

D. WOLKOWITSCH

**Sur les applications de la notion de moment  
d'inertie en géométrie**

*Mémoires des sciences mathématiques*, fascicule 121 (1952)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1952\\_\\_121\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1952__121__1_0)

© Gauthier-Villars, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BSM 3962

# MÉMORIAL

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,

MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

*DIRECTEUR*

**Henri VILLAT**

Membre de l'Institut,  
Professeur à la Sorbonne,

Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXI

Sur les applications de la notion de moment d'inertie en géométrie

Par D. WOLKOWITSCH



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1952



Copyright by Gauthier-Villars, 1952.

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation  
réservés pour tous pays.**

---

SUR LES APPLICATIONS  
DE LA  
NOTION DE MOMENT D'INERTIE  
EN GÉOMÉTRIE

Par D. WOLKOWITSCH.

---

**1. Introduction.** — Considérons les représentations géométriques usuelles, réalisées à l'aide de courbes et de surfaces du second degré, ainsi l'ellipsoïde d'inertie, la surface directrice des efforts en élasticité, et, sans sortir de la géométrie pure, l'indicatrice de Dupin. Ces variétés du second degré définissent la variation autour d'un point, de certaines grandeurs qui ont un caractère commun, origine de l'analogie de représentation, et qui est lui-même fondamental dans la théorie des coniques et des quadriques : la réciprocité.

Cette réciprocité apparaît à tous moments dans les mathématiques ; dès le début, on trouve l'interversion de l'ordre des termes d'une somme, plus tard c'est la polarité dans les variétés du second degré, l'interversion de l'ordre des intégrations, etc.

Les exemples suivants montrent, dans deux cas concrets, le lien existant entre la quadrique d'inertie (conique s'il s'agit d'un système plan) et, d'une part, l'indicatrice de Dupin et, d'autre part, la quadrique des efforts élastiques.

L'indicatrice de Dupin de la surface des carènes d'un flotteur est l'homothétique de l'ellipse d'inertie de l'aire de la flottaison : c'est une propriété classique (*cf.* par exemple Le Besnerais [8]).

La quadrique des efforts caractérisant un état de contrainte donné,

peut être considérée comme une quadrique d'inertie analogue à celle de Culmann, les efforts normaux correspondant aux moments d'inertie et les efforts tangentiels, à certains moments centrifuges. Ce résultat est donné par A. Föppl [4] en se limitant au cas où la quadrique des efforts est un ellipsoïde, mais la généralisation est aisée.

Laissant de côté pour une étude ultérieure cette analogie entre l'inertie et l'élasticité, analogie comme il en existe tant en physique ou en mécanique, nous nous bornerons à considérer un ellipsoïde (ou une ellipse) comme « l'indicatrice d'inertie » d'un système de points matériels; et, au lieu de faire, comme d'ordinaire, une interprétation géométrique de certaines propriétés de l'inertie, nous ferons une interprétation mécanique de la géométrie pour ne pas dire « inertique ». Cette interprétation permet de profiter du caractère concret de certaines propriétés des systèmes de points matériels pour obtenir, par une voie quasi intuitive, la démonstration simple de nombreuses propriétés classiques des quadriques, et même d'en formuler de nouvelles.

Le point fondamental est que : un ellipsoïde quelconque peut être considéré comme un ellipsoïde  $E_C$  de Culmann, tandis qu'il ne peut être un ellipsoïde de Poinot  $E_P$ , que sous certaines conditions imposées aux longueurs de ses axes.

Au point de vue des applications géométriques, l'ellipsoïde  $E_C$  présente l'avantage d'avoir un lien très simple avec la famille des surfaces enveloppes des plans de rayon de giration constant; celles-ci sont les homofocales de sa quadrique conjuguée  $E'_C$  (quadrique qui a même cône asymptote que  $E_C$ ). Nous les appelons surfaces isogires; toute quadrique à centre peut être considérée comme une isogire d'un certain système.

L'ellipsoïde  $E_C$  est défini comme une enveloppe de plans [13], tandis que l'ellipsoïde  $E_P$  se détermine comme un lieu de points. Ce caractère tangentiel de la surface  $E_P$  est particulièrement important, parce qu'il permet de ne faire aucune distinction entre un système plan et un système dans l'espace, de sorte que la propriété additive des systèmes de masses conduit, tout naturellement, à cette propriété sur laquelle nous terminerons cette introduction : un système  $S$  étant formé de la somme de deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$ , si nous appelons  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e$  les quadriques centrales d'inertie, les trois quadriques conjuguées  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon$  appartiennent à un faisceau linéaire tangentiel [13].

2. **Rappel des propriétés de l'ellipsoïde d'inertie.** — Un système S rigide, de masses ponctuelles  $m_i$  appliquées en des points  $p_i$ , étant donné, menons par son centre d'inertie O un plan variable  $\Pi$ , dont le rayon de giration sera désigné par  $\rho$ ; le plan parallèle à  $\Pi$ , à la distance  $\rho$ , enveloppe l'ellipsoïde central d'inertie dont il sera question dans cette étude [13].

Appelons  $a$ ,  $b$  et  $c$  les rayons de giration principaux, l'équation tangentielle de cet ellipsoïde est

$$(e) \quad a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - s^2 = 0,$$

celle de sa quadrique conjuguée

$$(e) \quad a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 + s^2 = 0.$$

Les plans qui admettent un rayon de giration constant  $\rho$ , enveloppent les homofocales de la quadrique  $\varepsilon$ , dont les équations tangentielles sont  $\varepsilon(uvws) - \rho^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0$ , nous dirons que ces quadriques sont les *isogires*  $\rho$  et noterons, au passage, que si l'on connaît les coordonnées tangentielles  $u_0, v_0, w_0, s_0$  d'un plan, le résultat de la substitution de ces coordonnées dans l'équation tangentielle de la quadrique  $\varepsilon$ , donne le produit du rayon de giration relatif au plan par le trinome  $u_0^2 + v_0^2 + w_0^2$ .

Les isogires sont des quadriques imaginaires pour  $\rho < c$ , des hyperboloïdes à deux nappes pour  $c < \rho < b$ ; des hyperboloïdes à une nappe pour  $b < \rho < a$ ; des ellipsoïdes réels pour  $\rho > a$ .

Montrons maintenant qu'une quadrique à centre, réelle, E peut toujours être regardée comme l'isogire  $\rho$  d'un certain système de masses S, autrement dit, qu'il est toujours possible de trouver un ellipsoïde réel e, susceptible d'être pris pour ellipsoïde d'inertie de ce système, et dont la quadrique conjuguée  $\varepsilon$  soit homofocale de E.

Supposons, pour commencer, que la quadrique donnée E soit un ellipsoïde d'équation

$$\alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 + \gamma^2 w^2 - s^2 = 0;$$

il s'agit de montrer qu'on peut déterminer les trois demi-axes  $a, b, c$  d'un ellipsoïde, tels que la quadrique

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 + s^2 - \rho^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

soit identique à E; il suffit pour cela qu'on ait

$$\rho^2 - a^2 = \alpha^2, \quad \rho^2 - b^2 = \beta^2, \quad \rho^2 - c^2 = \gamma^2$$

ou

$$a^2 = \rho^2 - \alpha^2, \quad b^2 = \rho^2 - \beta^2, \quad c^2 = \rho^2 - \gamma^2$$

en choisissant  $\rho$  plus grand que le plus grand des demi-axes de E, la détermination de  $a$ ,  $b$  et  $c$  sera toujours possible.

Si la quadrique donnée E, est un hyperboloïde à une nappe, nous remplaçons  $\beta$  par  $i\beta$ ; si c'est un hyperboloïde à deux nappes, nous remplaçons, à la fois,  $\beta$  par  $i\beta$  et  $\gamma$  par  $i\gamma$ .

Finalement, nous pouvons dire que la quadrique donnée peut être considérée comme l'isogire  $\rho$ , d'un certain système,  $\rho$  étant supérieur à la valeur du plus grand demi-axe réel de cette quadrique.

Il faut noter ici, que ce qui précède ne vaut que parce que tout ellipsoïde peut être pris pour un ellipsoïde d'inertie, tel que nous l'avons défini, tandis qu'il n'en est pas ainsi de l'ellipsoïde d'inertie de Poincot.

Rappelons, en outre, qu'un système S étant donné, toute sphère concentrique à son ellipsoïde central d'inertie, est un lieu de points de moment d'inertie polaire constant relativement à ce système.

Le rayon de giration polaire est en effet donné par la relation

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + r^2,$$

$r$  étant le rayon de la sphère.

Enfin, cette propriété résultant des définitions mêmes : soient P, un plan; A, un point de ce plan; D, une droite normale en A au plan;  $I_P$ ,  $I_A$ ,  $I_D$ , les moments d'inertie correspondants, on a

$$I_A = I_P + I_D,$$

de sorte que si deux des moments d'inertie sont constants, le troisième le sera également.

Tout ce qui précède permet de démontrer avec une rare simplicité bon nombre de propriétés classiques et d'en formuler de nouvelles.

3. On donne une famille de quadriques homofocales, chercher le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces sont tangentes à une, deux ou trois quadriques fixes, de cette famille.

Chacune de ces quadriques est une enveloppe de plans de moment

d'inertie constant. Soient  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  les rayons de giration correspondants. Il est immédiat qu'en un point du lieu A, le moment d'inertie polaire est constant, *le lieu cherché est donc une sphère.*

Le carré du rayon de giration polaire a pour expression, d'une part,

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2,$$

d'autre part,

$$a^2 + b^2 + c^2 + r^2,$$

$r$  désignant la distance OA et  $a, b, c$  les demi-axes de l'ellipsoïde d'inertie; le rayon de la sphère est donc

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= \frac{\rho_1^2 - a^2}{3} + \frac{\rho_2^2 - b^2}{3} + \frac{\rho_3^2 - c^2}{3} \\ &\quad + \frac{\rho_3^2 - a^2}{3} + \frac{\rho_2^2 - b^2}{3} + \frac{\rho_3^2 - c^2}{3} \\ &\quad + \frac{\rho_3^2 - a^2}{3} + \frac{\rho_2^2 - b^2}{3} + \frac{\rho_3^2 - c^2}{3} = \sum \frac{(x_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2)}{3} = \frac{1}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2), \end{aligned}$$

$r_1, r_2, r_3$  désignant les rayons des sphères de Monge des trois quadriques.

Nous obtenons ainsi une généralisation de la propriété de la sphère de Monge, qui correspond au cas où les trois quadriques sont confondues.

**4. Propriété des géodésiques d'un ellipsoïde.** — Considérons, sur un ellipsoïde  $Q_1$ , les géodésiques  $g(1, 2)$  déterminées à l'aide de la quadrique  $Q_2$ , et les géodésiques  $g(1, 3)$  déterminées à l'aide de la quadrique  $Q_3$ . Cherchons le lieu des points A, de  $Q_1$ , où une courbe de la famille  $g(1, 2)$  coupe orthogonalement une courbe de la famille  $g(1, 3)$ . En nous rappelant le mode classique de détermination des géodésiques, nous voyons qu'un tel point A est le sommet d'un trièdre trirectangle dont chaque face est tangente à l'une des quadriques  $Q_1, Q_2$  ou  $Q_3$ ; le lieu du point A est donc la courbe d'intersection de la quadrique avec la sphère de rayon

$$r = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}}.$$

Comme cas particulier, faisons se confondre les deux quadriques  $Q_2$  et  $Q_3$ , nous pourrons énoncer, *le lieu des points où deux géodé-*



*siques d'une même famille tracées sur  $Q_1$  se coupent à angle droit est la courbe d'intersection de  $Q_1$  avec la sphère de rayon*

$$r = \sqrt{\frac{r_1^2 + 2r_2^2}{3}}.$$

Si la quadrique  $Q_2$  est la focale hyperbolique de la quadrique  $Q_1$ , nous obtenons une vérification intéressante.

