MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

A. BUHL

Séries analytiques. Sommabilité

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 7 (1925)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1925__7__1_0>

© Gauthier-Villars, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

L8048

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris
Professeur à l'Université de Strasbourg.

CIRM * LUMINY * BIBLIOTHÈQUE

FASCICULE VII.

Séries analytiques. Sommabilité.

Par A. BUHL
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

CENTRE INTERNATIONAL DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES
FONDS BUHL MARCELLOUT

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1925

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras figurant entre crochets dans le courant du texte renvoient à cette Bibliographie.

SÉRIES ANALYTIQUES. SOMMABILITÉ.

Par M. A. BUHL,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

Il s'agit ici, au fond, du problème du prolongement analytique, problème qui a suscité l'effort d'un très grand nombre de géomètres parmi lesquels quatre noms brillent d'un éclat tout particulier : ce sont ceux de MM. E. Borel [1], J. Hadamard [2], G. Mittag-Leffler [3] et P. Painlevé [4]. La théorie semble française; les Mémoires de M. Mittag-Leffler et de presque tous ses élèves sont écrits en français, ils ont été précédés de Notes publiées surtout dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et M. Walter B. Ford, dans un court mais substantiel aperçu historique [5], a fait ressortir que les deux premiers volumes de l'Encyclopédie mathématique allemande ne consacraient pas tout à fait 7 pages, sur 2282, à la théorie des séries divergentes.

Ajoutons toutefois que ceci nous reporte assez loin dans le passé et que nombre de travaux sur la sommabilité analytique ne se réclament pas *explicitement* de la notion de série divergente.

En outre l'Encyclopédie précédente, dans la plus récente édition, a été considérablement complétée sur le point en litige, notamment par un article de M. L. Bieberbach [5*], qui contient les plus essentiels des résultats que nous allons exposer.

Dans cet opuscule, j'emploie une méthode très synthétique, éminemment propre à la condensation et qui me paraît d'ailleurs puissante. *Je n'étudie rien d'autre qu'une intégrale double :* celle de l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+p} s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{F(z)\,\varphi_p(\zeta, \xi, x)}{(\zeta - \xi)\left(z - \frac{\xi x}{\zeta}\right)} d\zeta\, dz,$$

en laquelle $\varphi_p(\zeta, \xi, x)$ est une fonction entière en ζ dont le développement taylorien est fait des c_{n+p}, cependant que les s_n sont des polynomes dits *taylorians* parce qu'on les extrait toujours d'un développement taylorien de $F(x)$.

Cette intégrale double est l'une de celles qui généralisent l'intégrale simple de Cauchy; elle a des propriétés encore incomparablement plus riches, ce qui n'est pas peu dire. Les résultats que j'atteins ainsi le plus immédiatement sont ceux de M. Mittag-Leffler.

Naturellement l'étude ne va pas sans celle des φ_p, c'est-à-dire de fonctions entières à choisir avec discernement si l'on veut obtenir des prolongements aussi parfaits que possible.

On est alors aiguillé du côté des fonctions entières qui ne croissent indéfiniment en module que quand la variable va à l'infini dans un angle qui peut devenir aussi aigu qu'on veut, fonctions sur l'existence desquelles M. E. Borel ne se prononçait pas encore en 1899 [6]. Ceci prouve combien la théorie des fonctions entières était peu avancée à la fin du siècle dernier. Ses progrès depuis ont été rapides; on a reconnu toute l'importance des théorèmes de M. E. Picard et des lemmes de croissance de M. J. Hadamard. L'intérêt, parfois d'apparence paradoxale, est toujours dans le voisinage des points singuliers essentiels. De brillants et jeunes successeurs, tels que MM. G. Julia [7] et G. Valiron [8], nous ont donné, sur ces sujets, de fort jolies monographies. J'en recommande la lecture à ceux qui voudront continuer les travaux ici esquissés car c'est certainement en partant de la fonction entière et de son développement taylorien valable dans tout le champ complexe qu'on arrive à apercevoir le plus naturellement les méthodes de prolongement analytique pour les fonctions qui ont besoin d'un tel prolongement.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS. INTÉGRALES CURVILIGNES FONDAMENTALES.

1. Sommation et sommabilité. — Soient les deux séries

$$F(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots \tag{1}$$

$$f(\xi) = c_0(\xi) + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \ldots \tag{2}$$

qui sont supposées représenter les premiers membres dans des condi-

tions connues, par exemple lorsque x et ξ sont dans de certains intervalles ou dans de certaines régions du plan s'il s'agit de variables complexes. Il faut supposer de plus, dans ce qui suit, que $f(\xi)$ devient infinie, pour de certaines valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de ξ, mais que la série (2) reste propre à représenter $f(\xi)$ dans le voisinage immédiat de tous ces α ou, tout au moins, quand ξ tend vers α d'une manière bien déterminée.

Le produit $F(x)f(\xi)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} & c_0 u_0 + c_0 u_1 + c_0 u_2 + \ldots \\ + & c_1 u_0 + c_1 u_1 + c_1 u_2 + \ldots \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Désignons par s_n la somme des $n+1$ premiers termes de (1). Dans le tableau que nous venons de former, la diagonale principale et tous les termes placés au-dessous peuvent se représenter par

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n.$$

Tenant compte des autres termes, on arrive (9) à la formule

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \frac{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}{f(\xi)}.$$

On voit que le second sigma peut tendre vers zéro, quand ξ tend vers l'une des valeurs α précédemment définies, *à condition que la série* (1) *soit convergente*. On a alors à la fois

$$(3) \qquad F(x) = \lim_{n=\infty} s_n, \qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)}.$$

Examinons, sans plus tarder, quelques cas où la *fonction sommatrice* $f(\xi)$ prend une forme particulière. Pour

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\xi} = 1 + \xi + \xi^2 + \ldots,$$

on a (formule de Cesàro)

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s_0 + \xi s_1 + \xi^2 s_2 + \ldots}{1 + \xi + \xi^2 + \ldots} = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}.$$

Pour (p désignant un entier positif)

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\xi^p} = 1 + \xi^p + \xi^{2p} + \ldots,$$

on a

$$(4) \qquad F(x) = \lim_{\xi=\alpha} \frac{s_0 + \xi^p s_p + \xi^{2p} s_{2p} + \ldots}{1 + \xi^p + \xi^{2p} + \ldots},$$

en désignant par α l'une quelconque des racines de l'équation binome

$$\xi^p - 1 = 0,$$

racine vers laquelle ξ doit tendre sans sortir du cercle $|\xi| = 1$. Si l'on prend simplement la racine 1, la formule (4) devient

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_p + s_{2p} + \ldots + s_{(n-1)p}}{n}.$$

Remarquons, *la série* (1) *étant toujours supposée convergente*, qu'on peut prendre p assez grand pour que les sommes s_p, s_{2p}, ..., $s_{(n-1)p}$ diffèrent les unes des autres d'aussi peu qu'on voudra. Cela permet d'écrire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{s_0}{n} + \frac{n-1}{n} s_{(n-1)p} \right) = \lim_{n=\infty} s_{(n-1)p}.$$

On passe ainsi directement de la seconde à la première des formules (3) et, par suite, on peut dire que la première est un cas particulier de la seconde.

Revenons aux formules (3) considérées en général. En la première il y a *sommation*, en la seconde *sommabilité*. Jusqu'ici les deux choses semblent complètement équivalentes, la seconde pouvant sembler curieuse mais non utile, car, si s_n a une limite, le plus simple paraît être de considérer celle-ci directement et non par l'intermédiaire de $f(\xi)$ et des c_n. Mais les deux procédés s'opposent, au contraire, de manière extrêmement remarquable et des plus utiles, dans les cas où s_n cesse d'avoir une limite sans qu'il en soit de même, dans le second membre de la deuxième équation (3), pour la limite en ξ.

Il peut même arriver, contrairement à la première apparence, que la seconde limite ait des propriétés plus simples à discuter, ou plus avantageuses à certains points de vue, que la première. C'est notamment ce qu'a montré M. L. Fejér [10] en appliquant la formule de Cesàro à la série de Fourier.

Le but de cet opuscule est d'examiner les séries de Taylor dans des conditions analogues.

Remarquons encore que la fonction $f(\xi)$ ne joue de rôle jusqu'ici que par ses infinis α et ceci peut donner une première idée du rôle qui peut échoir, en Analyse, aux séries divergentes : *celles-ci deviennent instruments de sommabilité vis-à-vis d'autres séries.* C'est ainsi que

$$1 + \xi + \xi^2 + \ldots$$

conduit, pour $\xi = 1$, à la formule de Cesàro.

Ce premier exposé pourrait déjà soulever bien des discussions plus ou moins subtiles; nous avons voulu simplement indiquer à grands traits la dualité des formules (3).

Nous réservons l'attention pour le cas des séries entières.

La formule de Cesàro [11] a été le point de départ d'extensions, particulièrement d'*itérations* dues à Faber, Fejér, Ford, Frobenius, Hölder, Knopp, Kogbetliantz, Le Roy, Moore, Plancherel, Riesz, Schur, Schnee, La Vallée Poussin, etc.

Pour plus de détails, sur tous ces géomètres et leurs travaux, on pourra consulter R. D. Carmichael [12], Walter B. Ford [5], O. Hölder [13], Lloyd L. Smail [14], E. Kogbetliantz [15].

Quelques liens remarquables ont été aperçus entre ces méthodes d'itération et les questions que nous allons aborder. *Voir*, par exemple, L. Hanni [16].

Enfin des disciplines assez diverses en apparence ont pu donner des résultats analogues. Telle est l'analyse dite *de composition* de MM. V. Volterra et J. Pérès [16*]. Cette analyse conduit à des *séries de composition* parmi lesquelles on retrouve les séries sommatrices de la théorie borélienne.

2. Séries entières. — Soit $F(x)$ une fonction *analytique* qui sera généralement supposée *uniforme* dans tout le champ complexe. Nous supposerons aussi que $F(x)$ n'a que des points singuliers *isolés* et que *l'origine* O *n'est jamais un point singulier.*

Par tous les points singuliers a_i menons des demi-droites opposées aux directions $a_i O$.

Par hypothèse, $F(x)$ est *holomorphe* dans tout contour C tracé d'abord autour de O et qui grandit *en s'étoilant* entre les demi-droites pointillées que nous venons de définir.

Le contour C peut alors prendre la forme canonique indiquée à droite sur la figure 1.

Fig. 1.

Pour de tels contours C, on a la formule de Cauchy

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)}{z-x}\,dz. \tag{5}$$

Celle-ci, sous la condition nouvelle $|x| < |z|$ quand z parcourt C, donne le développement de Taylor (ou de Mac-Laurin)

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} F(z)\left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \ldots\right) dz. \tag{6}$$

Le contour C est donc à remplacer, dans (6), par un contour C′ entièrement contenu dans le cercle de centre O dont la circonférence passe par a_1 point singulier le plus rapproché de l'origine. En tout cas, le développement (6) n'est valable que dans C′.

Mais ceci n'empêche pas que l'on peut écrire, *avec le contour* C,

$$s_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C F(z)\left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}}\right) dz \tag{7}$$

ou bien

$$s_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C F(z)\,\frac{z^{n+1} - x^{n+1}}{z-x}\,\frac{dz}{z^{n+1}}. \tag{8}$$

Ceci posé, soit la *fonction sommatrice*

$$f(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\xi^2 + \ldots \tag{9}$$

ou, d'une manière abrégée,

$$f(\xi) = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots. \tag{10}$$

Nous poserons

$$\varphi_p(\xi) = f(\xi) - (c_0 + c_1 + \ldots + c_{p-1}), \qquad \varphi_0(\xi) = f(\xi). \tag{11}$$

Généralement $f(\xi)$ sera une fonction *entière* et nous aurons

$$c_{n+p} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \varphi_p(\zeta)\frac{\xi^{n+p}}{\zeta^{n+p+1}}\,d\zeta, \tag{12}$$

en désignant par Γ un contour qui peut être une circonférence ayant l'origine pour centre et un rayon aussi grand qu'on veut dans le plan de la variable ζ.

Formons

$$c_{n+p}s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma F(z)\varphi_p(\zeta)\frac{z^{n+1} - x^{n+1}}{z - x}\frac{\xi^{n+p}\,d\zeta\,dz}{\zeta^{n+p+1}z^{n+1}},$$

et sommons de $n = 0$ à $n = \infty$; en utilisant les identités

$$\begin{aligned}\sum \frac{z^{n+1} - x^{n+1}}{\zeta^{n+p+1}z^{n+1}}\xi^{n+p} &= \frac{\xi^p}{\zeta^p}\left[\sum \frac{\xi^n}{\zeta^{n+1}} - x\sum \frac{(\xi x)^n}{(\zeta z)^{n+1}}\right] \\ &= \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p\left(\frac{1}{\zeta - \xi} - \frac{x}{\zeta z - \xi x}\right) \\ &= \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{\zeta(z - x)}{(\zeta - \xi)(\zeta z - \xi x)},\end{aligned} \tag{13}$$

il vient finalement

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{F(z)\varphi_p(\zeta)}{(\zeta - \xi)\left(z - \frac{\xi x}{\zeta}\right)}\,d\zeta\,dz. \tag{14}$$

L'emploi des identités (13) n'est légitime que si

$$|\xi| < |\zeta|, \qquad |\xi x| < |\zeta z|, \tag{15}$$

mais ces conditions (15) ne jouent aucun rôle restrictif car, quels que soient ξ et x, on peut toujours prendre le rayon $|\zeta|$ de Γ assez grand pour qu'elles soient réalisées.

3. **Intégrale simple fondamentale.** — On peut étudier le second membre de (14) en prenant, comme première variable d'intégration, soit z, soit ζ. Je prends ζ. D'après la dernière équation (13), l'inté-

grale double peut aussi bien s'écrire

$$\int\int\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{F(z)\varphi_p(\zeta)}{(\zeta-\xi)(z-x)}\,dz\,d\zeta - \int\int\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{x}{z}\,\frac{F(z)\varphi_p(\zeta)}{\left(\zeta-\frac{\xi x}{z}\right)(z-x)}\,dz\,d\zeta.$$

D'après la remarque faite à propos des inégalités (15), ξ et $\xi x : z$ sont toujours dans Γ.

