Rolando Rebolledo

La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus

Mémoires de la S. M. F., tome 62 (1979)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__62__R1_0>

LA METHODE DES MARTINGALES APPLIQUEE A L'ETUDE DE LA CONVERGENCE EN LOI DE PROCESSUS (*)

par

Rolando REBOLLEDO (**)

INTRODUCTION

Depuis de nombreuses années, plusieurs chercheurs ont étudié la convergence en loi des processus par des méthodes "fonctionnelles", c'est-à-dire en utilisant les méthodes élaborées par PROKHOROV, SKOROKHOD et autres dans les années 50.

D'un autre côté, ces dernières années ont connu l'essor de la Théorie des Martingales et de la Théorie Générale des Processus.

La convergence en loi des processus est d'une utilité très grande dans de nombreuses branches des Probabilités Appliquées. La Théorie des Martingales à son tour s'est révélée être un auxiliaire très efficace dans de nombreux problèmes théoriques concernant la structure des processus. Cette théorie est certainement aujourd'hui l'une des plus riches parmi les domaines de recherche en Probabilités.

Le but de cet article est de montrer comment la Théorie des Martingales peut servir à analyser la convergence en loi des processus.

Le point de départ de cette recherche a été le Théorème de DONSKER ou Principe d'Invariance. Si $(\xi_n \ ; n \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 < \infty$, la suite de processus $(M_n \ ; n \in \mathbb{N})$, où $M_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]} \xi_k$, converge en loi vers un un mouvement Brownien. Si l'on considère les tribus $\underline{\underline{F}}_{n,t} = \sigma(\xi_k \ ; k \leq [nt])$, il

---

(*) Ce travail a été réalisé à l'Université de Reims. Une version préliminaire de ce texte est parue sous forme de rapport interne du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Reims (1978).

(**) Faculté des Sciences de Nice - Département de Mathématiques
Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX

est facile de remarquer que le processus M_n est une martingale de carré intégrable dont le processus croissant associé est la fonction $\frac{[nt]}{n}$ qui converge vers t - le processus croissant associé du mouvement Brownien - quand n tend vers $+\infty$.

La question naturelle qui se pose alors est : étant donné une suite de martingales locales, localement de carré intégrable, $(M_n : n\in\mathbb{N})$, sous quelles conditions sur la suite $(<M_n,M_n>; n\in\mathbb{N})$ des processus croissants associés on peut avoir la convergence en loi de $(M_n ; n\in\mathbb{N})$?. Cet article apporte une réponse à cette question dans certains cas. L'auteur a également étudié la question réciproque de la précédente obtenant des résultats sur la compacité étroite des lois de la suite $(<M_n,M_n>; n\in\mathbb{N})$.

L'article est divisé en trois grandes parties. La première contient des rappels et des compléments sur la Théorie des Martingales. Dans la deuxième partie, on trouvera les principaux résultats théoriques. D'abord, nous donnons un critère de compacité étroite relative adapté à nos besoins (II.1.3), puis nous établissons une série d'inégalités pour les martingales locales. Le troisième paragraphe de la deuxième partie discute le problème de la compacité étroite relative ; le quatrième traite de la caractérisation des points limites d'une suite de lois étroitement relativement compacte ; le cinquième, généralise cette étude à plusieurs dimensions.

Finalement, dans la troisième partie, nous étudions quelques applications : aux martingales à temps discret ; à l'approximation des diffusions ; à l'étude de la convergence en loi des martingales dans les processus ponctuels. Dans cette dernière application nous étudions notamment quelques exemples : processus de Cox d'un type particulier et un modèle de files d'attente.

I - RAPPELS ET COMPLEMENTS

I.1 - PRELIMINAIRES

Nous commençons par fixer quelques notations concernant la Théorie Générale des Processus et la Théorie des Martingales. Nous suivons pour cela les oeuvres classiques [5], [6], [18].

1. GENERALITES

Sur un espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ on considère une filtration $\mathbf{F}^o = (\underline{\underline{F}}^o_t\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$, c'est à dire une famille croissante de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}^o$ telle que $\underline{\underline{F}}^o = \bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \underline{\underline{F}}^o_t$. Nous dirons que $\mathbf{F}^o$ est continue à droite, si $\underline{\underline{F}}^o_{t+} = \bigcap_{s>t} \underline{\underline{F}}^o_s = \underline{\underline{F}}^o_t$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$. Nous notons $\underline{\underline{P}}$ (ou $\underline{\underline{P}}(\mathbf{F}^o)$) la tribu prévisible relative à $\mathbf{F}^o$ sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$, c'est à dire la tribu engendrée par les applications $X : \Omega\times\mathbb{R}_+ \to [-\infty,\infty]$ telles que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\omega\to X(\omega,t)$ est $\underline{\underline{F}}^o_t$-mesurable (on dit que X est $\mathbf{F}^o$-adaptée) et pour tout $\omega\in\Omega$, $t\to X(\omega,t)$ est continue à gauche.

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$, nous notons $\underline{\underline{F}}$ (resp. $\mathbf{F}$) la tribu complétée de $\underline{\underline{F}}^o$ pour $\mathbb{P}$ (resp. la filtration complétée de $\mathbf{F}^o$ pour $\mathbb{P}$ et rendue continue à droite). Nous avons ainsi que $\mathbf{F}$ satisfait aux conditions habituelles de DELLACHERIE ([5],[6]).

Un processus X est une application de $\Omega\times\mathbb{R}_+$ dans $[-\infty,\infty]$ telle que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ l'application $\omega\to X(\omega,t)$ soit $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable ; la trajectoire en $\omega\in\Omega$ de X est l'application $t\to X(\omega,t)$. D'après la coutume nous supprimons l'écriture de ω lorsqu'il n'y a pas danger de confusion. Nous identifierons par ailleurs les processus $\mathbb{P}$-indistinguables ([5],[6]), c'est-à-dire nous écrirons $X=Y$ pour deux processus dès que l'ensemble

$\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \{\omega\in\Omega : X(\omega,t) \neq Y(\omega,t)\}$ est $\mathbb{P}$-négligeable. Nous dirons donc qu'un processus X est $\mathbb{P}$-continu à droite et pourvu de limites à gauche lorsque X est $\mathbb{P}$-indistinguable d'un processus Y dont les trajectoires vérifient ces propriétés (comme il est habituel, nous abrégerons en disant que "X est c.à.d. l.a.g."). Pour un tel processus nous notons $X(t-)$ la limite à gauche au point $t\in\mathbb{R}_+$ et nous adoptons la convention $X(0-) = 0$; le saut au point $t\in\mathbb{R}_+$ sera noté $\Delta X(t) = X(t) - X(t-)$. Par ailleurs, un processus $\underline{\underline{P}}$-mesurable est dit <u>prévisible</u>.

Un temps d'arrêt de la filtration $\mathbb{F}$ est $\mathbb{P}$-p.s. égal à un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}^0_{t+}\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$. Si X est un processus et T un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, nous notons X^T le processus arrêté défini par $X^T(t) = X(T\wedge t)$, $(t\in\mathbb{R}_+)$. Lorsque $\underline{\underline{X}}$ est une classe de processus sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$, nous noterons $\underline{\underline{X}}^{loc}$ (resp. $\underline{\underline{X}}_0$, resp. $\underline{\underline{X}}_c$) la classe des processus X pour lesquels il existe une suite $(T_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ de temps d'arrêt - appelée suite localisante - croissant $\mathbb{P}$-p.s. vers $+\infty$ telle que $X^{T_n}\in\underline{\underline{X}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (resp. $X(0) = 0$ $\mathbb{P}$-p.s., resp. X indistinguable d'un processus à trajectoires continues et nul à l'origine). Par ailleurs nous adoptons les notations classiques de DELLACHERIE pour les intervalles stochastiques : si S, T sont deux temps d'arrêt, $[\![S,T]\!] = \{(\omega,t)\ \Omega\times\mathbb{R}_+ : S(\omega)\leq t\leq T(\omega)\}$; les intervalles $[\![S,T[\![$, $]\!]S,T[\![$, $]\!]S,T[\![$ sont définis d'une manière analogue.

Nous désignons par $\underline{\underline{V}}_+[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ l'ensemble des processus croissants A, $\mathbb{F}$-adaptés, $\mathbb{P}$-p.s. nuls à l'origine, continus à droite et tels que $\mathbb{E}(A(\infty)) < +\infty$. Nous l'appellerons l'<u>ensemble de processus croissants intégrables</u>, et on notera $\underline{\underline{V}}[\mathbb{F},\mathbb{P}] = \underline{\underline{V}}_+[\mathbb{F},\mathbb{P}] - \underline{\underline{V}}_+[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ <u>l'ensemble des processus à variation intégrable</u>.

2. MARTINGALES, MARTINGALES LOCALES, INTEGRALE STOCHASTIQUE

Toutes les martingales que nous considérons sont c.à.d.l.à.g. Nous désignons par $\underline{\underline{M}}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ l'ensemble des martingales uniformément intégrables sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. $\underline{\underline{M}}^2[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ désigne l'ensemble des martingales M sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{F},\mathbb{P})$ vérifiant $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathbb{E}(M^2(t)) < \infty$ (on dit que M est de "carré intégrable").

Toute $M\in\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ s'écrit de manière unique comme $M = M(0)+M^c+M^d$ avec $M^c\in\underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ appelée la <u>partie continue</u> de M et M^d qui vérifie $M^dN\in\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ pour toute $N\in\underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$. Si $M^c=0$ on dit que M est une <u>martingale locale somme compensée de sauts</u> (s.c.s.).

Si $M\in\underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, $\langle M,M\rangle$ désigne l'unique processus prévisible (et continu) de $\underline{\underline{V}}_+^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ - appelé <u>processus croissant associé</u> - tel que $M^2 - \langle M,M\rangle$ soit une martingale locale. Ceci permet de définir par "polarisation" le processus prévisible $\langle M,N\rangle\in\underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ lorsque M et N appartiennent à $\underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$. A tout couple $M,N\in\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ on associe le processus $[M,N]$ défini par $[M,N](t) = \langle M^c,N^c\rangle(t) + \sum_{0<s\leq t}\Delta M(s)\,\Delta N(s)$, $(t\in\mathbb{R}_+)$. On dit que M et N sont orthogonales si et seulement si $[M,N] = 0$ ou de façon équivalente lorsque

$\langle M^c,N^c\rangle = 0$ et M et N n'ont pas de discontinuité communes ; ou encore, si et seulement si $MN \in \underline{\underline{M}}_0^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$.

Rappelons que si $V \in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ il existe un et un seul élément prévisible $\tilde{V}$ de $\underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ - appelé <u>projection duale prévisible de</u> V - tel que $V-\tilde{V} \in \underline{\underline{M}}_0^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, ($\tilde{V}$ reçoit également le nom de <u>compensateur prévisible</u> de V). Il est bien connu que $M, N \in \underline{\underline{M}}^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ si et seulement si $\widetilde{[M,N]} \in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et dans ce cas on peut définir $\langle M,N\rangle = \widetilde{[M,N]}$.

Si X est un processus positif et A un processus croissant (non nécessairement adapté), on peut définir pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $\omega \in \Omega$, $X.A(\omega,t) = \int_{]0,t]} X(\omega,s)A(\omega,ds)$ où l'intégrale est prise au sens de Stieljes-Lebesgue. Nous notons $X.A$ le processus $(X.A(t)\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$.

Soit $M \in \underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et $p \in [1,\infty[$, on définit

$$L^p[M,\mathbb{P}] = \{X \text{ prévisible} : (X^2.[M,M])^{p/2} \quad \underline{\underline{V}}_+[\mathbb{F},\mathbb{P}]\}$$

Si $M \in M^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$; $L^2[M,\mathbb{P}]$ s'écrit également

$$L^2[M,\mathbb{P}] = \{X \text{ prévisible} : X^2.\langle M,M\rangle \in \underline{\underline{V}}_+[\mathbb{F},\mathbb{P}]\}$$

Si $M \in \underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, $L^{p,loc}[M,\mathbb{P}] = L^{1,loc}[M,\mathbb{P}]$ pour tout $p \in [1,\infty[$. Rappelons que $\underline{\underline{M}}_c^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}] = \underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et que d'autre part toute martingale continue nulle en 0 appartient à $\underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$. Avec nos notations, une martingale M continue, nulle en 0, telle que $\mathbb{E}(M^2(t)) < \infty$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, n'est pas un élément de $\underline{\underline{M}}_c^2[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ mais de $\underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$.

Nous avons en général que si $M \in \underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, les inclusions suivantes sont vérifiées : $L^{p,loc}[M,\mathbb{P}] \subset L^{q,loc}[M,\mathbb{P}]$ pour touts $p,q \in [1,\infty[$ tels que $q < p$.

Nous sommes maintenant en position de formuler la définition générale de l'intégrale stochastique ([18], chap. V). Soit $M \in \underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et $X \in L^{1,loc}[M,\mathbb{P}]$ on définit l'intégrale stochastique de X par rapport à la martingale locale M comme l'unique élément, noté $X.M$, de $\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ qui vérifie pour toute $N \in \underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ l'égalité

$$[X.M,N] = X.[M,N]$$

(Lorsque $M \in \underline{\underline{M}}^2[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et $X \in L^2[M,\mathbb{P}]$, l'intégrale stochastique construite ci-dessus coïncide avec celle de la définition classique qui fait intervenir les processus $\langle .,.\rangle$).

Rappelons, pour terminer, qu'une semi-martingale (relativement à $\mathbb{F}$ et $\mathbb{P}$) est un processus X qui s'écrit $X=M+V$ où $M\in\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et V est un processus à variations finies. Cette décomposition de X n'est pas unique mais la partie martingale continue M^c de M est indépendante de la décomposition, c'est pourquoi on la note X^c. Si X et Y sont deux semi-martingales, on définit le processus $[X,Y]$ par $[X,Y](t) = \langle X^c,Y^c\rangle(t) + \sum_{s\leq t} \Delta X(s)\Delta Y(s), (t\in\mathbb{R}_+)$. Evidemment, si X et Y sont deux processus à variations finies, ils sont en particulier des semi-martingales avec $X^c=Y^c=0$ et $[X,Y] = \sum_{s\leq .} \Delta X(s)\, \Delta Y(s)$.

Nous verrons maintenant une autre façon de décomposer les éléments de $\underline{\underline{M}}_0^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$. Auparavant, introduisons quelques notations.

Soit M une $\mathbb{F}$-martingale locale nulle en 0, $\varepsilon > 0$. On considère les processus croissants suivants :

$$\alpha^{\varepsilon}(M) = (\alpha^{\varepsilon}(M,t)\ ;\ t\in\mathbb{R}_+),\ \sigma^{\varepsilon}(M) = (\sigma^{\varepsilon}(M,t),\ t\in\mathbb{R}_+)$$

où

$$(1) \qquad \alpha^{\varepsilon}(M,t) = \sum_{s\leq t} |\Delta M(s)|\, I_{[\,|\Delta M(s)|>\varepsilon]}$$

$$(2) \qquad \sigma^{\varepsilon}(M,t) = \sum_{s\leq t} (\Delta M(s))^2\, I_{[\,|\Delta M(s)|>\varepsilon]},\ t\in\mathbb{R}_+).$$

On montre comme dans [19] que $\alpha^{\varepsilon}(M)$ est localement intégrable. Cette propriété nous permet de définir le processus à variation localement intégrable $A^{\varepsilon}=(A^{\varepsilon}(t)\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$, où

$$(3) \qquad A^{\varepsilon}(t) = \sum_{s\leq t} \Delta M(s)\, I_{[\,|\Delta M(s)|>\varepsilon]},\ (t\in\mathbb{R}_+)$$

et son compensateur $\mathbb{F}$-prévisible $\widetilde{A}^{\varepsilon}$, ainsi que le compensateur $\mathbb{F}$-prévisible $\widetilde{\alpha}(M)$ de $\alpha(M)$.

On pose

$$(4) \qquad \overline{M}^{\varepsilon} = A^{\varepsilon}-\widetilde{A}^{\varepsilon},\ \underline{M}^{\varepsilon}=M-\overline{M}^{\varepsilon}$$

Si M est localement de carré intégrable, alors $\sigma^{\varepsilon}(M)$ est localement intégrable et on peut définir son compensateur $\mathbb{F}$-prévisible $\widetilde{\sigma}^{\varepsilon}(M)$.

Si X est un processus continu à droite, on note X^* le processus $(\sup_{s\leq t} |X(s)|\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$.

Nous avons alors la propriété suivante :

3. LEMME (ε-décomposition).

Soit $M \in \underline{\underline{M}}_0^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et soit $\varepsilon>0$. Alors $\underline{M}^\varepsilon \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et $\sup_{s\leq t}|\Delta \underline{M}^\varepsilon(s)| \leq 2\varepsilon$. Par ailleurs

$$(1) \qquad \mathbb{E}((M-\underline{M}^\varepsilon)^*(T)) = \mathbb{E}((\overline{M}^\varepsilon)^*(T)) \leq 2\mathbb{E}(\tilde{\alpha}^\varepsilon(M,T))$$

pour tout T temps d'arrêt fini.

Si M est quasi-continue à gauche (c'est-à-dire si M n'a que des sauts totalement inaccessibles [5]), alors $\underline{M}^\varepsilon$ et $\overline{M}^\varepsilon$ sont orthogonales, $\sup_{s\leq t}|\Delta \underline{M}^\varepsilon(s)| \leq \varepsilon$ et $[\overline{M}^\varepsilon,\overline{M}^\varepsilon] = \sigma^\varepsilon(M)$.

Si $M \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, nous avons en outre que

$$(2) \qquad \mathbb{E}((\overline{M}^\varepsilon)^*(T)) \leq 2\,\mathbb{E}(\tilde{\alpha}^\varepsilon(M,T)) \leq \frac{2}{\varepsilon}\,\mathbb{E}(\tilde{\sigma}^\varepsilon(M,T))$$

$$(3) \qquad \mathbb{E}(<\overline{M}^\varepsilon,\overline{M}^\varepsilon>(T)) \leq 3\,\mathbb{E}(\tilde{\sigma}^\varepsilon(M,T))$$

$$(4) \qquad \mathbb{E}(<\underline{M}^\varepsilon,\overline{M}^\varepsilon>^*(T)) \leq \mathbb{E}(\widetilde{[\underline{M}^\varepsilon,\overline{M}^\varepsilon]^*(T)}) \leq 4\varepsilon\,\mathbb{E}(\tilde{\alpha}^\varepsilon(M,T))$$

pour tout T temps d'arrêt fini.

Démonstration : La première partie a été entièrement démontrée (pour $\varepsilon=1$) par MEYER dans [19]. On se ramène par arrêt au cas où M est une martingale uniformément intégrable nulle en 0 et A^ε est à variation intégrable. $\tilde{A}^\varepsilon$ est alors à variation intégrable et $\underline{M}^\varepsilon$ est une martingale uniformément intégrable.

Définissons les processus $A^\pm$ par

$$A^\pm(t) = \sum_{s\leq t} (\Delta M(s))^\pm\, I_{[|\Delta M(s)|>\varepsilon]} \quad (t\in\mathbb{R}_+)$$

Alors,

$$A^\varepsilon = A^+ - A^- \quad \text{et} \quad \alpha^\varepsilon(M) = A^+ + A^-$$

Par conséquent,

$$|\tilde{A}^\varepsilon| = |\tilde{A}^+ - \tilde{A}^-| \leq \tilde{A}^+ + \tilde{A}^- = \tilde{\alpha}^\varepsilon(M)$$

et puisque $|A^\varepsilon| \leq \alpha^\varepsilon(M)$, nous avons

$$|A^\varepsilon - \tilde{A}^\varepsilon| \leq |A^\varepsilon| + |\tilde{A}^\varepsilon| \leq \alpha^\varepsilon(M) + \tilde{\alpha}^\varepsilon(M)$$

Or $\alpha^{\varepsilon}(M)+\tilde{\alpha}^{\varepsilon}(M)$ est un processus croissant, il s'en suit que

$$(\overline{M}^{\varepsilon})^{*} = (A^{\varepsilon}-\tilde{A}^{\varepsilon})^{*} \leq \alpha^{\varepsilon}(M) + \widetilde{\alpha^{\varepsilon}}(M)$$

De cette inégalité et de la définition du compensateur prévisible d'un processus découle alors l'inégalité (1).

On remarque que en un temps totalément inaccessible T on a

(4) $$\Delta\overline{M}^{\varepsilon}(T) = \Delta A^{\varepsilon}(T) = \Delta M(T)\, I_{[|\Delta M(T)|>\varepsilon]}$$

(5) $$\Delta\underline{M}^{\varepsilon}(T) = \Delta M(T)\, I_{[|\Delta M(T)| \leq \varepsilon]}$$

En un temps prévisible T on a

(6) $$\Delta\overline{M}^{\varepsilon}(T) = \Delta(A^{\varepsilon}-\tilde{A}^{\varepsilon})(T) = \Delta M(T)\, I_{[|\Delta M(T)|>\varepsilon]} - \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T-}}(\Delta M(T) I_{[|\Delta M(T)|>\varepsilon]})$$

(7) $$\Delta\underline{M}^{\varepsilon}(T) = \Delta M(T)\, I_{[|\Delta M(T)|\leq\varepsilon]} - \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T-}}(\Delta M(T)\, I_{[|\Delta M(T)| \leq \varepsilon]})$$

Si M est quasi-continue à gauche, M ne possède que des sauts totalement inaccessibles et $\tilde{A}^{\varepsilon}$ est continu. Donc les expressions (4) et (6) (resp. (5) et (7)) coïncident et l'on déduit que $|\Delta\underline{M}^{\varepsilon}(t)|\leq\varepsilon$ pour tout $t\in\mathbb{R}_{+}$. Par ailleurs,

$$[\overline{M}^{\varepsilon},\overline{M}^{\varepsilon}](t) = \sum_{s\leq t} (\Delta\overline{M}^{\varepsilon}(s))^{2} = \sum_{s\leq t} (\Delta M(s))^{2}\, I_{[|\Delta M(s))|>\varepsilon]}, \quad (t\in\mathbb{R}_{+})$$

c'est-à-dire $[\overline{M}^{\varepsilon},\overline{M}^{\varepsilon}] = \sigma^{\varepsilon}(M)$.

Dans ce cas d'autre part, $\overline{M}^{\varepsilon}$ et $\underline{M}^{\varepsilon}$ n'ont pas de discontinuités communes ce qui entraîne l'orthogonalité de ces martingales locales car $\overline{M}^{\varepsilon}$ est une somme compensée de sauts.

Supposons $M\in\underline{\underline{M}}_{0}^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$. Montrons d'abord que

(8) $\mathbb{E}(\tilde{\alpha}(M,T))\leq \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbb{E}(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}(M,T))$ pour tout temps d'arrêt fini T.

Nous avons l'inégalité élémentaire suivante

$$\frac{|\Delta M(s)|}{\varepsilon}\, I_{[|\Delta M(s)|>\varepsilon]} \leq \frac{|\Delta M(s)|^{2}}{\varepsilon^{2}}\, I_{[|\Delta M(s)|>\varepsilon]}, \quad (s\in\mathbb{R}_{+})$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\alpha^{\varepsilon}(M) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2}}\,\sigma^{\varepsilon}(M)$$

et (8) en découle par définition de $\tilde{\alpha}^{\varepsilon}(M)$ et de $\tilde{\sigma}^{\varepsilon}(M)$.

L'inégalité (3) est un peu plus longue à démontrer. On se ramène par arrêt au cas M de carré intégrable et nulle en 0.

Soit $(T_n; n \in \mathbb{N})$ une suite de $\mathbb{F}$-temps d'arrêt à graphes disjoints, épuisant les sauts de M, chaque T_n étant soit prévisible, soit totalement inaccessible. Nous décomposons $[\overline{M}^{\varepsilon}, \overline{M}^{\varepsilon}]$ sous la forme

$$[\overline{M}^{\varepsilon}, \overline{M}^{\varepsilon}] = S^p + S^i,$$

où

$$S^p(t) = \sum_{T_n \text{prévisibles}} U_n I_{[T_n \leq t]} \; ; \; S^i(t) = \sum_{T_n \text{ tot. inacc.}} U_n I_{[T_n \leq t]}$$

$$U_n = (\Delta \overline{M}^{\varepsilon}(T_n))^2 \quad (n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_+).$$

D'après (4) on déduit que $S^i \leq \sigma^{\varepsilon}(M)$ et par suite, pour tout temps d'arrêt fini T,

(9) $$\mathbb{E}(\tilde{S}^i(T)) \leq \mathbb{E}(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}(M,T))$$

Si T est un temps prévisible, remarquons que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{F}_{T-}} U_n = \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T-}} (\Delta M(T))^2 I_{[|\Delta M(T)| > \varepsilon]} - (\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T-}} (\Delta M(T) I_{[|\Delta M(T)| > \varepsilon]}))^2$$
$$\leq 2\, \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T-}} (\Delta M(T))^2 I_{[|\Delta M(T)| > \varepsilon]} = 2\, \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T-}} \Delta\, \sigma^{\varepsilon}(M,T)$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

(10) $$\tilde{S}^p(t) = \sum_{T_n \text{prév.}} \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T_n -}} U_n I_{[T_n \leq t]}$$
$$\leq 2 \sum_{T_n \text{ prév.}} \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T_n -}} \Delta\sigma^{\varepsilon}(M,T_n) I_{[T_n \leq t]} \leq 2\tilde{\sigma}^{\varepsilon}(M,t)$$

(3) découle alors de (9) et (10).

Finalement

$$[\underline{M}^{\varepsilon}, \overline{M}^{\varepsilon}]^*(t) \leq \sum_{s \leq t} |\Delta \underline{M}^{\varepsilon}(s)|\, |\Delta \overline{M}^{\varepsilon}(s)|$$
$$\leq 2\varepsilon \sum_{s \leq t} |\Delta \overline{M}^{\varepsilon}(s)| \qquad (t \in \mathbb{R}_+)$$

D'après (5) et (7) il est facile de voir que

$$\sum_{s\leq t} |\Delta\, \overline{M}^{\varepsilon}(s)| \leq \alpha^{\varepsilon}(M,t) + \tilde{\alpha}^{\varepsilon}(M,t),\ (t\in R_+)$$

Par conséquent

$$\widetilde{\sum_{s\leq t} |\Delta\, \overline{M}^{\varepsilon}(s)|} \leq 2\,\tilde{\alpha}^{\varepsilon}(M,t)\ (t\in R_+)$$

et

$$<\underline{M}^{\varepsilon},\overline{M}^{\varepsilon}>^{*} = \left(\widetilde{[\underline{M}^{\varepsilon},\overline{M}^{\varepsilon}]}\right)^{*} \leqslant \widetilde{[M^{\varepsilon},\overline{M}^{\varepsilon}]^{*}} \leq 4\varepsilon\, \tilde{\alpha}^{\varepsilon}(M) \qquad \blacksquare$$

Nous rappelons que toute $M\in \underline{M}^{1,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ dont l'amplitude des sauts est uniformément bornée appartient à $\underline{M}^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$. Nous étudierons maintenant une famille de surmartingales exponentielles liées à ce type de martingales locales.

4. LEMME

Soit $M\in \underline{M}^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ telle que $|\Delta M(t)| \leq c$ ($\mathbb{P}$-p.s.) pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, où c est un réel strictement positif. Soit $\emptyset_c : \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ la fonction définie par $\emptyset_c(\lambda) = (3c)^{-2}\,(\exp(3\lambda c) - 1 - 3\lambda c), \lambda\in\mathbb{R}_+$. (*)

Alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+$ le processus $E_c[M] = (E_c[M](t)\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$ est une surmartingale positive, où :

$$E_c^{\lambda}[M](t) = \exp(\lambda M(t) - \emptyset_c(\lambda) <M,M>(t))\ (t\in\mathbb{R}_+)$$

Démonstration : NEVEU [23] donne une démonstration de ce lemme pour les martingales à temps discret (c.f. également [21]) ; nous l'étendrons au cas présent. Nous utiliserons la propriété suivante valable pour toute sous-tribu $\underline{\underline{B}}$ de $\underline{\underline{F}}$ et toute variable aléatoire U telle que $|U| \leq 3c$ $(c>0)$:

$$(1) \qquad \mathbb{E}^{\underline{\underline{B}}}(\exp \lambda U) \leq \exp[\emptyset_c(\lambda)\, \mathbb{E}^{\underline{\underline{B}}}\, U^2]\ (\lambda\in\mathbb{R}_+)$$

(voir [23] lemme VII-$\underline{\underline{2}}$-8).

On remarque, par ailleurs que $\emptyset_c(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} + o(\lambda^2)$ au voisinage de l'origine.

Nous définissons par récurrence une suite $(T_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ de temps d'arrêt d'arrêt :

(*) : Quand cet article était achevé, l'auteur a appris que LEPINGLE a montré dans [14] un résultat meilleur : on peut remplacer $\Phi_c(\lambda)$ par $c^{-2}(\exp(\lambda c) - 1 - \lambda c)$.

$$T_o = 0$$

$$T_{n+1} = \inf\{t > T_n : |M(t) - M(T_n)| > c\} \quad (\inf \emptyset = +\infty)$$

Il est clair que $T_n \uparrow \infty$ p.s. car sinon M posséderait un saut d'amplitude supérieure à c sur $\lim\limits_n T_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|M(T_{n+1}) - M(T_n)| \leq 2c$ et d'après le lemme VII-2-8 de [23], $(E_c^\lambda[M](T_n) \ ; n \in \mathbb{N})$ est une surmartingale positive par rapport à la filtration $(\underline{\underline{F}}_{T_n} \ ; n \in \mathbb{N})$.

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\nu(t) = \inf\{n \in \mathbb{N} : t < T_n\}$$

c'est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_{T_n} \ ; n \in \mathbb{N})$, et $T_{\nu(t)}$ est un temps d'arrêt de $\mathbb{F}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $h > 0$, nous avons

$$\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(\exp[\lambda(M(t+h)-M(t))-\emptyset_c(\lambda)(<M,M>(t+h)-<M,M>(t))]) = \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(U\,V\,Z), \text{ où}$$

$$U = \exp[\lambda(M(t+h)-M(T_{\nu(t+h)-1}))-\emptyset_c(\lambda)(<M,M>(t+h)-<M,M>(T_{\nu(t+h)-1}))]$$

$$V = \exp[\lambda(M(T_{\nu(t+h)-1})-M(T_{\nu(t)}))-\emptyset_c(\lambda)(<M,M>(T_{\nu(t+h)-1}) -<M,M>(T_{\nu(t)}))]$$

$$Z = \exp[\lambda(M(T_{\nu(t)})-M(t)) - \emptyset_c(\lambda)(<M,M>(T_{\nu(t)})-<M,M>(t))].$$

Or,
$$\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(U\,V\,Z) = \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(VZ\,\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T_{\nu(t+h)-1}}}U)$$

mais, l'espérance conditionnelle de U à l'intérieur de la parenthèse du second membre est inférieure ou égale à 1, car $|M(t+h)-M(T_{\nu(t+h)-1})| \leq c$ et (1) s'applique.

Donc,
$$\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(UVZ) \leq \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(VZ) = \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(Z\,\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T_{\nu(t)}}}V)$$

Or $V = E_c^\lambda[M](T_{\nu(t+h)-1})/E_c^\lambda[M](T_{\nu(t)})$; la propriété de surmartingale de $(E_c^\lambda[M](T_n) \ ; n \in \mathbb{N})$ et le fait que $\nu(t)$ est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_{T_n} \ ; n \in \mathbb{N})$ entraînent que

$$\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T_{\nu(t)}}} V \leq 1$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(UVZ) \leq \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(Z)$$

Montrons pour terminer que $\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(Z) \leq 1$. Pour cela nous remarquons que

$$|M(T_{\nu(t)}) - M(t)| \leq |M(T_{\nu(t)}) - M(T_{\nu(t)-1})| + |M(T_{\nu(t)-1}) - M(t)| \leq 3c.$$

Par conséquent (1) s'applique et $\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_t}(Z) \leq 1$. ■

I.2 - AIDE-MEMOIRE SUR QUELQUES ESPACES REMARQUABLES

1. L'ESPACE C

Nous désignerons par $C=\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. La métrique,

$$\rho_C(x,y) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{\sup_{t\in[0,N]} |x(t)-y(t)|}{1+\sup_{t\in[0,N]}|x(t)-y(t)|}, \quad (x,y\in C)$$

est compatible avec la dite topologie et elle rend C polonais. Posons, pour tous $x \in C$, $\delta > 0$, $N\in\mathbb{N}^*$,

$$W_C^N(X,\delta) = \sup_{\substack{|t-s|\leq\delta \\ t,s\in[0,N]}} |x(s) - x(t)|$$

L'espace $C([0,1], \mathbb{R})$ a été largement étudié (PROKHOROV [30], SKOROKHOD [38], BILLINGSLEY [1], PARTHASARATY [28]). Notamment, on dispose d'une bonne caractérisation de familles relativement étroitement compactes de probabilités définies sur la tribu borélienne de cet espace. Cette caractérisation a été étendue à C par STONE [39]. Nous notons $\underline{\underline{B}}(C)$ la tribu borélienne de C.

2. PROPOSITION

Soit $\pi = (P_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ une suite de probabilités sur $(C, \underline{\underline{B}}(C))$. π est tendue si et seulement si pour tous, ε, $\eta > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$

(1) il existe $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(\{x \in C \; : \; |x(0)| > a\}) \leq \eta$$

(2) il existe $\delta > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$P_n(\{x \in \mathbf{C} \; : \; W_C^N(x,\delta) \geq \varepsilon\}) \leq \eta$$

3. L'ESPACE D

Nous noterons $D = D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche, définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de Skorokhod sur tout compact. Précisons cette topologie. Une suite $(\mathbf{x}_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ converge vers x dans D si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une suite $(\lambda_n^N \; ; \; n \in \mathbb{N})$ d'applications strictement croissantes et continues de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même vérifiant

$$\lim_{n \uparrow \infty} \left[\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |\lambda_{n(t)}^N - t| + \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda_n^N(t) - \lambda_n^N(s)}{t-s} \right| \right] = 0$$

et

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sup_{t \in [0,N]} |x(t) - x_n(\boldsymbol{\lambda}_n^N(t))| = 0$$

Il est possible d'introduire une métrique ρ_D sur D compatible avec la topologie définie ci-dessus et le rendant polonais. Cela a été fait notamment dans [13]. Comme dans le cas des fonctions continues; on a étudié largement les mesures définies sur $D([0,1], \mathbb{R})$ muni de sa tribu borélienne. STONE, dans [39], a élaboré une méthode qui permet d'étendre à D les critères de compacité étroite relative de familles de probabilités connus dans le cas classique. Posons, pour tous $x \in D$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_D^N(x,\delta) = \inf_{(t_i)} \max_{0 < i \leq n} \sup_{t_{i-1} \leq s,t < t_i} |x(s) - x(t)|,$$

ou l'inf est pris sur l'ensemble des partitions finies $\{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[0,N]$ vérifiant :

$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = N \\ t_i - t_{i-1} > \delta, \ i=1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Nous notons $\underline{\underline{B}}(D)$ la tribu borélienne de ρ.

4. PROPOSITION

Soit $\pi = (P_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite de probabilités sur $(D, \underline{\underline{B}}(D))$. π est tendue si et seulement si pour tous $\varepsilon, \eta > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$:

(1) il existe $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(\{x \in D : \sup_{t \in [0,N]} |x(t)| > a\}) \leq \eta$$

(2) il existe $\delta > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$.

$$P_n(\{x \in D : W_D^N(x,\delta) \geq \varepsilon\}) \leq \eta$$

On peut également étendre à D d'autres critères classiques (notamment les Théorèmes 15.3 et 15.4 de [1]). On obtient ainsi le lemme suivant :

5. LEMME

Soit $\pi = (P_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite de probabilités sur $(D, \underline{\underline{B}}(D))$. Pour que π soit tendue il suffit que les propriétés suivantes soient vérifiées pour tous $\varepsilon, \eta > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$:

(1) il existe $a > 0$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} P_n(\{x \in D : \sup_{t \in [0,N]} |x(t)| > a\}) \leq \eta ;$$

(2) il existe δ_0, $0 < \delta_0 < N$, et $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que

$$\sup_{n \geq n_0} P_n(\{x \in D : \sup_{s,t < \delta_0} |x(t)-x(s)| \geq \varepsilon\}) \leq \eta ;$$

(3) il existe $\delta_1 > 0$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sup_{n \geq n_1} P_n(\{x \in D : \sup_{\delta_1 \leq s < t < N} |x(t)-x(s)| \geq \varepsilon\}) \leq \eta ;$$

(4) il existe $\delta_2 > 0$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sup_{n \geq n_2} P_n(\{x \in D : \sup_{\substack{t_1 < t_2 \leq N \\ |t_1 - t_2| \leq \delta_2}} \ \sup_{t_1 < t \leq t_2} \min(|x(t)-x(t_1)|, |x(t)-x(t_2)|) > \varepsilon\}) \leq \eta$$

6. REMARQUES

1). Si $x \in D$ est une fonction vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ l'inégalité $|\Delta x(t)| \leq c$, où c est une constante positive, alors (cf PARTHASARATY [28], VII lemme 6.4).

$$W_C^N(x,\delta) \leq 2\, W_D^N(x,\delta) + c, \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}^*,\ \delta > 0.$$

2). Si $\pi = (P_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ est une suite de probabilités sur $(D,\underline{\underline{B}}(D))$ vérifiant les hypothèses 2.(1) et 2.(2), nous dirons que π est C-tendue. En ce cas, π est (D-) tendue et si P est un point d'adhérence de π, alors $P(C)=1$.

3). Pour tout $w \in D$, soit $X(w,t) = w(t)$, $(t \in \mathbb{R}_+)$. Posons $\underline{\underline{B}}_t^o = \bigcap_{t<u} \sigma(X(s)\ ;\ s \leq u)$, $(t \in \mathbb{R}_+)$, $\mathbb{B}^o = (\underline{\underline{B}}_t^o\ ;\ t \in \mathbb{R}_+)$. Si P est une probabilité sur $(D,\underline{\underline{B}}(D))$, il existe un ensemble $T_p \subset \mathbb{R}_+$ contenant 0 et de complémentaire négligeable pour la mesure de Lebesgue, tel que $X(.,t)$ est continue pour tout $t \in T_p$. Par ailleurs, $t \in T_p$ si et seulement si $P(\{w \in D : X(w,t) \neq X(w,t-)\})$. Il en découle que la tribu complétée de $\underline{\underline{B}}^o$ pour P coïncide avec la complétée de $\underline{\underline{B}}(D)$. Notons $\underline{\underline{B}}(P)$ cette tribu et $\mathbb{B}(P) = (\underline{\underline{B}}_t(P)\ ;\ t \in \mathbb{R}_+)$ la filtration $\mathbb{B}^o$ complétée et rendue continue à droite.

Ces notations seront en vigueur tout le long du présent article.

7. L'ESPACE D_o^+

Nous désignerons par $D_o^+ = D_o^+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions croissantes, continues à droite, nulles en 0, définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. A tout élément x de D_o^+ on lui associe une mesure de Stieljes μ_x sur la tribu borélienne $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$ de $\mathbb{R}_+$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, nous notons $\rho^N_{D_o^+}(x,y)$ la distance de Lévy des restrictions de μ_x et μ_y à $([0,N], \underline{\underline{B}}([0,N]))$ $(x,y \in D_o^+)$. Cette métrique est construite comme suit. Si F est un fermé de $[0,N]$, F^ε est l'ensemble des $t \in [0,N]$ pour lesquels la distance à F est inférieure à $\varepsilon (\varepsilon > 0)$. Alors, pour tous $x,y \in D_o^+$, $\rho^N_{D_o^+}(x,y)$ est le plus petit nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\mu_x(F) \leq \mu_y(F^\varepsilon) + \varepsilon$ et $\mu_y(F) \leq \mu_x(F^\varepsilon) + \varepsilon$ pour tout F fermé de $[0,N]$.

Ensuite, on définit

$$\rho_{D_0^+}(x,y) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{\rho^N_{D_0^+}(x,y)}{1+\rho^N_{D_0^+}(x,y)} \ , \ (x,y \in D_0^+)$$

La métrique $\rho_{D_0^+}$ rend l'espace D_0^+ polonais. Par ailleurs une suite $(x_n \ ; n \in \mathbb{N})$ converge vers x dans D_0^+ si et seulement si $(x_n(t) \ ; n \in \mathbb{N})$ converge vers $x(t)$ pour tout point t de continuité de x.

Les ensembles de la forme $\{x \in D_0^+ : x(N) \leq b_N$, pour tout $N \in N^*\}$, où $b_N \ ; N \geq 1)$ est une suite de constantes positives, sont compacts d'après le théorème de Helly. Nous obtenons ainsi le lemme suivant :

8. LEMME

Soit $\pi = (P_n \ ; n \in \mathbb{N})$ une suite de probabilités sur $(D_0^+, \underline{\underline{B}}(D_0^+))$. Pour que π soit tendue il suffit que la condition suivante soit vérifiée : pour tous $\eta > 0$, $N \in \mathbb{N}^+$, il existe $b_N > 0$ tel que poun tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(\{x \in D_0^+ : x(N) > b_N\}) \leq \eta .$$

9. QUELQUES NOTATIONS SUPPLEMENTAIRES

Si $(P_n \ ; n \in \mathbb{N})$, P sont des probabilités sur $(D, \underline{\underline{B}}(D))$, nous noterons $P_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{e} P$ la convergence étroite de $(P_n \ ; n \in \mathbb{N})$ vers P.