L'équation de la focale est

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} - 1 = 0;$$

le rayon du cercle de Monge (qui remplace ici la sphère) est donné par

$$r_2^2 = a^2 - b^2 + c^2 - b^2 = a^2 + c^2 - 2b^2,$$

le carré de  $r_1^2$  est toujours

$$r_1^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

d'où

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + c^2) - 4b^2}{3} = a^2 + c^2 - b^2;$$

or, ce rayon est celui de la sphère de centre O qui passe par les ombilics. Cherchons, en effet, l'équation du cercle qui appartient au faisceau linéaire déterminé par la focale et la conique principale du plan

$$c^2 x^2 + a^2 z^2 - a^2 c^2 = 0,$$

il suffit pour cela de retrancher cette dernière équation de l'équation de la focale rendue entière

$$(c^2 - b^2)x^2 + (a^2 - b^2)z^2 - (a^2 - b^2)(c^2 - b^2) = 0;$$

il vient

$$x^2 + z^2 - (a^2 + c^2 - b^2) = 0,$$

ce qui nous fournit une vérification, car toutes les géodésiques de la famille considérée passant par les ombilics, il fallait que le lieu du point A passât par ces points, puisqu'ils jouissent de la propriété.

On peut donner une autre expression du rayon de la sphère  $r$  correspondant aux géodésiques de la quadrique d'axes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , déter-

minées à l'aide de la quadrique  $\sqrt{a^2 - \rho^2}$ ,  $\sqrt{b^2 - \rho^2}$ ,  $\sqrt{c^2 - \rho^2}$ . On a

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) - 6\rho^2}{3} = r_1^2 + 2\rho^2.$$

5. Lorsqu'on coupe par une sphère une surface dont les génératrices sont des droites isogires, puisqu'on mène les plans normaux aux génératrices par les points de l'intersection, ces plans sont isogires, par suite enveloppent une quadrique d'une famille homofocale.

En particulier, coupons une quadrique réglée par une sphère concentrique et menons les plans normaux aux génératrices par les points de l'intersection; *ces plans enveloppent une quadrique homofocale associée à la sphère.*

Toute génératrice rectiligne d'une quadrique peut être regardée comme droite isogire, puisqu'il est possible — et d'une infinité de façons — de mener par cette droite deux plans tangents rectangulaires à la quadrique; son rayon de giration, dont le carré est le double du carré du rayon de giration des plans tangents à la quadrique, est constant.

La développable engendrée par le plan variable est, en outre, circonscrite à la conique, à l'infini du cône supplémentaire du cône asymptote de la quadrique donnée; le plan générateur est, en effet, normal aux génératrices, donc parallèle à un plan tangent à ce cône supplémentaire. *La développable est donc de 4<sup>e</sup> classe.*

6. Si nous coupons une surface dont les normales sont des droites isogires, par une sphère, la *développable circonscrite à la surface, le long de l'intersection, sera circonscrite à une quadrique associée à la sphère et les quadriques correspondant aux différentes sphères concentriques forment une famille homofocale.*

Un ellipsoïde d'inertie étant donné  $e$ , considérons les coniques focales de la quadrique  $\varepsilon$ ; elles sont les coniques conjuguées des focales de  $e$  situées dans les mêmes plans, c'est-à-dire, avec les notations classiques, que la focale du plan  $xOy$  est une ellipse imaginaire, et celle du plan  $yOz$ , une ellipse réelle; on s'en rend compte au seul examen des équations des surfaces  $e$  et  $\varepsilon$ .

Il est clair que la focale du plan  $xOy$  ne peut être réelle, car cette

focale serait l'enveloppe des plans de rayon de giration  $c$  et tout plan réel, de l'espace, autre que  $xOy$  a un rayon de giration nécessairement supérieur à  $c$ , qui est la valeur minimum possible.

Le carré du rayon de giration relatif à une droite qui s'appuie sur les focales réelles est la somme des carrés des rayons de giration relatifs aux deux plans déterminés par la droite et les tangentes aux deux coniques puisque, en vertu d'une propriété classique, ces plans sont rectangulaires. *Ces droites sont isogires, leur rayon de giration est*

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

car les deux focales réelles sont les isogires  $b$  et  $a$ .

Nous empruntons aux *Leçons de Géométrie supérieure*, de M. E. Vessiot [11] l'équation ci-après d'une cyclide de Dupin, l'indice 1 rappelant que les lettres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , n'ont pas la signification usitée dans cette étude,

$$(1) \quad 4a_1^2(x-x_0)^2 + 4b_1^2y^2 = \left(x^2 + y^2 + z^2 + b_1^2 - \frac{a_1^2x_0^2}{c_1^2}\right)^2.$$

L'intersection de cette surface par la sphère concentrique

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

est une courbe du 4<sup>e</sup> ordre, intersection de la sphère (2) et du cylindre

$$(3) \quad 4a_1^2(x-x_0)^2 + 4b_1^2y^2 = \left[R^2 + b_1^2 - \frac{a_1^2 - x_0^2}{c_1^2}\right]^2.$$

La développable circonscrite à (1) le long de la biquadrique, est engendrée par des plans isogires, leur rayon de giration étant

$$a^2 + b^2 + c^2 + R^2 - (a^2 + b^2) = R^2 + c^2,$$

*cette développable est donc circonscrite également à une quadrique homofocale de  $\varepsilon$*

$$\varepsilon - (R^2 + c^2)(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

7. Considérons deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$  de masses  $m_1$ ,  $m_2$ ;  $O_1$ ,  $O_2$ , leurs centres d'inertie;  $e_1$ ,  $e_2$ , leurs ellipsoïdes centraux d'inertie;  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  les quadriques conjuguées de  $e_1$ ,  $e_2$ . Soient enfin  $E_1$  et  $E_2$  deux homofocales de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  pour la même valeur  $\rho^2$  du paramètre.

La sphère de Monge  $\sigma_1$  de la quadrique  $E_1$  est le lieu des points de l'espace dont le rayon de giration polaire est  $\rho\sqrt{3}$  pour le système  $S_1$ ; le système  $S_2$  admet une sphère correspondante  $\sigma_2$ .

Un point  $P$  du cercle commun aux deux sphères, a même rayon de giration polaire  $\rho\sqrt{3}$  par rapport aux deux systèmes, donc par rapport à un système  $S = S_1 + S_2$ , de masse  $m = m_1 + m_2$ . Ce point  $P$  se trouve donc sur la sphère de Monge  $\sigma$  de l'isogire  $\rho$  de ce système  $S$ ; désignons par  $E$  cette isogire, et par  $\varepsilon$  la quadrique conjuguée de l'ellipsoïde central du système  $S$ . Nous savons que  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon$  appartiennent à un même faisceau linéaire tangentiel [13].

On a, pour un plan quelconque,  $u, v, w, s$ ,

$$(m_1 + m_2) \frac{\varepsilon(uvws)}{u^2 + v^2 + w^2} = m_1 \frac{\varepsilon_1}{u^2 + v^2 + w^2} + m_2 \frac{\varepsilon_2}{u^2 + v^2 + w^2}$$

ou

$$(m_1 + m_2)\varepsilon = m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2,$$

ce qui permet d'écrire

$$(m_1 + m_2)[\varepsilon - \rho^2(u^2 + v^2 + w^2)] = m_1[\varepsilon_1 - \rho^2(u^2 + v^2 + w^2)] + m_2[\varepsilon_2 - \rho^2(u^2 + v^2 + w^2)]$$

ou

$$(m_1 + m_2)E = m_1E_1 + m_2E_2.$$

Ainsi,  $E, E_1, E_2$  appartiennent à un même faisceau tangentiel.

Nous retrouvons cette propriété classique : *les sphères de Monge des quadriques d'un faisceau tangentiel forment un faisceau ponctuel*; pour obtenir toutes les quadriques du faisceau  $E$ , il suffit de faire varier le rapport  $\frac{m_1}{m_2}$ .

Il est aisé de généraliser un peu en disant que *les sphères, lieux des sommets des trièdres trirectangles dont les faces touchent trois quadriques, homofocales d'une quadrique d'un faisceau tangentiel, et telles que la somme des paramètres  $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2$  soit constante, appartiennent à un faisceau ponctuel*.

En introduisant un système  $S_3$  de masse  $m_3$ , on verra que *les sphères de Monge des quadriques d'un réseau linéaire tangentiel, passent par deux points fixes*.

8. Soit  $e_1$  l'ellipsoïde central d'un système  $S_1$ ;  $a_1, b_1, c_1$ , les demi-axes.

Le rayon de giration polaire  $r_1$  relatif à un point situé à la distance  $d_1$  du centre d'inertie est donné par

$$r_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = d_1^2 - (-a_1^2 - b_1^2 - c_1^2).$$

La deuxième forme fait apparaître la *puissance du point considéré par rapport à la sphère de Monge de la quadrique  $\varepsilon_1$ , conjuguée de  $e_1$* , dont les axes sont  $ia, ib, ic$ .

Il résulte de cette constatation que *les points de l'espace qui ont même rayon de giration polaire relativement à deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$ , sont situés dans le plan radical  $\Pi$  des sphères de Monge des quadriques  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$* .

Ce plan  $\Pi$  est, en vertu du paragraphe précédent, le lieu des points qui ont même rayon de giration par rapport à tous les systèmes  $S$ , sommes des systèmes  $S_1, S_2$ , lorsqu'on fait varier le rapport  $\frac{m_1}{m_2}$ .

Ce même plan  $\Pi$  est le symétrique du plan radical, des sphères de Monge des ellipsoïdes  $e_1$  et  $e_2$ , par rapport au milieu de la distance  $O_1O_2$ . Notons aussi que *c'est le plan de Monge du parabolode du faisceau tangentiel défini par  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$* , et que les sphères de Monge des quadriques

$$\varepsilon_1 - \rho^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 - \rho^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

ont même plan radical que celles de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ .

Le centre d'inertie  $O$  du système  $S$  décrit la droite  $O_1O_2$ , quand varie  $\frac{m_1}{m_2}$ . Situé entre  $O_1$  et  $O_2$  quand  $\frac{m_1}{m_2}$  est positif, il se trouve hors du segment pour  $\frac{m_1}{m_2}$  négatif et alors on n'a plus  $S = S_1 + S_2$ , mais cela ne crée pas de nouvelle relation géométrique. Cette remarque permet de dire que *le parabolode est la quadrique d'inertie du système qui correspond à  $\frac{m_1}{m_2} = -1$ . Le centre d'inertie se trouve à l'infini et la masse est nulle*

$$m = m_1 + m_2 = 0.$$

9. Familles linéaires tangentielles de quadriques dépendant de deux et de trois paramètres. — En introduisant un 3<sup>e</sup> système  $S_3$ , nous

obtenons l'axe radical des trois sphères de Monge  $\sigma$ , comme lieu des points qui ont même rayon de giration polaire par rapport à tous les systèmes obtenus en faisant varier les rapports  $\frac{m_1}{m_3}$  et  $\frac{m_2}{m_3}$ .

Enfin, avec un 4<sup>e</sup> système  $S_4$ , nous arrivons à définir le point  $\mu$ , qui a même rayon de giration polaire par rapport à tous les systèmes obtenus en faisant varier les rapports  $\frac{m_1}{m_4}$ ,  $\frac{m_2}{m_4}$ ,  $\frac{m_3}{m_4}$ .

