MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

SILVIO MINETTI

Sur quelques espaces fonctionnels et sur la géométrie de certains holoespaces

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 79 (1936)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1936__79__1_0>

© Gauthier-Villars, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BSM 3620

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXIX

Sur quelques espaces fonctionnels et sur la Géométrie de certains Holoespaces

en rapport avec la théorie des équations différentielles ordinaires

Par M. Silvio MINETTI
Maître de Conférences à l'Université de Rome

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - ST MARTIN-D'HÈRES

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, EDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1936

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

SUR

QUELQUES ESPACES FONCTIONNELS

ET SUR

LA GÉOMÉTRIE DE CERTAINS HOLOESPACES

EN RAPPORT AVEC LA THÉORIE
DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Par M. Silvio MINETTI.

CHAPITRE I.

Les fondements du calcul différentiel absolu généralisé de Pascal-Vitali, les premières notions sur l'espace de Hilbert.

1. **Généralités.** — Avec la notation $f[u]$ nous désignerons par la suite une fonction des n variables

$$(1) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n,$$

tandis que, si S est une substitution invertible qui fait passer des variables u aux variables v, ayant pour équations

$$(2) \qquad u_i = u_i(v_1, v_2, \ldots v_n) = u_i[v] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nous désignerons par $f[v]$ la transformée de $f[u]$ au moyen de la substitution S.

Les f pourront être affectées d'indices en bas ou en haut [1] : indices inférieurs et indices supérieurs.

[1] On supposera, en outre, une fois pour toutes que les f et les $u_i[v]$ aient des dérivées continues de n'importe quel ordre.

Une fonction I sera dite « invariante » si, quels que soient les systèmes de variables u et v liées de la substitution S, on a, pour chaque couple de systèmes de valeurs correspondantes des u et des v,

$$I[u] = I[v]. \tag{3}$$

On aura souvent affaire par la suite avec des lettres affectées en bas ou en haut d'indices constitués de groupes de nombres, égaux ou non entre eux, choisis dans l'ensemble

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n. \tag{4}$$

n'ayant pas égard à l'ordre dans lequel on les écrit. On désignera un tel groupe par une seule lettre; il sera constitué d'une combinaison avec répétition des nombres (4).

L'ensemble de ces groupes sera appelé le Ω_n corps; chaque groupe du corps Ω_n sera dit un « état » de l'indice qui acquiert sa composition; les chiffres de la suite (4) qui composent le groupe seront dits, enfin, les chiffres de l'état considéré.

Si en outre les chiffres d'un état sont chacun inférieurs ou égaux au suivant on dira que l'état est écrit sous la forme normale.

Le nombre ρ_α des chiffres d'un état α sera appelé le « rang » de cet état.

On dit qu'un indice varie dans la classe (ν, μ) (avec ν, μ entiers tels que $\nu \geqq \mu > 0$) s'il parcourt les états α pour lesquels on a $\nu \geqq \rho_\alpha \geqq \mu$ et seulement ces états.

Si $\mu = 1$ la classe $(\nu, 1)$ sera dite simplement la classe ν et l'on dira aussi que c'est une classe entière.

2. Les symboles $I_\alpha[u]$ et leurs transformés. — I étant un invariant, et α_0 un état d'un indice variable α ayant les chiffres $i_1, i_2, \ldots, i_k$, nous poserons

$$I_{\alpha_0}[u] = \frac{\partial^k I[u]}{\partial u_{i_1} \partial u_{i_2} \ldots \partial u_{i_k}}. \tag{5}$$

On obtient ainsi un système de fonctions I_α dans lequel l'indice α parcourt le Ω_n corps.

Il est intéressant de voir comment les fonctions I_α varient par une substitution S. On démontre aisément que, quel que soit l'état α du Ω_n corps, on a

$$I_\alpha[v] = \Sigma_\beta I_\beta[u] \frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}, \tag{6}$$

où la somme Σ se rapporte à tous les états d'un indice β du Ω_n corps, et où les $\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$ désignent des fonctions rationnelles entières de dérivées (simples ou multiples) des deuxièmes membres des relations (2) qui définissent S, et où, enfin, on a

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = 0 \qquad \text{si} \quad \rho_\beta > \rho_\alpha.$$

Si l'on considère, pris pour exemple, $n = 2$ et un invariant $I(u_1, u_2)$, où l'on a

$$u_1 = u_1(v_1, v_2), \qquad u_2 = u_2(v_1, v_2),$$

les différents états de l'indice β de la relation (6) sont donnés par les groupes

$$1; \quad 2; \quad 1,1; \quad 1,2; \quad 2,2,$$

qui constituent le Ω_2 corps, et l'on aura pour $I_1[v]$ l'expression suivante :

$$I_1[v] = I_1[u]\frac{\partial u_1}{\partial v_1} + I_2[u]\frac{\partial u_2}{\partial v_1} + I_{1,1}[u]\frac{\partial u_{1,1}}{\partial v_1} + I_{1,2}[u]\frac{\partial u_{1,2}}{\partial v_1} + I_{2,2}[u]\frac{\partial u_{2,2}}{\partial v_1};$$

et comme

$$I_1[u] = \frac{\partial I}{\partial u_1}, \qquad I_2[u] = \frac{\partial I}{\partial u_2}, \qquad I_{1,1}[u] = \frac{\partial^2 I}{\partial u_1^2},$$

$$I_{1,2}[u] = \frac{\partial^2 I}{\partial u_1\, \partial u_2}, \qquad I_{2,2}[u] = \frac{\partial^2 I}{\partial u_2^2}$$

et

$$\frac{\partial u_{1,1}}{\partial v_1} = \frac{\partial u_{1,2}}{\partial v_1} = \frac{\partial u_{2,2}}{\partial v_1} = 0,$$

on obtient

$$I_1[v] = \frac{\partial I}{\partial v_1} = \frac{\partial I}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial v_1} + \frac{\partial I}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_1},$$

bien en accord avec la formule de dérivation des fonctions composées.

De même on aurait

$$I_{1,2}[v] = \frac{\partial^2 I}{\partial v_1\, \partial v_2} = \Sigma_\beta I_\beta[u]\frac{\partial u_\beta}{\partial v_{1,2}},$$

où l'indice β varie par tous les états du Ω_2 corps. Donc

$$I_{1,2}[v] = \frac{\partial^2 I}{\partial v_1\, \partial v_2} = \frac{\partial I}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial v_{1,2}} + \frac{\partial I}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_{1,2}} + \frac{\partial^2 I}{\partial u_1^2}\frac{\partial u_{1,1}}{\partial v_{1,2}}$$
$$+ \frac{\partial_2 I}{\partial u_1\, \partial u_2}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial v_{1,2}} + \frac{\partial_2 I}{\partial u_2^2}\frac{\partial u_{2,2}}{\partial v_{1,2}}.$$

Et puisque, à l'aide d'un calcul assez facile, on obtient

$$\frac{\partial^2 I}{\partial v_1 \partial v_2} = \frac{\partial I}{\partial u_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial v_1 \partial v_2} + \frac{\partial I}{\partial u_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial v_1 \partial v_2} + \frac{\partial^2 I}{\partial u_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial u_1}{\partial v_2}$$
$$+ \frac{\partial^2 I}{\partial u_1 \partial u_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial u_2}{\partial v_2} + \frac{\partial u_1}{\partial v_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right) + \frac{\partial^2 I}{\partial u_2^2}\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\frac{\partial u_2}{\partial v_2},$$

pour les valeurs des symboles

$$\frac{\partial u_1}{\partial v_{1,2}}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial v_{1,2}}, \quad \frac{\partial u_{1,1}}{\partial v_{1,2}}, \quad \frac{\partial u_{1,2}}{\partial v_{1,2}}, \quad \frac{\partial u_{2,2}}{\partial v_{1,2}},$$

on obtient les expressions suivantes :

$$\frac{\partial u_1}{\partial v_{1,2}} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial v_1 \partial v_2}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial v_{1,2}} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial v_1 \partial v_2}, \qquad \frac{\partial u_{1,1}}{\partial v_{1,2}} = \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial u_1}{\partial v_2},$$
$$\frac{\partial u_{1,2}}{\partial v_{1,2}} = \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial u_2}{\partial v_2} + \frac{\partial u_1}{\partial v_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_1}, \qquad \frac{\partial u_{2,2}}{\partial v_{1,2}} = \frac{\partial u_2}{\partial v_1}\frac{\partial u_2}{\partial v_2},$$

qui sont bien des expressions rationnelles entières de dérivées (simples ou multiples) des deuxièmes membres des relations

$$u_1 = u_1(v_1, v_2), \qquad u_2 = u_2(v_1, v_2)$$

qui définissent la transformation considérée.

Les symboles $\frac{\partial u_\beta}{\partial u_\alpha}$ jouissent en outre des propriétés suivantes [1] :

I. On a

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial u_\alpha} = 1 \text{ ou } 0 \qquad (\text{suivant que } \alpha = \beta \text{ ou } \alpha \neq \beta). \tag{7}$$

II. Si u, v, w sont trois systèmes de variables liés entre eux par des substitutions invertibles, on a, quels que soient les indices α et β,

$$\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial u_\beta} = \Sigma_\gamma \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial v_\gamma}\frac{\partial v_\gamma}{\partial u_\beta}, \tag{8}$$

où la somme Σ se rapporte à tous les états d'un indice γ du Ω corps.

De cette proposition découle en particulier, que si les systèmes des variables u et v sont liés par une substitution invertible, on a

$$\sum_\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial v_\gamma}\frac{\partial v_\gamma}{\partial u_\beta} = 1 \text{ ou } 0 \qquad (\text{suivant que } \alpha = \beta \text{ ou } \alpha \neq \beta). \tag{9}$$

III. — Si l'état β est composé d'un seul chiffre h et si $i_1, i_2, \ldots, i_r$

sont les chiffres de l'état α, on a

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial^r u_h}{\partial v_{i_1} \partial v_{i_2} \ldots \partial v_{i_r}}. \tag{10}$$

IV. — Si $\rho_\alpha = \rho_\beta$ et si $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sont les chiffres de l'état α, tandis que $j_1, j_2, \ldots, j_r$ sont les chiffres de l'état β, on a

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \sum_{\pi_\beta} \frac{\partial u_{j_1}}{\partial v_{i_1}} \frac{\partial u_{j_2}}{\partial v_{i_2}} \ldots \frac{\partial u_{j_r}}{\partial v_{i_r}}, \tag{11}$$

où la somme Σ_{π_β} se rapporte à toutes les permutations distinctes π_β des chiffres de l'état β.

V. Dans les mêmes conditions précédentes, on aura aussi

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial u_\alpha} = \frac{\pi_\beta}{\pi_\alpha} \sum_{\pi_\alpha} \frac{\partial u_{j_1}}{\partial v_{i_1}} \frac{\partial u_{j_2}}{\partial v_{i_2}} \ldots \frac{\partial u_{j_r}}{\partial v_{i_r}}. \tag{12}$$

VI. — Si $\rho_\alpha = \rho_\beta = h + (r - h)$ avec h entier tel que $r > h > 0$, et si α' et α'' désignent deux états, le premier de h chiffres, le deuxième de $r - h$ chiffres tels qu'ils aient en complexe tous les chiffres de α, et si enfin $\beta'_1, \beta''_1; \beta'_2, \beta''_2; \ldots; \beta'_m, \beta''_m$ ont toutes les façons possibles de classer les chiffres de l'état β en deux états, le premier β'_k ayant h chiffres, et le deuxième β''_k de $r - h$ chiffres, on a

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_{\beta'_k}}{\partial v_{\alpha'}} \frac{\partial u_{\beta''_k}}{\partial v_{\alpha''}}. \tag{13}$$

3. **Les systèmes absolus** [1]. — Si α_h et $\alpha'_h (h = 1, 2, \ldots, r)$ sont r couples d'indices tous les deux d'une même classe, et si β_k et $\beta'_k (k = 1, 2, \ldots, s)$ sont des mêmes couples d'indices, on dit qu'un système de fonctions

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} \tag{14}$$

est un « système absolu » lorsqu'il arrive que, quels que soient les systèmes de variables u et v liés entre eux d'une substitution invertible, on ait

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = \Sigma_{\alpha', \beta'} H^{\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_s}_{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_r} \prod_{h=1}^{r} \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_{\alpha_h}} \prod_{k=1}^{s} \frac{\partial v_{\beta_k}}{\partial u_{\beta'_k}}, \tag{15}$$

la somme Σ se rapportant à tous les états des indices $\alpha'_h (h = 1, 2, \ldots, r)$ et des indices $\beta'_k (k = 1, 2, \ldots, s)$.

Plus précisément on dit que le système H est un système absolu avec r indices inférieurs et s indices supérieurs. S'il n'y a pas d'indices supérieurs le système absolu est dit « système covariant pur »; s'il n'y a pas d'indices inférieurs il est dit « système contrevariant pur ». On considérera en outre un invariant comme un système absolu dépourvu d'indices, qu'ils soient inférieurs ou supérieurs.

La loi de variation qui est exprimée par la relation (15) est appelée « loi de variance absolue ».

De ce qu'on a dit résulte en particulier que si H_α est un système covariant pur à un indice, sa loi de variance absolue est donnée par la relation

$$H_\alpha[v] = \Sigma_{\alpha'} H_{\alpha'}[u] \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha},$$

où la somme $\Sigma_{\alpha'}$ se rapporte à tous les états de l'indice α' de la classe de l'indice α; si, au contraire, H^β est un système contrevariant pur à un indice, sa loi de variance absolue est donnée par la relation

$$H^\beta[v] = \Sigma_{\beta'} H^{\beta'}[u] \frac{\partial v_\beta}{\partial a_{\beta'}},$$

où la somme $\Sigma_{\beta'}$ se rapporte à tous les états de l'indice β' de la classe de l'indice β.

Il en résulte aussi que si α est un indice de la classe entière ν, et si I est un invariant, le système I_α est un système covariant pur à un indice de la classe ν.

Cela posé on démontre en premier lieu que, pour un système de fonctions du type (14), le caractère de système absolu est assuré même quand il existe « un système particulier » de variables u tel que, pour chaque système de nouvelles variables v liées aux variables u par une substitution invertible, le système H satisfasse à la relation (15). On s'appuie pour cela sur la précédente propriété II.

Il est clair alors qu'un système absolu va être univoquement déterminé lorsqu'on a assigné le système de fonctions auquel il se réduit par rapport à un système particulier de variables.

Si, en particulier, toutes les fonctions auxquelles se réduit un système absolu pour un système de variables u sont nulles, cela arrivera

aussi pour tout autre système de variables, et le système absolu sera dit « système nul ».

Si enfin α et β sont deux indices inférieur et supérieur d'une même classe et si H_α^β est un système absolu tel que pour un système particulier de variables u on ait

$$H_\alpha^\beta[u] = 1 \text{ ou } 0 \qquad (\text{suivant que } \alpha = \beta \text{ ou } \alpha \neq \beta),$$

pour n'importe quel système d'autres variables v, on aura aussi

$$H_\alpha^\beta[v] = 1 \text{ ou } 0 \qquad (\text{suivant que } \alpha = \beta \text{ ou } \alpha \neq \beta).$$

Il va sans dire que cette propriété est une conséquence immédiate de la loi de variance absolue et de la précédente propriété II. Il est alors avantageux de poser la définition suivante :

Définition. — *Un système absolu* H_α^β, *avec* α *et* β *indices de la même classe, tel que pour chaque système de variables que l'on considère aquiert la valeur* 1 *si* $\alpha = \beta$, *et la valeur* 0 *si* $\alpha \neq \beta$, *sera appelé système* δ_β^α, *en remarquant toute fois qu'un système* δ_α^β *ne sera pas complètement caractérisé si l'on ne connaît pas la classe commune des indices* α *et* β.

Donnons maintenant les définitions qui se rapportent à certains systèmes absolus qu'on appelle symétriques ou hémisymétriques :

Définition I. — *On dit qu'un système de fonctions est symétrique par rapport à deux indices (inférieurs ou supérieurs) de la même classe, si chaque fonction du système est égale à la fonction que l'on obtient en changeant entre eux les deux indices considérés.*

Définition II. — *On dit qu'un système de fonctions est hémisymétrique par rapport à deux indices (inférieurs ou supérieurs) de la même classe, si chaque fonction du système est opposée à celle que l'on obtient de la fonction donnée en changeant entre eux les deux indices considérés.*

Et comme on voit aisément que, si un « système absolu » est symétrique, ou hémisymétrique, par rapport à deux indices d'une même

classe pour un système particulier de variables, il l'est aussi pour chaque système de variables, on peut dire que :

Définition III. — *Un système absolu est dit symétrique ou hémisymétrique, par rapport à deux indices (inférieurs ou supérieurs) d'une même classe, s'il est symétrique ou hémisymétrique par rapport à ces indices, pour chaque système de variables qu'on puisse considérer.*

Il est en outre tout à fait évident que si un système est hémisymétrique par rapport à deux indices il annule toutes ses fonctions pour lesquelles ces deux indices sont égaux.

4. Fonctions r-variantes [1]. — Une fonction A est dite r-variante si, u et v étant deux systèmes de variables liés entre eux d'une substitution invertible d'équations (2) et d'ailleurs quelconque, l'on a

$$A[v] = A[u](u, v)^r,$$

où

$$(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial v_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial v_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial v_1} & \frac{\partial u_n}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{(v, u)},$$

ainsi que si A est une r-variante, $\frac{1}{A}$ est une fonction $(-r)$-variante.

Cela posé on désignera par le symbole (u, ν, v) le déterminant qui a pour ses éléments les fonctions $\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$, avec α et β indices parcourant tous les états de rang ν, disposés de façon que l'indice α soit constant tout le long d'une même ligne, tandis que β soit, au contraire, constant tout le long d'une même verticale, et, en plus, les états de l'indice α et ceux de l'indice β se succèdent dans l'ordre naturel (1).

On aura alors $(u, 1, v) = (u, v)$, tandis que l'on peut démontrer la relation

$$(u, \nu, v) = (u, v)^{\binom{n+\nu-1}{n}},$$

(1) Le déterminant (u, ν, v) est le $\nu^{\text{ième}}$ déterminant de Brill Scholtz-Hunyady.

où l'exposant du deuxième membre est le coefficient binomial représentant le nombre de combinaisons de $n+\nu-1$ éléments pris n à n.

On désigne en outre par le symbole $[u, \nu, v]$ le déterminant qui a pour éléments les fonctions $\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$, où α et β sont des indices parcourant, suivant l'ordre naturel, la classe ν, les autres conditions précédentes étant de même respectées.

