MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL ENOCK
JEAN-MARIE SCHWARTZ

Une dualité dans les algèbres de von Neumann

Mémoires de la S. M. F., tome 44 (1975)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1975__44__5_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 44, 1975, 144 p.

UNE DUALITE DANS LES ALGEBRES DE VON NEUMANN

par Michel ENOCK et Jean-Marie SCHWARTZ

TABLE DES MATIERES

O INTRODUCTION

L'un des problèmes majeurs de l'analyse harmonique est l'étude des groupes localement compacts et de leurs représentations (unitaires). L.S. Pontryagin a démontré que l'ensemble des caractères d'un groupe abélien localement compact G est un groupe abélien localement compact pour une topologie convenable. On l'appelle le groupe dual de G et on le note $G^\wedge$. De plus, le groupe dual de $G^\wedge$ est canoniquement isomorphe et homéomorphe à G. Un caractère de G peut être considéré comme une représentation de G. Elle est clairement irréductible ; de plus, toute représentation irréductible de G est un caractère. Dans le cas d'un groupe compact, bien qu'il puisse exister d'autre représentations irréductibles que les caractères, et bien que le produit tensoriel de deux représentations irréductibles ne soit pas nécéssairement irréductible, T. Tannaka [20] a démontré qu'il est possible de reconstituer le groupe G à partir de l'ensemble de ses représentations irréductibles.

Puis, le premier résultat de dualité concernant des groupes non compacts et non commutatifs a été obtenu par W.F. Stinespring [15] pour les groupes localement compacts unimodulaires. Dans [15], le rôle de l'objet dual est joué par l'algèbre de von Neumann engendrée par la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$.

Afin d'obtenir une situation rappelant celle du théorème de Pontryagin, c'est-à-dire où les objets étudiés et leur duaux sont de même nature, G.I. Kac [13] a donné un cadre abstrait satisfaisant aux constructions de Stinespring, dans le cas séparable, et a obtenu une dualité entre "ring-groups". Ces objets généralisent aussi bien les groupes localement compacts unimodulaires que l'algèbre de la représentation régulière gauche.

Par ailleurs, N. Tatsuuma [21] a généralisé les constructions et le résultat de Tannaka au cas des groupes localement compacts généraux, en faisant intervenir l'ensemble des représentations unitaires du groupe. Notons que dans la démonstration du théorème de Tatsuuma, la représentation régulière gauche joue, là encore, un rôle fondamental. Dans [9], J. Ernest, se fondant sur un résultat de J.G. Wendel [24], a donné une nouvelle formulation du théorème de Tatsuuma utilisant la théorie des algèbres de Hopf.

D'autres résultats sur cette question, traités en termes d'algèbres d'opérateurs, sont dus à P. Eymard [10] et M.E. Walter [23].

Dans [17], M. Takesaki réussit à retrouver le résultat d'Ernest en généralisant la construction de Kac au cas non-unimodulaire. Toutefois, il ne fournit pas une réelle dualité ; plus précidément, ses objets duaux sont de nature différente de ses objets de départ et ne sont pas caractérisés intrinsèquement. A priori, cela ne permet pas de trouver un procédé restituant l'objet de départ à partir de l'objet dual.

Notre construction remédie à ces défauts. D'une part, nous construisons une classe qui inclut à la fois les objets de départ de Takesaki et ses objets duaux, dont nous donnons d'ailleurs une caractérisation. D'autre part, en ce qui concerne la dualité, nous retrouvons une situation analogue à celle de Pontryagin et Kac : l'objet bidual est isomorphe à l'objet de départ.

De plus, nous munissons cette classe d'une structure de catégorie $\mathcal{K}$. La dualité apparaît alors comme un foncteur contravariant involutif de $\mathcal{K}$ dans elle-même. Nous démontrons l'existence d'une équivalence (resp. d'une dualité) entre la catégorie des groupes localement compacts munie des homomorphismes stricts à images ouvertes et noyaux compacts (ces hypothèses sont indispensables pour que la correspondance $G \to L^1(G)$ soit fonctorielle [11]) et la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}$ formée des objets symétriques (resp. abéliens).

La plupart des résultats démontrés dans ce mémoire ont été annoncés dans [7] et [8]. Pour obtenir une situation plus agréable, nous avons choisi une définition de la classe a priori plus restrictive que celle utilisée dans [7], définition 2 ; toutefois, certains résultats (notamment tous ceux des paragraphes 1.1. à 4.1.) restent valables tels quels, ou se généralisent, dans le cadre ancien (se reporter à [7]).

Au moment où nous commencions la rédaction de ce travail, nous avons pris connaissance d'une note de L.I. Vainerman et G.I. Kac [22], qui annonce des résultats analogues à ceux de nos chapitres 1 à 4.

Nous remercions M.J. Dixmier qui nous a confié ce sujet de recherche et auprès de qui nous avons trouvé, à tous les stades de l'élaboration de ce travail, une aide constante.

Nous remercions également F. Combes avec qui nous avons eu de nombreuses et utiles conversations, notamment en ce qui concerne la théorie des poids.

Nous remercions Madame Simon qui s'est chargée de la dactylographie de l'essentiel du mémoire et Madame Chauvier de celle des trois premiers chapitres.

Nous associons à ces remerciements le Département de Mathématiques du C.S.P. de Saint-Denis qui, en autorisant Madame Simon à nous aider, a permis l'achèvement de la frappe avec la rapidité nécéssaire.

I ALGEBRES DE KAC

I.1. Préliminaires

Soit M une W^*-algèbre. Un poids φ sur M est une application de M^+ dans $[0, +\infty]$ telle que, pour tous x et y dans M^+ et pour tout réel positif λ, on ait

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$$

On note $\mathfrak{N}_\varphi$ l'idéal à gauche de M formé des éléments de x de M tels que $\varphi(x^*x) < +\infty$ et $\mathfrak{M}_\varphi$ la sous-algèbre involutive de M égale à $\mathfrak{N}_\varphi^*\mathfrak{N}_\varphi$. (Se reporter à [2], p.50 et suivantes).

Définition I.1.1. On dit qu'un poids φ sur M est

(a) normal, si $\varphi(\sup_i x_i) = \sup_i \varphi(x_i)$ pour toute la famille x_i croissante, bornée, d'éléments de M^+;

(b) fidèle, si pour tout x de M^+, $x \neq 0$ entraîne $\varphi(x) \neq 0$;

(c) semi-fini, si $\mathfrak{M}_\varphi$ est faiblement dense dans M.

Remarque: Grâce à [12], la définition (a) est équivalente à celle utilisée dans [14]

Soit φ un poids normal, fidèle, semi-fini sur M. La forme sesquilinéaire sur $\mathfrak{N}_\varphi \times \mathfrak{N}_\varphi$ définie par $(x,y) \to \varphi(y^*x)$ permet de munir $\mathfrak{N}_\varphi$ d'une structure préhilbertienne. On note H_φ l'espace hilbertien complété et Λ_φ l'injection canonique de $\mathfrak{N}_\varphi$ dans H_φ.