Ce point est le centre radical des sphères  $\sigma_{1,2,3,4}$ , sa puissance par rapport à toutes les sphères  $\sigma$  est constante, d'où cet énoncé :

*Les sphères de Monge d'une famille tangentielle de quadriques dépendant linéairement de trois paramètres sont orthogonales à une sphère fixe.*

Désignons également par  $\mu$  le point qui se trouve :

pour deux masses, à l'intersection du plan radical avec  $O_1O_2$ ;  
pour trois masses, à l'intersection de l'axe radical avec le plan  $O_1O_2O_3$ .

Ce point  $\mu$  correspond à un certain système, de valeurs des masses; il est immédiat que c'est celui qui donne le système  $S$  dont le moment d'inertie polaire relatif au centre de gravité, est minimum, puisque c'est celui dont la sphère de Monge a le rayon minimum.

Si les quatre systèmes  $S_1, S_2, S_3, S_4$  se réduisent à des masses ponctuelles, toutes les quadriques  $\varepsilon$  obtenues en faisant varier les quatre masses sont conjuguées par rapport au tétraèdre fixe  $O_1O_2O_3O_4$  [13].

Le point  $\mu$  devient le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre et nous retrouvons le théorème de Faure : *les sphères de Monge des quadriques conjuguées par rapport à un tétraèdre sont orthogonales à la sphère circonscrite à ce tétraèdre.* Ce théorème classique peut se démontrer directement en remarquant que le point  $\mu$ , équidistant des quatre points  $O_1, O_2, O_3, O_4$  admet le même rayon de giration polaire par rapport à tous les systèmes  $S$  obtenus en faisant varier les masses  $m_1, m_2, m_3, m_4$ . Ce point  $\mu$  a donc même puissance par rapport aux sphères de Monge des quadriques  $\varepsilon$  de ces systèmes; comme les quadriques  $\varepsilon$  sont conjuguées par rapport au tétraèdre, le théorème s'ensuit.

Appliquons ce théorème à la famille des ellipsoïdes d'inertie d'un système donné, relatifs aux divers points de l'espace.

Les équations tangentielles de ces ellipsoïdes contiennent, linéairement, les trois coordonnées de leurs centres,  $x_1, y_1$  et  $z_1$  [14].

Soient  $a, b, c$  les demi-axes de l'ellipsoïde central d'inertie;  $a_1, b_1, c_1$ , ceux de l'ellipsoïde d'inertie au point  $x, y, z$ , ou  $O_1$ .

L'expression du carré du rayon de giration polaire au point  $O_1$  est, d'une part,

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2,$$

d'autre part,

$$a^2 + b^2 + c^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;$$

en les égalant nous obtenons

$$a^2 + b^2 + c^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = r_1^2 - OO_1^2,$$

ce qui signifie que la puissance du centre d'inertie  $O$ , par rapport à la sphère de Monge de l'ellipsoïde au point  $O_1$ , est constante et égale au carré du rayon de la sphère de Monge de l'ellipsoïde central, ce qui démontre la propriété.

#### COMPLEXE DE PAINVIN.

**Préliminaires.** — On peut s'attendre à ce que la notion de moment d'inertie puisse être utilisée en géométrie réglée, si l'on veut bien songer qu'elle se présente soit sous la forme *axiale* : le moment d'inertie relatif à une droite est égal à la somme des moments d'inertie relatifs à deux plans rectangulaires passant par la droite

$$I_D = I_{P_1} + I_{P_2},$$

soit sous la forme *radiale* : le moment d'inertie relatif à une droite est égal à la différence du moment d'inertie polaire relatif à un point  $A$  de la droite et au moment d'inertie relatif au plan  $P$  mené, par le point, normalement à la droite

$$I_D = I_A - I_P.$$

Un complexe de Painvin est le complexe formé par les droites  $D$  de l'espace d'où l'on peut mener deux plans tangents rectangulaires à une quadrique à centre donnée  $E$ . Sous cette définition, le

complexe a fait l'objet d'importants travaux, parmi lesquels il faut citer la thèse, si substantielle, présentée, en 1901, par M. Richard.

Nous nous proposons d'étudier ce complexe par la géométrie en utilisant les notions de moment d'inertie et de rayon de giration.

Toute quadrique à centre E, pouvant être considérée comme une isogire, d'un système de masse arbitraire, mais dont l'ellipsoïde d'inertie, appartenant à une infinité simple, est une homofocale de la quadrique conjuguée de E, nous choisissons arbitrairement un de ces ellipsoïdes d'inertie et nous dirons que le complexe de Painvin est formé par les droites  $I_D = \text{const.}$ ; ou, si l'on veut, par les droites pour lesquelles le rayon de giration est

$$r_D = \rho \sqrt{2} = \text{const.},$$

$\rho$  désignant le rayon de giration des plans tangents à la quadrique donnée.

Cette seule transposition de la définition simplifie beaucoup l'étude du complexe par la géométrie; elle rend évidentes un grand nombre de propriétés que nous nous contenterons d'énoncer parce qu'elles sont immédiates.

1° Un tétraèdre étant donné  $A_{1,2,3,4}$ , les droites D de l'espace telles que  $\sum_{i=1,2,3,4} d_i = \text{const.}$ , forment un complexe de Painvin; ce complexe reste fixe si le système des quatre masses, égales à l'unité, appliquées aux quatre sommets, se déforme de telle sorte que l'ellipsoïde d'inertie soit lui-même constant; il faut pour cela que le tétraèdre demeure conjugué par rapport à un ellipsoïde fixe; il est aussi inscrit dans un autre ellipsoïde et circonscrit à un 3° ellipsoïde [13].

Si le tétraèdre donné est régulier, son ellipsoïde d'inertie est une sphère et le complexe devient celui des tangentes à la sphère dont le centre est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre et le rayon déterminé par la relation

$$4mr^3 = (4m)r_D^2 \quad \text{ou} \quad r = r_D.$$

On voit aussi que  $a_1, a_2, a_3, a_4$  étant quatre coefficients fixes, les droites de l'espace pour lesquelles

$$\sum_1^4 a_i d_i^2 = \text{const.}$$

forment un complexe de Painvin.



2° Comme, dans une famille homofocale, il existe deux quadriques tangentes à une droite donnée, et que les plans tangents, aux points de contact, sont rectangulaires, toute droite tangente à deux quadriques associées et dont les paramètres sont

$$\rho^2 + \lambda \quad \text{et} \quad \rho^2 - \lambda,$$

appartiennent au complexe; leur rayon de giration est donné en effet par

$$r_D^2 = \rho^2 + \lambda + \rho^2 - \lambda = 2\rho^2.$$

3° Nous avons vu, au paragraphe 5, que les génératrices de la quadrique donnée étaient des droites dont le rayon de giration satisfaisait à la relation  $r_D = \rho\sqrt{2}$ ; elles appartiennent donc elles aussi au complexe.

4° Enfin, si nous menons les plans normaux aux droites du complexe, par les points où elles coupent une sphère concentrique à la quadrique donnée, ces plans enveloppent une quadrique homofocale associée à la sphère.

La relation

$$r_A^2 - r_D^2 = r_P^2$$

donne, pour le rayon R de la sphère, en désignant par  $r_0$  le rayon de giration polaire relatif au centre d'inertie O

$$r_A^2 - 2\rho^2 = r_0^2 + R^2 - 2\rho^2 = r_P^2;$$

si  $r$  est le rayon de la sphère de Monge de la quadrique donnée, comme  $r_0$  est celui de la sphère de Monge de la quadrique centrale d'inertie, on a

$$r_0^2 + r^2 = 3\rho^2,$$

ce qui donne

$$R^2 + \rho^2 - r^2 - r_P^2 = 0,$$

et si  $r_0^2 = \rho^2 + \lambda$ , on a  $R^2 = r^2 + \lambda$ .

11. **Cône du complexe; courbe plane du complexe.** — Soit A un point de l'espace,  $r_A$  le rayon de giration polaire du système S relatif à ce point.

Considérons la quadrique homofocale, enveloppe des plans dont le rayon de giration est

$$r_p^2 = r_A^2 - 2\rho^2.$$

La normale, en A, à tout plan tangent au cône de sommet A, circonscrit à la quadrique, est une droite du complexe, puisque son rayon de giration est donné par

$$r_n^2 = r_A^2 - r_p^2 = 2\rho^2.$$

*Le cône du complexe est du second ordre, puisque c'est le cône supplémentaire du cône circonscrit à une quadrique homofocale. Cette quadrique demeure fixe si  $r_A$  est fixe, c'est-à-dire si le point A reste sur une sphère concentrique et de rayon constant*

$$r^2 = r_A^2 - r_0^2,$$

*la sphère de rayon  $r$  et l'homofocale isogire  $r_p$  sont dites associées.*

*Les focales de la quadrique donnée forment le lieu des points de l'espace pour lesquelles les cônes du complexe sont de révolution; cela résulte de ce que le cône circonscrit à une quadrique homofocale, et ayant pour centre un point d'une focale, est de révolution <sup>(1)</sup>.*

*Prenons, pour sommet du cône, un point à l'infini, nous aurons un cylindre du complexe. Tous les cylindres du complexe sont de révolution.*

Soit, en effet,  $\Delta$  la direction des génératrices; le cylindre parallèle à cette direction et circonscrit à la quadrique donnée, admet, pour section droite, une conique  $\Gamma$ . Le cercle orthoptique de cette conique est la directrice du cylindre considéré. Il est clair, en effet, que toute génératrice de ce cylindre admet pour rayon de giration  $\rho\sqrt{2}$ .

Il est immédiat que les axes du cône du complexe sont les mêmes que ceux du cône circonscrit à la quadrique homofocale; ce sont les trois normales aux trois quadriques de la famille homofocale qui passent par le point.

(1) Le lieu de ces points est en réalité la développable isotrope, enveloppe des quadriques homofocales. Les focales sont des lignes doubles de cette surface [4]. Cette développable est le lieu des points par lesquels passent deux quadriques homofocales confondues. C'est aussi le lieu des points pour lesquels la quadrique d'inertie du système, dont la quadrique donnée est la quadrique centrale, est de révolution.

Considérons la figure formée par une sphère de centre  $O$  et un cône du second degré de sommet  $A$ . Il est possible de regarder le cône comme le cône d'un complexe de Painvin relatif à une quadrique de centre  $O$ , et nous pouvons dire que *les plans normaux aux génératrices du cône, menés par les points où elles coupent la sphère, enveloppent une quadrique de centre  $O$* . Si nous coupons le cône fixe par des sphères concentriques, les quadriques, enveloppes des plans, appartiennent à une famille homofocale; ce sont les *homofocales des quadriques de centre  $O$  et inscrites dans le cône supplémentaire du cône donné*.

Si le point  $A$  est à l'infini, le cylindre du complexe est un cylindre de révolution; le plan normal aux génératrices est celui de la section droite, et nous pouvons énoncer : *si l'on coupe les plans, de direction fixe, et tangents à des quadriques homofocales, par des sphères concentriques, associées aux quadriques, le cercle d'intersection se déplace sur un cylindre de révolution*.

Prenons maintenant un plan quelconque  $P$ , tangent à l'isogire  $\rho^2 + \lambda$ , ce qui veut dire que son rayon de giration est  $r_P = \sqrt{\rho^2 + \lambda}$ . Une droite  $D$ , de ce plan, appartiendra au complexe si elle est la trace, sur ce plan  $P$ , d'un plan normal, et, de plus, *tangent à l'isogire  $\rho^2 - \lambda$* .

Le rayon de giration relatif à la droite sera en effet  $\rho\sqrt{2}$ .