Si alors on se souvient que

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = 0, \qquad \text{si} \qquad \rho_\beta > \rho_\alpha,$$

on a

$$[u, \nu, v] = (u, 1, v)(u, 2, v)\ldots(u, \nu, n) = (u, v)^{N_\nu},$$

où

$$N_\nu = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+\nu-1}{n} = \binom{n+\nu}{n+1},$$

tandis que l'ordre O_ν du déterminant $[u, \nu, v]$ sera donné par la relation

$$O_\nu = \binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+2}{n-1} + \ldots + \binom{n+\nu-1}{n-1} = \binom{n+\nu}{n} - 1.$$

Tout cela posé on a alors le théorème suivant :

THÉOREME. — *Si* A *est une fonction* N_ν*-variante, le système absolu* $H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}$, *qui a* O_ν *indices de classe* ν *et qui pour un système de variables u bien déterminé a nulles toutes ses fonctions avec deux indices égaux et toutes les autres égales à* $+A[u]$ *ou à* $-A[u]$ *suivant que la permutation des indices est paire ou impaire par rapport à la permutation principale, garde ces mêmes propriétés aussi pour tout autre système de variables* v.

Un tel système absolu, $H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}$, est dit alors le système $\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}$ asssocié à la fonction N_ν-variante A; il est évidemment hémisymétrique par rapport à chaque couple d'indices.

5. Opérations élémentaires sur les systèmes absolus [1] :

DÉFINITION I. — *Si*

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} \quad \textit{et} \quad K^{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha}$$

sont deux systèmes absolus dont les indices inférieurs et supérieurs qui sont représentés par un même symbole sont d'une même classe, les systèmes

$$H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} + K^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} \quad et \quad H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} - K^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}$$

qui sont, évidemment, aussi des systèmes absolus, sont dits respectivement « la somme » et « la différence » des deux systèmes

$$H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} \quad et \quad K^{\beta_2,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}.$$

Définition II. — *Si*

$$H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} \quad et \quad K^{\beta_{s+1},\beta_{s+2},\ldots,\beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_{r+p}}$$

sont deux systèmes absolus, le système

$$P^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{s+q}}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+p}} = H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} K^{\beta_{s+1},\beta_{s+2},\ldots,\beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_{r+p}},$$

qui est évidemment aussi un système absolu, est dit « le produit » des deux systèmes absolus

$$H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} \quad et \quad K^{\beta_{s+1},\beta_{s+2},\ldots,\beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_{r+p}}.$$

On peut démontrer en outre le théorème suivant :

Théorème. — *Si* $H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}$ *est un système absolu, et si les indices* α_1 *et* β_1 *sont d'une même classe, le système*

$$K^{\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_2,\ldots,\alpha_r} = \Sigma_\tau H^{\tau,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\tau,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}$$

où la somme Σ *se rapporte à tous les états de l'indice* τ *de la classe commune aux indices* α_1 *et* β_1, *est aussi un système absolu.* (*Principe de saturation.*)

Définition III. — *On appelle « système composé » de deux systèmes donnés*

$$H^{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_h,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} \quad \text{et} \quad K^{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_h,\beta_{s+1},\beta_{s+2},\ldots,\beta_{s+q}}_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_{r+p}}$$

où les indices représentés par un même symbole sont d'une même classe, le système

$$C^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{s+q}}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+p}} = \Sigma_{\tau,\sigma} H^{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_h,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} K^{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_h,\beta_{s+1},\beta_{s+2},\ldots,\beta_{s+q}}_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_{r+p}},$$

où la somme Σ *se rapporte à tous les états des indices* τ *et* σ. En vertu du principe de saturation, plusieurs fois appliqué, il est aussi un système absolu.

Il est aussi intéressant de remarquer qu'on possède deux critères fondamentaux pour reconnaître si un système donné est absolu. Ils découlent des deux théorèmes suivants :

I. *Un système* $H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$ *est absolu si, quel que soit le système covariant* X_{β_1}, *le système*

$$K^{\beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = \Sigma_{\beta_1} X_{\beta_1} H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

est absolu.

II. *Un système* $H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$ *est absolu si, quel que soit le système contrevariant* X^{α_1}, *le système*

$$K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_2, \ldots, \alpha_r} = \Sigma_{\alpha_1} X^{\alpha_1} H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

est absolu.

Les deux critères en question, sont alors les suivants :

1° *Un système* $H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \ldots, \beta_{s+q}}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_{r+p}}$ *est absolu si, quels que soient les systèmes covariants* $\underset{1}{X}_{\beta_1}, \underset{2}{X}_{\beta_2}, \ldots \underset{s}{X}_{\beta_s}$ *et les systèmes contrevariants* $\underset{1}{X}^{\alpha_1}, \underset{2}{X}^{\alpha_2}, \ldots, \underset{r}{X}^{\alpha_r}$, *le système*

$$K^{\beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+p}} = \Sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s} H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+q}}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+p}} \prod_1^r{}_h X^{\alpha_h} \prod_1^s{}_k X_{\beta_k}$$

est absolu.

2° *Si*

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \ldots, \beta_{s+p}}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_{r+p}} \quad \text{et} \quad K^{\beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+p}}_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+p}}$$

sont deux systèmes absolus et, en outre, le système d'équations linéaires

$$\Sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s} H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+q}}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+p}} X^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s} = K^{\beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+p}}$$

par rapport aux inconnues $X^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}$ *est déterminé, alors sa solution unique constitue un système absolu.*

De ce deuxième critère il découle alors aisément le théorème suivant qu'il importe ici de rappeler :

Si $H_{\alpha,\beta}$ *est un système covariant pur, avec deux indices* α *et* β *d'une même classe* (ν, μ); *si le déterminant* $H = |H_{\alpha,\beta}|$, *écrit de façon telle que l'indice* α *soit constant sur chaque ligne tandis que l'indice* β *soit constant dans chaque verticale et que les deux indices se suivent dans l'ordre naturel n'est pas nul; si, enfin,* $H^{\alpha,\beta}$ *désigne le réciproque de* $H_{\alpha,\beta}$ *dans* H, *le système* $H^{\alpha,\beta}$ *avec les indices* α *et* β *qui varient dans la classe* (ν, μ) *est un système contrevariant avec deux indices supérieurs.*

6. **L'espace de Hilbert et les holoespaces** [1, 3]. — On appelle, comme il est bien connu, espace de Hilbert ou quelquefois espace réel de Hilbert ou encore espace $\mathcal{H}$ l'espace fonctionnel qui a pour éléments les fonctions réelles de carré sommable sur un ensemble g en considérant comme un même élément toutes les fonctions qui sont sur g presque partout égales.

Deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de carré sommable seront dites orthogonales dans g si

$$\int_g f_1 f_2 \, dt = 0, \tag{1}$$

tandis qu'une fonction $f(t)$, toujours de carré sommable sur g, sera dite normale dans g si

$$\int_g f^2 \, dt = 1. \tag{2}$$

Un système de fonctions normales, deux à deux orthogonales, tel qu'il n'existe pas une fonction non presque partout nulle qui soit orthogonale à toutes les fonctions du système, est dite « un système fermé ».

On appelle alors « système cartésien orthogonal de l'espace $\mathcal{H}$ » un système fermé de fonctions normales deux à deux orthogonales.

Soit

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n, \quad \ldots \qquad [\varphi_n = \varphi_n(t)] \tag{3}$$

un tel système; f étant un point de $\mathcal{H}$, les valeurs

$$a_n = \int_g f \varphi_n \, dt \tag{4}$$

seront dites les coordonnées du point f par rapport au système (3);

il en résulte évidemment qu'un point P de $\mathcal{H}$ est bien déterminé par ses coordonnées.

On appelle « distance d des deux points f_1 et f_2 » la valeur numérique positive ou nulle

$$(5) \qquad d = \left[\int_g (f_1 - f_2)^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}} = (f_1, f_2),$$

et l'on appelle « norme de $f(t)$ » la valeur

$$(6) \qquad \left[\int_g f^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

distance de la fonction $f(t)$ de l'origine.

Si alors f_1 et f_2 sont deux points de $\mathcal{H}$ ayant pour coordonnées a_i et $b_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$, on a

$$(7) \qquad d = (f_1, f_2) = \left[\sum_1^\infty {}_i (a_i - b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

On a, en outre,

$$(8) \qquad \int_g f_1 f_2\, dt = \sum_1^\infty {}_i a_i b_i,$$

tandis qu'on appelle cette intégrale le « produit scalaire de f_1 par f_2 ». Il sera désigné avec la notation abrégée

$$(9) \qquad [f, g].$$

Il va sans dire, en outre, que la définition de distance donnée par la formule (5) satisfait bien aux propriétés formelles courantes de la distance.

Si maintenant l'on suppose considérer n variables indépendantes

$$(10) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n,$$

chacune d'elles varie dans un trait [1] non nul qui peut être différent pour les différentes variables (10) et si l'on appelle $\mathcal{U}$ le domaine de

[1] On appelle « trait d'une droite d » chaque point de d situé à une distance finie, chaque segment de d, chaque rayon de d, ou même l'entière droite d; « trait nul de d », un point de d.

variabilité du système (10) et si, en plus, on suppose qu'à chaque système de valeurs des $u_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ dans $\mathfrak{U}$ corresponde un point f de $\mathcal{H}$, on dit que ce point est un point-fonction des variables u_i que l'on désigne par le symbole

$$f(t \mid u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{11}$$

ou, plus brièvement, par

$$f(t \mid u). \tag{12}$$

Cela posé, si $f(t \mid u)$ est un point-fonction défini dans $\mathfrak{U}$, si

$$u_1^{(0)}, \quad u_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad u_n^{(0)} \tag{13}$$

est un point u_0 de $\mathfrak{U}$, et si $\varphi(t)$ est enfin un point de $\mathcal{H}$, on dit que le point-fonction $f(t \mid u)$ tend au point $\varphi(t)$ pour les u_i tendants aux valeurs $u_i^{(0)}$, et l'on écrit

$$\lim_{u \to u^{(0)}} f(t \mid u) = \varphi(t)$$

si

$$\lim_{u \to u^{(0)}} [f(t \mid u), \varphi(t)] = \lim_{u \to u^{(0)}} \left\{ \int_g [f(t \mid u) - \varphi(t)]^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} = 0;$$

en d'autres termes, si la distance $[f(t \mid u), \varphi(t)]$ entre $f(t \mid u)$ et $\varphi(t)$ tend vers zéro lorsque les u_i tendent vers les valeurs $u_i^{(0)}$.

Il en résulte bien que l'espace $\mathcal{H}$ est un espace distancié au sens de M. Fréchet, on pourrait de même démontrer qu'il est un espace séparable où l'on peut définir une distance, à savoir la définition donnée tout à l'heure, admettant une généralisation du critère de Cauchy.

Ce dernier point résulte en effet du théorème de Fischer et Fr. Riesz [14; 13 *a*, *b*, *c*; 16 *a*, *b*] suivant lequel :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de fonctions $f_n(t)$ ait une limite $\varphi(t)$, est, qu'étant donné un nombre positif quelconque ε, il soit possible de déterminer un entier N *tel que, si $n >$* N, *on ait quel que soit p (n et p entiers),*

$$\left\{ \int_g [f_{n+p}(t) - f_n(t)]^2 \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

c'est-à-dire, si $a_i^{(n+p)}$ et $a_i^{(n)}$ sont les coordonnées des fonctions f_{n+p}

et f_n, que l'on ait pour $n > N$ et p quelconque

$$\left\{ \sum_{1}^{\infty}{}_{i} [a_i^{(n+p)} - a_i^{(n)}]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Je dois toutefois remarquer que la convergence dont il a été question jusqu'ici ne se prête pas pour la généralisation à l'espace $\mathcal{H}$ du principe fondamental de Bolzano-Weierstrass; M. Hilbert a dû à ce propos introduire dans sa théorie des espaces $\mathcal{H}$ une autre notion de convergence, à savoir celle de convergence faible. Mais pour cela nous renvoyons le lecteur à l'excellent exposé de M. Delsarte dans cette même collection [3].

On définit par la suite la notion de continuité d'un point-fonction en un point u_0 du domaine $\mathfrak{U}$ et de même, dans le domaine $\mathfrak{U}$, on définit aussi la notion de dérivée d'un point-fonction d'une seule variable u en un point u_0 de $\mathfrak{U}$ et celle de dérivée partielle de $f(t \mid u)$ par rapport à une des variables u_i, et l'on démontre encore les propriétés élémentaires qui se rattachent à ces définitions. Nous renvoyons pour cela le lecteur à l'ouvrage détaillé de M. Vitali [1].

On peut toutefois remarquer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si $f(t \mid u)$ est un point-fonction qui pour $u \to u^{(0)}$ a pour limite le point $\varphi(t)$ de $\mathcal{H}$ on a*

$$\lim_{u \to u^{(0)}} \int_g f(t \mid u)^2 \, dt = \int_g \varphi(t)^2 \, dt.$$

Théorème II. — *Si $f_1(t \mid u)$ et $f_2(t \mid u)$ sont deux points-fonctions de la seule variable u, dérivables par rapport à u, sera aussi dérivable par rapport à u le point-fonction*

$$F(u) = \int_g f_1(t \mid u) . f_2(t \mid u) \, dt$$

et l'on aura

$$F'(u) = \int_g (f'_1 f_2 + f_1 f'_2) \, dt,$$

où φ' désigne la dérivée de φ par rapport à u.

Cela posé je dirai que j'ai eu l'occasion de remarquer qu'en étudiant

les proprietés de certains espaces fonctionnels tels que l'espace des fonctions continues, ou continues et dérivables, celui des fonctions holomorphes dans un domaine $\mathcal{D}$ et continues dans le domaine fermé $\mathcal{D}+(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D})$ désignant la frontière de $\mathcal{D}$, etc., qui pourraient bien être considérés comme des espaces à une infinité dénombrable de dimensions et qu'on peut bien faire rentrer parmi les espaces $\mathcal{H}$, il y avait parfois avantage de les considérer autant que possible comme des espaces ayant une infinité continue de dimensions [2, *a*, *b*. *c*, *d*].

J'ai proposé alors [2, *a*, *d*] d'appeler « holoespace » tout espace fonctionnel qui peut être conçu à une infinité continue de coordonnées. L'espace (C) des fonctions continues dans $0-1$. celui (F) de fonctions holomorphes à l'intérieur d'un domaine donné $\mathcal{D}$ et continues dans ce domaine fermé. sont par exemple des holoespaces. Dans le premier cas, en effet, on peut prendre pour coordonnées d'un point $f(t)$ de l'espace (C) envisagé, l'ensemble (continu) des valeurs que $f(t)$ prend pour $0 \leqq t \leqq 1$; dans le deuxième cas pour coordonnées d'un point

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \text{ de l'espace (F)}$$

des fonctions holomorphes à l'intérieur d'un domaine $\mathcal{D}$, par exemple le cercle unité $\mathcal{C}$, et continues dans ce domaine fermé, on peut prendre la chaîne des valeurs que $f(z)$ prend sur le contour $(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ ou, comme on le verra ensuite, les deux chaînes de valeurs que la partie réelle $P(x, y)$ et la partie imaginaire $Q(x. y)$ de $f(z)$ prennent sur ce contour.

Les holoespaces (C) et (F) sont deux espaces hilbertiens particuliers; parmi ces espaces ils sont, d'autre part, extrêmement remarquables.

Il s'agira ici : 1° de montrer comment on peut établir d'une façon tout à fait systématique la géométrie de l'espace (F) tout en généralisant la géométrie ordinaire des espaces euclidiens à un nombre fini ou à une infinité dénombrable de coordonnées; 2° de montrer comment en considérant l'espace (D) des fonctions continues et dérivables dans un intervalle donné $a-b$, et en l'envisageant toujours comme ayant une infinité continue de coordonnées. comme on l'a précédemment déclaré pour l'espace (C). on peut établir une géométrie de cet espace qui généralise celle des espaces ordinaires

euclidiens et qui a les plus étroits rapports avec la théorie des équations différentielles ordinaires.

Les deux choses, intimement liées entre elles, attendent encore, d'ailleurs une fusion plus intime.

CHAPITRE II.

La géométrie de l'espace (F) des fonctions holomorphes a l'intérieur d'un domaine ($\mathcal{D}$) et continues dans ce domaine fermé.

1. La notion de distance et propriétés fondamentales. — Soient $\mathcal{C}$ le cercle de rayon égal à l'unité et centré à l'origine; (F) l'espace des fonctions holomorphes à l'intérieur de $\mathcal{C}$, et continues dans ce domaine fermé; $f(z) = P_f(x, y) + iQ_f(x, y)$ l'élément générique de (F); $P_f(\theta)$ et $Q_f(\theta)$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ les valeurs que $P_f(x, y)$ et $Q_f(x, y)$ acquièrent dans le point $e^{i\theta}$ du contour ($\mathcal{C}$) de $\mathcal{C}$. Nous aurons occasion par la suite d'introduire aussi l'hypothèse que $P_f(\theta)$ et $Q_f(\theta)$ soient dérivables par rapport à θ dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Cette hypothèse n'est d'ailleurs pas nécessaire pour beaucoup des considérations que nous aurons à faire tout à l'heure. On s'en apercevra de soi-même lorsqu'elle interviendra dans les raisonnements ultérieurs.

Cela posé si Γ est un cercle centré à l'origine et de rayon $\rho < 1$, on appelle [$2d$] :

a. Distance entre deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ par rapport au cercle Γ la valeur numérique positive ou nulle de l'expression

$$(1) \qquad (f, g)_\Gamma = \left\{ \int_0^{2\pi} [P_f(\rho e^{i\theta}) - P_g(\rho e^{i\theta})]^2 \rho \, d\theta + \int_0^{2\pi} [Q_f(\rho e^{i\theta}) - Q_g(\rho e^{i\theta})]^2 \rho \, d\theta \right\}^{\frac{1}{2}};$$

b. Distance entre $f(z)$ et $g(z)$ par rapport à $\mathcal{C}$, ou distance entre $f(z)$ et $g(z)$ sans rien adjoindre, la valeur numérique positive ou nulle de l'expression

$$(2) \qquad (f, g) = \left\{ \int_0^{2\pi} [P_f(\theta) - P_g(\theta)]^2 \, d\theta + \int_0^{2\pi} [Q_f(\theta) - Q_g(\theta)]^2 \, d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
SAINT-MARTIN-D'HÈRES

On dit enfin que :

c. La distance entre les deux fonctions f_n et f converge à zéro avec $\frac{1}{n}$ « vers » la frontière $(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ lorsqu'il existe une suite $\{\Gamma_p\}$ de cercle Γ_p centrés à l'origine, emboîtés entre eux, de rayons $\rho_p < 1$, $\rho_p < \rho_{p+1}$, $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ avec $\lim\limits_{p \to \infty} \rho_p = 1$, telle que

$$\lim_{n \to \infty} (f, f_n)_{\Gamma_p} = 0, \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

On démontre alors que :

1° *Si* K *est une constante complexe quelconque* $K = a + ib$, *on a*

$$(Kf, Kg) = |K|(f, g). \tag{4}$$

Si, en effet, f et g sont multipliés par $K = a + ib$, pour obtenir (Kf, Kg) il suffira de substituer dans (2) à la place de

$$P_f(\theta), \quad Q_f(\theta), \quad P_g(\theta), \quad Q_g(\theta)$$

les expressions

$$aP_f(\theta) - bQ_f(\theta), \quad bP_f(\theta) + aQ_f(\theta), \quad aP_g(\theta) - bQ_g(\theta), \quad bP_g(\theta) + aQ_g(\theta)$$

et l'on parvient bien ainsi à la relation (4).