Lorsque $(X_n \ ; n \in \mathbb{N})$, X sont des processus à trajectoires dans D définis non nécessairement sur le même espace de probabilité, nous écrirons $X_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque $\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{e} \mathcal{L}(X)$, où la notation $\mathcal{L}(Y)$, pour un processus Y défini sur un espace probabilisé quelconque, représente la loi de Y. De même, nous dirons que la suite $(X_n \ ; n \in \mathbb{N})$ est $(D-, C-, D_0^+-)$ tendue si $(\mathcal{L}(X_n) \ ; n \in \mathbb{N})$ est une suite $(D-, C-, D_0^+-)$ tendue.

II - CONVERGENCE EN LOI DES MARTINGALES LOCALES

II.1 - GENERALITES

Nous dégageons d'abord certaines propriétés générales de la convergence en loi de martingales locales. Dans les paragraphes suivants nous étudierons plus particulièrement la convergence en loi vers des martingales continues.

1. On considère maintenant un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ et une suite $(\mathbb{F}_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ de filtration satisfaisant aux conditions habituelles. En général nous étudierons la convergence en loi de processus définis sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ mais la limite sera définie sur un autre espace probabilisé complet $(\Omega',\underline{\underline{F}}',\mathbb{P}')$ muni d'une filtration $\mathbb{F}'$ satisfaisant aux conditions habituelles (cet espace sera le plus souvent l'un des espaces canoniques D ou C munis des tribus étudiées au n° I.2.6.3), ayant comme probabilité la loi limite).

2. PROPOSITION

Soit $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus telle que chaque X_n soit une martingale sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{F}_n,\mathbb{P})$, $(n\in\mathbb{N})$; soit X une semimartingale sur $(\Omega',\underline{\underline{F}}',\mathbb{F}',\mathbb{P}')$. On désigne par T_X l'ensemble des $t\in\mathbb{R}_+$ pour lesquels les projections canoniques de D sur $\mathbb{R}$ (I.2.6) sont continues hors d'un ensemble négligeable pour la loi de X.

Alors $X_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} X$ si et seulement si

(1) La suite $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue et

(2) $H.X_n(\infty) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} H.X(\infty)$ pour toute fonction en escalier H définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue à gauche, nulle en dehors d'un compact, possédant toutes ses discontinuités dans T_X.

(Les intégrales $H.X_n$ et $H.X$ étant définies comme $H.M_n+H.V_n$, $H.M + H.V$, respectivement, où $M_n\in \underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}]$, $M\in\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F}',\mathbb{P}']$, V_n,V sont à variations finies définis sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{F},\mathbb{P})$ et $(\Omega',\underline{\underline{F}}',\mathbb{F}',\mathbb{P}')$ respectivement, et adaptés).

Démonstration : Il suffit de remarquer que la condition (2) est équivalente à

(2') Pour tout $(t_1,\dots,t_m)\in T_X^m$ et pour tout $(a^1,\dots,a^m)\in\mathbb{R}^m$,

$$\sum_{i=1}^{m} a^i\ X_n(t_i) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^{m} a^i\ X(t_i)$$

D'après le Théorème de CRAMER-WOLD ([1], Théorème 7.7), (2') est à son tour équivalente à

$$(2'') \qquad (X_n(t_1),\dots,X_n(t_m)) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} (X(t_1),\dots,X(t_m))$$

pour tout $(t_1,\dots,t_m) \in T_X^m$.

Or $X_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} X$ si et seulement si (1) et (2") sont vérifiées, d'après [1] Théorème 5.1 et 15.1 (c.f. également [28]). ∎

En utilisant un artifice dû à STROOCK et VARADHAN [40] nous pouvons maintenant donner une condition suffisante pour avoir la compacité étroite relative de la suite $(\mathcal{L}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ de la proposition précédente.

3. <u>PROPOSITION</u>

<u>Soit</u> $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>une suite de processus telle que pour tout</u> $n\in\mathbb{N}$, X_n <u>soit une semimartingale sur</u> $(\Omega,\underline{F},\mathbb{F}_n,\mathbb{P})$.

<u>Supposons que pour tout</u> $N\in\mathbb{N}^*$ <u>et pour tout</u> $\varepsilon,\ \eta>0$,

(1) <u>il existe</u> $a=a(N,\eta)$ 0 <u>tel que</u>

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,N]} |X_n(t)| > a\Big] \le \eta$$

(2) <u>il existe</u> $\delta=(\varepsilon,\eta)>0$ <u>et</u> $n_0\in\mathbb{N}$ <u>tels que pour toute suite</u> $(T_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, <u>où chaque</u> T_n <u>est un</u> $\mathbb{F}_n$<u>-temps d'arrêt borné par</u> N $(n\in\mathbb{N})$, <u>on ait</u>

$$\sup_{n\ge n_0} \mathbb{P}\Bigg[\sup_{\substack{T_n\le s\le T_n+\delta \\ s\in[0,N]}} |X_n(s)-X_n(T_n)|>\varepsilon\Bigg] \le \eta$$

<u>Alors la suite</u> $(\mathcal{L}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>est tendue</u>.

<u>Démonstration</u> : Soient $\varepsilon,\ \eta>0$ et $N\in\mathbb{N}^*$ fixés. L'hypothèse (1) représente la condition (1) du lemme I.2.5. vérifions que l'on a également I.2.5. (2), I.2.5 (3), I.2.5 (4).

I.2.5 (2) découle de (2) ci-dessus en posant $T_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Pour vérifier I.2.5 (3), il suffit de remarquer que, si $\delta_0=\delta(\varepsilon/2,\ \eta/2)$, l'inégalité

$$|X_n(t)-X_n(s)|\le|X_n(t) - X_n(N-\delta_0)|+|X_n(N-\delta_0) - X_n(s)|$$

entraîne (en posant $T_n=N-\delta_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$).

$$\sup_{n \geq n_o} \mathbb{P}[\sup_{N-\delta_o \leq s < t \leq N} | X_n(t)-X_n(s)|>\varepsilon] \leq 2 \sup_{n \geq n_o} \mathbb{P}[\sup_{N-\delta_o \leq s \leq N} | X_n(s)-X_n(N-\delta_o)|>\varepsilon/2].$$

$$\leq \eta$$

Vérifier I.2.5 (4) exige un peu plus de travail. Définissons, par récurrence les suites suivantes de temps d'arrêt, (pour tout $n \in \mathbb{N}$) :

$$T_o^n = 0$$

$$T_m^n = \inf\{t > T_{m-1}^n : |X_n(t)-X_n(T_{m-1}^n)| > \varepsilon/2\}$$
$$(\inf \emptyset = +\infty).$$

Ces suites vérifient $T_{m-1}^n(\omega) < T_m^n(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $T_{m-1}^n(\omega) < \infty$ $(n,m \in \mathbb{N})$, et $\nu_n(t) = \inf\{m \in \mathbb{N} : T_{m-1}^n \leq t < T_m^n\}$ définit pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$, un $(\underline{F}_{n,T_m^n} ; m \in \mathbb{N})$-temps d'arrêt.

Posons,

$$A(N,n,u,\varepsilon) = \{\omega \in \Omega : \sup_{\substack{t_1<t_2 \leq N \\ |t_1-t_2|<u}} \sup_{t \in [t_1,t_2]} \min\{|X_n(t)-X_n(t_1)|,|X_n(t)-X_n(t_2)| > \varepsilon\}$$

$(u > 0$, $n \in \mathbb{N}$; N et ε étant fixés depuis le début de la démonstration).

Nous devons montrer que

$$\text{(3)} \qquad \lim_{u \downarrow 0} \overline{\lim_{n \uparrow \infty}} \mathbb{P}(A(N,n,u,\varepsilon)) = 0$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et soit $\omega \in A(N,n,u,\varepsilon)$. Alors il existe $T(\omega) \in [t_1,t_2]$ tel que $|X_n(T(\omega))-X_n(t_1)|>\varepsilon$ et $|X_n(T(\omega))-X_n(t_2)|>\varepsilon$

nous avons alors

$$\varepsilon<|X_n(T(\omega))-X_n(t_1)|\leq|X_n(T(\omega))-X_n(T^n_{\nu_n(t_1)-1}(\omega))|+|X_n(t_1)-X_n(T^n_{\nu_n(t_1)-1}(\omega))|$$
$$\leq|X_n(T(\omega))-X_n(T^n_{\nu_n(t_1)-1}(\omega)| + \varepsilon/2$$

d'où l'on déduit que

$$t_1 < T^n_{\nu_n(t_1)}(\omega) \leq T(\omega) \ , \text{ et } \ T^n_{\nu_n(t_1)}(\omega) \leq T^n_{\nu(T(\omega))-1}(\omega).$$

D'autre part

$$\varepsilon<|X_n(T(\omega))-X_n(t_2)|\leq|X_n(T(\omega))-X_n(T^n_{\nu_n(T)-1}(\omega))|+|X_n(T^n_{\nu_n(T)-1}(\omega))-X_n(t_2)|$$

$$\leq \varepsilon/2 + |X_n(T^n_{\nu_n(T)-1}(\omega)) -X_n(t_2)|$$

D'où l'on déduit que

$$T(\omega) < T^n_{\nu_n(T)}(\omega) \leq t_2$$

Par conséquent

$$(4) \qquad T^n_{\nu_n(T)}(\omega) - T^n_{\nu_n(T)-1}(\omega) < u$$

Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\Delta^N_n = \inf\{T^n_m-T^n_{m-1} : T^n_{m-1} < N\}$$

Alors, (4) entraîne que

$$A(N,n,u,\varepsilon) \subset \{\omega \in \Omega : \Delta^N_n(\omega) < u\}$$

Pour terminer la démonstration, montrons que

$$(5) \qquad \lim_{u\downarrow 0}\ \overline{\lim_{n}}\ \mathbb{P}[\Delta^N_n < u] = 0$$

Remarquons que si $E(n,m,u) = \{\omega \in \Omega : T^n_m(\omega) - T^n_{m-1}(\omega) < u,\ T^n_{m-1}(\omega) < N\}$, $((n,m) \in \mathbb{N}^2,\ u \in \mathbb{R}_+)$ nous avons :

$$\mathbb{P}[E(n,m,u)] \leq \mathbb{P}[\sup_{T^n_{m-1}\wedge N\leq t\leq T^n_{m-1}\wedge N+u} |X_n(t) - X_n(T^n_{m-1})|>\varepsilon/2\ ]$$

Par conséquent d'après (2)

$$(6) \qquad \lim_{u\downarrow 0}\ \overline{\lim_{n}}\ \mathbb{P}[E(n,m,u)] = 0 \qquad (m\in\mathbb{N}).$$

Or, (7)

$$\mathbb{P}[\Delta^N_n < u\ ] = \mathbb{P}[\bigcup_{m=1}^{\infty} E(n,m,u)]$$

Fixons $k\in\mathbb{N}$. Nous avons

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} E(n,m,u) = (\{\bigcup_{m=1}^{\infty} E(n,m,u)\} \cap \{T^n_k < N\}) \cup$$

$$\cup (\{\bigcup_{m=1}^{\infty} E(n,m,u)\} \cap \{T^n_k \geq N\})$$

D'où

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} E(n,m,u) \subset \{T_k^n < N\} \cup \left(\bigcup_{m=1}^{k} E(n,m,u)\right)$$

et

$$\mathbb{P}[\Delta_n^N < u] \leq \mathbb{P}[T_k^n < N] + \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{k} E(n,m,u)\right)$$

c'est-à-dire, en vertu de (6),

(8) $\lim\limits_{u \downarrow 0} \overline{\lim\limits_{n}}\, \mathbb{P}[\Delta_n^N < u] \leq \overline{\lim\limits_{n}}\, \mathbb{P}[T_k^n < N]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La démonstration sera terminée si nous montrons que nous pouvons passer à la limite en k au second membre de (8) et que cette limite est 0.

Nous avons, en conditionnant par $\{T_k^n < N\}$,

(9) $$N > \mathbb{E}[T_k^n | T_k^n < N] \geq \sum_{1 \leq r \leq k} \mathbb{E}[T_r^n - T_{r-1}^n | T_k^n < N]$$

$$\geq \delta \sum_{1 \leq r \leq k} \mathbb{P}[T_r^n - T_{r-1}^n \geq \delta | T_k^n < N]$$

pour tout $\delta > 0$

Soit $\eta > 0$, d'après (6) nous pouvons choisir $\delta_0 > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$\mathbb{P}[E(n,r,\delta)] < \eta/2$ pour tous $n \geq n_0$, $0 < \delta \leq \delta_0$ et tout $r \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, (9) entraîne :

(10) $$N \geq (k-1)\, \delta\left(1 - \frac{\eta/2}{\mathbb{P}[T_k^n < N]}\right)$$

Choisissons $k_0 > 1$ tel que $k_0 - 1 > [\frac{2N}{\delta_0}]$

Alors

(11) $\sup\limits_{n \geq n_0} \mathbb{P}[T_k^n < N] < \eta$ pour tout $k \geq k_0$. ∎

4. REMARQUES

1) La proposition précédente reste valable si l'on remplace la phrase "pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n soit une semi-martingale sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{F}_n,\mathbb{P})$" par "pour tout $n\in\mathbb{N}$, X_n soit un processus à trajectoires c.à.d.l.à.g. $\mathbb{F}_n$-adapté".

2) Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{F}_n=\mathbb{F}$ où $\mathbb{F}$ vérifie les conditions habituelles, on voit aisément que la proposition précédente reste valable si l'on remplace la condition (2) par

(2') il existe $\delta = \delta(\varepsilon,\eta) > 0$ tel que pour tout T temps d'arrêt borné de $\mathbb{F}$, on ait

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left[\sup_{T \leq s \leq T+\delta} |X_n(s)-X_n(T)|>\varepsilon\right] \leq \eta$$

Le lemme suivant sera souvent utilisé par la suite.

5. LEMME

Soit $(X_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ une suite de processus sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ telle que chaque X soit une $\mathbb{F}_n$-surmartingale (resp. $\mathbb{F}_n$-martingale).

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) $\mathcal{L}(X_n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{e} P$;

(2) Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la suite $(X_n(t) \; ; \; n\in\mathbb{N})$ est équi-intégrable.

Alors , le processus canonique X sur $(D,\underline{\underline{B}}(P),P)$ est une $\mathbb{B}(P)$-surmartingale (resp. $\mathbb{B}(P)$-martingale).

Démonstration : Montrons le lemme pour les surmartingales. D'après la définition de la filtration $\mathbb{B}(P)$, il suffira de montrer que pour tout $s,t\in\mathbb{R}_+$, $s<t$, pour toute partition $0=u_0 < u_1 < \ldots < u_m=s$ et toute fonction continue bornée h sur $\mathbb{R}^{m+1}$,

(3) $$\int_D h(X(u_0),\ldots,X(u_m))X(t)dP \leq \int_D h(X(u_0),\ldots,X(u_m))X(s)dP$$

Notons T_P l'ensemble des $u \in \mathbb{R}_+$ pour lesquels $X(.,u)$ est P-p.s.

continue.T_P est dense dans $\mathbb{R}_+$ et contient 0.

Or,pour tout $u\in\mathbb{R}_+$,$X(u)$ est intégrable par rapport à P,car si$(u_k\ ;\ k\in\mathbb{N})$ est une suite de T_P telle que $u_k\downarrow u$ lorsque $k\uparrow\infty$,

$$\int|X(u)|dP\leq \liminf_k \int|X(u_k)|\,dP$$

Mais (1) et (2) entraînent que pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\int|X(u_k)|\,dP=\lim_n\int|X(u_k)|\,dP_n$$

L'intégrabilité de X par rapport à P entraîne,en particulier,qu'il suffit de prouver (3) pour $u_i,s,t\in T_P$(le cas général en découle par une application élémentaire du Théorème de la Convergence Dominée de Lebesgue).

Or,(3) est satisfaite par toutes les probabilités P_n,où $P_n=\mathcal{L}(X_n)$.Pour terminer,montrons que l'on a

$$(4)\quad \int h(X(u_0),\ldots,X(u_m))X(t)dP_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \int h(X(u_0),\ldots,X(u_m))X(t)dP$$

Soit $N\in\mathbb{N}$,posons $Y_N(t)=[(-N)\vee X(t)]\wedge N$.La fonction $h(X(u_0),\ldots,X(u_m))Y_N(t)$ est bornée et P-p.s. continue,l'hypothèse (1) implique

$$(5)\quad \int h(X(u_0),\ldots,X(u_m))Y_N(t)dP_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \int h(X(u_0),\ldots,X(u_m))Y_N(t)dP$$

Finalement,l'hypothèse d'équi-intégrabilité nous permet de conclure en obtenant (4) à partir de (5) par passage à la limite en N.

II.2 - INEGALITES FONDAMENTALES.

Nous allons maintenant déduire quelques inégalités fondamentales qui nous permettrons par la suite d'étudier la compacité étroite relative des lois des martingales.Nous nous plaçons toujours sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ satisfaisant aux conditions habituelles.

Le résultat suivant a été démontré par LENGLART dans [11] , [12] .

1. PROPOSITION

Soit X un processus $\mathbb{F}$-adapté, positif, à trajectoires dans D et Y un processus croissant, nul en 0, à trajectoires continues à droite et $\mathbb{F}$-adaptée, tels que

(1) $\mathbb{E}(X(T)) \leq \mathbb{E}(Y(T))$ pour tout temps d'arrêt T fini de $\mathbb{F}$. Alors, pour tout temps d'arrêt T de $\mathbb{F}$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(2) \qquad \mathbb{P}(\sup_{s \leq T} X(s) \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(Y(T)).$$

En outre, si Y est $\mathbb{F}$-prévisible, on a pour tout temps d'arrêt T, pour tous $\varepsilon, \eta > 0$

$$(3) \qquad \mathbb{P}(\sup_{s \leq T} X(s) \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(Y(T) \wedge \eta) + \mathbb{P}(Y(t) > \eta)$$

Démonstration : Voir [12] théorème 1 et le lemme qui le précède. Dans [12] Lenglart démontre (2) sous l'hypothèse Y prévisible, le lecteur vérifiera que cette hypothèse n'intervient que dans la démonstration de (3), (2) étant entraînée par la seule condition (1) (c'est d'ailleurs sous cette forme que (2) est obtenue dans la Thèse de Lenglart [11]).

2. PROPOSITION

Soit X un processus $\mathbb{F}$-adapté, positif, à trajectoires dans D et Y un processus croissant nul en 0, à trajectoires continues à droite, $\mathbb{F}$-adapté, et tel que $|\Delta Y(t)| \leq c$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+ (c > 0)$.

Supposons que X et Y vérifient l'hypothèse 1.(1). Alors pour tous $\varepsilon, \eta > 0$ et tout temps d'arrêt T fini de $\mathbb{F}$,

$$(2) \qquad \mathbb{P}(\sup_{t \leq T} X(t) > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(Y(T) \wedge (\eta + c)) + \mathbb{P}(Y(T) > \eta)$$

Démonstration : La propriété énoncée n'est qu'une légère modification de la proposition précédente et nous suivons le même schéma de démonstration.

D'après 1. (2), si $\varepsilon > 0$ est donné et T est un temps d'arrêt fini quelconque.

$$\mathbb{P}(\sup_{t \leq T} X(t) \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(Y(T))$$

Or, si η est un autre nombre strictement positif,

$$\mathbb{P}(\sup_{t\leq T} X(t)>\varepsilon) = \mathbb{P}(\sup_{t\leq T} X(t)>\varepsilon,\ Y(T)\leq \eta) + \mathbb{P}(\sup_{t\leq T} X(t)>\varepsilon,\ Y(T)>\eta)$$

$$\leq \mathbb{P}(I_{|Y(T)\leq\eta|} \sup_{t\leq T} X(t)>\varepsilon) + \mathbb{P}(Y(T)>\eta)$$

Soit $S=\inf\{t>0 : Y(t)>\eta\}$ ($\inf \emptyset=+\infty$).

$S\wedge T$ est un temps d'arrêt fini et par ailleurs

$$I_{[Y(T)\leq\eta]} \sup_{t\leq T} X(t) \leq \sup_{t\leq T\wedge S} X(t)$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(\sup_{t\leq T\wedge S} X(t)>\varepsilon)\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(Y(T\wedge S))$$

Or,

$$Y(T\wedge S)\leq Y(T)\wedge(\eta+c)$$

Alors,

$$\mathbb{P}(\sup_{t\leq T} X(t)>\varepsilon)\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(Y(T)\wedge(\eta+c)) + \mathbb{P}(Y(T)>\eta). \blacksquare$$

3. <u>REMARQUE</u>

Soit $M\in \underline{\underline{M}}_0^{2,\,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et posons $M^*(t) = \sup_{s\leq t}|M(s)|$, $t\in\mathbb{R}_+$. Si T est un temps d'arrêt fini de $\mathbb{F}$, nous avons que

$$\mathbb{E}(M(T)^2)\leq \mathbb{E}([M,M](T)) = \mathbb{E}(<M,M>(T)) \leq \mathbb{E}(M^*(T)^2)$$

Le proposition 1, entraîne alors que pour tout temps d'arrêt S de $\mathbb{F}$, et pour tout $\varepsilon,\eta>0$,

(1) $\mathbb{P}(M^*(S)>\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(<M,M>(S)\wedge\eta) + \mathbb{P}(<M,M>(S)>\eta)$

(2) $\mathbb{P}[M,M](S)>\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(<M,M>(S)\wedge\eta) + \mathbb{P}(<M,M>(S)>\eta)$

Si $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|\Delta M(t)|\leq c$, où c est une constante positive, alors $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|\Delta M^*(t)|\leq c$. Soit $\eta>0$ et $T_\eta = \inf\{t>0 : M^*(t)>\eta\}$. ($\inf\emptyset = +\infty$).

Alors, sur $[[0,T_\eta]]$, le processus M^* est borné par $\eta+c$ et $|\Delta M^{*2}(T)|\leq 2c(\eta+c)$ pour tout temps d'arrêt $T\leq T_\eta$.

Nous avons ainsi que pour tout $\varepsilon>0$ et tout temps d'arrêt T fini de $\mathbb{F}$,

$$\mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T)>\varepsilon) = \mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T)>\varepsilon,\ T\leq T_\eta) + \mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T)>\varepsilon\ ,\ T > T_\eta)$$

$$\leq \mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T) > \varepsilon\ ,\ T\leq T_\eta) + \mathbb{P}(T > T_\eta)$$

$$\leq \mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T) > \varepsilon,\ T\leq T_\eta) + \mathbb{P}(M^*(T) > \eta)$$

(car $\mathbb{P}(T > T_\eta) = \mathbb{P}(M^*(T) > \eta)$)

Or, d'après la Proposition 2,

$$\mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T) > \varepsilon,\ T\leq T_\eta)\leq \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbb{E}(M^*(T)^2 \wedge \{2c(\eta+c) + \eta^2\}) + \mathbb{P}(M^*(T) > \eta)$$

Par conséquent,

(3) $\mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T) > \varepsilon)\leq \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbb{E}(M^*(T)^2 \wedge \{2c(\eta+c) + \eta^2\}) + 2\mathbb{P}(M^*(T) > \eta)$

4. PROPOSITION

Soit M un élément de $\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$. Alors, pour tous T,ε,ζ,μ strictement positifs, pour tout λ,ξ positifs,

$$(1)\quad \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T} |M(t)| \geq 2\varepsilon) \leq 2\exp(-\lambda\varepsilon+ \emptyset_{2\xi}(\lambda)\zeta)+\mathbb{P}(\langle \underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi\rangle(T) \geq \zeta)$$

$$+ \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T} |\overline{M}^\xi(t)| \geq \varepsilon)$$

$$\leq 2\exp(-\lambda\varepsilon+ \emptyset_{2\xi}(\lambda)\zeta) + \mathbb{P}(\langle \underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi\rangle(T) \geq \zeta) + \mathbb{P}(\langle \overline{M}^\xi, \overline{M}^\xi\rangle(T) \geq \mu)$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathbb{E}(\langle \overline{M}^\xi,\overline{M}^\xi\rangle(T)\wedge \mu)$$

(où $\emptyset_{2\xi}$ est la fonction définie dans le lemme I-1. 4).

En particulier, si $|\Delta M(t)| \leq \xi$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, alors les deux inégalités suivantes sont vérifiées

$$(2)\quad \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T} |M(t)|\geq\varepsilon)\leq 2\exp(-\lambda\varepsilon +\emptyset_\xi(\lambda)\zeta) + \mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T) \geq \zeta)$$

$$(3)\quad \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T} |M(t)| \geq \varepsilon(1+\eta(3\,\tfrac{\varepsilon}{\zeta}))) \leq 2\exp(-\frac{\varepsilon^2}{2\zeta}) + \mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T) \geq \zeta)$$

(où η est la fonction réelle définie par $\eta(t) = t^{-2}(e^t-1-t-t^2/2)$, $t\in\mathbb{R}$).

Démonstration : Soient $T,\varepsilon,\ \zeta\in\mathbb{R}_+^+$: $\lambda,\xi\in\mathbb{R}_+$. D'après le lemme I-1.3, $M=\underline{M}^\xi+\overline{M}^\xi$ et

(4) $$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|M(t)|\ge 2\varepsilon)\le\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|\underline{M}^\xi(t)|\ge\varepsilon)+\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|\overline{M}^\xi(t)|\ge\varepsilon)$$

Etudions le premier terme du membre droit de cette inégalité

$$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|\underline{M}^\xi(t)|\ge\varepsilon)=\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|\underline{M}^\xi(t)|\ge\varepsilon,<\underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi>(T)\ge\zeta)+$$
$$+\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|\underline{M}^\xi(t)|\ge\varepsilon,<\underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi>(T)<\zeta)$$

Or,

(5) $$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|\underline{M}^\xi(t)|\ge\varepsilon,<\underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi>(T)\ge\zeta)\le\mathbb{P}(<\underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi>(T)\ge\zeta)$$

Pour majorer l'autre terme, introduisons la surmartingale $X=\mathcal{E}^\lambda_{2\xi}[\underline{M}^\xi]$

(*) (voir I.1.4) et étudions d'abord $\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}\underline{M}^\xi(t)\ge\varepsilon,<\underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi>(T)<\zeta)$.

$$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}\underline{M}^\xi(t)\ge\varepsilon,<\underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi>(T)<\zeta)=\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}X(t)\ge\exp(\lambda\varepsilon-\emptyset_{2\zeta}(\lambda)\,\zeta),<\underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi>(T)<\zeta)$$
$$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}X(t)\ge\exp(\lambda\varepsilon-\emptyset_{2\xi}(\lambda)\,\zeta))$$

Or X est une surmartingale positive telle que $X(o)=1$, donc $\mathbb{E}(X(T))\le 1$.

En appliquant l'inégalité de Doob on obtient

$$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}\underline{M}^\xi(t)\ge\varepsilon,<\underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi>(T)<\zeta)\le\exp(-\lambda\varepsilon+\emptyset_{2\xi}(\lambda)\zeta)$$

En répétant l'argument précédent pour $-\underline{M}^\xi$, il résulte

(6) $$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|\underline{M}^\xi(t)|\ge\varepsilon,<\underline{M}^\xi,\underline{M}^\xi>(T)<\zeta)\le 2\exp(-\lambda\varepsilon+\emptyset_{2\xi}(\lambda)\zeta)$$

De (4), (5) et (6) on déduit la première inégalité de (1). Pour la deuxième, il suffit d'appliquer la remarque 3 (inégalité (1)) à la martingale locale $\overline{M}^\xi$ et nous obtenons

(7) $$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|\overline{M}^\xi(t)|\ge\varepsilon)\le\mathbb{P}(<\overline{M}^\xi,\overline{M}^\xi>(T)\ge\mu)+\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}(<\overline{M}^\xi,\overline{M}^\xi>(T)\wedge\mu)$$

(*) On rappelle que, en général, $|\Delta\,\underline{M}^\xi(t)|\le 2\xi$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.

Lorsque $|\Delta M(t)| \leq \xi$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors $M = \underline{M}^{\xi}, \overline{M}^{\xi} = 0$ et l'inégalité (2) s'obtient de la même manière que (1) en introduisant la surmartingale $E_{\xi}^{\lambda}[M]$. Pour montrer (3), il suffit d'utiliser (2) en remplaçant ε par $\varepsilon(1+\eta(3\cdot\frac{\xi\varepsilon}{\zeta}))$ et λ par $\frac{\varepsilon}{\zeta}$. ∎

5. REMARQUES :

1)Si $M \in \underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, alors pour tous λ, $\xi \in \mathbb{R}_+$, $T, \varepsilon, \zeta > 0$.

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq T} |M(t)| \geq \varepsilon) \leq 2\exp(-\lambda\varepsilon + \emptyset_{\xi}(\lambda)\zeta) + \mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T) \geq \zeta),$$

d'après 3(2). Si l'on fait tendre ξ vers 0, $\emptyset_{\xi}(\lambda)$ tend vers $\frac{\lambda^2}{2}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Par conséquent

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq T} |M(t)| \geq \varepsilon) \leq 2\exp(-\lambda\varepsilon + \frac{\lambda^2}{2}\zeta) + \mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T) \geq \zeta)$$

Or, le minimum de $\exp(-\lambda\varepsilon + \frac{\lambda^2}{2}\zeta)$ est atteint pour $\lambda_0 = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ et il s'en suit

$$(1) \qquad \mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq T} |M(t)| \geq \varepsilon) \leq 2\exp(-\frac{\varepsilon^2}{2\zeta}) + \mathbb{P}(\langle M,M\rangle(T) \geq \zeta)$$

2) Les inégalités 3.(3) et (1) ci-dessus ont été annoncées dans un cas particulier dans [32], lorsque le processus $\langle M,M\rangle$ est dominé par une fonction croissante g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

II.3 - CRITERES DE COMPACITE ETROITE RELATIVE

Nous considérons un espace probabilité complet $(\Omega, \underline{F}, \mathbb{P})$ et une suite $(\mathbb{F}_n ; n \in \mathbb{N})$ de filtrations satisfaisant aux conditions habituelles.

1. PROPOSITION

Soit $(M_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite de processus telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}]$. Supposons que pour tous ε, $\eta > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$,

1) il existe $a > 0$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[\langle M_n,M_n\rangle(N) > a] \leq \eta$$

2) existent $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ tels que pour toute suite $(T_n ; n \in \mathbb{N})$, où chaque T_n est un $\mathbb{F}_n$-temps d'arrêt borné par N $(n \in \mathbb{N})$, on ait

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbb{P}[\langle M_n,M_n\rangle(T_n+\delta) - \langle M_n,M_n\rangle(T_n) > \varepsilon] \leq \eta$$

Alors $(<M_n,M_n> \; ; n\in\mathbb{N})$ $([M_n,M_n] \; ; n\in\mathbb{N}$ et $(M_n \; ; n\in\mathbb{N})$ sont D-tendues.

Démonstration : $(<M_n,M_n> \; ; n\in\mathbb{N})$ est D-tendue par application directe de la proposition II-1.3. Nous allons appliquer la même proposition à $(M_n \; ; n\in\mathbb{N})$ et $([M_n,M_n] ; n\in\mathbb{N})$.

Soit $(T_n, n\in\mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires bornées, telle que chaque T_n soit un $\mathbb{F}_n$-temps d'arrêt. Posons $L_n(t) = M_n(T_n+t) - M_n(T_n)$; $\underline{\underline{G}}_{n,t} = \underline{\underline{F}}_{n,T_n+t}$, $(n\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{R}_+)$. $L_n\in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{G}_n,\mathbb{P}]$, où $\mathbb{G}_n = (\underline{\underline{G}}_{n,t} \; ; t\in\mathbb{R}_+)$ et $<L_n,L_n>(t) = <M_n,M_n>(T_n+t) - <M_n,M_n>(T_n)$, $[L_n,L_n](t)=[M_n,M_n](T_n+t)-[M_n,M_n](T_n)$, $(n\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{R}_+)$.

Appliquons d'abord la remarque II-2.3 à M_n et $[M_n,M_n]$, $(n\in\mathbb{N})$. Nous avons les inégalités suivantes pour tous $n\in\mathbb{N}$, $N\in\mathbb{N}^*$, $a,b>0$.

(3) $\mathbb{P}(\sup\limits_{0\le t\le N} |M_n(t)|>b) \le \frac{1}{b^2}\mathbb{E}(<M_n,M_n>(N)\wedge a) + \mathbb{P}(<M_n,M_n>(N)> a)$

(4) $\mathbb{P}([M_n,M_n](N) > b) \le \frac{1}{b}\mathbb{E}(<M_n,M_n>(N)\wedge a) + \mathbb{P}(<M_n,\dot{M}_n>(N) > a)$

Soit $\eta > 0$, choisissons $a>0$, d'après (1), tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(<M_n,M_n>(N) > \varepsilon) \le \eta/2$$

et choisissons $b_1,b_2>0$ tels que $a/b_1^2 \le \eta/2$ et $a/b_2 \le \eta/2$.

De (3) et (4) on déduit alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\sup_{0\le t\le N} |M_n(t)| > b_1) \le \eta \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}([M_n,M_n](N)> b_2) \le \eta .$$

C'est la condition (1) de la Proposition II.1.3 pour les suites $(M_n \; ; n\in\mathbb{N})$ et $([M_n,M_n] ; n\in\mathbb{N})$. Montrons que la condition (2) de II.1.3 est également vérifiée. D'après l'hypothèse (2) ci-dessus, si $\varepsilon, \eta > 0$ sont donnés, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ et $\delta > 0$ tels que si $\zeta_1/\varepsilon^2 \le \eta/2$

(5) $$\sup_{n\ge n_0} \mathbb{P}\left(<L_n,L_n>(\delta) \ge \zeta_1\right) \le \eta/2$$

Appliquons maintenant la remarque II.2.3 à $L_n(n\ge n_0)$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le\delta} |L_n(t)| >\varepsilon) &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}(<L_n,L_n>(\delta)\wedge\zeta_1) + \mathbb{P}(<L_n,L_n>(\delta) \ge \zeta_1)\\ &\le \zeta/\varepsilon^2 + \eta/2\\ &\le \eta\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbb{P}\Big(\sup_{\substack{T_n \leq s \leq T_n+\delta \\ s \in [0,N]}} |M_n(s) - M_n(T_n)| > \varepsilon \Big) \leq \eta$$

De même, si $\zeta_2/\varepsilon \leq \eta/2$, existent $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ tels que l'inégalité (5) soit vérifiée en remplaçant ζ_1 par ζ_2. Il s'en suit, d'après II.2.3(2), que pour tout $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}([M_n,M_n](T_n+\delta) - [M_n,M_n](T_n) > \varepsilon) = \mathbb{P}([L_n,L_n](\delta) > \varepsilon)$$

$$\leq \zeta_2/\varepsilon + \eta/2 \leq \eta$$

La proposition est ainsi démontrée. ∎

2. THEOREME

<u>Soit</u> $(M_n ; n \in \mathbb{N})$ <u>une suite de processus telle que pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$, $M_n \in \underline{\underline{M}}_0^{2,\text{loc}}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}]$.

<u>Si</u> $(\langle M_n,M_n\rangle ; n \in \mathbb{N})$ <u>est C-tendue</u> (*), <u>alors</u> $(M_n ; n \in \mathbb{N})$ <u>et</u> $([M_n , M_n] ; n \in \mathbb{N})$ <u>sont</u> D-<u>tendues</u>.

<u>Démonstration</u> : $(\langle M_n,M_n\rangle ; n \in \mathbb{N})$ est en particulier D-tendue et d'après la Proposition I.2.4, pour tous $\eta > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $a > 0$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\langle M_n,M_n\rangle(N) > a) \leq \eta.$$

Nous avons ainsi l'hypothèse (1) de la proposition précédente.

D'autre part, si $(T_n ; n \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires bornées telle que chaque T_n soit un $\mathbb{F}_n$-temps d'arrêt, $T_n \leq N$, $(n \in \mathbb{N})$ alors pour tous $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$, , $\eta > 0$:

(1) $\mathbb{P}(\langle M_n,M_n\rangle(T_n+\delta) - \langle M_n,M_n\rangle(T_n) > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(W_C^{2N}(\langle M_n,M_n\rangle) > \varepsilon)$,

pour tout $\delta \in]0,N[$.

Mais puisque $(\langle M_n,M_n\rangle ; n \in \mathbb{N})$ est C-tendue, existent $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\delta \in]0,N[$ tels que

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbb{P}(W_C^{2N}(\langle M_n,M_n\rangle) > \varepsilon) \leq \eta/2.$$

(*) Cette hypothèse n'entraîne pas la condinuité de $\langle M_n,M_n\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, elle exprime seulement la situation envisagée dans la Remarque I.2.6.2).

D'où l'on déduit à l'aide de l'inégalité (1) la condition (2) de la proposition précédente. ∎

3. COROLLAIRE

Soit $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $M_n\in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}]$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta M_n(t)| \leq c_n$, où c_n est une constante positive.

Si $(<M_n,M_n>;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue et $c_n\downarrow 0$ lorsque $n\uparrow\infty$, alors $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $([M_n,M_n];\ n\in\mathbb{N})$ sont C-tendues.

Démonstration : D'après le Théorème précédent, $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $([M_n,M_n],\ n\in\mathbb{N})$ sont D-tendues. D'autre part, $|\Delta[M_n,M_n](t)| \leq c_n^2$ $(n\in\mathbb{N},\ t\in\mathbb{R}_+)$ d'après la définition de $[.,.]$ et nous aurons les inégalités suivantes (voir Remarque I.2.6.1)) :

(1) $$W_C^N(M_n,\delta) \leq 2W_D^N(M_n,\delta) + c_n$$

(2) $$W_C^N([M_n,M_n],\delta) \leq 2W_D^N([M_n,M_n],\delta) + c_n^2,$$

pour tout $\delta > 0$, $n\in\mathbb{N}$, $N\in\mathbb{N}^*$.

Puisque $M_n(0) = 0 = [M_n,M_n](0)$, $(n\in\mathbb{N})$, la condition (1) de la Proposition I.2.2 (cf. Remarque I.2.6.2)) est vérifiée par les lois de $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$. Pour obtenir la condition (2) de I.2.2., il suffit d'appliquer la Proposition I.2.4 et les inégalités (1) et (2) ci-dessus. ∎

4. COROLLAIRE

Soit $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $M_n\in\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et $|<M_n,M_n>(t) - <M_n,M_n>(s)| \leq g(|t-s|)$, $(t,s\ \mathbb{R}_+)$, où g est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, croissante et $g(u)\downarrow 0$ quand $u\downarrow 0$.

Alors $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont D-tendues. Si en outre $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta M_n(t)| \leq c_n$, $(n\in\mathbb{N})$, où $(c_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est une suite de constantes décroissant vers zéro lorsque $n\uparrow\infty$, alors $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $([M_n,M_n];\ n\in\mathbb{N})$ sont C-tendues et si P est un point d'adhérence de $(\mathcal{L}(M_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$, alors P est la loi d'une martingale (locale) à trajectoires continues.

Démonstration : La condition imposée à la suite $(<M_n,M_n>\ ;\ n\in\mathbb{N})$ entraîne l'équicontinuité de cette suite et elle est en particulier C-tendue. On applique alors le Théorème 2, puis le corollaire 3 lorsque $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta M_n(t)| \leq c_n$ $(n\in\mathbb{N})$. Supposons cette dernière condition vérifiée et soit P un pointd'adhérence de $(\mathcal{L}(M_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$. P est une probabilité sur $(D,\underline{\underline{B}}(D))$ portée par C. Considérons l'espace probabilisé filtré complet $(D,\ \underline{\underline{B}}(P),\ \mathbb{B}(P),P)$ construit dans la Remarque I.2.6.3), et soit $X = (X(t)\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$ le processus canonique $X(w,t) = w(t)$, pour tous $w\in D$, $t\in\mathbb{R}_+$. X est un processus à trajectoires continues P-p.s. Nous montrerons qu'il est une $(\mathbb{B}(P),\ P)$-martingale.

Pour tous $n\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{R}_+$, $E^{\lambda}_{c_o}[M_n]$ est une surmartingale positive (c.f. Lemme I.1.4), donc pour tout $t\in\mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}(E^{\lambda}_{c_o}[M_n](t)) \leq 1, \text{ car } E^{\lambda}_{c_o}[M_n](o) = 1$$

et l'hypothèse faite sur les processus $<M_n,M_n>$ entraîne $<M_n,M_n>(t) \leq g(t)$ et

(1) $\quad \mathbb{E}(\exp(\lambda M_n(t))) \leq \exp(\emptyset_{c_o}(\lambda)\ g(t)),\ (\lambda,t\in\mathbb{R}_+,\ n\in\mathbb{N})$

L'inégalité (1) entraîne l'équi-intégrabilité de la suite $(M_n(t)\ ;\ n\in\mathbb{N})$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$) et d'autre part, les processus M_n seront des <u>martingales</u> (non seulement des martingales locales localement de carré intégrable). Soit $(M_{n_k}\ ;\ k\in\mathbb{N})$ une sous-suite de $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ telle que $\mathcal{L}(M_{n_k}) \xrightarrow[k\uparrow\infty]{e} P$. Il suffit d'appliquer le lemme II.1.5 à cette sous-suite pour conclure. ∎

5. <u>DEFINITION</u>

Soient $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(Y_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ deux suites de processus à trajectoires dans D, définis sur le même espace probabilisé $(\Omega,\underline{F},\mathbb{P})$. Nous dirons que ces suites sont C-<u>contigües</u> si pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, la suite $(\rho^N_C(X_n,Y_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge vers zéro en probabilité. (*)

Par ailleurs nous noterons la convergence en probabilité (selon $\mathbb{P}$) à l'aide des symboles " $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ " ou "$\mathbb{P}$-lim".