On pourrait croire, d'autre part, que le dénominateur ζ^p qui figure dans les intégrales doubles doive faire considérer l'origine du plan de Γ comme un pôle d'ordre p. Il n'en est rien car $\varphi_p(\zeta)$ contient ζ^p en facteur. Donc l'intégration en ζ conduit à remplacer (14) par

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}s_n = \frac{1}{2i\pi}\varphi_p(\xi)\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_C \left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{F(z)\,dz}{z-x},$$

d'où

$$(16)\qquad \varphi_p(\xi)F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}s_n + \frac{1}{2i\pi}\int_C \left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

C'est là une formule fondamentale. Elle donnera une formule de sommabilité, analogue à la seconde (3), toutes les fois que l'on pourra se débarrasser de l'intégrale de ligne qu'elle contient, ce à quoi on peut parvenir, comme nous le verrons, par des méthodes fort variées.

Marquons le rôle, à vrai dire secondaire mais intéressant tout de même, de l'indice p.

Faire varier cet indice revient à déranger tous les coefficients c_{n+p} de la même manière par rapport aux polynomes s_n; or la formule (16) fait pressentir que ce dérangement n'aura jamais d'influence bien essentielle sur la représentation de $F(x)$. Néanmoins il y a avantage à laisser p provisoirement indéterminé et à pouvoir le choisir suivant la nature des questions que nous rencontrerons dans la suite. Ainsi, si l'on voulait étudier directement l'intégrale double de (14), il semble qu'on la simplifierait légèrement en prenant $p=0$; au contraire, dans (16), on est tenté de prendre $p=1$.

4. Généralisations. — Il arrivera, dans la suite, que la fonction sommatrice se présentera encore sous l'aspect (9) mais avec cette généralisation que les coefficients γ_i seront des fonctions de ξ et même

de x. Ainsi on aura

$$(17)\quad \begin{cases} f(\zeta, \xi, x) = f(0, \xi, x) + \frac{\zeta}{1!} f'(0, \xi, x) + \frac{\zeta^2}{2!} f''(0, \xi, x) + \ldots, \\ f(\xi, \xi, x) = \quad c_0 \quad + \quad c_1 \quad + \quad c_2 \quad + \ldots. \end{cases}$$

Généralement $f(\zeta, \xi, x)$ sera encore une fonction entière de ζ pour les valeurs de ξ et x qui seront considérées. On posera encore

$$\varphi_p(\xi, \xi, x) = f(\xi, \xi, x) - (c_0 + c_1 + \ldots + c_{p-1}),$$

d'où

$$(18)\quad \varphi_p(\xi, \xi, x) = \begin{cases} \frac{\xi^p}{p!} f^{(p)}(0, \xi, x) + \frac{\xi^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(0, \xi, x) + \ldots \\ \quad c_p \quad + \quad c_{p+1} \quad \ldots \end{cases}$$

Dans ces conditions les raisonnements généraux des paragraphes 2 et 3 peuvent être conservés; la formule (14) est à remplacer par

$$(19)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p} s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{F(z)\varphi_p(\zeta, \xi, x)}{(\zeta - \xi)\left(z - \frac{\xi x}{\zeta}\right)} d\zeta\, dz.$$

ce qui donne, au lieu de (16),

$$(20)\quad \varphi_p(\xi, \xi, x) F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p} s_n + \frac{1}{2i\pi} \int_C \left(\frac{z}{x}\right)^{p-1} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}, \xi, x\right) \frac{F(z)\,dz}{z - x}$$

avec, bien entendu,

$$(21)\quad c_{n+p} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \varphi_p(\zeta, \xi, x) \frac{\xi^{n+p}}{\zeta^{n+p+1}} d\zeta.$$

Ceci dit, il est aisé d'indiquer de manière précise ce que l'on trouvera dans le présent fascicule. *Les formules* (19) *ou* (20) *dominent tous les résultats à obtenir.*

L'intégrale double de (19) généralise l'intégrale simple de Cauchy rappelée en (5).

De même que (5) donne la *série de Taylor*, valable dans son cercle de convergence, les formules (19) et (20) donneront, pour la représentation de $F(x)$, des *séries de polynomes taylorians* s_n qu'on s'efforcera de rendre valables dans des domaines de plus en plus étendus, domaines qui finiront par s'étendre en tout le champ complexe.

Pour mener à bien cette étude il doit évidemment être nécessaire de faire un choix quant aux fonctions sommatrices, $f(\zeta)$ ou $f(\zeta, \xi, x)$, à employer. Nous distinguerons les fonctions sommatrices *ordinaires*,

comme par exemple la fonction exponentielle, qui se sont introduites en Analyse pour une foule de raisons fort indépendantes du problème de prolongement analytique ici considéré; ensuite nous passerons aux fonctions sommatrices *spéciales* qu'il a fallu construire tout exprès pour réaliser des prolongements analytiques aussi parfaits que possible. Bien que ces fonctions spéciales aient des propriétés fort curieuses et d'apparences parfois paradoxales, elles ne sont cependant jamais bien éloignées des types ordinaires et particulièrement du type exponentiel.

5. **Convergence.** — Le cadre de cet opuscule ne nous permettra pas d'approfondir cette question toutes les fois que nous rencontrerons une série en $c_{n+p}s_n$. Indiquons l'essentiel. Prenons le sigma de (16). Pour n croissant indéfiniment $\lim \sqrt[n]{|\gamma_n|} = 0$. Considérons le cercle où converge le développement taylorien $\Sigma a_n x^n$ de $F(x)$. Avec r module d'un x inclus dans ce cercle, on a $|a_n| r^n < g$ si g est une constante. Donc $|a_n| < g r^{-n}$ et, quel que soit x,

$$|s_n| < g\left(1 + \frac{|x|}{r} + \ldots + \frac{|x|^n}{r^n}\right) = g\,\frac{|x^n|}{r^n}\,\frac{1 - \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n+}}{1 - \frac{r}{|x|}}.$$

Donc $\sqrt[n]{|s_n|}$ est fini quel que soit x et $\sqrt[n]{|\gamma_n s_n|}$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Quels que soient ξ et x finis, le sigma de (16) a un sens.

Le plus délicat est alors de faire croître ξ indéfiniment. Mais si, par exemple, dans (16) divisée par $\varphi_p(\xi)$, l'intégrale ainsi divisée garde un sens (généralement on la fait tendre vers zéro), le sigma, acceptable dans la formule quelque grand que soit ξ, conserve encore un sens pour ξ infini.

Ce raisonnement pourrait s'étendre à la formule (20), au moins dans les cas qui seront développés ultérieurement.

CHAPITRE II.

FONCTIONS MÉROMORPHES ET FONCTIONS SOMMATRICES ORDINAIRES.

1. **Fonctions méromorphes à pôles simples.** — Après les fractions rationnelles, les fonctions méromorphes sont évidemment les plus simples pour lesquelles se pose un problème de prolongement analy-

tique. Si l'on veut effectuer ce prolongement par les *séries de polynomes tayloriens* s_n, il est fort remarquable que le résultat puisse être obtenu sans intervention des formules générales de Calcul intégral établies précédemment.

De plus le rôle des fonctions sommatrices s'étudie plus aisément sur des formules dépourvues de tout symbole de quadrature; nous sommes donc en présence de cas simples par lesquels il est naturel de commencer [17].

Soit $F(x)$ une fonction méromorphe à pôles *simples* $a_1, a_2, \ldots$ rangés par ordre de modules croissants. Le pôle a_i sera de résidu A_i. Soit un cercle C_k ayant l'origine pour centre et dont la circonférence passe entre a_k et a_{k+1}. Pour x dans ce cercle, on a

$$(1)\qquad F(x) = \sum_1^k \frac{A_i}{x - a_i} - a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \ldots.$$

Dans le voisinage de l'origine, cette formule donne

$$(2)\qquad F(x) = \sum_1^k A_i\left(-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \ldots\right) + a_{k0} + a_{k1}x + \ldots.$$

Alors s_n est le polynome d'ordre n qui commence ce développement (2).

La formule (1) peut s'écrire

$$(3)\qquad F(x) = \sum_1^k A_i\left[-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \ldots - \frac{x^n}{a_i^{n+1}} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x - a_i)}\right]$$
$$+ (a_{k0} + a_{k1}x + \ldots + a_{kn}x^n) + a_{k,n+1}x^{n+1} + \ldots$$

ou bien

$$(4)\qquad F(x) = s_n + \sum_1^k \frac{A_i x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x - a_i)} + a_{k,n+1}x^{n+1} + a_{k,n+2}x^{n+2} + \ldots.$$

Prenons maintenant la fonction sommatrice *entière* définie par la formule (9) du Chapitre I. Si l'on multiplie tous les termes de (4) par c_{n+p} et que l'on somme de $n = 0$ à $n = \infty$, il vient

$$(5)\qquad F(x)\varphi_p(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+p}s_n + \sum_{i=1}^k \varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)\left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1}\frac{A_i}{x - a_i}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(\gamma_p\xi^p + \ldots + \gamma_{p+n}\xi^{p+n})a_{k,n+1}x^{n+1}.$$

Le second membre de cette formule (5) se compose, on le voit, de trois parties bien distinctes.

Si l'on veut développer $F(x)$ en série de polynomes tayloriens s_n, il faut s'arranger à ne conserver, dans le second membre de (5), que le premier sigma et à détruire les deux autres.

Divisons partout par $\varphi_p(\xi)$ et étudions d'abord l'expression

$$(6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_p \xi^p + \ldots + \gamma_{p+n} \xi^{p+n}}{\varphi_p(\xi)} a_{k,n+1} x^{n+1}.$$

Il est toujours entendu que x est dans le cercle C_k et, par suite, la série dont le terme général est $a_{kn} x^n$ est convergente; elle converge même *uniformément* dans C_k.

Faisons maintenant cette *hypothèse fondamentale* que la variable ξ aille à l'infini suivant un chemin tel que $|f(\xi)|$ croisse indéfiniment et d'ailleurs plus vite que le module de n'importe quel polynome. Dans ces conditions l'expression (6) tend vers zéro.

En effet, dans la série (6), on peut mettre à part les q premiers termes, q étant fini, et ceux-ci tendent manifestement vers zéro; pour les termes restants, qui sont en nombre infini, le coefficient en ξ peut tendre vers 1 mais alors, si q est suffisamment grand, la convergence de la série en x entraîne que ces termes ont aussi une somme qui peut devenir plus petite en module que toute quantité donnée.

Nous admettrons qu'il existe *au moins* un chemin, allant à l'infini, suivant lequel une fonction entière croît en module plus vite qu'un polynome. Si un tel chemin n'existait pas, d'après le théorème fondamental de Cauchy-Liouville-Weierstrass, la fonction se réduirait à un polynome; en particulier une fonction entière qui reste toujours finie à l'infini doit se réduire identiquement à une constante.

Bref, ξ allant à l'infini suivant un chemin convenable, on a

$$(7) \qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+p} s_n}{\varphi_p(\xi)} + \lim_{\xi=\infty} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{\varphi_p(\xi)} \left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1} \frac{A_i}{x-a_i}.$$

Remarquons bien que le second sigma porte sur k termes et sur k seulement quand x est supposé dans C_k.

La formule (7), indépendamment des conclusions que nous allons en tirer, paraît déjà avoir une certaine importance par elle-même. La

variable x partant de l'origine et passant de C_0 dans C_1, dans C_2, ..., cette formule (7) met en évidence a_1, a_2, ... les uns après les autres. A ce point de vue, elle est à rapprocher de la formule de décomposition des fonctions méromorphes en éléments simples, due à M. G. Mittag-Leffler. Elle exige, pour la formation des polynomes s_n, la connaissance du développement taylorien de F dans le voisinage de l'origine; en revanche elle ne contient aucune expression qu'on ne sait pas déterminer, la fonction φ_p, ou f, ayant plutôt le rôle d'une fonction arbitraire.

2. Formules de sommabilité. — Pour déduire de (7) une véritable formule de sommabilité il reste à détruire le dernier sigma du second membre. Pour cela il suffit de poser

$$(8)\qquad \lim_{\xi=\infty} \frac{\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{\varphi_p(\xi)} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\xi=\infty} \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Les deux expressions limites (8) sont évidemment les mêmes dans les conditions où doivent croître $|\xi|$ et $|f(\xi)|$ puisque f et φ_p ne diffèrent que par des polynomes. Les conditions (8) en général ne seront réalisables que pour x dans de certaines régions du plan. C'est en s'arrangeant à étendre ces régions de plus en plus qu'on réalisera, au moyen de séries de polynomes en s_n, un prolongement analytique de plus en plus étendu.

Analysons les choses en détail.

Soit d'abord x dans C_0. On aura

$$F(x) = a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \ldots,$$

$$F(x)\varphi_p(\xi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}s_n + \sum_{n=0}^{n=\infty} (\gamma_p\xi^p + \ldots + \gamma_{p+n}\xi^{p+n})a_{0,n+1}x^{n+1}.$$

Divisant par $\varphi_p(\xi)$ et faisant croître ξ conformément à l'hypothèse fondamentale du paragraphe précédent, il restera

$$(9)\qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}s_n}{\varphi_p(\xi)},$$

formule qui n'est autre que (7) pour $k = 0$ et qui, à ce titre, aurait pu être écrite immédiatement. Si maintenant x sort de C_0 il faut

compléter le second membre par le terme du second sigma de (7) qui correspond à $i = 1$ mais, d'autre part, ce terme complémentaire peut être immédiatement détruit par celle des conditions (8) qui correspond à $i = 1$. Cette condition, en général, ne laissera plus à x la liberté de circuler dans toute la couronne $C_1 - C_0$ mais seulement dans certaines régions de celle-ci. De même si x, sans pénétrer dans les régions précédemment interdites, peut passer dans la couronne $C_2 - C_1$, le terme du second sigma de (7) qui correspond à $i = 2$ va apparaître dans la formule (9) et l'on pourra le détruire par celle des conditions (8) qui correspond à $i = 2$; cela pourra interdire à x certaines régions de la couronne $C_2 - C_1$. Et ainsi de suite.

Le cas le plus important est celui où l'on se propose de faire circuler x dans tout le champ complexe. Mais alors, si l'on veut représenter $F(x)$ par des formules du type (9), toutes les conditions (8) interviennent à la fois. Chacune conduit, en général, à limiter par une certaine courbe le domaine de validité de la formule (9). L'ensemble des domaines acceptables forme la *région de sommabilité* ou encore ce que M. G. Mittag-Leffler appelle une *étoile* B en attendant que l'on parvienne à l'*étoile principale* A qui couvre tout le champ complexe, à l'exception peut-être de certaines coupures, étoile A dont la figure 1 de droite donne une première idée.