2° *Si la distance (f_n, f) converge à zéro « vers » la frontière de $\mathcal{C}$, quel que soit la suite $\{\Gamma_p\}$ de cercles Γ_p centrés à l'origine, de rayons*

$$\rho_p < 1, \quad \rho_p < \rho_{p+1} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \quad \textit{avec} \lim_{p \to \infty} \rho_p = 1,$$

on a toujours

$$\lim_{n \to \infty} (f, f_n)_{\Gamma_p} = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

3° *La condition nécessaire et suffisante pour que la distance (f_n, f) converge à zéro « vers » la frontière $(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ c'est que $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ à l'intérieur de $\mathcal{C}$.*

Cette condition est en effet suffisante, car si elle est satisfaite il existera bien une suite $\{\Gamma_p\}$ de cercles Γ_p centrés à l'origine, de rayons

$$\rho_p < 1, \quad \rho_p < \rho_{p+1} \qquad (p = 1, 2, 3)$$

et $\lim_{p\to\infty} \rho_p = 1$ sur chacun desquels f_n converge uniformément vers $f(z)$ et par conséquent $P_{f_n}(\rho_p e^{i\theta})$ et $Q_{f_n}(\rho_p e^{i\theta})$ convergent uniformément vers $P_f(\rho_p e^{i\theta})$ et $Q_f(\rho_p e^{i\theta})$. Il s'ensuit que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existera un indice n_0 tel que pour $n > n_0$ on a

$$(f_n, f)_{\Gamma_p} = \left\{ \int_0^{2\pi} [P_{f_n}(\rho_p e^{i\theta}) - P_f(\rho_p e^{i\theta})]^2 \, d\theta \right.$$
$$\left. + \int_0^{2\pi} [Q_{f_n}(\rho_p e^{i\theta}) - Q_f(\rho_p e^{i\theta})]^2 \, d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Elle est d'autre part aussi nécessaire. Si en effet $\mathfrak{A}$ est un domaine complètement intérieur à $\mathcal{C}$, et si l'on suppose que (f_n, f) converge à zéro « vers » la frontière de $\mathcal{C}$, il existera un cercle Γ_p qui contient complètement à son interieur le domaine $\mathfrak{A}$. Si l'on appelle alors M la borne supérieure des valeurs $\left|\frac{z+x}{z-x}\right|$ pour x dans le domaine $\mathfrak{A}$ et z sur Γ_p, ε étant positive quelconque, on pourra déterminer un rang n_0 tel que pour $n > n_0$ on ait

$$(f_n, f)_{\Gamma_p} < \varepsilon$$

et cela à cause des relations

$$f(x) = iQ_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_f(\rho_p e^{i\theta}) \frac{z+x}{z-x} \rho_p \, d\theta,$$

$$f(x) = P_0 + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_f(\rho_p e^{i\theta}) \frac{z+x}{z-x} \rho_p \, d\theta,$$

où $P_0 + iQ_0 = f(0)$; et l'on parvient alors aisément à la conclusion que, pour tout x dans $\mathfrak{A}$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| < \sigma M,$$

où σ est très petit comme ε. C. Q. F. D.

On démontre aussi que l'espace (F) est séparable, c'est-à-dire qu'il peut être considéré comme l'ensemble dérivé d'un ensemble dénombrable de ses éléments. Il admet en outre une généralisation du théoreme de Cauchy, car :

Si $\{f_n(z)\}$ est une suite d'éléments de (F), *et si à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un rang n_0 tel que pour $n > n_0$ et p entier positif quelconque, on ait*

$$(f_n, f_{n+p}) < \varepsilon;$$

$\{f_n(z)\}$ converge uniformément à l'intérieur de $\mathcal{C}$ vers une fonction limite nécessairement holomorphe dans cet intérieur.

On en déduit alors, aussi la proposition suivante [**2** *d*] :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{f_n(z)\}$ d'éléments de (F) *converge uniformément vers une fonction limite $f(z)$ à l'intérieur de $\mathcal{C}$ est que, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour $n > n_0$ et p entier positif quelconque on ait « vers » la frontière de $\mathcal{C}$*

$$(f_n, f_{n+p}) < \varepsilon.$$

2. **Définition de la limite.** — *On dit qu'une suite $\{f_n(z)\}$ d'éléments de* (F) *converge vers l'élément $f(z)$ si (f_n, f) converge à zéro « vers » la frontière de $\mathcal{C}$.*

Par conséquent une suite $\{f_n(z)\}$ d'éléments de (F) est convergente vers la limite $f(z)$ si les $f_n(z)$. convergent uniformément à l'inrieur de $\mathcal{C}$ vers $f(z)$.

Il s'ensuit que $f(z)$ n'appartient pas nécessairement à (F), c'est-à-dire que (F) n'est pas complet [5 *a*, **6**].

Cela posé :

Si une suite $\{f_n(z)\}$ de points de (F) *admet une limite $f(z)$, cette limite est unique.*

Il existera en effet une suite $\{\Gamma_p\}$ de cercles Γ_p centrés à l'origine de rayons

$$\rho_p < 1, \quad \rho_p < \rho_{p+1} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \text{ avec } \lim_{p \to \infty} \rho_p = 1,$$

telle que

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, f)_{\Gamma_p} = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

et à l'intérieur de chaque Γ_p on aura, par conséquent, convergence uniforme des f_n vers f. Si l'on suppose alors que $\varphi(z)$ est limite de $\{f_n(z)\}$, il suffira de considérer deux cercles consécutifs Γ_r, Γ_{r+1}, de la suite de cercles $\{\Gamma_p\}$ et remarquer qu'à partir d'un certain indice n_1 on aura $(f_n, f)_{\Gamma_{r+1}} < \varepsilon$, et à partir d'un autre indice n_2 on aura $(f_n, \varphi)_{\Gamma_{r+1}} < \varepsilon$. A l'intérieur de Γ_{r+1} on aura alors convergence uniforme des f_n vers f et vers φ. Et comme

$$(f, \varphi)_{\Gamma_r} \leq (f, f_n)_{\Gamma_r} + (f_n, \varphi)_{\Gamma_r}.$$

on en déduirait $(f, \varphi)_{\Gamma_r} < \eta$ avec η positif arbitrairement petit; donc $(f, \varphi)_{\Gamma_r} = 0$. Mais alors à l'intérieur de Γ_r, et donc partout, $f \equiv \varphi$.

On démontre de même que :

Si dans une suite $\{f_n(z)\}$ *d'éléments de* (F) *on a* $f_n(z) = f(z)$, *quel que soit* n, *la suite est convergente et sa limite* (unique) *est* $f(z)$.

Si une suite $\{f_n(z)\}$ *d'éléments de* (F) *est convergente et a la limite* $f(z)$, $f(z)$ *c'est aussi la limite de chaque suite* $\{f_{n_p}(z)\}$ *extraite de la suite donnée.*

En outre :

L'ensemble dérivé d'un ensemble d'éléments de (F) *est toujours fermé.*

Pour la démonstration de cette propriété un peu longue et délicate, voir [2 *d*].

3. Les travaux de MM. E. Hille et J. Tamarkin. — Observons maintenant que MM. E. Hille et J. Tamarkin qui avaient en vue l'étude des intégrales de Laplace-Stieltjes, en étudiant un certain espace fonctionnel différent de celui de M. Minetti avaient donné, quelque temps après M. Minetti, une définition de distance entre deux fonctions de leur espace, très semblable à celle précédemment donnée par ce dernier auteur.

Dans l'espace de MM. Hille et J. Tamarkin, en particulier l'intérieur de $\mathcal{C}$ se trouve remplacé par le demi-plan complexe supérieur.

Ce fut à l'occasion d'une conférence tenue par M. Fréchet dans la Brown University sur les travaux de M. Minetti, que ce savant ayant appris les travaux de MM. Hille et Tamarkin fut conduit à étudier l'espace H_2 que nous étudierons dans le paragraphe suivant, en établissant entre les deux définitions de distance données par M. Minetti et, ensuite, par MM. Hille et Tamarkin une analogie frappante [5 *b*]. Nous renvoyons les lecteurs pour l'étude des travaux de MM. Hille et Tamarkin aux Mémoires de ces auteurs [4], car il ne rentrent pas, au moins d'une façon directe, dans le cadre de cet exposé, tandis que nous allons ici étudier, en détail, l'espace fonctionnel H_2 de

M. Fréchet en exposant aussi des résultats tout à l'heure inédits sur cet espace, dus à l'obligeance de M. Fréchet qui a bien voulu nous les communiquer personnellement.

4. L'espace H_0 complet de M. Fréchet [5 *b*]. — On a vu que l'espace (F) n'est pas complet. D'ailleurs M. Fréchet a indiqué comment on peut utilement compléter l'espace (F) considéré par M. Minetti. En effet, au lieu de supposer, comme le fait ce dernier auteur, qu'une $f(z)$ existe et est continue sur le contour $(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$, il convient généralement de dire que $f(z)$ existe sur $(\mathcal{C})$ quand $f(rz)$ tend vers une limite déterminée quand r croît vers 1 par valeurs réelles plus petites. Il n'est pas indispensable d'ailleurs, pour que la définition de M. Minetti ait un sens, que cette limite existe partout sur $(\mathcal{C})$ et qu'elle soit continue. Il suffit qu'elle existe partout sur $(\mathcal{C})$ et que son carré soit sommable sur $(\mathcal{C})$.

M. Fréchet considère alors un espace un peu plus général que celui de M. Minetti, mais sensiblement moins général que l'espace qu'il avait considéré dans sa Thèse [5 *c*].

Pour le définir, il suffit de considérer d'abord une fonction $f(z)$ holomorphe à l'intérieur de $\mathcal{C}$ pour laquelle

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

soit sa série de Taylor. $\mathcal{C}$ étant maintenant le cercle $|z| \leq r < 1$, on a

$$I_r = \int_{(\mathcal{C})} |f(z)|^2 \, |dz| = \int_{(\mathcal{C})} f(z) \bar{f}(z) \, r \, d\theta,$$

en désignant, en général, par $\bar{u}$ le nombre complexe conjugué de u. On a donc

$$\begin{aligned} I_r &= r \int_0^{2\pi} [a_0 + a_1 r e^{i\theta} + \ldots + a_n r^n e^{in\theta} + \ldots] \\ &\qquad \times [\bar{a}_0 + \bar{a}_1 r e^{-i\theta} + \ldots + \bar{a}_n r^n e^{-in\theta} + \ldots] \, d\theta \\ &= 2\pi r [|a_0|^2 + \ldots + |a_n|^2 r^{2n} + \ldots]. \end{aligned}$$

La « valeur efficace » de $|f(z)|$ sur $(\mathcal{C})$ est

$$m_r = \sqrt{\frac{I_r}{2\pi r}}.$$

Elle croît donc avec r [si $f(z)$ ne se réduit pas à une constante].

L'ensemble H de toutes les fonctions $f(z)$ holomorphes à l'intérieur de $\mathcal{C}$, se décompose donc en deux ensembles : l'ensemble H_2 des fonctions $f(z)$ pour lesquelles m_r a une limite finie quand r tend vers 1 par valeurs plus petites, limite que nous désignerons par $\|f\|$ et que nous appellerons la *norme* de f et l'ensemble H^* où m_r tend vers l'infini quand r tend vers 1.

Or, on sait que si la limite $\|f\|$ est finie :

1° *La série* $\Sigma_n |a_n|^2$ *est convergente;*

2° *Sa somme est égale à* $\|f\|^2$;

3° $f(rz)$ *a, lorsque* r *tend vers* 1 *par valeurs plus petites, une limite finie presque partout quand* z *varie sur* $(\mathcal{C})$;

4° *Cette limite est de carré sommable en module;*

5° *La série de Fourier de cette limite est* $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n e^{in\theta}$;

6° *En désignant par* $f(z)$ *la limite de* $f(rz)$ *quand* $|z| = 1$ *et* r *tend vers* 1 *par valeurs plus petites partout où cette limite existe, et en posant* $f(z) = 0$, *par exemple, partout ailleurs, sur* $(\mathcal{C})$, *on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(\mathcal{C})} |f(z)|^2 |dz| = \Sigma_n |a_n|^2;$$

7° *On a, quand* x *est intérieur à* $\mathcal{C}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathcal{C})} \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

En résumé, on peut dire que toute fonction $f(z)$ de l'ensemble H_2 est de carré sommable en module sur $(\mathcal{C})$ et que sa valeur efficace sur $(\mathcal{C})$ est

$$\|f\| = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{(\mathcal{C})} |f(z)|^2 |dz|\right\}^{\frac{1}{2}} = \{\Sigma_n a_n^2\}^{\frac{1}{2}} = \lim_{r\to 1}\{\Sigma_n |a_n r^n|^2\}.$$

Supposons maintenant que $f(z)$ et $g(z)$ soient deux fonctions de H_2; il est clair que leur différence appartient aussi à H_2. Si on la désigne par F, *la condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit égal à* g *à l'intérieur de* $\mathcal{C}$ *et sur* $(\mathcal{C})$ *est que* $\|F\| = 0$.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si

$\|F\| = 0$ on a $\Sigma_n |a_n|^2 = 0$; donc les a_n sont nuls et, par suite, $F(z) = 0$ à l'intérieur de $\mathcal{C}$; $f(z) = g(z)$ à cet intérieur et par suite sur $(\mathcal{C})$.

Ceci pourrait nous conduire à définir l'écart de f et de g comme la quantité

$$(f, g) = \|f - g\| = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{(\mathcal{C})} |f(z) - g(z)|^2 \, |dz| \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Mais observons, de plus, que si f, g, h sont trois fonctions de H_2, on a

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{(\mathcal{C})} |f - g|^2 \, |dz| \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{(\mathcal{C})} |f - h|^2 \, |dz| \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{(\mathcal{C})} |g - h|^2 \, |dz| \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\int_{(\mathcal{C})} |f - g|^2 \, |dz| \leqq \int_{(\mathcal{C})} |f - h|^2 \, |dz| + \int_{(\mathcal{C})} |g - h|^2 \, |dz|$$

$$+ 2 \left\{ \int_{(\mathcal{C})} |f - h|^2 \, |dz| \int_{(\mathcal{C})} |g - h|^2 \, dz| \right\}^{\frac{1}{2}},$$

comme il résulte aisément, en posant

$$f - h = \rho_1 e^{i\lambda_1}, \qquad g - h = \rho_2 e^{i\lambda_2},$$

de la bien classique inégalité de Schwarz.

Donc, pour trois éléments quelconques f, g, h de H_2, on a

$$(f, g) \leqq (f, h) + (h, g).$$

C'est cette inégalité triangulaire qui va nous permettre maintenant de considérer (f, g) comme une distance.

Observons, en effet, que pour tout couple f, g d'éléments de H_2 nous savons maintenant définir un nombre fini bien déterminé

$$(f, g) = (g, f) \geqq 0.$$

De plus, si f, g sont identiques à l'intérieur de $\mathcal{C}$ les valeurs qu'on doit leur assigner sur $(\mathcal{C})$ seront égales et par suite $(f, g) = 0$. Réci-

proquement, si $(f, g) = 0$,

$$\int_{(\mathcal{C})} |f(z) - g(z)|^2 \, |dz| = 0,$$

donc $f(z) = g(z)$ presque partout sur $(\mathcal{C})$. Dès lors, pour x intérieur à $\mathcal{C}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathcal{C})} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathcal{C})} \frac{g(z)}{z-x}\,dz = g(x),$$

$f(z)$ et $g(z)$ étant maintenant égales à l'intérieur de $\mathcal{C}$ seront égales non seulement presque partout sur $(\mathcal{C})$, mais partout sur $(\mathcal{C})$.

Finalement, l'expression actuelle de la distance satisfait bien aux autres conditions qu'on impose généralement à cette notion, pourvu toutefois, qu'on ait soin de définir convenablement la convergence d'une suite d'éléments de H_2.

On dira que le point f_n de H_2 tend vers le point f de H_2 si

$$\int_{(\mathcal{C})} |f_n(z) - f(z)|^2 \, |dz| \to 0.$$

Cette définition, qui permet bien, comme on le verra, d'affirmer que l'espace H_2 de M. Fréchet est complet, tandis que celui (F) de M. Minetti ne l'était pas, présente d'ailleurs l'inconvénient, comme l'a remarqué M. Fréchet lui-même, de n'être pas compatible avec la définition de la limite qu'on adopte dans l'espace total F des fonctions holomorphes à l'intérieur de $\mathcal{C}$, à savoir convergence uniforme à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

Plus précisément, on peut voir que, pour que cette nouvelle distance (f_n, f) converge vers zéro, il est nécessaire, mais il n'est pas suffisant que $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ dans toute aire complètement intérieure à $\mathcal{C}$. C'est ce que l'on voit de suite en prenant $f(z) \equiv 0$, $f_n(z) = z^n$ qui sont bien des éléments de H_2. Or $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ à l'intérieur de $\mathcal{C}$, et pourtant

$$2\pi(f_n, f)^2 = \int_{(\mathcal{C})} |z|^{2n} \, |dz| = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Donc $(f_n, f) = 1$ ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Par contre, si f_n, f sont deux fonctions quelconques de H_2 et si

$|x| \leqq \rho < 1$, on a

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathcal{C})} \frac{f_n(z) - f(z)}{z - x} dz \right| \\
&\leqq \frac{1}{2\pi} \int_{(\mathcal{C})} \frac{|f_n(z) - f(z)|}{1 - |x|} |dz| \\
&\leqq \frac{1}{2\pi(1 - |x|)} \sqrt{\left[\int_{(\mathcal{C})} |f_n(z) - f(z)|^2 |dz| \right] \int_{(\mathcal{C})} |dz|} \\
&= \frac{1}{1 - |x|} (f_n, f) \leqq \frac{(f_n, f)}{1 - \rho}.
\end{aligned}$$

Donc si la distance (f_n, f) tend vers zéro, $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ dans tout cercle $|x| \leqq \rho < 1$. On voit même que $[1 - |x|]|f_n(x) - f(x)|$ converge dans l'aire $\mathcal{C}$, contour compris.