La courbe du complexe relative au plan considéré est donc *la projection orthogonale sur ce plan, du contour apparent d'une quadrique homofocale; c'est une conique dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre  $O$  de la quadrique donnée sur le plan*.

La conique devient un cercle si le cylindre normal au plan  $P$  et circonscrit à l'isogire  $\rho^2 - \lambda$  est de révolution; il faut pour cela que le plan  $P$  soit normal à l'une des asymptotes des focales de la quadrique donnée  $E$ ; ce qui donne seulement deux directions réelles de plans, puisque la focale hyperbolique possède, seule, des asymptotes réelles.

Si la valeur du paramètre  $\lambda$  reste fixe, les deux quadriques isogires  $\rho^2 + \lambda$  et  $\rho^2 - \lambda$  restent elles-mêmes fixes.

Notons que si le plan  $P$  varie en restant parallèle à lui-même, les cylindres, de direction fixe, circonscrits à des quadriques homofocales, forment eux-mêmes une famille homofocale; *deux de ces cylindres dégèrent en un couple de deux génératrices, les*

plans  $P$  correspondants admettent une conique du complexe dégénérée en deux points; ce sont des plans singuliers.

**12. Le complexe n'est pas tétraédral.** — Si le complexe était tétraédral, toute droite passant par l'un des sommets du tétraèdre fondamental appartiendrait au complexe; par suite, tout plan passant par ce sommet aurait un rayon de giration constant. Ce sommet devrait donc être un point pour lequel l'ellipsoïde d'inertie du système  $S$  est une *sphère*; de tels points réels n'existent pas en général.

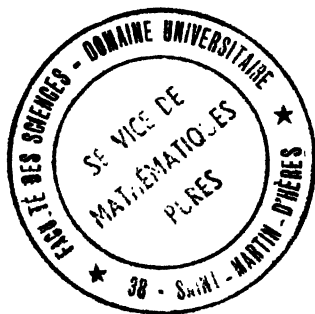
Le lieu de ces points est l'arête de rebroussement de la développable isotrope de Darboux [4], c'est une courbe imaginaire qui ne possède pas de points réels, en général. C'est le lieu des points par lesquels passent trois quadriques homofocales confondues.

Ainsi, le complexe n'est pas tétraédral, en général.

**13. Corrélation de Chasles. Génératrices singulières.** — Considérons une droite  $D$  du complexe, mais qui n'appartienne pas au complexe de Chasles formé par les normales aux quadriques homofocales. Deux quadriques de cette famille homofocale  $Q_1$  et  $Q_2$  sont tangentes à  $D$ , en deux points distincts  $A_1$  et  $A_2$ ; ce sont les isogires  $\sqrt{\rho^2 + \lambda_1}$  et  $\sqrt{\rho^2 - \lambda_1}$ , nous désignons par  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  les plans tangents en  $A_1$  et  $A_2$  aux quadriques  $Q_1$  et  $Q_2$ .

Entre un point  $A$ , de la droite  $D$ , et le plan tangent le long de  $D$ , au cône du complexe de sommet  $A$ , il existe une correspondance appelée corrélation de Chasles; pour déterminer le plan corrélatif du point  $A$ , nous menons le plan  $N$  normal à  $D$ , par le point  $A$ , puis déterminons la quadrique homofocale tangente à ce plan, en un point  $A'$ . La droite  $AA'$ , est, d'après la propriété du cône du complexe, la génératrice de son cône supplémentaire normale au plan cherché; ce plan se trouve déterminé.

Au point  $A_1$ , le cône supplémentaire du cône du complexe admet, pour plan principal, le plan  $\Pi_1$ , en vertu d'une propriété classique; comme nous savons que le plan  $N_1$ , normal à  $D$  en  $A_1$ , est tangent à ce cône supplémentaire et qu'il est, en outre, normal au plan  $\Pi_1$ , c'est que la génératrice de contact  $A_1A'_1$  est l'intersection de ces deux plans  $\Pi_1$  et  $N_1$ . Le plan corrélatif de  $A_1$  est donc le plan  $\Pi_2$  qui est normal à  $\Pi_1$  (puisque normal à  $A_1A'_1$ ) et passe par la droite  $D$ ; de même, le plan  $\Pi_1$  est le corrélatif du point  $A_2$ .



Si la droite  $D$  appartient au complexe de Chasles, il existe un point  $A_0$  sur cette droite, pour lequel le plan normal  $N_0$  est tangent, en ce même point  $A_0$ , à la quadrique homofocale tangente; la droite  $A_0A'_0$  est indéterminée, de même que le plan corrélatif du point  $A_0$ . Il est clair que ce point  $A_0$  n'est autre que le point en lequel viennent se confondre les deux points  $A_1$  et  $A_2$ . La corrélation est singulière et la génératrice est dite *singulière*. On sait d'ailleurs que ces génératrices singulières forment une congruence; c'est la congruence des droites communes au complexe de Painvin et au complexe de Chasles. C'est une congruence (4,4).

Le point  $A_0$  mentionné précédemment est un point commun aux deux quadriques  $Q_1$  et  $Q_2$ .

Considérons un point  $A$  de la surface des singularités  $\Omega$ ; le cône du complexe de Painvin dégénère en deux plans dont l'intersection  $\Delta$ , en qualité de normale à une des quadriques homofocales passant par le point  $A$ , appartient au complexe de Chasles (*cf.* § 14 ci-après). Cette droite est une droite double du complexe de Painvin, passant par  $A$ . Ainsi les cônes du point  $A$  dans l'un et l'autre complexe se coupent suivant cette droite double; autrement dit, deux des droites de la congruence des génératrices singulières menées par  $A$  sont confondues; la surface  $\Omega$ , lieu du point  $A$ , est donc une des nappes de la surface focale de cette congruence, résultat classique. L'autre nappe a été appelée surface accessoire par Sturm (thèse de M. Richard).

**14. Surface des singularités  $\Omega$ .** — Plaçons-nous tout d'abord au point de vue *ponctuel*. En un point  $A$  situé sur  $\Omega$ , le cône du complexe se décompose en deux plans, le cône supplémentaire dégénère donc en deux droites  $G_1$  et  $G_2$ .

Nous savons (§ 11) que pour tout point d'une sphère concentrique, le cône du complexe est le cône supplémentaire du cône circonscrit à la quadrique associée. Ce dernier cône dégénère en deux droites si le point se trouve sur la quadrique elle-même; les deux génératrices de la quadrique sont alors les deux droites  $G_1$  et  $G_2$  mentionnées plus haut : et la propriété est commune à tous les points d'intersection de la sphère et de sa quadrique associée.

Nous pouvons donc énoncer : *la surface  $\Omega$  est engendrée par la*

*courbe d'intersection d'une sphère concentrique avec sa quadrique associée.*

Soit  $\lambda_3$  le paramètre de cette quadrique, et  $\lambda_1, \lambda_2$  ceux des deux autres quadriques homofocales passant par un point B de la courbe d'intersection de la sphère avec sa quadrique associée.

Les deux plans qui constituent le cône du complexe relatif au point B se coupent suivant une droite D qui appartient évidemment au complexe; son rayon de giration a donc pour expression  $\rho\sqrt{2}$ .

Mais cette droite D, normale à la quadrique  $\lambda_3$  (§ 10) est, en vertu d'une propriété classique des quadriques homofocales, l'intersection des plans tangents aux quadriques  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , et, de plus, ces plans tangents sont orthogonaux, de sorte que le rayon de giration, relatif à D, a aussi pour expression

$$\sqrt{\rho^2 + \lambda_1 + \rho^2 + \lambda_2};$$

en égalant à la valeur précédente, nous trouvons

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

d'où l'énoncé : *la surface  $\Omega$  est le lieu de l'intersection des deux quadriques homofocales de paramètres  $+\lambda$  et  $-\lambda$ .*

Ajoutons que, si la quadrique donnée est un ellipsoïde, cette intersection ne peut être que celle d'un ellipsoïde avec un hyperboloïde à une ou deux nappes; nous le voyons en nous rappelant que, par tout point de l'espace, passe toujours une quadrique homofocale de chaque espèce, et que la nature de cette quadrique, variable avec la valeur du paramètre  $\lambda$ , change quand celle-ci passe par le carré des axes de l'ellipsoïde.

Le degré de la surface  $\Omega$  s'obtient en cherchant le nombre de ses points situés sur une droite quelconque  $\Delta$ . La quadrique  $Q + \lambda$  donne deux points  $BB'$ ; la quadrique  $Q - \lambda$ , deux autres points  $CC'$ . Les couples de points  $BB'$  et  $CC'$  sont homologues dans une correspondance (2,2), dont les points doubles, au nombre de 4, sont les points d'intersection cherchés; *la surface est donc du 4<sup>e</sup> degré.*

Nous avons vu quels étaient les points de l'isogire  $\rho^2 + \lambda$  qui se trouvaient sur la surface  $\Omega$ ; plaçons-nous maintenant au point de vue tangentiel et cherchons les plans tangents à cette quadrique, qui sont également tangents à  $\Omega$ .

Pour tout plan singulier  $P$ , la conique du complexe doit dégénérer en deux points; ceci exige que l'isogire  $\rho^2 - \lambda$ , dont le contour apparent se projette orthogonalement suivant la conique du complexe, possède deux génératrices normales au plan  $P$ . De la sorte, le contour apparent est constitué par les traces des plans tangents, droites rayonnantes autour des traces des deux génératrices normales.

La condition indiquée revient à dire que le cône asymptote  $\Gamma_{-\lambda}$ , de la quadrique isogire  $\rho^2 - \lambda$ , possède une génératrice normale au plan  $P$ , ou encore que le cône  $\Gamma'$ , supplémentaire du cône  $\Gamma$ , possède un plan tangent parallèle à  $P$ , ou enfin que le plan  $P$  est tangent à la conique à l'infini du cône  $\Gamma'$ .

Ainsi les plans  $P$ , tangents à la fois à la quadrique  $\rho^2 + \lambda$  et à la surface  $\Omega$ , sont les plans tangents à la développable déterminée par la quadrique  $\rho^2 + \lambda$  et la conique à l'infini du cône  $\Gamma'$ ; *la surface  $\Omega$  est l'enveloppe de ces développables.*

La génératrice rectiligne de la développable tangente à la surface  $\Omega$  et à l'isogire  $Q + \lambda$  est la droite qui joint les deux points de contact du plan variable avec les deux surfaces qu'il touche. Montrons que *cette génératrice est perpendiculaire à la génératrice singulière du complexe,  $g$ , située dans le plan singulier considéré, et passant par le point de contact.*

Soit  $p$  le point de contact d'un plan  $P$ , tangent à la surface  $\Omega$ . Le lieu des pôles du plan  $P$ , par rapport aux quadriques homofocales, est la normale menée par le point de contact  $q$  de la quadrique de la famille qui lui est tangente, propriété classique.

Mais le plan  $P$ , passant par la génératrice  $g$ , son pôle  $q'$ , par rapport à l'une des trois quadriques homofocales qui passent par le point  $p$ , se trouve sur la droite conjuguée de  $g$  dans cette même quadrique; et puisque  $g$  est une direction principale de l'indicatrice de la quadrique, c'est le deuxième axe de l'indicatrice qui est la droite conjuguée.

Il s'ensuit que la droite  $pq$ , génératrice de la développable, est la projection orthogonale de ce deuxième axe sur le plan  $P$ ; la propriété se trouve ainsi démontrée.