Remarquons que si $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(Y_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües et $X_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} X$ où X est un processus à trajectoires dans D (ou C) alors $Y_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} X$ (c.f. [1], Théorème 4.1).

(*) $\rho^N_C(x,y) = \sup_{t\in[0,N]} |x(t)-y(t)|$, $((x,y)\in D)$,

6. COROLLAIRE

Soit $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $M_n\in \underline{\underline{M}}_0^{2,\mathrm{loc}}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}]$. Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

1) Il existe une suite $(c_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ de constantes positives telle que $c_n\downarrow 0$ lorsque $n\uparrow\infty$ et

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : \text{il existe } t\in\mathbb{R}_+ \text{ tel que } |\Delta M_n(t)| > c_n\}) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$$

2) Il existe une fonction g de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, croissante, telle que $g(u)\downarrow 0$ quand $u\downarrow 0$ et

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : \text{existent } s,t\in\mathbb{R}_+ \text{ tels que } |\langle M_n,M_n\rangle(t) - \langle M_n,M_n\rangle(s)| > g(|t-s|)\}) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$$

Alors $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue et si P est un point d'adhérence de $(\mathcal{L}(M_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$, alors P est la loi d'une martingale continue.

Démonstration : L'hypothèse (2) entraîne en particulier que pour tous $N\in\mathbb{N}^*$, $\delta>0$,

$$\mathbb{P}(W_C^N(\langle M_n,M_n\rangle,\delta) > g(\delta)) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$$

et puisque $g(\delta)\downarrow 0$ si $\delta\downarrow 0$, on déduit que $(\langle M_n,M_n\rangle;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue et par conséquent $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue.

Soit $S_n = \inf\{t>0 : |\Delta M_n(t)| > c_n\}$ $(\inf\emptyset = +\infty)$, $n\in\mathbb{N}$. S_n est un $\mathbf{F}_n$-temps d'arrêt. Sur l'intervalle stochastique $[\![0,S_n[\![$, les sauts de M_n sont d'amplitude inférieure à $c_n (n\in\mathbb{N})$ et nous avons pour tous ε, $\delta>0$, $N\in\mathbb{N}^*$, $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(W_C^N(M_n,\delta)>\varepsilon) = \mathbb{P}(W_C^N(M_n,\delta)>\varepsilon,\ S_n\le N) + \mathbb{P}(W_C^N(M_n,\delta)>\varepsilon,\ S_n>N)$$

$$\le \mathbb{P}(S_n\le N) + \mathbb{P}(2W_D^N(M_n,\delta) + c_n > \varepsilon)$$

Puisque $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \mathbb{P}(S_n\le N) = 0$ et $\lim\limits_{n\uparrow\infty} c_n = 0$, l'inégalité précédente entraîne que $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue d'après les Propositions I.2.2, I.2.4 (cf. Remarque I.2.6).

La condition (2) entraîne également

(3) $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega$: il existe $t\in\mathbb{R}_+$ tel que $<M_n,M_n>(t)>g(t)\}) \underset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$

Soit $U_n = \inf\{t>0\ ;\ <M_n,M_n>(t)>g(t)\}$, $(\inf\emptyset = +\infty)$, $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, U_n est un temps d'arrêt prévisible de $\mathbb{F}_n$ et il existe donc une suite $(U_{nm}\ ;\ m\in\mathbb{N})$ de $\mathbb{F}_n$-temps d'arrêt que $U_{nm}<U_n$ pour tout m sur l'ensemble $\{U_n>0\}$ et $U_{nm}\uparrow U_n$ quand $m\uparrow\infty$.

De (3) on déduit que $\mathbb{P}(U_n\leq N) \underset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $N\in\mathbb{N}^*$. Il existe alors une sous-suite $(U_{nm_n}\ ;\ n\in\mathbb{N})$ de la suite double $(U_{nm}\ ;\ n\in\mathbb{N})$ telle que $\mathbb{P}(U_{nm_n}\leq N) \underset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Posons $T_n = U_{nm_n}$, $(n\in\mathbb{N})$. Nous aurons

(4) $<M_n,M_n>(\omega,t)\leq g(t)$ pour tous $(\omega, t)\in [\![0,T_n]\!]$, $n\in\mathbb{N}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $N_n = (\underline{M}_n^{c_n})^{T_n}$. Nous avons pour tous $\varepsilon>0$, $N\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$

$\mathbb{P}(\rho_C^N(N_n,M_n)>\varepsilon)\leq \mathbb{P}(\rho_C^N(N_n,M_n)>\varepsilon,\ T_n>N,\ S_n>N) + \mathbb{P}(T_n\leq N) + \mathbb{P}(S_n\leq N)$.

Or sur l'ensemble $\{T_n>N,\ S>N\}$ on a $N_n=M_n$, donc

(5) $\mathbb{P}(\rho_C^N(N_n,M_n)>\varepsilon)\ \leq \mathbb{P}(T_n\leq N) + \mathbb{P}(S_n\leq N)$

et cette inégalité entraîne que $(N_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(M_n,\ n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües.

D'autre part, l'inégalité (4) entraîne que pous tous $n\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}_+$, $<N_n,N_n>(t)\leq g(t)$. Les sauts de N_n étant d'amplitude inférieure ou égale à $2c_n$, nous pouvons construire les surmartingales $E^\lambda_{2c}[N_n]$ $(\lambda\in\mathbb{R}+,\ n\in\mathbb{N})$ et nous obtenons comme dans le corollaire 4 l'inégalité

(6) $\mathbb{E}(\exp(\lambda N_n(t)))\leq \exp(\emptyset_{2c_0}(\lambda)\ g(t))$, $(\lambda,\ t\in\mathbb{R}_+,\ n\in\mathbb{N})$.

On en déduit l'équi-intégrabilité de la suite $(N_n(t)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, et chaque processus N_n est une martingale (non seulement une martingale locale localement de carré intégrable).

Soit P la limite étroite d'une sous-suite $(\mathcal{L}(M_{n_k})\ ;\ k\in\mathbb{N})$, alors $\mathcal{L}(N_{n_k}) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\longrightarrow}} P$ par C-contigüité et il suffit d'appliquer le lemme II.1.5 à la sous-suite $(\mathcal{L}(N_{n_k})\ ;\ k\in\mathbb{N})$ pour conclure. ∎

7. REMARQUE

Soit $M \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, où $\mathbb{F}$ est une filtration sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ satisfaisant aux conditions habituelles. Supposons $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta M(t)| \leq c$ où c est une constante positive. Nous allons compléter la Remarque II.2.3 par une dernière inégalité concernant les processus $<M,M>$ et $[M,M]$. Puisque $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta[M,M](t)| \leq c^2$ et $\mathbb{E}([M,M](T)) = \mathbb{E}(<M,M>(T))$ pour tout temps d'arrêt fini T, la Proposition II.2.2. entraîne que pour un tel temps et pour tous ε, $\eta>0$,

$$(1) \qquad \mathbb{P}(<M,M>(T) >\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}([M,M](T) \wedge (c^2+\eta)) + \mathbb{P}([M,M](T) > \eta)$$

D'autre part, $<M,M>$ étant prévisible ne charge pas les temps d'arrêt totalement inaccessibles. Soit T un temps d'arrêt prévisible, nous avons $\underline{\underline{F}}_{T-} = \bigvee_{n\in N} \underline{\underline{F}}_{T_n}$ où $(T_n \ ; \ n\in\mathbb{N})$ est une suite de temps d'arrêt annonçant T.
Soit S un temps d'arrêt tel que $\overline{M} = M^S \in \underline{\underline{M}}_0^2[\mathbb{F},\mathbb{P}]$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T_n}}(<\overline{M},\overline{M}>(T) - <\overline{M},\overline{M}>(T_n)) = \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T_n}}([\overline{M},\overline{M}](T) - [\overline{M},\overline{M}](T_n))$$

En passant à la limite en $n\uparrow\infty$ et en remarquant que $<\overline{M},\overline{M}>(T)$ est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable (cf [5], IV T 20) nous obtenons,

$$(2) \qquad \Delta<\overline{M},\overline{M}>(T) = \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T-}}(\Delta[\overline{M},\overline{M}](T))$$

Si l'on remplace S par une suite localisante quelconque $(S_n \ ; \ n\in\mathbb{N})$ de M, on obtient l'égalité précédente pour toutes les martingales arrêtées M^{S_n}.

Si l'on fait tendre n vers $+\infty$, nous obtenons la propriété (2) pour la martingale locale M.

On en déduit $|\Delta<M,M>(t)| \leq c^2$ lorsque $|\Delta M(t)| \leq c$ $(t\in\mathbb{R})$.

8. PROPOSITION

Soit $(M_n \ ; \ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $M_n\in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}]$. Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) Il existe une suite $(c_n \ ; \ n\in\mathbb{N})$ de constantes positives telle que $c_n\downarrow 0$ quand $n\uparrow\infty$ et $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta M_n(t)| \leq c_n$, $(n\in\mathbb{N})$;

(2) pour tous $\eta>0$, $N\in\mathbb{N}^*$, il existe $a>0$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}([M_n,M_n](N)>a) \le \eta$$

(3) pour tous ε, $\eta>0$, $N\in\mathbb{N}^*$, existent $n_0\in\mathbb{N}$ et $\delta>0$ tels que pour toute suite $(T_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, où chaque T_n est un $\mathbb{F}_n$-temps d'arrêt borné par $N(n\in\mathbb{N})$, on ait :

$$\sup_{n\ge n_0} \mathbb{P}([M_n,M_n](T_n+\delta) - [M_n,M_n](T_n)>\varepsilon) \le \eta$$

Alors, $([M_n,M_n];\ n\in\mathbb{N})$, $(<M_n,M_n>\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, sont C-tendues. (En particulier, les hypothèses (2) et (3) sont vérifiées lorsque $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue).

Démonstration : La suite $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue d'après la Proposition II.1.3. Soient $N\in\mathbb{N}^*$, $\eta>0$, choisissons $a>0$ d'après (2) tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}([M_n,M_n](N)>a) \le \eta/2$$

Soit $b>0$ tel que $\dfrac{c_0^2+a}{b} \le \eta/2$, alors l'inégalité (1) de la Remarque précédente entraîne que

(4) $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(<M_n,M_n>(N)>b) \le \eta.$$

Soient maintenant $\varepsilon,\eta>0$, N $\mathbb{N}^*$, $(T_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, T_n soit un $\mathbb{F}_n$-temps d'arrêt borné par N. On choisit $\delta>0$ et n_0 d'après (3) de façon à avoir

$$\sup_{n\ge n_0} \mathbb{P}([M_n,M_n](T_n+\delta) - [M_n,M_n](T_n)>\zeta) \le \eta/2$$

où $\zeta>0$ est tel que $\zeta/\varepsilon \le \eta/4$.

Puisque $c_n\downarrow 0$ quand $n\uparrow\infty$, il existe $n_1\in\mathbb{N}$ tel que $c_n^2<\zeta$ pour $n\ge n_1$. Soit alors $n_2=n_1\vee n_0$, en introduisant les martingales locales L_n de la démonstration de la Proposion 1 de ce paragraphe et en leur appliquant l'inégalité (1) de la Remarque 7, on obtient

(5) $$\sup_{n\ge n_2} \mathbb{P}(<M_n,M_n>(T_n+\delta) - <M_n,M_n>(T_n)>\varepsilon) \le \eta$$

De (4) et (5) on déduit que $(<M_n,M_n> \,;\, n\in\mathbb{N})$ est D-tendue, mais puisque $\sup_{t\in\mathbb{R}} \Delta<M_n,M_n>(t) \leq c_n^2 (n\,\mathbb{N})$, l'hypothèse (1) entraîne que $(<M_n,M_n> \,;\, n\in\mathbb{N})$ est C-tendue (c.f. Remarque I.2.6.2), Propositions I.2.4 et I.2.2). Il suffit alors d'appliquer le corollaire 3 pour conclure. ■

9. REMARQUE

L'hypothèse $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta M_n(t)| \leq c_n$, $c_n \downarrow 0$ lorsque $n\uparrow\infty$ qui est intervenue dans les corollaires 3, 4 et la Proposition 8 peut être affaiblie au moyen d'un argument de C-contigüité (comme nous avons par exemple fait dans le corollaire 6). La méthode consiste à fabriquer une suite $(N_n \,;\, n\in\mathbb{N})$ C-contigüe de $(M_n \,;\, n\in\mathbb{N})$ et telle que chaque N_n soit une martingale locale vérifiant : $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta N_n(t)| \leq c_n$ où $c_n\downarrow 0$ quand $n\uparrow\infty$.

Lorsque l'on procède ainsi, on n'a pas forcément la C-contigüité des suites $(<M_n,M_n> \,;\, n\in\mathbb{N})$ et $(<N_n,N_n> \,;\, n\in\mathbb{N})$. Dans certains cas cette dernière propriété nous sera d'une très grande utilité. La définition suivante nous donne le moyen de construire des suites $(N_n \,;\, n\in\mathbb{N})$ vérifiant la propriété sur les sauts mentionnés ci-dessus et telles que l'on ait la C-contigüité de $(N_n \,;\, n\in\mathbb{N})$ avec $(M_n \,;\, n\in\mathbb{N})$ et de $(<N_n,N_n> \,;\, n\in\mathbb{N})$ avec $(<M_n,M_n> \,;\, n\in\mathbb{N})$.

10. DEFINITION

Soit $(M_n \,;\, n\in N)$ une suite de processus telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, M_n est une $\mathbb{F}_n$-martingale locale, localement de carré intégrable, nulle en 0.

Nous dirons que (M_n) vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts si pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, et tout $\varepsilon>0$

$$(1) \quad <\overline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon>(t) + \widetilde{[\underline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon]^*}(t) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} 0 \quad \text{(convergence en probabilité)}$$

Nous dirons que (M_n) vérifie la condition forte des raréfactions asymptotiques des sauts si pour tout $t\in R_+$

$$(2) \qquad \tilde{\sigma}^\varepsilon(M_n,t) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} 0 \quad \text{(voir I.1.3).}$$

Nous dirons que (M_n) vérifie la condion de Lindeberg si pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.

$$(3) \qquad \mathbb{E}(\sigma^\varepsilon(M_n,t)) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0 \quad \text{(voir I.1.3)}$$

15. LEMME

Soit (M_n) une suite de processus telle que chaque M_n soit une $\mathbb{F}_n$-martingale locale localement de carré intégrable, nulle en 0.

1) La condition de Lindeberg entraîne la condition forte de raréfaction asymptotique des sauts et celle-ci entraîne la condition de raréfaction asymptotique des sauts. Si les M_n sont quasi-continues à gauche, ces deux dernières conditions coïncident.

2) Si $(M_n,\ n \in \mathbb{N})$ vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts, alors pour toute suite $(c_k,\ k \in \mathbb{N})$ de constantes positives décroissant vers zéro, existent une sous-suite $(M_{n_k}\ ;\ k \in \mathbb{N})$ et une suite $(N_k,\ k \in \mathbb{N})$ telle que chaque N_k est une $\mathbb{F}_{n_k}$-martingale locale nulle en 0 à sauts uniformément bornés par c_k et les suites (M_{n_k}) et (N_k) (resp. $(\langle M_{n_k}, M_{n_k}\rangle)$ et $(\langle N_k, N_k\rangle)$) sont C-contigües.

Démonstration :

1) Puisque $\mathbb{E}(\sigma^{\varepsilon}(M_n,t)) = \mathbb{E}(\tilde{\sigma}^{\varepsilon}(M_n,t))$ $(n \in \mathbb{N}),\ t \in \mathbb{R}_+)$, la première implication est claire.

Supposons $\tilde{\sigma}^{\varepsilon}(M_n,t) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} 0$, $(t \in \mathbb{R}_+)$. Alors le Lemme I.1.3 et la Proposition II.2.1 entraînent que

$$\langle \overline{M}^{\varepsilon}_n, \overline{M}^{\varepsilon}_n \rangle(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \quad \text{et} \quad \left[\underline{M}^{\varepsilon}_n, \overline{M}^{\varepsilon}_n \right]^{*}(t) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \qquad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}_+$$

2) On remarque d'abord que, par définition, (I.2.1)

$$0 \leq \rho_C(x,y) \leq 1,\ (x,y) \in D \times D.$$

Par conséquent, pour deux suites $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ et $(Y_n,\ n \in \mathbb{N})$ de processus à trajectoires dans D,

$$\rho_C(X_n,Y_n) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \Longleftrightarrow \mathbb{E}(\rho_C(X_n,Y_n)) \underset{n\uparrow\infty}{\to} 0$$

Soit $c_k \downarrow 0$ quend $k\uparrow\infty$ et posons $\varepsilon_k = c_k/2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\rho^N_C(\langle M_n,M_n\rangle,\ \langle \underline{M}^{\varepsilon_k}_n, \underline{M}^{\varepsilon_k}_n\rangle) \leq \langle \overline{M}^{\varepsilon_k}_n, \overline{M}^{\varepsilon_k}_n\rangle(N) + 2\langle \underline{M}^{\varepsilon_k}_n, \overline{M}^{\varepsilon_k}_n\rangle^{*}(N) \underset{n\,\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

et

$$\rho_C^N(M_n,\underline{M}_n^{\varepsilon_k}) = (\overline{M}_n^{\varepsilon_k})^*(N) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

d'après II.2.1.

Donc pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$e(k,n)=\mathbb{E}(\rho_C(M_n,\underline{M}_n^{\varepsilon_k})) + \mathbb{E}(\rho_C(<M_n,M_n>, <\underline{M}_n^{k},\underline{M}_n^{k}>)) \underset{n\uparrow\infty}{\to} 0$$

Choisissons une suite d'entiers $(n_k\ ;\ k\in\mathbb{N})$ telle que

$$e(k,n) \leq \frac{1}{2^k}$$

Posons $N_k=\underline{M}_{n_k}^{\varepsilon_k}$, $(k\in\mathbb{N})$.

(M_{n_k}) et (N_k) satisfont alors les propriétés requises dans l'énoncé.∎

12. COROLLAIRE

<u>Soit</u> $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>une suite de processus telle que pour tout</u> $n\in\mathbb{N}$, $M_n\in\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}]$.

<u>Si</u> $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts, alors pour tout</u> $\varepsilon>0$ <u>les suites</u> $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>et</u> $(\underline{M}_n^{\varepsilon}\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>(resp.</u> $(<M_n,M_n>\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>et</u> $(<\underline{M}_n^{\varepsilon},\underline{M}_n^{\varepsilon}>\ ;\ n\in\mathbb{N})$; <u>resp.</u> $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>et</u> $([\underline{M}_n^{\varepsilon},\underline{M}_n^{\varepsilon}]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>sont</u> C-<u>contigües</u>.

<u>Si en outre</u> $(<M_n,M_n>\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>est</u> C-<u>tendue, alors</u> $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>et</u> $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>sont</u> C-<u>tendues</u>.

<u>Démonstration</u> : Le fait que pour tout $\varepsilon>0$ les suites $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(\underline{M}_n^{\varepsilon}\ ;\ n\in\mathbb{N})$ (resp. $(<M_n,M_n>;\ n\in\mathbb{N})$ et $(<\underline{M}_n^{\varepsilon},\underline{M}_n^{\varepsilon}>\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües est contenu dans la démonstration du Lemme précédent. Montrons la C-contigüité de $([M_n,M_n];\ n\in\mathbb{N})$ avec $([\underline{M}_n^{\varepsilon},\underline{M}_n^{\varepsilon}]\ ;\ n\in\mathbb{N})$.

Remarquons que pour toute martingale locale M localement de carré intégrable, et tout $\varepsilon>0$, nous avons

$$[M,M] - ([\underline{M}^{\varepsilon},\underline{M}^{\varepsilon}]+[\overline{M}^{\varepsilon},\overline{M}^{\varepsilon}]) = 2[\underline{M}^{\varepsilon},\overline{M}^{\varepsilon}].$$

Soit $S^{\varepsilon}(M) = [\underline{M}^{\varepsilon},\underline{M}^{\varepsilon}]+[\overline{M}^{\varepsilon},\overline{M}^{\varepsilon}]$.

Nous avons

$$([M,M] - S^{\varepsilon}(M))^{*} \leq 2[M^{\varepsilon},\overline{M}^{\varepsilon}]^{*}$$

La condition de raréfaction des sauts entraîne alors, d'une part, que $[M_n^{\varepsilon},\overline{M}_n^{\varepsilon}]^{*}(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ en vertu de la Proposition II.2.1. D'autre part, on a que la suite $(S^{\varepsilon}(M_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-contigüe de $([M_n^{\varepsilon},M_n^{\varepsilon}]\ ;\ n\in\mathbb{N})$.

De la relation ci-dessus on obtient la C-contigüité des suites $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(S^{\varepsilon}(M_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$. Par conséquent $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $([M_n^{\varepsilon},M_n^{\varepsilon}]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües.

D'après le Théorème 2, $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue. Si cette suite vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts, alors tout point d'adhérence P de $(\mathcal{L}(M_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est porté par C (i.e. $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue). En effet, soit P la limite étroite d'une sous-suite convergente de $(\mathcal{L}(M_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$; nous appliquons à cette sous-suite le Lemme 11, en choisissant arbitrairement une suite $(c_n\ ;\ n\in\mathbb{N})\subset\mathbb{R}_+$ telle que $c_n\downarrow 0$ quand $n\uparrow\infty$. Nous aurons ainsi que la suite $(N_k\ ;\ k\in\mathbb{N})$ fabriquée dans le Lemme 11 vérifie $\mathcal{L}(N_k) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\rightarrow}} P$, or $(N_k\ ;\ k\in\mathbb{N})$ est C-tendue. Il en découle que $P(C) = 1$.

D'autre part, $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue d'après le Théorème 2. Soit Q la limite étroite d'une sous-suite convergente $(\mathcal{L}([M_{n_k},M_{n_k}])\ ;\ k\in\mathbb{N})$. Supposons vérifiée la condition de raréfaction asymptotique des sauts. Nous appliquons le Lemme 11 à la suite $(M_{n_k}\ ;\ k\in\mathbb{N})$ en choisissant une suite arbitraire $(c_n\ ;\ n\in\mathbb{N})\subset\mathbb{R}+$ telle que $c_n\downarrow 0$ quand $n\uparrow\infty$; appelons $N_\ell = M_{n_k}^{c_\ell}$, $\ell\in\mathbb{N}$, la suite construite dans ce Lemme. $([N_\ell,N_\ell]\ ;\ \ell\in\mathbb{N})$ est C-contigüe de $(\langle M_{n_{k\ell}},M_{n_{k\ell}}\rangle\ ;\ \ell\in\mathbb{N})$ et elle est par conséquent C-tendue.

D'après le corollaire 3, la suite $([N_\ell,N_\ell]\ ;\ \ell\in\mathbb{N})$ est C-tendue.

D'après la première partie de la démonstration, $([N_\ell,N_\ell]\ ;\ \ell\in\mathbb{N})$ et $([M_{n_{k\ell}},M_{n_{k\ell}}]\ ;\ \ell\in\mathbb{N})$ sont C-contigües.

Il s'en suit que

$$\mathcal{L}([N_\ell,N_\ell]) \underset{\ell\uparrow\infty}{\overset{e}{\rightarrow}} Q$$

Donc $Q(C) = 1$ car $([N_\ell,N_\ell]\ ;\ \ell\in\mathbb{N})$ est C-tendue. ∎

Dans le théorème suivant nous nous proposons d'étudier le comportement des lois des processus croissants associés, lorsque l'on sait que la suite des lois des martingales locales est tendue.

13. THEOREME

Soit $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus telle que $M_n\in \underline{\underline{M}}_o^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Si $\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|\Delta M_n(t)|\leq c$ $(c\in\mathbb{R}_+)$ et si $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue, alors $(\langle M_n,M_n\rangle\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont D_o^+-tendues.

2) Si $\sup_{t\in R_+}|\Delta M_n(t)|\leq c_n$, où $c_n\downarrow 0$ quand $n\uparrow\infty$ et $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue, alors $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, $(\langle M_n,M_n\rangle;\ n\in\mathbb{N})$ et $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-tendues.

3) Si $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue et vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts, alors $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, $(\langle M_n,M_n\rangle\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-tendues.

Démonstration :

1) D'après la proposition I.1.4, pour tout $\eta>0$ et tout $N\in\mathbb{N}^*$, nous pouvons choisir $a>0$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[o,N]}|M_n(t)|>a\Big)\leq \eta/4$$

Soit maintenant $b>0$ tel que $\frac{2c(c+a)+a^2}{b}<\eta/2$, appliquons l'inégalité II.2.3 (3). Nous obtenons

$$(1)\qquad \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(\langle M_n,M_n\rangle(N)\ b)\leq\eta$$

$(\langle M_n,M_n\rangle;\ n\in\mathbb{N})$ est donc D_o^+-tendue.

De même, si l'on choisit $d>0$ tel que $\frac{b}{d}\leq\eta$, l'inégalité II.2.3.(2) entraîne

$$(2)\qquad \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}([M_n,M_n](N)>d)\leq 2\eta$$

donc $([M_n,M_n];\ n\in\mathbb{N})$ est D_o^+-tendue.

2) Si $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta M_n(t)| \le c_n$ où $c_n \downarrow 0$ quand $n\uparrow\infty$ alors $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ vérifie I.2.4.(2) et il suffit d'appliquer les remarques I.2.6.1) et I.2.6.2) pour conclure que $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue.

Nous montrerons que $(\langle M_n,M_n\rangle\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue, le Corollaire 3 entraînera alors que $([M_n,M_n]\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'amplitude des sauts de $\langle M_n,M_n\rangle$ est uniformément bornée par c_n^2. Il suffira alors de montrer que $(\langle M_n,M_n\rangle;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue (en vertu de la Remarque I.2.6). Nous appliquons la Proposition 1 ; l'hypothèse(1) de cette proposition est vérifiée par la suite $(\langle M_n,M_n\rangle;\ n\in\mathbb{N})$ en vertu de l'inégalité (1) ci-dessus. Montrons que l'hypothèse 1.(2) est également satisfaite.

Soient ε, $\eta>0$, $N\in\mathbb{N}^*$, $(T_n;\ n\in\mathbb{N})$ une suite telle que chaque T_n soit un $\mathbb{F}_n$-temps d'arrêt et $T_n\le N$. En introduisant les processus L_n et les filtrations $\mathbb{G}_n$ de la Proposition 1 et en leur appliquant l'inégalité II.1.3(3) nous obtenons

$$\text{(3)}\quad \mathbb{P}(\langle M_n,M_n\rangle(T_n+\delta) - \langle M_n,M_n\rangle(T_n) > \varepsilon) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le\delta} |M_n(T_n+t) - M_n(T_n)|^2 \wedge \{2c_n(c_n+\zeta) + \zeta^2\}\Big) +$$

$$2\,\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le\delta} |M_n(T_n+t) - M_n(T_n)| > \zeta\Big)$$

pour tous $n\in\mathbb{N}, \delta,\zeta>0$.

Soient alors ζ tel que $\frac{\zeta}{\varepsilon}\le\frac{\eta}{4}$ et $n_1\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{c_{n_1}}{\varepsilon}\le\frac{\eta}{4}$.

Choisissons ensuite $n_2\in\mathbb{N}$ et $\delta_0\in\,]0,N[$ tels que

$$\sup_{n\ge n_2} \mathbb{P}(W_C^{2N}(M_n,\delta_0) > \zeta) \le \eta/4$$

Nous aurons que

$$\sup_{n\ge n_2} \mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le\delta_0} |M_n(T_n+t) - M_n(T_n)| > \zeta\Big) \le \eta/2$$

Par conséquent, si $n_0=n_1\vee n_2$,

$$\text{(4)}\quad \sup_{n\ge n_0} \mathbb{P}(\langle M_n,M_n\rangle(T_n+\delta_0) - \langle M_n,M_n\rangle(T_n) > \varepsilon) \le \eta$$

Il s'en suit que $(<M_n,M_n>; n\in\mathbb{N})$ est D-tendue.

3) Soit $(\mathcal{L}(M_{n_k}) ; k\in\mathbb{N})$ une sous-suite convergente quelconque de $(\mathcal{L}(M_n) ; n\in\mathbb{N})$. Soit P la limite étroite de $(\mathcal{L}(M_{n_k}) ; k\in\mathbb{N})$. Si $(c_n ; n\in\mathbb{N})$ est une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $c_n\downarrow 0$ quand $n\uparrow\infty$, nous pouvons trouver une sous-suite $(M_{n_{k\ell}} ; \ell\in\mathbb{N})$ de $(M_{n_k} ; k\in\mathbb{N})$ C-contigue d'une suite $(N_\ell ; \ell\in\mathbb{N})$ telle que $N_\ell\in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_{n_{k\ell}},\mathbb{P}]$ et $\sup|\Delta N_\ell(t)|\leq c_\ell$, pour tout $\ell\in\mathbb{N}$. (Voir Lemme 11). Alors $\mathcal{L}(N_\ell)\underset{\ell\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P$, mais $(N_\ell ;\ell\in\mathbb{N})$ est C-tendue et par conséquent $P(C) = 1$, $(M_n ; n\in\mathbb{N})$ est donc C-tendue.

Soit $(\mathcal{L}(<M_{n_k},M_{n_k}>) ; k\in\mathbb{N})$ une sous-suite convergente quelconque de $(\mathcal{L}(<M_n,M_n>) ; n\in\mathbb{N})$ (qui est D_0^+-tendue d'après 1)). Nous construisons une suite $(N_\ell ;\ell\in\mathbb{N})$ comme ci-dessus à l'aide du Lemme 11. D'après 2), $(<N_\ell,N_\ell> ; \ell\in\mathbb{N})$ est C-tendue, mais par un argument de C-contiguïté, nous aurons également que $\mathcal{L}(<N_\ell,N_\ell>)\underset{\ell\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} Q$, où Q est la limite étroite de $(\mathcal{L}(<M_{n_k},M_{n_k}>) ; k\in\mathbb{N})$. On en déduit que $Q(C) = 1$ et que $(<M_n,M_n> ; n\in\mathbb{N})$ est C-tendue.

Pour terminer, $([M_n,M_n] ; n\in\mathbb{N})$ est C-tendue en vertu du Corollaire 12. ∎

Nous clôturons ce paragraphe avec un corollaire important sur les martingales locales continues, qui se déduit directement du théorème précédent et du Corollaire 3.

14. <u>COROLLAIRE</u>

<u>Soit</u> $(M_n ; n\in\mathbb{N})$ <u>une suite de processus telle que</u> $M_n\in\underline{\underline{M}}_0^{loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}]$ <u>pour tout</u> $n\in\mathbb{N}$. <u>Pour que</u> $(M_n ; n\in\mathbb{N})$ <u>soit</u> C-<u>tendue il faut et il suffit que</u> $(<M_n,M_n>; n\in\mathbb{N})$ <u>soit</u> C-<u>tendue</u>.

II.4 PROBLEMES DE MARTINGALES ET CONVERGENCE EN LOI. UN THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE POUR LES MARTINGALES LOCALES.

Nous considérons toujours un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ et une suite $(\mathbb{F}_n ; n\in\mathbb{N})$ de filtration satisfaisant aux conditions habituelles.

1. PRELIMINAIRES, NOTATIONS

1) Soit $d\in\mathbb{N}^*$. Appelons $\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$ qui sont continues en 0, continues à droite et pourvues de limites à

à gauche sur $\mathbb{R}_+ - \{0\}$. La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ est notée $\|.\|$. Il est clair que l'on a

$$\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d) = (\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))^d$$

Sur $\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ nous allons considérer deux topologies :

(T1) : <u>La topologie de Skorokhod sur tout compact</u>.

C'est-à-dire, une suite $(x_n \; ; n \in \mathbb{N})$ converge vers x dans $\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ au sens de (T1) si et seulement si pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ il existe une suite $(\lambda_n^N \; ; n \in \mathbb{N})$ d'applications strictement croissantes et continues de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même vérifiant

$$\lim_{n\uparrow\infty} \left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+} | \lambda_n^N(t)-t| + \sup_{s\neq t} \left|\log \frac{\lambda_n^N(t)-\lambda_n^N(s)}{t-s}\right| \right] = 0$$

et

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sup_{t\in[0,N]} \|x(t)-x_n(\lambda_n^N(t))\| = 0.$$

<u>L'espace</u> $\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ <u>muni de la topologie (T1) sera noté</u> $D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ <u>ou</u> $D^d(1)$.

Il existe une métrique $\rho_{D^d(1)}$ sur $D^d(1)$ compatible avec sa topologie et le rendant polonais (cf. [13]).

(T2) : <u>La topologie produit de</u> $(D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))^d$.

On voit aisément que ces deux topologies ne coïncident pas. La topologie (T2) est moins fine que (T1). Nous notons $D^d(2)$ ou $(D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))^d$ l'espace $D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie (T2). La métrique $\rho_{D^d(2)}(x,y) = \Sigma_{i=1}^d \rho_D(x^i,y^i)$ où $x=(x^1,\dots,x^d)$, $y = (y^1,\dots,y^d)$ $D^d(2)$ est compatible avec (T2) et rend $D^d(2)$ polonais.

Cependant les tribus boréliennes respectives vérifient :

$$\underline{\underline{B}}(D^d(2)) = \underline{\underline{B}}(D^d(1)) = (\underline{\underline{B}}^o)^{\otimes d} \text{ (c.f. I.2.6.3)).}$$

Supposons que P_n, P sont des mesures de probabilité définies sur $\underline{\underline{B}}(D^d(1))$, $(n \in \mathbb{N})$. Nous avons <u>que si</u> $P_n \underset{n\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P$ <u>au sens de la topologie étroite associée à (T1), alors</u> $P_n \underset{n\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P$ <u>au sens de la topologie étroite associée à (T2)</u>.

Notons C^d l'espace produit $(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))^d = C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$. Si $(x_n : n \in \mathbb{N})$ est une suite de $\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ qui converge au sens de (T2) vers un élément x de

C^d, alors $(x_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge uniformément vers x (c.f.[1]). Il en résulte que $(x_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge au sens de (T1) vers x.

On montre alors (comme dans [1], p. 151) que si $P(C^d)=1$ et $P_n \underset{n\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P$ au sens de (T2), alors $P_n \underset{n\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P$ au sens de (T1).

2) On vérifie facilement que les applications

$$\begin{aligned} f,g\ &:\ D^2(2) \to D \\ f(x,y) &= x+y \\ g(x,y) &= xy \quad , (x,y)\in D^2(2) \end{aligned}$$

ne sont pas continues. Par contre elles sont continues comme applications de $D^2(1)$ dans D.

Cette remarque entraîne que si $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(Y_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont deux suites de processus telle que $((X_n,Y_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ soit $D^2(1)$-tendue, alors $(X_n+Y_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(X_nY_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont D-tendues. Par contre, si $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(Y_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont D-tendues, on peut montrer que $((X_n,Y_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est $D^2(2)$-tendues mais on n'aura pas nécessairement $(X_n+Y_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, ou $(X_n\,Y_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, D-tendue. Cependant, si $(X_n\ ;\ n\in N)$ est D-tendue et $(Y_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue, alors $((X_n,Y_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est $D^2(1)$-tendue et $(X_n+Y_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(X_n\,Y_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont D-tendues.

3) Pour tout $w\in D$, on pose $w^*(t) = \sup\limits_{s\leq t} |w(s)|$, $(t\in\mathbb{R}_+)$

L'application $w\to w^*$ de D dans D est continue.

En effet, supposons que $w_n \underset{n\uparrow\infty}{\to} w$ dans D. Alors, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, il existe une suite $(\lambda_n^N\ ;\ n\in\mathbb{N})$ d'applications strictement croissantes et continues de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même vérifiant

$$\lim_{n\uparrow\infty}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |\lambda_n^N(t)-t| + \sup_{s\neq t}\left|\log\frac{\lambda_n^N(t)-\lambda_n^N(s)}{t-s}\right|\right] = 0$$

et

$$\lim_{n\uparrow\infty}\ \sup_{t\in[0,N]} |\, w_n(\lambda_n^N(t))-w(t)| = 0.$$

Or, $\quad w_n^*(\lambda_n^N(t)) = \sup\limits_{s\leq\lambda_n^N(t)} |w_n(s)\,| = \sup\limits_{u\leq t}|\, w_n(\lambda_n^N(u))|$

et $\sup_{t\in[0,N]} |w_n^*(\lambda_n^N(t))-w^*(t)| \leq \sup_{t\in[0,N]} \sup_{u\leq t} | w_n(\lambda_n^N(u)) - w(u)|$

$$\leq \sup_{t\in[0,N]} | w_n(\lambda_n^N(t)) - w(t)|$$

donc $w_n^* \underset{n\uparrow\infty}{\to} w^*$ dans D.

Remarquons d'autre part que si $(Z_n \ ; n\in\mathbb{N})$ <u>est une suite de processus, à trajectoires dans</u> D, <u>qui converge en loi vers un processus</u> Z <u>et si</u> $(\alpha_n \ ; n\in\mathbb{N})$ <u>est une suite de variables aléatoires convergeant en probabilité vers une constante</u> α, alors $(Z_n,\alpha_n) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} (Z,\alpha)$. Cette propriété résulte directement de [1] Théroème 4.4. Elle entraîne que, sous les hypothèses précédentes, $\alpha_n Z_n \underset{n\uparrow\infty}{\to} \alpha Z$ car l'application $(w,a) \to a\,w$ de $D\times\mathbb{R}$ dans D est continue.

Voici une application importante de ces deux dernières remarques. <u>Soient</u> $(Z_n \ ; n\in\mathbb{N})$ <u>et</u> $(Y_n \ ; n\in\mathbb{N})$ <u>deux suites de processus à trajectoires dans</u> D, <u>telles que</u>

(1) $(Z_n \ ; n\in\mathbb{N})$ et $(Y_n \ ; n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües ;

(2) $Z_n \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} Z$

<u>Alors</u> $(Z_n^2 \ ; n\in\mathbb{N})$ <u>et</u> $(Y_n^2 \ ; n\in\mathbb{N})$ <u>sont</u> C-<u>contigües</u>.

En effet, soit $N\in\mathbb{N}^*$. D'après (1), nous avons que $\alpha_n = (Z_n-Y_n)^*(N) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} 0$. (1) et (2) entraînent que $Y_n \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} Z$. Nous aurons ainsi que $Z_n^* \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} Z^*$ et $Y_n^* \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} Z^*$. Par conséquent $\alpha_n\, Z_n^* \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$ et $\alpha_n\, Y_n^* \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$. En particulier

$$\alpha_n\, Z_n^*(N) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

$$\alpha_n\, Y_n^*(N) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

On en déduit que $\alpha_n\, Z_n^*(N) + \alpha_n\, Y_n^*(N) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$.

Or $(Z_n^2-Y_n^2)^*(N) \leq \alpha_n\, Z_n^*(N) + \alpha_n\, Y_n^*(N)$, $(n\in\mathbb{N})$.

Donc $(Z_n^2 \ ; n\in\mathbb{N})$ et $(Y_n^2 \ ; n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües.

Nous introduisons maintenant un ensemble d'applications remarquables.

4) Nous noterons $\underline{\underline{A}}^+ (= \underline{\underline{A}}^+[D,D])$ l'ensemble des applications A de $D \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

(1) Pour tout $w \in D$, $A(w,.)$ est une fonction croissante continue à droite sur $\mathbb{R}_+ - \{0\}$, continue en 0 (donc $A(w,.) \in D$) ;

(2) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $A(.,t)$ est $\underline{\underline{B}}_t^o$-mesurable (c.f. I.2.6.3)) ;

(3) l'application $w \mapsto (w,A(w,.))$ de D dans $D^2(1)$ est continue.

Un élément A de $\underline{\underline{A}}^+$ est alors un processus croissant adapté sur $(D,\underline{\underline{B}}(D), \mathbb{B}^o)$, mais il jouit également de bonnes propriétés topologiques. Dans la suite nous ferons souvent l'abus de langage qui consiste à supprimer "w" ou "t" dans l'écriture de $A(w,t)$ selon la propriété qui nous intéressera de souligner. Ainsi nous écrirons $(A(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}_+)$, lorsque nous regarderons l'aspect <u>processus</u> de A ; nous écrirons $\dot{A}(w)$, $(w \in D)$, l'élément $A(w,.)$ de D. On remarque que l'application $\dot{A}$ de D dans lui-même est continue.

Remarquons par ailleurs que l'application $(w,w') \to \overset{2}{w} - w'$ de $D^2(1)$ dans D est continue. Par conséquent, l'application $F : D \to D$, $F(w) = \overset{2}{w} - A(w,.)$, $(w \in D)$, est continue.

D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $A(.,t)$ est une fonctionnelle sur D. Elle n'est pas continue en général car les projections canoniques $X(.,t)$ de D dans $\mathbb{R}$ ne le sont pas, mais elle est continue lorsque $X(.,t)$ l'est. En particulier, $A(.,t)$ est continue sur C. De même, si P est une probabilité sur $(D,\underline{\underline{B}}(D))$, $A(.,t)$ est continue pour tout t appartenant à l'ensemble T_P introduit dans I.2.6.3).

L'ensemble $\underline{\underline{A}}^+$ sera appelé <u>l'ensemble des fonctionnelles croissantes sur</u> D.