On peut même perfectionner ce dernier résultat, pour une fonction $f(z)$ de H_2, on a aussi, en effet,

$$\begin{aligned}
|f(x)|^2 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - x} dz \right|^2 \leqq \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \int_{\mathcal{C}} |f(z)| \left| \frac{dz}{z - x} \right|^2 \right\}^2 \\
&\leqq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{C}} |f(z)|^2 |dz| \int_{\mathcal{C}} \frac{|dz|}{|z - x|^2} \leqq \frac{1}{2\pi} \|f\|^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - re^{i\varphi}|^2} \\
&= \frac{\|f\|^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\psi}{1 + r^2 - 2r\cos\psi},
\end{aligned}$$

où l'on a posé $z = re^{i\theta}$, $x = re^{i\varphi}$, $\psi = \theta - \varphi$. D'où

$$|f(x)|^2 \leqq \frac{\|f\|^2}{2\pi} \frac{2\pi}{1 - r^2}; \qquad |f(x)| \leqq \frac{\|f\|}{\sqrt{1 - |x|^2}}$$

et quand on prend $f(x) = g(x) - g_n(x)$,

$$\sqrt{1 - |x|}\, |g(x) - g_n(x)| \leqq \frac{(g, g_n)}{\sqrt{1 + |x|}} \leqq (g, g_n).$$

Ainsi, quand la distance (g, g_n) tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ non seulement $[1 - |x|][g(x) - g_n(x)]$ converge uniformément dans $\mathcal{C}$ (contour compris), mais il en est de même de $\sqrt{1 - |x|}\,[g(x) - g_n(x)]$.

Il n'est pas évident d'ailleurs que cette précision supplémentaire fournisse cette fois une condition suffisante. Si $f(x)$ est une fonction telle que $\sqrt{1 - |x|}\,|f(x)|$ ait une borne supérieure finie ε quand x

varie dans $\mathcal{C}$, on ne peut pas en déduire que $\|f\|$ soit petite, ni même que $\|f\|$ soit finie.

Car sur une circonférence $|x| = r$, on aura

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{\mathcal{C}} |f(x)|^2 |dx| \leqq \frac{c^2}{1-r}, \qquad m_r \leqq \frac{c}{\sqrt{1-r}},$$

et cela ne permet pas d'affirmer que m_r tend vers une limite finie quand r tend vers un.

5. **Propriétés topologiques de l'espace** H_2. — Pour ce qui concerne les propriétés topologiques de l'espace H_2, c'est-a-dire les propriétés qui sont indépendantes de la forme particulière adoptée pour la distance, mais qui sont déterminées par la nature des éléments de H_2 et de la définition adoptée pour la convergence, il est aisé de voir tout d'abord que H_2 est parfait et séparable. Pour la première de ces deux propriétés, il suffit de considérer, $f(z)$ étant un élément quelconque de H_2, les $f_n(z) = f(z) + \frac{1}{n}$ qui appartiennent à H_2 et tendent vers $f(z)$; pour la deuxième il suffit de considérer l'ensemble des polynomes à coefficients rationnels.

Mais ce qu'il importe surtout de considérer, c'est que H_2, contrairement à ce qu'il arrive pour l'espace (F) de M. Minetti, est un espace *complet*, c'est-à-dire que si la suite $f_n(z)$ est telle que (f_n, f_q) tend vers zéro quand n et q croissent simultanément, cette suite converge alors dans H_2.

En effet, soit $f_n(z) = \Sigma_p a_p^{(n)} z^p$, en posant sur $\mathcal{C}$, $z = e^{i\theta}$, on a presque partout sur $\mathcal{C}$ avec une claire signification des symboles adoptés

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \Sigma_p a_p^{(n)} e^{in\theta} = u_0^{(n)} + i v_0^{(n)} \\ &\quad + \sum_{p=1}^{p=\infty} \{ [u_p^{(n)} \cos n\theta - v_p^{(n)} \sin\theta] \\ &\qquad + i[u_p^{(n)} \sin n\theta + v_p^{(n)} \cos n\theta] \}, \\ 2\pi(f_n, f_q)^2 &= [u_0^{(n)} - u_0^{(q)}]^2 + [v_0^{(n)} - v_0^{(p)}]^2 \\ &\quad + 2\sum_{p=1}^{p=\infty} \{ [u_p^{(n)} - u_p^{(q)}]^2 + [v_p^{(n)} - v_p^{(q)}]^2 \} \\ &= \int_0^{2\pi} [P_n(\theta) - P_q(\theta)]^2 d\theta + \int_0^{2\pi} [Q_n(\theta) - Q_q(\theta)]^2 d\theta, \end{aligned}$$

où $f_n(e^{i\theta}) = P_n(\theta) + iQ_n(\theta)$.

Alors on voit que la première intégrale du dernier membre des égalités précédentes est aussi infiniment petite quand $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{q}$ le sont simultanément. Donc il existe, d'après le théorème de F. Riesz et Fischer [14; 15; 13, *a*, *b*, *c*; 16, *a*, *b*], une fonction $P(\theta)$ telle que cette première intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Et l'on a

$$\lim_{n\to\infty} u_p^{(n)} = u_p, \qquad \lim_{n\to\infty} v_p^{(n)} = v_p,$$

les u_p, $-v_p$ étant les coefficients de Fourier de $P(\theta)$. De même pour la deuxième intégrale du dernier membre des inégalités précédentes, et il s'ensuit donc qu'en posant

$$f(x) = (u_0 + iv_0) + \Sigma_p (u_p + iv_p) e^{ni\theta} r^n,$$

où $x = re^{i\theta}$, $f(x)$ appartient à H_2 et que

$$\begin{aligned} 2\pi(f_n, f)^2 &= \int_{\mathcal{C}} |f_n(z) - f(z)|^2 \, |dz| \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ [P_n(\theta) - P(\theta)]^2 \, d\theta + [Q_n(\theta) - Q(\theta)]^2 \right\} d\theta; \end{aligned}$$

donc (f_n, f) tend aussi vers zéro.

Il y a lieu d'observer au contraire que l'espace (F) de M. Minetti ne peut pas être complet car dans son espace il suppose que les éléments de (F) sont continus sur la frontière de $\mathcal{C}$.

C'est ce que l'on voit aisément en prenant par exemple

$$f_n(z) = 1 + \frac{z}{1} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{n-1}.$$

Dans ce cas pour la distance (f_n, f_{n+p}) au sens de M. Minetti on a

$$(f_n, f_{n+p}) = \sqrt{2\pi \left[\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \right]}$$

et elle converge évidemment à zéro quand n croît et si $f_n(z)$ converge bien à l'intérieur de $\mathcal{C}$ vers une fonction holomorphe il n'existe pourtant aucune fonction $f(z)$ continue sur la frontière de $\mathcal{C}$ telle que (f_n, f) tende vers zéro.

Il ne faut pas oublier cependant, comme on l'a déjà remarqué, que l'on arrive à la conclusion que l'espace H_2 *de M. Fréchet est complet au moyen d'une définition de convergence, qui n'est pas*

compatible avec la définition courante de convergence qu'on adopte dans ces types d'espaces et qui est conservée dans l'espace de M. Minetti, à savoir la convergence uniforme à l'intérieur du domaine.

On pourrait pousser bien plus loin l'analyse des propriétés topologiques des espaces de MM. Minetti et Fréchet; toutefois n'insistons pas ici davantage, sur ce point.

6. **L'espace F des fonctions holomorphes à l'intérieur d'un domaine donné.** — Il est à remarquer que presque toutes les propriétés établies précédemment pour l'espace (F), considéré par M. Minetti, des fonctions holomorphes, par exemple dans le cercle unité $\mathcal{C}$ et continues dans ce domaine fermé, subsistent également lorsque l'on considère le cas, beaucoup plus général, de l'espace F des fonctions holomorphes à l'intérieur de $\mathcal{C}$ et ayant sur son contour, au contraire, une allure quelconque [2, *e*].

M. Minetti s'était récemment proposé d'établir les propriétés topologiques de cet espace F, et surtout le fait que cet espace est un espace « distancié », d'une façon systématique *et sans avoir recours à des définitions de distance qui ne soient pas naturelles*. Il y a réussi au moyen de la définition de distance qu'il avait introduit dans le cas de l'espace (F) précédemment étudié (*voir* définitions *a*, *b*, Chap. II, § 1), et en utilisant convenablement le concept qu'il avait précédemment introduit dans l'Analyse fonctionnelle pour l'espace (F) de convergence à zéro de la distance de deux fonctions f_n et f « vers » la frontière ($\mathcal{C}$) de $\mathcal{C}$ (*voir* définition *c*, Chap. II, § 1). Il est évident d'ailleurs que ce concept peut être bien utilisé même dans le cas où f_n et f soient des éléments de F. Dans ce cas, ne connaissant rien sur l'allure d'un élément f de F sur la frontière ($\mathcal{C}$) de $\mathcal{C}$ on ne peut pas introduire, comme on faisait pour (F), une « distance » entre deux éléments f et g de F telle que la notion de distance b introduite au Chapitre II (§ 1); l'idée fondamentale de M. Minetti a été celle de remplacer la notion d'une distance unique par « *l'abstrait de la classe des distances* $(f_n, f)_{\Gamma_p}$ *entre deux éléments* f_n *et* f *de* F *prises par rapport à une suite* Γ_p *de cercles complètement intérieurs à* $\mathcal{C}$ *et convergents vers la frontière de* $\mathcal{C}$ », distances qui même dans le cas de F. gardent une signification bien précise.

Un point limite d'une suite $\{f_n\}$ de points f_n de F est toujours une fonction f (holomorphe à l'intérieur de $\mathcal{C}$) telle qu'à l'intérieur de $\mathcal{C}$ les f_n convergent uniformément vers f.

Il démontre alors que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{f_n\}$ de points f_n de F *soit convergente vers un point f de* F, *c'est que la distance (f_n, f) converge à zéro vers la frontière de $\mathcal{C}$.*

On s'aperçoit que l'idée fondamentale de M. Minetti précédemment rappelée revient au fait. sur lequel cet auteur insiste beaucoup, qu'un domaine (ouvert) $\mathcal{D}$ doit être considéré toujours comme la classe (l'ensemble) de tous les domaines fermés complètement intérieurs à $\mathcal{D}$; on y voit ici quelque chose qui ressemble beaucoup au concept de nombre irrationnel conçu comme l'abstrait de la classe des nombres rationnels qui eux s'approchent par excès et par défaut, et il semble que cette idée puisse prendre une place remarquable même au point de vue conceptuel dans beaucoup de questions d'Analyse fonctionnelle.

On définit ensuite le voisinage $V_{\Gamma_p}^{(\sigma)}(f_0)$ d'un élément f_0 de F : c'est l'ensemble de tous les éléments f de F tels que $(f, f_0)_{\Gamma_p} < \sigma$.

On en déduit que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément f de F *soit point d'accumulation d'un ensemble* E *d'éléments de* F, *c'est que* E *ait un élément au moins en commun, distinct de f avec chaque voisinage $V_{\Gamma_p}^{(\sigma)}(f)$ de f.*

En d'autres termes, l'espace F est un espace (V).

On vérifie, en outre, qu'au moyen de cette définition de voisinage il est bien possible d'exprimer les trois conditions de Riesz auxquelles F satisfait. Comme d'autre part « chaque ensemble dérivé d'un ensemble E de F est fermé » on conclut que F est un espace accessible. C'est le point de départ pour démontrer qu'il est « distancié ». Commençons en effet par rappeler que [5, *a*; 6] :

1° On appelle « couverture » d'un espace, chaque système d'ensembles, tel que chaque point de l'espace soit intérieur à un, au moins, des ensembles du système;

2° On dit qu'une suite de couvertures $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ d'un

espace est monotone, si V et W étant deux ensembles quelconques du ystème F_{n+1} distincts ou non, mais tels qu'ils n'aient pas de points ntérieurs en commun, il existe un ensemble du système F_n qui contient en même temps V et W;

3° On dit, enfin, qu'une suite monotone de couvertures F_1, $F_2, \ldots, F_n, \ldots$ d'un espace (V) est complète, si, f étant un point quelconque de cet espace et V_n un ensemble (quelconque) du système F_n, auquel f est intérieur, la suite $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ est une famille de voisinage de f équivalente à la famille, dénombrable ou non, donnée à l'avance, des voisinages de f.

M. Minetti démontre alors [2, e] que pour l'espace F sont bien satisfaites les conditions d'Alexandroff-Uryson-Fréchet, à savoir que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace (V) *accessible soit un espace* (D), *c'est-à-dire distancié, est qu'il existe une suite monotone complète de couvertures de cet espace.*

Il s'ensuit bien ce que l'on désirait établir.

7. L'espace A des fonctions analytiques uniformes au sens de Weierstrass. — Nous ajoutons que M. Minetti a de même commencé le premier à étudier la structure topologique de l'espace A des fonctions analytiques uniformes (et multiformes) au sens de Weierstrass [2, f]. Pour cet espace, il a donné tout récemment la définition de l'opération de dérivation des ensembles d'éléments, avec quoi l'espace est défini, et aussi la définition de voisinage d'un élément de l'espace en démontrant, en outre, qu'en vertu de sa définition de voisinage, l'espace A est bien un espace (V).

Mais nous ne pouvons entrer ici dans les détails de l'étude de cet espace, espace qui est d'ailleurs extrêmement important; nous renvoyons le lecteur au travail sur ce sujet [2, f].

CHAPITRE III.

MÉTRIQUE ANGULAIRE, LIGNES, LIGNES GÉODÉSIQUES, COURBURE GÉODÉSIQUE, ETC. DE L'ESPACE (F).

1. Conception fondamentale sur la nature de l'espace (F). — Revenons maintenant à l'espace (F) des fonctions holomorphes à l'intérieur du cercle unité $\mathcal{C}$ et continues dans ce domaine fermé

[**2**, *d*]. La conception fondamentale concernant la nature géométrique de cet espace celle même qui a présidé l'introduction de la notion *b* de distance donnée Chapitre II (§ **1**), c'est de le considérer à une infinité continue de dimensions.

Plus précisément on pense que le repère de cet espace soit constitué d'une infinité continue d'axes cartésiens en correspondance homéomorphe ordonnée avec les points d'un segment de longueur 4π obtenu en reportant consécutivement deux fois le segment $0 - 2\pi$ sur une droite réelle quelconque.

Le point d'abscisse 2π sera considéré en outre comme un point double : une fois, en le supposant comme appartenant au premier de ces deux segments, son extrêmité à droite; une seconde fois, comme appartenant au deuxième de ces deux segments, son extrêmité à gauche.

Si alors $f = P + iQ$ est un élément de (F), au point d'abscisse θ, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ du segment de longueur 4π tout à l'heure considéré, on pense attacher la valeur $P_f(\theta)$, tandis qu'à un point d'abscisse $2\pi + \theta$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ on pense attachée la valeur $Q_f(\theta)$. C'est ainsi que la chaîne des valeurs $P_f(\theta)$ et $Q_f(\theta)$ représente l'ensemble des coordonnées du point $f = P + iQ$ de (F).

Si en outre on appelle M le point représentatif de l'élément $f(z)$ de (F), et O ce qui représente l'élément $f \equiv 0$ de (F), O sera dit l'origine du repère de notre espace, tandis qu'on appellera « vecteur » qui va de O à M et l'on écrira (M — O) la couple ordonnée de deux points O et M. O et M seront les extrêmes du vecteur (M — O) tandis que la valeur numérique positive ou nulle de la distance (f, O) entre f et la fonction identiquement nulle, sera dite le « module » du vecteur (M — O).

Cela posé, en suivant toujours le principe du passage du fini à l'infini, du discontinu au continu, on appellera « cosinus de l'angle », que le vecteur (M — O) fait avec l'axe coordonné se rapportant au point $z = e^{i\theta}$ du contour $(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$, la valeur numérique de l'expression

$$\frac{P_f(\theta)}{\sqrt{\int_0^{2\pi} P_f(\theta)^2\, d\theta + \int_0^{2\pi} Q_f(\theta)^2\, d\theta}} = \lambda_1(\theta)$$

si l'on pense le point $z = e^{i\theta}$ comme appartenant au premier des deux

segments que l'on a auparavant considérés, et, au contraire, l'autre valeur

$$\frac{Q_f(\theta)}{\sqrt{\int_0^{2\pi} P_f(\theta)^2\,d\theta + \int_0^{2\pi} Q_f(\theta)^2\,d\theta}} = \lambda_2(\theta)$$

si l'on suppose le point $z = e^{i\theta}$ comme appartenant au second des deux segments rappelés tout à l'heure.

Ces définitions permettent l'extension rationnelle de toutes les formules de la trigonométrie ordinaire. En particulier, on obtient (égalité pythagorique)

$$\int_0^{2\pi} \lambda_1(\theta)^2\,d\theta + \int_0^{2\pi} \lambda_2(\theta)^2\,d\theta = 1.$$

On appellera « cosinus de l'angle » des deux vecteurs (M — O) et (M_1 — O), M_1 étant dans (F) le point représentatif d'une fonction [élément de (F)] $g(z)$, la valeur numérique de l'expression

$$\frac{\int_0^{2\pi} P_f(\theta)\,P_g(\theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi} Q_f(\theta)\,Q_g(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\int_0^{2\pi} P_f(\theta)^2\,d\theta + \int_0^{2\pi} Q_f(\theta)^2\,d\theta}\sqrt{\int_0^{2\pi} P_g(\theta)^2\,d\theta + \int_0^{2\pi} Q_g(\theta)^2\,d\theta}},$$

formule qui va généraliser évidemment une autre formule, trop connue pour qu'elle soit ici rappelée, de la Géométrie analytique ordinaire. Observons en passant qu'en vertu de l'inégalité classique de Schwarz, cette dernière valeur est en module toujours inférieure ou égale à l'unité.

On dira que les deux vecteurs (M — O) et (M_1 — O) sont orthogonaux si, et seulement si

$$\int_0^{2\pi} P_f(\theta)\,P_g(\theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi} Q_f(\theta)\,Q_g(\theta)\,d\theta = 0,$$

et dans ces conditions on dira aussi que sont orthogonales entre elles les deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ qui correspondent aux points M et M_1.

En rappelant en outre la formule

$$f(x) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} P_f(\theta)\frac{z+x}{z-x}\,d\theta + \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} Q_f(\theta)\frac{z+x}{z-x}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} P_f(\theta)\,d\theta + \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} Q_f(\theta)\,d\theta$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} P_f(\theta)\frac{z+x}{z-x}\,d\theta + \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} Q_f(\theta)\frac{z+x}{z-x}\,d\theta,$$

on appellera ligne de l'espace (F) l'ensemble des points de (F) qui représentent les

$$f(x\,|\,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} P_f(\theta\,|\,t)\,d\theta + \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} Q_f(\theta\,|\,t)\,d\theta$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} P_f(\theta\,|\,t)\frac{z+x}{z-x}\,d\theta + \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} Q_f(\theta\,|\,t)\frac{z+x}{z-x}\,d\theta,$$

où $P_f(\theta\,|\,t)$ et $Q_f(\theta\,|\,t)$ sont des fonctions réelles des deux variables réelles θ et t, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, telles que pour chaque valeur de t comprise entre t_0 et t_1 soit périodique pour $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ et satisfasse en outre à la condition intégrale

$$\int_0^{2\pi}\left\{P_f(\theta\,|\,t)\frac{2d}{r^2} + Q_f(\theta\,|\,t)\frac{1-\rho^2}{r^2}\right\}d\theta = \textbf{const.}$$

où maintenant $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ sont les coordonnées d'un point (x, y) intérieur à $\mathcal{C}$, $\rho < 1$; $d = \rho\sin(\theta - \varphi)$; et

$$r^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta - \varphi),$$

tandis que $z = e^{i\theta}$ est toujours un point du contour $(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$.

