MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

W. SIERPIŃSKI

Les ensembles projectifs et analytiques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 112 (1950)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1950__112__1_0>

© Gauthier-Villars, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BSM 3954

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXII

Les Ensembles projectifs et analytiques

Par M. W. SIERPIŃSKI

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1950

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

Copyright by Gauthier-Villars, 1950.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

LES
ENSEMBLES PROJECTIFS ET ANALYTIQUES

Par M. W. SIERPIŃSKI.

LES ENSEMBLES PROJECTIFS.

Introduction. — La théorie des ensembles projectifs créée par Nicolas Lusin en 1924 est devenue une branche importante de la théorie des ensembles de points, le grand intérêt à étudier la *projection* comme une des opérations les plus simples et en même temps les plus importantes de la Géométrie étant incontestable. Or, la notion d'ensemble projectif semble présenter un grand intérêt philosophique, grâce surtout aux liaisons avec la Logique mathématique (*voir* plus loin, n° 13).

L'étude de propriétés des ensembles projectifs est difficile; cependant pour comprendre ce que sont les ensembles projectifs et quels sont les problèmes qui s'y posent, on n'a pas besoin de connaissances spéciales. Je tâcherai tout d'abord d'expliquer d'une façon aussi élémentaire que possible, ce que sont les ensembles projectifs, quelles méthodes on emploie pour les étudier, quels sont les théorèmes les plus importants de leur théorie et les problèmes encore non résolus.

1. **Ensembles ouverts.** — Un ensemble plan E est dit *ouvert* (ou ensemble G) s'il jouit de la propriété suivante : *quel que soit le*

point p de l'ensemble E, *il existe un cercle de centre p dont l'intérieur est entièrement situé dans l'ensemble* E.

Pour les ensembles linéaires il faut remplacer les cercles par les intervalles (segments) (dont le centre est en p); pour les ensembles dans l'espace R_3 à 3 dimensions les cercles par les sphères. Généralement on peut considérer les ensembles ouverts dans l'espace R_m à m dimensions.

L'espace euclidien à m dimensions, R_m, est l'ensemble de tous les systèmes $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de m nombres réels (pris dans un ordre donné). L'intérieur d'une sphère de R_m au centre $p = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ et au rayon r est l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de R_m, tels que

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2 < r^2.$$

L'intérieur (ou l'extérieur) d'un cercle, d'une ellipse ou d'un triangle est un ensemble ouvert plan, mais n'est pas ouvert dans l'espace à 3 dimensions. Pareillement l'ensemble de tous les points (x, y) du plan qui ne sont pas situés sur les axes des coordonnées.

La circonférence d'un cercle n'est pas un ensemble plan ouvert. L'axe de coordonnées est un ensemble ouvert linéaire, mais n'est pas un ensemble ouvert plan. La propriété d'un ensemble d'être ouvert est donc une propriété extrinsèque : propriété d'un ensemble par rapport à l'espace dans lequel il est situé.

On démontre sans peine qu'une somme d'un nombre fini ou d'une infinité quelconque d'ensembles ouverts dans R_m est un ensemble ouvert dans R_m. Le produit (c'est-à-dire la partie commune) d'un nombre fini quelconque d'ensembles ouverts dans R_m est toujours ouvert dans R_m ou vide, mais cela ne subsiste pas pour une infinité d'ensembles ouverts. Par exemple si l'on désigne par S_n l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$, les ensembles $S_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont ouverts dans le plan, mais leur produit, qui est évidemment l'ensemble formé d'un seul point (0, 0), n'en est plus.

2. **Opérations élémentaires.** — E étant un ensemble de points situé dans R_m, on appelle *complémentaire* de E (par rapport à R_m) et l'on désigne par CE l'ensemble $R_m - E$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points de R_m qui n'appartiennent pas à E. (Par exemple le complé-

mentaire de l'intérieur d'un cercle par rapport au plan est l'ensemble de tous les points de la circonférence de ce cercle et de tous les points extérieurs du cercle considéré.)

On a évidemment (pour tout ensemble E situé dans R_m)

$$CCE = E.$$

E étant un ensemble de points situé dans le plan, on désigne par PE la projection orthogonale de l'ensemble E sur l'axe d'abscisses.

$(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ étant un point de R_m, on appelle *projection* de ce point sur R_{m-1} le point $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ de R_{m-1}.

E étant un ensemble de points situé dans R_m, on désigne généralement par PE l'ensemble de projections sur R_{m-1} de tous les points de E (et l'on appelle l'ensemble PE *projection* sur R_{m-1} de l'ensemble E.

3. **Ensembles projectifs.** — On appelle *projectifs* les ensembles qu'on obtient en partant des ensembles ouverts d'un espace à un nombre fini quelconque de dimensions et en effectuant un nombre fini de fois successivement les opérations de prendre le complémentaire et de faire la projection.

La famille de tous les ensembles projectifs situés dans les espaces à un nombre fini quelconque (variable) de dimensions peut être définie comme la plus petite famille Φ d'ensembles satisfaisant aux trois conditions suivantes :

1° la famille Φ contient tous les ensembles ouverts d'un espace à un nombre fini quelconque de dimensions;

2° si $E \in \Phi$, $CE \in \Phi$;

3° si $E \in \Phi$, $PE \in \Phi$.

Il est à remarquer que tous les ensembles qui ont été effectivement définis jusqu'à 1924 pour fournir des exemples de toute espèce étaient tous projectifs [1]. Or nous verrons dans le n° 9 comment on peut nommer un ensemble linéaire non projectif.

4. **Classes d'ensembles projectifs.** — On appelle *fermés* ou ensembles F les complémentaires des ensembles ouverts. Les ensembles F de R_m coïncident avec les ensembles CG de R_m et les

[1] *Cf.* N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 10, p. 90.

ensembles G de R_m coïncident avec les ensembles CF de R_m. Les ensembles ouverts dans R_m ne sont pas ouverts dans R_{m+1}, cependant les ensembles fermés dans R_m sont aussi fermés dans R_{m+1}.

On démontre sans peine que les projections des ensembles ouverts de R_m coïncident avec les ensembles ouverts de R_{m-1} (pour $m = 2$, 3, ...). Donc, les ensembles PG coïncident avec les ensembles G.

On démontre que les ensembles PCG (où G sont des ensembles ouverts de R_m) coïncident avec les ensembles (de R_{m-1}) qui sont sommes de séries infinies $E_1 + E_2 + \ldots$ d'ensembles fermés (de l'espace R_{m-1}) : ces ensembles sont appelés F_σ. Les ensembles CPCG (où G sont ouverts dans R_m) coïncident avec les ensembles (de R_{m-1}) qui sont produits (partie commune) $E_1 E_2 E_3 \ldots$ d'une suite infinie d'ensembles ouverts de R_{m-1} : ces ensembles sont appelés G_δ.

Les ensembles fermés et les ensembles G_δ jouent un rôle important dans l'Analyse et dans la théorie des ensembles de points. Les ensembles F (fermés) coïncident avec les zéros des fonctions continues. Par exemple pour qu'un ensemble plan E soit fermé, il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue $f(x, y)$ de deux variables réelles, telle que E coïncide avec l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $f(x, y) = 0$.

Les ensembles F de R_m coïncident aussi avec les ensembles de R_m qui contiennent leurs points d'accumulation.

Comme exemple du rôle joué par les ensembles G_δ dans l'Analyse, citons la proposition suivante : *$f(x)$ étant une fonction quelconque d'une variable réelle, l'ensemble de tous les points x auxquels $f(x)$ est continue, est toujours un* G_δ.

Inversement, pour tout ensemble linéaire G_δ, E, il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, telle que E coïncide avec l'ensemble de tous les points x auxquels $f(x)$ est continue.

Voici une autre proposition qui concerne le rôle des ensembles G_δ dans la théorie de la mesure : *tout ensemble mesurable (au sens de M. Lebesgue) peut être enfermé dans un ensemble* G_δ *de même mesure.*

Quant au rôle des ensembles G_δ en Topologie, il suffira de citer le théorème de M. Lavrentieff, d'après lequel une homéomorphie entre deux ensembles situés dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions peut être toujours étendue à deux ensembles G_δ contenant respectivement ces ensembles.

Les projections des ensembles G_δ, c'est-à-dire les ensembles PCPCG, où G sont des ensembles ouverts de R_{m+2} sont appelés ensembles analytiques de R_m et désignés par (A).

La théorie des ensembles analytiques n'existe pas depuis beaucoup plus de 30 années. Malgré ce temps si court elle s'est développée en une branche importante de la théorie des ensembles et de la théorie des fonctions de variables réelles. Nous lui consacrerons un Chapitre spécial.

Les ensembles analytiques sont très généraux. Pour s'en rendre compte, il suffit de constater que tous les ensembles qui étaient considérés en Mathématique jusqu'à 1905 étaient des ensembles analytiques. Au moment où Souslin et Lusin introduisaient les ensembles analytiques (en 1917), tous les ensembles de points qu'on savait nommer (même les monstres artificiellement créés) étaient ou bien analytiques ou bien complémentaires des ensembles analytiques.

Les ensembles analytiques coïncident avec les images continues de l'ensemble de tous les nombres irrationnels (*voir* n° 21). Voici encore un théorème qui lie d'une façon simple les ensembles analytiques avec les ensembles ouverts.

Pour qu'un ensemble linéaire E *soit analytique, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble ouvert plan* G, *tel que* E *est l'ensemble de tous les nombres réels* x *pour lesquels il existe (au moins) un nombre irrationnel* y, *tel que le point* (x, y) *n'appartient pas à l'ensemble* G (*voir* n° 33).

Les ensembles qui sont analytiques en même temps que leurs complémentaires [c'est-à-dire les ensembles qui sont à la fois (A) et C(A)] coïncident avec les ensembles mesurables B [c'est-à-dire avec les ensembles qu'on obtient en partant des intervalles et en effectuant dans un ordre quelconque un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions et de multiplications d'ensembles (théorème de Souslin, *voir* n° 27)].

Les ensembles analytiques sont désignés par P_1, leurs complémentaires par C_1. Les ensembles P_1 et C_1 constituent la *première classe* d'ensembles projectifs. On définit, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ par l'induction les ensembles P_n et C_n comme il suit.

Par définition, les ensembles P_n sont les ensembles PC_{n-1} et les ensembles C_n sont les ensembles CP_n. Suivant cette notation P_0 sont

des ensembles F_σ, C_0 les ensembles G_δ. Les ensembles qui sont à la fois P_n et C_n sont appelés B_n (ou *ambigus de classe n*). On démontre que les ensembles PB_1 coïncident avec les ensembles P_1 (*voir* n° 27). (et, généralement, les ensembles PB_n coïncident avec les ensembles P_n, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$) On obtient donc toutes les classes projectives P_1, C_1, P_2, C_2, ... si l'on prend pour classe initiale celle des ensembles B_1 (c'est-à-dire mesurables B) au lieu de G, comme le fait M. Lusin et plusieurs autres auteurs.

En partant des ensembles ouverts d'un espace à un nombre fini quelconque de dimensions et en appliquant successivement les opérations de prendre le complémentaire et de faire la projection, on obtient ainsi les classes suivantes d'ensembles :

$$G,\quad CG(=F),\quad PCG(=F_\sigma),\quad CPCG(=G_\delta),\quad PCPCG[=(A)],$$
$$CPCPCG[=C(A)],\quad PCPCPCG,\quad CPCPCPCG,\quad \ldots$$

qui sont désignés par

$$(1)\qquad G,\quad F,\quad P_0,\quad C_0,\quad P_1,\quad C_1,\quad P_2,\quad C_2,\quad P_3,\quad C_3,\quad \ldots.$$

Le problème qui se pose, c'est quelles sont les relations entre les familles d'ensembles de la suite (1).

On démontre sans peine que tout ensemble G (c'est-à-dire ouvert) est un P_0 et un C_0 et il en résulte tout de suite (par l'induction) que tout ensemble P_{n-1} et tout ensemble C_{n-1} est à la fois un ensemble P_n et C_n, donc qu'il est un ensemble B_n.

L'autre problème qui se pose, c'est si chaque famille de la suite (1) contient des ensembles qui n'appartiennent pas aux familles précédentes. La méthode qui sert à résoudre ce problème est celle des ensembles universels que nous traiterons dans les numéros suivants.

5. **Ensembles universels.** — Un ensemble plan U est dit *universel* par rapport à une famille Φ d'ensembles linéaires si, en le coupant par les droites parallèles à l'axe d'ordonnées on obtient tous les ensembles (linéaires) de la famille Φ et seulement des tels ensembles. Un ensemble situé dans l'espace à 3 dimensions est dit universel par rapport à une famille Φ d'ensembles plans, si en le coupant par les plans parallèles au plan YOZ on obtient tous les ensembles (plans) de la famille Φ et seulement de tels ensembles. Pareillement on définit

(pour $m = 4, 5, \ldots$) les ensembles situés dans R_m et universels par rapport à une famille Φ d'ensembles de R_{m-1} [1].

Voici maintenant un théorème qui permet d'appliquer les ensembles universels à la démonstration d'existence de plusieurs classes d'ensembles.

Soit Φ une famille formée d'ensembles linéaires et d'ensembles plans, jouissant des deux propriétés suivantes :

1° *L'intersection d'un ensemble plan de la famille Φ par une droite est un ensemble linéaire de la famille Φ.*

2° *Un ensemble semblable (au sens géométrique) à un ensemble linéaire de Φ est un ensemble de Φ.*

Dans ces conditions, en désignant par D l'ensemble de tous les points de la droite $y = x$, nous pouvons affirmer que si U est un ensemble plan de la famille Φ, universel pour les ensembles linéaires de la famille Φ, alors DU *est un ensemble de la famille Φ dont le complémentaire* D — U *(par rapport à la droite D) n'appartient pas à la famille Φ.*

Admettons, en effet, que l'ensemble D — U appartient à la famille Φ : d'après la propriété 2° de la famille Φ, la projection orthogonale H de D — U sur la droite $x = 0$ (en tant qu'un ensemble semblable à l'ensemble D — U) serait donc aussi un ensemble de Φ et par suite, d'après la propriété de l'ensemble universel U, il existerait un nombre réel a, tel que la droite $x = a$ rencontre U en un ensemble E dont la projection sur la droite $x = 0$ est l'ensemble H.

Désignons par Q la projection de DU sur la droite $x = 0$: l'ensemble H sera évidemment le complémentaire de Q par rapport à la droite $x = 0$ (D — U étant le complémentaire de DU par rapport à la droite D).

Or, désignons par p le point (a, a) et distinguons deux cas :

---

[1] L'idée générale d'ensemble plan et universel par rapport à une famille donnée d'ensembles est due à M. H. Lebesgue (*Journ. Math.*, 6e série, t. 1, p. 207). La notion a été étudiée surtout par M. N. Lusin, *C. R. Acad. Sc.*, t. 181, 1925, p. 95 et *Leçons*, p. 146 et 290. *Cf.* aussi W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 14, p. 82, O. Nikodym, *Fund. Math.*, t. 14, p. 145, C. Kuratowski *Topologie*, t. 1, p. 172 et L. V. Kantorovitch, *Journ. Soc. Phys. Math. Leningrad*, t. 2, 1929, p. 13-21.

1° $p \in DU$. Il en résulte que $a \in Q$, donc a non $\in H$ et par suite (a, a) non $\in E$ (puisque H est la projection de E sur l'axe $x = 0$). Or, E est l'ensemble de points communs à U et à la droite $x = a$: le point $p(a, a)$ étant situé sur la droite $x = a$, il résulte de (a, a) non $\in E$ que p non $\in U$, contrairement à l'hypothèse que $p \in DU$.

2° p non $\in DU$. D'après $p \in D$, on a donc $p \in D - U$, donc $a \in H$ (H étant la projection de $D - U$ sur la droite $x = 0$ et a étant l'ordonnée du point p), et par suite $(a, a) \in E$ (puisque E est un ensemble situé sur la droite $x = a$, dont la projection sur la droite $x = 0$ est H) donc $(a, a) \in U$ (puisque $E \subset U$) et, d'après $p \in D$, $p \in DU$, contrairement à l'hypothèse.

L'hypothèse que l'ensemble $D - U$ appartient à la famille Φ implique donc toujours une contradiction. Or, d'après la propriété 1° de la famille Φ, l'ensemble DU appartient à Φ.

Notre théorème est ainsi démontré.

D'après ce théorème, si Φ est une famille d'ensembles linéaires et d'ensembles plans, alors, pour démontrer qu'il existe un ensemble linéaire de la famille Φ dont le complémentaire n'appartient pas à Φ, il suffit de démontrer que la famille Φ jouit des propriétés 1° et 2° et qu'il existe un ensemble plan de la famille Φ universel pour les ensembles linéaires de cette famille.

On démontre sans peine par l'induction que, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, la famille Φ de tous les ensembles linéaires ou plans P_n (resp. C_n) jouit des propriétés 1° et 2°. Pour démontrer qu'il existe un ensemble P_n qui n'est pas un C_n (ou inversement) il suffira donc de démontrer qu'il existe (pour $n = 0, 1, 2, \ldots$) un ensemble plan P_n (resp. C_n) universel pour les ensembles linéaires P_n (resp. C_n).

Nous commencerons par démontrer l'existence des ensembles ouverts universels.

6. Un ensemble ouvert universel. — Soit

$$(2) \qquad \delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3, \quad \ldots$$

une suite infinie formée de tous les intervalles ouverts aux extrémités rationnelles. (On sait définir effectivement une telle suite.) Supposons encore que δ_1 désigne l'ensemble vide.

Tout ensemble linéaire ouvert (n'exceptant pas l'ensemble vide)

est évidemment la somme de tous les intervalles de la suite (2) qu'il contient. x étant un nombre irrationnel de l'intervalle $(0,1)$, soit

$$x = \frac{1}{|\nu(1, x)|} + \frac{1}{|\nu(2, x)|} + \frac{1}{|\nu(3, x)|} + \ldots$$

son développement en fraction continue infinie.

Posons

$$G(x) = \delta_{\nu(1,x)} + \delta_{\nu(2,x)} + \delta_{\nu(3,x)} + \ldots,$$

ce seront évidemment des ensembles linéaires ouverts, déterminés pour tout nombre irrationnel x de l'intervalle $(0,1)$.

Soit M l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que x est un nombre irrationnel de l'intervalle $(0,1)$ et y non $\in G(x)$. Soit F l'ensemble formé de tous les points de l'ensemble M et de tous les points d'accumulation de cet ensemble, et soit U le complémentaire de F par rapport au plan. On démontre sans peine que U est un ensemble plan ouvert universel pour les ensembles ouverts linéaires [1].

Pareillement, si l'on comprend par la suite (2) une suite infinie formée de tous les intérieurs des cercles rationnels (c'est-à-dire dont le centre a des coordonnées rationnelles et le rayon est rationnel), on obtient un ensemble ouvert dans l'espace à trois dimensions, universel pour les ensembles ouverts plans. Généralement, en utilisant les hypersphères rationnelles à n dimensions, on démontre l'existence d'un ensemble ouvert dans R_{m+1}, universel pour les ensembles ouverts de R_m. Le complémentaire (par rapport à R_{m+1}) d'un tel ensemble est évidemment un ensemble fermé de R_{m+1}, universel pour les ensembles fermés de R_m.

7. Ensembles projectifs universels. — On voit sans peine que si l'ensemble U situé dans R_{m+1} est universel pour les ensembles d'une famille Φ situés dans R_m, son complémentaire CU (par rapport à R_{m+1}) est universel pour la famille de tous les complémentaires (par rapport à R_m) des ensembles de la famille Φ, et l'ensemble PU (situé dans R_m) est universel pour la famille de toutes les projections (sur R_{m-1}) des ensembles de la famille Φ.

L'existence des ensembles universels ouverts dans R_m entraîne

---

[1] *Cf.* W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 7, p. 198.

ainsi l'existence des ensembles universels projectifs de toute classe (finie), et le fait que nous savons nommer un ensemble universel ouvert dans un espace à un nombre fini quelconque de dimensions entraîne que nous savons aussi nommer un ensemble universel projectif de toute classe (finie) donnée, situé dans l'espace à un nombre fini quelconque de dimensions. [Il n'existe pas cependant pour aucun n naturel, un ensemble B_n plan universel pour les ensembles B_n linéaires (1).]

En particulier la méthode indiquée plus haut permet de construire un ensemble plan Q universel pour les ensembles P_2 linéaires (en partant, comme on voit sans peine, d'un ensemble ouvert universel dans l'espace R_5). Soit maintenant E l'ensemble linéaire qu'on obtient en coupant l'ensemble plan Q par la droite $y = x$. M. C. Kuratowski a remarqué qu'il manque complètement de méthode pour décider si l'ensemble E est mesurable ou non (2). M. Kuratowski observe encore que l'ensemble E s'obtient de trois ensembles suivants : l'ensemble de nombres naturels, la parabole $y = x^2$, le plan $z = x + y$, à l'aide de cinq opérations suivantes : 1° addition (d'ensembles); 2° soustraction (d'ensembles); 3° projection parallèle à un axe; 4° remplacement des points par des droites passant par ces points parallèles à un axe (de l'espace m-dimensionnel, où m est arbitraire); 5° changement des axes (X en Y par exemple).

On voit ainsi que même parmi les ensembles obtenus d'une façon tellement élémentaire il y en a dont la mesurabilité présente un problème non résolu.

Or, en 1927 j'ai nommé un ensemble P_2 linéaire, E, tel qu'il n'existe aucune méthode pour décider si cet ensemble jouit de la propriété de Baire ou non, et que l'hypothèse que E jouit de la propriété de Baire entraîne que tout ensemble P_2 linéaire jouit de la propriété de Baire (3).

Ensembles infiniment universels. — On dit que le système d'ensembles plans U_1, U_2, ... est *infiniment universel* pour les ensembles linéaires d'une famille Φ, si les intersections des

(1) N. Lusin, *Leçons*, p. 325, Note de W. Sierpinski (lemme).
(2) *C. R. Congrès Int. Math.*, à Zürich, t. II, 1932, p. 117-118.
(3) *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, Cl. III, t. 19, 1927, p. 477.

ensembles $U_n (n = 1, 2, \ldots)$ par les droites $x = \text{const.}$ sont des ensembles de Φ et si, quelle que soit la suite infinie $E_1, E_2, \ldots$, d'ensembles linéaires de Φ, il existe un nombre réel a, tel que les intersections des ensembles $U_1, U_2 \ldots$ par la droite $x = a$ sont respectivement les ensembles $E_1, E_2, \ldots$.

M. N. Lusin a donné une méthode pour construire des ensembles *doublement universels* à partir des ensembles universels (1), elle utilise la courbe péanienne remplissant le plan et est aussi applicable à la construction des ensembles *infiniment universels* si l'on utilise la courbe péanienne remplissant l'espace à $\aleph_0$ dimensions, mais il est nécessaire d'admettre que la famille d'ensembles considérés reste invariante par rapport aux transformations continues [ce qui est le cas pour les ensembles $P_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, mais ne l'est pas pour les ensembles $C_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$]. Une autre méthode de construire des ensembles infiniment universels à partir des ensembles universels, applicable aux familles d'ensembles satisfaisant à certaines conditions simples (en particulier aux ensembles P_n et C_n pour $n = 0, 1, 2, \ldots$) a été donnée par moi (2).