Tout ceci s'éclaircira et se mettra facilement d'accord avec des résultats connus en prenant l'exemple particulier de $f(\xi) = e^{\xi}$.

3. **Sommabilité exponentielle.** — Si $f(\xi) = e^{\xi}$ et si l'on pose d'autre part

$$\xi = \rho e^{i\omega}, \qquad x = r e^{i\theta}, \qquad a_i = \alpha_i e^{i\tau_i},$$

on trouve immédiatement que le rapport de $f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)$ à $f(\xi)$ est une exponentielle dont la partie réelle de l'exposant est

$$\rho\left[\frac{r}{\alpha_i}\cos(\theta + \omega - \tau_i) - \cos\omega\right].$$

Réaliser les conditions (8) c'est faire tendre de telles exponentielles vers zéro, ce qui arrivera quand ρ croîtra indéfiniment si le crochet précédent reste négatif. Géométriquement c'est faire rester la variable x toujours du même côté que l'origine par rapport à la droite

$$r\cos(\theta + \omega - \tau_i) = \alpha_i \cos\omega \tag{10}$$

qui passe par le point $a_i(\alpha_i, \tau_i)$ et fait en ce point un angle $\frac{\pi}{2} - \omega$ avec le rayon vecteur Oa_i. Il ne faut pas oublier que ξ est tenu de croître en module à droite de l'axe imaginaire, donc ω est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Il est très important de remarquer que si ξ va à l'infini dans une direction donnée, les droites précédentes font des angles constants et tous les mêmes avec les rayons vecteurs tels que Oa_i. Si la direction où ξ croît change, c'est-à-dire si l'angle ω varie, les mêmes droites tournent autour des points a_i d'un angle égal à celui dont ω a varié, mais en sens contraire.

Ceci posé, supposons x dans C_0; on doit avoir, pour représenter $F(x)$, une formule du type (9) laquelle est simplement équivalente à la formule de Taylor.

Si x sort de C_0, le terme qui s'ajoute à cette formule du type (9) ne peut disparaître que si x ne franchit pas la droite A_1 passant par a_1 et faisant avec Oa_1 un angle constant (*fig.* 2). Sous cette restriction

Fig. 2.

x peut circuler dans ce qui reste de la couronne $C_1 - C_0$; si cette variable sort de là, ce ne peut être qu'à la condition de ne pas franchir la droite A_2, construite comme A_1, et ainsi de suite. On finit par obtenir comme région de sommabilité un contour mixtiligne qui devient le *polygone de sommabilité* de M. E. Borel [1] si ξ croît par

valeurs réelles car alors ω est nul et chaque droite A_i est perpendiculaire au rayon Oa_i.

4. **Sommabilité exponentielle à exposant ξ^m.** — Comme second type de fonction sommatrice prenons, m étant un entier positif,

$$f(\xi) = e^{\eta}, \qquad \eta = \xi^m. \tag{11}$$

La première étude de ce cas est encore due à M. E. Borel. Pour simplifier nous enverrons ξ à l'infini seulement le long de la partie positive de l'axe réel. Alors les côtés du polygone borélien sont à remplacer par des courbes

$$r^m \cos m(\theta - \tau_i) = \alpha_i^m. \tag{12}$$

Si, dans (12), on fait $m = 1$, on retrouve bien (10) pour $\omega = 0$.

Les courbes (12) sont des courbes à branches hyperboliques d'une étude géométrique fort simple; elles peuvent permettre la constitution d'une étoile B atteignant des x qui ne pourraient être compris ni dans le polygone de sommabilité ni même dans un contour mixtiligne tel que celui de la figure 2. Nous retrouverons ces courbes plus loin (Chap. III, § 6) comme donnant encore naissance à une étoile B issue toutefois de considérations initiales assez différentes des précédentes.

5. **Sommabilité exponentielle itérée.** — Comme troisième type de fonction sommatrice, nous indiquerons encore

$$f(\xi) = e^{\eta}, \qquad \eta = e^{\xi}. \tag{13}$$

Un premier aperçu a été donné par M. A. Costabel [18]. Ici ξ va à l'infini positif le long d'une parallèle à l'axe réel d'ordonnée absolue $< \frac{\pi}{2}$. Il n'y a vraiment de région de sommabilité, hors le cercle taylorien et analogue aux précédentes, que si les pôles de $F(x)$ sont dans un certain angle, d'ouverture λ, ayant son sommet à l'origine; ladite région est un angle analogue de côtés normaux à ceux du premier et d'ouverture $\pi - \lambda$. Tout ceci demande de nouvelles études. On trouvera une tentative de complément en [18*].

6. **La fonction sommatrice σ.** — Sans insister sur les méthodes de sommabilité telles que celles des numéros précédents, on peut cepen-

dant remarquer que les premières fonctions sommatrices employées furent des fonctions entières dépourvues de zéros. Si l'on prend des fonctions possédant une infinité de zéros on se trouve en présence de résultats complètement différents des précédents [17].

Considérons, comme quatrième exemple, la fonction σ admettant pour zéros tous les sommets du quadrillage orthogonal formé par les axes et des parallèles à ceux-ci d'abscisses et d'ordonnées ± 2, ± 4, ± 6, ... On aura

$$(14) \qquad \sigma\xi = \xi + \star - \frac{g_2\xi^5}{2^4.3.5} - \frac{g_3\xi^7}{2^3.3.5.7} - \frac{g_2^2\xi^9}{2^9.3^2.5.7} - \ldots$$

les invariants g_2 et g_3 étant réels. Si 2ω et $2\omega'$ sont les périodes de la fonction $p\xi$, on a ici $2\omega = 2$, $2\omega' = 2i$ et une formule bien connue nous donne pour cas particulier

$$\sigma(\xi + 2m\omega) = (-1)^m e^{2m\eta(\xi+m\omega)}\sigma\xi.$$

m étant un entier et η un nombre *réel et positif* [19]. Dans ces conditions, si nous donnons à ξ les valeurs entières *impaires* 1, 3, 5, ..., la fonction $\sigma\xi$ croît en valeur absolue d'une manière exponentielle, c'est-à-dire incomparablement plus vite que n'importe quel polynome en ξ pour la même suite de valeurs de la variable, ce qui est ici l'essentiel.

Donc on peut faire un raisonnement exactement identique à celui qui, au n° 2, a donné la formule (9) et réobtenir d'ailleurs cette formule (9), la fonction f contenue dans φ_p étant la fonction σ qui vient d'être définie; il est toujours entendu que ξ croît indéfiniment en prenant la suite des valeurs entières, positives et impaires. Naturellement, représenter $F(x)$ par cette formule (9) n'a toujours pas plus de valeur que l'usage pur et simple de la formule de Taylor dans le cercle C_0. C'est maintenant, lorsqu'il va falloir sortir x de C_0 avec $\sigma\xi$ comme fonction sommatrice, que des considérations d'une tout autre nature vont s'introduire. Il s'agit toujours de transporter les conditions (8) dans la formule (7). Ici les deux formes données à la condition (8) sont encore équivalentes car φ_p ne diffère de $f = \sigma$ que par des polynomes. Cela dit, posons

$$(15) \qquad a_k = \frac{1}{p}(a_{k1} + ia_{k2}), \qquad x = \frac{1}{p}(x_1 + ix_2), \qquad \xi_n = \prod_1^n (a_{k1}^2 + a_{k2}^2);$$

p est un entier réel et positif; a_{k1} et a_{k2} sont des entiers réels dont

l'un est pair, l'autre impair; x_1 et x_2 sont des entiers pairs. Alors ξ, *pris égal à* ξ_n, croît indéfiniment par valeurs toujours impaires; $\frac{\xi x}{a_i}$ est un entier complexe dont les deux parties sont paires si bien que $\sigma \frac{\xi x}{a_i}$ est toujours nul.

Alors la formule (7) se réduit bien à

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p} s_n}{\varphi_p(\xi)}, \tag{16}$$

ξ croissant indéfiniment par les valeurs entières impaires ξ_n données par la dernière des formules (15). *Voir* [20].

Un pareil résultat ne peut paraître valable, en dehors du cercle C_0, que si x et les points singuliers a_k de $F(x)$ ont des coordonnées satisfaisant aux conditions énoncées à propos des formules (15). Mais, comme l'entier p qui figure [1] dans les formules (15) est aussi grand qu'on veut, les x et les a_k sont simplement assujettis à être des nombres rationnels qui peuvent s'approcher autant qu'on le voudra de toutes valeurs données à l'avance.

A ce point de vue, la solution ici proposée pour le prolongement analytique d'un développement taylorien provenant d'une fonction méromorphe n'a aucune infériorité sur celles où x peut varier d'une manière continue. Même lorsque nous croyons considérer des ensembles continus, nous n'y atteignons *pratiquement* que les ensembles dénombrables qui peuvent y être contenus; c'est là « la seule réalité accessible » [21]. En général une formule à variable continue n'est *calculable* que pour des valeurs rationnelles de la variable. On ne perd donc rien à remplacer une telle formule par une autre à variable discontinue pourvu, bien entendu, qu'il ne s'agisse pas de discontinuités finies.

7. Cas où $F(x)$ présente des pôles multiples. — Il faut étendre les résultats précédents aux fonctions méromorphes ayant des pôles d'ordre quelconque. On rencontre ainsi de nouvelles propriétés du plus haut intérêt. Je rappelle d'abord quelques généralités.

Dans le voisinage d'un pôle d'ordre m la fonction $F(x)$ est déve-

---

[1] Il est à peine besoin de faire remarquer que cet entier p n'a rien de commun avec l'indice p du second membre de (16).

loppable par la formule de Laurent sous la forme

$$F(x) = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots.$$

Désignant par le symbole D une dérivation par rapport à x, on a sans peine

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} {}_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = A_m, \\ D_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = 1!\,A_{m-1}, \\ D^2_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = 2!\,A_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^{m-1}_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = (m-1)!\,A_1; \end{array}\right.$$

quant à la partie principale du développement précédent on peut l'écrire

$$\frac{A_1}{x-a} - \frac{D}{1!}\frac{A_2}{x-a} + \frac{D^2}{2!}\frac{A_3}{x-a} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_m}{x-a}.$$

Dans ces conditions, là où $F(x)$ possédera un pôle a_i d'ordre m, la fraction rationnelle $\frac{A_i}{x-a_i}$ qui figure sous le sigma dans l'égalité (1) devra être remplacée par

$$\frac{A_{i1}}{x-a_i} - \frac{D}{1!}\frac{A_{i2}}{x-a_i} + \frac{D^2}{2!}\frac{A_{i3}}{x-a_i} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_{im}}{x-a_i}.$$

Si, pour simplifier l'écriture, on pose

$$\sigma_{i,n} = -\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \frac{x^2}{a_i^3} - \ldots - \frac{x^n}{a_i^{n+1}},$$

on voit de même que l'expression

$$A_i\left[\sigma_{i,n} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)}\right]$$

qui figure dans (3) doit être remplacée par

$$(18)\quad \begin{array}{l} A_{i1}\left[\sigma_{i,n} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)}\right] \\ - A_{i2}\frac{D}{1!}\left[\sigma_{i,n+1} + \frac{x^{n+2}}{a_i^{n+2}(x-a_i)}\right] \\ + A_{i3}\frac{D^2}{2!}\left[\sigma_{i,n+2} + \frac{x^{n+3}}{a_i^{n+3}(x-a_i)}\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (-1)^{m-1}A_{im}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\left[\sigma_{i,n+m-1} + \frac{x^{n+m}}{a_i^{n+m}(x-a_i)}\right]. \end{array}$$

Ceci entraîne que le terme

$$(19)\qquad \varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)\left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1}\frac{A_i}{x-a_i}$$

qui figure sous le second sigma de (5) doit être remplacé sous ce sigma par

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\gamma_{n+p}\xi^{n+p}\left[\frac{A_{i1}x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_{im}x^{n+m}}{a_i^{n+m}(x-a_i)}\right].$$

En s'appuyant sur l'identité

$$(20)\qquad (-1)^{p-1}D_x^{p-1}\frac{x^{n+p}}{a^{n+p}(x-a)}=D_{z=a}^{p-1}\frac{x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)},$$

dont la vérification est immédiate en l'écrivant

$$\begin{aligned}(-1)^{p-1}D_x^{p-1}&\left[\frac{1}{x-a}+\frac{1}{a}+\ldots+\frac{x^{n+p-1}}{a^{n+p}}\right]\\ &=D_a^{p-1}\left[\frac{1}{x-a}+\frac{1}{a}+\ldots+\frac{x^n}{a^{n+1}}\right],\end{aligned}$$

le résultat précédent peut se considérer comme la valeur pour $z=a_i$ de l'expression suivante où les D sont des dérivations par rapport à z

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\gamma_{n+p}\xi^{n+p}\left[\frac{A_{i1}x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)}+\frac{D}{1!}\frac{A_{i2}x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)}+\ldots+\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_{im}x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)}\right].$$

Finalement cela peut s'écrire

$$(21)\qquad \left[A_{i1}+A_{i2}\frac{D}{1!}+A_{i3}\frac{D^2}{2!}+\ldots+A_{im}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\right]\left[\varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\frac{1}{x-z}\right],$$

le premier crochet contenant un opérateur, combinaison linéaire de dérivations, que l'on appliquera sans aucune confusion possible à la fonction de z contenue dans le second crochet. Dans le cas du pôle d'ordre 1, tous les A, sauf A_{i1}, sont nuls dans le premier crochet et l'on retombe sur l'expression (19) ainsi que cela doit être. En résumé, si l'on pose

$$\Delta_i^{m-1}\Phi(z)=A_{i1}\Phi(z)+\frac{A_{i2}}{1!}D\Phi(z)+\frac{A_{i3}}{2!}D^2\Phi(z)+\ldots+\frac{A_{im}}{(m-1)!}D^{m-1}\Phi(z),$$

la formule (5) s'écrit maintenant

$$(22)\quad F(x)\varphi_p(\xi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}\, s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \Delta_i^{m-1}\left[\varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\frac{1}{x-z}\right]$$
$$- \sum_{n=0}^{n=\infty} (\gamma_p \xi^p + \ldots + \gamma_{p+n}\xi^{p+n})\, a_{k,n+1}\, x^{n-1}.$$

Il ne sera pas utile de développer davantage le Δ. On remarquera simplement que c'est une forme linéaire et homogène par rapport à

$$(23)\qquad \varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right),\quad \xi\varphi'_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right),\quad \ldots,\quad \xi^{m-1}\varphi_p^{(m-1)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right).$$

Dans ce cas si l'on veut raisonner comme sur la formule (5) et notamment faire disparaître le second sigma de (22), on retombera sur des conditions du type (8) mais plus nombreuses puisqu'il faudra y considérer non seulement le numérateur égal au premier terme de la suite (23), mais y remplacer successivement ce numérateur par tous les termes de cette suite.