Sous cette dernière condition, on est assuré, en effet, [2, g] que pour chaque valeur de t ($t_0 \leqq t \leqq t_1$), les fonctions correspondantes $P_f(\theta\,|\,t)$ et $Q_f(\theta\,|\,t)$ sont telles que l'expression $P_f(\theta\,|\,t) + iQ_f(\theta\,|\,t)$ représente toujours les valeurs qu'une fonction $f(z\,|\,t)$ holomorphe à l'intérieur de $\mathcal{C}$ et continue dans ce cercle fermé acquiert au contour $(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$. La précédente expression de $f(x\,|\,t)$ sera dite l'image fonctionnelle de la ligne envisagée.

Les deux points de (F) qui représentent les deux fonctions $f(x\,|\,t_0)$ et $f(x\,|\,t_1)$ seront dits les deux extrêmes de la ligne.

En rappelant alors la définition de distance entre deux éléments

de (F), *b*, Chap. II, § 1, on trouve pour l'élément linéaire ds de la ligne envisagée

$$ds^2 = dP^2 = \left[\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 d\theta + \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 d\theta\right] dt^2$$

et pour la longueur de la ligne

$$l = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 d\theta + \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 d\theta\right\} dt.$$

2. Lignes géodésiques. — On peut rechercher maintenant les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions $P(\theta \mid t)$ et $Q(\theta \mid t)$ pour que la ligne envisagée soit une géodésique de l'holoespace ambiant.

Supposons à ce but que le paramètre t désigne la longueur de l'arc s de la ligne, en écrivant pour plus de clarté $P(\theta \mid s)$ et $Q(\theta \mid s)$ au lieu de $P(\theta \mid t)$ et $Q(\theta \mid t)$; indiquons en outre par le symbole ∂ les différentiations faites par rapport à s, et par le symbole δ les variations des fonctions.

On aura alors tout d'abord

$$\partial s = \int_0^{2\pi} (\partial P)^2\, d\theta + \int_0^{2\pi} (\partial Q)^2\, d\theta,$$

d'où

$$2\,\partial s\,\delta\,\partial s = \int_0^{2\pi} 2\,\partial P\,\delta\,\partial P\, d\theta + \int_0^{2\pi} 2\,\partial Q\,\delta\,\partial Q\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\,\partial P\,\partial\,\delta P\, d\theta + \int_0^{2\pi} 2\,\partial Q\,\partial\,\delta Q\, d\theta,$$

car $\delta\,\partial P = \partial\,\delta P$ et $\delta\,\partial Q = \partial\,\delta Q$. En divisant par $2\,\partial s$, on obtient

$$\delta\,\partial s = \int_0^{2\pi} \frac{\partial P}{\partial s}\,\partial\,\delta P\, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q}{\partial s}\,\partial\,\delta Q\, d\theta$$

et en appelant A et B les deux points de la géodésique entre lesquelles on veut la considérer, on aura

$$l = \int_A^B \partial s; \qquad \delta l = \int_A^B \delta\,\partial s;$$

donc aussi

$$\delta l = \int_A^B \left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial P}{\partial s}\,\partial\,\delta P\, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q}{\partial s}\,\partial\,\delta Q\, d\theta\right] \partial s.$$

Une intégration par parties nous donne alors

$$\delta l = \left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial P}{\partial s} \partial \delta P \, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q}{\partial s} \partial \delta Q \, d\theta \right]_A^B$$
$$- \int_A^B \left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} d\theta \, \delta P + \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} d\theta \, \delta Q \right] ds$$

et comme la partie qu'on a intégrée est nulle, car aux points A et B on a $\delta P = \delta Q = 0$, et comme on doit avoir $\delta l = 0$, quelles que soient les variations arbitraires δP et δQ, on obtient

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} = 0,$$

qui nous donnent les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions $P(\theta \mid s)$ et $Q(\theta \mid s)$ pour que la ligne envisagée soit une géodésique.

On devra donc avoir

$$P(\theta \mid s) = \varphi_1(\theta) s + \Psi_1(\theta); \qquad Q(\theta \mid s) = \varphi_2(\theta) s + \Psi_2(\theta)$$

ainsi que l'image fonctionnelle d'une géodésique sera donnée par une expression *linéaire* de la forme

$$f(x \mid s) = f_1(x) s + f_2(x),$$

où

$$f_1(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) \, d\theta + \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta) \, d\theta$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) \frac{z+x}{z-x} d\theta + \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta) \frac{z+x}{z-x} d\theta$$

et

$$f_2(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(\theta) \, d\theta + \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_2(\theta) \, d\theta$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(\theta) \frac{z+x}{z-x} d\theta + \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_2(\theta) \frac{z+x}{z-x} d\theta.$$

3. **Tangente à une ligne.** — On appelle tangente à une ligne L de (F) dans un de ses points, M_0 correspondant à la valeur s_0 du paramètre s, la géodésique qui est la position limite, si elle existe et est bien déterminée, d'une géodésique passant par M_0 et par un autre point M_1 de L suffisamment voisin de M_0, lorsque M_1 tend sur L vers M_0.

On démontre aisément que l'image fonctionnelle de cette tangente est donnée par l'équation (paramétrique)

$$f(x \mid t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta \mid s_0)\, d\theta + \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\theta \mid s_0)\, d\theta$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta \mid s_0)\frac{z+x}{z-x}\, d\theta + \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\theta \mid s_0)\frac{z+x}{z-x}\, d\theta,$$

où

$$\Phi(\theta \mid s_0) = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{s=s_0} t + \left\{ P(\theta \mid s_0) - s_0 \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{s=s_0} \right\},$$
$$\Psi(\theta \mid s_0) = \left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)_{s=s_0} t + \left\{ Q(\theta \mid s_0) - s_0 \left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)_{s=s_0} \right\}.$$

4. **Courbure géodésique.** — On nomme courbure géodésique de la ligne L de (F) le vecteur ayant pour composantes les chaînes de valeurs $\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}$ et $\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}$.

Il s'ensuit tout d'abord que :

Les géodésiques sont lignes à courbure toujours nulle.

On démontre en outre le théorème suivant qui est une généralisation, pour les holoespaces, d'un théorème de Lipka [8, 10] :

Le module de la courbure géodésique se présente toujours comme dans l'espace ordinaire, comme le rapport entre l'angle de contingence et l'arc élémentaire.

On le démontre en faisant recours à une propriété remarquée de Voss [9] suivant laquelle, dans l'espace ordinaire, il y a parfaite équivalence entre la limite du rapport entre l'angle de contingence et l'arc élémentaire et la limite du rapport $\frac{2d}{\Delta s^2}$ pour $\Delta s \to 0$, où Δs est un arc élémentaire M_0M ou $M_0\overline{M}$ pris simultanément, à partir d'un point M_0 de L, sur L et sur la géodésique tangente à L au point M_0. tandis que d désigne la distance entre les deux points M et $\overline{M}$.

5. **Plans.** — On introduit de même le concept de plan, plan osculateur, etc., en démontrant qu'il subsiste dans l'holoespace (F) toutes les propriétés courantes de la géométrie euclidienne élémentaire et de la géométrie différentielle ordinaire. On n'insistera ici davantage sur ces points.

CHAPITRE IV.

Symboles associés a un point-fonction de l'espace ($\mathcal{H}$) ou ($\mathcal{C}$) ou enfin de l'espace ($\mathcal{D}$) des fonctions continues et dérivables dans l'intervalle (0, 1).

1. **Généralités.** — Reprenons maintenant les notations et les considérations adoptées et développées au Chapitre Ier (§ 6). Nous nous bornerons donc, dans ce qui va suivre ici et dans les Chapitres suivants, à des fonctions réelles de variable réelle. Tous les résultats que nous aurons dès maintenant à exposer sont dus d'un côté au regretté Vitali, d'un autre côté à M. Minetti [1, 2 *a*, *b*. *c*, *d*].

On doit au premier tout ce qui concerne la géométrie différentielle des espaces de Hilbert esquissée par le moyen des éléments du calcul différentiel absolu généralisé de Pascal-Vitali, au second tout ce qui se rapporte au transport, aux variétés d'un holoespace du concept d'équation non paramétrique d'une variété d'un hyperespace ordinaire et aux importants liens entre la géométrie des holoespaces et la théorie des équations différentielles ordinaires. Tandis que les travaux et les résultats de M. Vitali se rapportent au cas général de l'espace $\mathcal{H}$ de Hilbert, ceux de M. Minetti, en conséquence de la nature même de ses conceptions, se rapportent à l'espace ($\mathcal{D}$) des fonctions continues et dérivables dans l'intervalle 0 — 1.

Toutes les fois que dans les considérations qui vont suivre n'interviendra pas l'hypothèse de la dérivabilité des fonctions qu'on y considère, on peut retenir que les résultats qu'on établit sont valables par rapport à l'espace $\mathcal{H}$ de Hilbert et dans ce cas les intégrales qu'on sera amené à considérer doivent être entendues dans le sens de Lebesgue; lorsqu'on suppose au contraire la dérivabilité des fonctions qu'on aura occasion d'envisager on devra retenir que les résultats se rapportent au cas de l'espace ($\mathcal{D}$), et les intégrales usitées doivent être entendues au sens de Riemann.

Les théories correspondantes de M. Minetti qui se rapportent au cas d'espaces fonctionnels constitués de fonctions holomorphes qui sont en train de se développer et qui attendent encore d'être établies d'une façon définitive ne trouvent pas de place dans cet exposé.

2. Le système absolu des symboles $a_{\alpha,\beta}$. — Un point-fonction

$$f(t \mid u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{1}$$

ou plus brièvement $f(t \mid u)$ décrit, lorsque les variables u_i décrivent leur domaine U de variabilité (*voir* Chap. I, § 6), une variété V.

Si l'on considère alors une substitution invertible S qui transforme les u dans des autres variables v ayant pour équations les

$$u_i = u_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

et si l'on fait la substitution des seconds membres des relations (2) dans l'expression (1), cette expression va se transformer en un point-fonction des variables v qui décrit la même variété.

Il s'ensuit que si pour chaque valeur de t on considère l'invariant qui pour les variables u coïncide avec (1), cet invariant décrit toujours, quel que soit le système de variables auquel il se rapporte, la même variété. On le représentera par la notation $f(t \mid u)$.

Cela posé, en suivant des notations que nous avons déjà introduites pour représenter les dérivées d'un invariant (*voir* Chap. I, § 2), l'écriture f_α, α étant un état (*voir* Chap. I, § 1) d'un indice variable dans le Ω_n corps (*voir* Chap. I, § 1), aura une signification bien précise.

On pose alors

$$a_{\alpha,\beta} = \int_g f_\alpha f_\beta \, dt,$$

où g désigne, dans le cas où l'on se rapporte à l'espace $\mathcal{H}$ de Hilbert un ensemble mesurable de points d'une droite réelle, et désigne au contraire l'intervalle $0 - 1$ dans le cas où l'on se rapporte à l'espace $(\mathcal{D})$.

On voit alors aisément que si l'indice α varie dans une classe entière r, et l'indice β dans une classe entière s (*voir* Chap. I, § 1), le système $a_{\alpha,\beta}$ est un système absolu (*voir* Chap. I, § 3).

3. Les symboles $\underset{\nu}{a}$ et $\underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta}$. — On désignera par $\underset{\nu}{a}$ le déterminant qui a pour ses éléments les $a_{\alpha,\beta}$, les indices α et β variant dans la même classe entière ν, écrit de telle façon que l'indice α soit constant tout le long d'une même horizontale et l'indice β soit au contraire constant tout le long d'une même verticale et que les deux indices se suivent dans l'ordre naturel.

Si $\underset{\nu}{a} \neq 0$ on désignera avec $\underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta}$ le réciproque de $a_{\alpha,\beta}$ dans $\underset{\nu}{a}$. On

voit alors que le système $\underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta}$ est un système absolu contrevariant à deux indices supérieurs (*voir* dernière proposition du Chapitre I, § 5).

4. Les symboles de Christoffel et leurs propriétés. — Si les indices α et β varient dans la classe (entière) ν, si p est un indice de classe 1, et si enfin avec la notation αp on désigne l'état d'un indice qui possède tous les chiffres de α, et, en plus, le chiffre p, on pose

$$\underset{\nu}{C}^{\beta}_{\alpha p} = \Sigma_\gamma a_{\alpha p,\gamma} \underset{\nu}{a}^{\beta\gamma}, \tag{4}$$

où l'indice γ varie dans la classe ν.

Les symboles $\underset{\nu}{C}^{\beta}_{\alpha p}$ sont dits les symboles de Christoffel de classe ν.

On a alors les théorèmes suivants :

I. *p étant un indice de classe* 1, *on a*

$$\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u_p} = a_{\alpha p,\beta} + a_{\alpha,\beta p}. \tag{5}$$

On peut écrire en effet

$$\frac{\partial}{\partial u_p}\int_g f_\alpha f_\beta\, dt = \int_g f_{\alpha p} f_\beta\, dt + \int_g f_\alpha f_{\beta p}\, dt = a_{\alpha p,\beta} + a_{\alpha,\beta p}.$$

II. *Si les indices α, β, γ varient dans la classe ν on a*

$$\Sigma_\gamma a_{\alpha,\gamma} \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma} = \delta^\beta_\alpha \tag{6}$$

(pour la signification du symbole δ^β_α, *voir* Chap. I, § 3).

Il est une conséquence presque immédiate d'une propriété bien connue des déterminants.

III. *Si les indices β et δ varient dans la classe ν, et si p est un indice de classe* 1, *pour chaque système de variables u, on a*

$$\frac{\partial \underset{\nu}{a}^{\beta,\delta}}{\partial u_p} = -\Sigma_\alpha \underset{\nu}{C}^{\beta}_{\alpha p} \underset{\nu}{a}^{\alpha,\delta} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}^{\delta}_{\gamma p} \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma}. \tag{7}$$

Si, en effet, on considère l'égalité (*voir* théorème précédent)

$$\Sigma_\gamma a_{\alpha,\gamma} \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma} = \delta^\beta_\alpha$$

qu'on suppose écrite par rapport aux variables u, on obtient, par dérivation par rapport à u_p,

$$\Sigma_\gamma \frac{\partial a_{\alpha,\gamma}}{\partial u_p} \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma} + \Sigma_\gamma a_{\alpha,\gamma} \frac{\partial \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma}}{\partial u_p} = 0,$$

d'où, en vertu des relations (5), et en introduisant les symboles de Christoffel,

$$\Sigma_\gamma a_{\alpha,\gamma} \frac{\partial \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma}}{\partial u_p} = -\Sigma_\gamma \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma}(a_{\alpha p,\gamma} + a_{\alpha,\gamma p}) = -\underset{\nu}{C}^{\beta}_{\alpha p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma} a_{\alpha,\gamma p}.$$

Il suffit alors de multiplier les deux membres de cette égalité par $\underset{\nu}{a}^{\alpha,\delta}$ et de faire la somme par rapport à l'indice α, pour obtenir, en vertu des relations (6), la relation (7) que l'on désirait démontrer.

IV. *Si* $\rho_\alpha < \nu$, *on a*

$$\underset{\nu}{C}^{\beta}_{\alpha p} = \delta^{\beta}_{\alpha p}. \tag{8}$$

On a en effet par définition

$$\underset{\nu}{C}^{\beta}_{\alpha p} = \Sigma_\gamma a^{\alpha p,\gamma} \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma},$$

mais les indices αp et β sont de classe ν, et par conséquent, en vertu de la relation (6), on obtient bien la relation (8).

V. *Si* γ *est un indice de classe* ν *et si l'indice* β *varie dans la classe* ν, *on a*

$$\Sigma_\beta \underset{\nu}{C}^{\beta}_{\alpha p} a_{\beta,\gamma} = a_{\alpha p,\gamma}. \tag{9}$$

En effet, en vertu du théorème précédent, on peut bien écrire

$$\Sigma_\beta \underset{\nu}{C}^{\beta}_{\alpha p} a_{\beta,\gamma} = \Sigma_{\delta,\beta} a_{\alpha p,\delta} \underset{\nu}{a}^{\beta,\delta} a_{\beta,\gamma} = \Sigma_\delta a_{\alpha p,\delta}(\Sigma_\beta \underset{\nu}{a}^{\beta,\delta} a_{\beta,\gamma}) = a_{\alpha p,\gamma}.$$

CHAPITRE V.

LA DÉRIVATION COVARIANTE DES SYSTÈMES ABSOLUS. RÈGLES DE DÉRIVATION COVARIANTE. DÉRIVÉS COVARIANTS DE CERTAINS SYSTÈMES ABSOLUS.

1. La dérivation covariante. — Si

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} \tag{1}$$

est un système absolu avec les indices inférieurs et supérieurs appartenant à des classes entières on appelle, par définition, *dérivé cova-*

riant du système (1) par rapport à la variété décrite par le point-fonction $f(t \mid u_1, u_2, \ldots, u_n)$ le système

$$(2) \qquad H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, p},$$

p étant un indice de classe 1, qui, pour chaque système de variables u, est donné par la relation

$$(3) \qquad H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, p}[u] = \frac{\partial H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[u]}{\partial u_p}$$
$$- \sum_{1}^{r}{}_h \Sigma_\gamma C^{\gamma}_{\alpha_h p}[u] H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \gamma, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_r}[u]$$
$$+ \sum_{1}^{s}{}_h \Sigma_\gamma C^{\beta_h}_{\gamma p}[u] H^{\beta_1, \ldots, \beta_{h-1}, \gamma, \beta_{h+1}, \ldots \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[u],$$

où l'on entend que chaque symbole de Christoffel soit de la même classe de l'indice inférieur α_h ou de l'indice supérieur β_h auquel il se rapporte et où pour chaque sommation Σ l'indice γ varie dans la classe de l'indice qui correspondrait à la place occupée par γ.

On désignera ce système, pour plus de clarté, par la notation

$$D_p H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

ou, lorsque il n'y aura à craindre aucune ambiguïté, par la notation $D_p H$.