8. **L'existence des ensembles projectifs de toute classe.** — Comme nous l'avons démontré dans le numéro précédent, il existe, pour tout nombre $n = 0, 1, 2, \ldots$, un ensemble U_n plan qui est un P_n universel pour les ensembles P_n linéaires. D'après les remarques finales du n° 5, l'intersection E_n de l'ensemble U_n par la droite $y = x$ sera un ensemble P_n qui n'est pas un C_n et évidemment, le complémentaire de E_n par rapport à la droite $y = x$ sera un ensemble C_n qui n'est pas un P_n.

Les ensembles qui sont des P_n ou des C_n, mais qui ne sont ni des P_k ni des C_k pour $k < n$ constituent la $n^{\text{ième}}$ *classe* d'ensembles projectifs. Tout ensemble P_k et tout ensemble C_k étant à la fois un P_{k+1} et un C_{k+1} (n° 4), on voit tout de suite que l'ensemble E_n (qui est un P_n sans être un C_n) ne peut pas être ni un P_k, ni un C_k pour $k < n$: c'est donc un ensemble projectif de classe n (et pas de classe inférieure).

Il est ainsi démontré qu'il existe des ensembles projectifs de toute

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 189, 1929, p. 392.
(2) W. Sierpinski, *Mathematica*, t. 12, p. 31.

classe (finie) et l'on sait même nommer un ensemble projectif (P_n ou C_n) de toute classe n donnée.

On voit sans peine qu'en se bornant dans les raisonnements des n°s 5, 6 et 7 à l'intervalle $(0,1)$ [respectivement à l'intervalle m-dimensionnel $(0 \leq x_i \leq 1;\ i = 1, 2, \ldots, m)$] on démontrerait l'existence des ensembles P_n qui ne sont pas C_n (ou inversement) situés dans l'intervalle $(0,1)$, et, pareillement, dans un intervalle (a, b) donné quelconque. On en conclut qu'il existe, pour tout nombre naturel n, un ensemble M_n qui est un P_n sans être un C_n situé dans l'intervalle $(2n-2, 2n-1)$ et un ensemble N_n qui est un C_n sans être un P_n, situé dans l'intervalle $(2n-1, 2n)$.

On démontre sans peine que l'ensemble $M_n + N_n$ est un B_{n+1}. Or, toute portion (c'est-à-dire partie contenue dans un intervalle) d'un ensemble P_n (resp. C_n) étant un P_n (resp. C_n), on conclut que l'ensemble $M_n + N_n$ n'est ni un P_n ni un C_n. Il existe donc dans toute classe d'ensembles projectifs des ensembles ambigus qui n'appartiennent pas aux classes inférieures.

9. Construction d'un ensemble non projectif. — Posons maintenant $M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$. Si l'ensemble M était projectif, ce serait un ensemble P_n ou C_n d'une classe n déterminée, donc, en tout cas, ce serait un ensemble C_{n+1} ainsi que la portion M_{n+1} de M [située dans l'intervalle $(2n, 2n+1)$], contrairement à la définition de l'ensemble M_{n+1}. L'ensemble M n'est donc pas projectif. Nous avons ainsi nommé un ensemble linéaire non projectif.

Quant à l'*existence* des ensembles linéaires non projectifs, elle résulte sans peine de l'évaluation de la puissance de la famille de tous les ensembles projectifs. Notamment la puissance de la famille de tous les ensembles ouverts (d'un espace euclidien) étant celle du continu, on démontre sans peine par l'induction, que, pour tout nombre naturel n donné, la puissance de tous les ensembles P_n et C_n est celle du continu et l'on en déduit tout de suite le même pour la famille de tous les ensembles projectifs. Or, la famille de tous les ensembles linéaires étant de puissance $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$, il en résulte l'existence des ensembles linéaires non projectifs. Cette démonstration est cependant non effective.

L'exemple donné plus haut montre en même temps que *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (linéaires) projectifs*

peut être un ensemble non projectif (dans le cas où les classes de ces ensembles ne sont pas bornées; *cf* n° 14).

Ce fait donne lieu à une généralisation des ensembles projectifs. On peut notamment envisager la plus petite famille Φ d'ensembles de points satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3° du n° 3 et encore à la condition 4° que voici :

4° Si $E = E_1 + E_2 + \ldots$, où $E_n (n = 1, 2, \ldots,)$ sont des ensembles de R_m appartenant à la famille Φ, l'ensemble E appartient encore à Φ.

On voit sans peine qu'une telle famille Φ contient tous les ensembles projectifs situés dans un espace à un nombre fini quelconque de dimensions, et qu'elle contient encore d'autres ensembles, non projectifs (par exemple l'ensemble M défini plus haut). On pourrait même considérer une classification transfinie des ensembles de cette famille Φ présentant une analogie étroite avec la classification transfinie des ensembles mesurables B (*voir* n° 23), et pourrait même démontrer, dans cette classification, l'existence d'ensembles projectifs de toute classe transfinie, c'est-à-dire d'une classe arbitraire n'appartenant pas aux classes précédentes.

10. **Projection et image continue.** — E étant un ensemble situé dans R_m et $f(p)$ une fonction définie pour les points p de E dont les valeurs sont des points de R_n (où n est $>, =$ ou $< m$), on désigne par $f(E)$ l'ensemble de tous les points $f(p)$, où $p \in E$ et l'on appelle $f(E)$ *image* de l'ensemble E obtenu à l'aide de la transformation (fonction) f.

Si f est une fonction continue dans E $\Big[$c'est-à-dire, si, $\rho(p, q)$ désignant la distance entre les points p et q, les formules $p_n \in E$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $\lim\limits_{n=\infty} \rho(p_n, p_0) = 0$ entraînent toujours la formule $\lim\limits_{n=\infty} \rho\big(f(p_n), f(p_0)\big) = 0\Big]$, l'ensemble $f(E)$ est dit *image continue* de l'ensemble E.

La projection PE d'un ensemble E est un cas particulier d'une transformation continue, notamment lorsque $f(p)$ est la projection du point p de R_m sur R_{m-1}.

Soit maintenant $f(E)$ un ensemble linéaire (pour fixer les idées)

qui est une image (continue ou non) d'un ensemble linéaire E. On a évidemment

$$f(\mathrm{E}) = \mathrm{P} \mathop{\mathrm{E}}_{x,y} [x = f(y),\ y \in \mathrm{E}], \tag{3}$$

où $\mathop{\mathrm{E}}_{x,y} [\varphi(x, y)]$ désigne l'ensemble de tous les points (x, y) du plan dont les coordonnées satisfont à la condition $\varphi(x, y)$. La formule (3) prouve que l'ensemble de valeurs d'une fonction $f(y)$ définie pour $y \in \mathrm{E}$ est la projection de son image géométrique [de la *courbe* $x = f(y)$, où $y \in \mathrm{E}$].

Introduisons maintenant une opération Q en quelque sorte inverse par rapport à la projection. E étant un ensemble situé dans R_m, désignons par Q(E) l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1})$ de R_{m+1}, tels que $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathrm{E}$. On a évidemment PQ(E)=E [mais pas nécessairement QP(E) = E]. On démontre sans peine par l'induction que si E est un ensemble P_n(resp. C_n), Q(E) l'est également.

Soit maintenant $f(\mathrm{E})$ une image continue (linéaire) de l'ensemble linéaire E et prenons au lieu de l'ensemble

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x,y} [x = f(y),\ y \in \mathrm{E}].$$

l'ensemble superposable avec ce dernier,

$$\mathrm{H} = \mathop{\mathrm{E}}_{x,y} [y = f(x),\ x \in \mathrm{E}].$$

Soit $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} + \mathrm{H}'$ la fermeture de l'ensemble (plan) H. La fonction $f(x)$ étant continue pour $x \in \mathrm{E}$, on voit sans peine que $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{H}}.\mathrm{Q}(\mathrm{E})$. Si E est un C_{n-1}, Q(E) l'est également et l'ensemble $\overline{\mathrm{H}}$, étant fermé, on en déduit sans peine que H est un ensemble C_{n-1}. L'ensemble (3) est donc une projection d'un ensemble plan C_{n-1} : c'est donc un ensemble P_n.

Ainsi : toute image continue d'un ensemble (linéaire) C_{n-1} est un ensemble P_n. Il en résulte que les ensembles P_n (linéaires) coïncident avec les images continues des ensembles C_{n-1}. Ce résultat peut être généralisé aux ensembles C_{n-1} situés dans un espace à un nombre fini quelconque de dimensions. On pourrait donc, dans la

définition des ensembles projectifs remplacer l'opération de projection par celle d'une transformation continue des ensembles [comme le fait par exemple dans son livre M. Kuratowski, dans le chapitre consacré aux ensembles projectifs (1)]. Cela permet de traiter les ensembles projectifs linéaires sans sortir de l'espace linéaire (2). En particulier, on peut définir la famille de tous les ensembles projectifs linéaires comme la plus petite famille d'ensembles linéaires contenant les ensembles linéaires ouverts et close par rapport à l'opération de prendre le complémentaire et par rapport aux transformations continues des ensembles (3).

Les images continues des ensembles C_{n-1} coïncidant avec les ensembles P_n, on conclut tout de suite que toute image continue d'un ensemble P_n est encore un ensemble P_n (pour $n = 1, 2, \ldots$). Donc, en particulier, tout ensemble homéomorphe (c'est-à-dire image biunivoque et bicontinue) d'un ensemble P_n est un ensemble P_n.

Le produit d'un ensemble C_n par un G_δ étant un C_n (ce qu'on démontre par l'induction), il en résulte moyennant le théorème de M. Lavrentieff mentionné au n° 4 (4) que tout ensemble homéomorphe d'un C_n est un C_n. Donc *les ensembles* P_n (*resp.* C_n) *sont des invariants topologiques* (5) (ce qui est vrai aussi pour $n = 0$).

On peut définir pour tout nombre naturel n un ensemble C_{n-1} linéaire, soit H_n, tel que les ensembles P_n (linéaires) coïncident avec les images continues (linéaires) de l'ensemble H_n (6). Il existe aussi un ensemble linéaire fermé, H_0, tel que les ensembles P_0 (c'est-à-dire F_σ) coïncident avec les images continues de H_0. Tel est par exemple l'ensemble $H_0 = E_1 + E_2 + \ldots$, où E_n est l'ensemble parfait non dense de G. Cantor situé dans l'intervalle $(n-1, n)$.

Il existe également un ensemble linéaire fermé K_0 (par exemple l'ensemble H_0 augmenté de l'ensemble de tous les entiers négatifs),

---

(1) *Topologie*, t. I (*Monografje Matematyczne*, t. III, Warszawa-Lwów, 1933, p. 234, 2e éd. Warszawa-Wroclaw 1948, p. 361.

(2) Dans cet ordre d'idées *cf.* mon Mémoire *Contribution à la fondation de la théorie des ensembles projectifs* (*C. R. Soc. Varsovie*, Cl. III, t. 21, 1928, p. 219-233).

(3) *Cf.* W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 7, p. 237.

(4) *Fund. Math.*, t. 6, p. 149.

(5) Pour C_1 l'invariance topologique a été démontrée par une autre voie par M. P. Alexandroff, *Fund. Math.*, t. 5, p. 164.

(6) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 11, p. 122.

tel que tout ensemble (linéaire) P_0 indénombrable est une image biunivoque et continue dans un sens de l'ensemble K_0.

M. M. Kondô a démontré qu'il existe un ensemble linéaire K_1 qui est un C_1 tel que tout ensemble P_1 indénombrable est une image biunivoque et continue dans un sens de l'ensemble K_1 (1). Or le problème reste ouvert s'il existe un ensemble linéaire (pas nécessairement projectif) K_2, tel que tout ensemble P_2 de puissance du continu soit une image biunivoque et continue dans un sens de l'ensemble K_2.

11. **Projections biunivoques.** — On dit qu'un ensemble E situé dans R_m est une *projection biunivoque* (univalente) d'un ensemble H situé dans R_{m+1}, si $E = PH$ et si tout point de E est la projection d'un et d'un seul point de H.

Les projections biunivoques des ensembles fermés coïncident avec les ensembles P_0 (c'est-à-dire F_σ).

Il suffit évidemment de démontrer que tout ensemble P_0 de R_m est une projection biunivoque d'un ensemble fermé de R_{m+1}. Soit, pour fixer les idées, $m = 1$, et soit E un ensemble P_0 linéaire. Nous pouvons donc poser $E = E_1 + E_2 + \ldots$, où $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles linéaires fermés et bornés. Désignons par H_1 l'ensemble de points (x, y) du plan, où $x \in E_1$ et $y = 0$ et désignons, pour $n = 2, 3, \ldots$, par H_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, où $x \in E_n - (E_1 + E_2 + \ldots + E_{n-1})$ et

$$y = 1 : \rho(x, E_1 + E_2 + \ldots + E_{n-1}),$$

où $\rho(x, F)$ désigne la distance du point x à l'ensemble fermé F. On démontre sans peine que l'ensemble plan $H = H_1 + H_2 + \ldots$ est fermé et que l'ensemble E est une projection biunivoque de l'ensemble H.

Les projections biunivoques des ensembles C_0 coïncident avec les ensembles B_1 (*voir* n° 28). M. M. Kondô a démontré que les ensembles P_2 coïncident avec les projections biunivoques des ensembles C_1 : sa démonstration est fort compliquée (2).

---

(1) *Fund. Math.*, t. 31, p. 30 et, par une autre méthode, *Proc. Imp. Acad. Japan*, t. 14, 1937, p. 59.

(2) *Jap. Journ, Math.*, t. 15, 1939, p. 223.

12. Projection et somme. — Un rôle important dans l'Analyse moderne joue l'opérateur $\underset{x}{\mathbf{E}}[\varphi(x)]$ introduit par M. H. Lebesgue. $\underset{x}{\mathbf{E}}[\varphi(x)]$ désigne l'ensemble des x qui satisfont à la condition φ. Cette condition peut être une équation, une inégalité, plusieurs inégalités, en général une fonction propositionnelle dont la variable x parcourt un ensemble donné (par exemple l'ensemble de tous les nombres réels) et qui devient vraie pour toute valeur de x satisfaisant à la condition $\varphi(x)$ et fausse dans le cas contraire. Par exemple $\underset{x}{\mathbf{E}}[0 \leq x \leq 1]$ est l'ensemble de tous les nombres de l'intervalle (fermé) $(0, 1)$.

Pareillement on désigne par $\underset{x,y}{\mathbf{E}}[\varphi(x, y)]$ l'ensemble de tous les systèmes (x, y) qui satisfont à la condition $\varphi(x, y)$, où $\varphi(x, y)$ est une fonction propositionnelle de deux variables. Dans le cas où ces variables sont des nombres réels $\underset{x,y}{\mathbf{E}}[\varphi(x, y)]$ est un ensemble plan. Par exemple $\underset{x,y}{\mathbf{E}}[x^2+y^2=1]$ est la circonférence du cercle $x^2+y^2=1$, $\underset{y,x}{\mathbf{E}}[x^2+y^2<1]$ est l'intérieur de ce cercle.

$f(x)$ étant une fonction (réelle) d'une variable réelle, $\underset{x,y}{\mathbf{E}}[y=f(x)]$ est l'image géométrique de cette fonction [la *courbe* $y=f(x)$].

D'après un théorème connu de M. Lebesgue, pour qu'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle soit limite d'une suite infinie de fonctions continues, il faut et il suffit que, quel que soit le nombre réel a, les ensembles $\underset{x}{\mathbf{E}}[f(x)>a]$ et $\underset{x}{\mathbf{E}}[f(x)<a]$ soient des P_0.

Les ensembles $\underset{x}{\mathbf{E}}[f(x)>a]$ et $\underset{x}{\mathbf{E}}[f(x)<a]$ jouent, comme on sait, un grand rôle dans l'étude de diverses propriétés de la fonction $f(x)$ (surtout dans la théorie des fonctions mesurables B, respectivement L). Or, le premier de ces ensembles est, comme on voit sans peine, la projection sur l'axe d'abscisses de la partie de la

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

courbe $y = f(x)$ située au-dessus de la droite $y = a$, c'est-à-dire

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) > a] = \mathrm{P}\mathop{\mathrm{E}}_{x,y}[y = f(x),\ y > a].$$

Voici maintenant une formule qui prouve qu'il existe un rapport étroit entre l'opération de projection et celle de somme. C'est l'égalité suivante pour tout ensemble plan E :

$$\mathrm{PE} = \sum_{y} \mathop{\mathrm{E}}_{x}[(x, y) \in \mathrm{E}]. \tag{4}$$

En effet, si $a \in \mathrm{PE}$, il existe (au moins) un point (x, y) de l'ensemble E dont la projection est a, c'est-à-dire il existe au moins un nombre réel b, tel que $(a, b) \in \mathrm{E}$, d'où

$$a \in \mathop{\mathrm{E}}_{x}[(x, b) \in \mathrm{E}] \quad \text{et} \quad a \in \sum_{y} \mathop{\mathrm{E}}_{x}[(x, y) \in \mathrm{E}].$$

D'autre part, si

$$a \in \sum_{y} \mathop{\mathrm{E}}_{x}[(x, y) \in \mathrm{E}],$$

il existe (au moins) un nombre réel b, tel que

$$a \in \mathop{\mathrm{E}}_{x}[(x, b) \in \mathrm{E}],$$

donc que $(a, b) \in \mathrm{E}$, et a est la projection du point (a, b) de E, d'où $a \in \mathrm{PE}$.

La formule (4) est ainsi démontrée. Une formule plus générale de ce genre est l'égalité suivante pour toute fonction propositionnelle $\varphi(x, y)$ de deux variables réelles

$$\mathrm{P}\mathop{\mathrm{E}}_{x,y}[\varphi(x, y)] = \sum_{y} \mathop{\mathrm{E}}_{x}[\varphi(x, y)] \quad (^1). \tag{5}$$

Pour la démontrer, désignons par E l'ensemble de tous les

---

(1) *Cf.* C. Kuratowski et A. Tarski, *Fund. Math.*, t. 17, p. 243, proposition (12); aussi C. Kuratowski, *Topologie*, t. I, p. 10, (3).

points (x, y) du plan pour lesquels la proposition $\varphi(x, y)$ est vraie. On a donc

$$\mathop{\mathbf{E}}_{x,y}[\varphi(x, y)] = \mathrm{E},$$

donc

$$\mathrm{P}\mathop{\mathbf{E}}_{x,y}[\varphi(x, y)] = \mathrm{PE};$$

or, on a évidemment l'équivalence

$$\varphi(x, y) \equiv [(x, y) \in \mathrm{E}]$$

et la formule (4) donne

$$\mathrm{PE} = \sum_{y} \mathop{\mathbf{E}}_{x}[\varphi(x, y)].$$

On a ainsi l'égalité (5).

La formule (5) montre que l'opération de projection se réduit à celle de sommation, mais, en général, de sommation indénombrable. C'est pourquoi la projection est si difficile à étudier. D'autre part, la formule (5) permet d'exprimer certaines sommes indénombrables d'ensembles par les projections : l'importance de ce fait tient, d'après une remarque de M. Kuratowski au fait que la projection est une opération continue.

13. **Les opérations logiques et les ensembles projectifs.** — MM. Kuratowski et Tarski ont montré [1] qu'il existe un rapport intime entre les principales opérations logiques et les ensembles projectifs.

Les cinq opérations logiques sont exprimées par les symboles

$$' \quad + \quad . \quad \Sigma \text{ et } \Pi;$$

α' désigne la négation de α;
$\alpha + \beta$ est la somme logique (= « α ou β »);
$\alpha . \beta$ est le produit logique (= « α et β »);

$\varphi(x)$ désignant une fonction propositionnelle, $\sum_{x} \varphi(x)$ veut dire

---

(1) *Fund. Math.*, t. 17, p. 240-248.

«il existe un x, tel que $\varphi(x)$»; $\prod_x \varphi(x)$ veut dire «quel que soit x, on a $\varphi(x)$».

Le rôle des ensembles projectifs dans la théorie des opérations logiques repose sur la proposition suivante qui attribue à l'opération $\sum$ une interprétation géométrique

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[\sum_{y}\varphi(x,y)\right] = \mathrm{P}\mathop{\mathrm{E}}_{x,y}[\varphi(x,y)] \quad (1). \tag{6}$$

La formule (6) est une conséquence immédiate de la formule (5) du n° 12, si l'on remarque que vu le sens du symbole logique $\sum_y \varphi(x,y)$ on a l'identité

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[\sum_{y}\varphi(x,y)\right] = \sum \mathop{\mathrm{E}}_{x}[\varphi(x,y)].$$

Une fonction propositionnelle $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables réelles est dite *projective*, si l'ensemble $\mathop{\mathrm{E}}_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)]$ (c'est-à-dire l'ensemble de points de R_n qui satisfont à la condition φ) est projectif (2).

MM. Kuratowski et Tarski ont démontré que *les cinq opérations logiques effectuées sur des fonctions propositionnelles projectives conduisent toujours à des fonctions propositionnelles projectives* (3).

Grâce à ce fait il suffit souvent d'écrire la définition d'un ensemble en termes logiques pour pouvoir en déduire que cet ensemble est projectif; plus encore : les relations entre les opérations logiques et entre les classes boréliennes et projectives sont si intimes que la forme de la définition permet souvent d'évaluer la classe de l'ensemble considéré. Comme on voit, on a ainsi une application de la logique mathématique aux mathématiques pures (4).

En 1936 M. Kuratovski a démontré que l'application de l'induction

---

(1) *Fund. Math*, t. 17, p. 243, proposition (12).
(2) *Cf.* C. Kuratowski, *Topologie*, t. I, p. 243 (VIII) (2e édition, p. 369).
(3) *Fund. Math.*, t. 17, p. 246.
(4) Voir C. Kuratowski *Fund. Math.* 17, p. 249.

transfinie dans le domaine des ensembles projectifs ne conduit pas (dans des hypothèses très générales) en dehors de ce domaine [1]. En particulier il en a déduit que la *surface de M. Lebesgue* dont la nature était jusqu'à ce temps inconnue, est un ensemble projectif [2].

[Le problème de la projectivité de la surface de M. Lebesgue a été posé par M. Lusin qui s'en est occupé à plusieurs reprises [3]].

Ce résultat, rapproché de ceux dont nous avons parlé plus haut, met en évidence le rôle fondamental de la notion d'ensemble projectif dans l'étude des ensembles et fonctions effectivement définissables [4].

Il est encore à remarquer que M. K. Menger a montré [5] que la notion d'ensemble analytique est étroitement liée avec celle de l'ensemble de M. Brouwer.