8. **Régions de sommabilité pour $F(x)$ présentant des pôles multiples.** — Tout d'abord et d'une manière générale si l'on considère que $\varphi_p(\xi)$ ne diffère de $f(\xi)$ que par un polynome, on voit immédiatement que, pour ξ variant suivant un chemin le long duquel $f(\xi)$ croît incomparablement plus vite que n'importe quel polynome, le rapport d'une des expressions (23), soit $\xi^k\varphi_p^{(k)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)$, à $\varphi_p(\xi)$ se comporte exactement comme $\xi^k f^{(k)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) : f(\xi)$.

Les conditions (8) sont donc à remplacer par les expressions

$$(24)\qquad \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)},\quad \frac{\xi f'\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)},\quad \ldots,\quad \frac{\xi^{m-1} f^{(m-1)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)}\qquad (i=1, 2, \ldots)$$

dont la limite, pour ξ croissant toujours comme plus haut, doit être égalée à zéro. Si $f(\xi) = e^{\xi}$ ces conditions ne sont pas distinctes et ne diffèrent pas de la première déjà étudiée au n° 3. Donc *le procédé de sommabilité exponentielle*, dû à M. E. Borel, *appliqué à une fonction méromorphe, n'a besoin d'aucune modification quel que soit l'ordre des pôles de cette fonction.* La région de sommabilité est la même.

La conclusion serait analogue avec la sommabilité exponentielle à exposant ξ^m (§ 4). Pour la sommabilité exponentielle itérée (§ 5), on ne pourrait conclure qu'après une discussion plus délicate que nous laisserons à la sagacité du lecteur.

Mais où la conclusion va être sûrement nouvelle, c'est avec la fonction sommatrice $f(\xi) = \sigma\xi$ dont on cherchera, comme précédemment, à utiliser les zéros.

Si, procédant comme au n° 6, on suppose toujours que les coordonnées de x, de ξ et des pôles a_i sont représentables par les formules (15), la première des expressions (24) est bien nulle, puisque $\frac{\xi x}{a_i}$ est toujours un zéro de σ, mais il n'y a aucune raison pour qu'il en soit de même des suivantes, les zéros de σ n'étant nullement tenus d'être des zéros pour toutes les dérivées de cette fonction. On tournera la difficulté en remplaçant $\sigma\xi$ par $(\sigma\xi)^m$, m étant un entier positif. Donc *la fonction sommatrice $\sigma\xi$ servant à la représentation d'une fonction méromorphe* $F(x)$ *à pôles simples*, comme il a été expliqué au n° 6, *il faut, pour étendre le procédé à une fonction ayant des pôles d'ordre m, que l'on remplace $\sigma\xi$ par $(\sigma\xi)^m$.*

Il est facile de voir que les développements (16) ainsi obtenus peuvent encore être variés d'une infinité de manières. Par exemple on pourrait remplacer $\sigma\xi$ par $\tau\xi = e^{\sigma\xi} - 1$, fonction qui a évidemment les mêmes zéros que $\sigma\xi$ et qui, pour ξ réel, croît encore plus vite. De même $\tau\xi$ pourrait être remplacée par $e^{\tau\xi} - 1$ et ainsi de suite indéfiniment.

9. **Dérivabilité. Rôle des indices** p. — Puisque ξ est toujours supposé aller à l'infini suivant un chemin le long duquel $f(\xi)$ croît incomparablement plus vite que n'importe quel polynome, il suit immédiatement de là que $\frac{\varphi_p(\xi)}{(f\xi)}$ tend vers 1 (du moins si p est fini) et que la formule (9) peut aussi bien s'écrire

$$F(x) = \lim_{\xi = \infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p} s_n}{f(\xi)}. \tag{25}$$

Cette forme est particulièrement commode pour étudier sa dérivation. Supposons, pour fixer les idées, que $F(x)$ soit une fonction méromorphe à pôles simples; sa dérivée $m^{\text{ième}}$ a des pôles d'ordre $m+1$.

Les polynomes tayloriens qui sont s_0, s_1, s_2, ... pour la fonction primitive sont $s_m^{(m)}$, $s_{m+1}^{(m)}$, $s_{m+2}^{(m)}$, ... pour cette dérivée. Avec la méthode de sommation exponentielle, $f(\xi) = e^{\xi}$, nous avons alors sans précautions spéciales

$$(26) \qquad F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_{n+m}^{(m)}}{f(\xi)},$$

et, comme p est un entier arbitraire, il est indifférent d'écrire

$$(27) \qquad F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p+m}\, s_{n+m}^{(m)}}{f(\xi)} = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n^{(m)}}{f(\xi)}.$$

C'est dire que la série de polynomes tayloriens (25) peut être dérivée terme à terme. Ce résultat est dû à M. Borel qui paraît l'avoir prévu avant d'effectuer de véritables calculs [22].

Supposons maintenant que la formule (25) soit l'analogue de la formule (16), c'est-à-dire qu'on emploie la fonction $\sigma\xi$ et les relations (15) comme il a été expliqué au n° 6. Alors (n° 8), on peut encore passer de (25) à (26), mais à condition de substituer $(\sigma\xi)^{m+1}$ à $\sigma\xi$ puis, par le même raisonnement que précédemment, on obtiendra la formule (27). Donc *la formule* (25) *est m fois dérivable si* $f(\xi) = (\sigma\xi)^{m+1}$ *et elle ne l'est que m fois.*

On a ici un exemple précis de séries de polynomes spécialement construites pour être dérivables m fois et m fois seulement.

10. Critique des résultats précédents. Nécessité des fonctions sommatrices spéciales. — Les résultats exposés dans ce Chapitre ont des avantages et des inconvénients. Commençons par énumérer les avantages.

Dans le cas des formules de sommabilité obtenues pour la représentation des fonctions méromorphes $F(x)$, nous devons envoyer ξ à l'infini *suivant de certains chemins* et consentir à ce que x ne soit que *dans certaines régions de sommabilité*. Mais, même s'il n'en était pas ainsi, les formules de sommabilité conserveraient encore un sens et un aspect élémentaire qu'on trouve en (5) et en (22). Cet aspect élémentaire est propre à suggérer bien des examens intéressants, comme celui qui conduit à faire usage de fonctions sommatrices telles que $\sigma\xi$; et, s'il est probable que les propriétés mises en évidence

à cette occasion ne subsistent que lorsque $F(x)$ est méromorphe, on a précisément mis en évidence d'originales propriétés des fonctions ne possédant que des pôles à distance finie. Enfin, s'il est possible, lorsque $F(x)$ est plus générale qu'une fonction méromorphe, d'étendre à ce cas certaines des méthodes de sommabilité envisagées (notamment celles de M. E. Borel, § 3 et 4), une étude préliminaire, faite avec $F(x)$ méromorphe, présente des avantages de simplicité qui permettent d'aborder avec plus de sûreté les cas plus généraux à traiter ensuite.

Passons aux inconvénients. Sans nier les divers intérêts que nous venons de signaler, il n'est que trop évident que les résultats obtenus se sont présentés comme par hasard, car nos fonctions sommatrices ont été prises au hasard, ou du moins parmi les plus simples des fonctions entières, alors que rien ne prouve que ce soit cette simplicité qui conduise aux meilleurs prolongements analytiques. En vue de ces derniers, il faut inéluctablement construire les fonctions sommatrices *spéciales* dont il a déjà été question à la fin du Chapitre précédent et les résultats déjà obtenus — ceci est à compter parmi leurs avantages — donnent une indication des plus précieuses quant à l'obtention d'une classe de ces fonctions. Il faudrait construire, s'il est possible, des fonctions entières $f(\xi)$ croissant indéfiniment en module seulement quand la variable ξ va à l'infini le long de la partie positive de l'axe réel mais tendant vers zéro quand ξ va à l'infini dans toute autre direction. Alors

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)} \tag{8}$$

serait toujours nulle pour un x différant en argument d'un a_i ou de même argument, cet x étant alors situé *sur* un rayon Oa_i. La sommabilité aurait lieu *pour toute l'étoile principale* A, c'est-à-dire dans tout le champ complexe des x, sauf sur les demi-droites prolongeant les rayons Oa_i.

La Science a procédé par étapes. M. G. Mittag-Leffler a d'abord construit des fonctions entières ne devenant infinies que dans des angles de plus en plus aigus et finalement nous avons eu les fonctions entières paradoxales qui s'annulent à l'infini *dans toutes les directions*, sans menacer le moins du monde le théorème fondamental de Cauchy-Liouville-Weierstrass qui veut que toute fonction entière

devienne infinie de quelque manière à l'infini. Nous verrons que ce prétendu paradoxe est extrêmement intéressant sans cependant contenir le moindre germe subversif.

11. Formule (22) déduite de la formule générale (16) du Chapitre précédent. — Reprenons la formule (16) (Chap. I), avec le contour C de la figure 1 de droite, contour dont les arcs de grand cercle seront sur le cercle C_k défini au paragraphe 1 du présent Chapitre II.

Avec $F(x)$ méromorphe les lacets n'agiront que par leur boucle; quand celle-ci contiendra un pôle a_i, d'ordre m, le résidu correspondant sera

$$\frac{1}{(m-1)!} D_{z=a_i}^{m-1}\left[\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right) \frac{F(z)}{x-z}(z-a_i)^m\right].$$

Cette expression convenablement développée par l'emploi des formules (17) donne le Δ du second sigma de (22).

Sur C_k on peut écrire

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} F(u)\left(\frac{1}{u} + \frac{z}{u^2} + \ldots\right) du + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} F(u)\left(\frac{1}{z} + \frac{u}{z^2} + \ldots\right) du,$$

et d'ailleurs

$$\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right) = \gamma_p \xi^p \frac{x}{z} + \gamma_{p+1}\xi^{p+1}\frac{x^2}{z^2} + \ldots,$$

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^4} + \ldots.$$

C'est le produit de ces trois expressions qu'il s'agit d'intégrer le long de C_k; or, à l'intégration, toutes les puissances de z, sauf la puissance -1, donnent un résultat nul. Il vient finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_p \xi^p + \ldots + \gamma_{p+n}\xi^{p+n}) \frac{x^{n+1}}{2i\pi}\int_{C_k} \frac{F(u)\,du}{u^{n+2}},$$

ce qui est bien le dernier sigma de (22).

CHAPITRE III.

FONCTIONS SOMMATRICES SPÉCIALES.

1. La fonction Γ. — La fonction $\Gamma(x)$ joue un rôle important dans la construction des fonctions sommatrices spéciales dont la nécessité

a été soulignée en terminant le Chapitre précédent. Rappelons donc brièvement les propriétés de $\Gamma(x)$ dont la considération nous sera indispensable. *Cf.* [23] à [26].

On a

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \tag{1}$$

ou

$$\Gamma(x) = \lim_{m=\infty} \int_0^m \left(1 - \frac{t}{m}\right)^m t^{x-1}\, dt.$$

Par une succession d'intégrations par parties, on peut remplacer cette formule par

$$\Gamma(x) = \lim_{m=\infty} \frac{m!\, m^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}. \tag{2}$$

On a donc, en (1) et (2), deux définitions pour la fonction $\Gamma(x)$. La seconde est généralement considérée comme la meilleure; elle renseigne mieux que (1) pour les x négatifs.

De (1) ou de (2) on peut tirer

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \tag{3}$$

propriété très importante mais *non caractéristique* de Γ, l'équation (3) étant encore vérifiée si l'on y remplace $\Gamma(x)$ par $\Gamma(x)\,\Theta(x)$ avec $\Theta(x)$ fonction périodique de période 1.

Si x est entier, (3) donne

$$\Gamma(x+1) = x!$$

Pour $x = 1$, on tire, de (1) ou (2), $\Gamma(1) = 1$.

On a aussi, en reprenant x quelconque,

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \tag{4}$$

ce qui se vérifie en partant de (2) et en utilisant l'expression de $\sin \pi x$ par le produit convergent bien connu.

Signalons la notation abrégée

$$\Gamma(x+1) = \underline{|x}. \tag{5}$$

2. **Formule de Stirling.** — Il s'agit d'une expression approximative mais particulièrement commode de $\Gamma(x)$ lorsque x est positif et très grand.

Essayons de poser, dans ces conditions, avec $\varphi(x)$ uniforme au moins dans le voisinage du point à l'infini,

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{x}\, e^{\varphi(x)}.$$

Remplaçant x par $x+1$, on conclut immédiatement du rapport des deux formules

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{12x^2} + \ldots.$$

Or, par hypothèse, dans le voisinage du point à l'infini,

$$\varphi(x) = \ldots + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_1}{x} + b_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Cette expression de $\varphi(x)$ ne permet de satisfaire à l'égalité précédente que si tous les a_i sont nuls et, par suite, pour x très grand,

$$\Gamma(x+1) \equiv C x^x e^{-x} \sqrt{x}. \tag{6}$$

Diverses méthodes permettent de calculer la constante C pour laquelle on trouve la valeur $\sqrt{2\pi}$, mais cette précision est inutile pour ce que nous avons à demander à la formule de Stirling.

3. **L'intégrale curviligne de Hankel.** — On doit à Herman Hankel [27], une importante et curieuse intégrale curviligne propre à représenter le quotient $1 : \Gamma(x)$. Soit

$$\frac{1}{\Delta(x)} = \frac{1}{2i\pi} \int e^z z^{-x}\, dz = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{e^z}{z^x} + x \int \frac{e^z}{z^{x+1}}\, dz\right)$$

avec un chemin d'intégration d'abord indéterminé. Le terme explicitement intégré $e^z z^{-x}$ s'annule aux extrémités du chemin d'intégration quand ces extrémités sont à l'infini *à gauche* de l'axe imaginaire du champ des z. Il en sera notamment ainsi pour le lacet abc (*fig.* 3) et la formule précédente donnera alors

$$\Delta(x+1) = x\,\Delta x. \tag{7}$$

Cela porte à penser que $\Delta(x)$ est analogue à $\Gamma(x)$ sans cependant que l'on puisse déjà conclure à l'identité des deux fonctions, l'égalité (3) n'exprimant pas une propriété caractéristique de $\Gamma(x)$.