Pour tout x de M, l'application $\Lambda_\varphi(y) \to \Lambda_\varphi(xy)$ de $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)$ dans lui-même se prolonge par un opérateur borné sur H_φ, que l'on notera $\pi_\varphi(x)$. L'application π_φ est un isomorphisme de M sur une sous-algèbre de von Neumann $\pi_\varphi(M)$ de $\mathcal{L}(H_\varphi)$. On notera encore φ le poids sur $\pi_\varphi(M)$, transporté de M par π_φ.

L'espace vectoriel $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$, muni du produit $\top$ défini par :

$$\Lambda_\varphi(x) \top \Lambda_\varphi(y) = \Lambda_\varphi(xy)$$

et de l'involution $^\#$, définie par :

$$\Lambda_\varphi(x)^\# = \Lambda_\varphi(x^*)$$

est une algèbre hilbertienne à gauche achevée, que l'on notera $\mathfrak{U}$. ([16] définition 5.1).

L'opérateur est fermable; nous désignerons par S sa fermeture dont $\mathcal{D}^\#$ désignera le domaine.

Soit $\mathfrak{A}'$ l'algèbre hilbertienne à droite achevée associée à $\mathfrak{A}$; on notera encore τ son produit. On appellera $^{\flat}$ son involution, on notera F la fermeture de $^{\flat}$, de domaine $\mathfrak{D}^{\flat}$; c'est l'adjoint de S.

L'opérateur S admet une décomposition polaire $J\Delta^{1/2}$ où J est une involution isométrique antilinéaire et Δ un opérateur autoadjoint positif non singulier, appelé opérateur modulaire associé à φ.

On a : $$J\pi_{\varphi}(M)J = \pi_{\varphi}(M)'$$

et pour tout t de R :

$$\Delta^{it}\pi_{\varphi}(M)\Delta^{-it} = \pi_{\varphi}(M)$$

ce qui permet de définir le groupe des automorphismes modulaires associé à φ, par la relation :

$$\pi_{\varphi}(\sigma_t^{\varphi}(x)) = \Delta^{it}\pi_{\varphi}(x)\Delta^{-it} \qquad \text{pour } x \in M.$$

On notera M^{φ} la sous-algèbre des éléments de M invariants par le groupe des automorphismes modulaires.

On notera respectivement π et π' les représentations canoniques de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ dans H_{φ}. Nous dirons qu'un vecteur ξ de H_{φ} est borné à gauche si l'application de $\mathfrak{A}'$ dans H_{φ} définie par $\eta \to \pi'(\eta)\xi$ est un opérateur borné. Le prolongement continu de cet opérateur à H_{φ} est encore noté $\pi(\xi)$ ([2], 2.1). L'ensemble des éléments bornés à gauche est égal à $\Lambda_{\varphi}(\mathfrak{N}_{\varphi})$ ([2], 2.3 et 2.11). Rappelons que $\pi(\Lambda_{\varphi}(\mathfrak{N}_{\varphi}))$ et $\pi(\mathfrak{A})$ engendrent l'algèbre de von Neumann $\pi_{\varphi}(M)$.

On notera $\mathfrak{A}_{\circ}$ la sous-algèbre modulaire maximale équivalente à $\mathfrak{A}$ ([2], 2.7), elle est incluse dans $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$.

On notera $\varphi \otimes \varphi$ l'unique poids sur $M \otimes M$ vérifiant les conditions :

a) $\mathfrak{M}_{\varphi} \otimes \mathfrak{M}_{\varphi} \subset \mathfrak{M}_{\varphi\otimes\varphi}$ et $(\varphi \otimes \varphi)(x \otimes y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$ pour tous x,y dans $\mathfrak{M}_{\varphi}$

b) $\sigma_t^{\varphi\otimes\varphi} = \sigma_t^{\varphi} \otimes \sigma_t^{\varphi}$ pour tout t de R. ([4], définition I.1.3)

Soit H un espace hilbertien. Pour ξ,η dans H, on désigne par $\Omega_{\xi,\eta}$ la forme linéaire sur (H) définie par :

$$< x, \Omega_{\xi,\eta} > = (x\,\xi \mid \eta) \qquad \text{pour } x \in \mathcal{L}(H)$$

Soient ξ et η dans H_{φ}, on posera :

$$\omega_{\xi,\eta} = \Omega_{\xi,\eta} \circ \pi_{\varphi}, \text{ c'est un élément du prédual } M_* \text{ de } M.$$

Grâce à [2], 2.16, on sait que tout élément de M_* est de cette forme.

Pour éviter les ambiguités de notations, nous pourrons être amenés à utiliser les notations $S_{\varphi}, J_{\varphi}, \mathfrak{A}_{\varphi}$ etc. au lieu de S, J, $\mathfrak{A}$ ...

Proposition 1.1.2 : Soient M une W^*-algèbre, φ un poids normal, fidèle, semi-fini sur M, δ un élément de $\mathfrak{A}' \top \mathfrak{A}'$. La forme linéaire sur $\mathfrak{N}_\varphi^*$ définie par $x \mapsto (\delta|\Lambda_\varphi(x^*))$ se prolonge par continuité en un élément de M_* que l'on notera $\rho(\delta)$.

On a de plus :

$$\rho(\xi \top \eta^\flat) = \omega_{\xi,\eta} \qquad \text{pour tous } \xi,\eta \text{ de } \mathfrak{A}'$$

et

$$< x,\rho(\delta)>= \varphi(x\Lambda_\varphi^{-1}(\delta)) \text{ pour } x \text{ dans } \mathfrak{N}_\varphi^* \text{ et } \delta \text{ dans } \mathfrak{A}_\circ \top \mathfrak{A}_\circ$$

Démonstration : Soient x un élément de $\mathfrak{N}_\varphi^*$ et ξ_i, η_i (i=1,...,n) des vecteurs de $\mathfrak{A}'$; on a :

$$\begin{aligned}(\Sigma_i\ \xi_i \top \eta_i^\flat \mid \Lambda_\varphi(x^*)) &= \Sigma_i(\xi_i \top \eta_i^\flat \mid \Lambda_\varphi(x^*)) \\ &= \Sigma_i(\pi'(\eta_i^\flat)\xi_i \mid \Lambda_\varphi(x^*)) \\ &= \Sigma_i(\pi'(\eta_i)^*\xi_i|\Lambda_\varphi(x^*)) \\ &= \Sigma_i(\xi_i|\pi'(\eta_i)\Lambda_\varphi(x^*)) \\ &= \Sigma_i(\ \xi_i|\pi_\varphi(x^*)\eta_i) \\ &= \Sigma_i(\pi_\varphi(x)\xi_i|\eta_i).\end{aligned}$$

La forme linéaire sur $\mathfrak{N}_\varphi^*$ définie par $x \to (\Sigma_i\xi_i \top \eta_i^\flat|\Lambda_\varphi(x^*))$ est donc la restriction à $\mathfrak{N}_\varphi^*$ de $\Sigma_i\ \omega_{\xi_i,\eta_i}$; d'où les deux premiers résultats.