2. Cas particuliers. — Si H est un invariant $H = H[u]$ on aura

$$D_p H[u] = \frac{\partial H[u]}{\partial u_p}.$$

Si α est un indice de classe ν et si H_α est un système absolu on a

$$D_p H_\alpha[u] = \frac{\partial H[u]}{\partial u_p} - \Sigma_\gamma C^{\gamma}_{\nu \alpha p}[u] H_\gamma[u].$$

Si β est un indice de classe ν et si H^β est un système absolu, on a

$$D_p H^\beta[u] = \frac{\partial H[u]}{\partial u_p} + \Sigma_\gamma C^{\beta}_{\nu \gamma p} H^\gamma[u].$$

On a le théorème :

Le dérivé covariant $D_p H$ *d'un système absolu* H *est lui aussi un système absolu.*

3. **Règles de dérivation covariante.** — Pour la dérivation covariante, on possède les règles suivantes :

I. *Le dérivé covariant de la somme ou de la différence de deux systèmes absolus est égal respectivement à la somme ou à la différence des dérivés covariants des systèmes donnés.*

C'est une conséquence immédiate des définitions de système absolu somme ou différence de deux systèmes absolus donnés (*voir* Chap. I, § 5).

II. *Si* $H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$ *est un système absolu, et si* α_1 *et* β_1 *sont deux indices de la même classe* ν, *on a*

$$D_p \Sigma_\tau H^{\tau, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = \Sigma_\tau D_p H^{\tau, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}.$$

En d'autres termes les deux opérations de saturation des indices et de dérivation covariante sont permutables.

Pour la démonstration, *voir* [1].

4. **Dérivés covariants de certains systèmes absolus.** — Considérons tout d'abord le système absolu précédemment défini $a_{\alpha,\beta}$ avec α et β indices de la même classe entière ν (*voir* Chap. IV, § 2).

On a alors les théorèmes suivants [1] :

I. *Le dérivé covariant du système* (absolu) $a_{\alpha,\beta}$ *est nul.*

Quel que soit en effet le système de variables u, on peut écrire

$$D_p a_{\alpha,\beta} = \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u_p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}^{\gamma}_{\alpha p} a_{\gamma,\beta} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}^{\gamma}_{\beta,p} a_{\alpha,\gamma} = \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u_p} - \Sigma_{\gamma\delta} a_{\alpha p,\delta} \underset{\nu}{a}^{\delta,\gamma} a_{\gamma,\beta}$$
$$- \Sigma_{\gamma\delta} a_{\beta p,\delta} \underset{\nu}{a}^{\delta,\gamma} a_{\alpha,\gamma} = \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u_p} - a_{\alpha p,\beta} - a_{\alpha,\beta p} = 0$$

(se reporter au Chapitre IV, § 4, théorèmes I et II).

II. *Le dérivé covariant du système* (absolu) $\underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta}$ (*voir* Chap. IV, § 3), *où les indices* α *et* β *varient dans la classe* (entière) ν, *est nul.*

C'est une conséquence immédiate de la formule (7), Chapitre IV, § 4, théorème III.

III. *On a* $D_p \delta^\beta_\alpha = 0$.

Pour la démonstration, *voir* [1].

5. **Les ricciens d'un invariant.** — Considérons maintenant le système I_α (*voir* Chap. I, § 2) où I est un invariant et α un indice de classe ν. Quel que soit le système des variables u que l'on adopte, on aura

$$D_p I_\alpha = \frac{\partial I_\alpha}{\partial u_p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} I_\gamma = I_{\alpha p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} I_\gamma,$$

où l'indice γ varie dans la classe (entière) ν. Si d'autre part on a $\rho_\alpha < \nu$, c'est-à-dire si le nombre des chiffres de l'indice α est plus petit que ν, on a [*voir* Chap. IV, § 4, th. IV, form. (8)]

$$D_p I_\alpha = I_{\alpha p} - I_{\alpha p} = 0.$$

On en conclut que tous les termes du système absolu

$$\underset{\nu}{I}_{\alpha,p} = D_p I_\alpha,$$

pour lesquels on a $\rho_\alpha < \nu$, sont nuls.

Il n'y aura pourtant lieu qu'à considérer les termes de $\underset{\nu}{I}_{\alpha,p}$ qui ne sont pas nuls pour lesquels, on a donc $\rho_\alpha = \nu$, et posons

$$I_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu, p} = \underset{\nu}{I}_{\alpha,p},$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ sont les chiffres de α.

On démontre alors que ce système, pour chaque terme duquel on a $\rho_\alpha = \nu$, est un système absolu ayant $\nu + 1$ indices de classe 1.

Il est dit le $(\nu + 1)^{\text{ième}}$ riccien de I, ou, en d'autres mots, le riccien de I d'ordre $(\nu + 1)$.

Le riccien de I d'ordre 1 coïncide avec I_p.

Théorème. — *Le riccien d'un invariant* I *d'ordre* $\nu + 1$ *est symétrique par rapport à ses indices.* En d'autres termes, *si deux de ses éléments diffèrent entre eux seulement pour l'ordre de leurs indices, ils sont égaux.*

C'est une conséquence immédiate de la relation

$$\underset{\nu}{I}_{\alpha p} = I_{\alpha p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} I_\gamma,$$

car $I_{\alpha p}$ et $\underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p}$ ne changent pas en permutant les chiffres de l'indice αp.

Il est surtout avantageux de considérer les ricciens de l'invariant

$f(t \mid u)$, où $f(t \mid u)$ représente une variété (*voir* Chap. IV, § 2) de l'holoespace ambiant que l'on considère et à laquelle on veut se rapporter. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si un terme du riccien de $f(t \mid u)$ d'ordre $\nu + 1$ n'est pas nul, il est orthogonal à tous les termes non nuls du système f_β, β étant un indice de classe ν.*

En effet, en vertu de la relation (9) (Chap. IV, § 4, V), et en s rappelant qu'on a

$$\underset{\nu}{f}_{\alpha,p} = f_{\alpha p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}^\gamma_{\alpha p} f_\gamma,$$

on peut successivement écrire

$$\int_g \underset{\nu}{f}_{\alpha,p} f_\beta \, dt = \int_g f_{\alpha p} f_\beta \, dt - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}^\gamma_{\alpha p} \int_g f_\gamma f_\beta \, dt$$
$$= a_{\alpha p,\beta} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}^\gamma_{\alpha p} a_{\gamma,\beta} = a_{\alpha p,\beta} - a_{p\alpha,\beta} = 0.$$

CHAPITRE VI.

LE CONCEPT D'ÉQUATION NON PARAMÉTRIQUE D'UNE VARIÉTÉ DE L'HOLOESPACE ($\mathcal{D}$), ET LES LIENS ENTRE LA GÉOMETRIE DES HOLOESPACES ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

1. Le concept fondamental d'équation non paramétrique d'une variété linéaire de l'holoespace ($\mathcal{D}$). — Envisageons maintenant l'espace ($\mathcal{D}$) des fonctions $x(t)$ continues et dérivables dans l'intervalle $0 - 1$. En suivant les mêmes principes auxquels on s'est inspiré dans le cas de l'holoespace (F), nous prendrons la définition de la distance de deux fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de ($\mathcal{D}$) donnée par la formule

$$(x_1, x_2) = \int_0^1 [x_1(t) - x_2(t)]^2 \, dt. \tag{1}$$

Observons maintenant que jusqu'ici on considérait, voir p. ex. [12], comme équation d'une variété, par exemple, linéaire de ($\mathcal{D}$) l'ensemble des points de l'espace fonctionnel représentant les fonctions

$$x(t) = f_0(t) + a_1 f_1(t) + \ldots + a_n f_n(t), \tag{2}$$

où $f_0, f_1, \ldots, f_n$ étaient $n+1$ points du même espace. On disait de même que (2) représentait l'équation de la variété linéaire envisagée.

M. Minetti a remarqué tout récemment, [2 *d*] le premier, que l'équation (2) était plus précisément l'équation paramétrique de la variété et non l'équation de la variété proprement dite. Il s'est alors préoccupé du transport aux holoespaces du concept d'équation non paramétrique d'une variété d'un hyperespace ordinaire. Le principe dû à M. Volterra du passage du fini à l'infini, du discontinu au continu lui a permis d'éclaircir ce point, et il a été amené ainsi à mettre bien en évidence les liens très étroits qu'il y a entre la géométrie des holoespaces et la théorie des équations différentielles ordinaires.

Pour voir mieux au fond des choses et pour mieux saisir le passage du fini à l'infini duquel s'est laissé guider M. Minetti à ce sujet, rappelons tout d'abord ce qu'il se passait en propos dans le cas de l'espace ordinaire.

Fixons les idées pour plus de simplicité sur une variété unidimensionelle géodésique, c'est-à-dire sur une droite de l'espace euclidien ordinaire S_3 de coordonnées x_1, x_2, x_3.

Si $x_i = a_i\lambda + b_i$ $(i = 1, 2, 3)$. étaient ses équations paramétriques, pour obtenir l'équation non paramétrique de la même droite, il suffisait d'éliminer le paramètre λ une fois entre la première et la seconde des précédentes équations, et de l'éliminer ensuite entre la seconde et la troisième. En un mot d'éliminer le paramètre t entre chaque équation et la suivante.

D'autre part, dans le cas de l'holoespace $(\mathcal{D})$, en vertu de ce que l'on a déjà établi en se référant à l'espace (F) précédemment étudié (*voir* Chap. III, § 2), et à cause de la définition (1) de distance qu'on a ici adoptée, une droite de $(\mathcal{D})$, c'est-à-dire une géodésique de $(\mathcal{D})$, aura une équation paramétrique de la forme

$$x(t \mid \lambda) = f_1(t)\lambda + f_2(t), \tag{3}$$

où $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont deux éléments [points de $(\mathcal{D})$].

Suivant la conception de M. Minetti qui revient à celle de M. Volterra, la variable continue t remplace ici l'indice i des équations $x_i = a_i\lambda + b_i$ d'une droite de S_3. Pour obtenir donc l'équation non paramétrique de la droite (3) de $(\mathcal{D})$ il suffira, de même, d'éliminer le paramètre λ entre l'équation (3) et, pour ainsi dire, la successive; en d'autres mots de l'éliminer entre l'équation (3) et

l'équation

$$x(t+dt\,|\,\lambda)=f_1(t+dt)\lambda+f_0(t+dt). \tag{4}$$

Et comme cette dernière équation une fois développée suivant la formule de Taylor, et que l'on ait négligé les infiniment petits de second ordre nous donne

$$\frac{\partial x(t\,|\,\lambda)}{\partial t}=f'_1(t)\lambda+f_0(t), \tag{5}$$

il suffira d'éliminer le paramètre λ entre l'équation (3) et l'équation (5).

Cette élimination nous donne d'ailleurs

$$\begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ f_1(t) & f'_1(t) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1(t) & f_0(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) \end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

où $x(t)$ écrite au lieu de $x(t\,|\,\lambda)$ représente la fonction correspondante au point générique P de la droite envisagée.

L'équation (6) est bien, d'autre part, une équation différentielle « linéaire » du premier ordre par rapport à la fonction $x(t)$ qui représente le point générique de la droite considérée : donc :

L'équation non paramétrique d'une droite de $(\mathcal{D})$, *est une équation différentielle « linéaire » du premier ordre par rapport à la fonction* $x(t)$ *qui représente le point générique de la droite envisagée.*

Tout pareillement, si l'on considère au lieu d'une droite. une courbe quelconque $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{D})$, ayant une équation paramétrique du type

$$x(t)=\mathrm{P}(t\,|\,\lambda), \tag{7}$$

l'élimination du paramètre λ entre cette équation paramétrique de $\mathcal{C}$ et, pour ainsi dire, la successive

$$x(t+dt)=\mathrm{P}(t+dt\,|\,\lambda) \tag{8}$$

nous conduit, en suivant le même procédé, à une équation du type

$$\frac{dx}{dt}=\varphi[t\,|\,f[t\,|\,x(t)]], \tag{9}$$

où φ est une fonction des deux arguments t et f, f étant à son tour une fonction de t et de $x(t)$, qui est bien une équation différentielle

du premier ordre par rapport à la fonction $x(t)$, mais qui n'est pas, en général « linéaire ». Donc :

Une courbe $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{D})$ a pour équation une équation différentielle du premier ordre par rapport à la fonction $x(t)$ qui représente le point générique P *de $\mathcal{C}$.* — Si $\mathcal{C}$, et seulement si, cette équation est « linéaire » la courbe $\mathcal{C}$ est une des géodésiques de $(\mathcal{D})$.

2. Variétés d'ordre supérieur. — On passe de même aux variétés d'ordre supérieur. Appelons *surface* S *de* $(\mathcal{D})$, le lieu géométrique des points $x(t)$ de $(\mathcal{D})$ qui correspondent à $P(t \mid \lambda, \mu)$ fonction de t et de deux paramètres λ et μ, lorsque ces deux paramètres varient au moins dans certains domaines Γ et Λ.

Même ici, si l'on fixe son attention sur une valeur générique de la variable indépendante t, $x(t)$, $x(t+dt)$, $x[(t+dt)+\delta t]$, dt et δt étant deux différentielles distinctes de t, représenteront trois coordonnées successives, pour ainsi dire, du point générique $x(t)$ de S.

Et en suivant des notations déjà précédemment utilisées, on pourra écrire

$$x(t) = P(t \mid \lambda, \mu), \tag{10}$$

$$x(t+dt) = P[(t+dt) \mid \lambda, \mu], \tag{11}$$

$$x[(t+dt)+\delta t] = P[(t+dt)+\delta t \mid \lambda, \mu]. \tag{12}$$

Si l'on observe alors qu'en vertu du développement de Taylor et en négligeant les infiniment petits, on a

$$x(t+dt) = x(t) + \dot{x}(t)\,dt \quad (^1), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} x[(t+dt)+\delta t] &= x(t+dt) + \frac{\delta x(t+dt)}{\delta t}\,\delta t \\ &= x(t) + \dot{x}(t)\,dt + x(t)\,\delta t + x(t)\,dt\,\delta t; \end{aligned} \tag{14}$$

on s'aperçoit aisément que l'élimination entre les équations (10), (11) et (12) des deux paramètres λ et μ conduit à une relation de la forme

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = F[t, x(t), \dot{x}(t)], \tag{15}$$

qui est bien une équation différentielle du second ordre par rapport à la fonction $x(t)$ qui représente le point générique P de S.

---

(1) On a désigné ici par le symbole $x(t)$ la dérivée de $x(t)$ par rapport à t.

On pourrait démontrer en outre que si cette équation est linéaire, et seulement dans ce cas, la surface S est un plan de $(\mathcal{D})$. Et ainsi de suite. Donc :

Les équations non paramétriques des variétés V_n *plongées dans l'holoespace* $(\mathcal{D})$ (en particulier), *sont des équations différentielles par rapport à la fonction* $x(t)$ *qui représente le point générique* P *de* V_n. L'ordre de cette équation différentielle est toujours égal au nombre de dimensions de la variété V_n envisagée; elle est en outre, linéaire ou non, suivant que V_n est. ou non, une variété géodésique de l'holoespace ambiant que l'on considère.

3. **Quelques considérations.** — Il est bon de remarquer maintenant, quoique ce sujet ne rentre pas dans le plan de cet exposé, que la proposition précédente permet, en particulier, de présenter toute la théorie des équations différentielles linéaires à un point de vue géométrique et d'une façon extrêmement simple. Elle permet aussi d'établir plusieurs propriétés nouvelles de ces équations; ce sont toutes celles qu'on peut toujours trouver au moyen du principe de M. Volterra du passage du fini à l'infini [11], de toutes les propriétés d'appartenance ou d'intersection, déjà connues depuis longtemps, qui se rapportent aux variétés linéaires des hyperespaces ordinaires.

Mais on est saisi toutefois, comme il est bien évident, par d'autres propriétés beaucoup plus intéressantes, en les appliquant à l'étude d'appartenance ou d'intersection des variétés quelconques non linéaires. Nous n'insisterons pas davantage sur ces points; nous nous bornerons ici seulement aux principes de cette théorie d'autant plus pour le fait qu'elle est en train de se développer.

CHAPITRE VII.

GÉNÉRALITÉS SUR LES VARIÉTÉS DES HOLOESPACES $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{C})$ OU $(\mathcal{D})$. LES PREMIERS ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DE CES HOLOESPACES. VARIÉTÉS UNIDIMENSIONELLES.

1. **Espaces linéaires ou euclidiens.** — Soit

$$x(t) = f(t \mid u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

l'équation paramétrique d'une variété de $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{C})$ ou $(\mathcal{D})$.

Il est aisé de démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que $f(t \mid u_1, \ldots, u_n)$ décrive une variété à n dimensions, c'est que les fonctions $f_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}$ soient linéairement indépendantes; ou bien, ce qui est équivalent, que le déterminant

$$\| a_{i,j} \| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$a_{i,j} = \int_g f_i f_j \, dt,$$

soit différent de zéro [1].

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont n fonctions linéairement indépendantes et si ψ est une autre fonction quelconque, la variété (linéaire) d'équation paramétrique

$$x(t) = \psi + u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 + \ldots + u_n \varphi_n,$$

aura précisément n dimensions et sera appelée un espace linéaire ou euclidien à n dimensions.

Ici et dans la suite on devra supposer naturellement, que les fonctions que l'on considère, soient, sur g, à carré sommable, ou continues, ou continues et dérivables suivant que l'on veut se rapporter à l'holoespace ($\mathcal{H}$) ou ($\mathcal{C}$) ou ($\mathcal{D}$).

Un espace linéaire à une dimension sera aussi appelé une droite, à deux dimensions un plan, à trois dimensions un espace ordinaire.

Si

$$x(t) = \psi + u_1 \varphi_1 + \ldots + u_n \varphi_n,$$

c'est une équation paramétrique d'un espace euclidien S_n à n dimensions, condition nécessaire et suffisante pour que

$$x(t) = \overline{\psi} + v_1 \overline{\varphi_1} + \ldots + v_n \overline{\varphi_n}$$

puisse être; elle aussi, une équation paramétrique du même espace, c'est que l'on ait

$$\overline{\psi} = \psi + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_n \varphi_n,$$
$$\overline{\varphi_i} = \mu_{i,1} \varphi_1 + \mu_{i,2} \varphi_2 + \ldots + \mu_{i,n} \varphi_n,$$

où les λ et les μ sont des constantes.

Si f_1 et f_2 sont deux points différents d'une droite r, la différence $f_2 - f_1$ est appelée un « paramètre » de r.

On voit aisément que le rapport de deux paramètres d'une même droite est une constante différente de zéro et que, réciproquement, si

l'on multiplie un paramètre d'une droite pour une constante différente de zéro, on obtient un nouveau paramètre de la même droite.

En rappelant en outre qu'on appelle « fonction normale dans g » une fonction f telle que

$$\int_g f^2\,dt = 1,$$

on voit de même que parmi les paramètres d'une droite r il y en a deux qui sont des fonctions normales; on les appelle les « paramètres normaux » de r.

On dit qu'une droite est orientée s'il est assigné le nom de « paramètre principal » seulement à l'un de ses deux paramètres normaux. r étant une droite orientée, φ étant son paramètre principal f_1 et f_2 étant, enfin, deux points de r, on aura $f_2 - f_1 = K\varphi$, K constant et l'on dira que f_1 précède f_2 si $K > 0$ et que f_2 précède f_1 si $K < 0$.