Appelons  $f_1$  et  $f_2$ , les deux points qui constituent la conique du complexe du plan singulier  $P$ . Ces deux points appartiennent à la surface  $\Omega$ ; en effet, le cône du complexe pour l'un d'eux,  $f_1$  par exemple, comprend déjà le plan  $P$ , puisque toute droite passant

par  $f_1$  et située dans ce plan fait partie du complexe, il comprend donc un deuxième plan, ce qui démontre la propriété. Corrélativement, les deux plans  $T_1$  et  $T_2$  qui constituent le cône du complexe relatif à un point  $p$  de la surface  $\Omega$ , sont tangents à cette même surface, car ce sont des plans singuliers.

La droite  $f_1f_2$  passe par le point  $p$  de contact du plan singulier avec la surface  $\Omega$ , sans quoi le plan  $pf_1f_2$  serait l'un des plans du complexe relativement au point  $p$ , ce qui est impossible, sauf en des points particuliers. Remarquons, en outre, que le milieu du segment  $f_1f_2$ , centre de la conique dégénérée  $f_1, f_2$ , est le pied de la normale abaissée du centre d'inertie  $O$  sur le plan tangent, et comme la droite  $f_1f_2$  est la génératrice singulière tangente, en  $p$ , à la surface, nous pouvons dire que *le plan tangent au point  $p$  est le plan normal au plan  $Opf_1f_2$  mené par la génératrice singulière passant par le point de contact et contenue dans le plan tangent.*

Pour déterminer la classe de la surface  $\Omega$ , cherchons le nombre de plans tangents qu'on peut lui mener par une droite quelconque de l'espace  $D$ .

Nous aurons, pour cela, à considérer une quadrique homofocale à laquelle on peut mener, par  $D$ , deux plans tangents  $B$  et  $B'$ ; à cette quadrique, est associée une conique dans le plan de l'infini à laquelle on peut mener également deux plans tangents  $C, C'$ . On a une correspondance  $(2, 2)$  de plans, dont les plans doubles, au nombre de quatre, sont tangents à la surface  $\Omega$  qui est, par suite, *de la 4<sup>e</sup> classe.*

**THÉORÈME.** — *Soit  $D$  une droite du complexe,  $P$  un plan tournant autour de cette droite, et  $P'$  le plan normal à  $P$  mené par la droite  $D$ .*

La conique du complexe relative au plan  $P$  est tangente à  $D$  en un point  $p$ ; autrement dit, la quadrique homofocale, isogire  $2\rho - t^2$  ( $t$  désignant le rayon de giration relatif au plan  $P$ ) est tangente à  $P'$ , en un certain point  $p'$ , qui se projette en  $p$  sur le plan  $P$ .

À un plan  $P$  donné, correspond un seul point  $p$ , et puisque la relation entre ces deux éléments est algébrique, la correspondance est une homographie.

Lorsque le plan  $P$  est tangent à la surface, la conique du complexe



dégénère en deux points, dont un au moins est sur la droite D; ce point est un des points d'intersection de D avec la surface  $\Omega$ , d'où cette propriété : *le rapport anharmonique des quatre points d'intersection d'une droite du complexe avec la surface des singularités, est le même que celui des quatre plans tangents à la surface menés par cette même droite*; cette propriété rappelle la propriété fondamentale du complexe tétraédral.

15. **Singularités de la surface  $\Omega$ .** — *Intersection de la surface  $\Omega$  par les plans principaux.* — Déterminons, par exemple, la section par le plan  $zOx$  dont le rayon de giration est  $b$  avec  $b = \sqrt{\rho^2 - \beta^2}$  en désignant par  $a, b, c$  les axes de l'ellipsoïde d'inertie et par  $\alpha, \beta, \gamma$  ceux de l'ellipsoïde donné. Les plans parallèles à  $Oy$  et tangents à l'isogire  $\sqrt{\rho^2 + \beta^2}$  ont pour traces sur  $zOx$ , des droites dont le rayon de giration est

$$\sqrt{\rho'^2 + \beta' + \rho'' - \beta''} = \sqrt{2} \rho;$$

ce sont donc des droites du complexe; elles enveloppent une ellipse dont les axes  $\alpha_1, \gamma_1$  sont donnés par

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 = \rho^2 + \beta^2 \quad \text{et} \quad c^2 + \gamma_1^2 = \rho^2 + \beta^2,$$

d'où

$$\alpha_1^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \gamma_1^2 = \gamma^2 + \beta^2$$

et cette ellipse est la conique du complexe du plan  $zOx$ .

Le cylindre de direction  $Oy$  et circonscrit à la sphère de rayon  $\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$  (cercle orthoptique de la conique principale, de la quadrique donnée) a pour génératrices des droites du complexe, puisque leur rayon de giration est  $\rho\sqrt{2}$ , car l'ellipsoïde E est l'isogire  $\rho$ .

Considérons un plan P tangent au cylindre dont la base est la conique du complexe du plan  $zOx$ ; sa trace D tangente à cette ellipse coupe le cercle orthoptique en deux points  $f_1, f_2$ .

La conique du complexe du plan P considéré doit être tangente aux deux parallèles à  $Oy$  menées par  $f_1$  et  $f_2$  et à la droite D tout en ayant son centre sur cette dernière, ce n'est possible que si cette conique dégénère en les deux points  $f_1$  et  $f_2$ , ce qui montre que *l'ellipse déterminée plus haut et le cercle orthoptique constituent l'intersection de la surface  $\Omega$  par le plan  $zOx$ .*

Vérifions directement que les points  $f_1$  et  $f_2$  sont les foyers du plan P.

Pour cela, rappelons que la conique du complexe du plan P, tangent à l'isogire  $\sqrt{\rho^2 + \beta^2}$  est la projection, sur ce plan, du contour apparent de la quadrique isogire  $\sqrt{\rho^2 + \beta^2} = b$ , mais celle-ci est la focale de l'ellipsoïde donné. Cette focale ayant deux tangentes normales à P, ce plan est un plan singulier et, d'après ce que nous avons vu, les foyers ne peuvent être que  $f_1$  et  $f_2$ .

Un *point double* de la surface  $\Omega$  est un point pour lequel les deux plans du complexe sont confondus; les deux génératrices  $G_1$  et  $G_2$ , normales aux plans du complexe, doivent donc, elles aussi, être confondues.

La quadrique à laquelle appartiennent  $G_1$  et  $G_2$  doit donc être développable, et comme il n'y a pas de quadrique développable, appartenant à une famille homofocale, autre que les focales, on en conclut que *les points doubles  $A_2$  se trouvent sur les focales et le plan double qui constitue le cône du complexe en un point  $A_2$ , est le plan normal à la focale en ce point.*

*Cône tangent en un point double.* — Par un point courant de la surface passent trois génératrices singulières [l'une d'elles est double (§ 14)] et les perpendiculaires menées, à chacune d'elles, par le centre de la surface, sont normales aux plans tangents qui contiennent ces génératrices et dont les points de contact se trouvent sur ces droites.

Par un point double,  $A_2$ , passent une infinité de génératrices singulières, situées dans le plan double  $\alpha_2$ , plan du complexe en ce point. On sait, d'autre part, que le point  $A_2$  est un point singulier de la surface  $\Omega$ .

Les normales menées de O, à ces génératrices singulières, sont situées sur un cône, dont la base, dans le plan  $\alpha_2$ , est le petit cercle de la sphère de diamètre  $OA_2$ ; ce cône est donc du second degré.

Le cône de sommet  $A_2$  et supplémentaire du cône dont il vient d'être question, est, lui aussi, du second degré. Les plans tangents à ce cône sont tangents en  $A_2$  à la surface  $\Omega$ ; nous retrouvons la détermination classique du cône des tangentes.

*Plan double.* — Un plan double est un plan singulier dont les

deux foyers  $f_1$  et  $f_2$  sont confondus; la quadrique, dont le cône asymptote a une génératrice normale à ce plan, doit donc être une développable, puisque les deux génératrices parallèles à celle du cône doivent être confondues; ainsi tout plan double est normal à un plan principal, puisque les focales, seules développables de la famille homofocale, sont contenues dans les plans principaux.

Prenons la focale du plan  $zOx$ ; toute tangente à cette conique est axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie du système S, relatif au point de contact. Il devient dès lors immédiat que, pour tout plan normal au plan  $zOx$ , et tangent à l'isogire  $\sqrt{\rho^2 + \beta^2}$ , les deux tangentes à la focale, normales à la trace D, déterminent les deux points  $f_1$  et  $f_2$ . Nous avons rencontré cette propriété un peu plus haut.

Quand la droite D, tangente à l'ellipse principale de l'isogire  $\sqrt{\rho^2 + \beta^2}$  devient perpendiculaire aux asymptotes de la focale, les deux points  $f_1, f_2$  se confondent, D devient tangente au cercle orthoptique. C'est donc une *tangente commune à l'ellipse et au cercle* et nous avons un *plan double* dont le *foyer double* se trouve à l'intersection de l'asymptote avec le cercle.

La génération de la surface  $\Omega$  par courbes sphériques permet d'énoncer quelques propriétés :

— L'intersection de la quadrique donnée avec sa sphère de Monge, lieu des points par lesquels passent deux génératrices rectangulaires, est le lieu des points de la surface  $\Omega$ , pour lesquels les deux plans du complexe sont rectangulaires; ces plans sont eux-mêmes tangents à la surface  $\Omega$ .

— Si, par les points d'intersection d'une surface  $\Omega$  et d'une sphère concentrique, on mène les normales aux plans du complexe, on obtient les génératrices d'une quadrique homofocale.

— Considérons les géodésiques de la quadrique  $Q_{+\lambda}$ , déterminées à l'aide de la quadrique donnée Q. Appelons  $r_{+\lambda}$  et  $r$  les rayons des sphères de Monge de ces deux quadriques. Le lieu des points où deux de ces géodésiques se coupent à angle droit est l'intersection de  $Q_{+\lambda}$  avec la sphère de rayon

$$R = \sqrt{\frac{2r_{+\lambda} + r^2}{3}} = \sqrt{r^2 - \lambda},$$

car

$$r_\lambda = r^2 - 3\lambda;$$

ainsi la courbe obtenue est celle qui est déterminée par la quadrique  $Q_{+\lambda}$  et sa sphère associée. Or, si nous considérons l'angle droit des deux tangentes et son plan (qui est tangent à  $Q_{+\lambda}$ ), nous voyons que ce plan est normal à  $Q$  aux deux points de contact de ses côtés avec cette quadrique, d'où cette propriété de la surface  $\Omega$ , *d'être le lieu des sommets d'un angle droit dont les côtés sont tangents à la quadrique donnée, son plan étant normal à cette dernière au deux points de contact* (M. Richard).

La normale au plan de l'angle est génératrice singulière, car elle appartient, nous l'avons vu, au complexe de Painvin et aussi au complexe de Chasles, puisqu'elle est normale à sa conjuguée qui joint les points de contact des deux côtés.

La tangente à la courbe d'intersection de  $Q_{+\lambda}$  et de la sphère est, nous le savons, normale à la génératrice singulière; elle est donc contenue dans le plan de l'angle droit.

Notons que le plan de l'équerre est également normal à la surface  $\Omega$  au sommet de l'angle droit.

16. **Équation du complexe.** — Soit  $D$  une droite du complexe dont les coordonnées plückériennes sont  $p, q, r, l, m, n$ ; par le centre  $O$  de la quadrique, menons le plan  $P$  normal à  $D$ , qui est coupé en un point  $A$ .

Désignons par  $d$  la distance  $OA$ ; la nature même des vecteurs de composantes  $p, q, r$ , d'une part,  $l, m, n$ , d'autre part, permet d'écrire

$$d \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Le carré du rayon de giration polaire relatif au point  $A$  est

$$d^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$

Le carré du rayon de giration relatif au plan  $P$  est

$$\frac{a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 r^2}{p^2 + q^2 + r^2}$$

et la différence de ces deux expressions doit être égale au carré du rayon de giration  $2\rho^2$  relatif à la droite, ce qui donne

$$l^2 + m^2 + n^2 = p^2(2\rho^2 - b^2 - c^2) + q^2(2\rho^2 - c^2 - a^2) + r^2(2\rho^2 - a^2 - b^2);$$

c'est l'équation d'un complexe de Painvin.