14. Propriétés des ensembles projectifs. — *Somme et produit.* — n étant un nombre naturel donné, toute somme et tout produit d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles P_n (resp. C_n) d'un espace R_m à un nombre m fini quelconque (mais fixe) de dimensions est un ensemble P_n (resp. C_n) [6]. On exprime ce fait en disant que les classes P_n (resp. C_n) sont closes par rapport aux opérations σ et δ [ce qui ne subsiste pas pour $n = 0$, notamment la classe P_0 (resp. C_0) n'est pas dénombrablement multiplicative (resp. additive)]. Il en résulte tout de suite que la classe B_n (où $n = 1, 2, \ldots$) est aussi close par rapport aux opérations σ et δ; elle est encore close par rapport à l'opération C (complémentation) (et, plus généralement, à l'opération ρ — différence de deux ensembles).

Puissance. — On démontre que tout ensemble P_1 indénombrable contient un sous-ensemble parfait et par suite est de puissance du continu (*voir* n° 25). On ne sait pas s'il en est de même pour les

---

(1) *Fund. Math.*, t. 27, p. 269. *Cf.* aussi C. Kuratowski et J. v. Neumann, *Annals of Math.*, t. 38, p. 521.

(2) *C. R. Acad. Sci.* 202, p. 1239, aussi *Topologie* I, 2e éd. (1948), p. 380.

(3) *Voir* par exemple son livre, p. 298 et suiv.

(4) *Cf.* aussi la Note de M. Kuratowski, *Les suites transfinies d'ensembles et les ensembles projectifs* (*Fund. Math.*, t. 28, p. 186-196).

(5) *Jahresber. d. deutschen Math. Ver.*, t. 37, p. 213-226.

(6) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 11, p. 126 et 13, p. 239; N. Lusin, *Leçons*, p. 277; C. Kuratowski, *Topologie*, t. I, p. 236, (3). Quant à la démonstration pour $n = 1$, *voir* plus loin, n° 19.

ensembles C_1. Or, M. K. Gödel a signalé (*Proc. National Academy of Sc.*, t. 24, p. 556) que l'hypothèse qu'il existe un ensemble C_1 linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ sans sous-ensembles parfaits est non contradictoire avec les axiomes habituellement admis de la théorie des ensembles, si ces axiomes ne sont pas contradictoires. Or, on a démontré (*voir* n° 24) que tout ensemble C_1 (et, plus généralement, tout ensemble P_2) totalement imparfait (c'est-à-dire dépourvu de sous-ensembles parfaits) est de puissance $\leqq \aleph_1$, [1] (*voir* n° 25).

Il en résulte tout de suite que tout ensemble C_1 (ou même P_2) indénombrable est soit de puissance $\aleph_1$, soit de puissance du continu, mais on ne sait pas s'il existe des ensembles C_1 (ou P_2) de puissance $\aleph_1$. On ne sait pas démontrer des théorèmes analogues pour les ensembles C_2 : la puissance de ces ensembles (donc, à plus forte raison, des ensembles projectifs de classes > 2) nous est complètement inconnue.

On démontre que tout ensemble P_2 est une somme de $\aleph_1$ (*alephun*) ensembles B_1 (c'est-à-dire mesurables B) (*voir* n° 24). Il en résulte sans peine que s'il existe une décomposition de la droite en deux ensembles P_2 totalement imparfaits, l'hypothèse du continu est vraie. Or, on ne sait pas si une telle décomposition existe.

Mesurabilité. — On démontre que tout ensemble P_1 (donc aussi tout ensemble C_1) est mesurable au sens de M. Lebesgue (*voir* n° 24); on ne sait pas cependant si c'est toujours le cas pour les ensembles P_2 (et même pour les ensembles B_2) et l'on connaît des ensembles individuels P_2 tels qu'à l'état actuel de mathématique nous ne connaissons aucune méthode pour résoudre la question s'ils sont mesurables ou non (*voir* n° 7).

Or, M. K. Gödel a signalé [2] que l'hypothèse qu'il existe un ensemble linéaire B_2 non mesurable L n'est pas contradictoire avec les axiomes habituellement admis de la théorie des ensembles, si ces axiomes ne sont pas contradictoires.

---

[1] On appelle ensemble de puissance $\aleph_1$ tout ensemble indénombrable qui a même puissance que tout son sous-ensemble indénombrable. L'hypothèse de G. Cantor que l'ensemble de tous les nombres réels est de puissance $\aleph_1$ est connue sous le nom de l'hypothèse du continu. J'ai consacré tout un livre à l'étude de cette hypothèse et de ses conséquences [W. Sierpinski, *Hypothèse du continu*, (*Monogr. Matem.*, t. IV. Warszawa-Lwów, 1934)].

[2] *Proc. Nat. Acad. of. Sc.*, t. 24, 1938, p. 556.

M. Kuratowski et moi, nous avons démontré [1] que l'existence d'un ensemble plan B_2 non mesurable L résulte de l'hypothèse suivante de N. Lusin [2]. Il existe une transformation $y = f(x)$ de l'intervalle $(0,1)$ en sous-ensemble de cet intervalle dont l'image géométrique $\underset{x,y}{\mathrm{E}}[y = f(x)]$ est un ensemble C_1 dépourvu de sous-ensemble parfait (non vide) (*cf*, n° 29).

Les mêmes remarques concernent la propriété de Baire (même au sens large). En particulier nous ne savons pas s'il existe une décomposition de la droite en deux ensembles P_2 dont chacun soit de deuxième catégorie dans tout intervalle.

Théorèmes de réduction. — *On dit qu'une famille* Φ *d'ensembles satisfait au théorème de réduction si, étant donnés deux ensembles* V_1 *et* V_2 *de* Φ, *il existe deux ensembles disjoints* V_1 et V_2 *de* Φ, *tels que* $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$ *et* $V_1 + V_2 = U_1 + U_2$ [3]

On dit que la famille Φ *d'ensembles satisfait au théorème de réduction généralisé si, étant donnée une suite infinie d'ensembles* $U^1, U^2, \ldots$ *de* Φ, *il existe une suite infinie d'ensembles disjoints* $V^1, V^2, \ldots$ *de* Φ, *tels que*

$$V^n \subset U^n \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V^n = \sum_{n=1}^{\infty} U^n.$$

M. Kuratowski a démontré (*loc. cit.*) que les ensembles P_0, C_1 et P_2 satisfont au théorème de réduction généralisé. Or ce n'est pas le cas pour les ensembles C_0, P_1 et C_2. On ne sait rien sur ce problème pour les ensembles P_3 ou C_3.

M. Kuratowski a également démontré (*loc. cit.*, p. 190) que si Φ est une famille d'ensembles dénombrablement additive et satisfaisant au théorème de réduction généralisé, la famille Ψ de tous les complémentaires des ensembles de la famille Φ (par rapport à l'espace dans lequel ils sont situés) satisfait aux deux *théorèmes de séparation généralisés* suivants :

On dit qu'une famille Ψ *d'ensembles situés dans un espace* $\mathcal{E}$

---

(1) *C. R. Acad. Bulgare*, t. 61, p. 207-211 (Note du 21 février, 1941).

(2) *Leçons sur les ensembles analytiques*, p. 287.

(3) C. Kuratowski, *Fund. Math.*, t. 26, p. 184.

satisfait au premier théorème de séparation généralisé, si étant donnée une suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ *de* Ψ, *telle que* $\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0$, *il existe une suite infinie d'ensembles* $H_n (n = 1, 2, \ldots)$ *qui, de même que leurs complémentaires par rapport à* $\mathcal{E}$ *appartiennent à* Ψ *et qui satisfont aux conditions*

$$E_n \subset H_n \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots \qquad \text{et} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

On dit qu'une famille Ψ *d'ensembles (situés dans un espace* $\mathcal{E}$*) satisfait au deuxième théorème de séparation généralisé, si, étant donnée une suite infinie* $E_1, E_2, \ldots$ *d'ensembles de* Ψ, *il existe une suite infinie* $H_1, H_2, \ldots$ *d'ensembles dont les complémentaires (par rapport à l'espace* $\mathcal{E}$*) appartiennent à* Ψ *et tels que*

$$E_n - \prod_{m=1}^{\infty} E_m \subset H_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

La notion de séparabilité des ensembles (au moyen des ensembles d'une famille donnée) est due à M. Lusin qui a démontré les deux théorèmes de séparation pour les ensembles P_1 (*voir* n° 30). Pour les ensembles C_2 ils ont été démontrés par M. Novíkoff [1].

L'étude des théorèmes de séparation pour les classes projectives supérieures semble être extrêmement difficile.

Séparabilité unilatérale. — On dit qu'un ensemble de points E_1 est (unilatéralement) *séparable* d'un ensemble E_2 *au moyen* d'un ensemble H, si l'ensemble H contient E_1 et n'a aucun point commun avec E_2.

Il existe pour tout nombre naturel n deux ensembles de points dont chacun est (unilatéralement) séparable de l'autre au moyen d'un ensemble P_n ainsi qu'au moyen d'un ensemble C_n mais qui ne sont pas séparables au moyen d'un ensemble B_n [2].

---

(1) *Fund Math.*, t. 25, p. 465.

(2) N. Lusin, *Leçons*, p. 325, Note de W. Sierpinski.

15. Les ensembles projectifs et le crible de M. Lusin. — E étant un ensemble de points situé dans le demi-plan $y > 0$, nous désignerons par K(E) et nous appellerons *ensemble criblé au moyen du crible* E [3] l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que la perpendiculaire élevée en x à l'axe OX coupe l'ensemble E en un ensemble de points (non vide) qui *n'est pas bien ordonné* à l'aide de cette convention que le rang des points soit conforme à la direction positive de l'axe OY (en d'autres termes en un ensemble contenant une suite infinie de points dont les ordonnées vont en décroissant). On a (pour $n = 1, 2, \ldots$) les théorèmes suivants [4] :

I. *Si* E *est un ensemble* P_n *plan*, K(E) *est un ensemble* P_n *linéaire.*

II. *Les ensembles* P_n *linéaires coïncident avec les ensembles* K(E), *où* E *sont des ensembles* C_{n-1} *plans.*

Soit, en effet, E un ensemble P_n plan et désignons pour k naturel, par H_k l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, pour lesquels il existe au moins un point (x_0, y_0) de E, tel que $x = x_0$ et $0 < y_0 - y < \frac{1}{k}$. Posons

$$H = H_1 H_2 H_3 \ldots; \tag{7}$$

on voit sans peine que

$$K(E) = P(H).$$

Or, désignons par F_k l'ensemble de tous les points (x, y, z) de R_3, tels que $(x, y) \in E$ et $0 < z < \frac{1}{k}$: l'ensemble F_k est évidemment le produit de l'ensemble Q(E) (*voir* n° 10) par l'ensemble ouvert formé de tous les points (x, y, z) de R_3, où $0 < z < \frac{1}{k}$. L'ensemble E étant un P_n, les ensembles Q(E) et F_k le sont donc aussi. Or, l'ensemble H_k est, comme on voit sans peine, une image continue de l'ensemble F_k [obtenue en faisant correspondre au point (x, y, z) de F_k le point $(x, y - z)$ de H_k] : donc H_k est encore un P_n, de même que l'ensemble (7). Le théorème I est ainsi démontré.

---

(3) *Cf.* N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 10, p. 10.

(4) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 12, p. 1; C. Kuratowski, *Fund. Math.*, t. 17, p. 257.

Il résulte tout de suite du théorème I que si E est un ensemble C_{n-1}, K(E) est un ensemble P_n (tout ensemble C_{n-1} étant un P_n). Donc, pour déduire du théorème I le théorème II, il suffira de démontrer qu'il existe pour tout ensemble linéaire M qui est un P_n un ensemble E qui est un C_{n-1}, tel que $M = K(E)$.

Soit donc M un ensemble P_n linéaire : il existe donc un ensemble plan N qui est un C_{n-1}, tel que $M = P(N)$ et, comme on voit sans peine, on peut supposer que l'ensemble N est situé dans le demi-plan $y > 0$. Désignons par N_k l'ensemble de tous les points $\left(x, y + \frac{1}{k}\right)$, où $(x, y) \in N$. L'ensemble N_k (comme superposable avec N) est un C_{n-1}, de même que l'ensemble

$$E = N_1 + N_2 + \ldots.$$

Or, on voit sans peine que $M = K(E)$. Le théorème II est ainsi démontré.

16. Les ensembles projectifs dans les espaces métriques. — Soit M un espace métrique complet et séparable (1). On appelle *ensembles* P_1 de l'espace M les ensembles contenus dans M et qui sont des images continues de l'ensemble de tous les nombres irrationnels (2). En partant des ensembles P_1 on définit ensuite les ensembles P_n et C_n par l'induction comme il suit : les ensembles C_n sont des complémentaires (par rapport à M) des ensembles P_n et les ensembles P_{n+1} sont des images continues des ensembles C_n (3).

M. W. Hurewicz a démontré que dans l'espace de sous-ensembles fermés de l'intervalle [métrisé d'après M. Hausdorff (4)] l'ensemble des ensembles fermés indénombrables est un P_1 qui n'est pas un C_1 (5).

---

(1) Un espace est *séparable*, s'il contient une partie dense finie ou dénombrable, *complet*, si toute suite satisfaisant au critère de Cauchy est convergente.

(2) *Cf.* le livre de M. Lusin, p. 135; aussi mon livre *Introduction to general Topology*, Toronto, 1934, p. 136, 145, 151 et 152; F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, p. 209 (II) et 211 (III).

(3) *Cf.* mon livre cité, p. 190 et G. Steinbach, *Beiträge zur Mengenlehre* (*Inaugural-Diss.*, Bonn, 1933, p. 35); aussi C. Kuratowski, *Topologie*, t. I, p. 234. *Cf.* aussi ma Note dans *Fund. Math.*, t. 7, p. 237.

(4) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, § 28.

(5) *Fund. Math.*, t. 15, p. 4.

J'ai démontré [1] que dans l'espace de tous les ensembles fermés plans contenus dans le carré $Q(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1)$ métrisé d'après M. Hausdorff, l'ensemble de tous les ensembles fermés situés dans le carré Q et jouissant de la propriété que toute droite $x = a$, où $0 \leq a \leq 1$, le rencontre en une infinité indénombrable de points est un C_2 qui n'est pas un P_2. Or, si l'on y remplace les mots *une infinité indénombrable* par les mots *un ensemble au plus dénombrable*, on obtient un ensemble C_1 qui n'est pas un P_1.

Dans l'espace de tous les ensembles fermés contenus dans le cube $(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1)$ métrisé d'après M. Hausdorff, l'ensemble de tous les ensembles fermés F tels qu'il existe pour tout nombre a de l'intervalle $(0, 1)$ un nombre b de cet intervalle, tel que la droite $x = a$, $y = b$ a un ensemble au plus dénombrable de points communs avec F est un ensemble C_3 qui n'est pas un P_3 [2].

M. Mazurkiewicz a démontré [3] que dans l'espace de toutes les fonctions continues $f(x, y)$, définies pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, métrisé par la formule

$$\rho(f, g) = \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} |f(x, y) - g(x, y)|,$$

l'ensemble de toutes les fonctions $f(x, y)$ qui, pour une au moins valeur y sont partiellement dérivables par rapport à x pour tous les x de l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, est un P_2 qui n'est pas un C_2.

MM. Banach et Kuratowski ont démontré [4] que dans l'espace de toutes les fonctions continues $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$ (où la distance de deux fonctions f et g est égale à $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$) il existe des ensembles *linéaires* de toute classe C_n [c'est-à-dire contenant, avec $f(x)$ et $g(x)$, la fonction $\lambda f(x) + \mu g(x)$ pour λ et μ réels arbitraires].

---

(1) *Fund. Math.*, t. 25, p. 261.
(2) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 25, p. 263.
(3) *Fund. Math.*, t. 28, p. 7.
(4) *Studia Mathematica*, t. 4, 1933, p. 95-99.

LES ENSEMBLES ANALYTIQUES.

Introduction. — La naissance de la théorie des ensembles analytiques est assez curieuse. C'était en 1916. M. Nicolas Lusin, alors jeune professeur à l'Université de Moscou, recommanda à son élève, Michel Souslin, d'étudier le Mémoire de M. Henri Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement* (1).

Dans ce Mémoire M. Lebesgue énonce, entre d'autres, le théorème que *si une fonction représentable analytiquement est à valeurs distinctes, sa fonction inverse est aussi représentable analytiquement*. La démonstration de ce théorème, donnée par M. Lebesgue, était basée sur quelques lemmes, parmi eux sur le lemme que la projection sur une droite d'un produit infini descendant d'ensembles plans est le produit des projections de ces ensembles. M. Lebesgue ne donne pas de démonstration de ce lemme, en le regardant comme évident, ce qui fut sans doute l'avis des lecteurs du Mémoire de M. Lebesgue pendant dix années. Or, M. Souslin, en étudiant ce Mémoire, remarqua que ce lemme était faux.

En effet, si l'on désigne par E_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x = 0$ et $0 < y < \frac{1}{n}$, le produit $E_1 E_2 E_3 \ldots$ de ces ensembles, donc aussi sa projection sur l'axe OX, est un ensemble vide, cependant la projection de chacun de ces ensembles sur l'axe OX, donc aussi le produit de ces projections, est l'ensemble formé d'un seul point $(0, 0)$. Or, on a $E_{n+1} \subset E_n$ pour $n = 1, 2 \ldots$, c'est-à-dire que la suite considérée est descendante, contrairement au lemme de M. Lebesgue.

Par hasard j'étais présent au moment où Michel Souslin communiqua à M. Lusin sa remarque et lui donna le manuscrit de son

(1) *Journ. Math.*, 6e série, t. I, 1905.

premier travail. C'est tout sérieusement que M. Lusin a traité le jeune étudiant qui lui déclarait avoir trouvé une faute dans un Mémoire d'un savant éminent. Je fus aussi un des premiers qui, immédiatement après M. Lusin a lu les manuscrits de Michel Souslin; je sais donc bien combien M. Lusin a aidé son élève et comme il le guidait dans ses recherches. Les ensembles analytiques sont appelés par plusieurs auteurs *ensembles de Souslin* : il serait plus juste de les appeler ensembles de Souslin et Lusin.

M. Souslin ne se contenta pas de constater que le lemme de M. Lebesgue est faux. Il se mit à examiner si les conséquences que M. Lebesgue en a déduites étaient vraies. Une d'elles était la proposition de M. Lebesgue qu'une projection sur une droite d'un ensemble plan mesurable B est mesurable B [ce qui résulterait immédiatement du (faux) lemme de M. Lebesgue sur la projection d'un produit descendant d'ensembles, vu que la projection d'une somme (quelconque) d'ensembles est la somme des projections de ces ensembles et que la projection d'un rectangle est un segment]. Pour construire un exemple d'un ensemble plan mesurable B dont la projection est non mesurable B, M. Souslin a créé toute une théorie qu'il appela théorie des ensembles (A) (analytiques).

Cette théorie a été ensuite simplifiée et développée par M. Lusin qui a aussi démontré à l'aide d'elle que le théorème de M. Lebesgue sur l'inversion des fonctions représentables analytiquement, bien que déduit d'un lemme faux, est cependant vrai.

Les deux premières publications de la théorie des ensembles (A) étaient les deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 8 janvier 1917, t. 164, p. 88 et 91) de M. Souslin, *Sur une définition des ensembles mesurables* B *sans nombres transfinis* et de M. N. Lusin, *Sur la classification de M. Baire.* En 1917, M. Lusin commença à écrire un travail étendu sur les ensembles (A) dont une partie fut publiée seulement en 1926 dans le volume 10 des *Fundamenta Mathematicæ* (p. 1-95). En 1930 parut dans la *Collection de Monographies* de M. Borel le livre de M. N. Lusin *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications.*

Quelques propositions concernant les ensembles (A) ont été démontrées par M. Lusin et par moi dans deux Mémoires que nous avons publiés ensemble en 1918 dans le *Bulletin de l'Académie*

des Sciences de Cracovie (1) et en 1923 dans le *Journal de Mathématiques* (2).

Quant à Michel Souslin, il est mort en 1919 sans avoir publié sur la théorie des ensembles (A) rien de plus que la Note citée des *Comptes rendus*.

Plusieurs propositions et problèmes de la théorie des ensembles analytiques ont été l'objet de travaux d'autres auteurs, comme Alexandroff, Mlle Braun, Gödel, Hurewicz, Kantorovitch, Keldych, Kolmogoroff, Kondô, Kunugui, Kuratowski, Lavrentieff, Liapounoff, Livenson, Mazurkiewicz, Montgomery, Neubauer, von Neumann, Nikodym O., Novikoff, Mlle Piccard, Poprougenko, Sélivanowski, Sierpinski, Steckel, Szpilrajn, Urysohn.

Outre le livre cité de M. Lusin, la théorie des ensembles analytiques est traitée dans les Ouvrages suivants :

F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin u. Leipzig, 1935, p. 90-93, 177-181, 184-193, 262, 274-275 et 289-290.

H. Hahn, *Reelle Funktionen*, I Teil, Leipzig, 1932, V Kapitel, p. 339-398 : *Die analytischen Mengen.*

C. Kuratowski, *Topologie*, t. I (*Monografije Matematyczne*, t. III), Warszawa-Lwów, 1933, § 34 : *Ensembles projectifs* (p. 234-246) et § 35 : *Ensembles analytiques* (p. 246-267) et 2e édition, Warszawa-Wroclaw, 1948, p. 360-421.

K. Kunugui, *La théorie des ensembles analytiques et les espaces abstraits* (*Journ. of the Faculty of Science Hokkaïdo Imperial University*, série I, vol. IV, p. 1-40 (Sapporo 1935).

N. Lusin, *Mémoire sur les ensembles analytiques et projectifs* (*Recueil mathématique de la Société Math. de Moscou*, t. 33, 1926, p. 237-290.

N. Lusin, *Sur les ensembles analytiques* (*Fund. Mathem.* t. 10, 1926, p. 1-95.

W. Sierpinski, *Funkcje przedstawialne analitycznie*, Lwów 1925, Chap. V, p. 71-101 (en polonais).

---

(1) *Sur quelques propriétés des ensembles* (A) (*Bull. Ac. Sc. Cracovie*, 1918, p. 37-48).

(2) *Sur un ensemble non mesurable B.* (*Journ. Math.*, 7e série, t. II, 1923, p. 53-72).

— *Zarys teorji mnogośá*, t. II (*Topologja Ogólna*, Warszawa, 1928, § 63-78, p. 153-215) (en polonais).
— *Introduction to general Topology*, (Toronto, *University Press*, 1934, p. 135-190).
— *Lectiuni despre multimile analitice*, Cluj, 1937, p. 1-16 (en roumain).
G. Steinbach, *Beiträge zur Mengenlehre* (*Inaugural-Dissertation*, Bonn, 1930, p. 8-34).
Les Mathématiques en l'U. R. S. S. pendant trente années 1917-1947 (en russe, Moscou-Leningrad, 1948) contient un article de MM. Liapounoff et Novikoff (pp. 243-255) qui donne l'exposé des résultats obtenus par les mathématiciens russes dans la théorie des ensembles analytiques et projectifs.

17. Ensembles analytiques comme noyaux de systèmes déterminants. — Il existe plusieurs définitions équivalentes des ensembles analytiques. Nous commencerons par celle qui est historiquement la première, celle de M. Souslin. Nous verrons à la fois comment M. Souslin a été conduit aux ensembles (A).