Nous noterons $\underline{\underline{A}}$ $(= \underline{\underline{A}}[D,D])$ l'ensemble des applications $V : D \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, qui s'écrivent comme une différence $V = A_1 - A_2$ où $A_1, A_2 \in \underline{\underline{A}}^+$ et telles que l'application $w \to (w,V(w,.))$ de D dans $D^2(1)$ est continue. Cet ensemble sera désigné comme <u>l'ensemble des fonctionnelles à variations finies sur</u> D.

Voici l'un des principaux résultats de ce paragraphe.

2. <u>PROPOSITION</u>

<u>Soient</u> $A \in \underline{\underline{A}}^+$, $(M_n \ ; \ n \in \mathbb{N})$ <u>une suite de processus telle que</u> $M_n \in \underline{\underline{M}}_o^{2,loc}[\mathbb{F}_n, \mathbb{P}]$, <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$. <u>Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées</u> :

(1) <u>Il existe</u> $\varepsilon > 0$ <u>tel que pour tout</u> $t \in \mathbb{R}_+$,

$$<\overline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon>(t) + \widetilde{[M_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon]^*}(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

(2) il existe une fonction croissante, continue à droite, $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$A(w,t) \leq a(t) \quad \text{pour tout} \quad (w,t) \in D \times \mathbb{R}_+ \ ;$$

(3) la suite $(\dot{A}(M_n) \ ; n\in\mathbb{N})$ est C-tendue, (où $\dot{A}(M_n)=(A(M_n,t);\ t\in\mathbb{R}_+)$, $n\in\mathbb{N})$;

(4) les suites $(<M_n,M_n> ; n\ \mathbb{N})$ et $(\dot{A}(M_n) \ ; n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües.

Alors la suite $(M_n \ ; n\in\mathbb{N})$ est D-tendue et tout point d'adhérence P de $(\mathcal{L}(M_n), n\in\mathbb{N})$ vérifie les propriétés suivantes :

$A\in \underline{\underline{V}}^{loc}_{+,c}\,[\mathbb{B}(P),P]$, le processus canonique X appartient à $\underline{\underline{M}}^{2,loc}_0\,[\mathbb{B}(P),P]$, $<X,X> = A$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta X(t)| \leq 2\varepsilon$ P-p.s.

Démonstration : Les hypothèses (3) et (4) entraînent que $(<M_n,M_n> \ ; n\in\mathbb{N})$ est C-tendue. Le Théorème II.3.2 entraîne alors que $(M_n \ ; n\in\mathbb{N})$ est D-tendue.

Soit P la limite étroite d'une sous-suite convergente $(\mathcal{L}(M_{n_k}) \ ; k\in\mathbb{N})$ de $(\mathcal{L}(M_n) \ ; n\in\mathbb{N})$. Puisque l'application $w\mapsto A(w,.)$ de D dans lui-même est continue, $(\mathcal{L}(A(M_{n_k})) \ ; k\in\mathbb{N})$ converge étroitement vers la loi image $P\dot{A}^{-1}$ de P par $\dot{A}$. Mais l'hypothèse (4) entraîne alors que

$$\mathcal{L}(<M_{n_k},M_{n_k}>) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{A}^{-1}$$

$P\dot{A}^{-1}(X(0) = 0) = P(A(0)=0) \geq \lim\limits_k \sup \mathbb{P}(<M_{n_k},M_{n_k}> (0) = 0) = 1$ car l'ensemble $\{w \in D : X(w,0) = 0\}$ est fermé $(X(.,0)$ étant continue sur D car tout élément de D est supposé continu au point 0 par définition).

Par conséquent $A(0) = 0$ P-p.s. D'autre part l'hypothèse (3) entraîne que A est à trajectoires dans C, P-p.s. L'hypothèse (2) entraîne l'intégrabilité de $A(t)$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ (par rapport à P) et par conséquent, la suite $(U_n \ ; n\in\mathbb{N})$ où $U_n = \inf\{t>0 : A(t)> n\}$ $(\inf \emptyset = +\infty)$, $n\in\mathbb{N}$, est une suite $(\mathbb{B}(P),P)$-localisante pour A, i.e. $A^{U_n}\in \underline{\underline{V}}_{+,c}[\mathbb{B}(P),P]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Donc $A\in \underline{\underline{V}}^{loc}_{+,c}\,[\mathbb{B}(P),P]$.

Posons $N_k = \underline{M}^{\varepsilon}_{n_k}$ $(k\in\mathbb{N})$, où $\varepsilon>0$ est déterminé par l'hypothèse (1). D'après (1) et les inégalités II.2.3, les suites $(N_k\ ;\ k\in\mathbb{N})$ et $(M_{n_k}\ ;\ k\in\mathbb{N})$ (resp. $(<N_k,N_k>;\ k\in\mathbb{N})$ et $(<M_{n_k},M_{n_k}>\ ;\ k\in\mathbb{N})$) sont C-contigües. Par conséquent

(5) $$\mathcal{L}(N_k) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P$$

et

(6) $$\mathcal{L}(<N_k,N_k>) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{A}^{-1}.$$

Soit $\eta>0$ et définissons pour tout $k\in\mathbb{N}$

$S_k = \inf\{t>0 : <N_k,N_k>(t) > a(t) + \eta\}$, $(\inf \emptyset = \infty)$.

S_k est un temps d'arrêt prévisible de $\mathbb{F}_{n_k}$, il existe alors une suite $(S_{k_m}\ ;\ m\in\mathbb{N})$ annonçant S_k $(k\in\mathbb{N})$. Puisque $(<N_k,N_k>;\ k\in\mathbb{N})$ et $(\dot{A}(M_{n_k})\ ;\ k\in\mathbb{N})$ sont C-contigües l'hypothèse (2) entraîne, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(S_k\leq N) \underset{k\uparrow\infty}{\to} 0$$

Il existe alors une sous-suite $T_k = S_{km_k}$, $k\in\mathbb{N}$, de $(S_{km}\ ;\ m\in\mathbb{N})$ telle que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$

(7) $$\mathbb{P}(T_k\leq N) \underset{k\uparrow\infty}{\to} 0$$

Or puisque $T_k < S_k$, sur l'intervalle stochastique $[\![0,T_k]\!]$ nous avons $<N_k,N_k>(t) \leq a(t) + \eta$ $(k\in\mathbb{N})$.

Posons $L_k = N_k^{T_k}$ $(k\in\mathbb{N})$. D'après (7), $(L_k\ ;\ k\in\mathbb{N})$ vérifie les propriétés suivantes :

(8) $(L_k\ ;\ k\in\mathbb{N})$ et $(N_k\ ;\ k\in\mathbb{N})$ sont C-contigües ;

(9) $(<L_k,L_k>;\ k\in\mathbb{N})$ et $(<N_k,N_k>\ ;\ k\in\mathbb{N})$ sont C-contigües.

Par conséquent, en vertu de (5) et (6),

(10) $$\mathcal{L}(L_k) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P$$

(11) $$\mathcal{L}(<L_k,L_k>) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{A}^{-1}$$

D'autre part,

(12) $$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta L_k(t)| \leq 2\varepsilon, \text{ pour tout } k\in\mathbb{N},$$

(13) $\langle L_k, L_k\rangle(t) \leq a(t) + \eta$, $(k,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$.

D'après I.1.4. nous avons alors pour tous λ, $t \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(\exp(\lambda L_k(t) - \emptyset_{2\varepsilon}(\lambda) \langle L_k, L_k\rangle(t))) \leq 1$$

et donc (en vertu de (13)),

(14) $$\mathbb{E}(\exp(\lambda\, L_k(t))) \leq \exp(\emptyset_{2\varepsilon}(\lambda)(a(t) + \eta))$$
$$(k \in \mathbb{N},\ (\lambda,t) \in \mathbb{R}_+^2)$$

De (14) on déduit :

(15) Chaque processus L_k est une martingale (non seulement locale) et la suite $(L_k(t)\ ;\ k \in \mathbb{N})$ est équi-intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et

(16) Chaque processus $L_k^2 - \langle L_k, L_k\rangle$ est une martingale et la suite $(L_k^2(t) - \langle L_k, L_k\rangle(t)\ ;\ k \in \mathbb{N})$ est équi-intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

De (10) et (15) on déduit, en vertu du Lemme II.1.5, que X est une $\mathbb{B}(P)$-martingale. Montrons que l'amplitude des sauts de X est P-p.s. bornée par 2ε

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors,

(17) $$P(\sup_{t \in [0,N]} |\Delta X(t)| \geq 2\varepsilon) \leq P(W_C^N(X,\delta) > 2\varepsilon) \quad \text{pour tout } \delta > 0.$$

On montrera que $\lim_{\delta \downarrow 0} W_C^N(X,\delta) \leq 2\varepsilon$ P-p.s.

Pour tout couple $(w,w') \in D \times D$, nous avons

$$|W_C^N(w,\delta) - W_C^N(w',\delta)| \leq 2\rho_C^N(w,w'),\ (\delta>0).$$

Et puisque toute boule ouverte pour la topologie uniforme sur tout compact est encore une boule ouverte pour la topologie de Skorokhod sur tout compact, nous avons que si

$$W_C^N(w,\delta) > 2\varepsilon + 4\eta \quad (\eta>0),$$

alors w est un point intérieur de l'ensemble

$$D(\delta,\eta) = \{w \in D : W_C^N(w,\delta) > 2\varepsilon + 2\eta\}$$

Désignons par $\overset{\circ}{D}(\delta,\eta)$ l'intérieur de $D(\delta,\eta)$. Posons, $P_K = \mathcal{L}(L_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$P(W_C^N(X,\delta) > 2\varepsilon + 4\eta) \leq P(\overset{o}{D}(\delta,\eta))$$

$$\leq \liminf_k P_k(\overset{o}{D}(\delta,\eta))$$

$$\leq \liminf_k P_k(D(\delta,\eta))$$

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, les sauts de X sont d'amplitude inférieure à 2ε P_k-p.s. et nous aurons en vertu de I.2.6.1),

$$P_k(D(\delta,\eta)) \leq P_k(W_D^N(X,\delta) > \eta)$$

Mais $(P_k\ ;\ k\in N)$ est D-tendue, par conséquent, si $\zeta>0$ est donné, existent $k_0\in\mathbb{N}$, $\delta_0>0$ tels que

$$P_k(W_D^N(X,\delta) > \eta) \leq \zeta \quad \text{pour tout} \quad \delta \leq \delta_0,\ k\geq k_0$$

D'où

$$P(W_C^N(X,\delta) \geq 2\varepsilon + 4\eta) \leq \zeta \quad \text{pour tout} \quad \delta \leq \delta_0.$$

Nous pouvons ainsi construire une suite $(\delta_k\ ;\ k\in\mathbb{N})$ telle que

$$P(W_C^N(X,\delta_k) > 2\varepsilon + \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{3^k}$$

Soit $B = \liminf_k \{w\in D : W_C^N(w,\delta_k) > 2\varepsilon + \frac{1}{2^k}\}$

$P(B) = 0$ et si $w\notin B$, $\lim_{\delta\downarrow 0} W_C^N(w,\delta) \leq 2\varepsilon$.

On en déduit, d'après (17), que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $\sup_{t\in[0,N]} |\Delta X(t)| \leq 2\varepsilon$ P-p.s. ; par conséquent $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |\Delta X(t)| \leq 2\varepsilon$ P-p.s.

D'autre part, $P(X(0) = 0) \geq \limsup_k P_k(X(0)=0) = 1$. Donc $X(0) = 0$ P-p.s.

Si l'on définit maintenant, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$V_n = \inf\{t>0 \ :\ X(t) > n\} \quad (\inf \emptyset = +\infty),$$

alors $V_n \uparrow +\infty$ P-p.s. car X est P-intégrable, chaque V_n est un $\mathbb{B}(P)$-temps d'arrêt et $X(w,t) \leq n+2\varepsilon$ pour tout $(w,t)\in [\![0,V_n]\!]$. Par conséquent $X^{V_n} \in \underline{\underline{M}}_0^2\ [\mathbb{B}(P),P]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, i.e. $X\in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}\ [\mathbb{B}(P),P]$.

Pour terminer, montrons que X^2-A est une $(\mathbb{B}(P),P)$-martingale.

L'application $F : w \to w^2\text{-}A(w,.)$ de D dans lui-même est continue. Il s'en suit que $(P_k F^{-1}\ ;\ k\in\mathbb{N})$ converge étroitement vers PF^{-1}. D'après (8) et la définition de $(N_k,\ k\in\mathbb{N})$ nous avons que $\mathcal{L}(F(M_{n_k})) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} PF^{-1}$. Or, d'après (4), les suites $(F(M_{n_k})\ ;\ k\in\mathbb{N})$ et $(M_{n_k}^2 - <M_{n_k},M_{n_k}>\ ;\ k\in\mathbb{N})$ sont C-contigües et en vertu de (9), il en est de même pour les suites $(F(M_{n_k})\ ;\ k\in\mathbb{N})$ et $(L_k^2 - <L_k,L_k>;\ k\in\mathbb{N})$ (voir Remarque 1.3) ci-dessus).

Par conséquent,

$$(18)\qquad (L_k^2 - <L_k,L_k>) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} PF^{-1}$$

(16) et (18) entraînent que X est une $(\mathbb{B}(PF^{-1}),\ PF^{-1})$-martingale en vertu du Lemme II.1.5 ; c'est à dire X^2-A est une $(\mathbb{B}(P),P)$-martingale. ∎

3. <u>COROLLAIRE</u>

<u>Soient</u> $A\in \underline{\underline{A}}^+$, $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>une suite de processus telle que</u> $M_n\in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}]$, <u>pour tout</u> $n\in\mathbb{N}$. <u>Supposons que</u> $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts et que les hypothèses (2) à (4) de la Proposition 2 soient satisfaites</u>.

<u>Alors la suite</u> $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>est</u> <u>C-tendue et tout point d'adhérence</u> P <u>de</u> $(\mathcal{L}(M_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>vérifie les propriétés suivantes</u> :

$A\in \underline{\underline{V}}_{+,c}^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$, <u>le processus canonique</u> X <u>appartient à</u> $\underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$ <u>et</u> $<X,X> = A$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'appliquer la Proposition 2 et le Corollaire II.3.12.

4. <u>REMARQUE</u>

Nous rappelons ci-dessous un résultat classique qui constitue une légère modification du célèbre théorème de caractérisation du mouvement Brownien de KUNITA et WATANABE. Nous renvoyons le lecteur à [27] ou [11] pour l'exposé de la démonstration.

<u>Soit</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ <u>un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles</u>. $M\in \underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ <u>et</u> $<M,M> = A$, <u>où</u> A <u>est une fonction croissante continue de</u> $\mathbb{R}_+$ <u>dans</u> $\mathbb{R}_+$, <u>nulle à l'origine, si et seulement si</u>

(1) $M(t)-M(s)$ <u>est indépendante de</u> $\underline{\underline{F}}_s$ <u>pour tous</u> $s,\ t\in\mathbb{R}_+$, $s<t$;

(2) M <u>est un processus gaussien, continu, centré, de covariance</u> $K(s,t) = A(s\wedge t)$, $(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$.

Il s'en suit que pour toute fonction A vérifiant les propriétés précédentes, il existe une et une seule probabilité P sur $(D,\underline{\underline{B}}(D))$ portée par C telle que le processus canonique X appartienne à $\underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$ et $<X,X> = A$. Nous en déduisons le théorème suivant.

5. THEOREME

Soit $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus telle que $M_n \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Soit A une fonction croissante continue de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, nulle à l'origine. Supposons que les hypothèses suivantes soient satisfaites :

(1) $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts ;

(2) pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $<M_n,M_n>(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A(t)$.

Alors $(\mathcal{L}(M_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge étroitement vers une loi gaussienne P portée par C, de covariance $K(s,t) = A(s\wedge t)$, $(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$; le processus canonique X appartient à $\underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$ et $<X,X> = A$.

Démonstration : L'hypothèse (2) entraîne 2.(4). En effet, si $N\in\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon>0$ sont donnés, on peut choisir une subdivision $\{t_0,t_1,\ldots,t_m\}$ de $[0,N]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots > t_m = N$ telle que $A(t_{k+1}) - A(t_k) < \varepsilon/4$ pour tout $k = 0,\ldots,m-1$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\rho_C^N(A_n,A) \leq \varepsilon/2 + \Sigma_{k=0}^m |A_n(t_k) - A(t_k)|,\ (n\in\mathbb{N})$$

et

$$\mathbb{P}(\rho_C^N(A_n,A) > \varepsilon) \leq \Sigma_{k=0}^m\ \mathbb{P}(|A_n(t_k)-A(t_k)| > \frac{\varepsilon}{2(m+1)})$$

(où $A_n = <M_n,M_n>$, $n\in\mathbb{N}$).

D'autre part, les hypothèses 2.(2) et 2.(3) sont trivialement satisfaites et la condition de raréfaction asymptotique des sauts nous permet d'appliquer la corollaire 3 ; nous obtenons que $\Pi = (\mathcal{L}(M_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue. D'après ce corollaire tout point d'adhérence P de Π vérifie les propriétés : $X \in \underline{\underline{M}}_c^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$, $<X,X> = A$. La remarque 4 entraîne alors que P est une loi gaussienne de covariance $K(s,t) = A(s\wedge t)$, $(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$. On en déduit que l'adhérence de Π est constituée d'une unique probabilité P et $\mathcal{L}(M_n) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P$. ∎

Nous allons maintenant étudier les lois de semi-martingales. Auparavant remarquons que si $Z=Z(0) + M + V$ est une semi-martingale relativement à une filtration $\mathbb{F}$, alors Z s'écrit également $Z = Z(0) + \overline{M} + \overline{V}$ où $\overline{M}\in\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et $\overline{V}$ est à variations finies. Cette décomposition, qui n'est pas unique, est une conséquence immédiate du Lemme I.1.3.

6. LEMME

Soit $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de semi-martingales telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n = X_n(0) + M_n + V_n$ où $M_n \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}]$, V_n est à variations finies et $X_n(0) = x_n (x_n \in\mathbb{R})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) la suite $(x_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

(2) $(<M_n,M_n>;\ n\in\mathbb{N})$ et $(V_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ satisfont aux conditions (1) et (2) de la Proposition II.1.3. (En particulier lorsque $(<M_n,M_n>;\ n\in\mathbb{N})$ et $(V_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-tendues).

Alors la suite $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue.

Démonstration : La démonstration découle directement de la Proposiion II.1.3, des inégalités établies dans la démonstration de la Proposition II.3.1 et des inégalités triangulaires sur $\mathbb{R}$. ∎

7. Nous rappelons qu'une $\mathbb{F}$-semi-martingale

$$(1) \qquad Z = Z(0) + M + V$$

où $V \in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ est appelée spéciale (c.f. [18]).

Ces semi-martingales admettent une décomposition canonique unique de la forme (1) avec V prévisible, $M\in \underline{\underline{M}}_0^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$. Si dans cette décomposition canonique M est en outre localement de carré intégrable, nous dirons que Z est très spéciale.

8. DEFINITION

Soient $A \in \underline{\underline{A}}^+$, V un élément $\mathbb{B}^0$-prévisible de $\underline{\underline{A}}$, $x\in\mathbb{R}$. Nous noterons Prob(x,A,V) l'ensemble des probabilités P sur $(D,\underline{\underline{B}}(D))$ pour lesquelles $A \in \underline{\underline{V}}_{+,c}^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$, $V\in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$ et le processus canonique X est une $(\mathbb{B}(P),P)$-semi-martingale très spéciale de décomposition $X = X(0) + M + V$ avec $M\in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{B}(P),P]$, $<M,M> = A$ et $X(0) = x$ P-p.s. (on dira que P est une solution du problème de martingales (x,A,V)).

Voici le deuxième résultat fondamental de ce paragraphe.

9. THEOREME

Soient $A\in \underline{\underline{A}}^+$, V un élément $\overset{0}{\mathbb{B}}$-prévisible de $\underline{\underline{A}}$, $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de semi-martingales telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n=X_n(0) + M_n + V_n$ avec

$M_n \in \underline{\underline{M}}_o^{2,loc}$ $[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, V_n à variations finies sur tout compact et $X_n(0) = x_n$ $(x_n \in \mathbb{R})$.

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) Il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$<\overline{M}_n^{\varepsilon},\overline{M}_n^{\varepsilon}>(t) + \widetilde{[\underline{M}_n^{\varepsilon},\overline{M}_n^{\varepsilon}]}^*(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} 0$$

(2) il existe une fonction a croissante, continue à droite, de $\mathbb{R}$ dans lui-même, telle que

$$A(w,t) \leq a(t), \text{ pour tout } (w,t) \in D \times \mathbb{R}_+$$

(3) la suite $(\dot{A}(X_n)$; $n \in \mathbb{N})$ est C-tendue et $(\dot{V}(X_n)$; $n \in \mathbb{N})$ vérifie les hypothèses II.1.2(1) et II.1.3(2) (hypothèses qui sont en particulier satisfaites lorsque

$$(\dot{V}(X_n) \ ; \ n \in \mathbb{N}) \text{ est C-tendue}) \ ;$$

(4) les suites $(<M_n,M_n>$; $n \in \mathbb{N})$ et $(\dot{A}(X_n)$; $n \in \mathbb{N})$ (resp. $(V_n$; $n \in \mathbb{N})$ et $(V(X_n)$; $n \in \mathbb{N})$ sont C-contigües.

(5) la suite $(x_n$; $n \in \mathbb{N})$ converge vers un point x de $\mathbb{R}$.

Alors $(X_n$; $n \in \mathbb{N})$ est D-tendue et tout point d'adhérence P de $(\mathcal{L}(X_n)$; $n \in \mathbb{N})$ appartient à $\underline{\text{Prob}}(x,A,V)$. En outre la martingale M de la $(\mathbb{B}(P),P)$-décomposition canonique du processus (canonique) X ne possède que des sauts d'amplitude inférieure ou égale à 2ε.

Démonstration : Les hypothèses (3) et (4) entraînent que les suites $(<M_n,M_n>$; $n \in \mathbb{N})$ et $(V_n$; $n \in \mathbb{N})$ vérifient l'hypothèse 6.(2). L'hypothèse (5) ci-dessus entraîne 6.(1) et nous en déduisons que $(X_n$; $n \in \mathbb{N})$ est D-tendue.

Posons $P_n = \mathcal{L}(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Soit P la limite étroite d'une sous-suite convergente $(P_{n_k}$; $k \in \mathbb{N})$.

Remarquons que $\mathcal{L}(<M_{n_k},M_{n_k}>) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\rightarrow}} P\dot{A}^{-1}$

(d'après (4) et du fait que $A \in \underline{\underline{A}}^+$). On en déduit, comme dans la Proposition 2 que $A \in \underline{\underline{V}}_{+,c}^{loc}$ $[\mathbb{B}(\mathbb{P}),P]$.

De même, $\mathcal{L}(V_{n_k}) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\rightarrow}} P\dot{V}^{-1}$ et on en déduit que

$$P(V(0) = 0) \geq \limsup_k \mathbb{P}(V_{n_k}(0) = 0) = 1, \text{ i.e. } V(0) = 0 \text{ P-p.s.}$$

D'autre part, $V(w,.)$ étant à trajectoires dans D_0 pour tout $w \in D$, $V(w,t)$ est fini pour tout t fini. Puisque V est $\mathbb{B}$-prévisible et il s'écrit comme différence de deux éléments de $\underline{\underline{A}}^+$, V est alors un élément de

$\underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$. En effet car la suite $U_n = \inf\{t > 0 : V(w,t) > n\}$ ($\inf \emptyset = +\infty$), $n \in \mathbb{N}$, est une suite de $\mathbb{B}(P)$-temps d'arrêt prévisibles croissant vers $+\infty$ quand $n \uparrow \infty$. Donc il existe une double suite $(U_{nm}\ ;\ (n,m) \in \mathbb{N}^2)$ de $\mathbb{B}(P)$-temps d'arrêt telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(U_{nm},\ m \in \mathbb{N})$ annonce U_n. Sur chaque intervalle stochastique $[\![0,U_{k\ell}]\!]$, $(k \leq n,\ \ell \leq n)$, V est borné par n, $(n \in \mathbb{N})$. Soit $S_n = \sup\limits_{\substack{k \leq n \\ \ell \leq n}} U_{k\ell}$, $(n \in \mathbb{N})$. Cette suite de temps d'arrêt croît vers $+\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V^{S_n} \in V[\mathbb{B}(P),P]$. C'est-à-dire, $V \in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$.

Définissons les applications suivantes de D dans lui-même :

$\dot{H}_n(w) = H_n(w,.) = w - V(w,.) - x_n$; $\dot{J}_n(w) = J_n(w,.) = H_n(w,.)^2 - A(w,.)$

$\dot{H}(w) = H(w,.) = w - V(w,.) - x$; $\dot{J}(w) = J(w,.) = H(w,.)^2 - A(w,.)$ $(w \in D,\ n \in \mathbb{N})$.

Ces applications vérifient la propriété suivante : si $(w_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ converge vers w dans D, alors $(\dot{H}_n(w_n)\ ;\ n \in \mathbb{N})$ (resp. $(\dot{J}_n(w_n)\ ;\ n \in N)$) converge dans D vers $\dot{H}(w)$ (resp. $\dot{J}(w)$).

Par conséquent, d'après [1], Théorème 5.5, nous aurons que

(6) $\quad P_{n_k} \dot{H}_{n_k}^{-1} \underset{k \uparrow \infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{H}^{-1}$ et $P_{n_k} \dot{J}_{n_k} \underset{k \uparrow \infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{J}^{-1}$

Or,

$$\dot{H}_n(X_n) - M_n = V_n - \dot{V}(X_n)$$

et (4) entraîne que $(\dot{H}_n(X_n)\ ;\ n \in \mathbb{N})$ et $(M_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ sont C-contigües. Par conséquent

(7) $$\mathcal{L}(M_{n_k}) \underset{k \uparrow \infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{H}^{-1}$$

D'autre part,

$$\dot{J}_n(X_n) - (M_n^2 < M_n, M_n >) = (V_n - \dot{V}(X_n))^2 + 2M_n(V_n - \dot{V}(X_n)) + < M_n, M_n > - \dot{A}(X_n)$$

De (4) nous déduisons que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t \in [0,N]} |V_n(t) - V(X_n,t)|^2 \underset{n \uparrow \infty}{\to} 0, \text{ et}$$

$$\sup_{t \in [0,N]} |< M_n, M_n > (t) - A(X_n,t)| \underset{n \uparrow \infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

Puisque $(M_{n_k}\ ;\ k \in \mathbb{N})$ converge en loi et que la différence

$\dot{V}_{n_k} - \dot{V}(X_{n_k})$ tend vers zéro en probabilité (selon la métrique de C), nous aurons (voir 1.3))

$$\sup_{t \in [0,N]} |M_{n_k}(t)(V_{n_k}(t) - V(X_{n_k},t))| \underset{k\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

Par conséquent, $(\dot{J}_{n_k}(X_{n_k}) \; ; \; k \in \mathbb{N})$ et $(M^2_{n_k} - \langle M_{n_k}, M_{n_k} \rangle \; ; \; k \in \mathbb{N})$ sont C-contigües et

$$(8) \qquad \mathcal{L}(M^2_{n_k} - \langle M_{n_k}, M_{n_k} \rangle) \underset{k\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{J}^{-1}$$

Maintenant, les hypothèses (1) et (2) nous permettent de construire, comme dans la Proposition 2, une suite de processus $(L_k \; ; \; k \in \mathbb{N})$ vérifiant les propriétés suivantes :

(9) $\qquad L_k \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_{n_k}, \mathbb{P}]$, $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |\Delta L_k(t)| \leq 2\varepsilon$

(10) $\qquad (L_k \; ; \; k \in \mathbb{N})$ et $(M_{n_k} \; ; \; k \in \mathbb{N})$ sont C-contigües ;

(11) $\qquad (\langle L_k, L_k \rangle \; ; \; k \in \mathbb{N})$ et $(\langle M_{n_k}, M_{n_k} \rangle \; ; \; k \in \mathbb{N})$ sont C-contigües.

(12) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ les suites $(L_k(t) \; ; \; k \in \mathbb{N})$ et $(L^2_k(t) - \langle L_k, L_k \rangle(t) \; ; \; k \in \mathbb{N})$ sont équi-intégrables.

De (7), (10), (12) on déduit en vertu du Lemme II.1.5 que le processus canonique X est une $(\mathbb{B}(P\dot{H}^{-1}), P\dot{H}^{-1})$-martingale. Procédant comme dans la Proposition 2, la propriété (9) entraîne que $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |\Delta X(t)| \leq 2\varepsilon$, PH^{-1}-p.s. et $X \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{B}(P\dot{H}^{-1}), P\dot{H}^{-1}]$.

Il s'en suit que $X-V-x$ est un élément de $\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{B}(P),P]$ que nous notons M et qui en outre vérifie $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |\Delta M(t)| \leq 2$.

Pour compléter la démonstration, il suffira de montrer que $\langle M,M \rangle = A$.

D'après (8), (10), (11), (12) et en vertu du Lemme II.1.5, le processus canonique X est une $(\mathbb{B}(P\dot{J}^{-1}), P\dot{J}^{-1})$-martingale. C'est-à-dire $M^2 - A = (X-V-x)^2 - A$ est une $(\mathbb{B}(P),P)$-martingale. Puisque $A \in \underline{\underline{V}}_{+,c}^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$, nous aurons alors $\langle M,M \rangle = A$.

10. REMARQUES

1) Si au lieu de l'hypothèse 9(1), la suite $(M_n ; n \in \mathbb{N})$ vérifie la condition de raréfaction asymptotique de sauts, alors la martingale M de la Proposition 7 est à trajectoires continues. D'autre part si $(\dot{V}(X_n) ; n \in \mathbb{N})$ est C-tendue, alors $V \in \underline{\underline{V}}_c^{loc}[\mathbb{B}(P),P]$ pour tout point d'adhérence P de $(\mathcal{L}(X_n) ; n \in \mathbb{N})$.

2) <u>Lorsqu'il y a unicité (en loi) des solutions au problème de martingales</u> (x,A,V), <u>le Théorème 9 entraîne la convergence étroite de</u> $(\mathcal{L}(X_n) ; n \in \mathbb{N})$ <u>vers la solution</u> P <u>de ce problème</u> (car P est en ce cas le seul point d'adhérence de la suite $(\mathcal{L}(X_n) ; n \in \mathbb{N})$).

3) Si V=0 dans le Théorème 9, nous obtenons un critère qui sert à étudier la convergence en loi de semi-martingales vers une limite martingale.

II.5 LE CAS MULTIDIMENSIONNEL

Nous allons étudier une version multidimensionnelle du Théorème II.4.9. Les techniques utilisées dans la démonstration sont exactement les mêmes, la seule difficulté étant la complexité des notations. Aussi nous essaierons de les simplifier autant que possible : la presque totalité de ce paragraphe est consacré à l'explication de notations et a la généralisation à plusieurs dimensions des définitions de base de la Théorie de Martingales.

Comme dans les paragraphes précédents, nous considérons un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ et des filtrations $\mathbf{F},\mathbb{F}_n (n \in \mathbb{N})$, satisfaisant aux condions habituelles.

Dans ce qui suit, d et k sont deux entiers ≥ 1.

1. <u>Convention de notation pour l'espace</u> $D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$

Dans la paragraphe précédent nous avons introduit l'espace $D(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de Skorokhod sur tout compact, et nous avons adopté la notation abrégée $D^d(1)$ pour cet espace. A présent, pour simplifier l'écriture, nous supprimerons le "1" de cette notation, i.e. D^d représente l'espace $D^d(1)$ tout le long de ce paragraphe.

Chaque élément $w \in D^d$ s'écrira

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w^d \end{pmatrix}$$

où les w^i sont les fonctions composantes.

Pour éviter toute confusion, nous réservons la notation $x^{(r)}(x\in\mathbb{R},\ r\in\mathbb{N})$ pour "x à la puissance r". Par contre x^r c'est la r-ième composante du vecteur $x\in\mathbb{R}^d$ $(1\leq r\leq d)$.

Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ est noté $(.|.)$ et $\|.\|$ désigne la norme (euclidienne) qu'il engendre.

On définit l'application $X : D^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ par

$$X(w,t) = w(t) = \begin{pmatrix} w^1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w^d(t) \end{pmatrix} , \ (w,t) \in D^d \times \mathbb{R}_+ \qquad (*)$$

Nous introduisons alors les tribus suivantes sur D^d :

- la tribu borélienne de D^d, soit $\underline{\underline{B}}(D^d)$;
- les tribus $\underline{\underline{B}}^o_t = \sigma(X(s)\ ;\ s\leq t)$ $(t\in\mathbb{R}_+)$; on note $\mathbb{B}^o = (\underline{\underline{B}}^o_t\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$.

On a que $\underline{\underline{B}}^o_\infty$ et $\underline{\underline{B}}(D^d)$ sont identiques.

Puis, comme dans I.2.6. 3), on a que pour toute probabilité P sur $(D^d,\underline{\underline{B}}(D^d))$ il existe un ensemble $T_P \subset \mathbb{R}_+$ plein pour la mesure de Lebesgue tel que $X(.,t)$ soit continue pour tout $t\in T_P$ (c.f. [1]). De même $t\in T_P$ si et seulement si $P\{w\in D^d : X(w,t) \neq X(w,t.)\}) = 0$. On note $\underline{\underline{B}}(P)$ la tribu $\underline{\underline{B}}(D)$ (qui est égale à $\underline{\underline{B}}^o_\infty$) complétée pour P et de même $\mathbb{B}(P) = (\underline{\underline{B}}_t(P)\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$ désigne la filtration $\mathbb{B}^o$ complétée et rendue continue à droite. D'après ce qui précède, chaque tribu $\underline{\underline{B}}_t(P)$ pour $t\in T_P$ est engendrée par la famille $h(X(u_o),\dots,X(u_m))$ de variables aléatoires sur $(D^d,\underline{\underline{B}}(P),P)$, où h est une fonction continue bornée sur $(\mathbb{R}^d)^{m+1}$ et les ensembles $\{u_o,\dots,u_m\}$ constituent des subdivisions de l'intervalle $[0,t]$ telles que $0 = u_o < u_1 < \dots < u_m = t$, $u_i\in T_P$, $i=0,\dots,m$ (le point 0 appartient à T_P).

Et $\underline{\underline{B}}_t$ pour $t\in R_+$ s'obtient comme $\underline{\underline{B}}_t(P) = \bigcap_{\substack{s\in T_P \\ t\leq s}} \underline{\underline{B}}_s(P)$.

$*$ On supprimera l'écriture de "w" dans $X(w,t)$ lorsqu'il n'y a aura pas de risque de confusion.

2. MATRICES

Nous identifierons l'espace des matrices réelles de $d \times k$ composantes avec l'espace $\mathbb{R}^{dk}$ au moyen de l'application

$(a^{ij} \ ; \ 1 \leq i \leq d, \ 1 \leq j \leq k) \to (x^r \ ; \ 1 \leq r \leq dk)$ où $x^r = a^{ij}$ si $r = i+(j-1)d$.

Cela nous permet de donner un sens aux "applications c.à.d.l.à.g. à valeurs dans l'espace des matrices réelles de $d \times k$ composantes". Ce sont simplement des éléments de $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{dk})$. Cependant nous conserverons l'écriture matricielle lorsqu'il sera question de s'en servir comme opérateur de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^d$. En ce sens, nous noterons ${}^tA$ la matrice transposée d'une matrice A ; le produit de matrices sera simplement noté par juxtaposition.

3. PROCESSUS

Nous dirons que Z est un processus vectoriel d-dimensionnel à trajectoires c.à.d.l.à.g. (resp. continues) si Z est (indistinguable d') une application mesurable de $(\Omega, \underline{\underline{F}})$ dans $(D^d, \underline{\underline{B}}(D^d))$ (resp. $(C^d, \underline{\underline{B}}(C^d))$).

Si $\underline{\underline{Z}}$ désigne une classe de processus unidimensionnels $\mathbb{F}$-adaptés à trajectoires c.à.d.l.à.g., il est clair que $Z \in \underline{\underline{Z}}^d$ si et seulement si chaque composante $Z^i (1 \leq i \leq d)$ de Z appartient à $\underline{\underline{Z}}$.

Il est facile de voir que l'on a dans ces conditions $(\underline{\underline{Z}}^{loc})^d = (\underline{\underline{Z}}^d)^{loc}$, la dernière classe étant constituée des processus Z pour lesquels il existe une suite localisante $(T_n \ ; \ n \in \mathbb{N})$ de $\mathbb{F}$-temps d'arrêt tels que $Z^{T_n} \in \underline{\underline{Z}}$. Nous pouvons ainsi généraliser des notations comme $\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F}, \mathbb{P}]$, etc.

$$\text{Soit} \quad M = \begin{pmatrix} M^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M^d \end{pmatrix} \in (\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F}, \mathbb{P}])^d .$$

$$\text{On notera } [M,M] \text{ le processus } \begin{pmatrix} [M^1,M^1] & [M^1,M^2] & \dots & [M^1,M^d] \\ \vdots & & & \vdots \\ [M^d,M^1] & & & [M^d,M^d] \end{pmatrix}$$

C'est un processus à trajectoires dans D^{dd}. Il vérifie que

$$M^t M - [M,M] \in (\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F}, \mathbb{P}])^{dd}$$

ce qui est équivalent à dire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$,

$$(\theta|M^t\, M\theta) - (\theta|[M,M]\theta) = (\theta|M)^2 - (\theta|[M,M]\theta) \in \underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$$

c'est-à-dire, $[(\theta|M),(\theta|M)] = (\theta|[M,M]\theta)$.

Si $M \in (\underline{\underline{M}}^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])^d$ on peut également définir le processus matriciel $\langle M,M\rangle$ comme le compensateur prévisible-composante par composante- du processus $[M,M]$. On remarque que $\langle M,M\rangle \in (\underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])^{dd}$ mais que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$, $(\theta|\langle M,M\rangle\theta) \in \underline{\underline{V}}_+^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$.

4. <u>LES ESPACES</u> $\underline{\underline{A}}$ ET $\underline{\underline{A}}^+$

Nous introduisons maintenant l'espace $\underline{\underline{A}}^+[D^d,D^k]$ des applications $A : D^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^k$, telles que : pour tout $w \in D^d$, $A(w,.) \in D^d$ et toutes ses composantes sont croissantes ; pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $A(.,t)$ est $\underline{\underline{B}}_t^o$-mesurable ; l'application $w \mapsto \begin{pmatrix} w \\ A(w,.)\end{pmatrix}$ de D^d dans D^{d+k} est continue.

On note $\underline{\underline{A}}[D^d,D^k]$ l'ensemble des différences $V=A_1-A_2$ où $A_1,A_2 \in \underline{\underline{A}}^+[D^d,D^k]$ et tels que l'application $w \to \begin{pmatrix} w \\ V(w,.)\end{pmatrix}$ de D^d dans D^{d+k} est continue.

5. <u>DEFINITIONS</u>

Nous dirons qu'un élément A de $\underline{\underline{A}}[D^d,D^{dd}]$ est <u>de type positif</u> (ou <u>défini positif</u> ou <u>elliptique</u>) si pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$, $(\theta|A\theta) \in \underline{\underline{A}}^+[D^d,D]$.

(Pour un tel élément nous aurons que la diagonale appartient à $\underline{\underline{A}}^+[D^d,D^d]$ et d'autre part $A^{ij} = A^{ji}$).

Si $A \in \underline{\underline{A}}[D^d,D^{dd}]$ est de type positif, V un élément $\mathbb{B}^o$-prévisible de $\underline{\underline{A}}[D^d,D^d]$ et $x \in \mathbb{R}^d$, nous noterons <u>Prob</u>(x,A,V) l'ensemble des probabilités P sur $(D^d,\underline{\underline{B}}(D^d))$ vérifiant :

(1) $\quad A \in (\underline{\underline{V}}_c^{loc}[\mathbb{B}(P),P])^{dd}$ et $V \in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{B}(P),P])^d$

(2) $\quad X-V-x \in (\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{B}(P),P])^d$

(3) $\quad \langle M,M\rangle = A$ où $M = X-V-x$,

X étant le processus canonique défini dans le n° 1 ci-dessus.

6. <u>REMARQUES</u>

1) Soit $(Z_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite de processus à trajectoires dans

D^d définis sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$, $Z_n = \begin{pmatrix} Z_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n^d \end{pmatrix}$, $(n\in\mathbb{N})$.

Supposons que chaque Z_n soit une $\mathbb{F}_n$-semi-martingale vectorielle (ou simplement un processus $\mathbb{F}_n$-adapté), $n\in\mathbb{N}$. On voit aisément que la proposition II.1.3 se généralise au cadre ci-présent de la façon suivante

Si pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et pour tous, ε, $\eta>0$,

(1) il existe $a=a(N,\eta)>0$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,N]} \|Z_n(t)\| > a\Big] \leq \eta$$

(2) il existe $\delta=\delta(\varepsilon,\eta)>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que pour toute suite $(T_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, où chaque T_n est un $\mathbb{F}_n$-temps d'arrêt borné par N $(n\in\mathbb{N})$, on ait

$$\sup_{n\geq n_0}\Big[\sup_{\substack{T_n\leq s\leq T_n+\delta \\ s\in[0,N]}} \|Z_n(s)-Z_n(T_n)\| > \varepsilon\Big] \leq \eta$$

Alors la suite $(Z_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D^d-tendue.

Ceci découle - comme dans II.1.3 - du critère de compacité étroite rélative de suites de lois sur D^d analogue à I.1.5.