Si δ appartient à $\mathfrak{A}_\circ \top \mathfrak{A}_\circ$, il appartient à $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)$. On a donc :

$(\delta|\Lambda_\varphi(x^*)) = \varphi(x\ \Lambda_\varphi^{-1}(\delta))$ ce qui achève la démonstration.

Définition 1.1.3 : Soient M une W^*-algèbre et φ un poids normal, fidèle semi-fini sur M. On pose :

a) pour tout ω de M_* :

$$\|\omega\|_\varphi = \sup\{|<x^*,\omega>|,\ x \in M,\ \varphi(x^*x) \leq 1\}$$

$$= \sup\{|<\Lambda_\varphi^{-1}(\xi)^*,\omega>|,\ \xi \in \Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi),\ \|\xi\| \leq 1\}.$$

Comme le poids φ est semi-fini, $\|\omega\|_\varphi = 0$ entraîne $\omega = 0$.

b) $\mathcal{L}_\varphi = \{\omega \in M_*;\ \|\omega\|_\varphi < +\infty\}$. Pour tout ω appartenant à $\mathcal{L}_\varphi$, il existe donc un unique vecteur $a(\omega)$ de H_φ tel que

$$(a(\omega)|\Lambda_\varphi(x)) = < x^*,\omega > \qquad \text{pour tout } x \text{ de } \mathfrak{N}_\varphi,$$

de plus $\|a(\omega)\| = \|\omega\|_\varphi$.

Remarque I.1.4 : Il est clair que $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$ est inclus dans $\mathcal{L}_\varphi$ et que, pour tout δ de $\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}'$, on a :

1.1.4.1 $$a(\rho(\delta)) = \delta ,$$

en particulier, pour tous ξ,η de $\mathfrak{U}'$:

1.1.4.2 $$a(\omega_{\xi,\eta}) = \xi \top \eta^\flat ;$$ et cela implique que $a(\mathcal{L}_\varphi)$ est dense dans H_φ.

Définition I.I.5 : Soient M une W^*-algèbre, φ un poids normal, fidèle, semi-fini sur M. On dira que φ vérifie la propriété P_1 si, pour tout x de $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi}$, il existe une suite x_n d'éléments du produit tensoriel algébrique $\mathfrak{N}_\varphi \otimes \mathfrak{N}_\varphi$ telle que :

$$\sup_n \|x_n\| < +\infty$$

et

$$\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(x_n) \to \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(x) \qquad \text{normiquement.}$$

Remarquons que, dans ces conditions, la suite (x_n) convergera fortement vers x. Soit en effet ξ dans $\mathfrak{U}'_{\varphi\otimes\varphi}$, on a :

$$0 = \lim \|(\pi'\otimes\pi')(\xi)(\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(x_n-x))\|$$

$$= \lim \|\pi_{\varphi\otimes\varphi}(x_n-x)\xi\| .$$

Comme la suite (x_n) est bornée en norme, cette égalité s'étend à tout ξ de $H_\varphi \otimes H_\varphi$, d'où la convergence forte.

Proposition I.I.6 : Soient M une W^*-algèbre, φ un poids normal, fidèle, strictement semi-fini sur M([3], définition 4.1). Alors, φ vérifie la propriété P_1.

Démonstration : D'après [3] , proposition 4.3, φ est égal à une somme $\sum_{i\in I} f_i$ où les f_i sont des formes linéaires positives normales, de supports p_i deux à deux orthogonaux, appartenant à $\mathfrak{N}_\varphi$ et de somme égale à 1.

D'après [3], proposition 6.2, le poids $\varphi\otimes\varphi$ est, lui aussi strictement semi-fini, et égal à la somme $\sum_{(i,j)\in I^2} f_i \otimes f_j$.

Et, le support de $f_i \otimes f_j$ est le projecteur $p_i \otimes p_j$ ([3], lemme 6.1).

En appliquant au poids $\varphi\otimes\varphi$ la démonstration de la proposition 3.6.i) de [2], on voit que, pour tout x de $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi}$, on a :

$$\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(x) = \sum_{(i,j)\in I^2} \pi_{\varphi\otimes\varphi}(x)\, \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(p_i \otimes p_j).$$

Choisissons un entier n. Il existe un sous-ensemble fini I_n de I tel que :

$$\sum_{(i,j)\notin I_n^2} \| \pi_{\varphi\otimes\varphi}(x)\, \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(p_i \otimes p_j) \| \leq 1/2n.$$

Par ailleurs, le théorème de Kaplansky fournit une famille y_α d'élément du produit tensoriel algébrique $M \otimes M$, telle que $\|y_\alpha\| \leqslant \|x\|$ pour tout α, et que $\pi_{\varphi\otimes\varphi}(y_\alpha)$ converge fortement vers $\pi_{\varphi\otimes\varphi}(x)$.

En particulier, il existe α_n tel que :

$$\sum_{(i,j)\in I_n^2} \| \pi_{\varphi\otimes\varphi}(x-y_{\alpha_n})\, \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(p_i \otimes p_j) \|^2 \leqslant 1/2n.$$

Posons : $x_n = y_{\alpha_n} \sum_{(i,j)\in I_n} p_i \otimes p_j$; on a :

$$x_n \in \mathfrak{N}_\varphi \otimes \mathfrak{N}_\varphi$$

et $\qquad \|x_n\| \leqslant \|y_{\alpha_n}\| \leqslant \|x\|.$

Comme : $\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(x_n) = \sum_{(i,j)\in I_n^2} \pi_{\varphi\otimes\varphi}(y_{\alpha_n})\, \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(p_i \otimes p_j)$, on a :

$$\|\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(x-x_n)\|^2 = \sum_{(i,j)\notin I_n^2} \|\pi_{\varphi\otimes\varphi}(x)\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(p_i \otimes p_j)\|^2 + \sum_{(i,j)\in I_n^2} \|\pi_{\varphi\otimes\varphi}(x-y_{\alpha_n})\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(p_i \otimes p_j)\|^2$$

$\leqslant 1/n$, ce qui achève la démonstration .

1.2. Algèbres de Hopf - von Neumann involutives

Définition 1.2.1 : On dira que le triplet (M,Γ,κ) est une algèbre de Hopf-von Neumann involutive si :

1) M est une W^*-algèbre

2) Γ est morphisme normal injectif de M dans la W^*- algèbre $M \otimes M$ qui rend le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\Gamma"'] & M \otimes M \arrow[d, "\Gamma \otimes I"] \\ M \otimes M \arrow[r, "I \otimes \Gamma"] & M \otimes M \otimes M \end{tikzcd}$$

où I désigne l'identité de M.

3) κ est un anti-automorphisme involutif de M, c'est-à-dire une application linéaire de M dans M telle que :

$$\forall x,y \in M \qquad \kappa(xy) = \kappa(y)\,\kappa(x)$$
$$\kappa(x^*) = \kappa(x)^*$$
$$\kappa(\kappa(x)) = x$$

qui de plus rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\Gamma"'] & M \arrow[r, "\Gamma"] & M \otimes M \arrow[d, "\varsigma"] \\ M \otimes M \arrow[rr, "\kappa \otimes \kappa"] & & M \otimes M \end{tikzcd}$$

où ς désigne l'automorphisme de $M \otimes M$ défini par

$$\forall x,y \in M \qquad \varsigma\,(x \otimes y) = y \otimes x$$

Si M est commutative, (M,Γ,κ) est dite abélienne.