Les ensembles *mesurables* B (linéaires, plans, etc.) sont les ensembles qu'on obtient en partant des ensembles élémentaires (segments, rectangles, etc.) et en effectuant un nombre fini ou une infinité dénombrable de fois les opérations d'addition et de multiplication (prendre la partie commune) d'ensembles [1].

Prenons comme ensembles élémentaires plans les rectangles (fermés) dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées Il sera commode de considérer aussi des rectangles dont les dimensions sont nulles, c'est-à-dire les segments parallèles aux axes et les points. (Il suffirait d'ailleurs pour notre but de considérer seulement les rectangles rationnels, c'est-à-dire dont les sommets ont des coordonnées rationnelles). On pourra alors dire qu'un produit (d'un nombre fini ou d'une infinité quelconque) de rectangles est un rectangle (ou bien un ensemble vide).

La projection sur une droite d'un ensemble élémentaire plan est

---

[1] Pour la critique de cette définition, *voir* N. Lusin, *Recueil Math. Moscou*, t. 33, 1926, p. 239-247; *cf.* ses *Leçons*, p. 17-40.

évidemment un segment ou un point, donc un ensemble élémentaire linéaire.

La classe la plus simple des ensembles mesurables B après les ensembles élémentaires c'est la classe des sommes d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles élémentaires. La projection d'une somme (d'un nombre fini ou d'une infinité quelconque) d'ensembles étant la somme des projections de ces ensembles, on voit tout de suite que la projection d'un ensemble plan mesurable B de la classe considérée est un ensemble (linéaire) mesurable B de la même classe.

La classe suivante d'ensembles mesurables B est formée de produits d'une infinité dénombrable d'ensembles de la classe considérée tout à l'heure. Les ensembles plans de cette classe sont donc de la forme

$$E = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^m = (R_1^1 + R_2^1 + \ldots)(R_1^2 + R_2^2 + \ldots,)(R_1^3 + R_2^3 + \ldots)\ldots$$

où R_n^m sont des rectangles, ce qu'on peut aussi écrire

$$(1) \qquad E = \sum_{n_1, n_2, \ldots} R_{n_1}^1 R_{n_2}^2 R_{n_3}^3 \ldots,$$

la sommation $\sum_{n_1, n_2, \ldots}$ s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels n_1, n_2, ...

Cherchons maintenant la projection PE de l'ensemble E sur l'axe OX. La projection d'une somme étant la somme des projections, la formule (1) donne

$$(2) \qquad PE = \sum_{n_1, n_2, \ldots} P(R_{n_1}^1 R_{n_2}^2 R_{n_3}^3 \ldots).$$

La projection d'un produit n'étant pas, en général, égale au produit des projections, nous ne pouvons pas remplacer $P(R_{n_1}^1 R_{n_2}^2 \ldots)$ par $P(R_{n_1}^1)\, P(R_{n_2}^2) \ldots$.

Or, on démontre sans peine que la projection d'un produit descendant de rectangles fermés c'est-à-dire dont chacun est contenu dans le précédent) est égal au produit des projections de ces rectangles (et cette proposition subsiste pour les produits descendants d'ensembles fermés et bornés). Il faut donc remplacer le produit $R_{n_1}^1 R_{n_2}^2 \ldots$ par

un produit descendant de rectangles, ce qu'on achève sans peine. en posant

$$R^1_{n_1} R^2_{n_2} \dots R^k_{n_k} = R_{n_1, n_2, \dots, n_k} \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2. \dots$$

et en remarquant que

$$(3) \qquad R^1_{n_1} R^2_{n_2} R^3_{n_3} \dots = R_{n_1} R_{n_1, n_2} R_{n_1, n_2, n_3} \dots .$$

On a maintenant

$$R_{n_1} \supset R_{n_1, n_2} \supset R_{n_1, n_2, n_3} \supset \dots$$

et

$$(4) \qquad P(R_{n_1}, R_{n_1, n_2} R_{n_1, n_2, n_3} \dots) = P(R_{n_1}) P(R_{n_1, n_2}) P(R_{n_1, n_2, n_3} \dots .$$

Posons généralement

$$P(R_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k},$$

ce seront évidemment des segments (ou des ensembles vides).

D'après (2), (3), (4) et (5) on trouve

$$(6) \qquad PE = \sum_{n_1, n_2, \dots} \delta_{n_1} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_1, n_2, n_3} \dots .$$

Les projections des ensembles mesurables B de notre classe sont donc des ensembles de la forme (6).

Mais ce qui est important, c'est que si l'on considère des ensembles mesurables B de classes supérieures (et même transfinies), leurs projections sont toujours des ensembles de la forme (6) (comme nous le démontrerons plus loin, n° 19).

C'est cette forme (6) qui était tout d'abord l'objet d'une étude de M. Souslin.

Nous dirons, d'après Souslin, qu'on a un *système* déterminant d'ensembles $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$, lorsqu'on a fait correspondre à tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \dots, n_k$ un ensemble (d'éléments quelconques) $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. On appelle *noyau* du système déterminant $S\{E_{n_1, n_2, \dots n_k}\}$ l'ensemble

$$N = \sum_{n_1, n_2, \dots} E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \dots .$$

On appelle *ensembles analytiques* linéaires (resp. plans) les

noyaux des systèmes déterminants formés de segments (respectivement rectangles).

On pourrait appeler ensembles analytiques d'un espace métrique quelconque M les noyaux des systèmes déterminants formés d'ensembles fermés (resp. ouverts) de cet espace. L'analyticité d'un ensemble ainsi définie est relative à l'espace dans lequel il est situé. L'espace M est par rapport à lui-même toujours analytique comme noyau du système déterminant formé d'ensembles, à la fois fermés et ouverts, tous $= M$, mais n'est pas nécessairement analytique par rapport à un de ses sur-espaces. On pourrait envisager des ensembles absolument analytiques, c'est-à-dire analytiques dans chaque espace qui le contient.

M. K. Menger définit autrement l'analyticité d'un espace. Il appelle un espace métrique M *analytique* s'il existe un système determinant $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formé d'ensembles ouverts de M, tel que : 1° quelle que soit la suite infinie $n_1, n_2, \ldots$ de nombres naturels, si $E_{n_1, n_2, \ldots n_k} \neq 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$, l'ensemble $\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ contient un et un seul point, et 2° quel que soit le point p de M, il existe une suite infinie n_1, $n_2, \ldots$ de nombres naturels, telle que l'ensemble $\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ est formé d'un seul point p (1).

Une telle définition des espaces analytiques semble être trop vaste. En effet, d'après une remarque de M. E. Szpilrajn, il existe $2^{2^{\aleph}}$ ensembles linéaires qui sont des espaces analytiques de M. Menger. Notamment on démontre sans peine que si E est un ensemble quelconque situé dans l'intervalle $(0, 1)$ et H son complémentaire par rapport à cet intervalle, H_1 la translation de H le long de la droite de longueur 1, l'ensemble $E + H_1$ est un espace analytique de Menger.

On ne sait pas s'il existe des ensembles linéaires qui ne soient pas des espaces analytiques de M. Menger. Il est enfin à remarquer qu'il existe des espaces métriques non séparables qui sont des espaces analytiques de M. Menger, par exemple l'espace D_ω de M. Fréchet (2).

---

(1) *Jahresb. d. deutsch. Math. Ver.*, t. 37, 1928, p. 224 et p. 305, renvoi (6).

(2) *Voir* W. Sierpinski, *Fund. Math.* 35, p. 208.

18. Opération A. — Le noyau du système déterminant $\{E_{n_1, n_2, \ldots n_k}\}$ est dit résultat de l'*opération* A effectuée sur les ensembles du système $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$.

Φ étant une famille donnée d'ensembles, désignons par Φ_A la famille de tous les ensembles qui sont des résultats de l'opération A effectuée sur les ensembles des systèmes déterminants formés d'ensembles de la famille Φ. Une des propriétés les plus importantes de l'opération A est la suivante :

Quelle que soit la famille Φ d'ensembles, on a la formule

$$(\Phi_A)_A = \Phi_A. \tag{7}$$

En d'autres termes, si chacun des ensembles $E_{m_1, m_2, \ldots, m_s}$ (où m_1, m_2, ..., m_s est une suite finie quelconque de nombres naturels) est le résultat d'opération (A) effectuée sur les ensembles de la famille Φ, le noyau du système déterminant $\{E_{m_1, m_2, \ldots, m_s}\}$ est aussi le résultat de l'opération (A) effectuée sur les ensembles de la famille Φ.

La démonstration de cette proposition de la théorie générale des ensembles, bien que tout à fait élémentaire, n'est pas d'ailleurs facile. On démontre notamment que si l'on a l'égalité

$$E = \sum_{m_1, m_2, \ldots} E^{m_1} E^{m_1, m_2} E^{m_1, m_2, m_3} \ldots$$

et si l'on a pour tout système fini de nombres naturels $m_1, m_2, \ldots, m_3$

$$E^{m_1, m_2, \ldots, m_s} = \sum_{n_1, n_2, \ldots} E_{n_1}^{m_1, m_2, \ldots, m_s} E_{n_1, n_2}^{m_1, m_2, \ldots, m_s} \ldots,$$

alors, en comprenant par p_k et q_k les nombres naturels bien définis pour tout nombre naturel k par la formule

$$k = 2^{p_k - 1}(2q_k - 1),$$

et en posant, pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E_{q_{n_2 q_k - 1}, q_{n_2(2q_k - 1)}, \ldots, q_{n_2 p_k - 1}(2q_k - 1)}^{p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n q_k}},$$

on aura la formule

$$E = \sum_{n_1, n_2, \ldots} E_{n_1} E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \ldots \quad (1).$$

---

(1) *Voir* par exemple W. SIERPINSKI, *Intr. to general Topology*, Toronto, 1934,

Or, il est à remarquer que si Φ est une famille (simplement) additive et multiplicative d'ensembles, la famille de tous les ensembles

$$\sum E_{\alpha_1} E_{\alpha_1,\alpha_2} E_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots},$$

où la sommation s'étend à toutes les suites infinies $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ formées des nombres 0 et 1 et où $E_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}$ sont (pour tout système fini $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de nombres 0 et 1) des ensembles de la famille Φ, coïncide avec la famille Φ_δ [1].

K. Menger a démontré que les noyaux des systèmes déterminants $\{E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ où $E^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ sont des intervalles finis et fermés de l'espace R_m et où, pour tout k naturel, il n'existe qu'un nombre fini d'ensembles $E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ non vides, coïncident avec les ensembles fermés et bornés de R_m [2].

19. **Opérations σ et δ.** — Φ étant une famille donnée d'ensembles, on désigne par Φ_σ, respectivement par Φ_δ la famille de tous les ensembles qui sont des sommes, respectivement des produits d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille Φ (pas nécessairement distincts). On a évidemment, pour toute famille Φ d'ensembles,

$$(8) \qquad \Phi \subset \Phi_\sigma \quad \text{et} \quad \Phi \subset \Phi_\delta,$$

puisque, si $E \in \Phi$, on a

$$E = E + E + \ldots \quad \text{et} \quad E = E.E.\ldots$$

Or, on a pour toute famille Φ d'ensembles les formules

$$(9) \qquad \Phi_\sigma \subset \Phi_A \quad \text{et} \quad \Phi_\delta \subset \Phi_A.$$

En effet, si $E \in \Phi_\sigma$, on a $E = E_1 + E_2 + \ldots$, où $E_n \in \Phi$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Posons, pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$

$$E_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = E_{n_1},$$

---

p. 137-140 (Th. 70); aussi *Fund. Math.*, t. 21, p. 261. *Cf.* F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, p. 92. *Cf.* aussi n° 28.

(1) W. Sierpinski, *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, t. 22, 1929, p. 163.

(2) *Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver.*, t. 37, 1928, p. 222-223; *cf.* aussi la définition des ensembles de points « finis » de Brouwer; *Math. Ann.*, t. 93, p. 245.

l'ensemble E sera, comme on voit sans peine, le noyau du système déterminant $\{E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$, d'où $E \in \Phi_A$.

D'autre part, si $E \in \Phi_\delta$, on a $E = H_1 H_2 H_3, \ldots$, où $H_n \in \Phi$ pour $n = 1, 2 \ldots$. Posons, pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$E_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = H_k,$$

l'ensemble E sera, comme on voit sans peine, le noyau du système déterminant $\{E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$, d'où $E \in \Phi_A$.

Les formules (9) étant ainsi établies pour toute famille Φ d'ensembles nous pouvons y remplacer Φ par Φ_A, ce qui donne, d'après (7)

$$(10) \qquad (\Phi_A)_\sigma \subset \Phi_A \quad \text{et} \quad (\Phi_A)_\delta \subset \Phi_A.$$

On exprime les formules (10) en disant que la famille Φ_A est *close* par rapport aux opérations σ et δ.

Soit, en particulier, Φ la famille de tous les intervalles fermés : la famille Φ_A est alors celle de tous les ensembles analytiques linéaires et la formule (10) prouve qu'*une somme et un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles analytiques est un ensemble analytique.*

20. **Opération B.** — Φ étant une famille donnée d'ensembles, on désigne par Φ_B la plus petite famille Ψ d'ensembles contenant la famille Φ et close par rapport aux opérations σ et δ, c'est-à-dire telle que $\Phi \subset \Psi = \Psi_\sigma = \Psi_\delta$. On démontre sans peine qu'une telle famille Φ_B existe pour toute famille Φ d'ensembles.

En effet, il existe des familles Ψ contenant Φ et closes par rapport aux opérations σ et δ : une d'elles est la famille Φ_A (n° 19). Or, on démontre sans peine qu'un produit (partie commune) d'un ensemble quelconque de familles contenants Φ et closes par rapport aux opérations σ et δ est de même nature. Le produit de toutes les sous-familles de la famille Φ_A qui contiennent la famille Φ et sont closes par rapport aux opérations σ et δ est donc la plus petite famille jouissant de ces propriétés : c'est donc la famille Φ_B.

En particulier, si Φ est la famille de tous les intervalles, Φ_B est (par définition, si l'on veut) la famille de tous les ensembles linéaires mesurables B.

Il résulte tout de suite de notre définition de la famille Φ_B qu'on a la formule

$$\Phi_B \subset \Phi_A, \tag{11}$$

quelle que soit la famille Φ d'ensembles.

Si l'on prend, en particulier, comme Φ la famille de tous les intervalles, il résulte tout de suite de la formule (11) que *tout ensemble mesurable* B *linéaire est un ensemble analytique.*

La démonstration pour l'espace R_m est tout à fait analogue.

21. Ensembles analytiques comme projections des ensembles G_δ. — Soit E un ensemble analytique linéaire (non vide). Conformément à la définition de la fin du n° 17, E est le noyau d'un système déterminant formé d'intervalles fermés, $\{\delta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$,

$$E = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \delta_{n_1} \delta_{n_1,n_2} \delta_{n_1,n_2,n_3}, \ldots, \tag{12}$$

et nous pouvons supposer que pour chaque suite infinie donnée d'indices n_1, n_2, n_3, ..., les intervalles δ_{n_1}, δ_{n_1,n_2}, ..., forment une suite infinie descendante, c'est-à-dire que

$$\delta_{n_1} \supset \delta_{n_1,n_2} \supset \delta_{n_1,n_2,n_3} \supset \ldots, \tag{13}$$

puisque, si ce n'était pas le cas, il suffirait de remplacer chaque intervalle $\delta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ par le produit $\delta_{n_1}\delta_{n_1,n_2,\ldots,}\delta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ sans altérer le noyau du système déterminant.

On peut encore supposer que la longueur de l'intervalle $\delta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ est toujours $< \frac{1}{k}$; si ce n'était pas le cas, il suffirait de diviser chaque intervalle $\delta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ en un nombre fini (variable) d'intervalles de longueur $< \frac{1}{k}$ et de modifier le numérotage des intervalles $\delta_{n_1,n_2,\ldots,n_k,n}$. Cette modification nous permet également de supprimer tous les intervalles vides, de sorte qu'on pourra supposer que chaque intervalle $\delta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ est non vide.

Dans ces conditions tout produit

$$\delta_{n_1}\delta_{n_1,n_2}\delta_{n_1,n_2,n_3}. \ldots, \tag{14}$$

se réduit, comme on voit sans peine, à un point déterminé par la suite infinie de nombres naturels n_1, n_2, n_3, ..., donc aussi par le

nombre irrationnel x dont le développement en fraction continue infinie est

$$(15) \qquad x = \mathrm{E}x + \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \ldots,$$

(où $\mathrm{E}x$ désigne l'entier le plus grand $\leqq x$).

Nous avons ainsi défini dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels une fonction $f(x)$ et l'ensemble $f(\mathrm{N})$ de toutes les valeurs $f(x)$ de cette fonction (pour $x \in \mathrm{N}$) est évidemment l'ensemble E. Or, si x et x' sont deux nombres irrationnels dont les développements en fraction continue ont les mêmes k premiers dénominateurs, les points correspondants $f(x)$ et $f(x')$ sont contenus dans le même intervalle $\delta_{n_1, n_2, \ldots n_k}$ de longueur $< \frac{1}{k}$. Il en résulte tout de suite que la fonction $f(x)$ est continue dans l'ensemble N.

Nous avons ainsi démontré que *les ensembles analytiques sont des images continues de l'ensemble de tous les nombres irrationnels* [1].

Or, l'ensemble N est un C_0 (un G_δ) : les ensembles P_1 coïncidant avec les images continues des ensembles C_0 (n° 10), il en résulte que les ensembles analytiques sont des ensembles P_1.

La réciproque est aussi vraie. Soit, en effet, H un ensemble P_1 linéaire : c'est donc une projection PE d'un ensemble plan E qui est un C_0, donc un G_δ plan et l'on peut poser $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \mathrm{E}_2 \mathrm{E}_3, \ldots$ où E_n ($n = 1, 2, \ldots$) sont des ensembles ouverts plans. Or, tout ensemble ouvert plan est comme on voit sans peine, la somme de tous les rectangles rationnels (fermés) qu'il contient (c'est-à-dire des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées et dont les sommets ont des coordonnées rationnelles). On peut donc présenter l'ensemble E sous la forme (1) du n° 17 et il en résulte, comme nous savons, que PE est un ensemble analytique.

Ainsi : *les ensembles analytiques coïncident avec les ensembles projectifs* P_1. La démonstration a été donnée pour le cas des ensembles linéaires, mais pour l'espace R_m elle est tout à fait analogue.

Vu la définition des ensembles P_1 (n° 4), nous pouvons aussi dire

---

[1] C'est cette propriété des ensembles analytiques qui est prise comme leur définition par M. N. Lusin dans son livre, p. 135.

que *les ensembles* (A) *coïncident avec les projections des ensembles* G_δ.

Les images continues des ensembles P_1 étant des ensembles P_1 (n° 10), nous concluons encore que *toute image continue d'un ensemble* (A) (*en particulier la projection*) *est un ensemble* (A)

Or, M. Hurewicz a démontré que deux ensembles analytiques qui ne sont pas des ensembles F_σ sont chacun une image continue de l'autre (1).

22. Ensembles analytiques comme ensembles de valeurs de fonctions continues partout d'un côté, respectivement semi-continues. — Si au lieu du développement (15) en fraction continue on prend le développement du nombre x (où $0 < x \leqq 1$) en fraction infinie dyadique

$$x = 2^{-n_1} + 2^{-n_1-n_2} + 2^{-n_1-n_2-n_3} + \ldots,$$

et si l'on conserve la définition de la fonction $f(x)$ du n° 21 [comme point (14)], on obtient, comme on voit sans peine, une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $0 < x \leqq 1$ et continue partout du côté gauche. On en conclut que *les ensembles* (A) (linéaires) *sont des ensembles de valeurs d'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ continue du côté gauche en chaque point x* (2)

De telles fonctions admettent, comme on sait, un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité et sont limites de suites convergentes de fonctions continues, donc des fonctions de classe $\leqq 1$ de Baire.

D'autre part, on démontre que l'image géométrique $J = \underset{x,y}{E}[y = f(x)]$ de toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle de classe $\leqq 1$ de Baire est un ensemble G_δ (plan) : l'ensemble de valeurs (pour x réels) d'une telle fonction $f(x)$, en tant que coïncidant avec la projection PJ, est donc un ensemble analytique.

Or, toute fonction $f(x)$ de classe $\leqq 1$ est une somme d'une série convergente de polynomes en x à coefficients rationnels. Donc, *les ensembles analytiques linéaires coïncident avec l'ensemble de*

(1) W. Hurewicz, *Fund. Math.*, t. 12, p. 101.
(2) *Fund. Math.*, t. 10, p. 169; cf. *ibid.*, p. 12-15.

valeurs que prend pour x réels, la somme d'une série convergente de polynomes à coefficients rationnels.

On démontre aussi que *les ensembles analytiques linéaires coïncident avec l'ensemble de valeurs* (pour x réels) *d'une fonction $f(x)$ semi-continue supérieurement* [1]. Il en résulte sans peine que les ensembles (A) linéaires peuvent être obtenus à partir des ensembles plans fermés par un procédé très simple. On prend un ensemble plan fermé F (pas nécessairement borné, mais borné sur toute droite parallèle à l'axe OY), on le coupe par les droites parallèles à l'axe OY; sur chaque parallèle on choisit le point de F dont l'ordonnée est maximum et l'on projette le sous-ensemble de F ainsi obtenu sur l'axe OY. L'ensemble fermé F étant choisi convenablement, on peut obtenir ainsi tout ensemble (A) linéaire [2].

M. Poprougénko a démontré [3] que pour qu'un ensemble linéaire E soit analytique, il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue $f(x)$, telle que E soit l'ensemble de toutes les valeurs $f'(x)$, x parcourant l'ensemble de tous les points x auxquels $f(x)$ admet la dérivée unique et finie.

Il a démontré aussi [4] que pour qu'un ensemble linéaire soit un ensemble (A), il faut et il suffit qu'il soit l'ensemble des valeurs de la fonction dérivée d'une fonction continue dérivable en tout point sauf aux points d'un ensemble au plus dénombrable.

On voit ainsi comment l'étude de l'ensemble de valeurs des fonctions d'une nature très simple conduit aux ensembles analytiques linéaires et même les plus généraux.

23. Ensembles boréliens. — Φ étant une famille donnée d'ensembles posons $\Phi^{(0)} = \Phi_{(0)} = \Phi$ et définissons pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ par l'induction transfinie les familles $\Phi^{(\alpha)}$ et $\Phi_{(\alpha)}$ comme il suit :

$$(16) \qquad \Phi^{(\alpha)} = \left(\sum_{\xi<\alpha} \Phi_{(\xi)}\right)_\sigma \qquad \text{et} \qquad \Phi_{(\alpha)} = \left(\sum_{\xi<\alpha} \Phi^{(\xi)}\right)_\delta.$$

On a ainsi

$$\Phi^{(1)} = \Phi_\sigma, \qquad \Phi_{(1)} = \Phi_\delta, \qquad \Phi^{(2)} = \Phi_{\sigma\delta}, \qquad \Phi_{(2)} = \Phi_{\delta\sigma}.$$

---

(1) W. Sierpinski, *Bull. Acad. Polonaise des Sc. et L.*, 1927, p. 697.
(2) *Loc. cit.*, p. 701; *cf.* aussi *Fund Math.*, t. 11, p. 294.
(3) *Fund Math.*, t. 18, p. 77.
(4) *Loc. cit.*, p. 80.