Or les conditions (1) et (2) ci-dessus sont vérifiées si et seulement si chaque suite de composantes $(Z_n^i\ ;\ n\in\mathbb{N})$ vérifie II.1.3(1) et II.1.3.(2), $(1\leq i\leq d)$.

Nous étudierons maintenant la propriété analogue du Lemme II.1.5.

2) Soit $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus telle que chaque M_n soit une $\mathbb{F}_n$-martingale d-dimensionnelle.

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) $\mathcal{L}(M_n) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P$

(2) Pour tous $t\in\mathbb{R}_+$, $1\leq i\leq d$, la suite $(M_n^i(t)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est équi-intégrable.

Alors le processus canonique X sur $(D^d,\underline{\underline{B}}(D^d),P)$ est une

$\mathbb{B}(P)$-martingale d-dimensionnelle .

La démonstration de cette propriété est entièrement analogue à celle du lemme II.1.5., elle se sert de la caractérisation de la filtration $\mathbb{B}(P)$ discutée au n° 1 ci-dessus et du fait que l'on a

$$\int_{D^d} h(X(u_0),\ldots,X(u_m))\ Y_N^i(t)dP_n \underset{n\uparrow\infty}{\to} \int_{D^d} h(X(u_0),\ldots,X(u_m))\ Y_N^i(t)dP$$

pour tous $s,\ t\in T_p,\ 0\leq s\leq t,\ 1\leq i\leq d,\ n\in\mathbb{N}$, toute partition $0 = u_0 < u_i < \ldots < u_m = s$ où $u_i \in T_p (0\leq i\leq m)$; toute fonction continue bornée h sur $(\mathbb{R}^d)^{m+1}$, où $P_n = \mathcal{L}(M_n)\ (n\in\mathbb{N})$ et $Y_N^i(t) = [(-N)\vee X^i(t)]\wedge N$.

3) Soient $U,V\in(\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])^d$. Nous pouvons définir $[U,V]$ par "polarisation" et nous dirons que U et V sont orthogonales si U^tV (ou V^tU) appartient à $(\underline{\underline{M}}_0{}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])^{dd}$, c'est-à-dire si $[U,V] = 0$. Cela est encore équivalent à dire que pour tout $(i,j)\in\{1,\ldots,d\}^2$, $<(U^i)^c,(V^j)^c> = 0$ et U^i et U^j n'ont pas de discontinuité commune.

Cette remarque nous permet de voir que toute martingale locale de $(\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])^d$ se décompose en une somme d'une martingale locale continue et d'une martingale locale somme compensée des sauts (orthogonale à la première) toutes les deux construites composantes par composantes.

Il n'en est pas de même lorsqu'on veut définir $\underline{M}^\varepsilon$ et $\overline{M}^\varepsilon$ pour $M\in(\underline{\underline{M}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])^d$ et $\underline{\varepsilon>0.}$ Dans ce cas il peut y avoir des discontinuités communes à $\underline{(M^i)^\varepsilon}$ et $(M^j)^\varepsilon$ pour $i\neq j$. Evidemment ce problème ne se pose pas lorsque M est à composantes M^i orthogonales deux à deux.

Cependant, il n'est pas difficile de réaliser une construction directe dans $\mathbb{R}^d$ de $\overline{M}^\varepsilon$ et $\underline{M}^\varepsilon$ en suivant un schéma analogue à celui du Lemme I.1.3. Supposons $M\in(\underline{\underline{M}}_0[\mathbb{F},\mathbb{P}])^d$ pour simplifier et introduisons, comme dans I.1.3, le processus

$$\alpha^\varepsilon(M,t) = \sum_{s\leq t} \|\Delta M(s)\|\ I_{[\ \|\Delta M(s)\| > \varepsilon]} \quad (t\in\mathbb{R}_+).$$

$\alpha^\varepsilon(M) = (\alpha^\varepsilon(M,t),\ t\in\mathbb{R}_+)$ est un élément de $\underline{\underline{V}}_+^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$.

On en déduit que le processus (vectoriel) A^ε où

$$A^\varepsilon(t) = \sum_{s\leq t} \Delta M(s)\ I_{[\ \|\Delta M(s)\| > \varepsilon]}\ ,\ (t\in\mathbb{R}_+)$$

est un élément de $(\underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])^d$ et il existe $\widetilde{A}^\varepsilon$ son compensateur prévisible. Quitte à arrêter M, on peut supposer A^ε à variation intégrable (i.e. $\mathbb{E}(\int_0^\infty \| dA^\varepsilon(s)\|)<\infty$). Alors $\overline{M}^\varepsilon = A^\varepsilon - \widetilde{A}^\varepsilon \in (\underline{\underline{M}}_0[\mathbb{F},\mathbb{P}])^d$. On pose $\underline{M}^\varepsilon = M-\overline{M}^\varepsilon$.

Si T est un temps totalement inaccessible.

$$\Delta\underline{M}^\varepsilon(T) = M(T)\, I_{[\ \|\Delta M(T)\| \leq \varepsilon]} \in \mathbb{R}^d$$

Si T est un temps prévisible,

$$\Delta\underline{M}^\varepsilon(T) = \Delta M(T)\, I_{[\ \|\Delta M(T)\| \leq \varepsilon]} - \mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T-}}(\Delta M(T) I_{[\ \|\Delta M(T)\| \leq \varepsilon]})$$

Donc,

(1) $\qquad \|\Delta\underline{M}^\varepsilon(t)\| \leq 2\varepsilon$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a pour tous $t\in\mathbb{R}_+$, $\theta\in R^d$,

(2) $\qquad |\Delta(\theta|\underline{M}\ (t))| \leq 2\ \|\theta\|\varepsilon$.

Si $M\in(\underline{\underline{M}}_0^2[\mathbb{F},\mathbb{P}])^d$, on a que le processus $\sigma^\varepsilon(M)=(\sigma^\varepsilon(M,t)\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$ est un élément de $(\underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])^{dd}$, où

$$\sigma^\varepsilon(M,t) = \sum_{s\leq t} (\Delta M(s))^t(\Delta M(s))\, I_{[\ \|\Delta M(s)\| > \varepsilon]}$$

Remarquons que $\sigma^\varepsilon(M)$ est de type positif car pour tout $\theta\in R^d$

$(\theta|\sigma^\varepsilon(M)\ ) = \sum_{s\leq o} (\theta|\Delta M(s))^{(2)}\, I_{[\ \|\Delta M(s)\| > \varepsilon]} \in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$.

Soit $\delta^i(t) = [\sigma^\varepsilon(M,t)]^{ii} = \sum_{s\leq t} (\Delta M^i(s))^{(2)}\, I_{[\ \|\Delta M(s)\| >\varepsilon]}$

$(1\leq i\leq d)$ la diagonale de $\sigma^\varepsilon(M,t)$.

On montre comme dans le lemme I.1.3 que pour tout temps d'arrêt fini T et tous $i,j\in\{1,\ldots,d\}$,

(3) $\qquad \mathbb{E}(<(\overline{M}^\varepsilon)^i,\ (\overline{M}^\varepsilon)^i>(T)) \leq 3\,\mathbb{E}(\widetilde{\delta}^i(T))$

(4) $\qquad \mathbb{E}(<(\underline{M}^\varepsilon)^i,\ (\overline{M}^\varepsilon)^j>(T) \leq 4\varepsilon\, \mathbb{E}(\widetilde{\alpha}^\varepsilon(M^j,T)) \leq \frac{8}{\varepsilon}\,\mathbb{E}(\widetilde{\delta}^j(T))$

D'autre part les inégalités de KUNITA et WATANABE [18] entraînent que

(5) $\qquad |[(\overline{M}^\varepsilon)^i,\ (\overline{M}^\varepsilon)^j]| \leq ([(\overline{M}^\varepsilon)^i,(\overline{M}^\varepsilon)^i])^{1/2}([(\overline{M}^\varepsilon)^j,(\overline{M}^\varepsilon)^j])^{1/2}$

(6) $\qquad |<(\overline{M}^\varepsilon)^i,\ (\overline{M}^\varepsilon)^j>| \leq (<(\overline{M}^\varepsilon)^i,\ (\overline{M}^\varepsilon)^i>)^{1/2}(<(\overline{M}^\varepsilon)^j,\ (\overline{M}^\varepsilon)^j>)^{1/2}$

De toutes ces relations nous obtenons la propriété suivante :

<u>Soit</u> $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>une suite de processus telle que chaque</u> M_n <u>appartient à</u> $(\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_n\ ;\ \mathbb{P}])^d$. Soit $\varepsilon>0$ et supposons que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$,

$$(7)\quad <\overline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon>(t) + S(\underline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon)(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \quad (0 \text{ étant la } \underline{\text{matrice}} \text{ nulle})$$

où $S(\underline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon)(t)$ est la matrice de composantes

$$\widetilde{[(\underline{M}_n^\varepsilon)^i,\ (\overline{M}_n^\varepsilon)^j]^*}\ (t),\ 1\leq i,\ j\leq d.$$

<u>Alors les suites</u> $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(\underline{M}_n^\varepsilon\ ;\ n\in\mathbb{N})$ (<u>resp</u>. $<M_n,M_n>\ ;\ n\in\mathbb{N})$ <u>et</u> $(<\underline{M}_n^\varepsilon,\underline{M}_n^\varepsilon>\ ;\ n\in\mathbb{N}))$ <u>sont</u> C^d<u>-contigües (resp</u>. C^{dd}<u>-contigües), c'est-à-dire</u>

$$\rho_{C^d}(M_n,\underline{M}_n^\varepsilon) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \quad (\underline{\text{resp}}.\ \ \rho_{C^{dd}}(<M_n,M_n>,<\underline{M}_n^\varepsilon,\underline{M}_n^\varepsilon>) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0)$$

<u>En outre, la condition (7) est vérifiée lorsque</u>

$$(8)\qquad \tilde{\sigma}^\varepsilon(M_n,t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0,\ \underline{\text{pour tout}}\ \ t\in\mathbb{R}_+.$$

<u>On remarque que si les</u> M_n <u>sont quasi-continues à gauche, alors</u> $[M_n,M_n]=\sigma^\varepsilon(M_n)$ <u>et</u> $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|\Delta\underline{M}_n(t)\|\leq 2\varepsilon$ $(n\in\mathbb{N})$.

$$(\rho_{C^d}(x,y) = \Sigma_{N=1}^\infty\ 2^{-N}(\rho^N_{C^d}(x,y)/(1+\rho^N_{C^d}(x,y))),\ \rho^N_{C^d}(x,y) =$$

$$= \sup_{t\in[0,N]}\|\ x(t)-y(t)\ \|\ ,\ x,\ y\in D^d)$$

D'abord, la condition (7) entraîne que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $1\leq i\leq d$,

$$(9)\qquad <(\overline{M}_n^\varepsilon)^i,\ (\overline{M}_n^\varepsilon)^i>(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

et par conséquent $(M_n^i\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $((\underline{M}_n^\varepsilon)^i\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües (d'après les inégalités II.2.3). On en déduit la C^d-contiguïté de $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(\underline{M}_n^\varepsilon\ ;\ n\in\mathbb{N})$.

Ensuite d'après (6), pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $1\leq i,\ j\leq d$, $n\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{t\in[0,N]}|<(\overline{M}_n^\varepsilon)^i,\ (\overline{M}_n^\varepsilon)^j>(t)|\leq$$

$$\leq(<(\overline{M}_n^\varepsilon)^i,\ (\overline{M}_n^\varepsilon)^i>(N))^{1/2}\ (<\overline{M}_n^\varepsilon)^j,\ (\overline{M}_n^\varepsilon)^j>(N))^{1/2}$$

et puisque

$$(<M^i,M^j> - <(\underline{M}^\varepsilon)^i,(\underline{M}^\varepsilon)^j>)^* \leq <(\overline{M}^\varepsilon)^i,(\overline{M}^\varepsilon)^j>^* + 2<(\underline{M}^\varepsilon)^i,(\overline{M}^\varepsilon)^j>^*$$

nous avons pour $1 \leq i,\ j \leq d$

$$\rho_c(<M_n^i,M_n^j>, <(\underline{M}_n^\varepsilon)^i,\ (\underline{M}_n^\varepsilon)^j>) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

On en déduit la C^{dd}-contiguïté de $(<M_n,M_n> ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(<\underline{M}_n^\varepsilon,\underline{M}_n^\varepsilon>;\ n\in\mathbb{N})$.

Si (8) est vérifiée, alors (7) découle de (3) et (4), des inégalités II.2.1 et de (6).

Enfin, la dernière remarque de la propriété est évidente, (il suffira d'observer que pour toute martingale locale d-dimensionnelle, somme compensée de sauts, soit M, on a $[M,M] = \sum_{s\leq o} (\Delta M(s))^t\ (\Delta M(s)))$.

7. DEFINITION

Soit $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus telle que chaque $M_n \in (\underline{\underline{M}}_o^{2,loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}])^d$. Nous dirons que $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ satisfait la condition de raréfaction asymptotique des sauts (resp. condition forte de raréfaction asymptotique des sauts) si pour tout $\varepsilon>0,\ t\in\mathbb{R}_+$

$$<\overline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon>(t) + S(\underline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon)(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

(resp. $\tilde{\sigma}^\varepsilon(M_n,t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$).

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principal résultat de ce paragraphe.

8. THEOREME

Soient $A\in \underline{\underline{A}}[D^d,D^{dd}]$ de type positif, V un élément $\mathbb{B}^o$-prévisible de $\underline{\underline{A}}[D^d,D^d]$, $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus d-dimensionnels telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n = X_n(0) + M_n + V_n$ où $M_n \in (\underline{\underline{M}}_o^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])^d$, $V_n \in (\underline{\underline{V}}_{loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}])^d$ et $X_n(0) = x_n$, $(x_n \in \mathbb{R}^d)$.

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) Il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$,

$$<\overline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon>(t) + S(\underline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon)(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

(2) Il existe une fonction $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^d$ dont chaque composante a^i est croissante continue à droite et $A^{ii}(w,t) \leq a^i(t)$, pour tout $(w,t) \in D^d \times \mathbb{R}_+$, $1 \leq i \leq d$.

(3) Les suites $(\dot{A}^{ii}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-tendues et les suites $(\dot{V}^i(X_n)\ n\in\mathbb{N})$ vérifient les hypothèses II.1.3. (1) et II.1.3.(2) (qui sont en particulier satisfaites lorsque les suites $(\dot{V}^i(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-tendues) pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$.

(4) Les suites $(\langle M_n^i, M_n^j\rangle\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(\dot{A}^{ij}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ (resp. $(V_n^i\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(\dot{V}^i(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües pour tous $i,j\in\{1,\dots,d\}$.

(5) La suite $(x_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge dans $\mathbb{R}^d$ vers x.

Alors $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D^d-tendue ; tout point d'adhérence P de $(\mathcal{L}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ appartient à Prob(x,A,V) et $P(\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|\Delta M(t)\| \leq 2\varepsilon) = 1$, où, $M = X-V-x$.

En particulier, si au lieu de (1) la condition de raréfaction asymptotique des sauts est vérifiée, alors $P(C^d) = 1$.

Démonstration : La démonstration de ce Théorème est maintenant entièrement analogue à celle du Théorème II.4.9. Aussi nous nous contenterons d'indiquer les principales étapes et prendrons pour simplifier $x_n=x=0$, $(n\in\mathbb{N})$.

1°). (3) et (4) entraînent que pour tout $i(1\leq i\leq d)$ $(X_n^i\ ;\ n\in\mathbb{N})$ vérifie II.1.3(1) et II.1.3.(2) (voir démonstration du Théorème II.4.9., Proposition II.3.1. et appliquer les inégalités triangulaires. Par conséquent, d'après la Remarque 6.1), $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue.

2°). On pose $P_n = \mathcal{L}(X_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ et on choisit une sous-suite $(P_{n_r}\ ;\ r\in\mathbb{N})$ convergente étroitement, de limite P. (4) et le fait que $A\in \underline{\underline{A}}[D^d,\mathcal{D}^{dd}]$ et $V\in \underline{\underline{A}}[D^d,\mathcal{D}^d]$ entraînent que

$$\mathcal{L}(\langle M_{n_r}, M_{n_r}\rangle) \underset{r\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{A}^{-1}$$

$$\mathcal{L}(V_{n_r}) \underset{r\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{V}^{-1}$$

On en déduit que $A \in (\underline{\underline{V}}_c^{loc}[\mathbb{B}(P),P])^{dd}$ et $V\in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{B}(P),P])^d$.

3°). On introduit les applications :

$$\dot{H}(w) = H(w,.) = w - V(w,.)$$
$$\dot{J}(w) = J(w,.) = H(w,.)\,{}^tH(w,.) - A(w,.), \quad (w \in D^d).$$
$$\dot{H} : D^d \to D^d, \; \dot{J} : D^d \to D^{dd}.$$

Ces applications étant continues, il vient

$$P_{n_r}\dot{H}^{-1} \underset{r\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{H}^{-1} \quad \text{et} \quad P_{n_r}\dot{J}^{-1} \underset{r\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{J}^{-1}.$$

Puis on montre que $(\dot{H}(X_n) \; ; n\in\mathbb{N})$ et $(M_n \; ; n\in\mathbb{N})$ (resp. $(\dot{J}(X_{n_r}) \; ; r\in\mathbb{N})$ et $(M_{n_r}{}^tM_{n_r} - \langle M_{n_r}, M_{n_r}\rangle \; ; r\in\mathbb{N}))$ sont C^d-contigües (resp. C^{dd}-contigües). (Voir Remarque 9 ci-dessous).

Par conséquent,

$$\mathcal{L}(M_{n_r}) \underset{r\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{H}^{-1}$$
$$\mathcal{L}(M_{n_r}{}^tM_{n_r} - \langle M_{n_r}, M_{n_r}\rangle) \underset{r\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{J}^{-1}$$

4°). Ensuite on pose $N_r = \underline{M}^{\varepsilon}_{n_r}$ $(r\in\mathbb{N})$.
L'hypothèse (1) entraîne (voir remarque 6) que $(N_r \; ; n\in\mathbb{N})$ et $(M_{n_r} \; ; r\in\mathbb{N})$ (resp. $(\langle N_r, N_r\rangle ; r\in\mathbb{N})$ et $(\langle M_{n_r}, M_{n_r}\rangle ; r\in\mathbb{N}))$ sont C^d-contigües (resp. C^{dd}-contigües).

Soit $\eta>0$. Définissons pour tout $r\in\mathbb{N}$, tout i $\{1,\dots,d\}$,

$$S_r^i = \inf\{t>0 : \langle N_r^i, N_r^i\rangle(t) > a^i(t) + \eta\}$$
$$(\inf \emptyset = +\infty).$$

Et soit $S_r = \inf_{1\le i\le d} S_r^i$.

S_r est un temps d'arrêt prévisible de $\mathbb{F}_{n_r}$, il existe alors une suite $(S_{rm} \; ; m\in\mathbb{N})$ annonçant $S_r(r\in\mathbb{N})$. Les hypothèses (4) et (2) entraînent que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(S_r \le N) \underset{r\uparrow\infty}{\to} 0$$

Il existe alors une sous-suite $T_r = S_{rm_r}$, $r\in\mathbb{N}$, telle que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T_r \le N) \underset{r\uparrow\infty}{\to} 0$.

Sur $[\![0,T_r]\!]$ on a que $<N_r^i, N_r^i>(\omega,t) \leq a^i(t) + \eta$ pour $1 \leq i \leq d$.

On pose
$$\mathbf{L}_r = \begin{pmatrix} L_r^1 \\ \vdots \\ L_r^d \end{pmatrix}, \text{ où } L_r^i = (N_r^i)^{T_r}, \ (1 \leq i \leq d, \ r \in \mathbb{N}).$$

On montre ensuite, comme dans II.4.2, que $(L_r^i(t) \ ; \ r \in \mathbb{N})$ est équi-intégrable pour tous $i \in \{1,\ldots,d\}$, $t \in \mathbb{R}_+$. D'après ce qui précède, $(L_r \ ; \ r \in \mathbb{N})$ et $(M_{n_r} \ ; \ r \in \mathbb{N})$ sont C^d-contigües ; $(<L_r, L_r> ; \ r \in \mathbb{N})$ et $(<M_{n_r}, M_{n_r}> ; \ r \in \mathbb{N})$ sont C^{dd}-contigües. En outre, $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} ||\Delta L_r(t)|| \leq 2\varepsilon$, $(r \in \mathbb{N})$.

Par conséquent,
$$\mathcal{L}(L_r) \underset{r \uparrow \infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{H}^{-1}$$

$$\mathcal{L}(L_r \, {}^tL_r - <L_r, L_r>) \underset{r \uparrow \infty}{\overset{e}{\to}} P\dot{J}^{-1}$$ (Voir Remarque 9 ci-dessous)

On applique alors la Remarque 6.2) et on obtient que $P \in \underline{\underline{\text{Prob}}}(0,A,V)$.

Pour montrer que $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} ||\Delta M(t)|| \leq 2\varepsilon$, P-p.s., on montre que
$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} ||\Delta X(t)|| \leq 2\varepsilon, \ P\dot{H}^{-1} \text{ p.s.}$$

Pour cela on procède comme dans II.4.2 en introduisant
$$W^N_{C^d}(X,\delta) = \sup_{\substack{|t-s|<\delta \\ t,s \in [0,N]}} ||X(t)-X(s)|| \ , \ (\delta > 0, \ N \in \mathbb{N}^*)$$

$$\overset{\circ}{W}{}^N_{D^d}(X,\delta) \ \inf_{(t_i)} \ \max_{0 \leq i \leq n} \ \sup_{t_{i-1} \leq s,t < t_i} ||X(s)-X(t)||$$

où l'inf est pris sur l'ensemble des partitions finies $\{t_o,\ldots,t_n\}$ de $[0,N]$ vérifiant :
$$0 = t_o < t_1 < \ldots < t_n = N$$
$$t_i - t_{i-1} > \delta \ , \ i = 1,2,\ldots,n \qquad (\delta > 0, \ N \in \mathbb{N}^*).$$

9. <u>REMARQUES</u>

1) Dans les étapes 3°) et 4°) on se sert de la Remarque II.4.1.3.)

pour montrer que $(\dot{J}(X_{n_r}),\ r\in\mathbb{N})$ et $(M_{n_r}\,{}^tM_{n_r} - \langle M_{n_r}, M_{n_r}\rangle ;\ r\in\mathbb{N})$ (resp. $(M_{n_r}\,{}^tM_{n_r} ;\ r\in\mathbb{N})$ et $(L_r\,{}^tL_r ;\ r\in\mathbb{N})$) sont C^{dd}-contigües.

En effet, pour avoir la propriété pour les deux premières suites, il suffira de montrer que pour tous $i,j\in\{1,\dots,d\}$, tout $N\in\mathbb{N}^*$, l'expression (où nous avons écrit $n_r=n$ pour simplifier) $S_n^{ij}(N)$ où

$$S_n^{ij}(N) = (V_n^i-\dot{V}^i(X_n))^*(N)(X_n^j)^*(N) + (X_n^i)^*(N)(V_n^i-\dot{V}^i(X_n))^*(N)$$

$$+ (\dot{V}^i(X_n)\dot{V}^j(X_n) - V_n^i\,V_n^j)^*(N) + (\langle M_n,M_n\rangle^{i,j}-\dot{A}^{ij}(X_n))^*(N)$$

converge vers zéro en probabilité quand $n\uparrow\infty$.

Le premier et le second terme de $S_n^{ij}(N)$ convergent vers zéro en probabilité quand $n\uparrow\infty$, ceci découle de l'hypothèse 8.(4) et du fait que $(X_n ;\ n\in\mathbb{N})$ (en réalité $(X_{n_r} ;\ r\in\mathbb{N})$) converge en loi (voir II.4.1.3)).

Le dernier terme de $S_n^{ij}(N)$ converge vers 0 en probabilité quand $n\uparrow\infty$ en vertu de 8(4).

Quant au troisième terme, on écrit d'abord

(1) $$\dot{V}^i(X_n)\dot{V}^j(X_n) - V_n^iV_n^j = (\dot{V}^i(X_n) - V_n^i)\ \dot{V}^j(X_n) + V_n^i(\dot{V}^j(X_n)-V_n^j)$$

(2) $$(\dot{V}^i(X_n)\dot{V}^j(X_n) - V_n^iV_n^j)^*(N) \leq$$

$$\leq(\dot{V}^i(X_n) - V_n^i)^*(N)\ (\dot{V}^j(X_n))^*(N) + (V_n^i)^*(N)\ (\dot{V}^j(X_n)-V_n^j)^*(N).$$

Puis on remarque que $(V_n^i ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(V^j(X_n) ;\ n\in\mathbb{N})$ convergent en loi (considérées comme sous-suites) et l'hypothèse 8.(4) permettent d'utiliser la Remarque II.4.1.3).

On procède de la même façon pour montrer la C-contigüité de $(M_{n_r}\,{}^tM_{n_r} ;\ r\in\mathbb{N})$ et $(L_r\,{}^tL_r ;\ r\in\mathbb{N})$. On décompose $M_n^iM_n^j-L_n^iL_n^i$ sous la forme (1) et on obtient une inégalité analogue à (2) permettant d'utiliser la Remarque II.4.1.3).

2) S'il y a unicité (en loi) des solutions au problème de martingales (x,A,V), le Théorème 8 entraîne la convergence étroite de $(\mathcal{L}(X_n) ;\ n\in\mathbb{N})$ vers la solution P de ce problème.

Nous appliquerons cette remarque dans le chapitre III où nous étudierons l'approximation des diffusions dans $\mathbb{R}^d$. Pour l'instant nous nous bornerons à dégager une version multi-dimensionnelle du Théorème Central Limite du paragraphe II.4. Pour cela, nous considérons un élément $A \in \underline{\underline{A}}^+[D^d, D^{dd}]$ de type positif de la forme :

$$A^{ij}(w,t) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j,$$

$$A^{ii}(w,t) = A^i(t), \ (1 \leq i,j \leq d, \ t \in \mathbb{R}_+, \ w \in D^d),$$

où A^i est une fonction croissante continue de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, $A^i(0) = 0$ $(1 \leq i \leq d)$.

Une généralisation immédiate du Théorème de KUNITA et WATANABE ([10], voir également [27]) permet d'assurer qu'il existe une seule $P \in \underline{\underline{\text{Prob}}}(0,A,0)$ telle que $P(C^d) = 1$. Le processus canonique

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^d \end{pmatrix}$$

est alors une $(\mathbb{B}(P),P)$-martingale gaussienne continue, centrée, telle que pour $i \neq j$, X^i est indépendante de X^j et la covariance de X^i est $K^i(s,t) = A^i(s \wedge t)$, $(1 \leq i, \ j \leq d, \ s, \ t \in \mathbb{R}_+)$.

10. COROLLAIRE

Soit A un élément de $\underline{\underline{A}}[D^d, D^{dd}]$ de la forme 9.2).(1). Soit $(X_n \ ; \ n \in \mathbb{N})$ une suite de semi-martingales vectorielles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X_n(0) = 0$ et $X_n = M_n + V_n$ avec $M_n \in (\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_n, \mathbb{P}])^d$, V_n à variations finies, vérifiant les hypothèses suivantes :

(1) $(M_n \ ; \ n \in \mathbb{N})$ satisfait la condition de raréfaction asymptotique des sauts ;

(2) pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$, tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\langle M_n^i, M_n^i \rangle(t) \underset{n\uparrow\infty}{\rightarrow} A^i(t) \ ;$$

(3) pour tous $i,j \ \ \{1,\dots,d\}$, $i \neq j$, $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{t \in [0,N]} |\langle M_n^i, M_n^j \rangle(t)| \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} 0$$

(4) pour tous $i,j \in \{1,\dots,d\}$, $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{t \in [0,N]} |V_n^i(t)| \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} 0$$

Alors $\mathcal{L}(X_n) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{e}{\rightarrow}} P$ où $P \in \underline{\underline{\text{Prob}}}(0,A,0)$ et $P(C^d) = 1$.

(P est la loi d'une martingale vectorielle continue, gaussienne, à composantes deux à deux indépendantes et centrées).

11. REMARQUE

Nous avons séparé l'hypothèse de la C-contigüité de $(<M_n,M_n>;\ n\in\mathbb{N})$ et $(\dot{A}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ en deux conditions ((2 et (3)) dans le Corollaire 10. En effet, puisque A^i est une fonction croissante continue et que le processus $<M_n^i,M_n^i>$ sont croissants, l'hypothèse (2) entraîne que $\sup_{t\in[0,N]} |<M_n^i,M_n^i>(t) - A^i(t)| \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} 0$. Par contre, nous ne pouvons espérer une telle simplification quand il s'agit d'écrire la C-contiguité de $(<M_n^i,M_n^j>;\ n\in\mathbb{N})$ et de $(A^{ij}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ pour $i\neq j$, car les processus $(<M_n^i,M_n^j>;\ n\in N)$ ne sont pas croissants. Aussi on voit l'importance de travailler avec des suites de martingales locales $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ où les composantes sont deux à deux orthogonales.

L'orthogonalité des composantes simplifie également l'hypothèse de raréfaction asymptotique des sauts. En effet, nous verrons que dans ce cas l'hypothèse 10(1) est satisfaite si et seulement si chaque composante vérifie la condition de raréfaction (unidimensionnelle) des sauts. Prenons une martingale locale vectorielle M, localement de carré intégrable $M(0) = 0$, dont les composantes M^i sont orthogonales. Alors tout temps de saut T de M est un temps de saut d'une seule composante. Si l'on se donne une suite $(T_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ de temps d'arrêt épuisant les sauts de M, on peut la séparer en d suites $(T_n^i\ ;\ n\in\mathbb{N})$ $(1\leq i\leq d)$, où $(T_n^i\ ;\ n\in N)$ épuise les sauts de M^i. Nous avons ainsi, pour tout $\varepsilon>0$,

(1) $$(\Delta M(T_n)\, I_{[\,\|\Delta M(T_n)\|>\varepsilon]})^i = \Delta M^i(T_n^i)\, I_{[\,|\Delta M^i(T_n^i)|>\varepsilon]}$$

si $T_n = T_n^i$, $(1\leq i\leq d,\ n\in\mathbb{N})$.

Par conséquent,

(2) $$A^\varepsilon = \Sigma_{i=1}^d A_i^\varepsilon, \text{ où } A^\varepsilon(t) = \sum_{s\leq t} \Delta M(s)\, I_{[\,\|\Delta M(s)\|>\varepsilon]}\ ;$$

$$A_i^\varepsilon = \begin{pmatrix} A_i^1 \\ \vdots \\ A_i^d \end{pmatrix} \text{ où } A_i^j(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ \sum_{s \leq t} \Delta M^i(s)\, I_{[\,|\Delta M^i(s)|>\varepsilon]}, & \text{si } j=i \end{cases}$$

$(1 \leq i \leq d,\ t \in \mathbb{R}_+)$.

Il en découle que

$\overline{M}^\varepsilon = A^\varepsilon - \widetilde{A}^\varepsilon = \Sigma_{i=1}^d L_i$, où $L_i = A_i^\varepsilon - \widetilde{A}_i^\varepsilon$ $(1 \leq i \leq d)$;

(3) $<\overline{M}^\varepsilon, \overline{M}^\varepsilon> = \Sigma_{i=1}^d <L_i, L_i>$ car $<L_i, L_j>$ est la matrice nulle.

On remarque que les composantes de L_i sont égales à

$$L_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ \overline{(M^i)^\varepsilon} & \text{si } j=i \end{cases} \qquad (1 \leq i,\ j \leq d)$$

Et

(4) $$<L_i, L_i>^{kj} = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq i \text{ ou } j \neq i \\ <\overline{(M^i)^\varepsilon}, \overline{(M^i)^\varepsilon}>, & \text{si } k=j=i \end{cases}$$
$(1 \leq i,\ j,k \leq d)$

De même on peut montrer que $S(\underline{M}^\varepsilon, \overline{M}^\varepsilon)$ est la matrice de composantes $S_{ij}(M) = \widetilde{[(\underline{M}^i)^\varepsilon, (\overline{M}^j)^\varepsilon]}^*$.

Considérons maintenant une suite $(M_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ de martingales locales vérifiant les conditions précédentes et supposons que pour tout $i=1,\ldots,d$, $(M_n^i\ ;\ n \in \mathbb{N})$ satisfait la condition de raréfaction asymptotique des sauts et que $(<M_n^i, M_n^i>\ ;\ n \in \mathbb{N})$ est C-tendue. Alors $([(\underline{M}_n^i)^\varepsilon, (\underline{M}_n^i)^\varepsilon]\ ;\ n \in \mathbb{N})$ est D-tendue pour tout $\varepsilon > 0$ (Corollaire II.3.12 et Théorème II.3.2) et cette suite vérifie en particulier la condition II.3.8.(2). Or, d'après l'hypothèse faite sur les sauts, $S_{ii}(M_n)(t) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} 0$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ et d'après les inégalités de KUNITA et WATANABE,

(5) $$S_{ij}(M_n) \leq \widetilde{[(\underline{M}_n^i)^\varepsilon, (\underline{M}_n^i)^\varepsilon]^{1/2}\, [(\overline{M}_n^j)^\varepsilon, (\overline{M}_n^j)^\varepsilon]^{1/2}}$$

Il est alors facile de déduire que $S_{ij}(M_n)(t) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} 0$ en vertu de

II.3.8.(2) et du fait que $<(\overline{M}_n^j),(\overline{M}_n^j)^\varepsilon>(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \quad (t\in\mathbb{R}_+)$.

On aura alors que $S(\underline{M}_n^\varepsilon,\overline{M}_n^\varepsilon)(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \ (t\in\mathbb{R}_+)$ et de (4) et (3) on obtient finalement que $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ satisfait la condition de raréfaction asymptotique des sauts.

12. COROLLAIRE

Soit $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus vectoriels telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $M_n \in (\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}])^d$ et ses composantes sont orthogonales.

Supposons que pour tout $i=1,\dots,d$, les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) $(M_n^i\ ;\ n\in\mathbb{N})$ satisfait la condition de raréfaction asymptotique des sauts ;

(2) $<M_n^i,M_n^i>(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A^i(t)$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, où A^i est une fonction croissante continue de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, $A^i(0) = 0$.

Alors $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge en loi vers une martingale vectorielle gaussienne continue (canonique) dont les composantes sont indépendantes. La fonction A^i est le processus croissant associé à la i-ième martingale composante $(1\leq i\leq d)$.

Lorsque $A^i(t) = t$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ tout $i=1,\dots,d$, on obtient ainsi un critère de convergence en loi vers le mouvement Brownien d-dimensionnel.

Nous avons démontré ce corollaire dans [35] par d'autres méthodes, sans passer par le Théorème 8. Il y a été appliqué à l'étude statistique d'une famille de processus ponctuels.

III - QUELQUES CAS PARTICULIERS

III.1 - THEOREMES LIMITES CENTRAUX POUR LES MARTINGALES A TEMPS DISCRET

1. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o)$ un espace mesurable et soit $\mathbb{G}^o = (\underline{\underline{G}}^o_m\ ;\ m \in \mathbb{N})$ une filtration discrète sur cet espace. Nous supposons $\underline{\underline{F}}^o = \underline{\underline{G}}^o_\infty$.

Un processus croissant $\tau = (\tau(t),\ t \in \mathbb{R}_+)$ continu à droite, nul à l'origine et en escalier est appelé un changement de temps discret de $\mathbb{G}^o$ si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\tau(t) \in \mathbb{N}$ et est un temps d'arrêt de $\mathbb{G}^o$. Nous supposerons toujours $\tau(\infty) = \lim\limits_{t\uparrow\infty} \tau(t) = +\infty$.

Nous désignerons par $\mathbb{G}^o{}_\circ\tau$ la filtration $\mathbb{G}^o$ "changée de temps", c'est-à-dire $\mathbb{G}^o{}_\circ\tau = (\underline{\underline{G}}^o_{\tau(t)}\ ;\ t \in \mathbb{R}_+)$. Si $A = (A(m)\ ;\ m \in \mathbb{N})$ est un processus (à temps discret ou suite) $\mathbb{G}^o$-adapté, $A_\circ\tau = (A(\tau(t))\ ;\ t \in \mathbb{R}_+)$ est $\mathbb{G}^o{}_\circ\tau$-adapté.

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o)$. Comme d'habitude nous complétons toutes les tribus et nous supprimons le "$\circ$" dans nos notations. On voit aisément que la filtration $\mathbb{G}_\circ\tau$ satisfait aux conditions habituelles.

2. LEMME

Soit τ un changement de temps discret de $\mathbb{G}$ vérifiant en outre la condition $\Delta\tau(t) = 0$ ou 1 pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Tout processus $A = (A(m)\ ;\ m \in \mathbb{N})$ $\mathbb{G}$-prévisible est changé par τ en un processus $A_\circ\tau$, $\mathbb{G}_\circ\tau$-prévisible si et seulement si τ est $\mathbb{G}_\circ\tau$-prévisible.

Démonstration : τ est en fait un processus ponctuel non explosif. Désignons par $(T_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ la suite de ses temps de saut.

$$T_0 = 0$$

$$T_\infty = \lim_n T_n = +\infty$$

$$\tau(\omega,t) = n \quad \text{sur} \quad [\![T_n, T_{n+1}[\![,\ (n \in \mathbb{N}).$$

La tribu prévisible $\underline{\underline{P}}(\mathbb{G})$ sur $\Omega \times \mathbb{N}$ est engendrée par les ensembles de la forme $E \times \{n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, où $E \in \underline{\underline{G}}_{n-1}$.

Si τ est $\mathbb{G}_\circ\tau$-prévisible, chaque temps d'arrêt T_n $(n \in \mathbb{N})$ est prévisible. Posons $\underline{\underline{F}}_t = \underline{\underline{G}}_{\tau(t)}$ $(t \in \mathbb{R}_+)$; $\mathbb{F} = (\underline{\underline{F}}_t\ ;\ t \in \mathbb{R}_+)$. Il est clair que $\underline{\underline{F}}_{T_n} = \underline{\underline{G}}_{\tau(T_n)} = \underline{\underline{G}}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ et que tout élément B de $\underline{\underline{F}}_t$ s'écrit comme une réunion disjointe :

(1) $\qquad B = \sum_n G_n \cap \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$, où $G_n \in \underline{\underline{G}}_n$ $(n \in \mathbb{N})$

D'autre part, la tribu $\underline{\underline{F}}_{T_n^-}$ est engendrée par les ensembles de la forme $B \cap \{t < T_n\}$ où $B \in \underline{\underline{F}}_t$. D'après (1) il s'en suit que $\underline{\underline{F}}_{T_n^-}$ est engendrée par les ensembles de la forme $G_{n-1} \cap \{T_{n-1} \leq t < T_n\}$, $G_{n-1} \in \underline{\underline{G}}_{n-1}$. Or $\{T_{n-1} \leq t < T_n\} = \{\tau(t) = n-1\} \in \underline{\underline{G}}_{n-1}$ et par conséquent $\underline{\underline{F}}_{T_n^-} = \underline{\underline{G}}_{n-1} = \underline{\underline{F}}_{T_{n-1}}$.

Montrons que l'application $\tau : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \Omega \times \mathbb{N}$ est $\underline{\underline{P}}(\mathbb{F})/\underline{\underline{P}}(G)$-mesurable ; c'est équivalent à prouver que tout A $\mathbb{G}$-prévisible est changé par τ en un processus $A \circ \tau$ ($\mathbb{G} \circ \tau$-prévisible). Soient $n \in \mathbb{N}$, $E \in \underline{\underline{G}}_{n-1}$. Si T est un temps d'arrêt de $\mathbb{F}$ notons

$$T_E(\omega) = \begin{cases} T(\omega) & \text{si } \omega \in E \\ +\infty & \text{si } \omega \notin E. \end{cases}$$

Alors,

$$\tau^{-1}(E \times \{n\}) = \{(\omega,t) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}_+ : \omega \in \Omega,\ T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega)\} =$$
$$= [\![(T_n)_E\, ,\ (T_{n+1})_E [\![.$$

Or, puisque $E \in \underline{\underline{F}}_{T_n^-}$ et que T_n est prévisible,

$[\![(T_n)_E, (T_{n+1})_E [\![\in \underline{\underline{P}}^n(\mathbb{F})$ (c.f. [5], III.T 49), donc τ est $\underline{\underline{P}}(\mathbb{F})/\underline{\underline{P}}(G)$-mesurable.

Réciproquement, si tout A $\mathbb{G}$-prévisible est transformé par τ en un processus $A \circ \tau$ $\mathbb{F}$-prévisible, alors τ lui-même est $\mathbb{F}$-prévisible car il est le processus changé de temps de l'identité sur $\mathbb{N}$. ■

Nous noterons $\Theta(\mathbb{G})$ l'ensemble de changements de temps discrets θ de $\mathbb{G}$ tels que $\Delta\theta(t) = 0$ ou 1 pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et θ est $\mathbb{G} \circ \theta$ prévisible.

3. LEMME

Soit $A = (A(m)\ ;\ m \in \mathbb{N})$ une suite strictement croissante, $\mathbb{G}$-prévisible, $A(0) = 0$, $A(m) < \infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $A(\infty) = \lim A(m) = +\infty$. Soit θ le processus défini par $\theta(t) = \inf\{m \in \overline{\mathbb{N}} : A(m+1 > t\}$, $(t \in \mathbb{R}_+)$. Alors $\theta \in \Theta(\mathbb{G})$.