φ et ψ étant les paramètres principaux de deux droites r_1 et r_2 on aura, pour l'inégalité de Schwarz,

$$\left[\int_g \varphi\psi\,dt\right]^2 \leqq \int_g \varphi^2\,dt \int_g \psi^2\,dt = 1,$$

donc aussi

$$\left|\int_g \varphi\psi\,dt\right| \leqq 1,$$

et il existera un angle α, $0 \leqq \alpha \leqq \pi$, tel que

$$\cos\alpha = \int_g \varphi\psi\,dt.$$

On appelle α l'angle des deux droites orientées r_1 et r_2. On en déduit que si φ et $\overline{\psi}$ sont deux paramètres quelconques de r_1 et r_2, comme l'on a $\overline{\varphi} = K\varphi$, $\overline{\psi} = h\psi$, K et h constantes, on aura aussi

$$\cos\alpha = \frac{\int_g \overline{\varphi}\,\overline{\psi}\,dt}{Kh}.$$

On dira que deux droites orientées r_1 et r_2 sont « parallèles et également orientées », si leurs paramètres principaux φ et ψ sont sur g généralement égaux; on dira, au contraire, qu'elles sont « parallèles et inversement orientées », si ces paramètres principaux sont sur g généralement opposés.

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES
SAINT-MARTIN-D'HÈRES

Dans le premier cas, on aura

$$\int_g \varphi\psi\, dt = \cos\alpha = 1 \qquad (\alpha = 0);$$

dans le second

$$\int_g \varphi\psi\, dt = -1 \qquad (\alpha = \pi).$$

Réciproquement, si $\alpha = 0$, c'est-à-dire si

$$\int_g \varphi\psi\, dt = 1,$$

on aura aussi

$$\int_g (\varphi - \psi)^2\, dt = \int_g \varphi^2\, dt - 2\int_g \varphi\psi\, dt + \int_g \psi^2\, dt = 0,$$

et par conséquent φ et ψ sont, sur g, généralement égaux.

Si au contraire $\alpha = \pi$, c'est-à-dire si

$$\int_g \varphi\psi\, dt = -1,$$

on aura

$$\int_g (\varphi + \psi)^2\, dt = \int_g \varphi^2\, dt + 2\int_g \varphi\psi\, dt + \int_g \psi^2\, dt = 0,$$

et par conséquent φ et ψ seront sur g, généralement opposées.

Si φ et ψ représentent maintenant deux paramètres de deux droites r_1 et r_2 et si

$$\int_g \varphi\psi\, dt = 0,$$

si, en d'autres termes, φ et ψ sont deux fonctions orthogonales, on dira aussi que φ et ψ sont deux paramètres orthogonaux et l'on voit aisément que tout autre couple $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ de paramètres de r_1 et r_2 satisfera aussi à la condition d'orthogonalité

$$\int_g \varphi\bar{\psi}\, dt = 0.$$

Deux droites r_1 et r_2 telles que chaque paramètre de l'une soit orthogonal à chaque paramètre de l'autre seront dites orthogonales.

Il est presque évident en outre que :

Si f est un point d'une droite r et φ un de ses paramètres,

$$x(t) = f(t) + \nu\,\varphi(t)$$

est l'équation, ou mieux, une des équations paramétriques de r.

Et que

Si une droite r contient deux points d'un espace linéaire S_n. r est entièrement contenue dans S_n.

Un paramètre d'une droite r contenue dans un espace linéaire S_n est dit « un paramètre de S_n ». On peut alors démontrer que :

Si

$$x(t) = \psi + u_1\varphi_1 + \ldots + u_n\varphi_n,$$

est une des équations paramétriques d'un espace linéaire S_n. condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(t)$ soit un paramètre de S_n et que $f(t)$ soit de la forme

$$f(t) = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n$$

les λ étant des constantes.

On en déduit que dans un espace linéaire S_n à n dimensions il y a seulement n paramètres qui sont entre eux linéairement indépendants.

En outre

Si S_n et S_m $(m \leqq n)$ sont deux espaces linéaires et si tous les paramètres de S_m sont aussi des paramètres de S_n, et si S_n et S_m ont en commun un point ψ, chaque point de S_m appartient aussi à S_n.

On dit qu'un paramètre φ est orthogonal à un espace linéaire S_n si φ est orthogonal à chaque paramètre de S_n.

On dit que deux espaces linéaires S_n et S_m qui ont au plus un point en commun sont entre eux orthogonaux si chaque paramètre d'un de ces espaces est orthogonal à l'autre.

Cela posé on peut démontrer que :

Si S_{m+n} est un espace linéaire à $m+n$ dimensions, si S_m est un espace linéaire contenu dans S_{m+n}, et si ψ est un point de S_m, il existe un espace linéaire S_n qui contient ψ et tous les paramètres

de S_{m+n} *qui sont orthogonaux à* S_m. Il ne contient en outre aucun autre paramètre de S_{m+n}, et il est contenu dans S_{m+n}.

2. Les espaces σ_γ d'une variété; les espaces principaux et leur détermination au moyen des ricciens [1]. — Soit V_n une variété à n dimensions,

$$x(t) = f(t \mid u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

son équation paramétrique, et γ un nombre entier positif. Considérons maintenant un point P de V_n et les f_α, avec α indice de classe γ, calculées dans ce point. Si l'on change le système des variables u dans un autre système de variables v chaque nouvelle f_α devient une combinaison linéaires des anciennes f_α. Il s'ensuit que si pour chaque système particulier de variables u, on pense les f_α comme paramètres d'un espace linéaire passant par P et déterminé par ses f_α, cet espace ne change pas en changeant le système des u. On désigne alors cet espace qui pour chaque point P de V_n est ainsi bien déterminé par la notation σ_γ et l'on démontre aisément que le nombre de ses dimensions est égal à la caractéristique de la matrice carrée qui a pour ses éléments les α, β,

$$a_{\alpha,\beta} = \int_g f_\alpha f_\beta \, dt,$$

(*voir* Chap. IV, §, 2), où α et β varient dans la classe (entière) γ. On en déduit aussi que le nombre maximum des dimensions qui peut avoir σ_γ, est le nombre $O_\gamma = \binom{n+\gamma}{n} - 1$ (*voir* Chap. I, § 4) des états d'un indice de classe γ.

L'espace σ_1 qui, en vertu de la première proposition énoncée au paragraphe 1 du Chapitre VII, est sûrement à n dimensions, est appelé l'espace tangent à la variété V_n envisagée.

Si $n = 1$, l'espace tangent se réduit à une droite qui est nommée « tangente » à la courbe V_1 que l'on considère.

Si l'on désigne maintenant avec r_γ le nombre de dimensions de l'espace σ_γ de V_n, on aura, évidemment $r_{\gamma+1} \geqq r_\gamma$, et si $r_{\gamma+1} > r_\gamma$ il existe (*voir* dernier théorème énoncé, Chap. VII, § 1) dans $\sigma_{\gamma+1}$ un espace linéaire à $r_{\gamma+1} - r_\gamma$ dimensions qui est orthogonal à σ_γ au point P de V_n que l'on considère. On indiquera cet espace avec le symbole $\Pi_{\gamma+1}$ en posant pour symétrie $\Pi_1 \equiv \sigma_1$.

Les espace $\Pi_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ seront dit les « espaces principaux »

de V_n au point P; en particulier Π_i sera dit « l'i^{ieme} espace principal de V_n au point P ».

Si un espace principal Π_i n'existe pas, ce qui peut bien arriver, nous dirons que Π_i est « nul ».

THÉORÈME. — *Si Π_i est nul on a aussi $\Pi_j = 0$ pour $j > i$.*

Si en effet $x(t) = f(t \mid u)$ est l'équation paramétrique de la variété V_n que l'on considère, dire que $\Pi_{\gamma+1}$ est nul, cela revient à dire que chaque f_α, où $\rho_\alpha = \gamma + 1$, est une combinaison linéaire des f_α pour lesquelles α est de classe γ. Mais comme l'on obtient chaque f_α pour laquelle $\rho_\alpha = \gamma + 2$, par dérivation par rapport à l'une des variables u, d'une f_σ pour laquelle $\rho_\alpha = \gamma + 1$, chaque f_α pour laquelle $\rho_\alpha = \gamma + 2$ est une combinaison linéaire des f_α pour lesquelles l'indice α appartient à la classe $\gamma + 1$. Par conséquent l'espace $\sigma_{\gamma+2}$ coïncide avec l'espace $\sigma_{\gamma+1}$, et l'espace principal $\Pi_{\gamma+2}$ est nul.

Remarquons maintenant ce qui a beaucoup d'intérêt pour la suite, qu'en vertu du dernier théorème démontré Chapitre V (§ 5) tout élément non nul du $(\gamma + 1)^{\text{ieme}}$ riccien de f est orthogonal à l'espace σ_γ, et qu'il est par conséquent, un des paramètres de directions du $(\gamma + 1)^{\text{ième}}$ espace principal $\Pi_{\gamma+1}$. On peut maintenant démontrer que réciproquement, chaque paramètre de $\Pi_{\gamma+1}$ est une combinaison linéaire des éléments du $(\gamma + 1)^{\text{ieme}}$ riccien de f.

En effet si X est un paramètre de $\Pi_{\gamma+1}$, il sera une combinaison linéaire des f_α, α étant de classe $\gamma + 1$. Dans cette combinaison les f_α où l'indice α a $\gamma + 1$ chiffres, que nous indiquerons avec $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots$, seront affectées de certains coefficients constants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

Si l'on désigne alors avec F_{α_i} l'élément du $(\gamma + 1)^{\text{ieme}}$ riccien de f qui a pour indices les $\gamma + 1$ chiffres de α_i, et si nous posons

$$Y = \lambda_1 F_{\alpha_1} + \lambda_2 F_{\alpha_2} + \ldots,$$

on s'aperçoit que $X - Y$ se réduit à une combinaison linéaire des seules f_α qui ont l'indice α de classe γ; $X - Y$ est donc un paramètre de l'espace σ_γ; X et Y, sont d'autre part orthogonaux à σ_γ, par conséquent comme, au contraire, $X - Y$ ne peut pas être orthogonal à σ_γ, il devra être nul.

Donc $X = Y$, ce qui revient à dire précisément que X est bien une combinaison linéaire d'éléments du $(\gamma + 1)^{\text{ieme}}$ riccien de f.

On en conclut donc que

L'espace principal $\Pi_{\gamma+1}$ *est déterminé par les éléments (non nuls) du* $(\gamma+1)^{ième}$ *riccien de* f.

3. **Les courbes.** — On appelle « élément linéaire » d'une courbe $\mathcal{C}$ d'équation paramétrique $x(t)=f(t\,|\,u_1)$, l'expression

$$ds=\left[\int_g f(t\,|\,u_1)'\,dt\right]^{\frac{1}{2}} du_1.$$

si l'on désigne alors avec df la différentielle de f considérée comme fonction de u_1, on peut écrire

$$ds^2=\int_g (df)^2\,dt. \tag{1}$$

Il est évident que pour une courbe $\mathcal{C}$ un espace principal Π_i non nul se réduit à une droite; on l'appellera, s'il s'agit de l'espace principal $i^{ième}$, la « droite principale » ou la « normale » $i^{ième}$ de la courbe $\mathcal{C}$.

Si Π_i n'est pas nul, si $R_f^{(i)}$ désigne le riccien $i^{ième}$ de f, et si, enfin, on pose

$$K_i=\sqrt{\int_g [R_f^{(i)}]^2\,dt}, \qquad X_i=\frac{R_f^{(i)}}{K_i},$$

X_i est un paramètre normal de Π_i, c'est-à-dire de la droite principale $i^{ième}$.

Si i est un nombre pair, X_i est un invariant car si l'on passe de la variable u_1 à une autre variable v_1, $R_f^{(i)}$ comme K_i doivent être multipliés tous les deux par $\left(\frac{du_1}{dv_1}\right)^i$.

Si, au contraire, i est un nombre impair le paramètre X_i demeure invarié pour toutes les substitutions pour lesquelles $\frac{du_1}{dv_1}>0$, tandis que pour les autres il change de signe.

Supposons maintenant avoir fixé sur la courbe $\mathcal{C}$ une origine O des arcs et un vers positif et indiquons par s la longueur de l'arc de $\mathcal{C}$ comptée à partir de l'origine O.

L'expression

$$C_i=\int_g \frac{dX_i[s]}{ds} X_{i+1}[s]\,dt \tag{2}$$

ne change pas si l'on change le vers positif qu'on a choisi sur $\mathcal{C}$, car

un tel changement comporte le changement de signe pour chacun des deux facteurs

$$\frac{dX_i[s]}{ds} \quad \text{et} \quad X_{i+1}[s].$$

On pose alors la définition suivante :

On appelle C_i *la* $i^{\text{ième}}$ *courbure de* $\mathcal{C}$. *On peut écrire en outre*

$$\begin{aligned}\frac{dX_i[s]}{ds} &= \frac{1}{K_i[s]}\frac{dR_f^{(i)}[s]}{ds} + R_f^{(i)}[s]\frac{d\frac{1}{K_i[s]}}{ds}\\ &= \frac{1}{K_i[s]}R_f^{(i+1)}[s] + P_i = \frac{K_{i+1}[s]}{K_i[s]}X_{i+1}[s] + P_i,\end{aligned}$$

où l'on a désigné par P_i *un paramètre de l'espace* σ_i *:* P_i *est donc orthogonal à* X_{i+1}.

On en déduit, en vertu de la relation (2), que

$$C_i = \frac{K_{i+1}[s]}{K_i[s]}.$$

En outre, en vertu de la relation (1), on a

$$ds^2 = K_1[u_1]^2\, du_1^2$$

et, en changeant u_1 avec s,

$$ds^2 = K_1[s]^2\, ds^2,$$

d'où

$$K_1[s] = 1.$$

Il s'ensuit que, en vertu du caractère absolu des $K_i(s)$, on peut écrire

$$C_i = \frac{k_{i+1}[s]}{k_i[s]\,k_1[s]} = \frac{k_{i+1}}{k_i k_1},$$

quelle que soit la variable u_1.

On obtient aussi

$$C_i = -\int_g X_i[s]\frac{dX_{i+1}[s]}{ds}\,dt,$$

relation qu'on établit tout de suite par dérivation de l'égalité

$$\int_g X_i[s]\,X_{i+1}[s]\,dt = 0.$$

Passons maintenant à établir les formules de Frenet. Il faut démontrer à ce but tout d'abord le théorème suivant :

Si $X'_i = \frac{dX_i}{du_1}$ *ou bien* $X'_i = 0$, *ou bien il est orthogonal aux paramètres*, $X_1, X_2, \ldots, X_{i-2}, X_i$.

Supposons en effet $\rho_\alpha < i - 1$; on aura

$$\int_g X_i f_\alpha \, dt = 0,$$

d'où

$$\int X'_i f_\alpha \, dt + \int_g X_i f_{\alpha_1} \, dt = 0.$$

Mais comme le nombre des chiffres de l'indice α_1 est plus petit que i, on a aussi

$$\int_g X_i f_{\alpha_1} \, dt = 0,$$

et, par conséquent,

$$\int_g X'_i f_\alpha \, dt = 0.$$

Si donc X'_i n'est pas nul, il est orthogonal aux paramètres X_1, $X_2, \ldots, X_{i-2}$ et comme $\int_g X_i^2 \, dt = 1$, on en conclut aussi, par dérivation, que si X'_i n'est pas nul il est orthogonal à X_i. Le théorème est ainsi démontré.

Cela posé prenons, comme variable, s au lieu de u_1 et remarquons tout d'abord que comme X_i est une combinaison linéaire des f_α, α étant de classe *entière* i, $X'_i = \frac{dX_i(s)}{ds}$ sera une combinaison linéaire des f_α avec α indice de classe $i+1$ et il appartiendra donc à σ_{i+1}.

X'_i est, en outre, orthogonal à l'espace linéaire déterminé par

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{i-2}, \quad X_i,$$

et pourtant il appartiendra à l'espace linéaire déterminé par X_{i-1} et X_{i+1}; on aura donc

$$X'_i = \lambda X_{i+1} + \mu X_{i-1},$$

ou $\lambda = \lambda(i)$ et $\mu = \mu(i)$.

En multipliant alors cette relation, une fois pour X_{i+1}, et une

autre fois pour X_{i-1}, et intégrant par rapport à t, on obtient

$$\lambda = \int_g X'_i X_{i+1}\, dt, \qquad \mu = \int_g X'_i X_{i-1}\, dt,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = C_i, \qquad \mu = -C_{i-1},$$

d'où

$$X'_i = C_i X_{i+1} - C_{i-1} X_{i-1}.$$

Ce sont précisément les formules de Frenet.

Remarquons finalement qu'on pourrait aussi établir aisément les propriétés suivantes [1] :

I. *On a* $X_1 = \frac{df}{ds}$.

II. *On a* $R_f^{(2)} = \frac{d^2 f}{ds^2}$.

III. *On a* $C_1^2 = \int_g \left(\frac{d^2 f}{ds^2}\right) dt$.

4. Le théorème fondamental sur la pseudo-linéarité des courbes. — Si $\mathcal{C}$ est une courbe de l'holoespace ambiant que l'on considère, on pourra arriver, ou bien que $\mathcal{C}$ soit entièrement plongée dans un espace linéaire contenu dans l'holoespace ambiant, ou bien que cela n'arrive pas.

Dans le premier cas nous dirons que $\mathcal{C}$ est une courbe pseudo-linéaire; dans le deuxième, qu'elle est une courbe transcendante.

Nous verrons par la suite la conséquence que ces deux éventualités possibles comportent, en vertu des idées introduites par M. Minetti au sujet du concept d'équation non paramétrique d'une variété, pour la théorie des équations différentielles ordinaires; maintenant, au contraire, nous donnerons ici le théorème fondamental concernant la pseudo-linéarité ou non d'une courbe $\mathcal{C}$ de l'holoespace que l'on considère.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe $\mathcal{C}$ de l'holoespace ambiant que l'on considère soit plongée dans un espace linéaire à i dimensions tandis qu'elle ne l'est pas dans un espace à $i-1$ dimensions, est que pour tous ses points, la $(i+1)^{ième}$ droite principale soit nulle, tandis que ne le soit pas sa $i^{ième}$ droite principale.*

Si en effet la droite principale $(i+1)^{\text{ième}}$ de $\mathcal{C}$ est nulle, parmi les éléments du système des f_α, α étant de classe $i+1$, il existe une relation linéaire, et par conséquent le deuxième membre $f(t \mid u_1)$ de l'équation paramétrique $x(t) = f(t \mid u_1)$ de $\mathcal{C}$, considéré comme fonction de u_1, est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre $i+1$ du type

$$\sum_1^i{}_r\, b_r[u_1] \frac{d^{r+1} f}{du_1^{r+1}} = 0.$$

Si alors $a_0 = 1$, $a_1(u_1)$, ..., $a_i(u_1)$ est un système fondamental d'intégrales de cette équation, on aura

$$f = \varphi_0 + \sum_1^i{}_r\, \varphi_r a_r(u_1),$$

où les $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_i$ sont des constantes par rapport à u_1, et par conséquent, des fonctions de t.