Si l'on a : $\varsigma \circ \Gamma = \Gamma$, Γ et (M,Γ,κ) sont dits symétriques.

Définition I.2.2 : Soit (M,Γ,κ) une algèbre de Hopf-von Neumann involutive. Posons, pour tout x de M et tous ω,ω' de M_* :

$$< x,\omega * \omega' > = < \Gamma(x), \omega \otimes \omega' >$$
$$< x,\omega^\circ > = \overline{< \kappa(x)^*, \omega >}$$

Ces formules permettent de définir sur M_* un produit $*$ et une involution $^\circ$ qui en font une algèbre de Banach involutive; cette algèbre est abélienne si et seulement si (M,Γ,κ) est symétrique ([17],p.676).

Si φ est un poids normal, fidèle, semi-fini sur M, on vérifie facilement que, pour tous vecteurs ξ et η de H_φ, on a :

1.2.2.1 $\qquad (\omega_{\xi,\eta} \circ \kappa)^\circ = \omega^\circ_{\xi,\eta} \circ \kappa = \omega_{\eta,\xi}$

Définition 1.2.3 : Soient (M,Γ,κ) une algèbre de Hopf-von Neumann involutive, φ un poids normal, fidèle, semi-fini sur M. On appellera $\mathfrak{J}_\varphi$ l'idéal à gauche engendré par $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$ dans M_*; c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme $\omega + \sum_{i\in I} \omega_i' * \omega_i''$, où ω et ω_i'' appartiennent à $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$, ω_i' à M_* et où I est un ensemble fini.

Il est clair que $\mathfrak{J}^\circ_\varphi$ est un idéal à droite de M_*. Il en résulte que $\mathfrak{J}_\varphi \cap \mathfrak{J}^\circ_\varphi$ est une sous-algèbre involutive de M_*, que l'on notera $\mathbb{A}_*$.

Définition 1.2.4: Soient (M,Γ,κ) une algèbre de Hopf-von Neumann involutive φ un poids normal, fidèle, semi-fini sur M. On dira que φ est invariant à gauche si l'on a, pour tout ω de M_* et tous ξ,η de $\mathfrak{U}_\circ \top \mathfrak{U}_\circ$:

$$< \Gamma(\Lambda_{\varphi}^{-1}(\xi)^*),\ \omega \otimes \rho(\eta)> \, = \, < \Gamma(\Lambda_{\varphi}^{-1}(\eta)^*), \omega^{\circ} \otimes \rho\ (\xi) >^-$$

1.3. Axiomes des algèbres de Kac

Définition 1.3.1 : On appellera algèbre de Kac un quadruplet $K = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(Ki) le triplet (M, Γ, κ) est une algèbre de Hopf-von Neumann involutive,

(Kii) φ est un poids normal, fidèle et semi-fini sur M,

(Kiii) pour tout x de $\mathfrak{N}_{\varphi}$ et y de $\mathfrak{M}_{\varphi}^{+}$, on a :

$$(\varphi \otimes \varphi)\ ((x^* \otimes 1)\ \ \Gamma(y)\ \ (x \otimes 1)) = \varphi(x^*x)\ \varphi\ (y),$$

(Kiv) le poids φ est invariant à gauche,

(Kv) pour tout ω de M_* et tout ω' de $\mathfrak{I}_{\varphi}$, on a :

$$\|\omega * \omega'\|_{\varphi} \leqslant \|\omega\|\ \|\omega'\|_{\varphi},$$

(Kvi) pour tout t de R, on a :

$$\kappa \circ \sigma_t^{\varphi} = \sigma_{-t}^{\varphi} \circ \kappa.$$

Définitions 1.3.2 : On appellera algèbre de Kac à trace (resp. à poids fini, resp. à poids invariant, resp. unimodulaire) une algèbre de Kac$(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ telle que φ soit une trace (resp. un poids fini, resp. un poids invariant par κ, resp une trace invariante par κ). Les algèbres de Kac unimodulaires sont les objets étudiés dans [13].

Remarques 1.3.3 : (a) Supposons que le quadruplet $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ vérifie (Ki) et (Kii). Grâce à 1.1.4 ,(Kv) implique que pour tous ω et ω_i'' dans $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$ et tous ω_i' dans M_*, où i parcourt un ensemble fini, on a :

$$\|\omega + \sum_i \omega_i' * \omega_i''\|_{\varphi} \leqslant \|\omega\|_{\varphi} + \sum_i \|\omega_i'\|\ \|\omega_i''\|_{\varphi} < +\infty,$$

soit $\mathfrak{I}_{\varphi} \subset \mathcal{L}_{\varphi}$. Cela assure que toutes les quantités considérées dans (Kv) sont finies.

(b) Nous démontrerons plus loin (2.1.3.(b)) que si le poids φ vérifie la propriété P_1 de la définition I.I.5, les axiomes (Ki),(Kii)et (Kiii) impliquent (Kv).

(c) Nous démontrerons également(7 .1.2 et 7 .2.2) que si φ est une trace (resp. un poids fini), tout quadruplet $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ vérifiant (Ki), (Kii), (Kiv) (resp.(Ki), (Kii), (Kiii),(Kiv)) est une algèbre de Kac.

Définition 1.3.4 : Soient $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac, k un nombre réel positif non nul. Le quadruplet $(M, \Gamma, \kappa, k\varphi)$ est également une algèbre de Kac. On la notera k.$\mathbb{K}$, et on dira que k.$\mathbb{K}$ est l'algèbre de Kac dilatée de $\mathbb{K}$ par k.

En remarquant que $\mathfrak{N}_{k\varphi} = \mathfrak{N}_{\varphi}$ et en assimilant $H_{k\varphi}$ à H_{φ} par :

$$\Lambda_{k\varphi}(x) = k^{1/2}\ \Lambda_{\varphi}(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathfrak{N}_{\varphi},$$

la vérification est triviale. Notons que l'on a:

$$\|\omega\|_{k\varphi} = k^{-1/2}\ \|\omega\|_{\varphi} \qquad \forall\ \omega \in M_*$$

et: $$a_{k\varphi}(\omega) = k^{-1/2}\ a_{\varphi}(\omega) \qquad \forall\ \omega \in \mathcal{L}_{\varphi} = \mathcal{L}_{k\varphi}$$

<u>Définition 1.3.5</u> : Soit $(M,\Gamma,\kappa,\varphi)$ un quadruplet vérifiant (Ki) et (Kii). Nous dirons qu'il vérifie la propriété P_2 si $\Lambda_{\varphi}(\mathfrak{N}_{\varphi} \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa})$ est dense dans H_{φ}.

<u>Proposition 1.3.6</u> : Tout quadruplet $(M,\Gamma,\kappa,\varphi)$ vérifiant (Ki),(Kii) et(Kvi) vérifie la propriété P_2.