Démonstration : Puisque $A(.+1)$ est $\mathbb{G}$-adaptée, $\theta(t)$ est un $\mathbb{G}\circ\theta$-temps d'arrêt pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. D'autre part θ est croissant, continu à droite et l'amplitude des sauts de θ est égale à 1 car A n'est pas constant pour deux entiers consécutifs (c.f. [5], IV, T 43, 45). Appelons $(T_n \ ; n \in \mathbb{N})$ la suite d'instants de saut de θ. Nous avons que $T_0 = 0$ et $T_\infty = \infty$ car $\theta(0) = 0$, $\theta(t) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on a les relations

$\theta(A(n)) = n$, $A(\theta(t)+1) > t \geq A(\theta(t))$ et $T_{n+1} = A(\theta(T_{n+1})) = A(n+1)$ $(n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+)$. Montrons que chaque T_n est un temps d'arrêt $\mathbb{G}\circ\tau$ prévisible. En effet, définissons la suite

$U_m = T_n + (1 - \frac{1}{m})(T_{n+1} - T_n)$ sur $\{T_n < \infty\}$ et $U_m = \infty$ sur $\{T_n = \infty\}$. D'après les relations précédemment établies, T_{n+1} est $\underline{\underline{G}}_n$-mesurable et chaque U_m est $\underline{\underline{F}}_{T_n}$-mesurable (où $\underline{\underline{F}}_t = \underline{\underline{G}}_{\theta(t)}$, $t \in \mathbb{R}_+$). D'autre part,

$$T_n \leq U_m \leq T_{n+1} \quad \text{et} \quad U_m < T_{n+1} \quad \text{sur} \quad \{0 < T_{n+1} < \infty\}.$$

Donc, d'après [5], III.T.16, U_m est un temps d'arrêt de $\mathbb{F}$.

Puisque la suite $(U_m \wedge m \ ; m \geq 1)$ annonce T_{n+1}, le lemme est démontré. ∎

4. Considérons maintenant une suite $(\mathbb{G}_n \ ; n \in \mathbb{N})$ de filtrations (complètes) sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$, vérifiant les conditions du n° 1 ci-dessus. $(\mathbb{G}_n = (\underline{\underline{G}}_{n,m} \ ; m \in \mathbb{N}))$.

Soit $(M_n \ ; n \in \mathbb{N})$ une suite de processus tel que chaque $M_n = (M_n(m) \ ; m \in \mathbb{N})$ soit une $\mathbb{G}_n$-martingale vérifiant en outre

(1) $\quad \mathbb{E}(M_n^2(m)) < \infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$,

(2) $\quad M_n(0) = 0$.

Nous avons alors la proposition suivante :

5. PROPOSITION

Soit A une fonction croissante continue définie sur $\mathbb{R}_+$, $A(0) = 0$. Sous les hypothèses du n° 4, supposons qu'il existe une suite $(\theta_n \ ; n \in \mathbb{N})$ de processus telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, θ_n soit un élément de $\Theta(\mathbb{G}_n)$ et que en outre

$$(1) \qquad \Sigma_{k=1}^{\theta_n(t)} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}} (\xi_{n,k}^2 \, I_{[\,|\xi_{n,k}| > \varepsilon]}) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0,$$

pour tous $t \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$;

$$(2) \qquad \Sigma_{k=1}^{\theta_n(t)} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}} \xi_{n,k}^2 \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+{}^{(*)}$$

(où $\xi_{n,k} = M_n(k) - M_n(k-1)$, $k \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$).

Alors $(M_n \circ \theta_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ converge en loi vers une martingale gaussienne continue, de processus croissant associé A.

Démonstration : On voit aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $A_n = (A_n(m) \; ; \; m \in \mathbb{N})$ où $A_n(m) = \Sigma_{k-1}^{m} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}} \xi_{n,k}^2$ si $m \in \mathbb{N}$ est G_n-prévisible et $M_n^2 - A_n$ est une G_n-martingale. C'est-à-dire A_n est le processus croissant (prévisible) associé à la martingale M_n. D'après le théorème d'arrêt de DOOB, $M_n \circ \theta_n$ et $M_n^2 \circ \theta_n - A_n \circ \theta_n$ sont des $\mathbb{G}_n \circ \theta_n$-martingales. D'après le Lemme 2, $A_n \circ \theta_n$ est $\mathbb{G}_n \circ \theta_n$-prévisible et nous aurons donc que $\langle M_n \circ \theta_n, M_n \circ \theta_n \rangle$ existe et il est égal à $A_n \circ \theta_n$. Il en découle en outre que $M_n \circ \theta_n \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc} [\mathbb{G}_n \circ \theta_n, \mathbb{P}]$ (c.f. [18])

Nous avons ainsi que l'hypothèse (2) ci-dessus représente l'hypothèse II.4.5 (2) pour la suite $(M_n \circ \theta_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$. De même on voit facilement que l'hypothèse (1) ci-dessus représente l'hypothèse forte de raréfaction asymptotique des sauts pour $(M_n \circ \theta_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$. On applique alors le Théorème II.4.5 et on achève ainsi la démonstration. ∎

6. La proposition contient déjà - à titre de corollaire - un bon nombre de résultats classiques (Théorème de DONSKER ou Principe d'Invariance, Principe d'Invariance pour les Martingales à temps discret, etc...). Cependant, on peut améliorer encore ce résultat en relâchant un peu les hypothèses sur les changements de temps.

Conservons les notations de la Proposition 5 mais, cette fois ci la suite $(\theta_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ sera fixé par la définition

$$\theta_n(t) = \inf\{m \in \overline{\mathbb{N}} : A_n(m+1) > t\}, \; (n \in \mathbb{N}, \; t \in \mathbb{R}_+), \text{ où } (A_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$$

est la suite introduite dans la démonstration de 5.

(*) Pour simplifier l'écriture nous conviendrons dans tout ce paragraphe que les sommes du type $\Sigma_{k=1}^{0}(\ldots)$ sont nulles.

D'autre part, nous supposerons $A(t) = t$, $(t \in \mathbb{R}_+)$ pour simplifier. Nous avons ainsi le lemme suivant.

7. LEMME

Soit $(\tau_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ une suite de processus telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, τ_n soit un changement de temps discret quelconque de $\mathbb{G}_n$. Si les hypothèses 5.(1) et 5.(2) sont vérifiées par $(\tau_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$, alors elles sont également vérifiées par $(\theta_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$.

Démonstration : $\zeta_{n,k} = \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}} \xi^2_{n,k}$ et

$\zeta^{\varepsilon}_{n,k} = \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}}(\xi^2_{n,k} \, I_{[\,|\xi_{n,k}| > \varepsilon]})$, $(\varepsilon > 0,\ (n,k) \in \mathbb{N}^2)$

Remarquons d'abord que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la suite $Z^N_n = \max\limits_{k \leq \tau_n(N)} \zeta_{n,k}$ $(n \in \mathbb{N})$ converge en probabilité vers zéro.

En effet, $Z^N_n \leq \sup\limits_{t \in [0,N]} \Delta(A_n \circ \tau_n)(t)$ et par conséquent pour tout $\varepsilon, \delta > 0$,

$\mathbb{P}(Z^N_n > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(W^N_C(A_n \circ \tau_n, \delta) > \varepsilon)$

Or, puisque $A_n \circ \tau_n(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A(t) = t$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ et que A est une fonction croissante continue, nous aurons $\rho^K_C(A_n \circ \tau_n, A) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$ pour tout $K \in \mathbb{N}^*$. Il s'en suit que $W^N_C(A_n \circ \tau_n, \delta) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} W^N_C(A, \delta)$.

Par conséquent,

$\limsup\limits_n \mathbb{P}(Z^N_n > \varepsilon) \leq \lim\limits_{\delta \downarrow 0} \mathbb{P}(W^N_C(A, \delta) > \varepsilon) = 0$

D'autre part, pour tous $N, K \in \mathbb{N}^*$ nous avons

(1) $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \mathbb{P}(\theta_n(N) + 1 > \tau_n(N+K)) = 0$

puisque $A_n \circ \tau_n(N+K) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} N+K$ et que $\theta_n(N) + 1 > \tau(N+K)$ si et seulement si $A_n \circ \tau_n(N+K) \leq N$.

Montrons maintenant que $A_n \circ \theta_n(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Or,

$A_n \circ \theta_n(t) \leq t < A_n \circ \theta_n(t) + \zeta_{n,\theta_n(t)+1}$

et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{t \in [0,N]} \zeta_{n,\theta_n(t)+1} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} 0$ car

$$\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,N]} \zeta_{n,\theta_n(t)+1} > \varepsilon) = \mathbb{P}(\max_{k \leq \theta_n(N)+1} \zeta_{n,k} > \varepsilon)$$

$$\leq \mathbb{P}(Z_n^{N+1} > \varepsilon,\ \theta_n(N)+1 \leq \tau_n(N+1)) + \mathbb{P}(\theta_n(N)+1 > \tau_n(N+1))$$

$$\leq \mathbb{P}(Z_n^{N+1} > \varepsilon) + \mathbb{P}(\theta_n(N)+1 > \tau_n(N+1))$$

pour tous $\varepsilon>0$, $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit ainsi que $\sup_{t \in [0,N]} |A_n \circ \theta_n(t) - t| \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} 0$ et que les suites $(A_n \circ \theta_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ et $(A_n \circ \tau_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ sont C-contigües.

Pour terminer, montrons que l'hypothèse 5.(1) est satisfaite par la suite $(\theta_n,\ n \in \mathbb{N})$. Or ceci est une conséquence immédiate de (1), du fait que 5.(1) est satisfaite par $(\theta_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ et de l'inégalité :

$$\mathbb{P}(\Sigma_{k=1}^{\theta_n(N)+1} \zeta_{n,k}^{\varepsilon} > \eta) \leq \mathbb{P}(\Sigma_{k=1}^{\tau_n(N+1)} \zeta_{n,k}^{\varepsilon} > \eta,\ \theta_n(N)+1 \leq \tau_n(N+1))$$

$$+ \mathbb{P}(\theta_n(N)+1 > \tau_n(N+1))$$

$$\leq \mathbb{P}(\Sigma_{k=1}^{\tau_n(N+1)} \zeta_{n,k}^{\varepsilon} > \eta) + \mathbb{P}(\theta_n(N)+1 > \tau_n(N+1))$$

pour tous $\varepsilon, \eta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$.

8. <u>REMARQUE</u>

Soit A une fonction continue croissante quelconque définie sur $\mathbb{R}_+$, telle que $A(0) = 0$ et $A(\infty) = \infty$. Remplaçons la suite $(\theta_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ du lemme précédent par $(\nu_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ où

$$\nu_n(t) = \theta_n(A(t)) = \inf\{ m \in \overline{\mathbb{N}} : A_n(m+1) > A(t)\}\ (n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_+).$$

Supposons que $(\tau_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ vérifie 5.(1) et 5.(2) avec la fonction A introduite ci-dessus. On peut montrer alors que $(\nu_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ satisfait 5.(1) et 5.(2) en répétant la démarche suivie dans la démonstration du Lemme 7. Le seul point qui nécessite être modifié est la propriété 7.(1). En effet, pour établir 7.(1) nous avons utilisé la croissance stricte de l'identité sur $\mathbb{R}_+$. Avec une fonction A qui n'est pas nécessairement strictement croissante il faut procéder d'une façon différente. Pour tous $N, r \in \mathbb{N}^*$, il existe

$K_{N,r} > 0$ tel que $A(N+K_{N,r}) - A(N) > 2^{-r}$. Puisque par hypothèse

$A_n \circ \tau_n(N+K_{N,r}) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A(N+K_{N,r})$, nous aurons que

$$(1') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \mathbb{P}(\nu_n(N)+1 > \tau_n(N+K_{N,r})) = 0$$

En remplaçant 7(1) par (1') (resp. $N+1$ par $N+K_{N,r}$) la démonstration du Lemme 7 s'étend donc au cas présent.

Supposons en outre que chaque A_n est strictement croissant et que $A_n(\infty) = +\infty$. Dans ce cas, θ_n est prévisible d'après le Lemme 3 et puisque A est une fonction continue, ν_n est $\mathbb{G}_n \circ \nu_n$-prévisible, $(n \in \mathbb{N})$. On voit aisément que $\Delta\nu_n(t) = 0$ ou 1 pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et que $\nu_n(\infty) = \infty$ car $A_n(m) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, l'hypothèse $A_n(\infty) = \infty\,(n \in \mathbb{N})$ entraîne que $\nu_n(t) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Il résulte alors que $\nu_n \in \Theta(\mathbb{G}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le rôle de la suite $(\nu_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ sera éclairé par le théorème suivant :

9. THEOREME

Soit $(M_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ une suite telle que chaque $M_n = (M_n(m) \,;\, m \in \mathbb{N})$ soit une $\mathbb{G}_n$-martingale à temps discret vérifiant $M_n(0) = 0$, $\mathbb{E}(M_n^2(m)) < \infty$, $(m \in \mathbb{N})$ et $\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}} \xi_{n,m} = +\infty$ où $0 \neq \xi_{n,m} \; M_n(m) - M_n(m-1)\,((n,m) \in \mathbb{N}^2)$.

Soit A une fonction continue croissante définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $A(0) = 0$ et $A(\infty) = \infty$.

Supposons qu'il existe une suite $(\tau_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ de processus telle que chaque τ_n soit un changement de temps discret de $\mathbb{G}_n$ et que

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\tau_n} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}} (\xi_{n,k}^2 \, I_{[\,|\xi_{n,k}|>\varepsilon]}) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

pour tous $t \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$;

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\tau_n(t)} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}} \xi_{n,k}^2 \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

Alors $(M_n \circ \tau_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ et $(M_n \circ \nu_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ convergent en loi vers une martingale gaussienne continue, de processus croissant associé A.

($(\nu_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ étant définie par :

$$\nu_n(t) = \inf\{m \in \overline{\mathbb{N}} : A_n(m+1) > A(t)\},\ n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_+ \text{ où } (A_n \,;\, n \in \mathbb{N})$$

est la suite définie dans 5).

<u>Démonstration</u> : D'après 7 et 8 $(\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ vérifie 5.(1) et 5.(2) et puisque $\nu_n \in \Theta(\mathbb{G}_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous obtenons le résultat pour $(M_n\circ\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ en appliquant la Proposition 5. Nous ne pouvons appliquer ni la Proposition 5 ni le Théorème II.4.5 à $(M_n\circ\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ car bien que chaque $M_n\circ\tau_n$ soit une $\mathbb{G}_n\circ\tau_n$-martingale d'après le Théorème d'arrêt de DOOB, $<M_n\circ\tau_n, M_n\circ\tau_n>$ est en général différent de $\Sigma_{k=1}^{\tau_n(\cdot)} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}} \xi_{n,k}^2$ (ce dernier processus n'est pas nécessairement $\mathbb{G}_n\circ\tau_n$-prévisible). Nous montrerons plutôt que $(M_n\circ\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge en loi par un argument de changement de temps. Nous notons $L_n = M_n\circ\nu_n$ $(n\in\mathbb{N})$.

Supposons d'abord $A(t) = t$ $(t\in\mathbb{R}_+)$ pour simplifier. Introduisons la suite de processus croissants et continus à droite $(\phi_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, où

$$\phi_n(t) = A_n(\tau_n(t)),\ (t\in\mathbb{R}_+,\ n\in\mathbb{N})$$

Nous avons que $\phi_n(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} t$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, d'où $\rho_C^N(\phi_n, A) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$ pour tout $N\in\mathbb{N}^*$. Il s'en suit que $(L_n\circ\phi_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge en loi vers la même limite que celle de la suite $(L_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ (c.f. [1], sec. 17 et Théorème 4.1).

Or $L_n\circ\phi_n = M_n\circ\tau_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Donc $(M_n\circ\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(M_n\circ\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ possèdent la même limite en loi.

La démonstration est ainsi terminée lorsque A est l'identité sur $\mathbb{R}_+$.

Soit A une fonction croissante continue quelconque vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit B son "inverse à droite", c'est-à-dire

$$B(t) = \inf\{s\in\overline{\mathbb{R}}_+ : A(s) > t\}\ (t\in\mathbb{R}_+)$$

B vérifie les propriétés suivantes : $B(0) = 0$; $B(t) < \infty$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ car $A(\infty) = +\infty$; B est continue à droite et strictement croissante car A est continue ; $A(B(t)) = t$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ mais $B(A(t)) = t$ si et seulement si t est un point de croissance stricte de A.

Pour simplifier, supposons que A possède un seul intervalle de constance $I = [a,b]$ (c'est une restriction anodine). Sur cet intervalle la martingale gaussienne continue (canonique) de processus croissant associé A est égale à sa valeur en a, c'est une conséquence de la définition même de processus croissant associé à une martingale continue.

Posons $\overline{\tau}_n = \tau_n\circ B$ $(n\in\mathbb{N})$. Chaque $\overline{\tau}_n$ est un changement de temps discret de $\mathbb{G}_n$ et la suite $(\overline{\tau}_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ vérifie (1) et $A_n\circ\overline{\tau}_n(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} t$, $(t\in\mathbb{R}_+)$.

Par conséquent, d'après le première partie de cette démonstration $(M_n\circ\bar{\tau}_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge en loi vers un mouvement Brownien canonique.

En appliquant encore les résultats de [1] sec. 17, nous obtenons que $(M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge en loi vers une martingale gaussienne (canonique) continue de processus croissant associé A.

Nous aurons terminé si nous montrons que $(M_n\circ\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A,\ n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües. Or, pour tout $t\notin]a,b[$, $M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A(t) = M_n\circ\tau_n(t)$, $(n\in\mathbb{N})$. La C-contigüité sera alors établie si l'on prouve que

$$\sup_{t\in I} |M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A(t) - M_n\circ\tau_n(t)| \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

Or pour tous $t\in I$, $n\in\mathbb{N}$

$$|M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A(t) - M_n\circ\tau_n(t)| \leq |M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A(t) - M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A(a)|$$
$$+|M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A(a) - M_n\circ\tau_n(t)|$$

c'est-à-dire, puisque $M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A(a) = M_n\circ\tau_n(a)$,

$$(3)\quad \sup_{t\in I} |M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A(t)-M_n\circ\tau_n(t)| \leq \sup_{t\in I} |M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A(t)-M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A(a)|$$
$$+ \sup_{t\in I} |M_n\circ\tau_n(t) - M_n\circ\tau_n(a)|$$

Le premier terme du second membre de (3) converge en probabilité vers 0 car $(M_n\circ\bar{\tau}_n\circ A\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge en loi vers une martingale continue qui est égale à sa valeur au point $a\in I$ sur tout l'intervalle I.

Il reste à montrer que le second terme du second membre de (3) tend vers 0 en probabilité. Pour cela, notons

$$U_n(t) = M_n\circ\tau_n(t+a)-M_n\circ\tau_n(a),\ V_n(t)=A_n\circ\tau_n(t+a)-A_n\circ\tau_n(a)\ (n\in\mathbb{N}\ ,\ t\in\mathbb{R}_+).$$

Chaque U_n (resp. $U_n^2-V_n$) est une martingale par rapport à la filtration $\mathbf{F} = (\underline{\underline{G}}_{\tau_n(a+t)}\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$, et $U_n(0) = 0$. (Remarquons encore que V_n n'est pas nécessairement un processus prévisible).

D'autre part,

$$(4)\qquad \sup_{t\leq b-a}\ \sup_{0\leq s\leq t} |V_n(t)-V_n(s)| \underset{n\uparrow\infty}{\to} 0$$

d'après (2) et du fait que A est constante sur I.

De (4) on déduit que pour tout $\varepsilon>0$

(5) $$\mathbb{P}(\sup_{t\leq b-a} |\Delta V_n(t)| > \varepsilon) \underset{n\uparrow\infty}{\rightarrow} 0.$$

Si T est un temps d'arrêt fini quelconque de $\mathbb{F}$, nous avons

(6) $$\mathbb{E}(U_n^2(T)) = \mathbb{E}(V_n(T))$$

Soient $\eta,\varepsilon,\gamma>0$. Alors

(7) $$\mathbb{P}(\sup_{t\leq b-a} |U_n(t)|>\eta) = \mathbb{P}(\sup_{t\leq b-a} |U_n(t)|>\eta, \sup_{t\leq b-a} |\Delta V_n(t)|\leq\varepsilon) +$$

$$+ \mathbb{P}(\sup_{t\leq b-a} |U_n(t)|>\eta, \sup_{t\leq b-a} |\Delta V_n(t)|>\varepsilon)$$

$$\leq \mathbb{P}(\sup_{t\leq b-a} |U_n(t)|>\eta, \sup_{t\leq b-a} |\Delta V_n(t)|\leq\varepsilon) + P(\sup_{t\leq b-a} |\Delta V_n(t)|>\varepsilon)$$

Appelons $\Omega(n,\varepsilon) = \{\omega\in\Omega : \sup_{t\leq b-a} |\Delta V_n(\omega,t)| \leq \varepsilon\}$; $U_n^*(t) = \sup_{s\leq t} |U_n(t)|$.

De (6) et de II.2.2. on déduit que

(8) $$\mathbb{P}(\{U_n^*(b-a)>\eta\}\cap \Omega(n,\varepsilon))\leq \frac{1}{\eta^2}\mathbb{E}(\{V_n(b-a)\wedge(\varepsilon+\gamma)\}I_{\Omega(n,\varepsilon)})$$

$$+ \mathbb{P}(\{V_n(b-a) > \gamma\} \cap \Omega(n,\varepsilon))$$

Finalement de (5), (7), (8) et du fait que $V_n(b-a) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} 0$ nous obtenons

$$U_n^*(b-a) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} 0. \blacksquare$$

10. PROPOSITION

Nous conservons les notations du Théorème précédent et supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(1) $M_n(0) = 0$, $\mathbb{E}(M_n^2(m)) < \infty$, $\Sigma_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}^{\underline{G}_{n,m-1}} \xi_{n,m}^2 = +\infty$

avec $\xi_{n,m} = M_n(m) - M_n(m-1) \neq 0$ $((n,m)\in\mathbb{N}^2)$;

(2) $(M_n\circ\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts ;

(3) $(M_n\circ\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge en loi vers une martingale gaussienne (canonique) continue de processus croissant associé A.

Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$,

$$A_n\circ\nu_n(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} A(t)$$

Démonstration : D'après le Théorème II.3.13, les hypothèses (2) et (3) entraînent que la suite $(A_n \circ \nu_n \ ; \ n \in \mathbb{N})$ est C-tendue. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ $\varepsilon, \eta > 0$, il existe $(n_o, \delta_o) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que

(4) $\quad \mathbb{P}(W_C^N(A_N \circ \nu_n, \delta) > \varepsilon) < \eta$ pour tous $n \geq n_o$, $\delta \leq \delta_o$.

Mais d'autre part, si $\zeta_{n,m} = \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}} \xi_{n,m}^2 = A_n(m) - A_n(m-1)$,

(5) $\quad \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,N]} \zeta_{n,\nu_n(t)} > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(W_C^N(A_n \circ \nu_n, \delta) > \varepsilon)$

pour tous $N \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon, \delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ (voir démonstration du lemme 7).

Donc $\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,N]} \zeta_{n,\nu_n(t)} > \varepsilon) < \eta$ pour tout $n \geq n_o$, i.e. $\sup_{k \leq \nu_n(N)} \zeta_{n,k} \underset{n \uparrow \infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

De même $\sup_{t \in [0,N]} \zeta_{n,\nu_n(t)+1} = \sup_{k \leq \nu_n(N)+1} \zeta_{n,k} \underset{n \uparrow \infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$, car $\nu_n(N)+1 \leq \nu_n(2N)$ $(N \in \mathbb{N}^*)$.

Or, l'hypothèse (1) entraîne, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$

$$A_n \circ \nu_n(t) \leq A(t) < A_n \circ \nu_n(t) + \zeta_{n,\nu_n(t)+1} .$$

Par conséquent $\sup_{t \in [0,N]} | A_n \circ \nu_n(t) - A(t) | \underset{n \uparrow \infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. ∎

11. En appliquant la Remarque II.4.8.3) nous pouvons obtenir également des théorèmes centraux limites pour des semi-martingales à temps discret. Plus précisément, nous travaillerons avec des semi-martingales spéciales (dans la terminologie de MEYER) ou de quasi-martingales (dans celle de FISK, OREY, RAO). C'est-à-dire nous considérons une suite $(X_n \ ; \ n \in \mathbb{N})$ de processus à temps discret tels que X_n est $\mathbb{G}_n$-adapté et

(1) $\quad \Sigma_{m=1}^{\infty} \mathbb{E} | \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}} (X_n(m) - X_n(m-1)) | < \infty$, $(n \in \mathbb{N})$.

Chaque X_n se décompose alors de façon unique comme

(2) $X_n = X_n(0) + M_n + V_n$, où $V_n(m) = \Sigma_{k=1}^{m} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}} (X_n(k) - X_n(k-1))$,

si $m \geq 1$, $V_n(0) = 0$, et M_n est une $\mathbb{G}_n$-martingale, $(n \in \mathbb{N})$.

Nous supposerons en outre que $X_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

(3) $\mathbb{E}(M_n(m)^2) < \infty$, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ (ce qui est en particulier vérifié lorsque $\mathbb{E}(X_n(m) - X_n(m-1))^2 < \infty$; $m \in \mathbb{N}$).

Posons
$$\begin{aligned} \xi_{n,m} &= M_n(m) - M_n(m-1) \\ &= X_n(m) - X_n(m-1) - \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}}(X_n(m) - X_n(m-1)) \quad ((n,m) \in \mathbb{N}^2) \end{aligned}$$

et

$$A_n(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m=0 \\ \Sigma_{k=1}^{m} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}} \xi^2_{n,k} & \text{si } m \geq 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Si A est une fonction croissante continue et telle que $A(0)=0$, nous définissons la suite $(\nu_n \; ; n \in \mathbb{N})$ comme dans le Théorème 9 :

$$\nu_n(t) = \inf\{m \in \overline{\mathbb{N}} : A_n(m+1) > A(t)\} \quad (\inf \emptyset = +\infty)$$

Nous conservons ces hypothèses et notations dans le Théorème suivant

12. <u>THEOREME</u>

1) <u>Soit</u> $(\theta_n \; ; n \in \mathbb{N}) \in \prod_{\mathbb{N}} \Theta(\mathbb{G}_n)$ <u>telle que</u>

(1) $\Sigma_{k=1}^{\theta_n(t)} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}}(\xi^2_{n,k} \, I_{[\xi_{n,k} > \varepsilon]}) \overset{\mathbb{P}}{\underset{n\uparrow\infty}{\to}} 0$,

<u>pour tous</u> $t \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$;

(2) $A_n \circ \theta_n(t) \overset{\mathbb{P}}{\underset{n\uparrow\infty}{\to}} A(t)$, <u>pour tout</u> $t \in \mathbb{R}_+$;

(3) $\Sigma_{k=1}^{\theta_n(t)} |\mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}} (X_n(k) - X_n(k-1))| \overset{\mathbb{P}}{\underset{n\uparrow\infty}{\to}} 0$, <u>pour tout</u> $t \in \mathbb{R}_+$.

<u>Alors</u> $(X_n \circ \theta_n \; ; n \in \mathbb{N})$ <u>converge en loi vers une martingale gaussienne continue, de processus croissant associé</u> A.

2) Supposons en outre $\xi_{n,m} \neq 0$, $A_n(\infty) = +\infty$ pour tous $n,m \in \mathbb{N}$ et $A(\infty) = +\infty$.

Supposons qu'il existe une suite de processus $(\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ telle que chaque τ_n soit un changement de temps discret de $\mathbb{G}_n$ vérifiant (1), (2), (3) ci-dessus. Alors $(X_n\circ\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(X_n\circ\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ convergent en loi vers une martingale gaussienne continue, centrée de processus associé A.

Démonstration :

1) L'hypothèse (3) entraîne en particulier que

$\sup_{t\in[0,N]} |V_n\circ\theta_n(t)| \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} 0$ pour tout $N\in\mathbb{N}^*$. Donc $(X_n\circ\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(M_n\circ\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües et le résultat découle de la Proposition 5.

2) Comme avant, $(X_n\circ\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(M_n\circ\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües. On applique le Théorème 9 et on obtient que $(X_n\circ\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, $(M_n\circ\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(M_n\circ\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ convergent en loi vers une martingale gaussienne continue, de processus croissant associé A. Pour terminer nous montrerons que $(M_n\circ\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(X_n\circ\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ sont C-contigües. Pour cela nous prouverons que l'hypothèse 1) (3) est vérifiée par $(\nu_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$.

D'après 8.(1'), pour tous N, $r\in\mathbb{N}^*$, il existe $K_{N,r} > 0$ tel que

(4) $\mathbb{P}(\nu_n(N)+1 > \tau_n(N+K_{N,r})) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$

Posons $B_n(m) = \Sigma_{k=1}^{m} \mathbb{E}^{\mathbb{G}_{n,k-1}} (X_n(k)-X_n(k-1))$, $((n,m) \in \mathbb{N}^2)$.

B_n est croissant en m pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Alors, pour tous $t\in\mathbb{R}_+$, $\varepsilon>0$, $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $N \geq t$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n\circ\nu_n(t) > \varepsilon) &= \mathbb{P}(B_n\circ\nu_n(t) > \varepsilon\ ,\ \nu_n(N)+1 \leq \tau_n(N+K_{N,r}))\\ &\quad + \mathbb{P}(B_n\circ\nu_n(t) > \varepsilon,\ \nu_n(N)+1 > \tau_n(N+K_{N,r}))\\ &\leq \mathbb{P}(B_n\circ\tau_n(N+K_{N,r}) > \varepsilon) + \mathbb{P}(\nu_n(N)+1 > \tau_n(N+K_{N,r}))\end{aligned}$$

Or, par hypothèse $B_n\circ\tau_n(N+K_{N,r}) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} 0$ et en appliquant (4) on déduit que

$$B_n\circ\nu_n(t) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} 0 \quad \blacksquare$$

13. Comme nous disions au n° 6, la Proposition 5 généralise déjà un grand nombre de résultats concernant le Principe d'Invariance pour les Martingales Discrètes. Remarquons que si $(\tau_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est une suite de fonctions croissantes en escalier, continues à droite, telle que $\tau_n(0) = 0$, $\Delta\tau_n(t) = 0$ ou 1 et $\tau_n(\infty) = +\infty$ $(n\in\mathbb{N},\ t\in\mathbb{R}_+)$; alors $\tau_n \in \Theta(\mathbb{G}_n)$ pour chaque $n\in\mathbb{N}$. Il en est ainsi en particulier pour $\tau_n(t) = [nt]$, $(n\in N,\ t\in\mathbb{R}_+)$ où $[u]$ désigne la partie entière de l'élément u de $\mathbb{R}$. Nous énonçons maintenant un corollaire immédiat de la Proposition 5, Corollaire qui a donné lieu à une intéressante application dans la Thèse de 3ème Cycle de Mademoiselle Nelly MAIGRET. Fixons d'abord quelques notations.

Nous disposons d'une seule filtration discrète $\mathbb{G} = (\underline{\underline{G}}_m\ ;\ m\in\mathbb{N})$ complète pour $\mathbb{P}$. $M = (M(m)\ ;\ m\in\mathbb{N})$ est une $\mathbb{G}$-martingale telle que $M(0) = 0$ et $\mathbb{E}(M(m)^2) < \infty$ pour tout $m\in\mathbb{N}$. On pose $\xi_m = M(m) - M(m-1)$, $m\in\mathbb{N}^*$. Nous avons ainsi le

14. COROLLAIRE

Soit A une fonction croissante continue définie sur $\mathbb{R}_+$, $A(0)=0$. Supposons qu'il existe une suite $(b_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ de réels strictement positifs, telle que $b_n\uparrow\infty$ quand $n\uparrow\infty$ et que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

$$(1)\qquad \frac{1}{b_n^2}\ \Sigma_{k=1}^{[nt]}\ \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{k-1}}(\xi_k^2\ I_{[\ |\xi_k| > b_n\varepsilon]})\ \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}}\ 0,$$

pour tous $t\in\mathbb{R}_+$, $\varepsilon>0$;

$$(2)\qquad \frac{1}{b_n^2}\ \Sigma_{k=1}^{[nt]}\ \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{k-1}}\ \xi_k^2\ \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}}\ A(t),\ \text{pour tout}\ t\in\mathbb{R}_+.$$

Alors la suite $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, où $M_n(t) = \frac{1}{b_n} M([nt])$ $(n\in\mathbb{N},\ t\in\mathbb{R}_+)$, converge en loi vers une martingale gaussienne continue, centrée, de processus croissant associé A.

Le lecteur est invité à consulter [16] où ce corollaire a été appliqué par Melle MAIGRET dans le contexte suivant :

(H1) $(E,\underline{\underline{E}})$ est un espace mesurable où la tribu $\underline{\underline{E}}$ est à base dénombrable. $(\Omega,\underline{F},(\mathbb{P}_x\ ;\ x\in E),(Z_n\ ;\ n\in\mathbb{N}))$ est une chaîne de Markov à ensemble d'états E, apériodique, récurrente Harris positive ([16]), de probabilité invariante μ et de transition π. Pour toute probabilité λ sur $(E,\underline{\underline{E}})$, $\mathbb{P}_\lambda$ (resp. $\mathbb{E}_\lambda$) désigne, comme il est coutume, la distribution de la chaîne (resp.

l'espérance par rapport à $\mathbb{P}_\lambda$) lorsque λ est la probabilité initiale. Si λ est la masse unité au point $x \in E$ nous ferons l'abus de langage qui consiste à remplacer λ par x dans les notations précédentes.

(H2) Soit F une fonction mesurable de E^2 dans $\mathbb{R}$ de carré $\mu\otimes\pi$-intégrable (*), telle que

$$\int_{E^2} F d(\mu \otimes \pi) = 0 \quad \text{et} \quad \mu \otimes \pi(\{(x,y) \in E^2 : F(x,y) \neq 0\}) > 0.$$

Il existe alors une fonction bornée $\underline{\underline{E}}$-mesurable de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation de Poisson (c.f. [16]).

$$\ell - \pi\ell = F, \quad \mu\text{-p.s.} \quad (*)$$

(H3) On suppose que ℓ est de carré μ-intégrable.

La filtration $\mathbb{G}^o = (\underline{\underline{G}}_m^o \; ; m \in \mathbb{N})$ est la filtration naturelle associée à $(Z_m \; ; m \in \mathbb{N})$, c'est-à-dire $\underline{\underline{G}}_m^o = (Z_k \; ; k \leq m)$ $(m \in \mathbb{N})$. Nous supposons $\underline{\underline{G}}_\infty^o = \underline{\underline{E}}$ et on note $\mathbb{G}^\lambda$ la filtration complétée pour $\mathbb{P}_\lambda$, où λ est une probabilité sur $(E,\underline{\underline{E}})$. Dans un tel contexte on définit deux processus à temps discret, $\mathbb{G}^\lambda$-adaptés, $M^\lambda = (M^\lambda(m) \; ; m \in \mathbb{N})$ et $X^\lambda = (X^\lambda(m) \; ; m \in \mathbb{N})$, où

$$M^\lambda(m) = \Sigma_{k=1}^m \left[F(Z_{k-1},Z_k) + \ell(Z_k) - \pi F(Z_{k-1}) - \pi\ell(Z_{k-1})\right]$$

$$X^\lambda(m) = \Sigma_{k-1}^m F(Z_{k-1},Z_k), \quad (m \in \mathbb{N})$$

N. MAIGRET a montré que M^λ est une $(\mathbb{G}^\lambda,\mathbb{P}_\lambda)$-martingale, vérifiant $M^\lambda(0) = 0$ et $\mathbb{E}_\lambda(M^\lambda(m)^2) < \infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Si l'on définit $A(t)=C(F)t$ $(t \in \mathbb{R}_+)$, où

$$C(F) = \int_{E^2} \mu(dx)\pi(x,dy)\, F^2(x,y) + 2 \int_{E^2} \mu(dx)\pi(x,dy)\, F(x,y)\, \ell(y)$$

et si l'on pose $b_n = \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $b_o=1$, alors les hypothèses du Corollaire 14 sont vérifiées par M^λ, $(b_n \; ; n \in \mathbb{N})$ et A.

(*) $\mu \otimes \pi$ est la mesure sur $(E^2,\underline{\underline{E}}^2)$ définie par $\mu \otimes \pi(A) = \int_{E^2} I_A(x,y)\mu(dx)\pi(x,dy)$. D'autre part $\pi F(x) = \int_E F(x,y)\pi(x,dy)$, $\pi\ell(x) = \int_E \ell(y)\pi(x,dy)$, $(x \in E)$.

Si nous désignons par B le mouvement Brownien canonique, la martingale gaussienne continue centrée, canonique, de processus croissant associé A défini ci-dessus possède la même loi que $\sqrt{C(F)}\ B$, c'est pourquoi nous la représentons sous cette forme dans l'énoncé suivant.

15. THEOREME (N. MAIGRET [16])

Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3), la suite $(M_n^\mu\ ;\ n\in\mathbb{N})$ (resp. $(M_n^x\ ;\ n\in\mathbb{N})$) converge en loi vers la martingale $\sqrt{C(F)}B$ (resp. pour μ-presque tout $x\in E$), où $M_n^\mu(t) = \frac{1}{b_n} M^\mu([nt])$ (resp. $M_n^x(t) = \frac{1}{b_n} M^x([nt])$) pour tous $n\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}_+$.

En outre $(M_n^\mu\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(X_n^\mu\ ;\ n\in\mathbb{N})$ (resp. $(M_n^x\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(X_n^x\ ;\ n\in\mathbb{N})$) sont C-contigües relativement à $\mathbb{P}_x$ (resp. relativement à $\mathbb{P}_x$ pour μ-presque tout $x\in E$), où $X_n^\mu(t) = \frac{1}{b_n} X^\mu([nt])$ (resp. $X_n^x(t) = \frac{1}{b_n} X^x([nt])$) pour tous $n\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}_+$.

Par conséquent,

$$X_n^\mu \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \sqrt{C(F)}B \quad \text{et}$$

$$X_n^x \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \sqrt{C(F)}B, \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x\in E.$$

16. REMARQUE

Si $\mathbb{G}$ est une filtration discrète sur $(\Omega,\underline{F},\mathbb{P})$ et $X=(X(m)\ ;\ m\in\mathbb{N})$ un processus à temps discret adapté à cette filtration et tel que $\mathbb{E}(X(m)) < \infty$ pour tout $m\in\mathbb{N}$, nous pouvons écrire :

$$(1)\quad X = X(0) + M + R$$

où $M=(M(m)\ ;\ m\in\mathbb{N})$ est une $\mathbb{G}$-martingale et R un processus $\mathbb{G}$-prévisible définis par

$$M(0) = 0,\ M(m) - M(m-1) = X(m) - \mathbb{E}^{\underline{G}_{m-1}} X(m),\ (m \geq 1)$$

$$R(0) = 0,\ R(m)-R(m-1)=\mathbb{E}^{\underline{G}_{m-1}} X(m)-X(m-1),\ (m \geq 1)$$

La décomposition (1) permet alors de ramener aux cas étudiés dans ce paragraphe l'étude de "Principes d'Invariance" pour des suites de processus à temps discret plus généraux (en particulier "amarts", 'mixingales", suites -mélangeantes", etc...). La méthode consiste à retrouver sur les parties martingales les hypothèses de nos théorèmes ci-dessus, puis on imposera des conditions garantissant la C-contiguïté de la suite de processus avec la suite de martingales.

III.2 - APPROXIMATION DES DIFFUSIONS

Dans tout ce paragraphe nous adopterons la présentation des diffusions -déjà classique- de STROOCK et VARADHAN ([40]).

1. HYPOTHESES DE BASE. NOTATIONS.

On désigne par $C_k^\infty(\mathbb{R}^d)$ (resp. $C_b^n(\mathbb{R}^d)$) l'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$), indéfiniment dérivables à support compact (resp. n fois continuement dérivables et dont les dérivées jusqu'à l'ordre n sont bornées). Pour simplifier nous écrirons $C_b(\mathbb{R}^d)$ pour $C_b^o(\mathbb{R}^d)$.

Soit $L : C_k^\infty(\mathbb{R}^d) \to C_b(\mathbb{R}^d)$ l'opérateur différentiel défini par

$$(1)\quad (Lf)(x) = \frac{1}{2} \Sigma_{i,j}^d\, a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(x) + \Sigma_{i=1}^d b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$$

où :

(2) Les coefficients $(a^{ij}\ ;\ 1 \le i,\ j \le d)$ sont bornés, continus, et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la matrice $a(x) = (a^{ij}(x)\ ;\ 1 \le i,\ j \le d)$ est définie positive ;

(3) Les coefficients $(b^i\ ;\ 1 \le i \le d)$ sont bornés, continus.

Nous adoptons ici toutes les notations et conventions du paragraphe II.5. On définit alors les applications suivantes sur $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_+$:

$$(4)\quad A^{ij}(w,t) = \int_0^t a^{ij}(w(s))ds,\ 1 \le i,\ j \le d$$

$$A(w,t) = (A^{ij}(w,t)\ ;\ 1 \le i,\ j \le d),\ w \in D^d,\ t \in \mathbb{R}_+ {}^{(*)}$$

$$(5)\quad B^i(w,t) = \int_0^t b^i(w(s))ds,\ 1 \le i \le d$$

$$B(w,t) = (B^i(w,t)\ ;\ 1 \le i \le d),\ w\ \ D^d,\ t \in \mathbb{R}_+.$$

2. LEMME

<u>Avec les notations précédentes,</u> A <u>est un élément de</u> $\underline{\underline{A}}[D^d, D^{dd}]$ <u>de type positif</u>, $B \in \underline{\underline{A}}[D^d, D^d]$.