**17. Courbes du complexe.** — Une courbe du complexe est caractérisée par la propriété d'avoir pour tangentes des droites du complexe. Nous en avons rencontré déjà trois familles :

- 1° les courbes planes qui sont des coniques;
- 2° des lignes de courbures de quadriques homofocales, intersections des quadriques  $Q_{+\lambda}$  et  $Q_{-\lambda}$ ;
- 3° Enfin, les géodésiques des quadriques  $Q_{+\lambda}$  et  $Q_{-\lambda}$  déterminées sur chacune d'elles à l'aide de l'autre.

Cherchons l'équation différentielle des courbes du complexe.

Soient  $x, y, z$ , les coordonnées d'un point A d'une courbe du complexe; ces coordonnées sont des fonctions d'un paramètre  $t$ , de sorte que les paramètres directeurs de la tangente en ce point seront  $x'(t), y'(t), z'(t)$  et les coordonnées tangentielles du plan normal en A à la courbe

$$x', y', z', -(xx' + yy' + zz'),$$

de sorte que le carré du rayon de giration relatif à ce plan est

$$\frac{a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2 + (xx' + yy' + zz')^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2};$$

le carré du rayon de giration polaire au point A est

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + c^2;$$

écrivons que la différence de ces expressions donne  $2\rho^2$ ,

$$2\rho^2 = \Sigma x^2 + \Sigma a^2 - \frac{a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2 + [\Sigma xx']^2}{\Sigma x'^2},$$

qui s'écrit

$$\Sigma(y'x - x'y)^2 + (\Sigma x'^2)[\Sigma a^2 - 2\rho^2] - (a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2) = 0$$

ou

$$\Sigma(y'x - x'y)^2 + \Sigma[x'^2(b^2 + c^2 - 2\rho^2)] = 0.$$

On retrouve l'équation du complexe sous une autre forme, comme il convient.

La définition même des courbes du complexe conduit à l'énoncé de plusieurs propriétés de ces courbes faciles à obtenir par la géométrie.

1° Soient deux quadriques homofocales  $Q_{+\lambda}$  et  $Q_{-\lambda}$  et les géodésiques de l'une d'elles, déterminées à l'aide de l'autre; si l'on mène les plans normaux à ces courbes, par les points où elles rencontrent l'intersection de la quadrique par une sphère concentrique, ces plans enveloppent une quadrique, homofocale des deux quadriques données.

2° Soit A un point d'intersection d'une courbe du complexe C, avec la surface  $\Omega$ ; par ce point A passent une courbe sphérique, intersection de la sphère de rayon OA avec la quadrique associée  $Q_\lambda$  et une ligne de courbure de celle-ci, intersection de  $Q_{+\lambda}$  et de  $Q_{-\lambda}$ .

Les deux plans, P normal à la courbe C, et II normal à la ligne de courbure, ont même rayon de giration et sont, par suite, tangents au cône de sommet A et circonscrit à la quadrique isogire correspondante; ce cône est le cône supplémentaire du cône du complexe en A; il dégénère ici en les deux génératrices  $G_1$  et  $G_2$  de la 3<sup>e</sup> quadrique homofocale qui passe par A; et le plan II est le plan tangent en A, à cette quadrique.

Nous nous trouvons donc devant l'un des deux cas suivants :

— le plan P passe par l'une des deux génératrices, et la courbe C est tangente à l'un des deux plans  $T_1, T_2$  normaux à ces génératrices (ce sont les plans du complexe en A);

— ou bien le plan P passe par les deux génératrices, c'est-à-dire est confondu avec le plan tangent en A à la 3<sup>e</sup> quadrique, et alors, est confondu avec le plan II lui-même; par suite, la courbe C est tangente à la ligne de courbure de la quadrique  $Q_{+\lambda}$  ou, si l'on veut, à la génératrice singulière tangente en A à la surface.

Une géodésique  $g(+\lambda, -\lambda)$ , est située sur la quadrique  $Q_{+\lambda}$ ; sa tangente, en A, est contenue dans le plan tangent en A à cette quadrique, plan tangent qui est distinct des deux plans  $T_1$  et  $T_2$ , mais

qui, par contre, contient la génératrice singulière tangente en  $A$ ; nous en concluons que la géodésique est tangente à la ligne de courbure, car son plan normal coïncide nécessairement avec le plan  $\Pi$ ; nous retrouvons cette propriété connue des lignes de courbure des quadriques d'être l'enveloppe des géodésiques.

3° Si la courbe  $C$  est la conique du complexe relative à un plan  $X$ , ce plan est nécessairement distinct de  $T_1$  et  $T_2$  puisque, par hypothèse, il n'est pas plan singulier.

La tangente  $Aa'$ , en  $A$  à la conique, doit, en sa qualité de droite du complexe, être dans l'un des deux plans  $T_1$  ou  $T_2$ . Par exemple,  $Aa'$  sera l'intersection de  $X$  et de  $T_1$ ; mais alors, l'intersection de  $X$  avec  $T_2$ ,  $Aa''$  droite du complexe dans le plan  $X$ , devrait être aussi tangente à la conique, et  $Aa''$  est distincte de  $Aa'$ ; ce n'est donc possible que si  $Aa'$  et  $Aa''$  sont confondues avec la génératrice singulière intersection de  $T_1$  et  $T_2$ .

Nous avons donc cet énoncé : *les coniques du complexe touchent la surface  $\Omega$  aux points de contact des génératrices singulières de leurs plans; elles sont ainsi quadritangentes* et cette propriété est une généralisation de celle du complexe tétraédral, dont la surface des singularités est constituée par les faces du tétraèdre fondamental, auxquelles les coniques du complexe sont tangentes. La propriété correspondante des cônes du complexe, d'être quadritangents à la surface  $\Omega$ , est connue. Il résulte de ces propriétés, que si un plan contient une infinité de génératrices singulières, sa conique du complexe doit être tout entière sur la surface  $\Omega$ ; ce qui se vérifie pour les plans principaux dont la conique du complexe fait partie de la section de la surface.

De même, si par un point passent une infinité de génératrices singulières, le cône sera circonscrit à la surface; il en est ainsi pour les points à l'infini des axes de coordonnées et l'on obtient ainsi le reste de l'intersection de la surface avec un plan de coordonnées : le cercle de Monge de la conique principale de la quadrique donnée.

**18. Équations de la surface.** — 1° *Équation ponctuelle.* — Nous utiliserons la propriété de la surface  $\Omega$  d'être le lieu des points pour lesquels deux des quadriques homofocales qui y passent, correspondent à des valeurs du paramètre égales et de signe contraire.

Un point  $xyz$  appartient donc à surface si l'équation en  $\lambda$

$$(1) \quad \frac{x^2}{\alpha + \lambda} + \frac{y^2}{\beta + \lambda} + \frac{z^2}{\gamma + \lambda} - 1 = 0$$

admet deux racines égales et de signes contraires, ce qui revient à dire qu'elle admet pour racine la somme de ses racines, dont l'expression est

$$x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha + \beta + \gamma) = x^2 + y^2 + z^2 - s;$$

la substitution dans (1) donne

$$(2) \quad \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - (\beta + \gamma)} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - (\gamma + \alpha)} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha + \beta)} - 1 = 0.$$

Le terme en  $(x^2 + y^2 + z^2)$  disparaissant, il reste une surface du 4<sup>e</sup> degré, qui est la transformée apsidale de la quadrique

$$\frac{x^2}{\beta + \gamma} + \frac{y^2}{\gamma + \alpha} + \frac{z^2}{\alpha + \beta} - 1 = 0.$$

En prenant pour quadrique de base du complexe de Painvin

$$(3) \quad \frac{x^2}{\frac{1}{2} - \alpha} + \frac{y^2}{\frac{1}{2} - \beta} + \frac{z^2}{\frac{1}{2} - \gamma} - 1 = 0,$$

on obtiendrait l'apsidale de la quadrique

$$\sum \frac{x^2}{\frac{1}{2} - \beta + \frac{1}{2} - \gamma} - 1 = 0$$

ou

$$\sum \frac{x^2}{\alpha} - 1 = 0$$

qui est la quadrique donnée E. Rappelons que lorsque E est un ellipsoïde, la surface  $\Omega$  est une surface de l'onde de Fresnel.

2<sup>o</sup> *Équation tangentielle.* — Soit  $u_0, v_0, w_0, s_0$  les coordonnées d'un plan quelconque  $P_0$ ; le carré de son rayon de giration est

$$(4) \quad \frac{a^2 u_0^2 + b^2 v_0^2 + c^2 w_0^2 + s^2}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} = \frac{\epsilon_0}{i_0}$$

dans un système dont l'ellipsoïde d'inertie a pour axes  $a, b, c$ .



Avec la même notation, le rayon de giration d'un plan P normal à  $P_0$ , de coordonnées  $u, v, w, s$  est  $\frac{\varepsilon}{i}$ .

L'intersection D, des deux plans  $P_0$  et P est une droite du complexe si

$$\frac{\varepsilon_0}{i_0} + \frac{\varepsilon}{i} = 2\rho^2,$$

que nous écrivons

$$(5) \quad i(\varepsilon_0 - \rho^2 i_0) + i_0(\varepsilon - \rho^2 i) = 0.$$

Or la quadrique donnée,

$$E = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - s^2 = 0,$$

est l'isogire  $\rho$  d'un système qui a pour ellipsoïde central d'inertie la quadrique conjuguée de  $\varepsilon = 0$ , si l'on a

$$\alpha = \rho^2 - a^2, \quad \beta = \rho^2 - b^2, \quad \gamma = \rho^2 - c^2,$$

ce qui permet d'écrire la dernière équation

$$(6) \quad iE_0 + i_0E = 0,$$

équation tangentielle de la quadrique enveloppe du plan P.

Prenons l'équation tangentielle du cône asymptote de cette quadrique (6)

$$u^2(E_0 + \alpha i_0) + v^2(E_0 + \beta i_0) + w^2(E_0 + \gamma i_0) = 0,$$

l'équation ponctuelle est

$$\frac{x^2}{E_0 + \alpha i_0} + \frac{y^2}{E_0 + \beta i_0} + \frac{z^2}{E_0 + \gamma i_0} = 0,$$

et si la normale au plan  $P_0$ , dont les coefficients directeurs sont  $u_0, v_0, w_0$ , est située sur ce cône, c'est que le plan  $P_0$  est plan singulier, c'est-à-dire tangent à  $\Omega$ ; nous obtenons, pour l'équation cherchée, en supprimant l'indice zéro devenu inutile,

$$(7) \quad \frac{u^2}{E + \alpha i} + \frac{v^2}{E + \beta i} + \frac{w^2}{E + \gamma i} = 0;$$

si l'on chasse le dénominateur, on trouve le trinome  $i$  en facteur, il reste une équation du 4<sup>e</sup> ordre, la surface est de 4<sup>e</sup> classe.

On voit aussi que l'équation (7) s'obtient par l'élimination du paramètre  $\lambda$  entre les deux équations

$$(8) \quad E - \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

et

$$(9) \quad \frac{u^2}{\alpha + \lambda} + \frac{v^2}{\beta + \lambda} + \frac{w^2}{\gamma + \lambda} = 0,$$

cette dernière représentant le cône supplémentaire du cône asymptote de la quadrique  $Q_{-\lambda}$ , alors que (8) est la quadrique  $Q_{+\lambda}$ . Les deux équations (8) et (9) définissent les développables qui enveloppent la surface  $\Omega$ .