On a, pour toute famille Φ d'ensembles

$$\Phi_B = \sum_{\alpha<\omega_\alpha} \Phi^{(\alpha)} = \sum_{\alpha<\Omega} \Phi_{(\alpha)}.$$

D'après (16) on a, pour $\alpha < \Omega$, $\Phi_\sigma^{(\alpha)} = \Phi^{(\alpha)}$ et $(\Phi_{(\alpha)})_\delta = \Phi_{(\alpha)}$: la famille $\Phi^{(\alpha)}$ est donc dénombrablement additive, et la famille $\Phi_{(\alpha)}$ est dénombrablement multiplicative. On appelle par suite les ensembles de la famille $\Phi^{(\alpha)}$ *de classe additive* α et ceux de la famille $\Phi_{(\alpha)}$ *de classe multiplicative* α relativement à la famille Φ.

Il y a des problèmes difficiles de la théorie générale des ensembles concernant les classes boréliennes initiales. Par exemple nous ne savons pas démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu qu'il existe une famille Φ d'ensembles, telle que

$$\Phi_{\sigma\delta} \neq \Phi_{\sigma\delta\sigma} = \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta} \quad (^1).$$

D'autre part, même en admettant l'hypothèse du continu, nous ne savons pas résoudre le problème d'existence d'une famille Φ d'ensembles, telle que

$$\Phi_{\sigma\delta\sigma} \neq \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta} = \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma} \quad (^2).$$

Si Φ est la famille de tous les ensembles de R_m (ou, plus généralement, d'un espace métrique quelconque) qui sont à la fois F_σ et G_δ, les ensembles de la famille $\Phi^{(\alpha)}$, respectivement $\Phi_{(\alpha)}$ sont dits ensembles *boréliens* (ou mesurables B) *de classe* α *additive* respectivement *multiplicative*. Les familles

$$\Phi^{(1)}, \quad \Phi_{(1)}, \quad \Phi^{(2)}, \quad \Phi_{(2)}, \quad \Phi^{(3)}, \quad \Phi_{(3)}, \quad \ldots,$$

sont ici formées respectivement des ensembles

$$F_\sigma, \quad G_\delta, \quad G_{\delta\sigma}, \quad F_{\sigma\delta}, \quad F_{\sigma\delta\sigma}, \quad G_{\delta\sigma\delta}, \quad \ldots.$$

Les ensembles appartenant à la fois aux familles $\Phi^{(\alpha)}$ et $\Phi_{(\alpha)}$ sont dits *ambigus de classe* α.

La famille $\Phi^{(\alpha)}$ (où $0 < \alpha < \Omega$) est dénombrablement additive et simplement multiplicative, et la famille $\Phi_{(\alpha)}$ est dénombrablement multiplicative et simplement additive.

---

(1) W. SIERPINSKI, *Recueil Math. Moscou*, nouvelle série, t. 1, (43), p. 303.
(2) Cf. *Fund Math.*, t. 30, p. 65.

On a

$$\Phi^{(\alpha)} + \Phi_{(\alpha)} \subset \Phi^{(\beta)} \Phi_{(\beta)} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \alpha < \beta < \Omega.$$

On démontre pour $0 < \alpha < \Omega$ l'existence des ensembles plans $\Phi^{(\alpha)}$, respectivement $\Phi_{(\alpha)}$ universels pour les ensembles linéaires $\Phi^{(\alpha)}$, respectivement $\Phi_{(\alpha)}$ (1) et l'on en déduit l'existence des ensembles boréliens (linéaires) de toute classe $\alpha < \Omega$ qui n'appartiennent pas aux classes inférieures (*cf.* n° 8).

Une généralisation d'ensembles boréliens, respectivement analytiques, respectivement projectifs a été considérée par L. Maximoff (2) en partant d'une généralisation d'espace o-dimensionnel de Baire.

24. Décomposition des ensembles analytiques en une somme et en un produit de $\aleph_1$ ensembles boréliens. — Soit Φ une famille quelconque d'ensembles et soit E un ensemble de la famille Φ_A (*voir* n° 19) : c'est donc un noyau d'un système déterminant $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formé d'ensembles de la famille Φ.

Posons, pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$

$$E^0_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \tag{17}$$

$$E^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \sum_{n=1}^{\infty} E^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n} \tag{18}$$

pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, et

$$E^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \prod_{\xi < \alpha} E^{\xi}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \tag{19}$$

pour tout nombre ordinal α de seconde espèce.

On démontre sans peine par l'induction transfinie que

$$E^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \in \Phi_B, \tag{20}$$

pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$ et tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$.

---

(1) *Voir* par exemple W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 14, p. 89; *cf.* L. V. Kantorovitch, *Journ. Soc. Phys. Math. Leningrad*, t. 1, 1929, p. 13-21; C. Kuratowski, *Topologie*, t. 1, p. 172.

(2) *Sur les espaces transfinis*, (Recueil Math. Moscou), Nouvelle série, t. 3, 1938, p. 553-558.

Posons

$$S^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^\alpha, \tag{21}$$

nous aurons encore $S^\alpha \in \Phi_B$ pour $\alpha < \Omega$.

On démontre la formule

$$E = \prod_{\alpha<\Omega} S^\alpha. \tag{22}$$

Donc :

Tout ensemble de la famille Φ_A est un produit de $\aleph_1$ ensembles de la famille Φ_B (1).

Posons encore

$$T^\alpha = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} (E^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - E^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}), \tag{23}$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes finis de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$. On démontre que

$$E = \sum_{\alpha<\Omega} (S^\alpha - T^\alpha). \tag{24}$$

Désignons par Φ_ρ la famille formée de tous les ensembles de la famille Φ et de tous les ensembles de la forme $E_1 - E_2$, où $E_1 \in \Phi$ et $E_2 \in \Phi$. D'après (20) et (23), on trouve, pour $\alpha < \Omega$, $T^\alpha \in \Phi_{B\rho\sigma}$, d'où $S^\alpha - T^\alpha \in \Phi_{B\rho\sigma\rho}$. Or, on démontre qu'on a (pour toute famille Φ d'ensembles) $\Phi_{B\rho\sigma\rho} \subset \Phi_{\rho B}$. Donc :

Tout ensemble de la famille Φ_A est une somme de $\aleph_1$ ensembles de la famille $\Phi_{\rho B}$ (2).

En particulier, si Φ est la famille de tous les segments de R_1 (respectivement rectangles de R_2, etc.), les formules (22) et (24) prouvent que *tout ensemble analytique* (de R_m) *est une somme et un produit de $\aleph_1$ ensembles mesurables* B (3).

---

(1) Voir *Fund Math.*, t. 8, p. 366.

(2) *Loc. cit.*, p. 363.

(3) N. Lusin et W. Sierpinski, *Journ. Math.*, t. 2, 1923, p. 62, aussi C. Kuratowski, *Topologie*, t. 1, p. 264.

En posant, pour $\alpha < \Omega$.

$$E^\alpha = CS^\alpha - \sum_{\xi<\alpha} CS^\xi,$$

on obtient, d'après (22)

$$CE = \sum_{\alpha<\Omega} E^\alpha, \tag{25}$$

ce qui est une décomposition d'un complémentaire analytique en une somme de $\aleph_1$ *constituantes disjointes* qui sont toutes mesurables B.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble E [donc aussi (E)] soit mesurable B est qu'il n'y a dans le développement (25) qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de constituantes non vides ([1]).

M. Lusin a démontré qu'il existe des complémentaires analytiques pour lesquels les classes des constituantes tendent vers Ω ([2]) et même d'une manière monotone ([3]). Or, on ne sait pas s'il existe des complémentaire analytiques non mesurables B dont les constituantes soient de classes bornées (par un nombre ordinal $< \Omega$) et, en particulier, au plus dénombrables (*cf.* n° 25).

Si l'ensemble analytique E est non mesurable B, il y a une infinité indénombrable de constituantes E^α de CE qui sont non vides. Si l'on prend un point de chacune de ces constituantes, on obtient un ensemble indénombrable qui est toujours de première catégorie (c'est-à-dire de première catégorie sur tout ensemble parfait) et dont tout homéomorphe est de mesure nulle ([4]).

Une proposition analogue a lieu pour les constituantes disjointes de l'ensemble analytique E lui-même qu'on obtient du développement (24) ([5]).

Quant au développement (24) Mlle Sophie Piccard a démontré que ses termes forment une suite transfinie non décroissante (c'est-à-dire $S^\alpha - T^\alpha \subset S^\beta - T^\beta$ pour $\alpha < \beta < \Omega$) ([6]).

([1]) N. Lusin et W. Sierpinski, *Bull. Acad. Cracovie*, 1918, p. 39.

([2]) N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 17, p. 5, (*cf.* n° 31).

([3]) N. Lusin, *Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques* (*Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa*, 2e série, vol. 2, 1933, p. 271).

([4]) N. Lusin et W. Sierpinski, *R. Acad. Lincei*, t. 6, vol. VII, p. 214 et W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 7, p. 188.

([5]) W. Sierpinski, *Fund Math.*, t. 21, p. 33 et *Publ. Math. Univ. Belgrade*. t. 2. 1933, p. 19.

([6]) S. Piccard, *Fund Math.*, t. 21, p. 152.

On démontre qu'il existe (pour tout ensemble analytique E) un nombre ordinal $\mu < \Omega$ (dépendant de E), tel que l'ensemble $E - (S^\mu - T^\mu)$ est de mesure nulle (1). Il en résulte que *tout ensemble analytique est mesurable* L.

La mesurabilité L des ensembles analytiques a été énoncée par M. N. Lusin dans sa Note du 8 janvier 1917 des *C. R. Acad. Sc.*, t. 164, et démontrée pour la première fois dans la Note de N. Lusin et W. Sierpinski du *Bull. Acad. Cracovie*, 1918, p. 44. *Cf.* aussi *Fund. Math.*, t. 10, p. 26 et *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, t. 22, 1929, p. 155.

Plus généralement on démontre qu'*un noyau d'un système déterminant formé d'ensembles mesurables* L *est mesurable* L (2).

On démontre qu'il existe pour tout ensemble analytique E et tout ensemble parfait P un nombre ordinal $\mu < \Omega$ (dépendant de E et de P) tel que l'ensemble $E - (S^\mu - T^\mu)$ est de première catégorie de Baire relativement à P (3). Les ensembles mesurables B jouissant de la propriété de Baire, il en résulte que *les ensembles analytiques jouissent de la propriété de Baire*. Plus généralement, on démontre que *la propriété de Baire est un invariant de l'opération* (A) (4).

Soit maintenant H un ensemble P_2 linéaire. Il existe donc un ensemble plan analytique, soit E, tel que $H = PCE$, et il résulte de (25) que $H = \sum_{\alpha < \Omega} PE^\alpha$. Les ensembles E^α étant mesurables B, les ensembles PE^α sont analytiques (n° 21), donc sommes de $\aleph_1$ ensembles mesurables B et il en résulte (vu que $\aleph_1^2 = \aleph_1$) que *tout ensemble* P_2 (linéaire) *est une somme de* $\aleph_1$ *ensembles mesurables* B. On ne sait pas s'il en est de même pour les ensembles C_2 et pour les ensembles projectifs de classes supérieures.

25. Puissances des ensembles analytiques et de leurs complémentaires. — M. Souslin a démontré que *tout ensemble analytique*

---

(1) E. Sélivanowski, *Fund. Math.*, t. 21, p. 24 et W. Sierpinski, *ibid.*, p. 31.

(2) N. Lusin et W. Sierpinski, *Bull. Acad. Cracovie*, 1918, p. 44; E. Szpilrajn *Fund Math.*, t. 21, p. 229; C. Kuratowski, *Topologie*, t. 1, p. 58, S. Saks, *Theory of the Integral* (*Monografje Matematyczne*, t. 7), Warszawa-Lwow, 1937, p. 50.

(3) *Fund Math.*, t. 21, p. 32.

(4) O. Nikodym, *Fund. Math.*, t. 7, p. 49; C. Kuratowski, *Topologie*, t. 1, p. 56; E. Szpilrajn, *Fund. Math.*, t. 21, p. 229.

indénombrable contient un sous-ensemble parfait (non vide) ([1]) et par suite est de puissance du continu. Tout ensemble mesurable B étant analytique, il en résulte, en particulier, que *tout ensemble indénombrable mesurable* B *contient un sous-ensemble parfait* (non vide), ce qui était démontré en même temps et indépendamment par MM. Alexandroff ([2]) et Hausdorff ([3]) en 1916. Leurs démonstrations, fondées sur une même idée, sont assez compliquées et utilisent les nombres transfinis. Une démonstration sans faire appel aux nombres transfinis et à la théorie des ensembles analytiques a été donnée par moi ([4]). (Je définis une propriété Π d'ensembles dont je démontre qu'elle appartient aux ensembles fermés et aux sommes et produits d'une infinité dénombrable d'ensembles qui en jouissent, et je prouve que tout ensemble indénombrable à propriété Π contient un sous-ensemble parfait).

Tout complémentaire analytique et, plus généralement, tout ensemble P_2 étant une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B (n° 24), il résulte tout de suite du théorème de Alexandroff-Hausdorff que tout ensemble P_2 (donc aussi tout complémentaire analytique) dépourvu de sous-ensembles parfaits est de puissance $\leqq \aleph_1$. Les ensembles P_2 ne peuvent donc avoir une puissance intermédiaire entre $\aleph_1$ et $2^{\aleph_0}$. On ne connaît pas d'énoncé analogue pour les ensembles C_2.

Or, on ne sait pas démontrer, sans faire appel à l'hypothèse du continu, l'existence des complémentaires analytiques (respectivement des ensembles P_2) de puissance $\aleph_1$. D'autre part, même en admettant l'hypothèse du continu, nous ne savons pas résoudre le problème s'il existe des complémentaires analytiques linéaires indénombrables sans sous-ensembles parfaits. Or, M. K. Gödel a signalé ([5]) que l'existence de tels ensembles est non-contradictoire avec les axiomes habituellement admis de la théorie des ensembles (si ces axiomes ne sont pas contradictoires).

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 164, 1917, p. 89, et *Fund. Math.*, t. 10, p. 25. *Voir* aussi N. Lusin, *Leçons*, p. 151 et W. Sierpinski, *Introduction to general Topologie*, Toronto, 1934, p. 158 (th. 78).

([2]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 162, 1916.

([3]) *Math. Ann.*, t. 77, p. 430.

([4]) *Fund. Math.*, t. 5, p, 166.

([5]) *Proc. Nat. Acad. of Sc.*, t. 24, p. 556.

Or, M. Lusin a nommé un ensemble C_3 linéaire, E, tel que si l'on savait nommer un point de E on saurait nommer un complémentaire analytique linéaire indénombrable et sans partie parfaite, et si l'on réussissait à démontrer que l'ensemble E est vide, on aurait démontré que de tels complémentaires analytiques n'existent pas (1).

26. Ensembles analytiques non mesurables B. — Dans le n° 8 nous avons construit un ensemble P_1 linéaire qui n'est pas un C_1. Un tel ensemble est donc analytique sans être un complémentaire analytique et par suite ne peut pas être mesurable B (tout ensemble mesurable B étant analytique et tout complémentaire d'un ensemble mesurable B étant mesurable B).

Il existe donc des ensembles analytiques linéaires non mesurables B et nous savons définir effectivement un tel ensemble, soit E. La fonction caractéristique $f(x)$ de cet ensemble E est non mesurable B, puisque l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=1]=\mathrm{E}$ est non mesurable B. Elle est donc non représentable analytiquement, c'est-à-dire ne rentre pas dans la classification de Baire. Elle satisfait cependant à la condition de Baire, c'est-à-dire elle est continue sur tout ensemble parfait quand on néglige un ensemble de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait, puisque l'ensemble E, en tant que analytique, jouit de la propriété de Baire (n° 24).

Donc, *on sait définir effectivement une fonction non représentable analytiquement satisfaisant à la condition de Baire* (2), ce qui résout un problème posé par M. H. Lebesgue et regardé par lui comme difficile.

Quant à l'existence des fonctions non représentables analytiquement satisfaisant à la condition de Baire, elle a été démontrée en 1914 par M. Lusin à l'aide de l'hypothèse du continu (3) et ensuite en 1917 sans faire appel à cette hypothèse, mais à l'aide de l'axiome de choix (4).

---

(1) N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 10, p. 92 et *Leçons*, p. 296; *cf.* aussi la Note de N. Lusin dans les *C. R. Acad. Sc.*, t. 131, 1925, p. 280.

(2) *Voir* N. Lusin et W. Sierpinski, *Journ. Math.*, 7e série, t. II, 1923, p. 53.

(3) *C. R. Acad. Sc.*, t. 158, 1914, p. 1259.

(4) *Fund. Math.*, t. 2, p. 157.

En ce qui concerne l'existence des fonctions non représentables analytiquement (d'une variable réelle), elle résulte tout de suite du fait que l'ensemble de toutes les fonctions rentrant dans la classification de R. Baire a une puissance inférieure à celle de l'ensemble de toutes les fonctions d'une variable réelle (ce qu'on démontre à l'aide de nombres transfinis et d'axiome du choix). Le premier exemple effectif d'une fonction non représentable analytiquement a été donné en 1905 par M. H. Lebesgue [1] à l'aide de nombres transfinis. En 1924 j'ai donné un exemple effectif d'une fonction non représentable analytiquement sans faire appel aux nombres transfinis et à la théorie des ensembles analytiques et sans utiliser les opérations d'addition et de multiplication à partir d'une infinité non dénombrable d'ensembles ni dans la construction ni dans la démonstration [2].

27. **Théorème de Souslin.** — Soient E et E_1 deux ensembles analytiques, noyaux de systèmes déterminants formés de segments (respectivement rectangles, etc.). On a donc la formule (22) du n° 24 et une formule analogue $E_1 = \prod_{\alpha<\Omega} S_1^\alpha$. Or, on démontre que si $EE_1 = 0$, il existe des nombres ordinaux $\mu < \Omega$ et $\nu < \Omega$, tels que $S^\mu S_1^\nu = 0$ [3]. Comme $E \subset S^\mu$ et $E_1 \subset S_1^\nu$ et comme les ensembles S^μ et S_1^ν sont mesurables B, on en conclut que *deux ensembles analytiques disjoints sont séparables* B, c'est-à-dire peuvent être enfermés dans deux ensembles disjoints mesurables B. C'est le *premier principe* des ensembles analytiques de M. Lusin [4]. La démonstration mentionnée fait usage de nombres transfinis; M. Lusin en a donné aussi une autre, sans utiliser les nombres transfinis [5].

Le théorème en question est une conséquence d'une proposition de la théorie générale des ensembles [6]; il résulte aussi du théorème

---

(1) *Journ. Math.*, 6e série, t. I.

(2) *Fund. Math.*, t. 5, p. 87.

(3) *Voir* par exemple, N. Lusin et W. Sierpinski, *Journ. Math.*, 7e série, t. II, 1923, p. 58-60.

(4) N. Lusin, *Leçons*, p. 156.

(5) *Loc. cit.*, p. 157; *voir* aussi mon livre, *Introduction to general Topology*, p. 159.

(6) *Voir*, W. Sierpinski, *Fund Math.*, t. 25, p. 29 et 21, p. 265; *cf.* aussi S. Steckel, *Ann. Soc. Polon. Math.*, t. 7, 1929, p. 269.

de réduction (pour les ensembles C_1) de M. Kuratowski (*voir* n° 14).

Soit maintenant E un ensemble analytique dont le complémentaire $E_1 = CE$ est aussi analytique. D'après le premier principe de M. Lusin il existe donc deux ensembles mesurables B, M et N tels que $E \subset M$, $CE \subset N$ et $MN = 0$, ce qui donne tout de suite $E = M$ et prouve que l'ensemble E est mesurable B. On a ainsi ce

THÉORÈME DE SOUSLIN (1). — *Pour qu'un ensemble soit mesurable* B, *il faut et il suffit qu'il soit analytique en même temps que son complémentaire.*

En d'autres termes, les ensembles mesurables B coïncident avec les ensembles projectifs B_1 [c'est-à-dire qui sont à la fois P_1 et C_1 (*cf.* n° 4)].

28. Théorème d'unicité de N. Lusin. — Un système déterminant $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ est dit *système d'unicité*, si m_1, m_2, ... et n_1, n_2, ... étant deux suites infinies distinctes (au moins dans un terme) de nombres naturels, on a toujours

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{m_1, m_2, \ldots, m_k} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = 0.$$

Φ étant une famille donnée d'ensembles, désignons par Φ_U la famille de tous les ensembles qui sont noyaux de systèmes d'unicités $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formés d'ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ de la famille Φ. On a évidemment $\Phi_U \subset \Phi_A$. On démontre qu'on a pour toute famille Φ d'ensembles

$$(\Phi_U)_U = \Phi_U.$$

La démonstration de cette égalité est tout à fait analogue à celle de l'égalité (7) du n° 18 : il faut seulement supposer que les systèmes déterminants considérés sont des systèmes d'unicité (2).

Φ étant une famille quelconque d'ensembles, désignons par Φ_{B^*} la plus petite famille F d'ensembles satisfaisant aux trois conditions suivantes : 1° $\Phi \subset F$; 2° une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles *disjoints* de F appartient à F; 3° $F_\delta \subset F$.

(1) M. SOUSLIN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 164, 1917, p. 89; aussi N. LUSIN et W. SIERPINSKI, *Bull. Acad. Cracovie*, 1918, p. 42.

(2) *Voir* W. SIERPINSKI, *Fund. Math.*, t. 21, p. 255 (th. III).

On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait pour une famille Φ d'ensembles $\Phi_{B^*} \subset \Phi_U$ est l'inclusion $\Phi \subset \Phi_U$ (1).

Si la famille Φ d'ensembles est telle que, $E_1, E_2, \ldots$ étant une suite infinie quelconque d'ensembles de Φ, les inégalités $E_1 E_2 \ldots E_n \neq 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$ entraînent $E_1 E_2 E \ldots \neq 0$ (2), et si $\Phi_\rho \subset \Phi_{B^*}$ et $\Phi \subset \Phi_U$, on a

$$\Phi_U = \Phi_{B^*} \quad (3), \tag{26}$$

Ces conditions sont, comme on voit sans peine, remplies, si Φ est la famille de segments (respectivement rectangles, etc.) et l'on a alors $\Phi_{B^*} = \Phi_B$. La formule (26) donne alors ce

Théorème d'unicité de N. Lusin (4). — *Pour qu'un ensemble linéaire (respectivement plan, etc.) soit mesurable* B, *il faut et il suffit qu'il soit noyau d'un système d'unicité formé de segments (respectivement rectangles, etc.).*

On en déduit la proposition suivante :

Pour qu'un ensemble linéaire (respectivement plan, etc.) soit mesurable B, ***il faut et il suffit qu'il soit une somme de deux ensembles, dont l'un est au plus dénombrable et l'autre est un ensemble vide ou une image biunivoque et continue (dans un sens) de l'ensemble de tous les nombres irrationnels*** (5).