<u>Corollaire 1.3.7</u> : Toute algèbre de Kac vérifie la propriété P_2.

La démonstration de 1.3.6 résulte des deux lemmes ci-dessous.

<u>Lemme 1.3.8</u> : Soit M une W^*-algèbre, φ un poids normal, fidèle, semi-fini,β un antiautomorphisme de M (c'est-à-dire une application linéaire de M sur M telle que pour tout x et y de M, on a : $\beta(xy) = \beta(y)\ \beta(x)$ et $\beta(x^*) = \beta(x)^*$). Posons $\psi = \varphi\circ\beta$. Alors ψ est un poids normal, fidèle, semi-fini sur M et, pour tout t de R :

$$\sigma_t^{\psi} = \beta^{-1}\circ\sigma_{-t}^{\varphi}\circ\beta$$

<u>Démonstration</u> : Soient x et y dans $\mathfrak{N}_{\psi} \cap \mathfrak{N}_{\psi}^*$, $\beta(x)$ et $\beta(y)$ appartiennent alors à $\mathfrak{N}_{\varphi} \cap \mathfrak{N}_{\varphi}^*$; il existe donc ([2], proposition 4.4) une fonction f continue bornée sur la bande $\{ z \in \mathbb{C},\ 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1 \}$, holomorphe à l'intérieur telle que, pour tout réel t :

$$f(t) = \varphi\ (\sigma_t^{\varphi}(\beta(y))\ \beta(x))$$

$$f(t+i) = \varphi(\beta(x)\ \sigma_t^{\varphi}\ (\beta(y)))$$

Cela peut aussi s'écrire :

$$f(t) = \varphi(\beta(y)\ \sigma_{-t}^{\varphi}(\beta(x))) = \psi(\beta^{-1}(\sigma_{-t}^{\varphi}(\beta(x)))y)$$

$$f(t+i) = \varphi(\sigma_{-t}^{\varphi}(\beta(x))\ \beta(y)) = \psi\ (y\ \beta^{-1}(\sigma_{-t}^{\varphi}(\beta(x)))).$$

Comme, d'autre part, pour tout x de M^+:

$$\psi(\beta^{-1}(\sigma_{-t}^{\varphi}(\beta(x)))) = \varphi(\sigma_{-t}^{\varphi}(\beta(x))) = \varphi(\beta(x)) = \psi(x)$$

on voit que ψ vérifie les conditions K.M.S. par rapport au groupe des automorphismes

$t \to \beta^{-1} \circ \sigma^{\varphi}_{-t} \circ \beta$. Alors [2], corollaire 4.9 permet de conclure.

<u>Lemme 1.3.9</u> : Soient M une W^*-algèbre, φ et ψ deux poids normaux, fidèles, semi-finis sur M tels que $\sigma^{\varphi}_t = \sigma^{\psi}_t$ pour tout réel t. Alors $\Lambda_{\varphi}(\mathfrak{N}_{\varphi} \cap \mathfrak{N}_{\psi})$ est dense dans H_{φ}.

(Si φ est strictement semi-fini, ce résultat se déduit de [3], proposition 5.7 et corollaire 4.6).

<u>Démonstration</u> : Le théorème 5.4 de [14] indique l'existence d'un unique opérateur h, autoadjoint positif, affilié à Z(M), centre de M, tel que : $\psi(x) = \varphi(hx)$ pour tout x de M^+ (c'est-à-dire que $\psi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(h_\varepsilon x)$ avec $h_\varepsilon = h(1+\varepsilon h)^{-1} \in Z(M)$).

$$\text{Posons } h = \int_0^{+\infty} \lambda \, d E_\lambda, \quad e_n = \int_{1/n}^{n} d E_\lambda, \quad h_n = h \, e_n$$

Soit x dans $\mathfrak{N}_{\varphi}$; on a :

$$\psi((e_n x)^*(e_n x)) = \psi(e_n x^* x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(h_\varepsilon e_n x^* x)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (\pi_\varphi(h_\varepsilon e_n) \Lambda_\varphi(x) | \Lambda_\varphi(x))$$

$$= (\pi_\varphi(h_n) \Lambda_\varphi(x) \mid \Lambda_\varphi(x)),$$

en effet, quand ε tend vers 0, $h_\varepsilon e_n = \int_{1/n}^{n} \frac{\lambda}{1+\varepsilon\lambda} d E_\lambda$ tend faiblement vers h_n.

Ainsi, $\psi((e_n x)^*(e_n x)) \leq \|h_n\| \, \|\Lambda_\varphi(x)\|^2$, donc $e_n x$ appartient à $\mathfrak{N}_\psi$ et finalement : $e_n x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\psi$.

On a ensuite :

$$\|\Lambda_\varphi(e_n x) - \Lambda_\varphi(x)\|^2 = \varphi(e_n x^* x) - 2\varphi(e_n x^* x) + \varphi(x^* x)$$

$= \varphi(x^* x) - \varphi(e_n x^* x)$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, car $e_n x^* x$ tend en croissant vers $x^* x$.

Donc $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\psi)$ est dense dans $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)$ et par suite dans H_φ.

2 L'ALGEBRE de von NEUMANN $M\hat{}$, et LE POIDS $\varphi\hat{}$

2.1. L'opérateur W et l'application λ.

Dans tout ce paragraphe, $(M,\Gamma,\kappa,\varphi)$ désigne un quadruplet vérifiant les axiomes (Ki), (Kii) et (Kiii) de (1.3.1)

L'axiome (Kiii) implique que, pour tous x,y de $\mathfrak{N}_\varphi$, $\Gamma(y)(x \otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi}$. Plus précisément, on a :

Proposition 2.1.1 : Il existe une isométrie W et une seule, appartenant à $\pi_\varphi(M) \otimes \mathcal{L}(H_\varphi)$, telle que, pour tous x,y de $\mathfrak{N}_\varphi$,

$$W(\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(y)) = \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(y)\, x \otimes 1).$$

On dira que W est l'opérateur fondamental associé à $(M,\Gamma,\kappa,\varphi)$.