Par i dérivations successives alors, des deux membres de cette dernière égalité, par rapport à u_1, on obtiendra un système de $i+1$ équations linéaires dans les $i+1$ fonctions φ, le déterminant des coefficients duquel, étant le Wronskien des $a_0, a_1, \ldots, a_i$, est différent de zéro. Il s'ensuit que chaque fonction φ est une combinaison linéaire de f et des f_α avec α de classe $i+1$, f est donc un point de l'espace linéaire qui passe pour φ_0 et qui est déterminé des paramètres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i$.

La courbe $\mathcal{C}$ appartient donc à un espace linéaire à un nombre de dimensions qui est plus petit ou égal à i.

Réciproquement, si la courbe $\mathcal{C}$ est plongée dans un espace linéaire S_i à i dimensions, toutes f_α avec α de classe $i+1$ appartiennent à cet espace, et par conséquent ces f_α sont entre elles linéairement dépendantes et il existe un nombre minimum $j \leqq i+1$ tel que la droite principale $j^{\text{ième}}$ de $\mathcal{C}$ est nulle. Il s'ensuit que la droite principale $(i+1)^{\text{ième}}$ est nulle aussi.

De ce qu'on a établi jusqu'ici va suivre alors le théorème énoncé, car si l'espace linéaire S_p où est plongée la courbe $\mathcal{C}$, a un nombre de dimensions $p < i$, la première droite principale qui est nulle est d'ordre $i+1$, et réciproquement, si une droite principale d'ordre

plus petit que $i+1$ est nulle, la courbe $\mathcal{C}$ est plongée dans un espace linéaire S_p avec un nombre de dimensions $p < i$,

Corollaire. — *Si aucune des droites principales de $\mathcal{C}$ est nulle, la courbe $\mathcal{C}$ est une courbe transcendante.*

CHAPITRE VIII.

Les équations différentielles pseudo-linéaires et transcendantes. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la pseudo-linéarité d'une équation différentielle ordinaire.

1. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la pseudo-linéarité d'ordre 2 d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre non linéaire. — On a vu précédemment que l'équation non paramétrique d'une courbe $\mathcal{C}$ de l'holoespace ambiant que l'on considère, est une équation différentielle $x(t) = f[t \mid x(t)]$ du premier ordre par rapport à la fonction $x(t)$ qui représente le point générique de $\mathcal{C}$.

D'autre part, l'équation non paramétrique d'un espace linéaire S_p plongé dans l'holoespace ambiant est à son tour une équation différentielle linéaire d'ordre p par rapport à la fonction $x(t)$ qui représente le point générique de S_p.

Donc si la courbe $\mathcal{C}$ est une courbe pseudo-linéaire d'ordre p, c'est à-dire si elle est entièrement plongée dans un S_p, cela veut dire que toutes les intégrales de l'équation du premier ordre

$$(1) \qquad x(t) = f[t \mid x(t) \mid],$$

qui est l'équation de $\mathcal{C}$, sont aussi intégrales de l'équation différentielle linéaire d'ordre p

$$(2) \quad x^{(p)}(t) = b_1(t)x^{(p-1)}(t) + b_2(t)x^{(p-2)}(t) + \ldots + b_{p-1}(t)x'(t) + b_p(t),$$

qui est l'équation (non paramétrique) de S_p.

Nous dirons alors que l'équation (1) est une équation différentielle pseudo-linéaire d'ordre p.

Si au contraire la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$$(1) \qquad x'(t) = f[t \mid x(t) \mid]$$

est une courbe transcendante, nous dirons que son équation (1) est aussi transcendante, et dans ce cas il n'existera aucune équation diffé-

rentielle linéaire d'ordre aussi élevé que l'on veut qui jouisse de la propriété de contenir parmi ses intégrales toutes les intégrales de l'équation du premier ordre (1) qu'on a envisagée. On est ainsi amené à une classification des équations différentielles ordinaires qui semble pouvoir rendre beaucoup de services à l'analyse et qui a ses plus profondes racines dans une conception géométrique tout à fait naturelle, à savoir que les équations différentielles ordinaires sont les équations, au sens proprement dit, des variétés plongées dans un holoespace.

Le dernier théorème démontré au Chapitre précédent nous permet alors d'établir ici les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation différentielle soit, ou non, pseudo-linéaire et d'un certain ordre donné. La chose est d'autant plus intéressante, en tant qu'une fois assuré qu'une certaine équation différentielle est pseudo-linéaire d'ordre p, on est aussi assuré par là même, que les intégrales de l'équation différentielle donnée jouissent de tous les caractères analytiques dont jouissent les solutions d'une équation linéaire d'ordre p.

Nous nous bornerons ici à considérer les conditions qui caractérisent une équation différentielle du premier ordre qui soit pseudo-linéaire d'ordre 2.

Soit donc

$$\dot{x}(t) = f[t \mid x(t) \mid], \tag{1}$$

une équation différentielle du premier ordre qu'on suppose, naturellement non linéaire, et soit $\mathcal{C}$ la courbe de l'holoespace ambiant qui a pour équation l'équation (1).

Si cette équation est pseudo-linéaire d'ordre 2, la courbe $\mathcal{C}$ sera aussi pseudo-linéaire d'ordre 2 et réciproquement. En vertu alors du dernier théorème démontré dans le Chapitre précédent, pour que cela arrive il faut et il suffit que la deuxième droite principale de $\mathcal{C}$ soit nulle, tandis que la première n'est pas nulle.

Dire, d'autre part que la deuxième droite principale de $\mathcal{C}$ est nulle revient à dire que le correspondant riccien est nul; si en effet ce riccien n'était pas nul, la deuxième droite principale en question ne pourrait être nulle, car dans cette hypothèse cette droite existerait et serait parfaitement déterminée de ce riccien (*voir* à la fin du paragraphe **2**, Chapitre VII).

Si donc

$$(3)\qquad x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{d^i x}{dt^i}\right)_{t_0, x_0} \frac{(t-t_0)^i}{i!} = \varphi(t, x_0)$$

est le développement de Cauchy qui donne l'intégrale de l'équation (1) qui pour $t = t_0$ acquiert la valeur x_0, et qui donne donc, si l'on pense x_0 variable, l'intégrale générale de la même équation, en rappelant la définition de riccien (*voir* Chap. IV, § 5) et en tenant compte que les symboles de Christoffel sont représentés maintenant des expressions

$$(4)\qquad \sum_\delta \left\{ \int_g \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_0^3} \frac{\partial^\delta \varphi}{\partial x_0^\delta} dt \right\} a^{\gamma, \delta}$$

on parvient aisément à la condition

$$(5)\qquad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_0^3} + \varphi_2(x_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \varphi_1(x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \equiv 0,$$

où

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(x_0) &= \frac{1}{\Delta}\left[\int_g \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_0^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} dt \int_g \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} dt \right. \\ &\qquad \left. - \int_g \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_0^3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} dt \int_g \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2}\right)^2 dt \right], \\ \varphi_2(x_0) &= \frac{1}{\Delta}\left[\int_g \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_0^3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} dt \int_g \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} dt \right. \\ &\qquad \left. - \int_g \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_0^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} dt \int_g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 dt \right] \end{aligned} \right.$$

et

$$(7)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \int_g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 dt & \int_g \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} dt \\ \int_g \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} dt & \int_g \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2}\right)^2 dt \end{vmatrix}.$$

Dans ce cas, d'autre part, c'est la condition (5) toute seule qui est à la fois nécessaire et suffisante pour la pseudo-linéarité d'ordre 2 de l'équation différentielle (1), car il est évident que la condition ultérieure imposant que la première droite principale de $\mathcal{C}$ ne soit pas nulle est parfaitement équivalente à l'hypothèse, déjà faite, que l'équation (1) de $\mathcal{C}$ ne soit pas linéaire [**2**, *c*].

OUVRAGES A CONSULTER.

G. Vitali. — *Geometria nello spazio hilbertiano* (Bologna, Nicola Zanichelli, 1929).
M. Fréchet. — *Les espaces abstraits* (Paris, Gauthier-Villars, 1928).
P. Lévy. — *Leçons d'Analyse fonctionnelle* (en espèce le Chapitre VII) (Paris, Gauthier-Villars, 1922).

Pour ce qui concerne, en outre, la notion fondamentale de « distance », en général, dans les ensembles abstraits, on pourra consulter :

M. Fréchet. — La notion d'écart et le calcul fonctionnel (*C. R. Acad. Sc.*, t. 140, 10 mars 1905).
— Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 30, 1910, p. 1-26).
— Sur les classes ($\mathcal{V}$) normales (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 14, 1913, p. 320-324).
— Généralisation d'un théorème de Weierstrass (*C. R. Acad. Sc.*, t. 139, 21 novembre 1904).
— Sur les ensembles abstraits (*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 38, 1921, p. 341 387).
— Sur l'homéomorphie de deux ensembles et sur les ensembles complets (*Bull. Sc. math.*, t. 49, 1925, p. 100-103).
P. Uryson. — Les classes ($\mathcal{D}$) séparables et l'espace hilbertien (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178, 1924, p. 65).
— Sur un problème de M. Fréchet (*C. R. Congrès Soc. sav. Dijon*, 1924).
M. Fréchet. — Sur la notion de nombre de dimensions (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178, 1924, p. 1782).
F. Riesz. — Sur les systèmes orthogonaux (*C. R. Acad. Sc.*, t. 144, 18 mars 1907).
M. Fréchet. — Essai de Géométrie analytique à une infinité de coordonnées (*Nouv. Ann. de Math.*, t. 8, 1908, en deux parties).
C. Arzelà. — Sulle serie di funzioni analitiche (*Rend. Acc. Scienze Istituto di Bologna*, t. 7, 1902 1903, p. 33).
P. Montel. — Sur les suites de fonctions analytiques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 138, 1904, p. 469).
M. Fréchet. — Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable (*Bull. Calcutta Math. Soc.*, t. 11, 1921, p. 187-206).
— Sur la distance de deux ensembles (*Bull. Calcutta Math. Soc.*, t. 15, 91, 1924, p. 1 8).
— Sur la distance de deux surfaces (*Ann. Soc. polonaise Math.*, t. 2, 1924, p. 232-247).
P. Uryson (rédigé par P. Alexandroff). — Sur un espace métrique universel (*Bull. Sc. Math.*, t. 51, 1927, p. 1-38).

M. Fréchet. — L'expression la plus générale de « distance » sur une droite (*Amer. Journ. Math.*, t. 47, 1925, p. 1-10).

— Sur l'espace métrique universel de Paul Uryson (*Bull. Soc. Math.*, t. 59, 1925, p. 297-301).

W. Sierpinski. — Sur les ensembles connexes et non connexes (*Fund. Math.*, t. 2, 1921, p. 81-97).

C. Arzelà. — Sulle funzioni di linee (*Mem. R. Accad. Sc. Ist. Bologna*, t. 5, 1895, p. 55 74).

G. Valiron. — Sur les courbes continues qui admettent une tangente en chaque point (*Nouv. Ann. Math.*, t. 27, 1926).

M. Fréchet. — Sur une représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue la plus générale (*Journ. de Math.*, t. 4, 1925, p. 281-297).

P. Alexandroff. — Sur les ensembles de la première classe et les ensembles abstraits (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178, 1924, p. 185 187).

F. Hausdorff. — Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen (*Fund. Math.*, t. 6, 1924, p. 146 148).

W. Sierpinski. — Sur l'espace $\mathcal{O}_\omega$ de M. Fréchet (*Fund. Math.*, t. 9, 1927, p. 189-192).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

se rapportant aux renvois bibliographiques contenus dans le texte.

---

1. G. Vitali. — *Geometria nello spazio hilbertiano* (Bologna, Nicola Zanichelli, 1929).

2. S. Minetti. — *a.* Sur la géométrie de l'holoespace des fonctions holomorphes dans un même domaine et sur ses liens avec la théorie des équations différentielles ordinaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 197, 1933, p. 221).

b. Id. (*Ibid.*, p. 474).

c. Id. (*Ibid.*, p. 637).

d. La Geometria degli olospazi e i suoi legami con le equazion differenziali ordinarie (*Atti Reale Accad. d'Italia*, t. 4, estr. n° 17, 1933, p. 483-583).

e. Sulla struttura topologica dello spazio F delle funzioni olomorfe all' interno di un medesimo campo, e su quella dello spazio A delle funzioni analitiche nel sensodi Weierstrass (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 59, 29 apr. 1934, fasc. 1 et 2, p. 97 146).

f. Sulla struttura topologica dello spazio funzionale A costituito dalla totalità delle funzioni analitiche nel senso di Weierstrass (*Rend. R. Acc. Lincei*, t. 21, série 6e, 1er sem., fasc. 9, maggio 1935, p. 645 650).

g. Sur quelques points de la théorie des fonctions et sur un nouveau criterium de normalité d'une famille de fonctions analytiques (*Journ. de Math. pures et appl.*, sous presse).

3. J. Delsarte. — Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert (*Mém. Sc. math.*, fasc. 57; Paris, Gauthier-Villars, 1932).

4. E. Hille et J. Tamarkin. — On moment functions (*Proc. of the Nat. Ac. Sc. Washington* 1933, t. 19, n° 10, 1933, p. 902).

5. M. Fréchet. — *a. Les espaces abstraits* (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

b. Remarques sur les communications de M. Minetti au sujet d'un espace composé de fonctions holomorphes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 197, 1933, p. 1182).

c. Sur quelques points du calcul fonctionnel (*Thèse de Paris*, 1906 ou *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 22, 1906, p. 1-74).

6. E. W. Chittenden. — Sur les ensembles abstraits (*Ann. Sc. Éc. Norm. sup.*, t. 41, 1924).

7. P. Alexandroff et P. Uryzon. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace ($\mathcal{L}$) soit une classe ($\mathcal{D}$) (*C. R. Acad. Sc.*, t. 177, 1933, p. 1274).

8. Lipka. — Sulla curvatura geodetica delle linee appartenenti ad una varietà qualunque (*Rend. R. Acc. Lincei*, t. 31, 1er sem. 1922, p. 353-356).

9. Voss. — Zur Theorie der Transformation Quadr. Diff. Ausdruke und der Krummungs, etc. (*Math. Ann.*, Band 16).

10. T. Levi Civita. — *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (Roma, Alberto Stock, 1925).

11. V. Volterra. — *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

12. P. Lévy. — *Leçons d'Analyse fonctionnelle* (Paris, Gauthier Villars, 1922).

13. F. Riesz. — *a.* Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm (*C. R. Acad. Sc.*, t. 144, 1907).

b. Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues (*C. R. Acad. Sc.*, t. 150, 1910).

c. Sur la convergence en moyenne (*Göttinger Nachrichten*, 1907).

14. E. Fischer. — Sur la convergence en moyenne (*C. R. Acad. Sc.*, t. 144, 1907, p. 1022).

15. E. Lalesco. — *Introduction à la théorie des équations intégrales*, Paris, 1912, p. 90.

16. M. Plancherel. — *a.* Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 30, 1910).

b. Sur le théorème de Fischer-Riesz (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1910, p. 292).

TABLE DES MATIÈRES.

Chapitre I.

Les fondements du calcul différentiel absolu généralisé de Pascal-Vitali. Les premières notions sur l'espace de Hilbert.

Pages

1. Généralités 1
2. Les symboles $I_\alpha[u]$ et leurs transformés 2
3. Les systèmes absolus 5
4. Fonctions r variantes 8
5. Opérations élémentaires sur les systèmes absolus 9
6. L'espace de Hilbert et les holoespaces 12

Chapitre II.

La géométrie de l'espace (F) *des fonctions holomorphes à l'intérieur d'un domaine* ($\mathfrak{D}$) *et continues dans ce domaine fermé.*

1. La notion de distance et propriétés fondamentales 17
2. Définition de la limite 20
3. Les travaux de MM. Hille et Tamarkin 21
4. L'espace H_2 complet de M. Fréchet 22
5. Propriétés topologiques de l'espace H_2 27
6. L'espace F des fonctions holomorphes à l'intérieur d'un domaine donné 29
7. L'espace A des fonctions analytiques uniformes au sens de Weierstrass 31

Chapitre III.

Métrique angulaire, lignes, lignes géodésiques, Courbure géodésique, etc. de l'espace (F).

1. Conception fondamentale sur la nature de l'espace (F). Angles et lignes 31
2. Lignes géodésiques 35
3. Tangente à une ligne 36
4. Courbure géodesique 37
5. Plans 37

Chapitre IV.

Symboles associés à un point fonction de l'espace ($\mathfrak{X}$) *ou* ($\mathfrak{C}$) *ou enfin de l'espace* ($\mathfrak{D}$) *des fonctions continues et dérivables dans l'intervalle* (0, 1).

1. Généralités 38
2. Le système absolu des symboles $a_{\alpha,\beta}$ 39

Pages.

3. Les symboles $\underset{\nu}{a}$ et $\underset{\nu}{a}^{\alpha,\beta}$ 39

4. Les symboles de Christoffel et leurs propriétés 40

CHAPITRE V.

La dérivation covariante des systèmes absolus. Règles de dérivation covariante. Dérivés covariants de certains systèmes absolus.

1. La dérivation covariante 41
2. Cas particuliers 42
3. Règles de dérivation covariante 43
4. Dérivés covariants de certains systèmes absolus 43
7. Les ricciens d'un invariant 44

CHAPITRE VI.

Le concept d'équation non paramétrique d'une variété de l'holoespace ($\mathfrak{D}$) et les liens entre la géométrie des holoespaces et les équations différentielles ordinaires.

1. Le concept fondamental d'équation non paramétrique d'une variété linéaire de l'holoespace ($\mathfrak{D}$) 45
2. Variétés d'ordre supérieur 48
3. Quelques considérations 49

CHAPITRE VII.

Généralités sur les variétés des holoespaces ($\mathfrak{X}$), ($\mathfrak{C}$) ou ($\mathfrak{D}$). Les premiers éléments de la géométrie différentielle de ces holoespaces. Variétés unidimensionnelles.

1. Espaces linéaires ou euclidiens 49
2. Les espaces σ_ν d'une variété; les espaces principaux et leur détermination au moyen des ricciens 56
3. Les courbes 56
4. Le théorème fondamental sur la pseudo linéarité des courbes 59

CHAPITRE VIII.

Les équations différentielles pseudo linéaires et transcendantes. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la pseudo linéarité d'une équation différentielle ordinaire.

1. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la pseudo linéarité d'ordre 2 d'une équation différentielle ordinaire de premier ordre non linéaire 61

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE 64

102675 36 Paris. — Imp. GAUTHIER VILLARS, quai des Grands Augustins, 55.