Il en résulte sans peine que, parmi les ensembles linéaires mesurables B existe un, soit E, tel que tout ensemble indénombrable mesurable B linéaire (respectivement plan, etc.) est une image biunivoque et continue (dans un sens) de cet ensemble E : c'est notamment l'ensemble E formé de tous les nombres naturels et de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$ (6).

Or, on démontre que pour qu'un ensemble linéaire soit une image biunivoque et continue (dans un sens) de l'ensemble de tous les

(1) *Loc. cit.*, p. 262 (th. IV).

(2) Pour les familles Φ d'ensembles fermés compacts d'un espace métrique cette condition équivaut au *Durchschnittsatz* de G. Cantor.

(3) *Loc. cit.*, p. 271 (th. VIII).

(4) *C. R. Acad. Sc.*, t. 164, 1917, p. 90; *cf.* aussi F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1935, p. 185 (II) et p. 192 (IV).

(5) W. Sierpiński, *Fund. Math.*, t. 3, p. 30; N. Lusin, *Leçons*, p. 39.

(6) W. Sierpiński, *Fund. Math.*, t. 26, p. 49.

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

nombres irrationnels, il faut et il suffit qu'il soit un ensemble mesurable B condensé ([1]).

Une conséquence du théorème d'unicité est que *toute image biunivoque et continue* (*dans un sens*) (donc, en particulier, la projection biunivoque) *d'un ensemble* B *mesurable est un ensemble mesurable* B. Plus généralement, toute transformation d'un ensemble mesurable B à l'aide d'une fonction de Baire à valeurs distinctes donne un ensemble mesurable B ([2]).

29. **Les classes des fonctions et de leurs images géométriques.** — $f(x)$ étant une fonction d'une variable réelle, désignons par $J(f)$ son image géométrique, c'est-à-dire l'ensemble plan

$$J(f) = \underset{x,y}{E}[y = f(x)].$$

Il se pose d'une façon naturelle le problème, quel est le rapport entre la classe de la fonction f et celle de l'ensemble $J(f)$. [Les fonctions continues étant, par définition, de classe zéro, on définit par l'induction transfinie, les fonctions de classe $\leqq \alpha$ (où $\alpha < \Omega$) comme limites de fonctions de classes $< \alpha$].

On démontre sans peine que si la fonction $f(x)$ est continue, l'ensemble $J(f)$ est fermé. La réciproque n'est pas vraie : soit, en effet, $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$; l'ensemble $J(f)$ est ici fermé [composé de l'hyperbole $xy = 1$ et du point $(0, 0)$] et cependant la fonction $f(x)$ est discontinue (au point zéro). Or, on voit sans peine que pour que la fonction $f(x)$ soit continue, il faut et il suffit que pour tous les nombres réels a et $b \geqq a$ la partie de $J(f)$ contenue dans la bande $a \leqq x \leqq b$ soit un ensemble fermé et borné. Cette condition peut être remplacée par celle que $J(f)$ soit fermé et connexe (c'est-à-dire soit un continu). La connexité seule de l'ensemble $J(f)$ ne suffit pas pour que la fonction $f(x)$ soit continue : il existe des fonctions discontinues dont l'image géométrique est connexe ([3]).

([1]) W. Sierpinski, *Mathematica*, t. 2, p. 18.

([2]) N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 10, p. 60.

([3]) *Voir* C. Kuratowski et W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 3, p. 306, où l'on donne un exemple d'une fonction de classe 1 dont l'image géométrique est un ensemble

On démontre sans peine que si l'image géométrique $J(f)$ d'une fonction $f(x)$ est un ensemble F_σ, $f(x)$ est une fonction de classe $\leqq 1$. La réciproque n'est pas vraie. Or, si $f(x)$ est de classe $\leqq 1$, l'ensemble $J(f)$ est un G_δ. C'est un cas particulier du théorème suivant : *Si $f(x)$ est de classe $\leqq \alpha$, $J(f)$ est un ensemble de classe multiplicative $\leqq \alpha$* (1). D'autre part il existe des fonctions $f(x)$ de classe de Baire quelconque dont les images $J(f)$ sont des ensembles G_δ. Cela résulte sans peine du fait que, α étant un nombre ordinal quelconque $< \Omega$, il existe une fonction $\varphi(y)$ de classe $\geqq \alpha$ inverse d'une fonction $f(x)$ de classe $\leqq 1$ (2).

Or, on démontre que *pour que $f(x)$ soit une fonction de Baire, il faut et il suffit que son image géométrique $J(f)$ soit un ensemble mesurable* B (3).

On peut y remplacer les mots *mesurable* B par *analytique* (4). Il en résulte tout de suite que si $y = f(x)$ est une fonction de Baire qui prend chaque valeur réelle une et une seule fois, sa fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ est aussi une fonction de Baire [puisque les ensembles $J(f)$ et $J(f^{-1})$ sont superposables]. On ne peut cependant rien conclure sur la classe de la fonction $f^{-1}(y)$, lorsqu'on sait que la fonction $f(x)$ est de classe $\alpha \geqq 1$.

Dans le cas où $f(x)$ est une fonction de Baire quelconque à valeurs distinctes, l'ensemble E de toutes les valeurs de $f(x)$ pour x réels, c'est-à-dire le domaine d'existence de la fonction $f^{-1}(y)$, en tant qu'une image biunivoque de Baire de la droite, est un ensemble mesurable B (*voir* la fin du n° 28) et l'on démontre que $f^{-1}(y)$ est une fonction de Baire définie sur E (5).

---

connexe et ponctiforme. Un exemple d'une fonction de classe 2 dont l'image géométrique est connexe ponctiforme et dense dans une portion du plan a été donné par M. VIETORIS (*Monatshefte f. Math. u Phys.* t., 31, p. 202), c'est la fonction

$$f(x) = \limsup \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \qquad \text{où} \quad x = (0, a_1 a_2 \ldots)_2.$$

(1) *Voir* W. SIERPINSKI, *Fund Math.*, t. 2, p. 78; pour les espaces métriques séparable, *voir* C. KURATOWSKI, *Topologie*, t. I, p. 183. Une généralisation aux espaces métriques quelconque a été donnée par M. D. MONTGOMERY, *Fund. Math.*, t. 25, p. 532; *voir* aussi C. KURATOWSKI, *Fund. Math.*, t. 25, p. 541.

(2) *Voir* W. SIERPINSKI, *Fund. Math.*, t. 3, p. 26.

(3) W. SIERPINSKI, *Fund. Math.*, t. 2, p. 78 (th. III).

(4) *Ibid.*, p. 79 (th. IV).

(5) N. LUSIN, *Fund. Math.*, t. 10, p. 63 et *Leçons*, Chapitre IV.

M. Lusin a étudié des fonctions $f(x)$ dont les images $J(f)$ sont des complémentaires analytiques [1]. On ne sait pas si toutes ces fonctions sont mesurables L et si elles jouissent de la propriété de Baire. En résolvant un problème posé par M. Lusin [2], M. K. Kunugi a défini deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ d'une variable réelle, dont les images $J(f_1)$ et $J(f_2)$ sont des complémentaires analytiques, telles que $f_1(x) < f_2(x)$ pour x réels et qu'il n'existe aucun ensemble E mesurable B situé entre $J(f_1)$ et $J(f_2)$ [c'est-à-dire au-dessus de $J(f_1)$ et au-dessous de $J(f_2)$] et qui soit coupé par chaque droite parallèle à l'axe OY au moins en un point [3].

On ne sait pas s'il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle dont l'image géométrique soit un complémentaire analytique (plan) dépourvu de partie parfaite. Si une telle fonction $f(x)$ existe, l'hypothèse du continu est vraie (puisqu'un complémentaire analytique sans partie parfaite est de puissance $\aleph_1$, *voir* n° 25) [4] et il existe un ensemble plan B_2 non mesurable L (*cf.* n° 14).

En allant plus loin, on peut étudier les fonctions $f(x)$ dont les images $J(f)$ sont des ensembles P_2. On démontre sans peine que dans ce cas $J(f)$ est un ensemble B_2. La démonstration s'appuie sur la formule évidente

$$CJ(f) = \underset{x,y}{\mathbf{E}}[f(x) < y] + \underset{x,y}{\mathbf{E}}[f(x) > y]$$

et sur le fait que si l'ensemble $\underset{x,y}{\mathbf{E}}[f(x) = y]$ est un P_2, les ensembles $\underset{x,y}{\mathbf{E}}[f(x) < y]$ et $\underset{x,y}{\mathbf{E}}[f(x) > y]$ le sont aussi.

Une fonction d'une variable réelle $f(x)$ est caractérisée non seulement par l'ensemble plan $J(f)$, mais aussi par chacun des ensembles plans

$$(27) \qquad J_i(f) = \underset{x,y}{\mathbf{E}}[y < f(x)] \qquad \text{et} \qquad J_s(f) = \underset{x,y}{\mathbf{E}}[y > f(x)].$$

Pour que la fonction $f(x)$ soit de classe $\leqq \alpha$, il faut et il suffit que chacun des ensembles (27) soit de classe additive $\leqq \alpha$ [5].

---

(1) *Mathematica*, t. 10, p. 71-80.

(2) *Loc. cit.*, p. 80.

(3) *Voir* M. Kondô, *Proc. Imp. Acad. Tokyô*, t. 12, 1936, p. 311, renvoi (2).

(4) N. Lusin, *Leçons*, p. 287.

(5) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 2, p. 79-80 (th. V).

Pour que $f(x)$ soit une fonction de Baire, il faut et il suffit que chacun de deux ensembles (27) soit analytique [1]. Or, l'analycité d'un des ensembles (27) n'entraîne pas que $f(x)$ est une fonction de Baire (comme le montre l'exemple d'une fonction caractéristique d'un ensemble analytique non mesurable B) [2].

30. Uniformisation des ensembles plans. — On dit, d'après M. Lusin, qu'un ensemble plan E est *uniformisé* au moyen de l'ensemble $H \subset E$, si toute parallèle à l'axe OY qui rencontre E, rencontre H en un et un seul point.

Tout ensemble fermé plan peut être uniformisé au moyen d'un ensemble G_δ [3]. Or, il existe un ensemble fermé plan qui a sur toute droite parallèle à l'axe OY au plus deux points et qui n'est pas uniformisable au moyen d'un ensemble F_σ. [Telle est la fermeture de l'image géométrique de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathrm{E}\, n x,$$

où $\mathrm{E}\, t$ désigne l'entier le plus grand $\leqq t$ [4]]. Or, si F est un ensemble fermé plan, tel que toute droite parallèle à l'axe OY ou bien n'a aucun point commun avec F, ou bien a précisément deux points communs avec F, F peut être uniformisé au moyen d'un ensemble qui est à la fois F_σ et G_δ [5].

Tout ensemble F_σ plan peut être uniformisé au moyen d'un ensemble qui est à la fois $F_{\sigma\delta}$ et $G_{\delta\sigma}$, et il existe un ensemble F_σ plan qui n'est pas uniformisable ni au moyen d'un F_σ ni au moyen d'un G_δ.

Il existe des ensembles G_δ plans qui ne sont pas uniformisables au moyen d'un ensemble analytique : tels sont les ensembles G_δ plans dont la projection sur l'axe OX n'est pas mesurable B [6]. M. Lusin

---

(1) N. Lusin, *Mathematica*, t. 10, p. 73 (th. IV).
(2) *Ibid.*, p. 72.
(3) S. Braun, *Fund. Math.*, t. 28, p. 214.
(4) *Ibid.*, p. 217.
(5) W. Sierpinski, *Mathematica*, t. 4, p. 178-179.
(6) Voir *Fund. Math.*, t. 16, p. 138.

a démontré que tout ensemble plan mesurable B peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique ([1]). M. M. Kondô a démontré qu'on y peut remplacer les ensembles mesurables B par les complémentaires analytiques ([2]). Il en déduit que tout ensemble plan P_2 peut être uniformisé au moyen d'un ensemble P_2 ([3]) et que tout ensemble plan B_2 peut être uniformisé au moyen d'un ensemble B_2 ([4]). Une conséquence immédiate du théorème de M. Kondô est que tout ensemble P_2 linéaire est une projection biunivoque d'un complémentaire analytique plan ([5]). Ce résultat comprend comme cas particuliers, ceux de S. Mazurkiewicz (pour les ensembles P_1 ([6]) et de W. Sierpinski. Une autre conséquence facile du théorème de M. Kondô est que le problème si tout ensemble (linéaire) P_2 indénombrable contient un sous-ensemble parfait est équivalent au problème analogue concernant les ensembles C_1. Il en est de même pour le problème d'existence des ensembles linéaires P_2 de puissance $\aleph_1$. Une autre conséquence facile du théorème de M. Kondô est que le problème si tout ensemble linéaire B_2 est mesurable ou non équivaut au problème (posé par M. Lusin) si toute fonction d'une variable réelle dont l'image géométrique est un complémentaire analytique est mesurable ou non.

On déduit aussi du théorème de M. Kondô que la famille des ensembles C_1, ainsi que la famille des ensembles P_2, satisfait au théorème de réduction généralisé ([7]) (*cf.* n° **14**). Il en résulte que la famille de tous les ensembles analytiques, ainsi que la famille de tous les ensembles C_2, satisfait aux deux théorèmes de séparation généralisés. On en déduit, en particulier, que si l'on supprime de deux complémentaires analytiques leur partie commune, on obtient des ensembles restant séparables simultanément au moyen de deux complémentaires analytiques ([8]). M. Lusin a posé le problème si

---

([1]) N. Lusin, *Mathematica*, t. 4, p. 59; aussi W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 16, p. 136.

([2]) *Jap. Journ. Math.*, t. 15, 1939, p. 198.

([3]) *Loc. cit.*, p. 229.

([4]) *Loc. cit.*, p. 230.

([5]) *Loc. cit.*, p. 223.

([6]) *Fund. Math.*, t. 10, p. 172.

([7]) *Voir* W. Sierpinski, note à paraître dans les *C. R. Soc. Sci. Varsovie*, 42, 1949.

([8]) N. Lusin, *Leçons*, p. 217.

l'on a une proposition analogue pour la séparabilité multiple [1]. On a ici le théorème suivant :

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ *étant un nombre fini quelconque des complémentaires analytiques situés dans un espace complet et séparable, il existe dans cet espace n complémentaires analytiques* $H_1, H_2, \ldots, H_n$, *tels que* $H_1 H_2 \ldots H_n = 0$ *et que* $E_k - E_1 E_2 \ldots E_n \subset H_k$ *pour* $k = 1, 2, \ldots, n$ [2]. *Or, le problème reste ouvert si,* $E_1, E_2, \ldots$ *étant une suite infinie des complémentaires analytiques (linéaires), il existe toujours une suite infinie* $H_1, H_2, \ldots$ *des complémentaires analytiques, tels que* $H_1 H_2 H_3 \ldots = 0$ *et* $E_k - E_1 E_2 E_3 \ldots \subset H_k$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$.

Les ensembles plans analytiques, en tant qu'ensembles B_2, peuvent être, d'après le théorème de M. Kondô, uniformisés au moyen d'ensembles B_2. Or, il existe des ensembles plans analytiques qui ne sont pas uniformisables ni au moyen d'un ensemble analytique ni au moyen d'un complémentaire analytique. Tel est par exemple l'ensemble plan $E = E_1 + E_2$, où E_1 est un ensemble analytique non mesurable B situé sur la partie négative de l'axe d'abscisses et E_2 est un ensemble plan mesurable B dont la projection sur l'axe OX est un ensemble non mesurable B situé sur la partie positive de l'axe OX.

Mlle Braun a démontré [3] qu'il existe une fonction $f(x)$ semi-continue supérieurement, dont l'ensemble des valeurs coïncide avec l'ensemble de tous les nombres réels, telle que l'ensemble $\underset{x,y}{E}[x = f(y)]$ n'est pas uniformisable au moyen d'un ensemble analytique. En posant $F(x, y) = f(y) - x$ on obtient une fonction semi-continue supérieurement de deux variables réelles, telle qu'il existe pour tout x réel des nombres réels y vérifiant l'équation $F(x, y) = 0$, mais qu'il n'existe aucune fonction de Baire $\varphi(x)$, telle qu'on ait $F[x, \varphi(x)] = 0$ pour tout x réel [puisqu'alors l'ensemble

(1) *C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 1934, p. 283.
(2) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 36, p. 44.
(3) *Fund. Math.*, t. 28, p. 301.

$\underset{x,y}{\mathrm{E}}[y=\varphi(x)]$ serait un uniformisateur mesurable B de l'ensemble $\underset{y,x}{\mathrm{E}}[x=f(y)]\Big]$ (1).

31. Opération du crible. — Soit R l'ensemble de tous les nombres rationnels r, tels que $0<r<1$. Φ étant une famille donnée d'ensembles, désignons par Φ_{K} la famille de tous les ensembles

$$\mathrm{E}=\sum^{\star}\mathrm{E}_{r'}\mathrm{E}_{r''}\mathrm{E}_{r'''}\ldots,$$

où la sommation $\sum^{\star}$ s'étend à toutes les suites infinies décroissantes $r'>r''>\ldots$ de nombres de R, et où $\mathrm{E}_r\in\Phi$ pour $r\in\mathrm{R}$.

L'opération K est dite celle du *crible* de M. Lusin (2). On démontre qu'on a, pour toute famille Φ d'ensembles

$$\Phi_{\mathrm{K}}\subset\Phi_{\mathrm{A}} \quad (3)$$

et, si Φ est une famille (simplement) multiplicative, on a

$$\Phi_{\mathrm{K}}=\Phi_{\mathrm{A}} \quad (4)$$

et

$$\Phi_{\mathrm{KK}}=\Phi_{\mathrm{K}};$$

or, ces formules ne subsistent pas pour les familles quelconques d'ensembles (5).

Dans le cas où Φ est une famille d'ensembles de R_m, on peut donner à l'opération du crible une forme géométrique, ce que nous ferons ici pour $m=1$ (6).

Soit $\mathrm{R}=(r_1, r_2, \ldots)$ et soit $\{\mathrm{E}_r\}_{r\in\mathrm{R}}$ un système d'ensembles linéaires. Soit

$$\mathrm{K}_0=\sum_{r\in\mathrm{R}}\underset{x,y}{\mathrm{E}}[x\in\mathrm{E}_r,\ y=r], \tag{28}$$

(1) *Cf.* P. Novikoff, *Fund. Math.*, t. 17, p. 16 et Lusin, *C. R. Acad. Sc.*, t. 189, 1929, p. 424.

(2) *Cf.* N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 10, p. 9-10; N. Lusin et W. Sierpinski, *Journ. Math.*, 7e série, t. II, 1923, p. 54-55.

(3) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 11, p. 17.

(4) *Loc. cit.*, p. 18.

(5) *Voir* W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 34, p. 71.

(6) *Cf.* N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 10, p. 3-4 et *Leçons*, p. 178-179.

ce sera un ensemble plan dont tous les points ont des ordonnées rationnelles (appartenant à R).

Appelons *ensemble criblé au moyen du crible* K_0 l'ensemble E de tous les points a de l'axe OX pour lesquels la perpendiculaire élevée en ce point a à l'axe OX coupe le crible K_0 en un ensemble (non vide) qui n'est pas bien ordonné d'après la grandeur (croissante) des ordonnées de ses points.

On voit sans peine que lorsque $\{E_r\}_{r\in R}$ parcourt tous les systèmes d'ensembles de la famille Φ, E parcourt tous les ensembles de la famille Φ_K.

Crible binaire de M. Lebesgue (1). — Soit, en particulier, $\{E_r\}_{r\in R}$ le système d'ensembles linéaires définis comme il suit : n étant un nombre naturel donné, divisons l'intervalle (0, 1) en 2^n intervalles égaux et numérotons-les au moyen des nombres 1, 2, 3, ..., 2^n de gauche à droite. Supprimons maintenant les intervalles ayant les numéros impairs; l'ensemble des points restants est formé de tous les points de segments équidistants fermés en nombre 2^{n-1}, dont chacun est de longueur $1:2^n$: ce sera, par définition, l'ensemble E_{r_n}. Le crible (28) correspondant est dit *crible canonique* de M. H. Lebesgue.

Soit E l'ensemble criblé au moyen de ce crible canonique et soit x un point de l'ensemble CE. La perpendiculaire élevée en ce point x à l'axe OX coupe donc le crible canonique en un ensemble (évidemment au plus dénombrable) de points qui est bien ordonné d'après la grandeur (croissante) d'ordonnées de ses points (ou vide) : soit $\mu(x)$ le type d'ordre de cet ensemble : ce sera donc un nombre ordinal $< \Omega$.

Désignons par E l'ensemble de tous les points x de l'axe OX pour lesquels $\mu(x) = \alpha$: nous aurons donc

$$\text{(29)} \qquad CE = \sum_{\alpha<\Omega} E^\alpha.$$

On démontre que l'ensemble E est analytique non mesurable B (2)

(1) N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 10, p. 3; *cf.* H. Lebesgue, *Journ. Math.*, 1905, p. 213, lignes 25-32 et p. 214, lignes 1-17.

(2) Pour une simple démonstration, *voir* C. Kuratowski, *Fund. Math.*, t. 29, p. 57.

et que la formule (29) n'est autre chose que la décomposition du complémentaire analytique CE en constituantes disjointes [*cf.* n° **24**, formule (25)]. On démontre que ces constituantes sont toutes non vides.

Quant à l'ensemble E lui-même, on peut le décomposer en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints suivant les types d'ordre $\mu(x)$ d'ensembles (non bien ordonnés) d'ordonnées de points en lesquels la perpendiculaire élevée au point x à l'axe OX coupe le crible canonique. Ces ensembles ont été étudiés par M. Hartman [1] et par M. Kunugui : ce dernier a démontré qu'ils sont tous mesurables B [2].

Crible normal. — Un ensemble plan est dit *crible normal* (plan) de M. Lusin s'il est une somme d'une infinité dénombrable de segments parallèles à l'axe OX et dont les extrémités ont des coordonnées rationnelles [3]. Pareillement on dit qu'un ensemble situé dans R_3 est un crible normal à 3 dimensions, s'il est une somme d'une infinité dénombrable de rectangles, dont les côtés sont parallèles aux axes OX et OY et dont les sommets ont des coordonnées rationnelles.

On démontre qu'il existe un *crible normal universel* à 3 dimensions, U, tel que, quel que soit le crible normal plan K, il existe un nombre réel c, tel que l'intersection de l'ensemble U par le plan $y = c$ est le crible K [4].

M. N. Lusin a utilisé le crible normal universel à la construction d'un complémentaire analytique plan, tel que les classes de ses constituantes tendent vers Ω [5].