Démonstration: Par polarisation, l'axiome (Kiii) donne :

$$\forall x_1,x_2 \in \mathfrak{N}_\varphi, \qquad \forall y \in \mathfrak{M}_\varphi^+$$

$$(\varphi \otimes \varphi)\ ((x_2^* \otimes 1)\ \ \Gamma(y)\ \ (x_1 \otimes 1)) = \varphi(x_2^*\, x_1)\ \varphi(y)$$

On en déduit, par linéarité, pour tous x_1,x_2,y_1,y_2 de $\mathfrak{N}_\varphi$

$$(\varphi \otimes \varphi)\ ((x_2^* \otimes 1)\Gamma(y_1^* y_2)\ (x_1 \otimes 1)) = \varphi(x_2^*\, x_1)\ \varphi(y_1^* y_2)$$

ce qui s'écrit encore

$$(\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(y_1)(x_1 \otimes 1)) \mid \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(y_2)(x_2 \otimes 1))) =$$

$$= (\Lambda_\varphi(x_1) \otimes \Lambda_\varphi(y_1) \mid \Lambda_\varphi(x_2) \otimes \Lambda_\varphi(y_2)).$$

Comme $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi) \otimes \Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)$ est dense dans $H_\varphi \otimes H_\varphi$, il existe donc une isométrie W appartenant à $\mathcal{L}(H_\varphi \otimes H_\varphi)$ telle que, pour tous x,y de $\mathfrak{N}_\varphi$

$$W(\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(y)) = \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(y)\ (x \otimes 1))$$

Soient ξ,η dans $\mathfrak{U}'$, x et y dans $\mathfrak{N}_\varphi$. On a donc

$$(\pi' \otimes \pi')\ (\xi \otimes \eta)\ W\ (\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(y)) = (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)\ (\Gamma(y)\ (x \otimes 1))\ (\xi \otimes \eta)$$

$$= (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)\ (\Gamma(y))\ (\pi_\varphi(x) \otimes 1)\ (\xi \otimes \eta)$$

$$= (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)\ (\Gamma(y))\ (\pi'(\xi) \otimes 1)\ (\Lambda_\varphi(x) \otimes \eta)$$

Par continuité, cette égalité vaut encore lorsqu'on fait tendre $\Lambda_\varphi(x)$ vers tout α de H_φ, soit

$(\pi' \otimes \pi')\ (\xi \otimes \eta)\ W(\alpha \otimes \Lambda_\varphi(y)) \ = \ (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)\ (\Gamma(y))\ (\pi'(\xi) \otimes 1)(\alpha \otimes \eta)$

Faisons tendre $\pi'(\xi)$ fortement vers 1; on trouve :

2.1.1.1: $(1 \otimes \pi'(\eta))\ W\ (\alpha \otimes \Lambda_\varphi(y)) = (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)\ (\Gamma\ (y))\ (\alpha \otimes \eta)$

qui vaut pour tout α de H_φ, y de $\mathfrak{N}_\varphi$ et η de $\mathfrak{U}'$.

Soit x un élément de $\pi_\varphi(M)'$. Remplaçons dans l'égalité ci-dessus α par $x\alpha$.
On trouve :

$$(1 \otimes \pi'(\eta)\ )\ W\ (x \otimes 1)\ (a \otimes \Lambda_\varphi(y)) = (\ \pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)\ (\Gamma(y))(x \otimes 1)\ (\alpha \otimes \eta)$$

$$= (x \otimes 1)\ (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)\ (\Gamma(y))(\alpha \otimes \eta)$$

$$= (x \otimes 1)\ (1 \otimes \pi'(\eta))\ W\ (\alpha \otimes \Lambda_\varphi(y))$$

Faisons tendre $\pi'(\eta)$ fortement vers 1; on trouve :

$$W(x \otimes 1)\ (\alpha \otimes \Lambda_\varphi(y)) \ = \ (x \otimes 1) W\ (\alpha \otimes \Lambda_\varphi(y))$$

Par linéarité et continuité, on en déduit que W et $(x \otimes 1)$ commutent, et donc que W appartient à $\pi_\varphi(M) \otimes \mathcal{L}\ (H_\varphi)$.

<u>Lemme 2.1.2.</u> Soit ω un élément de $\mathcal{L}_\varphi$, tel que, pour tout ω_1 de $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$, $\omega_1 \otimes \omega$ appartient à $\mathcal{L}_{\varphi\otimes\varphi}$. Alors, pour tout ω' de M_*,on a

$$\|\omega' * \omega\|_\varphi \leq \|\omega'\|\|\omega\|_\varphi$$

<u>Démonstration</u>: Soit ω_1 dans $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$. Nous noterons $a_{\varphi\otimes\varphi}(\omega_1\otimes\omega_2)$

l'unique vecteur de $H_{\varphi\otimes\varphi} = H_\varphi \otimes H_\varphi$ tel que

$$(a_{\varphi\otimes\varphi}(\omega_1\otimes\omega)\ |\ \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(x)) = \langle x^*, \omega_1 \otimes \omega\rangle \text{ pour tout x de } \mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi} \text{ (cf. 1.1.3.(b)).}$$

Si y appartient à $\mathfrak{N}_\varphi \otimes \mathfrak{N}_\varphi$, on trouve, en utilisant (1.1.3b), et par linéarité

$$(a_{\varphi\otimes\varphi}(\omega_1 \otimes \omega)\ |\ \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(y)) = \langle y^*, \omega_1 \otimes \omega\rangle = (a(\omega_1)\otimes a(\omega)\ |\ \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(y)).$$

Donc par densité de $\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}\ (\mathfrak{N}_\varphi \otimes \mathfrak{N}_\varphi)$ dans $H_\varphi \otimes H_\varphi$, on en déduit que

$$a_{\varphi\otimes\varphi}\ (\omega_1 \otimes \omega) = a(\omega_1) \otimes a(\omega).$$

Soient x_1 , x dans $\mathfrak{N}_\varphi$; on a :

$$<W^* , \Omega_{a(\omega_1) , \Lambda_\varphi(x_1)} \otimes \Omega_{a(\omega) , \Lambda_\varphi(x)}> = (W^*(a(\omega_1) \otimes (\omega)) \mid \Lambda_\varphi(x_1) \otimes \Lambda_\varphi(x))$$

$$= (a(\omega_1) \otimes a(\omega) \mid W(\Lambda_\varphi(x_1) \otimes \Lambda_\varphi(x)))$$

$$= (a_{\varphi\otimes\varphi}(\omega_1 \otimes \omega) \mid \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(x)(x_1 \otimes 1))) \text{par} 2.1.1$$

$$= <(x_1^* \otimes 1) \Gamma (x^*) , \omega_1 \otimes \omega> \text{ par } (1.1.3 \text{ b})$$

$$= <\Gamma(x^*) , \omega_1 \circ L_{x_1^*} \otimes \omega>$$

où $L_{x_1^*}$ désigne l'endomorphisme de M défini par $z \to x_1^* z$. Or, pour tout z de M, nous avons :

$$<z, \omega_1 \circ L_{x_1^*}> = <x_1^* z, \omega_1>$$

$$= (a(\omega_1) \mid \Lambda_\varphi(z^* x_1)) \qquad \text{par } (1.1.3\text{b})$$

$$= (a(\omega_1) \mid \pi_\varphi(z^*) \Lambda_\varphi(x_1))$$

$$= (\pi_\varphi(z) a(\omega_1) \mid \Lambda_\varphi(x_1))$$

$$= <z , \omega_{a(\omega_1) , \Lambda_\varphi(x_1)}>$$

d'où :

$$\omega_1 \circ L_{x_1^*} = \omega_{a(\omega_1) , \Lambda_\varphi(x_1)}$$

Donc

$$<W^* , \Omega_{a(\omega_1) , \Lambda_\varphi} \otimes \Omega_{a(\omega) , \Lambda_\varphi(x)}> = <\Gamma(x^*) , \omega_{a(\omega_1) , \Lambda_\varphi(x_1)} \otimes \omega>$$