Le lacet abc nous donne maintenant

$$\frac{2i\pi}{\Delta(x)} = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^z\, dz}{z^x} + \int \frac{e^z\, dz}{z^x} + e^{-2i\pi x} \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{e^z\, dz}{z^x}.$$

La seconde intégrale est prise le long de la boucle b du lacet; elle est nulle si l'on suppose $0 \leqq x < 1$. Si, de plus, on pose

$$z = -t = e^{-i\pi} t,$$

la formule précédente devient

$$\frac{1}{\Delta(x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi} \int_0^\infty e^{-t} t^{-x}\, dt = \frac{\sin \pi x}{\pi} \Gamma(1-x) = \frac{1}{\Gamma(x)}.$$

Cette fois il faut bien conclure que $\Delta(x)$ n'est autre que $\Gamma(x)$ au moins pour $0 \leqq x < 1$. Mais, pour x entre ces limites, (7) permet d'écrire

$$\Delta(x+1) = x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

et $\Delta(y) = \Gamma(y)$ pour y variant de 1 à 2. On peut ainsi poursuivre de proche en proche et conclure définitivement $\Delta(x) = \Gamma(x)$, c'est-à-dire

$$(8) \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(abc)} e^z z^{-x}\, dz.$$

On peut maintenant remplacer le lacet abc par une infinité d'autres contours.

Fig. 3.

Au lacet abc adjoignons les contours, parcourus dans le sens direct des aires P et Q; de ce fait

$$(\mathrm{A}pbq\mathrm{C}) = (abc).$$

On part, en effet, de a par aA, on tourne autour de l'aire P, revenu en a on parcourt le lacet abc, de c on revient sur ses pas pour parcourir le contour de Q et finalement on a ainsi décrit $(ApbqC)$ et les arcs aA et Cc, ces deux derniers donnant des intégrales nulles.

Enfin le contour fermé $(pBqbp)$ donnant, à l'intégration, un résultat nul on peut l'adjoindre à $(ApbqC)$. Donc

$$(ApBqC) = (ApbqC).$$

Nous emploierons le premier de ces chemins d'intégration que nous désignerons par S. Les points q et p seront à des distances finies ρ de O, les arguments y relatifs seront respectivement

$$(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad -(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2},$$

en désignant par ε une quantité réelle aussi petite qu'on voudra mais essentiellement *positive* pour que C et A soient toujours *à gauche* de l'axe imaginaire. En résumé,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2i\pi}\int_S e^z z^{-x}\,dz. \tag{9}$$

Cette formule (9) subsiste encore lorsque ε tendant vers zéro atteint effectivement la valeur zéro. Alors Ap et qC sont sur l'axe imaginaire de la figure 3 et les arcs Aa et cC deviennent égaux chacun à un quadrant. L'assertion est précisément mal aisée à démontrer avec de tels arcs mais s'établit au contraire facilement en les remplaçant par des angles droits circonscrits, méthode employée par M. P. Painlevé [28].

4. Les fonctions $E_\alpha(x)$ et $E^*_\alpha(x)$. — La formule (9) nous donne, pour $x = 1$

$$1 = \frac{1}{2i\pi}\int_S e^z\frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_T \beta\, e^{\omega\beta}\frac{d\omega}{\omega}. \tag{10}$$

On est passé de la première intégrale à la seconde en posant

$$z^\alpha = \omega, \qquad \alpha\beta = 1 \tag{11}$$

avec α désignant une constante *positive* aussi petite que l'on veut. Le chemin S s'est changé (*fig.* 4) en un chemin T ou, plus explicitement, $(A'p'Tq'C')$.

Maintenant, dans le plan de la variable complexe ω, les distances Oq' et Op' sont ρ^α, les arguments correspondants sont

$$\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad -\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}.$$

En faisant décroître α on peut rendre l'angle $A'OC'$ aussi aigu qu'on le désire.

Fig. 4.

Ceci posé, à l'image de la dernière intégrale (10), construisons la fonction

$$(12) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_T \beta\, e^{\omega\beta}\frac{d\omega}{\omega - x}, \qquad \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Cette fonction n'est d'abord définie que lorsque la variable complexe x est située *à gauche* du contour T car, si l'on veut procéder par comparaison avec (10), il faut pouvoir faire $x = 0$ dans (12) et ce sans franchir T, opération sur laquelle il reste précisément à s'expliquer.

Pour x *à droite* de T, le second membre de (12) définit une nouvelle fonction $E_\alpha^*(x)$ en relation simple d'ailleurs avec $E_\alpha(x)$. On peut toujours imaginer qu'un x *à droite* de T est *à gauche* d'un nouveau contour analogue T' ou $(A'p''T'q''C')$. On a évidemment

$$T' = T + (p''q''q'p'p''),$$

le dernier contour, indiqué par la parenthèse étant la portion de couronne en évidence sur la figure 4. On déduit de là

$$E_\alpha(x) = E_\alpha^*(x) + \beta e^{x\beta}. \tag{13}$$

Reprenons $E_\alpha(x)$ par sa définition (12); cette fonction, quand x va à l'infini *à gauche* de T, tend vers zéro comme $1 : x$. Il en est de même pour $E_\alpha^*(x)$ quand x va à l'infini *à droite* de T mais, d'après (13), $E_\alpha(x)$ croît indéfiniment quand x va à l'infini *à droite* de T.

Je dis maintenant que $E_\alpha(x)$ *est une fonction entière de* x.

En effet le second membre de (12) ne révèle aucune singularité quand x est à distance finie non nulle du contour T; pour x sur T il en est encore de même car on peut éviter cet x en modifiant T dans son voisinage, d'où création d'une intégrale de Cauchy pour un petit contour fermé en aucun point duquel l'exponentielle en ω^β n'a de singularité.

D'ailleurs cherchons le développement en série entière de $E_\alpha(x)$. Pour x dans le cercle de rayon Oq' (*fig.* 4), on a

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_T \beta\, e^{\omega\beta}\left(\frac{1}{\omega} + \frac{x}{\omega^2} + \frac{x^2}{\omega^3} + \ldots\right) d\omega.$$

Or

$$\int_T \beta\, e^{\omega\beta}\frac{d\omega}{\omega^n} = \int_S e^z z^{-(n-1)\alpha-1}\, dz = \frac{1}{\lfloor (n-1)\alpha}.$$

Donc

$$E_\alpha(x) = 1 + \frac{x}{\lfloor \alpha} + \frac{x^2}{\lfloor 2\alpha} + \ldots. \tag{14}$$

Cette formule est valable hors du cercle dans lequel on l'a établie, car, d'après la formule de Stirling (6), l'expression bien connue

$$\sqrt[n]{\lfloor n\alpha}$$

croît indéfiniment avec n quelque petit que soit α considéré toutefois comme non nul. Donc le rayon de convergence, pour la série (14), est infini.

Reste un dernier point. La série (14) ne dépend point de ε alors que l'angle $A'OC'$, égal à $\alpha(1+\varepsilon)\pi$, en dépend. Ceci tient à ce que, maintenant, ε n'est plus une constante pouvant, comme α, recevoir diverses valeurs mais une constante dont la variation serait surabondante quant à la détermination de l'angle $A'OC'$. En d'autres termes,

ε doit avoir une valeur à déterminer une fois pour toutes; c'est une constante absolue. Or $E_1(x)$ est la fonction exponentielle pour laquelle

$$\alpha(1+\varepsilon)\pi = (1+\varepsilon)\pi = \pi.$$

Donc $\varepsilon = 0$, valeur limite admissible comme nous l'avons dit à la fin du paragraphe 3.

En résumé : *La fonction*

$$(15) \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_T \beta\, e^{\omega\beta}\frac{d\omega}{\omega - x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lfloor n\alpha} \qquad (\alpha\beta = 1)$$

est entière en x; elle croît indéfiniment en module quand x va à l'infini dans un angle d'ouverture $\alpha\pi$ ayant Ox pour bissectrice: elle tend vers zéro quand x va à l'infini hors de cet angle.

Le contour T *se compose des côtés de l'angle en question non considérés jusqu'au sommet mais réunis intérieurement par un arc de cercle de rayon arbitraire.*

$E_0(x)$ n'est plus une fonction entière; d'après (14), on a

$$(16) \qquad E_0(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{si} \quad |x| < 1.$$

Mais il importe de remarquer que $E_0(x)$ n'est pas dépourvu de sens.

3. **Propriétés différentielles de $E_\alpha(x)$.** — Comme $E_1(x) = e^x$, la fonction $E_\alpha(x)$ satisfait à des équations différentielles faciles à former, du moins lorsque α est rationnel. Soit

$$E_\alpha(x) = \sum_0^\infty \frac{x^\nu}{\lfloor \alpha\nu},$$

d'où, m et n étant entiers,

$$E_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right) = \sum_0^\infty \frac{\xi^{\frac{m}{n}\nu}}{\lfloor \frac{m}{n}\nu}.$$

On a

$$\frac{d^m}{d\xi^m} E_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right) = \sum_0^\infty \frac{\frac{m}{n}\nu\left(\frac{m}{n}\nu - 1\right)\cdots\left(\frac{m}{n}\nu - m + 1\right)}{\lfloor \frac{m}{n}\nu}\, \xi^{\frac{m}{n}\nu - m}.$$

Or

$$\left\lfloor\frac{m}{n}\nu = \frac{m}{n}\nu\left(\frac{m}{n}\nu - 1\right)\cdots\left(\frac{m}{n}\nu - m + 1\right)\right\lfloor\frac{m}{n}\nu - m.$$

Donc

$$\frac{d^m}{d\xi^m}\,\mathrm{E}_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right) = \sum_0^\infty \frac{\xi^{\frac{m}{n}\nu - m}}{\left\lfloor\frac{m}{n}\nu - m\right.}.$$

Le dernier membre peut s'écrire, avec $\nu = n + \mu$,

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\xi^{\frac{m}{n}\mu}}{\left\lfloor\frac{m}{n}\mu\right.} + \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{\xi^{-\frac{m}{n}\mu}}{\left\lfloor-\frac{m}{n}\mu\right.},$$

le second sigma ayant un terme nul pour $\mu = n$. Donc

$$(17)\qquad \frac{d^m}{d\xi^m}\,\mathrm{E}_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right) = \mathrm{E}_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right) + \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{\xi^{-\frac{m}{n}\mu}}{\Gamma\left(1 - \frac{m}{n}\mu\right)}.$$

Pour $n = 1$, le sigma de cette formule disparaît et l'on voit alors que $\mathrm{E}_m(\xi^m)$ ne peut être qu'une combinaison linéaire à coefficients constants d'exponentielles en $\alpha_i\xi$, les α_i étant les racines de $\alpha^m = 1$.

En revenant à la variable x, on a

$$(18)\qquad \left(\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{m}}\frac{d}{dx}\right)^m \mathrm{E}_{\frac{m}{n}}(x) = \mathrm{E}_{\frac{m}{n}}(x) + \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{x^{-\mu}}{\Gamma\left(1 - \frac{m}{n}\mu\right)}.$$

Pour $m = 1$, nous voyons que la fonction

$$y = \mathrm{E}_{\frac{1}{n}}(x)$$

satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{1}{n}\frac{dy}{dx} - x^{n-1}y = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{x}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} + \ldots + \frac{x^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)},$$

d'où

$$\mathrm{E}_{\frac{1}{n}}(x) = e^{x^n}\left[1 + \int_0^x e^{-x^n}\left(\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{n}\right.} + \frac{2x}{\left\lfloor\frac{2}{n}\right.} + \ldots + \frac{(n-1)x^{n-2}}{\left\lfloor\frac{n-1}{n}\right.}\right)dx\right].$$

Cette formule nous suffira parfaitement pour représenter $E_\alpha(x)$, étant donné que les valeurs intéressantes de α seront les petites valeurs positives; dans ce cas il suffit évidemment de poser $n\alpha = 1$ avec n entier pouvant croître indéfiniment. Si n croît effectivement au delà de toute limite, notre dernière formule redonne le résultat (16).

Nous aurons un exemple très intéressant avec

$$E_{\frac{1}{2}}(x) = e^{x^2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\, dx\right).$$

Cette fonction doit croître indéfiniment dans l'angle droit A_1 qui admet pour bissectrice la partie positive de Ox, tendre au contraire vers zéro dans l'angle A_3, opposé par le sommet à A_1, et dans les angles adjacents A_2, A_4, ces angles étant numérotés en tournant autour de O dans le sens direct. Or tout ceci est facile à vérifier.

Si z va à l'infini dans A_1, on a

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et la fonction croît comme $2e^{x^2}$, ce qui est d'accord avec (13).

Dans A_3 il faut étudier, par changement de x en $-x$,

$$e^{x^2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^0 e^{-x^2}\, dx\right).$$

Ceci est d'abord de la forme $\infty . 0$ mais prend finalement la valeur zéro par application de la règle de L'Hospital. A l'infini dans A_2 ou dans A_4 la fonction prend la forme $0 . \infty$ et finalement la vraie valeur zéro. Certes, on pourrait chercher mieux que ces applications un peu aventurées de la règle de L'Hospital, mais nous laisserons ceci aux soins du lecteur épris de rigueur; les *résultats* que nous venons de donner ne pouvant faire de doute.

Concluons que si la fonction $E_\alpha(x)$ ne peut, en général, s'exprimer en termes finis, elle est cependant peu éloignée des fonctions élémentaires.

Les résultats de ce paragraphe, dus à M. Mittag-Leffler, ont été perfectionnés par M. A. Wiman [29, 30].

