{30} u \sigma_{30} v \frac{(\sigma_{30}^2 u - \alpha)(\sigma_{30}^2 v - \alpha)}{(\sigma_{30}^2 u - C^2)(\sigma_{30}^2 v - C^2)}, \\ Y &= \frac{B}{\sqrt{(C^2 - B^2)(A^2 - B^2)}} \sigma_{20} u \sigma_{20} v \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{B \sqrt{(A^2 - B^2)(C^2 - B^2)}} \sigma_{20} u \sigma_{20} v \sigma_{30} u \sigma_{30} v \frac{(\sigma_{30}^2 u - \alpha)(\sigma_{30}^2 v - \alpha)}{(\sigma_{30}^2 u - C^2)(\sigma_{30}^2 v - C^2)}, \\ Z &= \frac{C}{ab} \sigma_{30} u \sigma_{30} v + \frac{\varepsilon}{abC} \sigma_{30}^2 u \sigma_{30}^2 v \frac{(\sigma_{30}^2 u - \alpha)(\sigma_{30}^2 v - \alpha)}{(\sigma_{30}^2 u - C^2)(\sigma_{30}^2 v - C^2)}. \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier que, dans ces formules, a , b et C ne sont pas arbitraires; ces trois quantités sont liées par les équations de Poincaré. Quant à α , il ne dépend que de a et b : c'est la plus petite racine de l'équation

$$5\alpha^2 - 4\alpha(a^2 + b^2) + 3a^2b^2 = 0.$$

ε est une constante arbitraire; nous pouvons, en nous affranchissant un peu du strict point de vue mécanique, supposer qu'elle est quelconque et non plus seulement petite; nous définirons ainsi une infinité de piroïdes formant une famille.

Ombilics des surfaces de Poincaré.

La représentation de la figure piriforme au moyen des fonctions de Weierstrass est celle qui permet le mieux de rechercher les propriétés géométriques générales de cette surface. Malheureusement, même sous cette forme, l'expression des coordonnées est encore bien peu simple; et il ne faut pas espérer obtenir beaucoup de résultats intéressants.

Les fonctions les plus élémentaires des coordonnées, par exemple les coefficients du plan tangent au point u, v , sont d'une grande complication. On peut néanmoins les former aisément pour les points où $\zeta = 0$, c'est-à-dire le long des lignes d'intersection avec l'ellipsoïde, ce qui introduit une grande simplification dans les calculs. On constate alors que, ni le long de la petite ellipse principale, ni le long de la ligne $v = \pm \sqrt{\alpha}$, le piroïde et l'ellipsoïde ne se coupent sous un angle constant. Ces lignes, qui sont des lignes de courbure pour l'ellipsoïde, n'en sont donc pas pour le piroïde.

L'examen de l'expression des coordonnées nous conduit néanmoins à un résultat intéressant. Si nous formons les dérivées partielles, par rapport à u et v , de X, Y et Z , en nous souvenant que

$$\frac{d}{du} \sigma_{\lambda_0} u = -\sigma_{\mu_0} u \sigma_{v_0} u,$$

nous constaterons que chacune de ces six dérivées partielles contient en facteur soit $\sigma_{2_0} u$, soit $\sigma_{2_0} v$. Elles s'annulent donc toutes ensemble pour $\sigma_{2_0} u = \sigma_{2_0} v = 0$, et les points ainsi définis sont dès lors des ombilics pour la surface piroïforme. Or ces points, qui sont définis également, sur l'ellipsoïde, par $\mu^2 = v^2 = b^2$, sont les ombilics de l'ellipsoïde. D'où le théorème :

Les points correspondant aux ombilics de l'ellipsoïde sont des ombilics pour le piroïde.

Nous ferons remarquer que ce théorème est vrai pour toute surface de Poincaré, quel que soit son ordre. Une surface de Poincaré quelconque est en effet représentée au moyen des fonctions σ par les formules

$$\begin{aligned} X &= \frac{A}{\sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}} \sigma_{1_0} u \sigma_{1_0} v + \frac{\varepsilon}{A \sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - A^2)}} \sigma_{1_0} u \sigma_{1_0} v H(u, v), \\ Y &= \frac{B}{\sqrt{(A^2 - B^2)(C^2 - B^2)}} \sigma_{2_0} u \sigma_{2_0} v + \frac{\varepsilon}{B \sqrt{(A^2 - B^2)(C^2 - B^2)}} \sigma_{2_0} u \sigma_{2_0} v H(u, v), \\ Z &= \frac{C}{ab} \sigma_{3_0} u \sigma_{3_0} v + \frac{\varepsilon}{Cab} \sigma_{3_0} u \sigma_{3_0} v H(u, v), \end{aligned}$$

avec, si la surface est d'ordre pair, $n = 2p$,

$$H(u, v) = \frac{(\sigma_{3_0}^2 u - \alpha_1) \dots (\sigma_{3_0}^2 u - \alpha_p) (\sigma_{3_0}^2 v - \alpha_1) \dots (\sigma_{3_0}^2 v - \alpha_p)}{(\sigma_{3_0}^2 u - C^2) (\sigma_{3_0}^2 v - C^2)},$$

et, si elle est d'ordre impair, $n = 2p + 1$,

$$H(u, v) = \sigma_{3_0} u \sigma_{3_0} v \frac{(\sigma_{3_0}^2 u - \alpha_1) \dots (\sigma_{3_0}^2 u - \alpha_p) (\sigma_{3_0}^2 v - \alpha_1) \dots (\sigma_{3_0}^2 v - \alpha_p)}{(\sigma_{3_0}^2 u - C^2) (\sigma_{3_0}^2 v - C^2)}.$$

H.

11

Les six dérivées partielles contiennent encore en facteur soit $\sigma_{20} u$, soit $\sigma_{20} v$, et les points correspondant aux ombilics de l'ellipsoïde sont donc encore des ombilics pour toutes ces surfaces.

Si donc l'on considère la famille de piroïdes obtenue en donnant à ϵ des valeurs quelconques, le lieu des ombilics de ces surfaces se compose des normales au Jacobien critique en ses ombilics. Ces droites ne sont pas normales à tous les piroïdes, ce qui prouve (en vertu d'un théorème de Maurice Levy) que ces surfaces ne font pas partie d'un système triple orthogonal.

Vu et approuvé :

Paris, le 8 mars 1918,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 8 mars 1918,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. POINCARÉ.