Comme W^* appartient à $\pi_\varphi(M) \otimes \mathcal{L}(H_\varphi)$ (2.1.1), cela peut s'écrire aussi :

$$<W^* , \omega_{a(\omega_1) , \Lambda_\varphi(x_1)} \circ \pi_\varphi^{-1} \otimes \Omega_{a(\omega) , \Lambda_\varphi(x)}> = <\Gamma(x^*) , \omega_{a(\omega_1) , \Lambda_{\varphi(x_1)}} \otimes \omega>$$

Si ω_1 parcourt $\rho(\mathfrak{U}' \tau \mathfrak{U}')$, et x_1 parcourt $\mathfrak{N}_\varphi$, $\omega_{a(\omega_1),\Lambda_\varphi(x_1)}$ parcourt un sous-ensemble dense de M_* . Donc, par continuité, on a, pour tout ω' de M_*, et x de $\mathfrak{N}_\varphi$

$$<W^* , \omega' \circ \pi_\varphi^{-1} \otimes \Omega_{a(\omega),\Lambda_\varphi(x)}> = <\Gamma(x^*) , \omega' \otimes \omega>$$

$$= <x^* , \omega' * \omega>$$

Il en résulte que

$$|\langle x^* , \omega' * \omega\rangle| \leq \|W^*\| \, \|\omega' \circ \pi_\varphi^{-1}\| \, \|\Omega_{a(\omega),\Lambda_\varphi(x)}\|$$

$$\leq \|\omega'\| \, \|a(\omega)\| \, \|\Lambda_\varphi(x)\|$$

$$= \|\omega'\| \, \|\omega\|_\varphi \, \varphi(x^*x)^{1/2} \quad \text{par (1.1.3b)}$$

On en déduit donc

$$\|\omega' * \omega\|_\varphi \leq \|\omega'\| \|\omega\|_\varphi$$

Proposition 2.1.3 : (a) Pour tout ω' de M_*, et tout ω de $\rho(\mathfrak{U}' \tau \mathfrak{U}')$, on a

$$\|\omega' * \omega\|_\varphi \leq \|\omega'\| \|\omega\|_\varphi .$$

On en déduit que $\mathfrak{I}_\varphi$ est inclus dans $\mathcal{L}_\varphi$

(b) Supposons que le poids φ vérifie la propriété P_1 de (1.1.5). Pour tout ω' de M_*, et tout ω de $\mathcal{L}_\varphi$, on a :

$$\|\omega' * \omega\|_\varphi \leq \|\omega'\| \|\omega\|_\varphi$$

On en déduit que $\mathcal{L}_\varphi$ est alors un idéal à gauche; de plus comme $\mathfrak{I}_\varphi$ est inclus dans $\mathcal{L}_\varphi$ par (2.1.3 a), cela implique l'axiome (Kv).

Démonstration (a). Il suffit de voir que tout élément ω de $\rho(\mathfrak{U}' \tau \mathfrak{U}')$ vérifie les hypothèses du lemme 2.1.2. Or, il se trouve que $\rho(\mathfrak{U}' \tau \mathfrak{U}') \otimes \rho(\mathfrak{U}' \tau \mathfrak{U}')$ est inclus dans $\rho_{\varphi\otimes\varphi}(\mathfrak{U}'_{\varphi\otimes\varphi} \tau \mathfrak{U}'_{\varphi\otimes\varphi})$

(car le produit tensoriel algébrique $\mathfrak{U}' \otimes \mathfrak{U}'$ est inclus dans $\mathfrak{U}'_{\varphi\otimes\varphi}$), et est donc inclus dans $\mathcal{L}_{\varphi\otimes\varphi}$ par (1.1.4)

(b) On suppose maintenant que le poids φ vérifie la propriété P_1.

On va montrer que $\mathcal{L}_\varphi \otimes \mathcal{L}_\varphi$ est inclus dans $\mathcal{L}_{\varphi\otimes\varphi}$. On en déduit alors que tout ω de $\mathcal{L}_\varphi$ vérifie les hypothèses du lemme 2.1.2 et le résultat en découle.

Soient ω_1, ω_2 dans $\mathcal{L}_\varphi$, x dans $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi}$ et une suite x_n vérifiant les propriétés de (1.1.5). On a :

$$\langle x^* , \omega_1 \otimes \omega_2\rangle = \lim_{n\ \infty} \langle x_n^*, \omega_1 \otimes \omega_2\rangle$$

$$= \lim \, (a(\omega_1) \otimes a(\omega_2) \mid \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(x_n)) \quad \text{d'après (1,1,3 b), par linéarité}$$

$$= (a(\omega_1) \otimes a(\omega_2) \mid \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(x))$$

Donc $\|\omega_1 \otimes \omega_2\|_\varphi = \|a(\omega_1) \otimes a(\omega_2)\| < +\infty$.

Comme $\mathfrak{I}_\varphi$ est inclus dans $\mathcal{L}_\varphi$ (2.1.3a)), on peut poser la définition suivante :

Définition 2.1.4. Soit $\omega \in M_*$; on notera $\lambda(\omega)$ l'application de $\mathfrak{U}' \tau \mathfrak{U}'$ dans H_φ (plus précisément dans $a(\mathfrak{I}_\varphi)$), qui, à δ, associe $\lambda(\omega)\delta = a(\omega * \rho(\delta))$.

En utilisant (2.1.3.a), on voit que $\lambda(\omega)$ se prolonge par continuité en un unique opérateur appartenant à $\mathcal{L}(H_\varphi)$, qu'on notera encore $\lambda(\omega)$, tel que

$$\|\lambda(\omega)\| \leq \|\omega\|$$

On notera $M\hat{}$ l'algèbre de von Neumann, opérant sur H_φ, engendrée par $\lambda(M_*)$

<u>Proposition 2.1.5</u> (a) Soient $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ dans H_φ; on a

$$(W(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta) = (\beta \mid \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta)$$

(b) L'isométrie W appartient à $\pi_\varphi(M) \otimes M\hat{}$

(c) Pour tout x de M, on a

$$(\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma(x))W = W(1 \otimes \pi_\varphi(x)).$$

<u>Démonstration</u>: (a) Soient ξ,η dans $\mathfrak{U}'$, α,γ dans H_φ, y dans $\mathfrak{N}_\varphi$. En utilisant la formule 2.1.1.1, on trouve :

$$(W(\alpha \otimes \Lambda_\varphi(y)) \mid \gamma \otimes \xi\tau\eta) = ((1 \otimes \pi'(\eta))\, W(\alpha \otimes \Lambda_\varphi(y)) \mid \gamma \otimes \xi)$$

$$= ((\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma(y))(\alpha \otimes \eta) \mid \gamma \otimes \xi)$$

$$= \overline{\langle \Gamma(y^*) , \omega_{\gamma,\alpha} \otimes \omega_{\xi,\eta} \rangle}$$