6. **Propriétés intégrales de $E_\alpha(x)$.** — Avec ω réel considérons

l'intégrale

$$(19) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega\beta} E_\alpha(\omega x)\, d\omega\beta \qquad \left(\beta = \frac{1}{\alpha}\right).$$

Considérons également l'angle A'OC' (*fig.* 4) attaché à $E_\alpha(x)$, angle que nous appellerons plus brièvement A_α. Quand x va à l'infini suivant un rayon vecteur *extérieur* à A_α, l'intégrale (19) a un sens. Il en est de même quand $x = re^{i\varphi}$ se trouve entre les côtés de A_α et la branche de courbe

$$(20) \qquad r^\beta \cos\beta\varphi = 1$$

qui admet précisément les côtés de A_α pour asymptotes. Donc toute la région, du champ complexe des x, extérieure à cette branche (région qui contient O), est une étoile imparfaite B_α où (19) a un sens.

Si, dans (19), nous remplaçons $E_\alpha(\omega x)$ par son développement en série entière, on trouve immédiatement que l'intégrale se réduit à

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{si } |x| < 1.$$

Finalement l'intégrale (19), étant une fonction analytique de x qui existe partout dans B_α et coïncide avec $\frac{1}{1-x}$ dans le cercle $|x| < 1$, représente $\frac{1}{1-x}$ partout dans B_α. Donc, *dans* B_α,

$$(21) \qquad \frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega\beta} E_\alpha(\omega x)\, d\omega\beta.$$

Tant que la limite supérieure de l'intégrale n'atteint pas l'infini, cette intégrale reste une fonction entière de x.

Faisons maintenant tendre α vers zéro. L'angle A_α va s'applatir indéfiniment ainsi que la branche de courbe y contenue, celle-ci ne cessant pas d'avoir le point 1 pour sommet et nous pourrons écrire

$$(22) \qquad \frac{1}{1-x} = \lim_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega\beta} E_\alpha(\omega x)\, d\omega\beta \qquad \left(\beta = \frac{1}{\alpha}\right),$$

l'étoile de convergence étant cette fois l'étoile *parfaite* A qui comprend tout le plan sauf la demi-droite issue du point 1 et opposée à l'origine.

Soit maintenant le contour C représenté à droite sur la figure 1.

Pour ce contour nous pourrons écrire

$$(22^*)\qquad F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)}{z-x}\,dz$$
$$= \lim_{\alpha=0}\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)}{z}\,dz\int_0^\infty e^{-\omega\beta}\,E_\alpha\left(\frac{\omega x}{z}\right)d\omega\beta,$$

ce qui toutefois n'est pas admissible quand x coïncide en direction avec z et que $|x| > |z|$.

Notre dernière formule aura donc pour étoile de validité précisément l'étoile A de la figure 1 de droite, étoile parfaite toujours facile à imaginer au moins quand la fonction $F(x)$ n'a que des points singuliers isolés.

Nous pouvons écrire maintenant

$$F(x) = \lim_{\alpha=0}\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)}{z}\,dz\int_0^\infty e^{-\omega\beta}\left(1+\frac{1}{|\alpha}\frac{\omega x}{z}+\frac{1}{|2\alpha}\frac{\omega^2x^2}{z^2}+\ldots\right)d\omega\beta,$$

et enfin, dans A,

$$(23)\quad F(x) = \lim_{\alpha=0}\int_0^\infty e^{-\omega\beta}\left[F(0)+\frac{F'(0)}{1!}\frac{\omega x}{|\alpha}+\frac{F''(0)}{2!}\frac{\omega^2x^2}{|2\alpha}+\ldots\right]d\omega\beta.$$

Cette formule contient évidemment (22) comme cas particulier.

Plusieurs remarques importantes s'imposent.

a. D'abord le second membre de (23) a peut-être le tort de laisser croire, au moins à première vue, qu'on ne pourra représenter qu'une fonction $F(x)$ dont on aura une expression analytique explicite permettant de calculer $F'(x)$, $F''(x)$, ..., puis $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, ... Or ceci n'est nullement nécessaire. Il suffit que l'on ait, dans le voisinage de l'origine,

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

et (23) donne

$$(24)\qquad F(x) = \lim_{\alpha=0}\int_0^\infty e^{-\omega\beta}\left(a_0+a_1\frac{\omega x}{|\alpha}+a_2\frac{\omega^2x^2}{|2\alpha}+\ldots\right)d\omega\beta.$$

On voit notamment qu'il n'y a pas besoin de connaître les points singuliers de $F(x)$ pour représenter cette fonction dans tout son domaine d'existence sauf sur les rayons pointillés (alors inconnus) de l'étoile A (*fig.* 1).

Et ce serait précisément le fait de ne rien tirer de (24) pour un x à distance finie qui pourrait faire supposer que cet x se trouve sur un rayon pointillé. On entrevoit ainsi une méthode (parmi d'autres plus pratiques heureusement) pour découvrir les points singuliers d'une fonction donnée par un développement de Taylor, mais nous abandonnons immédiatement cette idée, à rattacher aux recherches générales de M. J. Hadamard, idée qui nous entraînerait bien loin du cadre de cet opuscule.

b. Nous avons montré sommairement que nos expressions convergeaient dans les étoiles y attachées, mais non qu'elles divergeaient au dehors: il y a là un supplément de rigueur pour lequel nous renverrons au texte de M. Mittag-Leffler.

c. Les courbes (20) sont analogues aux courbes (12) du Chapitre II. Mais au Chapitre II (§ 4) elles peuvent, par toutes leurs branches, délimiter des régions de sommabilité tandis que maintenant une courbe (20) n'a qu'une seule branche utile, la branche contenue dans A_α.

d. *Dans les formules* (23) *ou* (24) *tant que la limite supérieure, en* ω, *de l'intégrale reste finie, quelque grande qu'elle soit, le second membre ne cesse pas d'être une fonction entière de* x.

En d'autres termes, on peut toujours trouver une fonction $G_{\omega,\alpha}(x)$, entière en x et dépendant de deux paramètres α et ω, telle que, dans une étoile A,

$$F(x) = \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x). \tag{25}$$

Ceci est analogue à un théorème de Weierstrass qui permet d'approcher autant qu'on veut, par fonctions entières, de fonctions données à l'avance, analytiques ou non [31].

7. **Fonctions de Malmquist et Lindelöf.** — Nous avons vu, à la fin du paragraphe 4, que $E_\alpha(x)$ ne pouvait, pour α tendant vers zéro, donner une fonction entière tendant vers zéro dans toutes les directions autres que Ox et vers l'infini le long de Ox. De telles fonctions existent cependant.

L'une des plus simples a été créée [32] par J. Malmquist, élève de M. Mittag-Leffler. L'idée fondamentale consiste à considérer le type

de fonctions

$$(25^*) \qquad \sum \frac{x^\nu}{\Gamma(1+\nu\alpha_\nu)}.$$

Pour $\alpha_\nu = \alpha$ constant, on retrouve E_α; mais, pour α_ν décroissant indéfiniment avec l'entier ν croissant, il est vraisemblable que, si (25^*) est une fonction entière, elle doit présenter la propriété espérée. C'est, en effet, ce qu'a obtenu J. Malmquist avec

$$\alpha_\nu = \frac{1}{(\log\nu)^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

La fonction est définitivement

$$(26) \qquad G(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left[1+\frac{\nu}{(\log\nu)^\alpha}\right]}.$$

On voit sans peine qu'elle est *entière;* le raisonnement, avec application de la formule de Stirling, est le même que pour la série (14). Quant à vérifier le mode de croissance suivant les divers rayons vecteurs, ceci repose sur l'emploi de formules sommatoires qu'on peut appuyer elles-mêmes sur le calcul des résidus; M. Mittag-Leffler s'est d'ailleurs servi des mêmes formules pour étudier $E_\alpha(x)$. Plus généralement ces formules peuvent servir à étudier

$$F(x) = \varphi(0) + \varphi(1)x + \ldots + \varphi(\nu)x^\nu + \ldots,$$

c'est-à-dire la fonction F connaissant la fonction φ. C'est le problème général de M. J. Hadamard déjà cité; il a été envisagé, au moyen des formules sommatoires [**33**] par E. Lindelöf qui a donné des théorèmes très généraux sur la croissance des fonctions uniformes le long de rayons vecteurs orientés de manière quelconque. Ces considérations sont notamment appliquées à *la fonction entière*

$$(27) \qquad E_\beta(x) = \sum_{0}^{\infty} \left[\frac{x}{\log(\nu+\beta)}\right]^\nu \qquad (\beta > 1)$$

qui, comme (26), *tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini suivant un rayon quelconque autre que l'axe réel positif* [**34**].

Nous nous contenterons ici d'indications bibliographiques, les vérifications des assertions précédentes étant susceptibles de nous entraîner trop loin. D'ailleurs ces vérifications ont perdu une partie

de leur intérêt de par les progrès récents de la théorie des fonctions entières. Indiquons simplement les paradoxes qui semblent naître. D'abord il suffit de connaître *une seule* fonction du type (26) ou (27) pour en déduire une infinité d'autres de même type. Telles sont

$$H(x) = 1 - e^{G(x)}, \qquad J(x) = 1 - e^{H(x)}, \qquad \ldots.$$

Mais, par une construction analogue, on obtient

$$e^{-G(x)},$$

fonction *entière* qui tend vers 1 quand x va à l'infini sur tout rayon vecteur distinct de Ox et qui tend vers zéro sur Ox. De même, par exemple,

$$e^{-H(x)} - e^{-J(x)}$$

est une fonction *entière* qui tend vers zéro *dans toutes les directions*. Il semble évidemment, au premier abord, qu'il y ait ici la contradiction avec le théorème de Cauchy-Liouville-Weierstrass déjà signalée à la fin du Chapitre précédent. Les explications de ce paradoxe — ou de ce prétendu paradoxe — n'ont pas été d'abord absolument claires. MM. Mittag-Leffler et Lindelöf font intervenir la *convergence uniforme* qui n'existerait pas le long de certains rayons vecteurs ou dans certains angles formés par ceux-ci, quelque aigus que soient ces angles.

Autant dire que le comportement de la fonction au point à l'infini, même dans une direction donnée, dépend du chemin que suit x et ceci n'est que très ordinaire dans le voisinage d'un point singulier essentiel. Ainsi la fonction peut être nulle ou finie à l'infini, suivant les rayons issus de O et tendre vers l'infini le long de parallèles à certains de ces rayons. Nous verrons du moins que cette explication apparaît très simplement pour la fonction $E(x)$ que nous allons étudier maintenant.

8. **La fonction** $E(x)$. — Cette fonction $E(x)$, construite par M. Mittag-Leffler, tend vers zéro quand x va à l'infini le long d'un rayon vecteur d'orientation quelconque. Elle est définie par l'intégrale

$$E(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S e^{e^\zeta} e^{-e^{e^\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - x}, \tag{28}$$

le contour d'intégration étant celui de la figure 5. C a une ordonnée comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$; pour B l'ordonnée est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$; les points A et D sont à l'infini et le contour S est ABCD. La variable x, dans (28), est supposée à l'extérieur du contour. Ceci

Fig. 5.

posé, on peut faire des raisonnements absolument analogues à ceux du paragraphe 4. La fonction $E(x)$ n'a aucune singularité à distance finie; elle est *entière*. Elle se comporte à l'infini comme $1 : x$ le long de tout rayon issu non seulement de O mais de tout point de $u'Ou$ pris *à distance finie*. Si x vient à l'intérieur du contour on peut toujours enfermer cette variable dans un rectangle tel que ECBFE et alors

$$S = S + (ECBFE).$$

Donc

$$E(x) = E^*(x) + e^{cx} e^{-cx'}, \tag{29}$$

en désignant par $E^*(x)$ la fonction que représente le second membre de (28) quand x est dans la région intérieure au contour ABCD (région qui, sur la figure, ne contient pas O). Naturellement $E^*(x)$ tend vers zéro quand x va à l'infini sans sortir de la bande ABCD.

Étudions maintenant (29) quand $x = u + iv$ va à l'infini dans la bande ABCD *parallèlement* à Ou et avec une ordonnée telle que $\cos v$ soit positif. Alors

$$|e^{cx}| = e^{e^u \cos v},$$

$$|e^{-cx'}| = e^{\eta},$$

si

$$\eta = -e^{\zeta} \cos(e^u \sin v), \qquad \zeta = e^u \cos v.$$

Or, sur la parallèle indiquée, on trouvera certainement toujours des régions où $\cos(e^u \sin v)$ sera négatif et, dans ces conditions, le produit

des deux modules peut croître indéfiniment quand x va à l'infini sur une parallèle à l'axe réel convenablement choisie.

La fonction $E(x)$, *qui devient nulle à l'infini sur tout rayon vecteur issu d'un point à distance finie sur l'axe réel* (et, par suite, sur l'axe réel lui-même), *devient infinie sur certaines parallèles à l'axe réel.* Le théorème de Cauchy-Liouville-Weierstrass ne cesse point de dominer la théorie des fonctions entières.

Quant aux exemples particuliers illustrant une telle matière, il semble que le comble du fantastique ait été atteint récemment par M. Karl Grandjot, de Göttingen [35], qui a construit une fonction entière s'annulant toujours au point à l'infini quand la variable s'y rend par des chemins *algébriques* mais admettant des chemins d'infinitude transcendants.

Répétons que si de tels exemples sont toujours intéressants en eux-mêmes, ils ont cependant perdu leur caractère étrange de par les progrès faits par l'étude d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel. Renvoyons encore aux exposés de MM. Julia et Valiron [7 et 8].

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DES FONCTIONS SOMMATRICES SPÉCIALES.

Il faut maintenant remarquer la grande brièveté avec laquelle on peut présenter l'aboutissement de la théorie. Deux choses étaient essentielles : la construction des formules fondamentales (16) ou (20) du Chapitre I et le choix des fonctions sommatrices à y introduire.

Quand on possède les deux choses, comme nous les possédons maintenant, et qu'il n'y a plus qu'à introduire les fonctions sommatrices dans les formules fondamentales de sommabilité, les résultats doivent être à peu près immédiats, du moins au point de vue formel.

1. Emploi de la fonction sommatrice $E_\alpha(\xi)$. — Reprenons la formule (16) du Chapitre I, avec $p = 1$, soit

$$(1) \qquad \varphi_1(\xi)\,F(x) = \sum_0^\infty c_{n+1}\,s_n + \frac{1}{2i\pi}\int_C \varphi_1\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

La fonction sommatrice est, bien entendu, la fonction entière

$$f(\xi) = \begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \ldots, \\ c_0 + c_1 + c_2 + \ldots. \end{cases}$$

On a

$$\varphi_1(\xi) = f(\xi) - c_0.$$

Si l'on porte ceci dans (1) et que l'on tienne compte de

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(z)\,dz}{z - x},$$

on obtient

$$(2) \qquad F(x) = \sum_0^\infty \frac{c_{n+1} s_n}{f(\xi)} + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f\left(\frac{\xi x}{z}\right)}{f(\xi)} \frac{F(z)\,dz}{z - x}.$$

Reste à détruire l'intégrale du second membre, ce qui peut être fait de plusieurs manières.