Cherchons le cylindre circonscrit parallèle à l'axe  $Oy$ , par exemple; nous avons, en annulant  $v$  dans (7), les deux relations

$$E + \beta i = 0, \quad E + \gamma u^2 + \alpha w^2 = 0$$

ou

$$(10) \quad \alpha u^2 + \gamma w^2 - s^2 + \beta(u^2 + w^2) = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha + \gamma)(u^2 + w^2) - s^2 = 0;$$

on retrouve les courbes déjà rencontrées. En outre, les valeurs de  $u$ ,  $w$ ,  $s$  qui vérifient les deux équations (10), déterminent des plans normaux au plan principal et dont les traces font partie du contour apparent de la surface projeté parallèlement à  $Oy$ . Il vient

$$\frac{u^2}{\alpha - \beta} = \frac{w^2}{\beta - \gamma} = \frac{s^2}{\alpha^2 - \gamma^2},$$

ce qui donne quatre plans symétriques deux à deux par rapport au centre de la surface et normaux aux asymptotes de la focale du plan  $zOx$ .

**19. Courbes tracées sur la surface. Représentation paramétrique.**

— Partons des relations entre coordonnées cartésiennes et elliptiques, en remplaçant  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$  par  $a$ ,  $b$ ,  $c$  pour simplifier l'écriture

$$(1) \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)(a - \lambda_3)}{(a - b)(a - c)}}, & y = \sqrt{\frac{(b - \lambda_1)(b - \lambda_2)(b - \lambda_3)}{(b - c)(b - a)}}, \\ z = \sqrt{\frac{(c - \lambda_1)(c - \lambda_2)(c - \lambda_3)}{(c - a)(c - b)}}, \end{cases}$$

$\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont les  $\lambda$  des trois quadriques homofocales qui passent par le point de coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

En assujettissant les trois  $\lambda$  à une relation, les expressions (1), dépendant de deux paramètres, représenteront une surface.

1°  $\lambda_1 = 0$  donne la quadrique dont les carrés des demi-axes sont  $a, b, c$ ; les courbes  $\lambda_2 = \text{const.}$  et  $\lambda_3 = \text{const.}$  sont les lignes de courbure;

2° La sphère de rayon  $r$  sera représentée par

$$\begin{aligned} x &= r \sqrt{\frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{(a-b)(a-c)}}, & y &= r \sqrt{\frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)}{(b-c)(b-a)}}, \\ z &= r \sqrt{\frac{(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)}{(c-a)(c-b)}}, \end{aligned}$$

où les courbes  $\lambda_1 = \text{const.}$  sont les intersections de la surface par les cônes homofocaux du cône asymptote de la quadrique de base. Il vient, en effet, en éliminant les variables,

$$\sum \frac{x^2}{a-\lambda_1} = 0, \quad \sum \frac{x^2}{a-\lambda_2} = 0;$$

3° Dans le cas de la surface  $\Omega$ , la relation est  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , nous poserons  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\lambda}$ , puis remplaçons par  $\mu$  la lettre  $\lambda_3$ ; il vient (2)

$$(1) \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{(a^2-\lambda)(a-\mu)}{(a-b)(a-c)}}, & y = \sqrt{\frac{(b^2-\lambda)(b-\mu)}{(b-c)(b-a)}}, \\ z = \sqrt{\frac{(c^2-\lambda)(c-\mu)}{(c-a)(c-b)}}. \end{cases}$$

Si la quadrique donnée est un ellipsoïde, les quantités  $a, b, c$  sont positives, nous les supposons rangées par ordre de grandeur décroissante.

Les dénominateurs des radicaux étant, négatifs pour  $y$ , et positifs pour  $x$  et  $z$ , les numérateurs doivent avoir les mêmes signes pour obtenir des valeurs réelles; ceci entraîne la nécessité pour  $\lambda$ , de

(2) La représentation ci dessus, qui s'obtient sans le moindre calcul, présente cet avantage que les paramètres ont une signification concrète. Elle diffère légèrement de celle donnée par M. Richard [10]. Les paramètres  $\lambda'$  et  $\mu'$  de M. Richard sont liés à  $\lambda$  et  $\mu$  par deux équations linéaires

$$\lambda' + \mu = a + b + c \quad \text{et} \quad (a + b + c)\lambda' - \mu' - \lambda = ab + bc + ca.$$

varier entre  $c^2$  et  $a^2$ , tandis que  $u$  variera entre  $c$  et  $a$ , et de telle sorte que, si  $\lambda$  est compris entre  $c^2$  et  $b^2$ ,  $\mu$  se trouvera entre  $b$  et  $a$ , et si  $\lambda$  est entre  $b^2$  et  $a^2$ ,  $\mu$  se trouvera entre  $c$  et  $b$ .

Comme vérification, nous retrouvons aisément l'équation de la surface  $\Omega$  à partir des expressions (1), en nous aidant des identités élémentaires qu'il est possible d'écrire entre trois grandeurs différentes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; nous en rappelons ci-après quelques-unes qui nous serviront :

$$\begin{aligned} \sum \left[ \frac{1}{(a-b)(a-c)} \right] &= \sum \left[ \frac{a}{(a-b)(a-c)} \right] = 0, \\ \sum \left[ \frac{a'}{(a-b)(a-c)} \right] &= 1, \quad \sum \left[ \frac{a'(b+c)}{(a-b)(a-c)} \right] = 0, \\ \sum \left[ \frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)} \right] &= ab + bc + ca, \quad \sum \left[ \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} \right] = a + b + c, \\ \sum \left[ \frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)} \right] &= -1, \quad \sum \frac{1}{a(a-b)(a-c)} = \frac{1}{abc}. \end{aligned}$$

L'élimination est très simple et donne :

$$\begin{aligned} (2) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = a + b + c - \mu, \\ (3) \quad & \frac{x^2}{a-\mu} + \frac{y^2}{b-\mu} + \frac{z^2}{c-\mu} - 1 = 0, \\ (4) \quad & \frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 0, \\ (5) \quad & x^2(b+c) + y^2(c+a) + z^2(a+b) = ab + bc + ca + \lambda, \\ (6) \quad & \frac{x^2}{a-\sqrt{\lambda}} + \frac{y^2}{b-\sqrt{\lambda}} + \frac{z^2}{c-\sqrt{\lambda}} - 1 = 0, \\ (7) \quad & \frac{x^2}{a+\sqrt{\lambda}} + \frac{y^2}{c+\sqrt{\lambda}} + \frac{z^2}{c+\sqrt{\lambda}} - 1 = 0, \\ (8) \quad & \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 + \frac{\lambda\mu}{abc}. \end{aligned}$$

La soustraction membre à membre des équations (6) et (7) donne l'équation (4). Effectuons la soustraction, après avoir rendu les mêmes équations (6) et (7) entières; nous obtenons l'équation (5), de sorte que les quatre quadriques (4), (5), (6), (7) appartiennent à un même faisceau linéaire ponctuel.

L'équation de la surface  $\Omega$  s'obtient en éliminant  $\mu$  entre (2) et (3),

et, si on la désire sous sa forme entière, en utilisant (2), (5) et (8), ce qui donne

$$(9) \quad [\Sigma x^2 - \Sigma a][\Sigma x^2(b+c) - \Sigma ab] + \Sigma x^2 bc - abc = 0,$$

de la forme

$$SQ_1 + Q_2 = 0.$$

S est le premier membre de l'équation de la sphère de Monge de la quadrique  $Q_2$ , qui, à son tour, n'est autre que la quadrique donnée, dont on a rendu entier le premier membre de l'équation.

On reconnaît sur les équations (2) et (3) les courbes  $\mu = \text{const.}$  et, sur les équations (6) et (7), les courbes  $\lambda = \text{const.}$

Les identités rappelées plus haut permettent de vérifier que les courbes  $\lambda = \text{const.}$  et  $\mu = \text{const.}$  forment un réseau orthogonal, car

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{1}{4} \sum \frac{x}{a^2 - \lambda} \frac{x}{a - \mu} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{(a-b)(a-c)} = 0.$$

L'équation (8) montre que les courbes  $\lambda\mu = \text{const.}$  se trouvent à l'intersection de la surface avec des homothétiques de la quadrique donnée.

Une autre courbe intéressante de la surface est la courbe  $\lambda = \mu^2$  qui se trouve sur la surface du 4<sup>e</sup> ordre

$$(10) \quad Q_1 - S^2 = 0$$

obtenue à l'aide des équations (2) et (5).

L'intersection des surfaces (9) et (10) est du 16<sup>e</sup> degré mais, comme l'ombilicale est une courbe double de la surface (10) et courbe simple de la surface  $\Omega$ , elle compte pour deux dans l'intersection, dont le degré, réduit de  $4 = 2 \times 2$  unités, se trouve ramené à 12.

*Les normales à la surface, le long de cette courbe  $\lambda = \mu^2$  sont des droites du complexe, et cette courbe est le lieu du point de contact de la surface  $\Omega$  avec les quadriques homofocales.* Celles-ci coupent, en effet, la surface suivant une courbe  $\lambda = \text{const.}$  et suivant une courbe sphérique  $\mu = \text{const.}$  Ces deux courbes ont huit points communs, qui sont les points de contact de la quadrique avec  $\Omega$ ; on sait, d'autre part, que le long de la courbe  $\mu = \text{const.}$ , les normales à la quadrique, sont génératrices du complexe; aux

points où cell-ci touchera la quadrique, la normale sera commune aux deux surfaces.

Les points qui, dans chaque plan principal, sont communs aux deux coniques, intersection de la surface  $\Omega$  par le plan, sont les points coniques de la surface et comme ils se trouvent à l'intersection des courbes  $\lambda = b^2$ ,  $\mu = b$  (en prenant pour exemple le plan  $zOx$ ), cela montre que la courbe  $\lambda = \mu^2$  passe par ces points singuliers.

Pour obtenir le nombre des points de cette courbe qui sont situés dans un plan quelconque, nous devons procéder trois fois à l'élévation au carré, et comme les polynomes en  $\mu$ , sous les radicaux, sont du 3<sup>e</sup> degré, on obtient une équation en  $\mu^{12}$ ; la courbe est donc du 12<sup>e</sup> ordre, ce qui vérifie le résultat déjà trouvé.

*Cône du complexe relatif à l'origine des coordonnées.* — Le rayon de giration polaire, au point O, est  $r_0 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , un plan normal à une droite du complexe passant par l'origine, et de coordonnées  $u, v, w$ , a pour rayon de giration

$$\frac{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2}{u^2 + v^2 + w^2},$$

et l'on doit avoir

$$r_0^2 - \frac{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2}{u^2 + v^2 + w^2} = 2\rho^2;$$

en substituant  $\rho^2 - \alpha, \rho^2 - \beta, \rho^2 - \gamma$  à  $a^2, b^2, c^2$ , il vient

$$u^2(\beta + \gamma) + v^2(\gamma + \alpha) + w^2(\alpha + \beta) = 0,$$

le cône supplémentaire du cône représenté par l'équation ci-dessus est le cône cherché, son équation est

$$x^2(\beta + \gamma) + y^2(\gamma + \alpha) + z^2(\alpha + \beta) = 0$$

et, comme ses génératrices appartiennent aussi au complexe de Chasles (puisque issues du point O), ce sont des génératrices singulières et le cône est circonscrit à la surface; c'est aussi le cône asymptote de la quadrique  $Q_1$ , c'est-à-dire une courbe de la surface dans le plan de l'infini.