<u>En outre, existent des constantes positives</u> C_1, C_2 <u>telles que pour tous</u> $s, t \in \mathbb{R}_+$, $w \in D^d$, $1 \le i,\ j \le d$,

---

(*) Nous rappelons que pour simplifier l'écriture nous notons D^d l'espace $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, c.f. II.5.1)

(1) $|A^{ij}(w,t) - A^{ij}(w,s)| \leq c_1|t-s|$

(2) $|B^i(w,t) - B^i(w,s)| \leq c_2|t-s|$.

Démonstration : Soient $w \in D^d$, $(w_n \; ; n \in \mathbb{N})$ une suite quelconque convergeant vers w dans D^d. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une suite $(\lambda_n \; ; n \in \mathbb{N})$ d'applications strictement croissantes et continues de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même vérifiant

(3) $$\lim_{n\uparrow\infty} \left[\sup_{t \in R_+} |\lambda_n(t)-t| + \sup_{s \neq t} \left|\log \frac{\lambda_n(t)-\lambda_n(s)}{t-s}\right| \right] = 0$$

et

(4) $$\lim_{n\uparrow\infty} \sup_{t \in [0,N]} \| w(t)-w_n(\lambda_n(t))\| = 0.$$

Posons $$Z(w,t) = \begin{pmatrix} w^1(t) \\ \vdots \\ w^d(t) \\ A^{11}(w,t) \\ A^{21}(w,t) \\ \vdots \\ A^{d1}(w,t) \\ A^{d2}(w,t) \\ \vdots \\ A^{dd}(w,t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)d}, \quad (w,t) \in D^d \times \mathbb{R}_+$$

Montrons que

(5) $$\sup_{t \in [0,N]} \|Z(w,t) - Z(w_n,\lambda_n(t))\| \underset{n\uparrow\infty}{\rightarrow} 0.$$

Pour cela, il suffira de montrer que pour tout $1 \leq i, j \leq d$

(6) $$\sup_{t \in [0,N]} |A^{ij}(w,t) - A^{ij}(w_n,\lambda_n(t))| \underset{n\uparrow\infty}{\rightarrow} 0$$

Or,

$$|A^{ij}(w,t) - A^{ij}(w_n,\lambda_n(t))| =$$

$$= \left|\int_0^t a^{ij}(w(s))ds - \int_0^{\lambda_n(t)} a^{ij}(w_n(s))ds\right|$$

$$\leq \int_0^t |a^{ij}(w(s)) - a^{ij}(w_n(s))|\, ds + \int_t^{\lambda_n(t)} |a^{ij}(w_n(s))|ds$$

Soit c_1 une borne supérieure de tous les coefficients a^{ij}, nous avons alors

$$\sup_{t\in[0,N]} |A^{ij}(w,t) - A^{ij}(w_n,\lambda_n(t))| \leq$$

$$\leq \int |a^{ij}(w(s)) - a^{ij}(w_n(s))|ds + c_1 \sup_{t\in[0,N]} |\lambda_n(t)-t|$$

Puisque $(w_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge vers w dans D^d, $(w_n(s)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge vers $w(s)$ dans $\mathbb{R}^d$ pour tout $s\in[0,N]$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. D'autre part les coefficients a^{ij} sont continus, donc $|a^{ij}(w(s)) - a^{ij}(w_n(s))| \underset{n\uparrow\infty}{\to} 0$ presque partout dans $[0,N]$ et puisque la suite est bornée par $2c_1$, nous obtenons, d'après le Théorème de la Convergence Dominée de Lebesgue :

$$\int_0^N |a^{ij}(w(s)) - a^{ij}(w_n(s))|ds \underset{n\uparrow\infty}{\to} 0$$

D'autre part, par hypothèse $\sup_{t\in[0,N]} |\lambda_n(t)-t| \underset{n\uparrow\infty}{\to} 0.$

Par conséquent (6) en découle et

$$\sup_{t\in[0,N]} \| Z(w,t) - Z(w_n,\lambda_n(t))\| \underset{n\uparrow\infty}{\to} 0.$$

En outre, il est évident que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $A(.,t)$ est $\underline{\underline{B}}_t^o$-mesurable, et que pour tout $w\in D^d$, $A(w,.)$ est à variations finies sur tout compact.

D'une manière analogue on montre que $B\in\underline{\underline{A}}[D^d,D^d]$ (on utilise la <u>même</u> suite $(\lambda_n,\ n\in N)$ vérifiant (3) et (4)).

Par ailleurs A est de type positif car pour tout $\theta\in\mathbb{R}^d$,

$(\theta|A(w,.)\theta) = \int_\theta^{\cdot} (\theta|a(w(s))\theta)ds$, $(w\in D^d)$, et $\qquad (\theta|a(x)\theta) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ d'après 1.(2).

Finalement, les inégalités (1) et (2) ci-dessus sont immédiates, elles sont une conséquence de la bornitude des a^{ij} et b^j $(1 \leq i, j \leq d)$. ∎

3. PROBLEMES DE MARTINGALES ET DIFFUSIONS

Nous dirons qu'une probabilité P sur $(D^d, \underline{\underline{B}}(D^d))$ est la loi d'une diffusion au sens large associée à l'opérateur L de 1.(1) et partant de $x \in R^d$ si

(1) $\qquad P(C^d) = 1$, $P(\{w \in D^d : w(0) = x\}) = 1$

(2) $\qquad$ Pour toute $f \in C_k^\infty(\mathbb{R}^d)$, le processus H^f sur $(D^d, \underline{\underline{B}}(P), \mathbb{B}(P), P)$ est une martingale, où

$$H^f(w,t) = f(w,t)) - f(w(0)) - \int_0^t (Lf)(w(s))ds$$

$((w,t) \in D^d \times \mathbb{R}_+)$.

Divers auteurs ont montré que pour qu'une probabilité P sur $(D^d, \underline{\underline{B}}(D^d))$ vérifie (1) et (2) il est nécessaire et suffisant que $P(C^d) = 1$ et $P \in \underline{\underline{\text{Prob}}}(x,A,B)$. (c.f. [40] , [29]). En outre, STROOCK et VARADHAN ont prouvé dans [40] le résultat d'unicité suivant :

Si $(a^{ij}\ ; 1 \leq i, j \leq d)$ et $(b^j\ ; 1 \leq j \leq d)$ vérifient les hypothèses 1.(2) et 1.(3) et si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ la matrice $a(x)$ est définie positive (*), alors il existe une unique loi P_x portée par C^d appartenant à $\underline{\underline{\text{Prob}}}(x,A,B)$. Dans ces conditions il existe un et un seul processus de diffusion associé à L et ce processus est fortement Markovien.

Nous en déduisons le principal résultat de ce paragraphe. Comme d'habitude nous considérons un espace probabilisé complet $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$ muni d'une suite $(\mathbb{F}_n\ ; n \in \mathbb{N})$ de filtrations satisfaisant aux conditions de DELLACHERIE.

4. PROPOSITION

On suppose que les hypothèses 1.(2) et 1.(3) sont satisfaites et que en outre $a(x)$ est définie positive pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(*) elliptique au sens de [29], i.e. $(\theta|a(x)\theta) > 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$ non nul.

Soit $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de semi-martingales d-dimensionnelles où pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n = x_n+M_n+B_n$, $M_n \in (\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}])^d$, $B_n \in (\underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F}_n,\mathbb{P}])^d$, $x_n\in\mathbb{R}^d$.

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ satisfait la condition de raréfaction asymptotique des sauts ;

(2) les suites $(\langle M_n^i,M_n^j\rangle\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(\dot{A}^{ij}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ (resp. $B_n^i\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et $(\dot{B}^i(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N}))$ sont C-contigües pour tous, $i,k \in \{1,\dots,d\}$.

(3) la suite $(x_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ converge dans $\mathbb{R}^d$ vers x.

Alors $\mathcal{L}(X_n) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{e}{\to}} P_x$, où $P_x(C^d)=1$ et $P_x \in \underline{\underline{\text{Prob}}}(x,A,B)$.

Démonstration : D'après le Lemme 2, $A \in \underline{\underline{A}}[D^d,D^{dd}]$ est de type positif; $B \in \underline{\underline{A}}[D^d,D^d]$. Puis, les inégalités 2.(1), 2.(2) entraînent l'équicontinuité des familles $(A^{ij}(w,.)\ ;\ w\in D^d,\ 1\leq i,\ j\leq d)$, $(B^i(w,.)\ ;\ w\in D^d,\ 1\leq i\leq d)$ d'où l'on déduit en particulier que A et B sont des éléments $\mathbf{B}^0$-prévisibles de $\underline{\underline{A}}[D^d,D^{dd}]$ et $\underline{\underline{A}}[D^d,D^d]$, respectivement. On en déduit également que les suites $(\dot{A}^{ij}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$, $(\dot{B}^i(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$, sont C-tendues pour tous $i,j \in \{1,\dots,d\}$. D'autre part, puisque $A^{ij}(w,0) = 0$ pour tout $w\in D^d$, $1\leq i,\ j\leq d$, l'inégalité 2.(1) entraîne que

$$A^{ij}(w,t) \leq C_1,\ \text{pour tous}\ \ w \in D^d,\ 1\leq i,\ j\leq d,\ t\in\mathbb{R}_+.$$

La proposition découle alors directement du Théorème II.5.8, de la Remarque II.5.9.2) et du résultat d'unicité de STROOCK et VARADHAN cité au n° 3 ci-dessus. ∎

5. Nous allons déduire maintenant quelques corollaires importants de la proposition précédente.

Commençons par étudier quelques cas d'approximation des diffusions sur $\mathbb{R}$. Les hypothèses suivantes seront en vigueur par la suite :

(1) a est une fonction continue et bornée, $a(x) > 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$; $A(w,t) = \int_0^t a(w(s))ds$, $w\in D$, $t\in\mathbb{R}_+$.

(2) b est une fonction réelle continue et bornée ; $B(w,t) = \int_0^t b(w(s))ds$, $w\in D$, $t \in\mathbb{R}_+$.

Nous considérons sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ une suite de filtrations discrètes $(\mathbb{G}_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, $\mathbb{G}_n = (\underline{\underline{G}}_{n,m}\ ;\ m\in\mathbb{N})$, où toutes les tribus sont supposées complètes.

Soit $(Z_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de processus à temps discret définis sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ telle que pour chaque $n\in\mathbb{N}$, Z_n soit une <u>$\mathbb{G}_n$-semi-martingale très spéciale</u> (II.4.7, III.1.11).

Nous supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

(3) $\qquad Z_n(0) = x_n \in \mathbb{R}.$

Soit $(h_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ une suite de réels strictement positifs telle que $h_n\downarrow 0$ si $n\uparrow\infty$. On pose par définition

(4) $\qquad X_n(t) = Z_n([t/h_n]),\ \underline{\underline{F}}_{n,t} = \underline{\underline{G}}_{n[t/h_n]},\ (n\in\mathbb{N},\ t\in\mathbb{R}_+)$

et $\qquad \mathbf{F}_n = (\underline{\underline{F}}_{n,t}\ ;\ t\in\mathbb{R}_+),\ X_n = (X_n(t)\ ;\ t\in\mathbb{R}_+),\ (n\in\mathbb{N})$

Finalement, introduisons la notation suivante :

$$\Delta Z_n(m) = Z_n(m) - Z_n(m-1),\ (n,m)\in\mathbb{N}^2.$$

Par convention, $\Sigma_{k=1}^{0}\ (\dots) = 0.$

6. <u>COROLLAIRE</u>

<u>Supposons satisfaites les hypothèses suivantes</u> :

(1) $$\Sigma_{m=1}^{[t/h_n]} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}} (\xi^2_{n,m}\, I_{[\,|\xi_{n,m}| > \varepsilon]}) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

pour tous $\varepsilon>0$, $t\in\mathbb{R}_+$, où $\xi_{n,m} = \Delta Z_n(m) - \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}}\,\Delta Z_n(m)$, $(n,m)\in\mathbb{N}^2$.

(2) $$\mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}}\,\Delta Z_n(m) = h_n\, b(Z_n(m-1)) + \eta_1(m,n)$$

<u>pour tout</u> $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, <u>où la suite</u> $(\eta_1(m,n)\ ;\ (n,m)\in\mathbb{N}^2)$ <u>vérifie</u>

$$\sum_{m\le[N/h_n]} |\eta_1(m,n)| \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \quad \underline{\text{pour tout}}\ N\in\mathbb{N}^*$$

(3) $$\mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}}\,(\Delta Z_n(m))^2 = h_n\, a(Z_n(m-1)) + \eta_2(m,n)$$

<u>pour tout</u> $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, <u>où</u> $(\eta_2(m,n)\ ;\ (n,m)\in\mathbb{N}^2)$ <u>vérifie</u>

$$\sum_{m\leq[N/h_n]} |\eta_2(m,n)| \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$ pour tout $N\in\mathbb{N}^*$

(4) $\quad x_n \underset{n\uparrow\infty}{\to} x,\ x\in\mathbb{R}.$

Alors $\mathcal{L}(X_n) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathfrak{e}}{\to}} P_x$ où P_x est l'unique solution du problème de martingales (x,A,B) portée par C.

Démonstration : Chaque Z_n se décompose sous la forme

$$Z_n = x_n+L_n+V_n$$

où

$$V_n(m) = \Sigma_{k=1}^m\ \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}}\ \Delta Z_n(k)$$

$$L_n(m) = \Sigma_{k=1}^m(\Delta Z_n(k)-\mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}}\ \Delta Z_n(k)) = \Sigma_{k=1}^m\ \xi_{n,k}$$

(voir III.1.11), et par hypothèse, $\mathbb{E}(L_n(m)^2) < \infty$ pour tous $n,m\in\mathbb{N}$.

Le processus croissant associé à la martingale L_n est

$$A_n(m) = \Sigma_{k=1}^m\ \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}}\ \xi_{n,k}^2,\ n,m\in\mathbb{N}$$

D'après le Lemme III.1.2., le processus $(A_n([t/h_n])\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$ est $\mathbf{F}_n$-prévisible. Nous avons alors que

$$X_n = x_n + M_n + B_n$$

avec

$$M_n(t) = L_n([t/h_n]),\ M_n\in\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbf{F},\mathbb{P}]$$

$$B_n(t) = V_n([t/h_n]),\ B_n\in\underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbf{F}_n,\mathbb{P}]$$ et est $\mathbf{F}_n$-prévisible ;

$$<M_n,M_n>(t) = A_n([t/h_n])$$

$$\tilde{\sigma}^\varepsilon(M_n,t) = \Sigma_{k=1}^{[t/h_n]}\ \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}}\ (\xi_{n,k}^2\ I_{[\ |\xi_{n,k}|>\varepsilon]})$$

$\varepsilon>0,\ t\in\mathbb{R}_+,\ n\in\mathbb{N}.$

Par conséquent, l'hypothèse (1) est équivalente à la condition forte de raréfaction asymptotique des sauts pour la suite $(M_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$. Pour conclure la démonstration nous allons prouver que (3) et (2) entraînent, respectivement, la $C_\bullet$-contiguïté de $(<M_n,M_n>\ ;\ n\in\mathbb{N})$ avec $(\dot{A}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ et de $(B_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ avec $(\dot{B}(X_n)\ ;\ n\in\mathbb{N})$. On pourra ainsi appliquer la Proposition 4.

Notons $I_{n,m} = [(m-1)h_n,\ m\ h_n]$, $m \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

$I_{n,0} = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$.

Sur les intervalles $I_{n,m}$, $X_n(t) = Z_n(m-1)$,

par conséquent

$$(5) \qquad A(X_n,t) = \Sigma_{m=1}^{[t/h_n]}\ h_n\ a(Z_n(m-1)),$$

$$(6) \qquad B(X_n,t) = \Sigma_{m=1}^{[t/h_n]}\ h_n\ b(Z_n(m-1)),\quad t \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}.$$

Nous aurons alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{t \in [0,N]} |B_n(t) - B(X_n,t)| \leq \Sigma_{m=1}^{[N/h_n]}\ |\eta_1(m,n)|,$$

d'où découle la C-contigüité de $(B_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ avec $(\dot{B}(X_n)\ ;\ n \in \mathbb{N})$ en vertu de (2).

Appelons U_n le processus défini par

$$(7) \qquad U_n(t) = \Sigma_{k=1}^{[t/h_n]}\ \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}}(\Delta Z_n(k))^2,\quad n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Nous avons que

$$\sup_{t \in [0,N]} |U_n(t) - A(X_n,t)| \leq \Sigma_{m=1}^{[N/h_n]} |\eta_2(m,n)|$$

et on déduit la C-contigüité de $(U_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ avec $(\dot{A}(X_n)\ ;\ n \in \mathbb{N})$ en vertu de (3).

Or,

$$U_n(t) - \langle M_n,M_n\rangle (t) = \Sigma_{k=1}^{[t/h_n]}\ \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}}[(\Delta Z_n(k))^2 - \xi_{n,k}^2]$$

$$= \Sigma_{k=1}^{[t/h_n]} (\mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}}\ \Delta Z_n(k))^2,\quad t \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}.$$

Soit $c > 0$ une borne supérieure de la fonction b, alors

$$(\mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,k-1}}\ \Delta Z_n(k))^2 \leq c^2\ h_n^2 + 2c\ |\eta_1(k,n)| + (\eta_1(k,n))^2$$

On en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{t\in[0,N]} |U_n(t) - \langle M_n,M_n\rangle(t)| \leq c^2\, N/h_n\, h_n^2 + \\ +\left(2c + \Sigma_{k=1}^{[N/h_n]} |\eta_1(k,n)|\right).\left(\Sigma_{k=1}^{[N/h_n]} \eta_1(k,n)|\right)$$

et puisque $[N/h_n]h_n^2 \underset{n\uparrow\infty}{\to} 0$, l'hypothèse (2) entraîne alors la C-contiguïté de $(U_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ avec $(\langle M_n,M_n\rangle)\ ;\ n\in\mathbb{N})$. ■

7. REMARQUE

Nous avons énoncé le Corollaire 6 avec la condition forte de raréfaction asymptotique des sauts par commodité d'écriture. En fait, on peut remplacer l'hypothèse 6.(1) par la condition de raréfaction (non forte) :

$$(1)\qquad \Sigma_{m=1}^{[t/h_n]} (\mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}} \zeta_{n,m}^2 - (\mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}} \zeta_{n,m})^2) + \\ + \sup_{s\leq t} |\Sigma^{[s/h_n]} \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}} (\eta_{n,m} - \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}} \eta_{n,m})(\zeta_{n,m} - \mathbb{E}^{\underline{\underline{G}}_{n,m-1}} \zeta_{n,m})|| \underset{\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\varepsilon>0$ où

$$\zeta_{n,m} = \xi_{n,m}\, I_{[\,|\xi_{n,m}|>\varepsilon]},\quad \eta_{n,m} = \xi_{n,m}\, I_{[\,|\xi_{n,m}|\leq\varepsilon]},\quad (n,m)\in\mathbb{N}^2.$$

8. Nous allons étudier maintenant des processus de saut non explosifs du type suivant. On se donne une suite $(T_m,\ m\geq 1)$ de variables aléatoires strictement positives sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ telle que

(1) $\quad T_m(\omega) < T_{m+1}(\omega)$ pour tout $\omega\in\Omega$, tel que $T_m(\omega) < \infty$, $m\in\mathbb{N}^*$.

(2) $\quad \lim_n T_m = +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

(c'est un processus ponctuel non-explosif selon la terminologie de ([3]).

On pose $T_0=0$, et on considère une suite $(X_m\ ;\ m\geq 1)$ de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble dénombrable $E\subset\mathbb{R}$ tel que $0\in E$. On appelle $\underline{\underline{E}}$ la tribu de toutes les parties de E, on pose $X_0=0$ et on suppose

(3) $\quad \mathbb{E}(X_m^2) < \infty$ pour tout $m\geq 1$.

Le processus de sauts pur est alors défini par

(4) $\quad X(\omega,t) = X_m(\omega)$ si $T_m(\omega) \leq t < T_{m+1}(\omega)$.

Le suite $((X_m,T_m)\ ;\ m\geq 1)$ constitue alors un cas particulier de processus ponctuel marqué au sens de JACOD ([8]). Nous lui associons la mesure aléatoire de sauts sur $(]0,\infty[\times\mathbb{R},\ \underline{\underline{B}}(]0,\infty[\times\mathbb{R}))$ portée par $]0,\infty[\times E$, définie par

$$(5)\qquad \mu(\omega,dt,dx)=\sum_{m\geq 1}\varepsilon_{(T_m(\omega),X_m(\omega))}(dt,dx)\ I_{[T_m(\omega)<\infty]},\ (\omega\in\Omega)$$

qui est en fait une mesure de transition positive de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ sur $(\mathbb{R},\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$ (ε_a désigne la mesure de Dirac au point a).

Supposons X adapté à une filtration $\mathbb{F}$ satisfaisant aux conditions habituelles. Une mesure aléatoire η sur $(]0,\infty[\times\mathbb{R},\ \underline{\underline{B}}(]0,\infty[\times\mathbb{R}))$ est <u>prévisible</u> si pour toute application $Y:\Omega\times[0,\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\underline{\underline{P}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable et positive, le processus ηY défini par

$$(\eta\cdot Y)\ (\omega,t)=\int_{\mathbb{R}}\int_0^t Y(\omega,s,x)\ \eta(\omega,ds,dx),$$

$(\omega\in\Omega,\ t\in\mathbb{R}_+)$ est prévisible. (c.f. [8]).

JACOD montre dans [8] qu'il existe une et une seule mesure aléatoire prévisible ν (à une modification sur un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable près) telle que pour toute application Y vérifiant les propriétés précédentes, on ait

$$(6)\qquad \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}Y(t,x)\ \mu(dt,dx)\right)=\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}Y(t,x)\ \nu(dt,dx)\right)$$

(comme μ,ν est en fait portée par $]0,\infty[\times E$).

Cette mesure ν est appelée la <u>projection duale prévisible de</u> μ. Il existe une version de ν telle que $\nu(\{t\}\times\mathbb{R})\leq 1$ (c.f. [8], Prop. (2,3)).

JACOD donne également une expression explicite de ν lorsque les tribus F ne sont pas nécessairement complètes mais vérifient

$$(7)\qquad \underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}_0\vee\underline{\underline{G}}_t\ ,\ \underline{\underline{G}}_t=\sigma(X(s)\ ;\ s\leq t)\ ;\ (t\in\mathbb{R}_+),$$

$\underline{\underline{F}}_0$ étant une tribu quelconque.

Soit $\tau_m=T_m-T_{m-1}$ $(m\in\mathbb{N})$, et soit $G_m(\omega,dt,dx)$ une version régulière de la loi conditionnelle de (τ_{m+1},X_{m+1}) par rapport à $\underline{\underline{F}}_{T_m}$ $(m\in\mathbb{N})$; et on pose $H_m(\omega,dt)=G_m(\omega,dt,\mathbb{R})$. Alors sous l'hypothèse (7),

$$(8)\qquad \nu(dt,dx)=\sum_{m\geq o}\frac{G_m(dt-T_m,dx)}{H_m([t-T_m,\infty])}\ I_{[T_m<t\leq T_{m+1}]}$$

(c.f. [8], Proposition (3.1)).

Nous allons appliquer ces mesures de la façon suivante. Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que le processus $\sum_{s \leq \cdot} |f(s,\Delta X(s))| I_{[\Delta X(s) \neq 0]}$ soit un élément de $\underline{\underline{V}}_+^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$. Alors, le processus $V(f)$ où

$$(9) \qquad V(f,t) = \sum_{s \leq t} f(s,\Delta X(s))\, I_{[\Delta X(s) \neq 0]}\ , (t \in \mathbb{R}_+)$$

est un élément de $\underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et il admet un compensateur prévisible $\widetilde{V}(f)$. Ce compensateur s'écrit

$$(10) \qquad \widetilde{V}(f,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s,x)\ \nu(ds,dx),\ (t \in \mathbb{R}_+).$$

En particulier, si $f(s,x) = x,((s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ $V(f) = X \in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et

$$(11) \qquad \widetilde{X}(t) = \int_0^t \int_{R} x\ \nu(ds,dx),\quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

De même, si $f(s,x) = x^2$ $((s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, l'hypothèse (3) entraîne que $V(f) \in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, mais $V(f) = [X,X]$ dans ce cas, (*) par conséquent

$$(12) \qquad \widetilde{[X,X]}\ (t) = \int_0^t \int_{R} x^2\ \nu(ds,dx),\ (t \in \mathbb{R}_+).$$

Soit $M=X-\widetilde{X}$. Nous avons que $M \in (\underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]) \cap (\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])$

$$(13) \qquad M(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu(ds,dx) - \nu(ds,dx)),\ (t \in \mathbb{R}_+).$$

Par conséquent $M^c=0$ (c.f. [18]) et $[M,M] = \sum_{s \leq \cdot} (\Delta M(s))^2$.

Nous avons alors,

$$[M,M] = [X,X] - 2[X,\widetilde{X}] + [\widetilde{X},\widetilde{X}]$$

Montrons que

$$(14) \qquad \widetilde{[X,\widetilde{X}]} = [\widetilde{X},\widetilde{X}]$$

En effet, d'après un lemme de YOEURP ([41]), Lemme (2-3), p. 454) $[X-\widetilde{X},\widetilde{X}]$ est une martingale locale. D'autre part le processus croissant $[\widetilde{X},\widetilde{X}]$ ne charge pas les temps totalement inaccessibles et pour tout T temps d'arrêt prévisible, $\Delta[\widetilde{X},\widetilde{X}](T)\ I_{[T<\infty]} = (\Delta\widetilde{X}(T))^2\ I_{[T<\infty]} = (\mathbb{E}^{\underline{\underline{F}}_{T-}}\ (\Delta X(T)))^2\ I_{[T<\infty]}$

(*) Pour $A,B \in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, $[A,B] = \sum_{s \leq \cdot} (\Delta A(s))(\Delta B(s))$.

qui est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable. Par conséquent $[\grave{X},\hat{X}]$ est prévisible et nous avons (14).

Il en résulte que

$$\widetilde{[X,X]} - \langle M,M\rangle = [\tilde{X},\tilde{X}]$$

C'est-à-dire

(15) $$\langle M,M\rangle(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x^2 \, \nu(ds,dx) - \sum_{s \leq t} \left(\int_{\mathbb{R}} x \, \nu(\{s\},dx)\right)^2, \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

En particulier, si X est quasi-continu à gauche, c'est-à-dire si tous les temps T_m sont totalement inaccessibles, alors $\tilde{X}$ et $\langle M,M\rangle$ sont continus, $\Delta M=\Delta X$, et $\nu(\{s\}, dx) = 0$ $(s \in \mathbb{R}_+)$. Nous avons alors, pour tout $\varepsilon>0$

$$[\overline{M}^\varepsilon,\overline{M}^\varepsilon](t) = \sigma^\varepsilon(M,t) = \sum_{s \leq t} (\Delta X(s))^2 \, I_{[\,|\Delta X(s)|>\varepsilon]}, \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

Par conséquent, dans ce cas,

(16) $$\langle \overline{M}^\varepsilon,\overline{M}^\varepsilon\rangle(t) = \int_0^t \int_{\{|x|>\varepsilon\}} x^2 \, \nu(ds,dx), \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

Nous nous plaçons dans ce cadre particulier pour énoncer le corollaire suivant.

9. COROLLAIRE

Soit $(X_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ une suite de processus de sauts quasi-continus à gauche et vérifiant 8.(1) à (4). On suppose que chaque processus X_n est adapté à une filtration $\mathbb{F}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ satisfaisant aux conditions habituelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T^n_m \,;\, m \geq 1)$ (resp. ν_n) désigne la suite de temps de saut de X_n (resp. la projection duale prévisible de sa mesure de sauts). (*)

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $\varepsilon>0$

$$\int_0^t \int_{\{|x|>\varepsilon\}} x^2 \, \nu_n(ds,dx) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \;;$$

(2) $$\int_{\mathbb{R}} x \, \nu_n(ds,dx) = b(X_n(s))ds + \eta_{1,n}(ds), \quad (n \in \mathbb{N})$$

(3) $$\int_{\mathbb{R}} x^2 \, \nu_n(ds,dx) = a(X_n(s))ds + \eta_{2,n}(ds), \quad (n \in \mathbb{N})$$

(*) Les espaces d'états E de ces processus peuvent être différents pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

où $\eta_{1,n}$, $\eta_{2,n}$ sont des mesures aléatoires signées vérifiant

$$\int_0^N |\eta_{i,n}(ds)| \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \quad \text{pour tout} \quad N \in \mathbb{N}^*,\ i=1,2.$$

Alors $\mathcal{L}(X_n) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{C}}{\to}} P_0$, où P_0 est l'unique solution du problème de martingales $(0,A,B)$ telle que $P_0(C) = 1$.

Démonstration : Ce corollaire découle directement de la Propositon 4 en utilisant les formules 8.(11), 8.(15) (avec $\nu_n(\{s\},dx) = 0$) et 8.(16), en remarquant que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sup_{t \in [0,N]} |\widetilde{X}_n(t) - \int_0^t b(X_n(s))ds| \leq \int_0^N |\eta_{1,n}(ds)|$$

$$\sup_{t \in [0,N]} | < M_n,M_n >(t) - \int_0^t a(X_n(s))ds| \leq \int_0^N |\eta_{2,n}(ds)|. \blacksquare$$

10. REMARQUE

Supposons que la suite $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ du Corollaire 9 est constituée de processus Markoviens. Dans ce cas, pour chaque n, la loi de X_n est entièrement déterminée par la donnée d'une matrice markovienne $Q_n(x,y)$ et d'une fonction $\lambda_n(x)$ sur l'espace d'états E_n. On a alors que (c.f. [8], [24]).

(1) $\quad \nu_n(dt,x) = \lambda_n(X_n(t-))\ Q_n(X_n(t-),x)dt\ (t \in \mathbb{R}_+,\ n\in \mathbb{N},\ x \in E_n).$

Posons,

(2) $$\alpha_n(z) = \sum_{x\in E_n} \lambda_n(z)\ Q_n(z,x)\ x^2,$$

(3) $$\beta_n(z) = \sum_{x\in E_n} \lambda_n(z)\ Q_n(z,x)x,\ (n\in\mathbb{N},\ z\in\mathbb{R})\ (*)$$

Les hypothèses du Corollaire 9 seront alors satisfaites si

(4) $$\int_0^t \sum_{\substack{x \in E_n \\ \{|x|>\varepsilon\}}} \lambda_n(X_n(s-))\ Q_n(X_n(s-),x)\ x^2\ ds \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon>0$.

(*) Nous prolongeons Q_n et λ_n à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ respectivement, de façon triviale $Q_n(x,y)=0$ dès que x ou y n'appartiennent pas à E_n; $\lambda_n(x)=0$ si $x\notin E_n$.

(5) $\alpha_n(x) \underset{n\uparrow\infty}{\to} a(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(6) $\beta_n(x) \underset{n\uparrow\infty}{\to} b(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(7) Les suites $(\alpha_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$, $(\beta_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ sont uniformément intégrables.

III.3 - MARTINGALES DANS LES PROCESSUS PONCTUELS

Nous adoptons ci-dessous la présentation des processus ponctuels de BREMAUD et JACOD ([3]).

1. DEFINITION

Un processus ponctuel (p.p.) sur l'espace probabilisable $(\Omega, \underline{\underline{F}}^0)$ est une suite $(T_m \; ; \; m \geq 1)$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^0)$ à valeurs dans $]0,\infty[$, vérifiant $T_m(\omega) < T_{m+1}(\omega)$ pour tout $m \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega$ tel que $T_m(\omega) < \infty$. Un tel processus peut également être caractérisé par la donnée d'un processus de comptage ou compteur simple N défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $\omega \in \Omega$ par

$$N(\omega,t) = \begin{cases} m & \text{si} \quad T_m(\omega) \leq t < T_{m+1}(\omega) \\ +\infty & \text{si} \quad T_\infty(\omega) \leq t \end{cases}$$

où $T_0(\omega) = 0$ et $T_\infty(\omega) = \lim\limits_n T_m(\omega)$.

(L'appellation "simple" tient compte de la propriété $\Delta N(t) = 0$ ou 1 pour tout $t \in \mathbb{R}_+$).

On note $\underline{\underline{F}}^0_t(N) = \sigma(N(s) \; ; \; s \leq t)$ et $\mathbb{F}^0(N) = (\underline{\underline{F}}^0_t(N) \; ; \; t \in \mathbb{R}_+)$ la filtration naturelle de N. Cette filtration est continue à droite car N est un processus en escalier, continu à droite.

Lorsqu'une probabilité $\mathbb{P}$ est donnée sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^0)$, le couple $(N,\mathbb{P})$ est appelé un processus ponctuel stochastique (p.p.s.).

Dans ce qui suit nous ne considérons que des processus ponctuels stochastiques non-explosifs c'est-à-dire des p.p.s. pour lesquels $T = +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

Soit $((N^i,\mathbb{P}) \; ; \; 1 \leq i \leq d)$ une suite finie de p.p.s. non explosifs $(d \in N^*)$. Soit $N = (N^1, \ldots, N^d)$. Nous dirons que $(N,\mathbb{P})$ est un d-processus ponctuel multivarié stochastique (d-p.p.m.s.) si pour tous les indices i,j, $i \neq j$, $1 \leq i$, $j \leq d$, on a

$$[N^i, N^j] = 0.$$

(i.e. si N^i et N^j n'ont pas de discontinuité commune, pour tous i,j $i \neq j$ $1 \leq i, j \leq d$).

2. REMARQUES

1) La définition d'un d-p.p.m.s. que nous présentons ci-dessus est un cas particulier de celle de processus ponctuel marqué de BREMAUD et JACOD.

2) Soit $(N,\mathbb{P})$ un d-p.p.m.s. adapté à une filtration $\mathbb{F}$ satisfaisant aux conditions habituelles sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$. $N \in (\underline{\underline{V}}_+^{loc}[F,P])^d$ car chaque composante N^i ne possède que des sauts d'amplitude 0 ou 1. Soit $\widetilde{N} = (\widetilde{N}^1,\ldots,\widetilde{N}^d)$ où $\widetilde{N}^i$ est le compensateur prévisible (relativement à $\mathbb{F}$) de N^i $(1 \leq i \leq d)$. On note $\overset{c}{N} = N - \widetilde{N}$, $\overset{c}{N}$ est un élément de $(\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}])^d$. D'autre part, pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$, les sauts de N^i épuisent les sauts de $\widetilde{N}^i$, par conséquent $\overset{c}{N}{}^i$ et $\overset{c}{N}{}^j$ n'ont pas de discontinuité commune pour $i \neq j$, $(1 \leq i, j \leq d)$ et puisque $\overset{c}{N}{}^i$ et $\overset{c}{N}{}^j$ sont des martingales locales s.c.s. elles sont donc orthogonales.

3) Considérons un p.p.s. $(N,\mathbb{P})$ adapté à une filtration $\mathbb{F}$ satisfaisant aux conditions habituelles sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$. Puisque $\overset{c}{N} = N-\widetilde{N} \in M_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, $[\overset{c}{N},\overset{c}{N}]$ et $<\overset{c}{N},\overset{c}{N}>$ existent tous deux.

Nous allons calculer explicitement ces processus en fonction de N et $\widetilde{N}$.

D'abord,

$$[\overset{c}{N},\overset{c}{N}] = [N,N] - 2[N,\widetilde{N}] + [\widetilde{N},\widetilde{N}]$$

D'après III.2.7 (14) le processus $[\widetilde{N},\widetilde{N}]$ est prévisible et

$$\widetilde{[N,\widetilde{N}]} = [\widetilde{N},\widetilde{N}] \qquad (1)$$

Or,

$$[N,N](t) = \sum_{s \leq t} N(s)^2 = \sum_{s \leq t} \Delta N(s) = N(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, car $\Delta N(t) = 0$ ou $1 (t \in \mathbb{R}_+)$.

Par conséquent,

$$[\overset{c}{N},\overset{c}{N}] = N-2\widetilde{[N,\widetilde{N}]} + \widetilde{[\widetilde{N},\widetilde{N}]} \; ; \qquad (2)$$

$$<\overset{c}{N},\overset{c}{N}> = \widetilde{N} - [\widetilde{N},\widetilde{N}] \qquad (3)$$

Si Y est un processus $\mathbb{F}$-prévisible tel que $(|Y|.\tilde{N})(t) < \infty$, $\mathbb{P}$-p.s., pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors l'intégrale au sens de Stieltjes $(Y.(N-\tilde{N}))(t)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et elle coïncide avec l'intégrale stochastique (au sens d'intégrale par rapport à la martingale locale $\overset{c}{N}$). Dans ces conditions $Y.\overset{c}{N}$ est un élément de $\underline{\underline{M}}_0^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}] \cap \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et $Y.\overset{c}{N}$ appartient à $\underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ si et seulement si $Y \in L^{2,loc}[\overset{c}{N},\mathbb{P}]$, (I.1.2), si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $(Y^2.\tilde{N})(t) < \infty$. Finalement, $Y.\overset{c}{N} \in \underline{\underline{M}}_0^2[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ si et seulement si $Y \in L^2[\overset{c}{N},\mathbb{P}]$, i.e. si et seulement si $\mathbb{E}((Y^2.(\tilde{N}-[\tilde{N},\tilde{N}]))(\infty) < \infty$. Dans ces deux derniers cas, nous avons que le processus $< Y.\overset{c}{N}, Y.\overset{c}{N} >$ existe et la formule (3) se généralise de la façon suivante :

$$(4) \qquad < Y.\overset{c}{N},\ Y.\overset{c}{N} > = Y^2.\tilde{N} - Y^2.[\tilde{N},\tilde{N}]$$

Ces formules nous permettront d'obtenir un Théorème Central Limite pour les intégrales stochastiques dans les processus ponctuels.

3. THEOREME

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ nous considérons ; un espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{F},\mathbb{F}_0,\mathbb{P})$ satisfaisant aux conditions habituelles ; $(N_p,\mathbb{P})$ un d-p.p.m.s. $\mathbb{F}_p$-adapté et non explosif ; un processus vectoriel $Y_p = (Y_p^1,\ldots,Y_p^d)$, $\mathbb{F}_p$-prévisible et tel que $((Y_p^i)^2.\tilde{N}_p^i)(t) < \infty$ $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $i=1,\ldots,d$, tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Soit $A = (A^1,\ldots,A^d)$ une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$, à composantes croissantes et nulles à l'origine.

On pose, par définition

$$Y_p.\overset{c}{N}_p = \begin{pmatrix} Y_p^1.\overset{c}{N}{}_p^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_p^d.\overset{c}{N}{}_p^d \end{pmatrix} \qquad (p \in \mathbb{N})$$

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(1) Pour tout $i=1,\ldots,d$, la suite $(Y_p^i.\overset{c}{N}{}_p^i\ ;\ p \in \mathbb{N})$ satisfait la condition de raréfaction asymptotique des sauts ;

(2) Pour tout $i=1,\ldots,d$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$((Y_p^i)^2.\widetilde{N}_p^i)(t) - ((Y_p^i)^2.[\widetilde{N}^i,\widetilde{N}^i])(t) \underset{p\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A^i(t)$$

Alors $(Y_p.\overset{c}{N_p}\ ;\ p \in \mathbb{N})$ converge en loi vers une martingale vectorielle gaussienne continue (canonique) dont les composantes sont indépendantes. La fonction A^i est le processus croissant associé à la i-ième martingale composante $(1 \leq i \leq d)$.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la Remarque précédente et du Corollaire II.5.12. ∎

4. REMARQUES

1) Dans le cas où le processus $N_p (p \in \mathbb{N})$ ci-dessus sont quasi-continus à gauche (i.e. avec des sauts totalement inaccessibles), les processus $\widetilde{N}_p$ sont continus et $[\widetilde{N}_p^i,\widetilde{N}_p^i]$ est nul pour tout $i=1,\ldots,d$; $p \in \mathbb{N}$. La condition 3.(2) est alors remplacée par

$$(2')\quad ((Y_p^i)^2.\widetilde{N}_p^i)(t) \underset{p\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A^i(t),\ (i=1,\ldots,d\ ;\ t \in R_+).$$

Cette version du Théorème 3 a été présentée dans [35] où nous avons étudié son application à l'étude statistique d'une famille de processus ponctuels quasi-continus à gauche.

2) Si $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{F},\mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, nous désignerons par $\underline{\underline{C}}(\mathbb{F})$ l'ensemble de changements de temps continus de $\mathbb{F}$, c'est-à-dire l'ensemble des processus τ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\tau(.,t)$ est un temps d'arrêt de $\mathbb{F}$ et pour tout $\omega \in \Omega$, $(\omega,.)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Si X est un processus, désignons par $X\circ\tau$ (resp. $\mathbb{F}\circ\tau$), le processus changé de temps (resp. la filtration changée de temps) $X\circ\tau(\omega,t) = X(\omega,\tau(\omega,t))$, $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{F}\circ\tau = (\underline{\underline{F}}_{\tau(t)}\ ;\ t \in \mathbb{R}_+)$).

KAZAMAKI a montré dans [9] que si $\tau \in \underline{\underline{C}}(\mathbb{F})$ et $M \in \underline{\underline{M}}_0^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, alors $M\circ\tau \in \underline{\underline{M}}_0^{loc}[\mathbb{F}\circ\tau,\mathbb{P}]$ et $[M\circ\tau,M\circ\tau] = [M,M]\circ\tau$. D'autre part si Y est un processus $\mathbb{F}$-prévisible, alors $Y\circ\tau$ est $\mathbb{F}\circ$ -prévisible. Il s'en suit que pour tout $M \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$, $M\circ\tau \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F}\circ\tau,\mathbb{P}]$ et $\langle M\circ\tau,M\circ\tau\rangle = \langle M,M\rangle\circ\tau$.