On démontre que la famille de tous les ensembles criblés au moyen des cribles normaux plans coïncide avec celle de tous les ensembles analytiques linéaires.

32. Opération du crible généralisé. — Soit E un ensemble plan donné et soit π une propriété donnée dont les ensembles linéaires peuvent jouir ou ne pas jouir. Désignons par $\Gamma_\pi(E)$ l'ensemble

---

(1) *Fund. Math.*, t. 29, p. 209-214.
(2) *Journ. Fac. Sc. Hokkaido*, série I, vol. 8, 1939, p. 12 (th. 9).
(3) *Cf.* N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 10, p. 9-20.
(4) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 17, p. 1.
(5) N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 17, p. 5.

de tous les nombres réels a, tels que l'ensemble (linéaire) de tous les points communs à E et à la droite $x = a$ jouit de la propriété π. Φ étant une famille donnée d'ensembles plans, désignons par Φ_{Γ_π} la famille de tous les ensembles $\Gamma_\pi(E)$, où $E \in \Phi$. L'opération Γ_π est celle du *crible généralisé* (dépendant d'une propriété donnée π d'ensembles linéaires).

En particulier, si π est la propriété d'être un ensemble non vide, l'opération Γ_π coïncide avec celle de projection. On peut donc regarder l'opération du crible généralisé comme une généralisation de l'opération de la projection.

Si π est la propriété d'être une droite (parallèle à l'axe OY), on a évidemment $\Gamma_\pi(E) = CPC(E)$.

33. **Cribles fermés.** — Soit, en particulier, Φ la famille de tous les ensembles fermés plans. On a ici les résultats suivants :

Si π est la propriété d'être un ensemble formé d'un seul élément, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles $F_{\sigma\rho}$ linéaires (1).

Si π est la propriété d'être un ensemble contenant plus qu'un élément, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles F_σ linéaires (2).

Si π est la propriété d'être un ensemble infini, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles $F_{\sigma\delta}$ linéaires (3).

Si π est la propriété d'être un ensemble indénombrable, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires analytiques (4).

Si π est la propriété d'être un ensemble qui n'est pas bien ordonné d'après la grandeur des ordonnées de ses points, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires analytiques (5).

Si π est la propriété de contenir (au moins) un point à l'ordonnée irrationnelle, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires analytiques (6). Voici comment on démontre cette dernière proposition.

---

(1) W. Sierpinski, *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, t. 22, 1929, p. 1.

(2) W. Sierpinski, *Mathematica*, t. 5, p. 51.

(3) *Fund. Math.*, t. 6, p. 163.

(4) S. Mazurkiewicz et W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 6, p. 163 et 166; aussi C. Kuratowski, *Fund. Math.*, t. 17, p. 261.

(5) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 17, p. 77.

(6) C. Kuratowski et E. Szpilrajn, *Fund. Math.*, t. 18, p. 168.

Soit E un ensemble plan fermé donné. L'ensemble E_1 de tous les points de E à l'ordonnée irrationnelle s'obtient en retranchant de E toutes les droites $y = b$, où b est rationnel. L'ensemble-somme S de ces droites est un F_σ, donc l'ensemble $E_1 = E - S$ est un G_δ et l'ensemble $\Gamma_\pi(E)$ est évidemment la projection de E_1 sur l'axe OX : c'est donc un ensemble analytique (n° 21).

D'autre part, soit H un ensemble analytique linéaire donné. Il existe une fonction $x = f(y)$ définie et continue dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels, telle que $f(N) = H$ (n° 21). Soit $J = \underset{x,y}{E}[y \in N, x = f(y)]$ et soit $F = \bar{J} = J + J'$ la fermeture de l'ensemble (plan) J. La fonction $f(y)$ étant continue dans N, l'ensemble $F - J$ est contenu dans la somme de toutes les droites $y = b$, où b est un nombre rationnel. Il en résulte que $\Gamma_\pi(F) = \Gamma_\pi(J)$. Or, on a évidemment $\Gamma_\pi(J) = H$. On a donc $H = \Gamma_\pi(F)$, et, F étant un ensemble plan fermé, on trouve $H \in \Phi_{\Gamma_\pi}$.

Notre proposition est ainsi démontrée.

Soit Φ la famille de tous les ensembles fermés plans

Si π est la propriété d'un ensemble d'ordonnées d'être dénombrable dont les ordonnées constituent une suite tendant vers $+\infty$, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles $G_{\delta\sigma\delta}$ linéaires (1).

Si π est la propiété (d'ensemble linéaire) d'être isolé (ou vide), la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles $G_{\delta\sigma\delta}$ linéaires (2).

Si π est la propriété d'ensembles linéaires de contenir au moins un point d'accumulation à l'intérieur de tout intervalle aux extrémités entières, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$ linéaires (3).

Ψ étant une famille donnée d'ensembles linéaires, le problème se pose s'il existe ou non une propriété π d'ensembles linéaires, telle que (en désignant toujours par Φ la famille de tous les ensembles fermés plans) on ait $\Psi = \Phi_{\Gamma_\pi}$. Voici un théorème qui fait comprendre l'importance de ce problème :

---

(1) S. Braun, *Fund. Math.*, t. 18, p. 138.
(2) Voir *Fund. Math.*, t. 18, p. 143.
(3) Voir *Fund Math.* t. 18, p. 143.

S'il existe pour la famille Ψ *d'ensembles linéaires une propriété* π, *telle que* $\Psi = \Phi_{\Gamma_\pi}$, *il existe un ensemble* E *de la famille* Ψ *dont le complémentaire n'appartient pas à* Ψ. *De plus, si la propriété* π *peut être définie effectivement, l'ensemble* E *le peut être aussi* (1).

Citons encore le théorème suivant :

Si Ψ *est une famille de puissance* $\leqq 2^{\aleph_0}$ *d'ensembles linéaires, il existe une propriété* π, *telle que* $\Psi \subset \Phi_{\Gamma_\pi}$ (2).

On démontre sans peine, pour toute propriété π d'ensembles linéaires, l'inégalité-égalité $\overline{\overline{\Phi}}_{\Gamma_\pi} \leqq 2^{\aleph_0}$. Or, on démontre que l'ensemble $\mathcal{E}$ de toutes les familles Φ_{Γ_π} (différentes), où π est une propriété quelconque d'ensembles linéaires est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, donc de même puissance que l'ensemble de toutes les familles de puissance $\leqq 2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires. Malgré ce fait il existe parmi ces dernières celles qui n'appartiennent pas à $\mathcal{E}$ (par exemple la famille de tous les ensembles linéaires mesurables B) (3).

34. Cribles fermés et les fonctions analytiques d'une suite infinie d'ensembles. — Une fonctions $f(E_1, E_2, \ldots)$ faisant correspondre à toute suite infinie d'ensembles linéaires $E_1, E_2, \ldots$ un ensemble linéaire est dite, d'après MM. Kantorovitch et Livenson (4) *fonction analytique*, si $E_1, E_2, \ldots$ et $H_1, H_2, \ldots$ étant deux suites infinies d'ensembles linéaires et a et b deux nombres réels, tels que $a \in f(E_1, E_2, \ldots)$ et b non $\in f(H_1, H_2, \ldots)$, il existe toujours au moins un nombre naturel k, tel qu'on a ou bien $a \in E_k$ et b non $\in H_k$, ou bien a non $\in E_k$ et $b \in H_k$.

F désignant la famille de tous les ensembles fermés linéaires et f étant une fonction analytique d'une suite infinie d'ensembles linéaires, désignons par F_f la famille de tous les ensembles $f(E_1, E_2, \ldots)$, où $E_n \in F$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Ceci posé, on a les théorèmes suivants (5) :

---

(1) W. Sierpinski, *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, t. 24, p. 59.
(2) *Loc. cit.*, p. 69.
(3) *Loc. cit.*, p. 60.
(4) *Fund. Math.*, 18, p. 224-225.
(5) W. Sierpinski, *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, Cl. III, t. 41, séance du 25 juin 1948; *Cf.* M. Kondô, *Journ. Fac. Sc. Hokkaido*, série 1, t. 7, 1938, p. 10 (th. 4).

Quelle que soit la fonction analytique f d'une suite infinie d'ensembles linéaires, il existe une propriété π d'ensembles linéaires, telle que $\Phi_{\Gamma_\pi} = F_f$.

Quelle que soit la propriété π d'ensembles linéaires, il existe une fonction analytique f d'une suite infinie d'ensembles linéaires, telle que $F_f = \Phi_{\Gamma_\pi}$.

Il résulte de ces théorèmes que toute famille d'ensembles linéaires qui peut être obtenue par l'opération du crible généralisé en partant des ensembles fermés plans peut être aussi obtenue au moyen d'une fonction analytique d'une suite infinie d'ensembles linéaires fermés et inversement.

35. **Cribles fermés dans les espaces métriques.** — L'opération du crible peut être encore généralisée si l'on remplace le plan par le produit cartésien (combinatorique) $X \times Y$ de deux ensembles X et Y donnés quelconques [$X \times Y$ désigne ici l'ensemble de tous les systèmes (x, y), où $x \in X$ et $y \in Y$].

Supposons que les ensembles X et Y sont des espaces métriques indénombrables et que X est complet et séparable et Y compact. Dans ce cas désignons par 2^Y l'espace des ensembles fermés, non vides, contenus dans Y, métrisé selon M. Hausdorff (1).

Au lieu de considérer une propriété π de sous-ensembles de Y, on peut [comme le font MM. Kuratowski et Szpilrajn (2)] envisager une famille $\mathbf{K}$ de sous-ensembles de Y (la famille de tous les sous-ensembles de Y qui jouissent de la propriété π).

E étant un ensemble contenu dans $X \times Y$, désignons par $\Gamma(E, \mathbf{K})$ l'ensemble de tous les éléments a de X, tels que $\underset{y}{E}[(a, y) \in E] \in \mathbf{K}$.

Φ étant une famille de sous-ensembles de $X \times Y$, désignons par $\Phi_{\mathbf{K}}$ la famille de tous les ensembles $\Gamma(E, \mathbf{K})$, où $E \in \Phi$.

MM. Kuratowski et Szpilrajn ont démontré ce théorème (3) :

Soit Φ la famille de tous les sous-ensembles fermés de l'espace

---

(1) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1935, p. 146.
(2) *Fund. Math.*, t. 18, p. 161-169.
(3) *Loc. cit.*, p. 165 (th. 5).

$X \times Y$. *Pour que la famille* $\Phi_{\mathbf{K}}$ *soit contenue dans la famille des ensembles boréliens, respectivement analytiques dans* X, *il faut et il suffit que* $\mathbf{K}$ *constitue un ensemble borélien, respectivement analytique dans* 2^Y.

Ces auteurs ont déduit de ce théorème la proposition suivante :

La famille de tous les ensembles fermés indénombrables contenus dans l'intervalle $I = (0 \leq x \leq 1)$, *la famille de tous les ensembles fermés contenus dans* I *dans lesquels la relation* $<$ *n'établit pas un bon ordre et la famille de tous les ensembles fermés contenus dans* I *et contenant des points irrationnels constituent chacune dans* 2^I *un ensemble analytique non borélien* (1).

On voit ainsi que dans l'espace des ensembles fermés il y a des ensembles (familles d'ensembles fermés) non-boréliens qui se présentent d'une façon tout à fait naturelle (2).

36. **Cribles boréliens et analytiques.** — Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les cribles fermés. Passons maintenant aux autres cribles.

Soit Φ la famille de tous les ensembles plans mesurables B.

Si π est la propriété d'un ensemble d'être formé d'un seul point, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les complémentaires analytiques linéaires. C'est le théorème de M. Lusin *sur la projection de l'ensemble d'unicité* (3).

Si π est la propriété d'un ensemble d'être (exactement) dénombrable, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les complémentaires analytiques linéaires (4). Il en est de même (pour $(n = 1, 2, \ldots)$ pour la famille $\Phi_{\Gamma_{\pi_n}}$, où π_n est la propriété d'être un ensemble au plus dénombrable contenant au moins n éléments, ainsi que pour la

(1) *Loc. cit.*, p. 169 (th. 10).

(2) Le premier exemple d'une telle famille d'ensembles fermés est dû à M. W. Hurewicz (*Fund. Math.*, t. 15, p. 4-17), mais sa démonstration est assez longue.

(3) M. Lusin, *Leçons*, p. 255-259; *cf.* S. Braun, *Fund. Math.*, t. 20, p. 168.

(4) S. Braun, *Fund. Math.*, t. 20, p. 172 (th. 9).

famille Φ_{Γ_π}, où π est la propriété d'être un ensemble au plus dénombrable contenant au moins un point isolé.

Si π est la propriété d'ensembles linéaires d'être fermés non vides et si E est un ensemble plan mesurable B, l'ensemble $\Gamma_\pi(E)$ est un complémentaire analytique (1). On en déduit (2) que si E est un ensemble plan mesurable B et si toute parallèle à l'axe OY coupe E en un ensemble fermé, la projection de E sur l'axe OX est mesurable B.

Si π est la propriété d'ensembles linéaires d'être un F_σ non vide, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les complémentaires analytiques linéaires.

En particulier, si toute parallèle à l'axe d'ordonnées coupe l'ensemble plan mesurable B, E, en un ensemble F_σ, la projection de E sur l'axe d'abscisses est un ensemble mesurable B (ce qui généralise certains résultats de MM. Lusin, Novikoff, Braun et Kunugui) (3).

Soit maintenant Φ la famille de tous les ensembles analytiques plans.

Si π est la propriété d'un ensemble d'être formé d'un seul élément, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles linéaires qui sont des différences de deux ensembles analytiques (4).

Si π est la propriété d'un ensemble de contenir plus qu'un élément, respectivement de contenir une infinité d'éléments, respectivement de contenir une infinité indénombrable d'éléments, la famille Φ_{Γ_π} coïncide avec celle de tous les ensembles analytiques linéaires (5). Il en est de même si π est la propriété d'un ensemble (linéaire) de n'être pas bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points (6).

---

(1) K. Kunugui, *Journ. Fac. Sc. Hokkaido*, t. 8, 1940, p. 88 (th. 11).

(2) *Loc. cit.*, p. 99 (corollaire 1); *cf.* P. Novikoff, *C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.* nouvelle série, t. 23, 1939, p. 864-865.

(3) V. Arsenin, *Sur la nature des projections de certains ensembles mesurables* B (*Bull. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. 4, 1940, p. 403-410).

(4) *Cf.* W. Sierpinski, *Mathematica*, t. 5, p. 51.

(5) *Loc. cit.*, p. 51 et 52.

(6) N. Lusin, *Leçons*, p. 180 et W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 17, p. 30.

37. Ensembles criblés de E. Sélivanowski. — La famille de tous les ensembles *criblés* (linéaires) est définie comme la plus petite famille d'ensembles contenant les intervalles et close par rapport aux opérations K (n° 31) et C (complémentation) (1).

Les ensembles criblés admettent une classification transfinie qui est définie comme il suit. Cr_0 est la famille de tous les ensembles analytiques et, pour $0 < \alpha < \Omega$, Cr_α est la famille de tous les ensembles qui n'appartiennent pas aux classes précédentes et qui s'obtiennent des ensembles de classes précédentes et de leurs complémentaires au moyen de l'opération K. On démontre que ces classes sont toutes non vides (pour $0 < \alpha < \Omega$ (2). Tout ensemble criblé ne contenant aucun sous-ensemble parfait est de puissance $\leqq \aleph_1$ (3).

E. Sélivanowski a démontré (*loc. cit.*) la mesurabilité (L) et la propriété de Baire des ensembles criblés. Les théorèmes de séparation pour les ensembles criblés ont été donnés par M. Novikoff (4) qui a aussi démontré que tout ensemble criblé linéaire est une projection biunivoque d'un complémentaire analytique (5).

M. Kuratowski a démontré que tout ensemble criblé de E. Sélivanowski est un ensemble B_2 (6), ce qui a été signalé sans démonstration par MM. Kantorovitch et Livenson (7). C'est une conséquence immédiate du théorème de M. Kuratowski, d'après lequel les classes projectives P_n et C_n, où $n \geqq 2$, sont invariantes par rapport à l'opération A (8).

38. Cribles fonctionnels. — Ces cribles ont été étudiés par

---

(1) *Cf.* E. Sélivanowski, *C. R. Acad. Sc.*, t. 184, 1927, p. 1311 et *Recueil Math. Moscou*, t. 35, 1928, p. 384 (7), et N. Lusin, *Sur quelques résultats nouveaux de la théorie descriptive des fonctions* (en russe), Rapport à la séance de mai de l'*Acad. Sc. U. R. S. S.*, 1935, p, 48.

(2) E. Sélivanowski, *loc. cit.*; N. Lusin, *loc. cit.*, p. 48; *cf.* O. Nikodym, *Fund. Math.*, t 14, p. 146 et renvoi (5).

(3) W. Sierpinski, *Fund Math.*, t. 9, p. 45.

(4) N. Lusin, *loc. cit.*, p. 53.

(5) *Voir* N. Lusin, *loc. cit.*, p. 61.

(6) *C. R. Acad. Sc.*, t. 203, 1936, p. 913.

(7) *C. R. Acad. Sc.*, t. 190, 1930, p. 1115 et *Fund. Math.*, t. 18, p. 217. *Cf.* aussi N. Lusin, *loc. cit.* p. 61.

(8) C. Kuratowski, *loc. cit.*, p. 911 et *Fund. Math.*, t. 28, p. 194. *Cf.* aussi L. Kantorovitch et E. Livenson, *C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 466.

M. D. Montgomery [1]. $f(x, y)$ étant une fonction réelle de deux variables réelles, respectivement une fonction définie pour $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$, et π étant une propriété de fonctions réelles d'une seule variable réelle, désignons par $\Gamma_\pi(f)$ l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que la fonction (d'une variable réelle) $\varphi(y) = f(x, y)$ jouit de la propriété π. En supposant que $f(x, y)$ est une fonction de Baire, M. Montgomery étudie les ensembles $\Gamma_\pi(f)$ pour diverses propriétés π. Il démontre, entre autres, les théorèmes suivants :

Si π est la propriété d'être une fonction bornée dans l'intervalle (a, b), respectivement d'être une fonction absolument continue dans (a, b), la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E *situé dans (a, b) soit un complémentaire analytique est qu'il existe une fonction de Baire $f(x, y)$ telle que* $\Gamma_\pi(f) = \mathrm{E}$ [2].

Si π est la propriété d'être une fonction non décroissante et si $f(x, y)$ est une fonction de Baire, $\Gamma_\pi(f)$ est un complémentaire analytique [3].

39. **Les ensembles analytiques et les limites topologiques d'ensembles.** — M. P. Alexandroff a démontré [4] que pour qu'un ensemble linéaire E soit analytique, il faut et il suffit qu'il existe un système déterminant $\{x_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formé de nombres réels, tel que

$$\mathrm{E} = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \left(\lim_{k=\infty} x_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \right).$$

En désignant par $\overline{\underset{k}{lt}}\,\mathrm{E}_k$, respectivement $\underline{\underset{k}{lt}}\,\mathrm{E}_k$ la limite topologique supérieure, respectivement inférieure [5] de la suite d'ensembles $\mathrm{E}_k (k = 1, 2, \ldots)$ d'un espace métrique séparable, il a démontré que, quel que soit le système déterminant $\{\mathrm{E}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ d'ensembles de cet espace, les ensembles

$$\sum_{n_1, n_2, \ldots} \overline{\underset{k}{lt}}\,\mathrm{E}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n_1, n_2, \ldots} \underline{\underset{k}{lt}}\,\mathrm{E}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

---

(1) *Amer Journ. of Math.*, t. 56, 1934, p. 569.
(2) *Loc. cit.*, p. 579 et 581 (th. 16 et 19).
(3) *Loc. cit.*, p. 584 (th. 22).
(4) *Fund. Math.*, t. 5, p. 162, renvoi (1) et t. 25, p. 562-563.
(5) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1935, p. 146-147.

sont toujours analytiques dans cet espace (c'est-à-dire sont noyaux de systèmes déterminants convenablement choisis d'ensembles fermés de cet espace). Une démonstration bien simple de ce théorème a été donnée M. Kuratowski (1).

$E_1, E_2, \ldots$ étant une suite infinie d'ensembles, désignons par $f(E_1, E_2, \ldots)$ la somme de tous les produits $E_{n_1}E_{n_2}E_{n_3}\ldots$, où $n_1 < n_2 < \ldots$ et $E_{n_1} \supset E_{n_2} \supset \ldots$.

Si $E_1, E_2, \ldots$ sont des ensembles linéaires fermés, les ensembles $f(E_1, E_2, \ldots)$ coïncident avec les ensembles analytiques linéaires (2). On démontre aussi que l'opération $f(E_1, E_2, \ldots)$ effectuée sur les ensembles analytiques donne toujours des ensembles analytiques (3). Or, on prouve sans peine que f n'est pas une fonction analytique.

40. Ensembles analytiques dans les espaces métriques non séparables. — M. Banach a posé le problème si un ensemble situé dans un espace métrique quelconque qui est analytique en tout son point, est analytique (4). Ce problème est résolu positivement par M. D. Montgomery (5) qui a aussi démontré que le mot *analytique* peut être remplacé par *complémentaire analytique* (6).

41. Fonctions analytiques positives et opérations de M. Hausdorff. — Une fonction $f(E_1, E_2, \ldots)$ d'une suite infinie d'ensembles est dite, d'après MM. Kantorovitch et Livenson (7) *fonction analytique positive*, si les formules

$$(30) \qquad p \in f(E_1, E_2, \ldots) \quad \text{et} \quad q \text{ non } \in f(H_1, H_2, \ldots)$$

entraînent toujours l'existence d'un (au moins) nombre naturel k, tel que

$$(31) \qquad p \in E_k \quad \text{et} \quad q \text{ non } \in H_k \qquad (cf. \text{ n}^{\text{o}} \ 34).$$

Soit $f(E_1, E_2, \ldots)$ une fonction analytique positive. Désignons

(1) *Recueil Math. Moscou*, t. 43, 1936, p. 403-404.
(2) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 6, p. 100.
(3) *Loc. cit.*, p. 105.
(4) *Voir* W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 21, p. 112.
(5) *Fund. Math.*, t. 25, p. 530 (th. 2).
(6) *Cf.* C. Kuratowski, *Fund. Math.*, t. 25, p. 537.
(7) *Fund. Math.*, t. 18, p. 225.

par N l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres naturels n_1, n_2, ..., telles que $E_{n_1}E_{n_2}E_{n_3}\ldots \subset f(E_1, E_2, \ldots)$ quelle que soit la suite infinie d'ensembles E_1, E_2, ... On démontre qu'on a pour toute suite infinie d'ensembles E_1, E_2, ... l'égalité

$$(32) \qquad f(E_1, E_2, \ldots) = \sum_N E_{n_1}E_{n_2}E_{n_3}, \ldots,$$

la sommation $\sum_N$ s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels n_1, n_2, ... qui appartiennent à N.