Prenons $f(\xi) = E_\alpha(\xi)$, la variable réelle ξ pouvant tendre vers l'infini positif et α pouvant tendre vers zéro. On doit se représenter le contour C à l'image de celui représenté par la figure 1 de droite. Cette représentation est effective, précise, si l'on connaît les points singuliers de $F(x)$; si l'on ne les connaît pas, cas beaucoup plus général et important, on ne peut évidemment point placer de manière exacte les lacets de C, mais on admet que ce contour ne change point de nature. Alors, avec α fixe et ξ seulement tendant vers l'infini, le rapport en f, qui figure dans l'intégrale de (2), peut déjà tendre vers zéro mais dans une étoile imparfaite B laquelle, par exemple pour $\alpha = 1$, serait le *polygone de sommabilité* de M. E. Borel, polygone déjà rencontré (Chap. II, § 3) pour $F(x)$ méromorphe et qui existe aussi bien pour une branche uniforme d'une $F(x)$ plus générale.

Si maintenant α tend vers zéro, l'étoile imparfaite B tend vers l'étoile parfaite A et l'on peut écrire, avec M. Mittag-Leffler,

$$(3) \qquad F(x) = \lim_{\alpha = 0} \lim_{\xi = \infty} \sum_{n=0}^\infty \frac{c_{n+1} s_n}{E_\alpha(\xi)} \qquad c_n = \frac{\xi^n}{\lceil \alpha n}.$$

Il y a *sommabilité*, au moyen des *polynomes taylorians* s_n, par procédé de *double limite*.

Cette double limite pourrait être remplacée par une limite *simple* en prenant pour fonction sommatrice une fonction entière telle que

celles de MM. Malmquist et Lindelöf signalées précédemment (Chap. III, § 7).

2. Premier exemple d'une fonction sommatrice à deux variables. — Reportons-nous maintenant au paragraphe 4 du Chapitre I. Soit $p = 0$ et

$$(4) \qquad \varphi_0(\zeta, \xi, x) = f(\zeta, \xi, x) = E_\alpha(\zeta) - \frac{\xi}{\zeta}[E_\alpha(\zeta) - 1].$$

Donc

$$\varphi_0(\zeta, \xi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\Gamma(n\alpha)} - \frac{\xi}{\Gamma(n+1)\alpha} \right] \zeta^n,$$

$$1 = \varphi_0(\xi, \xi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\xi^n}{\Gamma(n\alpha)} - \frac{\xi^{n+1}}{\Gamma(n+1)\alpha} \right] = \sum_0^\infty c'_n,$$

$$c'_n = \frac{\xi^n}{\Gamma(n\alpha)} - \frac{\xi^{n+1}}{\Gamma(n+1)\alpha}.$$

Dans ces conditions, la formule (20), Chapitre I, donne

$$(5) \qquad F(x) = \sum_0^\infty c'_n s_n - \frac{1}{2i\pi} \int_C \left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} E_\alpha\left(\frac{\xi x}{z}\right) \right] F(z)\, dz.$$

Reste à détruire l'intégrale du second membre. C'est la même question qu'au paragraphe précédent mais nous allons nous tirer d'affaire tout autrement, et il convient précisément de remarquer la variété des méthodes qui permettent de détruire l'intégrale terminale en des formules telles que (2) ou (5).

Multiplions toute la formule (5) par $e^{-\xi^\beta} d\xi^\beta$, avec $\alpha\beta = 1$, et intégrons de zéro à l'infini réel et positif. Le premier membre $F(x)$ est multiplié par 1 ; le sigma devient

$$\sum_0^\infty c_n s_n,$$

en posant

$$c_n = \int_0^\infty e^{-\xi^\beta} \left[\frac{\xi^n}{\Gamma(n\alpha)} - \frac{\xi^{n+1}}{\Gamma(n+1)\alpha} \right] d\xi^\beta.$$

Enfin l'intégrale terminale devient

$$\int_C \int_0^\infty e^{-\xi^\beta} \left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} E_\alpha\left(\frac{\xi x}{z}\right) \right] F(z)\, dz\, d\xi^\beta,$$

ce qui est nul, *quand α tend vers zéro*, en vertu de la formule (22*) du Chapitre III.

Et, comme cette formule (22*) est valable dans l'étoile parfaite A, nous sommes ici en présence de conséquences valables également dans A. Donc, *dans l'étoile* A,

$$(6) \qquad F(x) = \lim_{\alpha=0} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \int_0^{\infty} e^{-\xi^\beta} \left[\frac{\xi^n}{\lfloor n\alpha} - \frac{\xi^{n+1}}{\lfloor (n+1)\alpha} \right] d\xi^\beta.$$

Ce résultat peut subsister pour α fixe et non voisin de zéro mais alors dans une étoile imparfaite. Ainsi, pour $\alpha = 1$, on a

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_n e^{-\xi} \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!},$$

ce qui est le résultat de M. E. Borel.

On aurait pu raisonner autrement. En tenant compte de la formule de Cauchy, on aurait pu réduire (5) à

$$\sum_0^{\infty} c'_n s_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C E_\alpha\left(\frac{\xi x}{z}\right) \frac{F(z)}{z} dz.$$

Alors, en multipliant par $e^{-\xi^\beta} d\xi^\beta$, intégrant de zéro à l'infini et faisant tendre α vers zéro, on aurait retrouvé (6) en vertu de la formule (22*).

Ces *résultats*, qui appartiennent tous à M. Mittag-Leffler, ne font point de doute. Cependant on pourrait souhaiter *ici* un peu plus de développement au point de vue de la rigueur, par exemple quant aux interversions d'intégration dans des intégrales doubles où le champ d'intégration est infini en ξ et aussi en z puisque le contour C a une partie circulaire tout entière à l'infini. On voit cependant aisément que les raisonnements précédents sont commencés avec ξ fini et avec un contour C qui peut être tout entier à distance finie avant de grandir indéfiniment. Dans ces conditions les passages à la limite utilisés peuvent être justifiés sans difficulté.

3. Fonctions sommatrices du type $f(\zeta - \xi)$. — Ces fonctions sont à rattacher aux fonctions sommatrices à deux variables. Quoi qu'il en soit ce sont les formules généralisées (Chap. I, § 4) qui vont encore

donner ce qui suit. On a

$$(7)\qquad f(\zeta-\xi) = f(-\xi) + \frac{\zeta}{1!}f'(-\xi) + \frac{\zeta^2}{2!}f''(-\xi) + \ldots,$$

$$(8)\qquad f(0) = \begin{cases} f(-\xi) + \frac{\xi}{1!}f'(-\xi) + \frac{\xi^2}{2!}f''(-\xi) + \ldots \\ c_0 + c_1 + c_2 + \ldots \end{cases}$$

Alors la formule (20), Chapitre I, donne, pour $p = 1$,

$$(9)\qquad f(0)\,F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}s_n - \frac{1}{2i\pi}\int_C f\left[\xi\left(\frac{x}{z}-1\right)\right]\frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

On a supprimé deux termes qui se détruisent en vertu de la formule de Cauchy multipliée par $f(-\xi)$. Observons encore que la formule (9), pour $\xi = 0$, redonne la formule de Cauchy. Enfin il est indiqué d'admettre que $f(0)$ n'est pas nul.

4. **Emploi des fonctions** e^{ξ}, $E_\alpha(\xi)$, $G(\xi)$, $E_\beta(\xi)$. — Si f est simplement la fonction exponentielle, les formules (2) et (9) se confondent. On retrouve donc encore la représentation de $F(x)$ dans le polygone de sommabilité de M. E. Borel. Pour $f = E_\alpha$, avec α décroissant de 1 à zéro et ξ tendant vers l'infini positif, la formule (9) est valable dans des étoiles imparfaites de discussion analogue à celle que nous allons faire au sujet de la formule (11). L'intéressant se produit quand α tend effectivement vers zéro. Alors on a, dans l'étoile parfaite A,

$$(10)\qquad F(x) = \lim_{\alpha=0}\lim_{\xi=\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^{n+1}}{(n-1)!}E_\alpha^{(n)}(-\xi)\,s_n.$$

C'est encore une formule à double limite.

On pourrait évidemment tirer de (9) des formules à simple limite en prenant pour f la fonction G de M. Malmquist ou la fonction E_β de M. Lindelöf ou toute autre fonction entière tendant vers zéro dans les directions autres que le demi-axe réel et positif et tendant vers l'infini sur ce demi-axe.

M. Mittag-Leffler joint à (10) d'autres formules dont nous allons brièvement indiquer le type.

Dans (7) remplaçons ζ par ξx et prenons pour f la dérivée de E_α

soit E'_α. Nous aurons

$$E'_\alpha[\xi(x-1)] = E'_\alpha(-\xi) + \frac{\xi x}{1!} E''_\alpha(-\xi) + \ldots,$$

d'où, en intégrant,

$$(11) \qquad \frac{1}{1-x} + \frac{E_\alpha[\xi(x-1)]}{x-1} = \int_0 \left[E'_\alpha(-\xi) + \frac{\xi x}{1!} E''_\alpha(-\xi) + \ldots \right] d\xi.$$

Construisons maintenant un angle d'ouverture $\alpha\pi$, ayant un sommet au point 1 et admettant pour bissectrice l'axe réel de 1 à $+\infty$. L'extérieur de cet angle sera la région contenant l'origine. Quand x est à l'extérieur de cet angle, $E_\alpha[\xi(x-1)]$ tend vers zéro avec ξ réel et positif croissant indéfiniment. Quand α tend vers zéro, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{\alpha=0} \int_0^\infty \left[E'_\alpha(-\xi) + \frac{\xi x}{1!} E''_\alpha(-\xi) + \ldots \right] d\xi.$$

Cette formule est valable dans une étoile parfaite constituée par tout le champ complexe à l'exclusion de la demi-droite $1, +\infty$. On passe de là à

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \lim_{\alpha=0} \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(z)}{z}\,dz \int_0^\infty \left[E'_\alpha(-\xi) + \frac{\xi}{1!}\frac{x}{z} E''_\alpha(-\xi) + \ldots \right] d\xi$$

ou, en abrégé,

$$(12) \qquad F(x) = \lim_{\alpha=0} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \frac{(\xi x)^n}{n!} E_\alpha^{(n+1)}(-\xi)\,d\xi.$$

Cette formule est naturellement valable dans l'étoile parfaite A analogue à celle de la figure 1 de droite. Elle est à comparer avec la formule (23) du Chapitre III.

Rapprocher (12) de (10) n'a rien d'obligatoire; les deux formules sont même nettement distinctes du fait que la seconde n'a rien d'une formule de sommabilité à extraire du type (9). Il nous paraîtrait préférable d'étudier (12) avec les propriétés intégrales de la fonction E_α (Chap. III, § 6).

5. **Emploi de la fonction** $E(\xi)$. — Voyons maintenant le rôle que peut jouer, comme fonction sommatrice, la fonction entière $E(\xi)$ qui tend vers zéro quand ξ va à l'infini dans n'importe quelle direction [Chap. III, § 8, équation (28)].

La formule (9) donne immédiatement, pour $f = \mathrm{E}$,

$$f(0)\,\mathrm{F}(x) = \lim_{\xi = \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} s_n, \tag{13}$$

du moins en commençant par supposer que x ne vienne pas sur le contour C qui est encore celui de la figure 1 de droite. Mais, à y regarder de plus près, ceci ouvre des horizons nouveaux. Le contour C peut être simplifié pour les points singuliers de $\mathrm{F}(x)$ qui n'altèrent pas l'uniformité, notamment pour les pôles de $\mathrm{F}(x)$, car alors les bords rectilignes du lacet relatif à un tel point peuvent être supprimés, l'un des bords détruisant l'autre. Dans les méthodes précédemment indiquées, où interviennent des fonctions sommatrices ayant au moins un rayon vecteur singulier, un point singulier uniforme de $\mathrm{F}(x)$ ne supprime pas la coupure pointillée y attenante (*fig.* 1), cette coupure provenant de la fonction sommatrice. *Ici il en est tout autrement;* là où les bords rectilignes du lacet n'auront aucune raison d'être maintenus, là où x pourra tourner autour d'un point singulier sans risquer quelque confusion de branche à branche pour $\mathrm{F}(x)$, la formule (13) pourra encore être valable sur la demi-droite pointillée. C'est ce que nous allons voir de manière plus précise en étudiant (13) et en prenant, en particulier,

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{1-x}. \tag{14}$$

Avec les notations de M. Mittag-Leffler nous poserons

$$f(\xi) = \frac{\mathrm{E}(\xi + b)}{\mathrm{E}(b)} = 1 - h_1\xi + h_2\xi^2 + \ldots,$$

$$h = \frac{1}{2i\pi\,\mathrm{E}(b)} \int_S e^{e^{\zeta}} e^{-e^{\zeta}} \frac{d\zeta}{(\zeta - b)^{\nu+1}},$$

$$f(0) = 1, \qquad \mathrm{E}(b) \neq 0.$$

Ainsi

$$f[\xi(x-1)] = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu \xi^\nu (x-1)^\nu. \tag{15}$$

D'après (8) on a de même

$$c_\nu = \frac{\xi^\nu}{\nu!} \frac{\mathrm{E}^{(\nu)}(b-\xi)}{\mathrm{E}(b)} = \frac{\xi^\nu}{2i\pi\,\mathrm{E}(b)} \int_S e^{e^{\zeta}} e^{-e^{\zeta}} \frac{d\zeta}{(\zeta - b + \xi)^{\nu+1}}$$

Si, dans (7), on pose $\zeta = \xi x$, on a

$$f[\xi(x-1)] = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu. \tag{16}$$

Les formules (15) et (16) sont évidemment à rapprocher l'une de l'autre. De (15) on conclut

$$\frac{f[\xi(x-1)]-1}{x-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu \xi^\nu (x-1)^{\nu-1}. \tag{17}$$

De (16) et (8) on conclut de même

$$1 - f[\xi(x-1)] = 1 - \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (1-x^\nu)$$

et

$$\frac{1-f[\xi(x-1)]}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+x+\ldots+x^\nu) c_{\nu+1}. \tag{18}$$

Si maintenant ξ tend vers l'infini on a, d'après (17), sauf peut-être pour $x=1$,

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{\xi=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu \xi^\nu (x-1)^{\nu-1} \tag{19}$$

et, d'après (18),

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{\xi=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+1} (1+x+\ldots+x^\nu). \tag{20}$$

Cette formule (20) aurait pu être écrite immediatement, d'après (13), mais nous pouvons maintenant l'examiner de manière plus délicate. Pour $x=1$ et ξ quelconque, (17) donne

$$\lim_{x=1} \frac{1-f[\xi(x-1)]}{1-x} = h_1 \xi.$$

De même (18) donne

$$\lim_{x=1} \frac{1-f[\xi(x-1)]}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) c_{\nu+1} = h_1 \xi.$$

On voit, pour ξ croissant indéfiniment, que les formules (19) et (20) ont simplement leurs deux membres infinis pour $x=1$. En d'autres termes les seconds membres assurent une représentation exacte des

premiers dans tout le champ complexe, sans considération d'étoile, même parfaite A. Ce résultat, établi pour la fonction (14), s'étend évidemment à une fonction méromorphe quelconque; au point de vue des représentations que nous étudions maintenant, les *pôles* ne sont plus des points singuliers et il peut en être de même pour certains points essentiels que M. Mittag-Leffler appelle des *poloïdes*.