Si $(N,\mathbb{P})$ est un p.p.s. adapté à $\mathbb{F}$ et non explosif, il est clair que pour tout $\tau \in \underline{\underline{C}}(\mathbb{F})$, $(N\circ\tau,\mathbb{P})$ est un p.p.s. non explosif adapté à $\mathbb{F}\circ\tau$. Par ailleurs, si N désigne le $\mathbb{F}$-compensateur prévisible de N, le $\mathbb{F}\circ\tau$ -compensateur prévisible de $N\circ\tau$ est le processus $\widetilde{N}\circ\tau$.

Ces remarques élémentaires nous permettent d'obtenir le corollaire suivant.

5. COROLLAIRE

Soient $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles ; $(N,\mathbb{P})$ un d-p.p.m.s. $\mathbb{F}$-adapté, non explosif, $(\tau_p\ ;\ p\in\mathbb{N})$ une suite de changements de temps appartenant à $\underline{\underline{C}}(\mathbb{F})$; $(Y_p\ ;\ p\in\mathbb{N})$ une suite de processus vectoriels, chaque $Y_p=(Y_p^1,\dots,Y_p^d)$ étant $\mathbb{F}$-prévisible et vérifiant $((Y_n^i)^2.\tilde{N}^i)(t)<\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et tout $i=1,\dots,d$.

Soit $A=(A^1,\dots,A^d)$ une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$, continue, dont les composantes sont croissantes et nulles à l'origine.

Supposons que

(1) Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, tout $i=1,\dots,d$, la suite $((Y_p^i.\overset{c}{N}{}^i)\circ\tau_p\ ;\ p\in\mathbb{N})$ vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts ;

(2) Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, tout $i=1,\dots,d$,

$$((Y_p^i)^2.\tilde{N}^i)\circ\tau_p(t)-((Y_p^i)^2.[\tilde{N}^i,\tilde{N}^i])\circ\tau_p(t)\ \underset{p\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}}\ A^i(t)$$

Alors $((Y_p.\overset{c}{N})\circ\tau_p\ ;\ p\in\mathbb{N})$ converge en loi vers une martingale vectorielle gaussienne continue (canonique) dont les composantes sont indépendantes. La fonction A^i est le processus croissant associé à la i-ième martingale composante $(1\leq i\leq d)$.

6. ETUDIONS UN CAS PARTICULIER DU COROLLAIRE PRECEDENT

Sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{F},\mathbb{P})$ nous considérons un processus ponctuel stochastique non explosif $(N,\mathbb{P})$ possédant un compensateur $\mathbb{F}$-prévisible $\tilde{N}$ continu. Soient $(\alpha_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$, $(\beta_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que $\alpha_n\uparrow\infty$ et $\beta_n\uparrow\infty$ lorsque $n\uparrow\infty$.

On définit

$$M_n(t)=\frac{N(\alpha_n t)-\tilde{N}(\alpha_n t)}{\beta_n}\ ,\ (n\in\mathbb{N},\ t\in\mathbb{R}_+).$$

Soit A une fonction réelle continue, croissante, $A(0)=0$.

7. COROLLAIRE

Supposons que

(1) $$\frac{\tilde{N}(\alpha_n t)}{\beta_n^2}\ \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}}\ A(t)\quad \text{pour tout}\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

<u>alors la suite</u> $(M_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ <u>converge en loi vers une martingale gaussienne continue de processus croissant associé</u> A <u>et en outre</u>

$$\frac{N(\alpha_n t)}{\beta_n^2} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} A(t) \quad \underline{\text{pour tout}} \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

<u>Démonstration</u> : La première assertion est une conséquence du Corollaire 5 : il suffit de considérer Y_n et τ_n définis par

$$Y_n(t) = \frac{1}{\beta_n} \; ; \; \tau_n(t) = \alpha_n t \quad (n \in \mathbb{N}, \; t \in \mathbb{R}_+).$$

La condition de raréfaction asymptotique des sauts est vérifiée car $\Delta M_n(t) = 0$ ou $1/_{\beta n}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$; d'autre part (1) n'est que la transcription de l'hypothèse 5.(2).

Par ailleurs, puisque $(M_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ converge en loi et que $\beta_n \uparrow \infty$ lorsque $n \uparrow \infty$, nous aurons que

$$\frac{1}{\beta_n} M_n(t) = \frac{N(\alpha_n t)}{\beta_n^2} - \frac{\tilde{N}(\alpha_n t)}{\beta_n^2} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L} \text{ et } \mathbb{P}} 0$$

L'hypothèse (1) entraîne alors que

$$\frac{N(\alpha_n t)}{\beta_n^2} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbb{P}} A(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+). \; \blacksquare$$

8. A titre d'exemple on peut déduire du Corollaire 7 le résultat classique suivant.

Supposons que $(N,\mathbb{P})$ soit un processus ponctuel stochastique de Poisson de $\mathbb{F}$-<u>intens</u>ité λ $(\lambda>0)$, c'est-à-dire $\tilde{N}(t) = \lambda t$ $(t \in \mathbb{R}_+)$. On pose $\alpha_n = n$, $\beta_n = \sqrt{\lambda n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Nous obtenons ainsi que la suite $(M_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ converge en loi vers un mouvement Brownien canonique, où

$$M_n(t) = \frac{N(nt) - \lambda nt}{\sqrt{\lambda n}} \quad (n \in \mathbb{N}, \; t \in \mathbb{R}_+).$$

9. Considérons un autre exemple d'application du Corollaire 7.

Sur $(\Omega, \underline{F}, \mathbb{P})$ on considère un processus ponctuel $(T_k \; ; \; k \geq 1)$ telle que les variables aléatoires $(T_{k+1} - T_k, \; k \in \mathbb{N})$ soient indépendantes et de même loi. Désignons par ν le processus de comptage associé à $(T_k \; ; \; k \geq 1)$. Le processus ponctuel stochastique $(\nu,\mathbb{P})$ est non explosif, c'est un processus dit de <u>renouvellement</u>.

Supposons en outre l'existence d'un p.p.s. de Poisson canonique sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$, que nous notons $(\overline{N},\mathbb{P})$. C'est-à-dire $\overline{N}$ est non explosif et son comportement prévisible par rapport à sa filtration naturelle complétée $\mathbb{F}(\overline{N})$ est l'identité sur $\mathbb{R}_+$. Nous ferons l'hypothèse que $\overline{N}$ et ν sont indépendants.

Considérons finalement une suite de variables aléatoires $(\lambda_k\ ;\ k\in\mathbb{N})$ indépendante du processus de Poisson et du processus de renouvellement précédents, constituée de variables positives, indépendantes et de même loi.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$ nous supposons que :

(1) $\lambda_k \in L^2(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$. On pose $m_\lambda = \mathbb{E}(\lambda_k)$; σ_λ^2 = Variance (λ_k) ;

(2) $S_k = T_{k+1} - T_k \in L^2(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$. On pose $m_T = \mathbb{E}(S_k)$, $\gamma_T^2 = \mathbb{E}(S_k^2)$.

On définit maintenant deux processus croissants λ et Λ par les relations suivantes :

(3) $\lambda(t) = \lambda_{\nu(t)}\quad (t\in\mathbb{R}_+)$

(4) $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds\ (t\in\mathbb{R}_+)$.

Λ est à trajectoires continues et $\Lambda(0) = 0$. Soit Λ^{-1} son inverse défini par

$$\Lambda^{-1}(t) = \inf\{s\geq 0\ ;\ \Lambda(s) > t\}\qquad (\inf\emptyset = +\infty)$$

Soit $\underline{\underline{H}}^0 = \sigma(\Lambda^{-1}(t)\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$, notons $\underline{\underline{H}}$ la complétée pour $\mathbb{P}$.

Posons $\underline{\underline{F}}_t = \underline{\underline{H}}\vee\underline{\underline{F}}_t(\overline{N})\ (t\in\mathbb{R}_+)$; $\mathbb{F} = (\underline{\underline{F}}_t\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$.

On remarque que Λ^{-1} est indépendt de $\overline{N}$; le compensateur prévisible de $\overline{N}$ par rapport à $\mathbb{F}$ est toujours l'identité sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs Λ^{-1} est adapté à $\mathbb{F}$ et par conséquent $\Lambda(t)$ est un temps d'arrêt de $\mathbb{F}$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ (c.f. [5], IV. 45).

Soit $\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{F}}_{\Lambda(t)}\ (t\in\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{G} = (\underline{\underline{G}}_t\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$.

Posons

$$N(t) = \overline{N}(\Lambda(t)),\ (t\in\mathbb{R}_+).$$

$(N,\mathbb{P})$ est un p.p.s. non explosif adapté à $\mathbb{G}$ et son $\mathbb{G}$-compensateur prévisible $\widetilde{N}$ vérifie :

$$\widetilde{N} = \Lambda$$

$(N,\mathbb{P})$ est un <u>processus de Poisson doublement stochastique ou processus de Cox</u> (c.f. [7]).

Remarquons ensuite que

$$(5) \qquad \tilde{N}(nt) - m_\lambda nt = \sum_{k=0}^{\nu(nt)-1} (\lambda_k - m\ )S_k + (\lambda_{\nu(nt)} - m_\lambda)(t - T_{\nu(nt)}) (n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_+)$$

Introduisons les suites U_n où

$$U_n(r) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{r} \xi_k \ ;\ \xi_k = (\lambda_k - m\ )S_k,\ (k,n,r) \in \mathbb{N}^3.$$

Soit $\underline{\underline{B}}_r^o = \sigma((\lambda_k, T_k)\ ;\ k \leq r)$, $\mathbb{B} = (\underline{\underline{B}}_r\ ;\ r \in \mathbb{N})$.

Chaque U_n est une $(\mathbb{B},\mathbb{P})$-martingale de carré intégrable. D'autre part, pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, $\nu(nt)$ est un temps d'arrêt de $\mathbb{B}$.

Appliquons le Théorème III.1.9 à la suite $(U_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ et aux changements de temps $(\nu(n.)\ ;\ n \in \mathbb{N})$. Nous utilisons le résultat auxiliaire suivant prouvé par BILLINGSLEY dans [1] (p.149) :

$$(6) \qquad \frac{\nu(u)}{u} \underset{u\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} \frac{1}{m_T}$$

Nous avons, d'autre part,

$$\mathbb{E}(\xi_k) = 0$$
$$\mathbb{E}(\xi_k^2) = \sigma_\lambda^2 \ \gamma_T^2\ (k \in \mathbb{N}).$$

Désignons par F la loi commune aux variables indépendantes ξ_k $(k \in \mathbb{N})$. Nous avons que pour tous $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\nu(nt)} \mathbb{E}^{\underline{\underline{B}}_{k-1}} (\xi_k^2\ I_{[\,|\xi_k| > \sqrt{n}\varepsilon\,]}) =$$

$$= \frac{\nu(nt)}{n} \int_{\{|u| > \sqrt{n}\varepsilon\}} u^2\ F(du)$$

D'après (6),

$$(7) \qquad \frac{\nu(nt)}{n} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} \frac{t}{m_T}\ ,\ (t \in \mathbb{R}_+)$$

Et puisque $\xi_k \in L^2(\Omega, \underline{F}, \mathbb{P})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons que

$$\int_{\{|u| > \sqrt{n}\varepsilon\}} u^2\ F(du) \underset{n\uparrow\infty}{\rightarrow} 0$$

Par conséquent

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\nu(nt)} \mathbb{E}^{\underline{\underline{B}}_{k-1}} (\xi_k^2\ I_{[\,|\xi\ | > \sqrt{n}\varepsilon]}) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} 0$$

L'hypothèse III.1.9.(1) est donc satisfaite. Montrons que l'on a également III.1.9.(2). Or

$$\frac{1}{n}\ \Sigma_{k=1}^{(nt)}\ \mathbb{E}^{\underline{B}_{k-1}}(\xi_k^2) = \frac{\nu(nt)}{n}\ \sigma_\lambda^2\ \gamma_T^2$$

et d'après (7) cette dernière expression converge en probabilité vers $\frac{\sigma_\lambda^2\ \gamma_T^2}{m_T} t$ $(t \in \mathbb{R}_+)$.

Désignons par B le mouvement Brownien canonique. D'après le Théorème III.1.9. nous avons que

$$(8) \qquad U_n \circ \nu(n) \underset{n\uparrow\infty}{\to} \frac{\sigma_\lambda\ \gamma_T}{\sqrt{m_T}}\ B$$

Revenons à l'expression (5). On remarque que pour tout $K \in \mathbb{N}^*$,

$$(9) \qquad \sup_{t \in [0,K]} \left|\frac{\tilde{N}(nt)-m_\lambda nt}{\sqrt{n}} - U_n\circ\nu(nt)\right| \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

En effet car,

$$\left|\frac{\tilde{N}(nt)-m_\lambda\ nt}{\sqrt{n}} - U_n\circ\nu(nt)\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}\ |\lambda_{\nu(t)} - m_\lambda|\,|\ t-T_{\nu(nt)+1}|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\ |\lambda_{\nu(nt)} - m_\lambda|\ S_{\nu(nt)}$$

et

$$\sup_{t \in [0,K]} \left|\frac{\tilde{N}(nt)-m_\lambda\ nt}{\sqrt{n}} - U_n\circ\nu(nt)\right| \leq \sup_{t \in [0,K]} |\Delta U_n\circ\nu(nt)|$$

La continuité de la limite dans (8) permet de montrer facilement que

$$\sup_{t \in [0,K]} |\Delta U_n\circ\nu(nt)| \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

(En effet, pour tout $\varepsilon,\delta > 0$: $\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,K]} |\Delta U_n\circ\nu(nt)| > \varepsilon\right) \leq$

$\leq \mathbb{P}(W_C^K(U_n\circ\nu(n.),\delta) > \varepsilon))$

On obtient ainsi (9) et de (8) on déduit que

$$(10) \qquad \frac{\tilde{N}(n.)-m_\lambda\ n.}{\sqrt{n}} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \frac{\sigma_\lambda\ \gamma_T}{\sqrt{m_T}}\ B$$

Cette convergence entraîne alors que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{\tilde{N}(nt)-m_\lambda nt}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L} \text{ et } \mathbb{P}} 0$$

e t il s'en suit que

$$(11) \qquad \frac{\tilde{N}(nt)}{n} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} m_\lambda t \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

En appliquant le Corollaire 7 nous obtenons finalement que

$$(12) \qquad M_n \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \sqrt{m_\lambda}\, B \quad \text{et} \quad \frac{N(nt)}{n} \underset{n\,\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} m_\lambda t \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

où

$$M_n(t) = \frac{N(nt)-\tilde{N}(nt)}{\sqrt{n}} \qquad (n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_+).$$

Cet exemple d'étude asymptotique a été traité dans [7] par des méthodes différentes, sans apporter des conclusions sur le comportement de la suite $(\frac{N(n.)-\tilde{N}(n.)}{\sqrt{n}}\ ,\ n \in \mathbb{N})$. GRANDELL s'intéresse plutôt à l'étude de la convergence en loi des processus de la forme

$$\frac{N(n.)\ -\ \alpha(n.)}{\beta_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

où α est une fonction réelle croissante, $(\beta_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ une suite réelle strictement positive, $\beta_n \uparrow \infty$ si $n \uparrow \infty$.

La littérature abonde sur ce dernier type d'étude, ces recherches ayant été surtout influencée par le résultat classique cité au numéro 8 ci-dessus. Le lecteur pourra consulter les nombreuses références sur les files d'attente où il est souvent question de chercher des "compensateurs de convergence" α au sens précédent. Nous estimons que la façon la plus naturelle de les choisir est de prendre les compensateurs prévisibles associés aux processus ponctuels en question.

La proposition suivante est un résultat complémentaire du Corollaire 7.

10. <u>PROPOSITION</u>

<u>Nous supposons satisfaites les hypothèses du numéro 6. Si en outre</u>

$$(1) \qquad \frac{N(\alpha_n t)}{\beta_n^2} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A(t) \quad \underline{\text{pour tout}}\ t \in \mathbb{R}_+,\ \underline{\text{alors}}$$

$$(2)\quad \frac{\widetilde{N}(\alpha_n t)}{\beta_n^2} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

<u>et la suite</u> $(M_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ <u>converge en loi vers une martingale gaussienne continue de processus croissant associé</u> A.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de prouver (2). Or

$$L_n = \frac{N(\alpha_n .)-\widetilde{N}(\alpha_n .)}{\beta_n^2} \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ est une martingale locale}$$

localement de carré intégrable par rapport à la filtration $\mathbf{F}_n = (\underline{\underline{F}}_{n,t}\ ;\ t \in \mathbb{R}_+)$ où $\underline{\underline{F}}_{n,t} = \underline{\underline{F}}_{\alpha_n t}$.

Nous avons que

$$[L_n,L_n] = \frac{N(\alpha_n .)}{\beta_n^4}$$

De (1) on déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$(3)\quad [L_n,L_n](t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\Delta L_n(t) = \frac{1}{\beta_n^2}$ ou 0, nous pouvons appliquer les Remarques II.3.7 et II.2.3. à la suite $(L_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$. Nous obtenons ainsi que (3) entraîne que

$$(4)\quad \langle L_n,L_n\rangle(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

et

$$(5)\quad L_n^*(t) = \sup_{s\leq t} |L_n(s)| \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

Mais (5) veut dire que $\left(\frac{N(n.)}{\beta_n^2}\ ;\ n \in \mathbb{N}\right)$ et $\left(\frac{\widetilde{N}(n.)}{\beta_n^2}\ ;\ n \in \mathbb{N}\right)$ sont deux suites C-contigües. Par conséquent (1) entraîne (2). ∎

11. Revenons à l'exemple du numéro 9. La relation 9.(6) entraîne, d'après la Proposition 10, que

$$(1)\quad \frac{\widetilde{\nu}(nt)}{n} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} \frac{t}{m_t} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

et

$$(2)\quad \frac{\nu(n.)-\widetilde{\nu}(n.)}{\sqrt{n}} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \frac{1}{m_T} B$$

où $\tilde{\nu}$ est le compensateur prévisible de ν par rapport à $\mathbb{F}(\nu)$.(*)

Considérons maintenant une suite $(X_m ; m \geq 1)$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi G. On pose $X_0=0$ et on supposera que la suite $(X_m ; m \in \mathbb{N})$ est indépendante du processus de renouvellement $(\nu,\mathbb{P})$.

C'est une situation que l'on rencontre fréquemment dans l'étude de files d'attente : ν représente alors le processus des arrivées et X_m la durée de service du m-ième client et on suppose qu'il y a un seul serveur, (file G/GI/1 dans la terminologie de Kendall).

Supposons encore que $X_m \in L^2(\Omega,\underline{F},\mathbb{P})$ $(m \in \mathbb{N})$ et notons

$$m_X = \mathbb{E}(X_m) \ ; \quad \gamma_X^2 = \mathbb{E}(X_m^2).$$

On définit un processus de saut X par la relation

$$(3) \qquad X(t) = X_m \quad \text{si} \quad T_m \leq t < T_{m+1}, \ (t \in \mathbb{R}_+)$$

C'est le processus des <u>durées de service</u>.

$X \in \underline{V}^{loc}[\mathbb{F}(X),\mathbb{P}]$ et nous pouvons calculer $\tilde{X}$ à partir des formules III.2.8.(8) et III.2.8.(11). Nous utilisons aussi la formule (55)de BREMAUD et JACOD [3].

On trouve alors facilement :

$$(4) \qquad \tilde{X}(t) = m_X\, \tilde{\nu}(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

($\tilde{X}$ est le compensateur $\mathbb{F}(X)$-prévisible de X, tandis que $\tilde{\nu}$ est ici le compensateur $\mathbb{F}(\nu)$-prévisible de ν).

Soit $M=X-\tilde{X}$. Puisque X est quasi-continu à gauche, la formule III.2.8.(15) donne

$$\langle M,M\rangle = \widetilde{[X,X]}$$

Pour calculer $\widetilde{[X,X]}$ nous utilisons les formules III.2.8.(8), III.2.8.(12) et (55) de [3]. On obtient ainsi

$$(5) \qquad \langle M,M\rangle = \gamma_X^2\, \tilde{\nu}(t), \ (t \in \mathbb{R}_+)$$

Nous allons maintenant analyser le comportement asymptotique du processus X. Pour cela on définit :

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, X(nt)$$

(*) Ce compensateur s'écrit $\tilde{\nu}(t) = \tilde{\nu}(T_m) + \int_0^{t-T_m} \frac{H(du)}{1-H(u-)}$ si $T_m \leq t < T_{m+1}$ où H est la loi commune aux variables $T_{m+1}-T_m$.

$$M_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,(X(nt)-\widetilde{X}(nt)) = X_n(t)-\widetilde{X}_n(t)$$

$$\underline{\underline{F}}_{n,t} = \underline{\underline{F}}_{nt}(X) \quad (n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_+)$$

D'après (5), nous aurons

$$(6) \quad \langle M_n, M_n\rangle(t) = \frac{\gamma_X^2}{n}\ \widetilde{\nu}(nt)$$

Remarquons d'autre part que pour tout $\varepsilon>0$, $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$,

$$(7) \quad \langle \overline{M}_n^{\varepsilon}, \overline{M}_n^{\varepsilon}\rangle(t) = \widetilde{\sigma}^{\varepsilon}(M_n,t) = \left(\int_{\{|x|>\sqrt{n}\varepsilon\}} x^2\, G(dx)\right) . \frac{\widetilde{\nu}(nt)}{n}$$

(d'après la quasi-continuité à gauche de M_n et des formules III.2.8.(8), III.2.(16), et (55) de [3]).

Nous avons alors que (1) et l'intégrabilité de X_m^2 entraînent d'après (7) que la suite $(M_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ vérifie la condition de raréfaction asymptotique des sauts. D'autre part de (1) et de (6) on déduit que

$$\langle M_n, M_n\rangle(t) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} \frac{\gamma_X^2}{m_T}\, t \qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Par conséquent, d'après le Théorème II.4.5,

$$M_n = \frac{X(n.)-m_X\nu(n.)}{\sqrt{n}} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\rightarrow}} \frac{\gamma_X}{\sqrt{m_T}}\ B.$$

12. <u>Pour terminer avec les exemples, nous allons étudier le comportement asymptotique d'un modèle plus général de files d'attente (c.f.</u> [3]).

Fixons un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$. Nous allons construire le processus de file d'attente dans un cas simple : c'est le cas d'une file d'attente à une unité de service où l'on suppose qu'à un instant donné ne peuvent ni arriver ni partir deux clients à la fois et il ne peut y avoir simultanément l'arrivée d'un client et le départ d'un autre.

Soit $Q(t)$ le nombre de clients présents dans la file à l'instant t. C'est un processus de sauts à états entiers que l'on prend par convention continu à droite. On lui associe deux processus de comptage,

$$N^1(t) = \sum_{s\geq t} I_{[\Delta Q(s)=1]} \quad \text{nombre d'arrivées jusqu'à l'instant } t,\ (t \in \mathbb{R}_+)$$

$$N^2(t) = \sum_{s\leq t} I_{[\Delta Q(s)=-1]} \quad \text{nombre de départs jusqu'à l'instant } t,\ (t \in \mathbb{R}_+)$$

$$Q(t) = Q_0 + N^1(t) - N^2(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Q est entièrement déterminé par la donnée de Q_0 (nombre initial de clients dans la file) et la donnée des processus N^1 et N^2. Pour simplifier nous supposons désormais $Q_0=0$.

Soit $\mathbb{F}$ une filtration satisfaisant aux conditions habituelles et telle que Q lui soit adapté. Nous supposons en outre que Q est quasi-continu à gauche et non-explosif.

Ainsi $Q \in \underline{\underline{V}}^{loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}]$ et son compensateur prévisible se calcule comme

(1) $$\tilde{Q} = \tilde{N}^1-\tilde{N}^2$$

$$\overset{c}{Q} = Q-\tilde{Q} \in \underline{\underline{M}}_0^{2,loc}[\mathbb{F},\mathbb{P}] \text{ et } <\overset{c}{Q},\overset{c}{Q}> \text{ vaut}$$

(2) $$<\overset{c}{Q},\overset{c}{Q}> = <\overset{c}{N^1},\overset{c}{N^1}> + <\overset{c}{N^2},\overset{c}{N^2}> = \tilde{N}^1+\tilde{N}^2$$

car $\overset{c}{Q} = \overset{c}{N^1}-\overset{c}{N^2}$ et $\overset{c}{N^1}$ et $\overset{c}{N^2}$ sont orthogonales.

Soient A^1,A^2 deux fonctions réelles continues, croissantes, nulles en 0. Nous désignons par $M = (M^1,M^2)$ la martingale vectorielle, gaussienne, continue, canonique telle que $<M^i,M^j> = \delta_{ij}\, A^i (i,j = 1,2)$.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 10 et du Corollaire 5 ci-dessus.

13. <u>COROLLAIRE</u>

<u>Considérons les deux propositions suivantes</u> :

(1) <u>Il existe une suite</u> $(\beta_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ <u>de réels strictement positifs telle que</u> $\beta_n \uparrow \infty$ <u>quand</u> $n \uparrow \infty$ <u>et</u>

$$\frac{\tilde{N}^i}{\beta_n^2}(nt) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A^i(t), \quad (i=1,2 \,;\, t \in \mathbb{R}_+).$$

(1') <u>Il existe une suite</u> $(\beta_n \,;\, n \in \mathbb{N})$ <u>de réels strictement positifs telle que</u> $\beta_n \uparrow \infty$ <u>quand</u> $n \uparrow \infty$ <u>et</u>

$$\frac{N^i}{\beta_n^2}(nt) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} A^i(t), \quad (i=1,2 \,;\, t \in \mathbb{R}_+)$$

<u>Si (1) (resp. (1')) est vérifiée, alors (1') (resp. (1)) est également satisfaite et alors</u>

(2) $$\left(\frac{N^1(n.)-\tilde{N}^1(n.)}{\beta_n}, \frac{N^2(n.)-\tilde{N}^2(n.)}{\beta_n}\right) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} (M^1,M^2)$$

<u>En outre on a</u>

(3) $$\frac{Q(n.)-\tilde{Q}(n.)}{\beta_n} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\rightarrow}} M^1+M^2$$

(4) $$\frac{Q(nt)}{\beta_n^2} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} A^1(t)-A^2(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

<u>et</u>

(5) $$\frac{\tilde{Q}(nt)}{\beta_n^2} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} A^1(t) - A^2(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

<u>Démonstration</u> : Il ne reste qu'à faire quelques commentaires sur la preuve de (3), (4) et (5). (3) se démontre directement à partir du Théorème II.4.5 en remarquant que

$$|\Delta \frac{\overset{c}{Q}(nt)}{\beta_n}| \leq \frac{2}{\beta_n} \quad (n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_+)$$

et que $\frac{1}{\beta_n^2} \langle \overset{c}{Q},\overset{c}{Q} \rangle (nt) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} (A^1+A^2)(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+)$.

Or la martingale M^1+M^2 vérifie

$$\langle M^1+M^2 , M^1+M^2 \rangle = A^1+A^2$$

puisque M^1 et M^2 sont orthogonales.

Quant à (4) et (5), ce ne sont que des conséquences élémentaires de (1) et (1') respectivement, étant donné les relations

$$Q=N^1-N^2 \ ; \ \tilde{Q}=\tilde{N}^1-\tilde{N}^2.$$

14. Illustrons les derniers résultats par l'étude d'un cas classique, une file $M/M/1$ avec un taux d'arrivées λ et un temps moyen de service $\frac{1}{\mu}$ $(0 < \mu \leq \lambda)$.

On considère $\mathbb{F}=\mathbb{F}(Q)$. Nous avons alors

$$\tilde{N}^1(t) = \lambda t \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

$$\tilde{N}^2(t) = \int_0^t I_{[Q(s)>0]}\, \mu\, ds, \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Lorsque la file est <u>très chargée</u> il y a lieu de considérer

$\tilde{N}^2(t)$ approx. égal à $\mu t \quad (t \in \mathbb{R}_+)$

Considérons : $\beta_n = \sqrt{n(\lambda+\mu)}, \quad (n \in \mathbb{N})$

$$A^1(t) = \frac{\lambda t}{\lambda+\mu} \qquad (t \in \mathbb{R}_+)$$

$$A^2(t) = \frac{\mu t}{\lambda+\mu} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

B désigne le mouvement Brownien canonique.
Le Corollaire 13 nous donne alors

$$\frac{Q(n.)-(\lambda-\mu)n.}{\sqrt{n(\lambda+\mu)}} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\rightarrow}} B$$

$$\frac{N^1(n.)-\lambda n}{\sqrt{n(\lambda+\mu)}} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\rightarrow}} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} B$$

$$\frac{N^2(n.)-\mu n.}{\sqrt{n(\lambda+\mu)}} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\rightarrow}} \frac{\mu}{\lambda+\mu} B$$

$$\frac{Q(nt)}{n(\lambda+\mu)} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\rightarrow}} \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}, \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le caractère assez général du Corollaire 13. Pour l'établir nous n'avons supposé ni une discipline de service particulière ni avons fait aucune hypothèse d'indépendance entre les processus du modèle. C'est pourquoi nous espérons que la méthode pourra s'appliquer avec succès dans un vaste éventail de files d'attente.

REMARQUES FINALES

Comme nous le disions dès l'Introduction de cet article, nous avons voulu montrer ici une méthode d'étude de la convergence en loi des processus. En ce sens, ces pages ne sauraient être exhaustives, elles laissent au contraire la porte ouverte à de nombreuses applications. Nous en citons quelques unes : le vaste domaine des files d'attente où il existe une littérature très abondante sur l'analyse asymptotique ; les méthodes asymptotiques en Statistique des Processus Aléatoires ; l'approximation par des diffusions des processus intervenant dans les modèles de génétique ; la construction de solutions approchées (au sens de la convergence en loi) à un certain type d'équations différentielles stochastique ; etc.

Sur le plan théorique, le problème du prolongement de ces méthodes au cas des martingales locales (non localement de carré intégrable) reste ouvert. L'auteur espère pouvoir s'y consacrer dans un article ultérieur. La difficulté essentielle pour une telle étude c'est l'inexistence du processus $<M,M>$ pour une telle martingale locale M. Cela nous oblige à trouver une version différente de la condition de raréfaction des sauts et en outre, nous devons faire intervenir $[M,M]$ au lieu de $< M,M >$ dans les hypothèses de nos théorèmes.

Nous espérons que ces pages auront au moins attiré l'attention du lecteur sur un autre aspect des vastes possibilités d'utilisation de la Théorie des Martingales.

APPENDICE

Quand cet article était achevé, l'auteur a appris que D. ALDOUS venait de publier une intéressante note [Annals of Proba. 6 (1978), 335-340] où un critère de compacité étroite relative plus général que notre Proposition II.1.3 est démontré. Ce critère peut être utilisé en particulier pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de processus soit C-tendue. Nous expliquons d'abord ci-dessous le Théorème de ALDOUS en renvoyant le lecteur à l'article original (désigné par [AL]) pour la démonstration.

Le résultat principal de [AL] est le Théorème 1 qui donne un critère de compacité étroite relative pour les lois d'une suite $(X_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ de processus à trajectoires dans l'espace $D([0,1], \mathbb{R})$. Evidemment, ce Théorème peut être prolongé au cas où les processus possèderaient des trajectoires dans $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Soit $(X_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ une suite de processus définis sur l'espace probabilisé complet $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$ à trajectoires dans $D = D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (si les processus sont définis sur des espaces différents, on les ramène au même espace en considérant la structure produit et en y définissant une suite de processus possédant les mêmes lois que les processus X_n selon une procédure bien connue). On suppose chaque X_n adapté à une filtration $\mathbb{F}_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Considérons les ensembles suivants, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

$TB(N) = \{(T_n\ ;\ n \in \mathbb{N}) : T_n$ est un $\mathbb{F}_n$-temps d'arrêt borné par N, pour tout $n \in \mathbb{N}\}$

$TE(N) = \{(T_n\ ;\ n \in \mathbb{N}) : T_n$ est un $\mathbb{F}_n$-temps d'arrêt ne prenant qu'un nombre fini de valeurs dans $[0,N]$ (temps d'arrêt étagés)$\}$.

$DE(N) = \{(\delta_n\ ;\ n \in \mathbb{N}) : \delta_n$ est un réel de $]0,N[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\delta_n \downarrow 0$ quand $n \uparrow \infty\}$.

Le résultat essentiel de [AL] s'énonce alors

1. THEOREME (Aldous)

Supposons que l'une des conditions suivantes est vérifiée, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

(1a) Les suites $(X_n(0)\ ;\ n \in \mathbb{N})$ et $((\Delta X_n)^*(N)\ ;\ n \in \mathbb{N})$ sont $\mathbb{R}$-tendues ; ou bien

(1b) $(X_n(t)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est $\mathbb{R}$-tendue pour tout $t\in[0,N]$.
Supposons en outre que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

(2) $X_n(T_n+\delta_n) - X_n(T_n) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$ pour toute suite $(T_n\ ;\ n\in\mathbb{N})\in TE(N)$ et toute suite $(\delta_n\ ;\ n\in\mathbb{N})\in DE(N)$.

Alors $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue.

Nous allons appliquer ce théorème pour obtenir une caractérisation commode des suites C-tendues. Dans ce but, considérons une hypothèse plus forte que (1a) :

(1c) La suite $(X_n(0)\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est $\mathbb{R}$-tendue et $(\Delta X_n)^*(N) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$.

Nous pouvons alors déduire le Corollaire suivant du Théorème 1.

2. <u>COROLLAIRE</u>

La suite $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue si et seulement si pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ les hypothèses (1c) et (2) sont vérifiées.

<u>Démonstration</u> : Si $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est C-tendue, il est aisé de voir que les hypothèses (1c) et (2) sont satisfaites pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, (voir Proposition 1.2.2. et Remarque 1.2.6.2)).

Réciproquement, puisque (1c) entraîne (1a), nous aurons que $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue dès que (1c) et (2) sont vérifiées pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, en vertu du Théorème 1.

Soient $N\in\mathbb{N}^*,\varepsilon,\ \eta>0$.

Posons pour tout $h>0$

$$A_n^h = \{\omega\in\Omega\ :\ (\Delta X_n)^*(\omega,N) > h\} \quad , (n\in\mathbb{N})$$

D'après I.2.6.1),

$$W_C^N(X_n,\delta) \leq 2\ W_D^N(X_n,\delta) + h \quad \text{sur} \quad (A_n^h)^c$$

Puisque $(X_n\ ;\ n\in\mathbb{N})$ est D-tendue alors elle satisfait à I.2.4.(2). Fixons $\delta>0$ et $n_1\in\mathbb{N}$ selon I.2.4.(2) de façon à ce que

$$\mathbb{P}(W_D^N(X_n,\delta) > \varepsilon/3) \leq \eta/2 \quad \text{pour tout} \quad n\geq n_1.$$

Soit $n_2\in\mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}(A_n^{\varepsilon/3}) \leq \eta/2 \quad \text{pour tout} \quad n\geq n_2, \text{ d'après (1c).}$$

Alors, si $n_o = n_1 \vee n_2$, nous aurons que pour $n \geq n_o$,

$$\mathbb{P}(W_C^N(X_n,\delta) > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\{W_C^N(X_n,\delta) > \varepsilon\} \cap (A_n^{\varepsilon/3})^c) + \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon/3})$$

$$\leq \mathbb{P}(W_D^N(X_n,\delta) > \varepsilon/3) + \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon/3})$$

$$\leq \eta$$

Nous avons ainsi que $(X_n ; n \in \mathbb{N})$ satisfait I.2.2.(2).

Par ailleurs, il est immédiat que (1c) entraîne I.2.2.(1). Par conséquent, $(X_n ; n \in \mathbb{N})$ est C-tendue en vertu de la proposition I.2.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BILLINGSLEY, P. *Convergence of Probability Measures.* John Wiley and Sons (1968).

[2] BOROVKOV, A. *Stochastic Processes in Queueing Theory.* Springer-Verlag (1976).

[3] BREMAUD, P. et JACOD, J. Processus Ponctuels et Martingales. Advances in Appl. Probability. 9 (1977), 362-416.

[4] BROWN, B.M. Martingale central limit theorems. Ann. Math. Stat. 42, (1971), 59-66.

[5] DELLACHERIE, C. *Capacités et Processus Stochastiques.* Springer (1972).

[6] DELLACHERIE, C. et MEYER, P.A. *Probabilités et Potentiels.* Hermann (1975).

[7] GRANDELL, J. *Donbly Stochastic Poisson Processes.* Lect. Notes in Mathematics 529 (1976).

[8] JACOD, J. Multivariate Point Processes : Prodictable Projections, Radon Nikodym Derivatives, Representation of Martingales, Z. für Wahrsch. 31 (1975), 235-253.

[9] KAZAMAKI, N. Changes of time, stochastic integrals and weak martingales. Z. für Wahrsch. 22 (1972), 25-32.

[10] KUNITA, H. et WATANABE, S. On square integrable martingales. Nagoya Math. J. 30 (1976).

[11] LENGLART, E. Thèse de 3ème Cycle. Faculté des Sciences de Rouen (1976).

[12] LENGLART, E. Relation de domination entre deux processus. Ann. Inst. Henri Poincaré 13 (1977), 171-179.

[13] LEPELTIER, J.P. et MARCHAL, B. — Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associés à un opérateur intégro-différentiel.
Annales I.H.P. B. XII. (1976), 43-103.

[14] LEPINGLE, D. — Sur le comportement asymptotique des martingales locales.
Sém. de Proba. XII Univ. de Strasbourg
Lect. Notes in Maths. 649 (1978), 148-161.

[15] LOYNES, R.M. — A criterion for thightness for a sequence of martingales.
Ann. of Proba. 4 (1976), 859-862.

[16] MAIGRET, N. — Thèse de 3ème Cycle. Fac. des Sciences d'Orsay (1978).

[17] M^{c} LEISH — Dependent central limit theorems and invariance principles. Ann. Proba. 2 (1974), 620-628.

[18] MEYER, P.A. — Un cours sur l'Intégrale Stochastique.
Sém. de Proba. X. Lectures Notes in Maths.
511 (1976).

[19] MEYER, P.A. — Le Théorême Fondamental sur les Martingales locales. Sém. Proba. XI, Lect. Notes in Math.
581 (1977), 463-464.

[20] MEYER, P.A. — Probabilités et Potentiel. Hermann (1966).

[21] MEYER, P.A. — Quelques inégalités sur les martingales d'après Dubins et Freedman.
Sém. Proba. Strasbourg IV, Lect. Notes
Springer Verlag (1970), 163-174.

[22] NEVEU, J. — Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités.
Masson et Cie (1964).

[23] NEVEU, J. — Martingales à Temps Discret.
Masson et Cie (1972).

[24] NEVEU, J. — Cours sur les Processus Ponctuels.
Fac. Sci. Paris (1975-1976).

[25] NEVEU, J. — Processus Ponctuels. Lect. Notes in Math.
598 (1977), 250-447.

[26] NEVEU, J. Cours sur les Files d'Attente. Fac. Sci. Paris (1977-1978).

[27] NEVUE, J. Intégrales Stochastiques et Applications. Cours Fac. Sci. Paris (1971-1972).

[28] PARTHASARATHY, K.R. Probability Measures on Metric Spaces. Academic Press (1967).

[29] PRIOURET, P. Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques. Ecole d'Eté de Proba. III, Lect. in Maths. 390 (1974).

[30] PROKHOROV, Yu. V. Convergence of random processes and Limit Theorems in Probability Theory. Theor. of Proba. and Appl. 1 (1956), 157-214.

[31] REBOLLEDO, R. Convergence en loi des martingales continues. C.R.Acad. Sc. Paris, Sér. A, t. 282 (1976), 483-485.

[32] REBOLLEDO, R. Remarques sur la convergence en loi des martingales vers des martingales continues. C.R.Acad. Sc. Paris, Sér. A, t. 285 (1977), 465-468.

[33] REBOLLEDO, R. Remarques sur la convergence en loi des martingales vers des martingales continues. C.R.Acad. Sc. Paris, Sér. A, t. 285 (1977), 517-520.

[34] REBOLLEDO, R. Convergence en loi des martingales discontinues. C.R.Acad. Sc. Paris, Sér. A, t. 287 (1978), 27-28.

[35] REBOLLEDO, R. Sur les applications de la théorie des martingales à l'étude statistique d'une famille de processus ponctuels. Lect. Notes in Math. 636 (1978), 27-70.

[36] REBOLLEDO, R. Décomposition de martingales locales et raréfaction des sauts. Sém. Proba. Strasbourg XIII Lect. Notes in Maths. 721(1979),138-146.

[37] ROOTZEN, H. On the functional central limit theorem for martingales.
Z. Wahrsch. 38 (1977), 199-210.

[38] SKOROKHOD, A.V. Limit theorems for stochastic processes.
Theor. of Proba. and Appl. 1 (1956), 261-290.

[39] STONE, Ch. Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervals.
Proc. A.M.S. 14 (1963), 694-696.

[40] STROOCK, D. et VARADHAN, S.R.S. Diffusion processes with continuous coefficients I and II. Comm. Pure and Appl. Math. XXII, pp. 345-400 and 479-530.

[41] YOEURP, Ch. Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Sém. Proba. X, Lect. Notes in Math. 511 (1976), 432,480.