On appelle *fonction de Hausdorff* toute fonction d'une suite infinie d'ensembles définie par la formule (32), où N est un ensemble de suites infinies de nombres naturels (qui caractérise la fonction considérée). Au lieu de caractériser la fonction de Hausdorff par l'ensemble de suites $(n_1, n_2, \ldots)$ on peut la caractériser par l'ensemble de nombres irrationnels $\frac{1}{|n_1|} + \frac{1}{|n_2|} + \ldots$.

Il résulte de l'égalité (32) pour les fonctions analytiques positives que ces dernières sont des fonctions de Hausdorff. Or, on démontre sans peine que toute fonction de Hausdorff est une fonction analytique positive. Ainsi *les fonctions analytiques positives coïncident avec les fonctions de Hausdorff.*

On démontre que la famille de toutes les fonctions de Hausdorff est la plus petite famille $\mathfrak{F}$ de fonctions d'une suite infinie d'ensembles jouissant de deux propriétés suivantes :

1° les fonctions

$$f_k(E_1, E_2, \ldots) = E_k, \qquad \text{où} \quad k = 1, 2, \ldots$$

appartiennent à $\mathfrak{F}$,

2° la somme et le produit d'un nombre fini ou d'une infinité quelconque de fonctions appartenant à $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$ [1].

L'ensemble N de suites infinies de nombres naturels étant donné et Φ étant une famille quelconque d'ensembles, désignons par Φ_{H_N} la famille de tous les ensembles (32), où $E_n \in \Phi$ pour $n = 1, 2, \ldots$.

---

[1] W. Sierpinski, *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, t. 19, 1927, p. 463.

On a, pour toute famille Φ d'ensembles et toute opération H_N de Hausdorff

$$\Phi \subset \Phi_{H_N}$$

et

$$\Phi \subset \Psi \quad \text{entraîne} \quad \Phi_{H_N} \subset \Psi_{H_N}.$$

On démontre (1) qu'il existe un ensemble de suites N, tel que

$$\Phi_{H_N} = \Phi_A$$

(quelle que soit la famille Φ d'ensembles) : c'est notamment l'ensemble N de suites infinies $n_1, n_2, \ldots$ telles que la suite infinie $n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2, n_4 - n_3, \ldots$ est une suite extraite de la suite infinie géométrique 1, 2, 4, 8, ... Cela prouve que l'opération A est un cas particulier de l'opération de Hausdorff.

Il existe aussi un ensemble de suites infinies de nombres naturels N, tel que la famille Φ_{H_N}, où Φ est la famillle de tous les ensembles linéaires fermés, coïncide avec la famille de tous les complémentaires analytiques linéaires (2).

Or, il n'existe aucune opération de Hausdorff H_N, telle qu'on ait

$$\Phi_{H_N} = \Phi_B,$$

quelle que soit la famille Φ d'ensembles (3).

H_M et H_N étant deux opérations de Hausdorff, il existe toujours une opération de Hausdorff H_Q, telle que

$$\Phi_{H_Q} = (\Phi_{H_M})_{H_N}$$

quelle que soit la famille Φ d'ensembles (4).

$\mathcal{E}$ étant un ensemble de puissance $\leqq 2^{\aleph_0}$ d'opérations de Hausdorff, il existe toujours une opération de Hausdorff H_Q, telle que

$$\Phi_{H_N} \subset \Phi_{H_Q}.$$

quelles que soient la famille Φ d'ensembles et l'opération H_N de l'ensemble $\mathcal{E}$ (5).

Quelle que soit la famille Φ de puissance $\leqq 2^{\aleph_0}$ d'ensembles

(1) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1935, p. 93.
(2) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 15, p. 211.
(3) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 10, p. 427.
(4) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 15, p. 201.
(5) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 16, p. 1.

linéaires, il existe toujours une opération de Hausdorff H_Q, telle qu'en désignant par Δ la famille de tous les intervalles aux extrémités rationnelles, on a

$$\Delta_{H_Q} \supset \Phi \quad (^1).$$

H_N étant une opération quelconque de Hausdorff il existe toujours une opération de Hausdorff H_M, telle qu'on a

$$(\Phi_{H_N})_C = (\Phi_C)_{H_M},$$

quelle que soit la famille Φ d'ensembles formés d'éléments d'un ensemble arbitraire $\mathcal{E}$ où Ψ_C désigne la famille de tous les complémentaires par rapport à $\mathcal{E}$ d'ensembles de la famille Ψ ([2]).

Soit F, respectivement Φ la famille de tous les ensembles fermés linéaires, respectivement plans. Étant donnée une opération de Hausdorff H_N, il existe une opération de Hausdorff H_M, telle que

$$F_{H_M} = (\Phi_{H_N})_P,$$

où Ψ_P désigne la famille de toutes les projections (sur l'axe OX) d'ensembles (plans) de la famille Ψ ([3]). On peut y remplacer les ensembles fermés (linéaires, respectivement plans) par les ensembles ouverts ([4]).

Il résulte sans peine de deux derniers théorèmes que, pour chaque classe des ensembles projectifs P_n, respectivement C_n, où $n = 1, 2, \ldots$, il existe deux opérations de Hausdorff, H_{M_n} et H_{N_n}, telles que cette classe peut être représentée comme résultat de l'opération H_{M_n} effectuée sur la famille de tous les ensembles fermés, et comme résultat de l'opération H_{N_n} effectuée sur la famille de tous les ensembles ouverts (dans R_m). Ce théorème a lieu aussi pour les classes projectives transfinies ([5]).

Opération A *généralisée.* — N étant un ensemble donné de suites infinies de nombres naturels et Φ étant une famille quelconque

---

([1]) E. Szpilrajn, *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, 1930, p. 13 et W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 16, p. 6.

([2]) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 15, p. 209.

([3]) S. Braun, *C. R. Soc. Sc., Varsovie*, t. 23, 1930, p. 89.

([4]) *Voir* W. Sierpinski, *ibid.*, p. 15. Pour une généralisation de ces théorèmes *voir* F. Hausdorff, *Fund. Math.*, t. 20, p. 100.

([5]) S. Braun, *loc. cit.*, p. 99. *Cf.* L. Kantorovitch et E. Livenson, *C. R. Acad. Sc.*, t. 190, p. 1114.

d'ensembles, désignons par Φ_{A_N} la famille de tous les ensembles de la forme

$$E = \sum_N E_n, \; E_{n_1, n_2} E_{n_1, n_2, n_3} \ldots,$$

où $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \in \Phi$ pour tout système fini de nombres naturels n_1, $n_2, \ldots, n_k$ (et où la sommation s'étend à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots$ formant l'ensemble N).

On démontre qu'il existe pour tout ensemble N de suites infinies de nombres naturels une opération de Hausdorff H_M, telle que

$$\Phi_{A_N} = \Phi_{H_M}$$

quelle que soit la famille Φ d'ensembles : il suffit notamment de désigner par M l'ensemble de toutes les suites infinies

$$m_k = 2^{n_1 - 1} + 2^{n_1 + n_2 - 1} + \ldots + 2^{n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

correspondant aux suites $n_1, n_2, \ldots$ de N [1].

Le système déterminant $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ d'ensembles d'un espace métrique est dit *régulier par rapport à l'ensemble* N *de suites*, si l'on a, quelle que soit la suite infinie $n_1, n_2, \ldots$ appartenant à N :

$$0 \neq E_{n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}} \subset E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

et

$$\lim_{k = \infty} \delta(E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = 0,$$

où $\delta(E)$ désigne le diamètre de l'ensemble E.

Désignons par $\chi^{(N)}$ et appelons ensemble caractéristique de l'opération A_N l'ensemble de tous les nombres irrationnels $\left|\frac{1}{n_1}\right| + \left|\frac{1}{n_2}\right| + \ldots$ correspondant aux suites $n_1, n_2, \ldots$ qui constituent l'ensemble N.

On démontre que pour qu'un ensemble linéaire soit le résultat d'une opération A_N effectuée sur un système déterminant régulier par rapport à N d'ensembles linéaires fermés, il faut et il suffit qu'il soit une image continue de l'ensemble caractéristique $\chi^{(N)}$ de cette opération [2].

---

[1] *Voir* W. Sierpinski, *C. R. Soc. Sc. et L. Varsovie*, t. 22, 1929, Cl. III, p. 175; *cf.* aussi F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1935, p. 93.

[2] W. Sierpinski, *loc. cit.*, p. 176.

42. Problèmes qui conduisent aux ensembles analytiques. — 1° M. Lebesgue a remarqué [1] que l'opération qui consiste à joindre (par les segments rectilignes) les points d'un ensemble plan E deux à deux permet de former des ensembles non mesurables B à partir des ensembles mesurables B. Or, cette opération φ effectuée sur les ensembles analytiques donne toujours des ensembles analytiques [2].

En effet, E étant un ensemble analytique plan donné, désignons par S l'ensemble de tous les systèmes (x_1, y_1, x_2, y_2, t) où $(x_1, y_1) \in E$, $(x_2, y_2) \in E$ et $0 \leq t \leq 1$. L'ensemble E étant analytique, on voit sans peine que l'ensemble S l'est aussi (dans R_5). Or, $\varphi(E)$ est évidemment une image continue de l'ensemble S, comme l'ensemble de points (x, y), où $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$, $y = y_1 + (y_2 - y_1)t$, où $(x_1, y_1, x_2, y_2, t) \in S$. L'ensemble $\varphi(E)$ est donc analytique.

Si E est un ensemble analytique situé dans R_m, l'ensemble D(E) de toutes les distances entre deux points quelconques de E est également analytique [3]. Or, il existe un ensemble plan G_δ, E, pour lequel l'ensemble D(E) est non mesurable B [4]. On ne sait pas si le mot *plan* peut y être remplacé par *linéaire*.

Si E_1 et E_2 sont des ensembles analytiques linéaires, l'ensemble Z de toutes les sommes $x + y$, où $x \in E_1$ et $y \in E_2$ est analytique [5].

On en déduit que toute base hamelienne est non mesurable B [6]. On ne sait pas si lorsque E_1 et E_2 sont des complémentaires analytiques, l'ensemble Z l'est aussi (On sait seulement que Z est alors un P_2, en tant que projection sur la droite $y = x$ du produit cartésien $E_1 \times E_2$).

2° On dit, d'après P. Urysohn qu'un point p d'un ensemble plan E est *linéairement accessible* s'il existe un segment rectiligne $\overline{pq}$ tel que tous ses points, le point p excepté, soient étrangers à E. Soit $a(E)$ l'ensemble de tous les points linéairement accessibles de l'ensemble E.

On démontre que si E est un F_σ, $a(E)$ est un ensemble analytique

---

(1) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 35, 1935, p. 242.
(2) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 7, p. 147.
(3) *Loc. cit.*, p. 146.
(4) *Loc. cit.*, p. 145.
(5) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 1, p. 109.
(6) *Loc. cit.*, p. 110.

et si E est analytique, $a(E)$ est un P_2 (1). Or, il existe un ensemble fermé plan E pour lequel l'ensemble $a(E)$ n'est pas mesurable B (2). Il existe aussi un G_δ plan, E, tel que l'ensemble E n'est pas analytique.

Il existe un ensemble ouvert dans R_3, tel que l'ensemble-somme de toute les droites (illimitées) qu'il contient est non mesurable B (3). D'autre part, l'ensemble-somme de toutes les droites contenues dans un ensemble ouvert (ou dans un G_δ) de R_m (où $m > 1$) est toujours analytique (4).

3° $f(x, y)$ étant une fonction continue pour $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, considérons les valeurs de x dans l'intervalle $(0, 1)$ pour lesquelles il existe dans $(0, 1)$ une et une seule valeur de y, telle que $f(x, y) = 0$ et soit $A(f)$ l'ensemble de toutes les valeurs de y correspondant à ces x. On démontre que l'ensemble $A(f)$ est analytique et que [(la fonction continue $f(x, y)$ étant convenablement choisie)] ce peut être un ensemble analytique arbitraire situé dans l'intervalle $(0, 1)$ (5).

4° Soit E un ensemble analytique situé sur l'axe OX. Il existe, pour tout n naturel, un ensemble G_δ, soit H_n, situé dans le plan XOY entre les droites $y = n$ et $y = n + 1$ et dont la projection sur l'axe OX est l'ensemble E (n° **21**). L'ensemble $H = H_1 + H_2 + \ldots$ est encore un G_δ : soit $f(x, y)$ sa fonction caractéristique; ce sera une fonction de classe $\leqq 2$. Or, on vérifie sans peine que

$$\varphi(x) = \overline{\lim_{y=+\infty}} f(x, y), \tag{33}$$

où $\overline{\lim} f$ désigne l'opération (de Cauchy-Hadamard) qui consiste à prendre la plus grande limite d'une fonction est la fonction caractéristique de l'ensemble E, donc que

$$\underset{x}{\mathbf{E}}[\varphi(x) = 1] = E. \tag{34}$$

Si E est un ensemble analytique non mesurable B, la fonction $\varphi(x)$ [(d'après (34)] n'est pas une fonction de Baire. Donc :

---

(1) O. Nikodym, *Fund. Math.*, t. 7, p. 250; *cf.* N. Lusin, *Fund. Math.*, t. 12, p. 158 et C. Kuratowski, *Topologie*, t. I, p. 245.

(2) O. Nikodym, *Loc. cit.*, p. 257 et *Ann. Soc. Polon. Math.*, t. 7, 1929, p. 79. *Cf.* P. Urysohn, *Proc. Acad. Amsterdam*, t. 28, 1925, p. 984.

(3) O. Nikodym et W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 7, p. 259.

(4) *Loc. cit.* p. 261.

(5) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 7, p. 155.

Il existe une fonction de classe 2 de Baire de deux variables réelles, $f(x, y)$, telle que la fonction (33) *n'est pas une fonction de Baire* (1). Or, on démontre que si $f(x, y)$ est de classe $\leqq 1$, la fonction (33) est une fonction de Baire de classe $\leqq 3$. On démontre aussi que si $f(x, y)$ est une fonction de Baire, les ensembles $\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) > a]$ sont analytiques, quel que soit le nombre réel a et l'on en déduit que la fonction (33) est mesurable L (2) Plus généralement, on démontre que les fonctions qu'on obtient en partant de fonctions de Baire d'un nombre fini quelconque variables réelles et en appliquant un nombre fini de fois (dans un ordre quelconque) les opérations $\lim\limits_{k}$ et $\overline{\lim\limits_{y=+\infty}}$ sont mesurables L.

Or, il existe des fonctions de Baire de classe 2 de trois variables réelles $f(x, y, z)$ telles qu'il manque actuellement complètement de méthode pour décider si la fonction (d'une variable réelle)

$$\varphi(x) = \underline{\lim}_{z=+\infty} \overline{\lim}_{y=+\infty} f(x, y, z) \tag{35}$$

est mesurable L ou non (3). On démontre notamment que E étant un ensemble P_2 linéaire quelconque, il existe une fonction de classe $\leqq 2$ de trois variables réelles, $f(x, y, z)$, telle qu'on a, pour la fonction (35),

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) = 0] = \mathrm{E} \quad (4).$$

5° $f(x)$ étant une fonction d'une variable réelle, désignons par $\mathrm{T}(f)$ l'ensemble de tous les nombres réels x qui satisfont à la condition

$$f(t) \neq f(x) \qquad \text{pour} \quad t < x.$$

On démontre que pour qu'un ensemble linéaire E soit un complémentaire analytique, il faut et il suffit qu'il existe une fonction d'une

(1) N. Lusin, *Leçons*, p. 318-319.

(2) C. Kuratowski, *Topologie*, t. I, p. 267 et F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1935, p. 275; *cf.* aussi M. Neubauer, *Monatshef. Math., u. Phys.*, t. 38, 1931, p. 139.

(3) D'après une remarque de M. Mostowski on peut démontrer que l'hypothèse qu'il existe une fonction $f(x, y, z)$ de classe 2 telle que la fonction (35) est non mesurable L est non contradictoire avec les axiomes habituellement admis de la théorie des ensembles.

(4) W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 36, p. 55.

variable réelle $f(x)$ de classe ≤ 1, telle que $T(f) = E$ [1]. Or, si $f(x)$ est une fonction de Baire, $T(f)$ est toujours un complémentaire analytique [2].

6° Comme on sait, il n'existe aucun ensemble plan mesurable B universel pour les ensembles linéaires mesurables B (n° 7). Or, j'ai démontré [3] qu'il existe un ensemble analytique plan dont les intersections par les droites parallèles à l'axe d'ordonnées donnent tous les ensembles mesurables B linéaires et seulement des ensembles mesurables B. Le complémentaire de cet ensemble plan jouissant évidemment de la même propriété, on peut remplacer dans notre énoncé le mot *analytique* par *complémentaire analytique*.

M. N. Lusin a démontré [4] qu'il existe un complémentaire analytique plan universel pour tous les complémentaires analytiques linéaires qui sont ou bien au plus dénombrables ou bien contiennent des sous-ensembles parfaits. (Il appelle un tel ensemble plan *complémentaire analytique semi-universel*).

7° On dit que la surface $z = f(x, y)$ est *universelle pour les fonctions de Baire* (d'une variable réelle) si, quel que soit le nombre réel a donné, la fonction $\varphi(x) = f(x, a)$ est une fonction de Baire et si pour toute fonction de Baire (d'une variable réelle) donnée $\varphi(x)$ il existe un nombre réel a, tel que $\varphi(x) = f(x, a)$ (pour x réel). On démontre qu'il n'existe aucune surface universelle pour les fonctions de Baire, dont l'ensemble de points serait analytique [5]. Or, M. K. Kunugui a construit une surface universelle pour les fonctions de Baire, dont l'ensemble de points est un complémentaire analytique [6]. $z = f(x, y)$ étant cette surface, on démontre sans peine que la fonction $\varphi(x) = f(x, x)$ (qui est définie effectivement et dont l'image géométrique est un complémentaire analytique) ne peut être majorée par aucune fonction de Baire [7].

---

(1) S. Braun, *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, t. 24, 1931, p. 215 et W. Sierpinski, *Fund. Math.*, t. 15, p. 290.

(2) W. Sierpinski, *loc. cit.*

(3) *Fund. Math.*, t. 12, p. 75.

(4) N. Lusin, *Sur quelques résultats nouveaux de la théorie des fonctions* (en russe) (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, mai 1935, p. 18.

(5) W. Sierpinski, *Bul. Math. Soc. Roum. Sc.*, t. 35, 1933, p. 225.

(6) K. Kunugui, *Proc. Imp. Acad. Tôkyô*, t. 12, 1936, p. 273.

(7) *Cf.* M. Kondô, *Proc. Imp. Acad. Tôkyô*, t. 12, 1936, p. 310.

8° *Les dérivées partielles des ensembles plans.* — E étant un ensemble plan, on appelle, d'après M. Lusin, *dérivée partielle de* E *par rapport à l'axe* OY et l'on désigne par E'_y l'ensemble-somme de tous les ensembles $(ED)'$, la sommation s'étendant à toutes les droites D parallèles à l'axe OY (1).

On démontre (2) que la dérivée partielle d'un ensemble plan P_n (où $n = 0, 1, 2, \ldots$) est un ensemble P_n.

En appelant *ensemble aux sections dénombrables* un ensemble plan que toute droite parallèle à l'axe OY rencontre en un ensemble au plus dénombrable de points, M. Lusin a démontré (3) que la dérivée partielle d'un ensemble plan mesurable B aux sections dénombrables est un ensemble mesurable B. Or, il existe un complémentaire analytique plan aux sections dénombrables dont la dérivée partielle n'est pas un complémentaire analytique.

43. Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique. — Un ensemble analytique E étant défini comme noyau d'un système déterminant $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formé de segments, le problème de nommer un point du complémentaire CE (dans le cas, où CE n'est pas vide) a été regardé pendant plusieurs années comme très difficile et ne fut résolu positivement qu'en 1935 par M. P. Novikoff, dont la méthode a été simplifiée par M. N. Lusin (4).

Le système déterminant $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ (dont le noyau est E) étant donné, nous avons montré dans le n° 24 comment on obtient une décomposition effective de l'ensemble CE en une série transfinie de type Ω de constituantes (qui ne sont pas toutes vides, si $CE \neq 0$). MM. Lusin et Novikoff définissent effectivement un point qui appartient à la première constituante non vide.

---

(1) N. Lusin, *Sur quelques résultats nouveaux de la théorie descriptive des fonctions* (en russe) (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 1935, p. 39-40).

(2) Par un raisonnement analogue à celui de ma Note des *Fund. Math.*, t. 12, p. 2.

(3) N. Lusin, *loc. cit.*, p. 40.

(4) N. Lusin et P. Novikoff, *Fund. Math.*, t. 25, p. 559-560. L'ensemble E y est supposé défini au moyen d'un crible dénombrable formé d'intervalles de Baire, mais cette différence n'est pas essentielle.

TABLE DES MATIÈRES.

Les ensembles projectifs.

Pages.

Introduction 1
1. Ensembles ouverts 1
2. Opérations élémentaires 2
3. Ensembles projectifs 3
4. Classes d'ensembles projectifs 3
5. Ensembles universels 6
6. Un ensemble ouvert universel 8
7. Ensembles projectifs universels 9
8. L'existence des ensembles projectifs de toute classe 11
9. Construction d'un ensemble non projectif 12
10. Projection et image continue 13
11. Projections biunivoques 16
12. Projection et somme 17
13. Les opérations logiques et les ensembles projectifs 19
14. Propriétés des ensembles projectifs 21
15. Les ensembles projectifs et le crible de M. Lusin 25
16. Les ensembles projectifs dans les espaces métriques 26

Les ensembles analytiques.

Introduction 28
17. Ensembles analytiques comme noyaux de systèmes déterminants 31
18. Opération A 35
19. Opérations σ et δ 36
20. Opération B 37
21. Ensembles analytiques comme projections des ensembles G_δ 38
22. Ensembles analytiques comme ensembles de valeurs de fonctions continues partout d'un côté, respectivement semi-continues 40
23. Ensembles boréliens 41
24. Décomposition des ensembles analytiques en une somme et en un produit de $\aleph_1$ ensembles boréliens 43
25. Puissance des ensembles analytiques et de leurs complémentaires 46
26. Ensembles analytiques non mesurables B 48

Pages.
27. Théorème de Souslin 49
28. Théorème d'unicité de M. Lusin 50
29. Les classes des fonctions et de leurs images géométriques 52
30. Uniformisation des ensembles plans 55
31. Opération du crible 58
32. Opération du crible généralisé 60
33. Cribles fermés 61
34. Cribles fermés et les fonctions analytiques d'une suite infinie d'ensembles. 63
35. Cribles fermés dans les espaces métriques 64
36. Cribles boréliens et analytiques 65
37. Ensembles criblés de E. Sélivanowski 67
38. Cribles fonctionnels 67
39. Les ensembles analytiques et les limites topologiques d'ensembles 68
40. Ensembles analytiques dans les espaces métriques non séparables 69
41. Fonctions analytiques positives et opérations de M. Hausdorff 69
42. Problèmes qui conduisent aux ensembles analytiques 74
43. Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique 78

133805. Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.
Dépôt légal imprimeur 1949, n° 567 | Dépôt légal éditeur 1949, n° 289
Achevé d'imprimer le 5 janvier 1950.