Si (20) peut être déduit de (13), inversement (13) peut être déduit de (20). On a

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \lim_{\xi=\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z}\sum_0^\infty c_{\nu+1}\left(1+\frac{x}{z}+\ldots+\frac{x^\nu}{z^\nu}\right),$$

d'où

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty}\sum_0^\infty c_{\nu+1}(a_0+a_1x+\ldots+a_\nu x^\nu), \tag{21}$$

ce qui est (13). Certes la formule est établie avec le contour C, c'est-à-dire avec l'étoile A complète, mais il est aisé de montrer qu'on peut retirer de A les lacets relatifs aux pôles et aux poloïdes, ceci d'après le raisonnement déjà fait avec $F(x)$ réduit à la forme (14). Dans le cas général considérons d'abord $F(x) - \Sigma P(x)$, les $P(x)$ étant des séries de fractions rationnelles telles que la différence en question n'ait plus les singularités uniformes p dites pôles ou poloïdes. Cette différence n'aura évidemment pas de lacets relatifs aux p; mais les $P(x)$ n'en auront pas besoin non plus, d'après ce que nous avons vu quelques lignes plus haut, et, par suite, il en sera de même pour $F(x)$.

6. **Séries de polynomes newtoniens.** — Reprenons la formule de Cauchy et traitons (19) comme nous avons traité (20) pour obtenir (21). Nous aurons sans peine

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z}\sum_0^\infty h_{\nu+1}\,\xi^{\nu+1}(-1)^\nu\left(1-\frac{x}{z}\right)^\nu$$

et finalement

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty}\sum_0^\infty h_{\nu+1}\,\xi^{\nu+1}(-1)^\nu(1-a_*x)^\nu. \tag{22}$$

On voit que

$$(1-a_*x)^\nu = a_0 - \frac{\nu}{1!}a_1x + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}a_2x^2 - \ldots,$$

une telle expression étant un polynome dit *newtonien* par analogie avec ceux qui interviennent dans (21) et que nous avons toujours dits *tayloriens*.

Le développement (22) a naturellement la même étoile de validité que (21).

7. **Étoiles généralisées.** — Comme nous venons de le voir avec l'emploi de la fonction sommatrice E, il semble que l'on soit parvenu à représenter complètement une fonction *uniforme*, dans tout son domaine d'existence, par des séries limites construites elles-mêmes à l'aide de polynomes tayloriens. Les procédés de prolongement n'introduisent plus, en dernière analyse, les coupures provenant de rayons vecteurs singuliers pour les fonctions sommatrices et, par suite, l'étoile A, considérée comme parfaite quand elle n'excluait pas de portion *finie* du champ complexe, peut être remplacée par des étoiles plus avantageuses encore qui ne possèdent plus de coupures, si ce n'est pour empêcher la confusion entre branches de fonctions multiformes. Ce sont, par exemple, les étoiles K que M. Mittag-Leffler a probablement appelées ainsi en l'honneur de M. H. von Koch.

Quoi qu'il en soit, un fait est certain : ce sont les progrès de la théorie des fonctions entières qui ont permis les progrès en matière de prolongement analytique.

BIBLIOGRAPHIE.

Cette liste n'a pas la prétention d'être complète par elle-même; elle néglige systématiquement nombre de Mémoires cités dans les travaux ici mentionnés.

1. E. Borel. — *Leçons sur les Séries divergentes*, 184 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1901.

2. J. Hadamard. — *La série de Taylor et son prolongement analytique.* Collection *Scientia*, 115 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Ouvrage très riche en faits heureusement condensés et en renseignements bibliographiques.

3. G. Mittag-Leffler. — *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène.* Six Notes. Acta mathematica. 1re Note, t. 23, 1899, p. 43-62. — 2e Note, t. 24, 1900, p. 183-204. — 3e Note, t. 24, 1900, p. 205-244. — 4e Note, t. 26, 1902, p. 353-391. — 5e Note, t. 29, 1905, p. 101-181. — 6e Note, t. 42, 1918, p. 285-308.

Le présent opuscule *Séries analytiques, Sommabilité*, condense surtout les 5e et 6e Notes.

Les six Notes sont très riches en renseignements bibliographiques.

4. P. Painlevé. — *Sur le développement des fonctions analytiques.* Note de 48 pages jointe aux *Leçons sur les Fonctions de variables réelles* de M. E. Borel. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Les développements étudiés par M. Painlevé comparables avec certains autres dus à M. Fredholm sont également comparables avec les séries de polynomes newtoniens mentionnées ici (Ch. IV, § 6).

5. Walter B. Ford. — *A Conspectus of the modern Theory of divergent Series.* Bulletin of the American mathematical Society, vol. XXV, 1919, p. 1-15.

5*. L. Bieberbach. — *Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen.* Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften, Band II, 3, Heft 4, 1921, p. 379-532.

6. E. Borel. — *Question* 1477. L'Intermédiaire des Mathématiciens, t. VI, 1899, p. 74.

Bref aperçu très intéressant au point de vue de l'histoire de la Théorie des fonctions entières.

L'auteur met précisément en question l'existence même des fonctions $E_\alpha(x)$ de M. Mittag-Leffler. L'*Intermédiaire* a publié plusieurs réponses.

7. G. Julia. — *Leçons sur les Fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé.* 150 pages, Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1924.

8. G. Valiron. — *Lectures on the general Theory of integral Functions* translated by E. F. Colingwood with a preface by W. H. Young, 208 pages. Cambridge: Deighton, Bell and Co, 1923.

Nombreuses références bibliographiques. *Voir* aussi « Mémorial », fasc. II.

9. A. Buhl. — *Sur la sommabilité des séries d'une variable réelle ou complexe*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6e série, t. IV, 1908, p. 367-377.

10. L. Fejèr. — *Untersuchungen über Fouriersche Reihen.* Mathematische Annalen, Bd 58, 1904, p. 51-69.

11. E. Cesaro. — *Sur la multiplication des séries.* Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. XIV, 1re partie, 1890, p. 114-120.

12. R. D. Carmichael. — *General aspects of the Theory of summable series.* Bulletin of the American mathematical Society, vol. XXV, 1919, p. 97-131.

Condensation aisée d'un grand nombre de résultats. Nombreuses références.

13. O. Hölder. — *Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze.* Mathematische Annalen, Bd 20, 1882, p. 535-549.

14. Lloyd L. Smail. — *A general Method of Summation of divergent Series.* Annals of Mathematics. Second Series, vol. 20, 1918-1919, p. 149-154.

15. E. Kogbetliantz. — *Sur les moyennes doubles et le théorème d'équivalence des moyennes arithmétiques formées d'après Cesàro et Hölder.* Comptes rendus des séances de la Soc. math. de France, 28 février 1923. — *Sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques.* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 9e série, t. III, 1924. p. 107-187.

Voir aussi de nombreuses Notes dans les *Comptes rendus* (Paris) depuis 1916.

16. L. Hanni. — *Ueber die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Function durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode der Mittelwerte des Herrn Borel und der Transformation des Herrn Lindelöf.* Acta mathematica, t. 29, 1905, p. 25-58.

16*. V. Volterra et J. Pérès. — *Leçons sur la Composition et les Fonctions permutables.* (Collection de Monographies E. Borel.) Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1924.

Voir particulièrement, dans cet ouvrage, le Chapitre XI et dernier.

17. A. Buhl. — *Sur la représentation des fonctions méromorphes.* Acta mathematica, t. 35, 1911, p. 73-95.

18. A. Costabel. — *Sur le prolongement analytique d'une fonction méromorphe.* L'Enseignement mathématique, t. X, 1908, p. 377-390.

18* A. Buhl. — *Sommabilité et fonction* $E_\alpha(x)$. L'Enseignement mathématique, t. XXIV, 1924, p. 69-76.

19. J. Tannery et J. Molk. — *Éléments de la Théorie des Fonctions elliptiques,* t. I, p. 165 et 201. — P. Appell et E. Lacour. — *Principes de la Théorie des Fonctions elliptiques.* Première édition, p. 27 et 68.

20. A. Buhl. — *Sur la représentation des fonctions méromorphes par des séries de polynomes tayloriens.* Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. XXXII, 1908, p. 198-207.

21. E. Borel. — *Les probabilités dénombrables.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVII, 1909, p. 247-271.

22. E. Borel. — *Sur l'extension du théorème d'Abel aux séries sommables.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 13 janvier 1896.

23. J.-L.-W.-V. Jensen. — *An elementary exposition of the Theory of the Gamma Function.* Translation from the Danish by T. H. Gronwall. Annals of Mathematics, Second Series, vol. 17, 1915-1916, p. 124-166.

24. T. H. Gronwall. — *The Gamma Function in the integral Calculus.* Annals of Mathematics, Second Series, vol. 20, 1918-1919, p. 5-124.

25. M. Godefroy. — *La fonction Gamma.* Théorie, Histoire, Bibliographie; 102 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1901.

26. H. Laurent. — *Traité d'Analyse*, t. III, 1888, p. 460-461.

Il s'agit ici de l'intégrale curviligne de Hankel plus aisée à trouver dans ce Traité. Laurent, probablement à tort, l'attribue à Heine.

27. H. Hankel. — *Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes.* Zeitschrift für Mathematik und Physik, Neunter Jahrgang, 1864, p. 1-21.

28. P. Painlevé. — *Exercices sur la Théorie des Fonctions* adjoints au *Recueil d'Exercices* de F. Tisserand, seconde édition, 1896, p. 444.

29. A. Wiman. — *Ueber den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen* $E_\alpha(x)$. Acta mathematica, t. 29, 1905, p. 191-201.

30. A. Wiman. — *Ueber die Nullstellen der Funktionen* $E_\alpha(x)$. Acta mathematica, t. 29, 1905, p. 217-234.

Examen du cas où α est complexe. Les zéros se rangent sur de certaines courbes comme les zéros d'un sinus sur une droite.

31. E. Borel. — *Leçons sur les Fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*, 160 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Pour le théorème de Weierstrass, voir particulièrement le Chapitre IV.

Voir également E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, 2e édition, 1901, p. 275 et P. Appell, *Sur l'équation $r = q$ et la Théorie de la Chaleur*, Journal de Mathématiques, 4e série, t. VIII, 1892, p. 187-216.

32. J. Malmquist. — *Étude d'une fonction entière.* Acta mathematica, t. 29, 1905, p. 203-215.

33. E. Lindelöf. — *Le Calcul des Résidus et ses applications à la Théorie des Fonctions*, 150 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Voir particulièrement le Chapitre V consacré au prolongement analytique.

34. E. Lindelöf. — *Sur la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor.* Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. XXVII, 1903, p. 213-226.

35. K. Grandjot. — *Ueber Grenzwerte ganzer transzendenter Funktionen.* Mathematische Annalen, Band 91. Heft 3-4, 1924, p. 316-320.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

INTRODUCTION 1

I. — GÉNÉRALITÉS. — INTÉGRALES CURVILIGNES FONDAMENTALES.

1. Sommation et sommabilité 2
2. Séries entières 5
3. Intégrale simple fondamentale 7
4. Généralisations 8
5. Convergence 10

II. — FONCTIONS MÉROMORPHES ET FONCTIONS SOMMATRICES ORDINAIRES.

1. Fonctions méromorphes à pôles simples 10
2. Formules de sommabilité 13
3. Sommabilité exponentielle 14
4. Sommabilité exponentielle à exposant ξ^m 16
5. Sommabilité exponentielle itérée 16
6. La fonction sommatrice σ 16
7. Cas où $F(x)$ présente des pôles multiples 18
8. Régions de sommabilité pour le cas précédent 21
9. Dérivabilité. Rôle des indices p 22
10. Critique. Nécessité des fonctions sommatrices spéciales 23
11. Origine intégrale des formules sans quadratures 25

III. — FONCTIONS SOMMATRICES SPÉCIALES.

1. La fonction Γ 25
2. Formule de Stirling 26
3. L'intégrale curviligne de Hankel 27
4. Les fonctions $E_\alpha(x)$ et $E_\alpha^*(x)$ 29
5. Propriétés différentielles de $E_\alpha(x)$ 32
6. Propriétés intégrales de $E_\alpha(x)$ 34
7. Fonctions de Malmquist et Lindelöf 37
8. La fonction $E(x)$ 39

IV. — APPLICATIONS DES FONCTIONS SOMMATRICES SPÉCIALES.

1. Emploi de la fonction sommatrice $E_\alpha(\xi)$ 41
2. Exemple d'une fonction sommatrice à deux variables 43
3. Fonctions sommatrices du type $f(\zeta - \xi)$ 44
4. Emploi des fonctions e^ξ, $E_\alpha(\xi)$, $G(\xi)$, $E_3(\xi)$ 45
5. Emploi de la fonction $E(\xi)$ 46
6. Séries de polynomes newtoniens 49
7. Étoiles généralisées 50

BIBLIOGRAPHIE 50