*Conique du complexe du plan de l'infini.* — Le plan de l'infini

ayant pour coordonnées tangentielles  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ , est normal à un plan quelconque; son rayon de giration est infini, de sorte qu'une droite, dans ce plan, sera une droite du complexe si c'est la droite à l'infini d'un plan dont le rayon de giration est lui aussi infini; ce qui n'a lieu que si ses coordonnées satisfont à

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$

c'est-à-dire que la conique du complexe est l'*ombilicale*, et puisque toute droite à l'infini appartient aussi au complexe de Chasles, car le plan de l'infini est une des faces du tétraèdre fondamental, l'*ombilicale* est tout entière sur la surface  $\Omega$ .

Les cordes communes à ces deux coniques définissent les directions de plans qui coupent la surface  $\Omega$  suivant des quadriques bicirculaires, car les points cycliques de ces plans sont points doubles. Deux de ces cordes communes sont réelles, elles donnent les directions de plan normales aux asymptotes de la focale hyperbolique.

**20. Surface  $\Omega$  cerclée.** — Les équations qui, au paragraphe 19, donnent les courbes  $\lambda$  et  $\mu$  sur la surface  $\Omega$ , font apparaître un cas particulier intéressant : celui où la somme de deux des quantités  $a$ ,  $b$  et  $c$  est nulle, par exemple  $a + b = 0$ .

Supposons  $a$  et  $c$  positifs, la quadrique de base du complexe est alors un hyperboloïde à une nappe dont la conique principale du plan  $xOy$  est une hyperbole *équilatère*.

Les biquadratiques  $\mu = \text{const.}$  qui engendrent la surface  $\Omega$  sont les intersections des sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 = c - \mu,$$

avec les quadriques associées

$$\frac{x^2}{a - \mu} - \frac{y^2}{a + \mu} + \frac{z^2}{c - \mu} = 1;$$

les deux surfaces étant *bitangentes*, les biquadratiques se décomposent en *deux cercles*, dont les plans se coupent suivant  $Oz$ .

L'équation (6) du paragraphe 19 est celle du cône de sommet O qui s'appuie sur une courbe  $\lambda$ ; elle devient

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{a^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 0,$$

qui représente un cône de révolution d'axe Oz.

L'équation ponctuelle de la surface est

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{x^2}{a+c} - \frac{y^2}{a-c} \right) - (x^2 + y^2) = 0;$$

elle montre que l'axe Oz est une génératrice double de la surface, et que la section par le plan horizontal xOy est formée par les droites isotropes de l'origine et par la conique,

$$(2) \quad \frac{x^2}{a+c} - \frac{y^2}{a-c} - 1 = 0$$

qui est une hyperbole si  $a > c$  et une ellipse si  $a < c$ . Plaçons-nous dans ce deuxième cas et posons  $a + c = R^2$ ,  $c - a = r^2$ . La surface apparaît, dès lors, comme engendrée par un cercle variable, de centre O, dont le plan tourne autour de l'axe Oz et dont le rayon est égal au vecteur de l'ellipse (2).

*Courbes tracées sur la surface. Réseau orthogonal.* — Les expressions paramétriques des coordonnées d'un point de la surface s'écrivent immédiatement en partant de celles qui ont été données dans le cas général, on obtient

$$x = \sqrt{\frac{(a^2 - \lambda)(a - \mu)}{2a(a + c)}}, \quad y = \sqrt{\frac{(a^2 - \lambda)(a + \mu)}{-2a(a + c)}}, \\ z = \sqrt{\frac{(c^2 - \lambda)(c - \mu)}{c^2 - a^2}}.$$

Les courbes  $\mu = \text{const.}$  sont les cercles, qui se projettent sur le plan yOx suivant des droites rayonnantes autour de O; les courbes  $\lambda = \text{const.}$  sont des biquadratiques intersections des quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{a - \sqrt{\lambda}} - \frac{y^2}{a + \sqrt{\lambda}} + \frac{z^2}{c - \sqrt{\lambda}} - 1 = 0$$

et

$$\frac{x^2}{a + \sqrt{\lambda}} - \frac{y^2}{a - \sqrt{\lambda}} + \frac{z^2}{c + \sqrt{\lambda}} - 1 = 0,$$



leurs projections sur le plan  $xOy$  sont des coniques d'équations

$$\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{r^2} = k^2,$$

par suite, homothétiques de l'intersection de la surface par le même plan de coordonnées.

On vérifie aisément la relation

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0,$$

condition d'orthogonalité des courbes  $\lambda = \text{const.}$  et  $\mu = \text{const.}$

A quatre valeurs de  $\lambda$  correspondent quatre cônes de *révolution* dont l'intersection par le plan d'un cercle ( $\mu = \text{const.}$ ) donne quatre droites faisant des angles *constants*; le rapport anharmonique des  $4\lambda$  est donc constant, puisqu'il est fonction de ces angles. Nous retrouvons dans ce cas simple le théorème de Cayley : les cercles sont coupés par quatre trajectoires orthogonales en des points tels que le rapport anharmonique soit constant.

*Réseau conjugué.* — Soit P un point de l'axe Oz, OP =  $\nu$ . Le cône circonscrit à la surface, de sommet P, se décompose en la génératrice double Oz et un cône du 2<sup>o</sup> ordre.

D'ailleurs, il est facile d'obtenir la base de ce cône sur le plan  $\gamma O x$  comme lieu de la trace des tangentes, issues de P, aux cercles  $\mu = \text{const.}$

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 + \frac{1}{\nu^2}(x^2 + y^2) = 0.$$

La courbe de contact du cône avec la surface est le lieu du point de contact de la tangente variable avec le cercle correspondant. Il est immédiat que cette courbe est l'intersection de la surface par la sphère de diamètre OP; c'est aussi la transformée par inversion de la conique de base du cône, la puissance d'inversion étant  $\nu^2$  et le pôle d'inversion P.

En résolvant par rapport à  $x, y, z$ , les équations

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{r^2} \right) - (x^2 + y^2) = 0$$

de la surface des sphères qui découpent les cercles

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$$

et des sphères qui donnent les courbes conjuguées de ces cercles en vertu du théorème de Kœnigs

$$x^2 + y^2 + z^2 - \nu z = 0,$$

nous obtenons

$$x = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{u^2}{\nu^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{r^2}\right)}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}}}, \quad y = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{u^2}{\nu^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{R^2}\right)}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}}},$$

$$z = \frac{u^2}{\nu}.$$

*Autre représentation paramétrique, par courbes orthogonales.*

— En partant de l'équation classique de l'ellipse du plan  $xOy$  en coordonnées polaires

$$\rho^2 \left( \frac{\cos^2 \omega}{R^2} + \frac{\sin^2 \omega}{r^2} \right) - 1 = 0,$$

nous arrivons facilement à la représentation paramétrique de la surface

$$x = \rho \cos \varphi \cos \omega, \quad y = \rho \cos \varphi \sin \omega, \quad z = \rho \sin \varphi,$$

où nous remplacerons  $\rho$  par sa valeur tirée de l'équation précédente.

Les courbes  $\omega = \text{const.}$  sont les cercles et  $\varphi = \text{const.}$ , leurs trajectoires orthogonales.

Cette génération par cercles fait apparaître, sur la génératrice double, quatre points pincés, où les plans tangents à la surface le long de cette génératrice double  $Oz$ , sont confondus avec l'un des plans  $zOx$  ou  $zOy$ . Ces points sont situés, de part et d'autre du centre  $O$ , aux distances égales aux longueurs des axes de la conique du plan  $xOy$ .

Le cône circonscrit à la surface, depuis un de ces points pincés, se décompose en deux plans, réels pour les points les plus éloignés. La courbe de contact d'un de ces plans avec la surface est une circonférence, puisque c'est l'inverse d'une droite. Ces propriétés, qui rappellent celles de la surface  $\Omega$ , sont immédiates si, dans l'équation précédemment trouvée, de la courbe de base du cône circonscrit

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 + \frac{1}{\nu^2} (x^2 + y^2) = 0,$$

on fait  $\nu = R$  ou  $\nu = r$ .

Soit  $M$  un point de la surface; la tangente au cercle coupe le plan  $xOy$  en un certain point  $D$  et la direction conjuguée du cercle, au point  $M$ , est la tangente à la courbe de contact du cône circonscrit à la surface et dont le sommet se trouve à l'intersection de la droite  $DM$  avec l'axe  $Oz$ . Cette courbe de contact étant l'inverse du lieu du point  $D$ , les tangentes aux deux courbes, en  $M$  et  $D$ , sont également inclinées sur la droite  $MD$ . Nous pouvons donc énoncer : *la direction conjuguée de la tangente au cercle, est la symétrique, par rapport à cette même tangente, de l'horizontale du plan tangent au point considéré.*

*Propriété des sections horizontales de la surface.* — Soit  $C$ , la courbe d'intersection de la surface par un plan horizontal de cote  $z$ . Le vecteur de la courbe  $C$  sera désigné par  $\rho_1$  et celui de l'ellipse du plan  $xOy$ , de même azimut  $\omega$  par  $\rho$ . Nous avons

$$\rho_1^2 = \rho^2 - z^2,$$

de sorte que l'aire de la section horizontale est

$$\frac{1}{2} \int \rho_1^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\omega - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} z^2 d\omega = \pi(Rz - z^2).$$

Cette aire est nulle pour

$$z = \sqrt{Rr}.$$

Traçons, dans le plan  $xOy$ , le cercle de rayon  $\sqrt{Rr}$  qui coupe l'ellipse en quatre points, où le vecteur de la courbe  $C$  devient imaginaire; en considérant comme positives les aires situées à l'intérieur de l'ellipse et négatives celles situées à l'extérieur, on voit que la somme des aires négatives est égale à celle des aires positives dans le cas général; la différence représente justement l'aire de la courbe  $C$ .

---

## BIBLIOGRAPHIE.

1. P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, 3<sup>e</sup> édit., Gauthier-Villars, Paris, 1911.
  2. G. BOULIGAND, *Notions sur la Géométrie réglée et sur la théorie du Complexe quadratique*, Vuibert, Paris, 1929.
  3. C. CULMANN, *Die Graphische statik*, 2<sup>e</sup> édit., vol. I, Meyer et Zeller, Zurich, 1875.
  4. G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, 2<sup>e</sup> édit., Hermann, Paris, 1899.
  5. E. DUPORCQ, *Premiers principes de géométrie moderne*, 2<sup>e</sup> édit. revue par R. BRICARD, Gauthier-Villars, Paris, 1912.
  6. A. FÖPPL, *Vorlesungen über Technische mechanik*, t. V, Teubner, Leipzig, 1922.
  7. F. KLEIN, *Vorlesungen über höhere Geometrie*, 3<sup>e</sup> édit. revue par W. BLASCHKE, Julius Springer, Berlin, 1926.
  8. M. LE BESNERAIS, *Théorie du navire*, t. 1, A. Colin, Paris, 1923.
  9. P. MONTEL, *Éléments de la théorie mathématique de l'élasticité*, L. Eyrolles, Paris, 1928.
  10. J. RICHARD, *Thèse sur la surface des ondes de Fresnel*, P. Langlois et Cie, Châteauroux, 1901, p. 89.
  11. E. VESSIOT, *Leçons de Géométrie supérieure*, Hermann, Paris, 1919, p. 169.
  12. D. WOLKOWITSCH, *Applications de la géométrie à la stabilité des constructions*, t. 1 et 2, G. Doin, Paris, 1928-1930.
  13. D. WOLKOWITSCH, *Correspondance dualistique linéaire et réciproque (J. de l'École Polytechnique, 1934, n° 32, 2<sup>e</sup> Section)*.
-