Par linéarité, on trouve, pour y de $\mathfrak{N}_\varphi$, α,γ dans H_φ, et δ dans $\mathfrak{U}' \tau \mathfrak{U}'$

$$(W(\alpha \otimes \Lambda_\varphi(y)) \mid \gamma \otimes \delta) = \overline{\langle \Gamma(y^*) , \omega_{\gamma,\alpha} \otimes \rho(\delta) \rangle}$$

$$= \overline{\langle y^* , \omega_{\gamma,\alpha} * \rho(\delta) \rangle}$$

$$= (\Lambda_\varphi(y) \mid a(\omega_{\gamma,\alpha} * \rho(\delta))) \quad \text{par (1.1.3 b)}$$

$$= (\Lambda_\varphi(y) \mid \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta) \quad \text{par (2.1.4)}$$

D'où, par continuité, la formule (2.1.5.a)

(b) Soit x de $M\hat{}'$; on a, pour tous $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ dans H_φ

$$(W(1 \otimes x)(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta) = (x\beta \mid \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta) \quad \text{par (2.1.5 a)}$$

$$= (\beta \mid x^*\lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta)$$

$$= (\beta \mid \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\, x^*\delta)$$

$$= (W(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes x^*\delta) \qquad \text{par (2.1.5a)}$$

$$= ((1 \otimes x)\, W\, (\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta)$$

Par linéarité et continuité, on trouve $W(1 \otimes x) = (1 \otimes x)\, W$, d'où le résultat, en utilisant (2.1.1).

c) Soient x dans M, y,z dans $\mathfrak{N}_\varphi$. On a :

$$(\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma(x))W(\Lambda_\varphi(y)\otimes\Lambda_\varphi(z)) = (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma(x))\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(z)y \otimes 1)$$

$$= \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(x)\Gamma(z)(y \otimes 1))$$

$$= \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(xz)(y \otimes 1))$$

$$= W(\Lambda_\varphi(y) \otimes \Lambda_\varphi(xz))$$

$$= W(1 \otimes \pi_\varphi(x))(\Lambda_\varphi(y) \otimes \Lambda_\varphi(z))$$

D'où le résultat, par linéarité et continuité.

__Lemme 2.1.6.__ Les sous-espaces $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$ et $\mathbb{A}_*^\circ$ sont denses dans M_*; de plus les algèbres de von Neumann engendrées par $\lambda(\mathbb{A}_*)$, $\lambda(\mathfrak{I}_\varphi^\circ * \mathfrak{I}_\varphi)$ et $\lambda(\rho(\mathfrak{U}'\top\mathfrak{U}'))$ sont égales à $M\hat{}$.

__Démonstration:__ Soit x un élément de M tel que, pour tous α,β dans $\mathfrak{U}'$, on ait $\langle x , \omega_{\alpha,\beta}\rangle = 0$. On a donc

$(\pi_\varphi(x)\alpha|\beta) = 0$ pour tous α,β dans $\mathfrak{U}'$.

La densité de $\mathfrak{U}'$ dans H_φ entraine $x = 0$. Il en résulte donc , d'après (1.1.2), que $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$ est dense dans M_*.

Comme $^\circ$ est un homéomorphisme de M_* , $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')^\circ$ est lui aussi dense dans M_*, et donc $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')^\circ \otimes \rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$ est dense dans $(M \otimes M)_*$.

Il en résulte que si x désigne un élément de M tel que

$$\langle x,\omega_1^\circ * \omega_2\rangle = 0 \quad \text{pour tous } \omega_1,\omega_2 \text{ de } \rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$$

on a $\langle\Gamma(x) , \omega_1^\circ \otimes \omega_2\rangle = 0$

et donc $\Gamma(x) = 0$, et donc $x = 0$

Il en résulte que l'espace vectoriel $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')^\circ * \rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$ est dense dans

M_*; il en est de même à fortiori de $\mathfrak{J}^\circ_\varphi * \mathfrak{J}_\varphi$ et de $\mathbb{A}_*$.

Ainsi les algèbres de von Neumann engendrées par $\lambda(\mathbb{A}_*)$, $\lambda(\mathfrak{J}^\circ_\varphi * \mathfrak{J}_\varphi)$ et $\lambda(\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}'))$sont égales à $\hat{M}$.

<u>Proposition 2.1.7.</u> Les conditions ci-dessous sont équivalentes :

(a) le quadruplet $(M,\Gamma,\kappa,\varphi)$ vérifie(K iv)

(b) pour tout ω de M_*, on a $\lambda(\omega^\circ) = \lambda(\omega)^*$.

<u>Démonstration</u>: Soient ω dans M_* , et ξ,η dans $\mathfrak{U}_\circ \top \mathfrak{U}_\circ$. Alors, $\Lambda_\varphi^{-1}(\xi)$ appartient à $\mathfrak{N}_\varphi$, et $\omega * \rho(\eta)$ appartient à $\mathfrak{J}_\varphi \subset \mathcal{L}_\varphi$.

Donc, d'après(1.1.3 b),

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_\varphi^{-1}(\xi)^* , \omega * \rho(\eta)\rangle &= (a(\omega * \rho(\eta)) \mid \xi) \\ &= (\lambda(\omega)\eta \mid \xi) \qquad \text{par } (2.1.4) \end{aligned}$$

De même, en remplaçant ω par ω°, et en permutant les lettres ξ et η, on trouve $\langle \Lambda_\varphi^{-1}(\eta)^* , \omega^\circ * \rho(\xi)\rangle = (\lambda(\omega^\circ)\xi \mid \eta)$.

L'axiome(Kiv) s'écrit donc :

Pour tous ξ,η dans $\mathfrak{U}_\circ \top \mathfrak{U}_\circ$, on a $(\lambda(\omega)\eta \mid \xi) = (\lambda(\omega^\circ)\xi \mid \eta)^-$;
ce qui équivaut,par densité de $\mathfrak{U}_\circ \top \mathfrak{U}_\circ$ dans H_φ, à $\lambda(\omega^\circ) = \lambda(\omega)^*$

<u>Remarque 2.1.8.</u> Rappelons que, par (1.2.2.1), pour tous α,β de H_φ, on a

$$\omega^\circ_{\alpha,\beta} = \omega_{\beta,\alpha}\circ\kappa$$

La propriété (b) de 2.1.7 peut donc aussi s'écrire

$$\lambda(\omega_{\alpha,\beta})^* = \lambda(\omega_{\beta,\alpha}\circ\kappa) \text{ pour tous } \alpha,\beta \text{ de } H_\varphi$$

<u>**Proposition 2.1.9.**</u> Les conditions ci-dessous sont équivalentes

(a) le quadruplet $(M,\Gamma,\kappa,\varphi)$ vérifie(Kv)

(b) pour tous ω_1, ω_2 de M_* , on a

$$\lambda(\omega_1 * \omega_2) = \lambda(\omega_1)\,\lambda(\omega_2).$$

Si l'une ou l'autre de ces conditions est vérifiée, on a

2.1.9.1. $\quad \lambda(\omega)a(\omega') = a(\omega * \omega')$ pour tout ω de M_*, et tout ω' de $\mathfrak{J}_\varphi$.

<u>Démonstration</u>: Supposons la propriété (a) vérifiée; comme $\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}'$ est dense dans H_φ, pour tout ω dans M_* et ω' dans $\rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}')$, il existe une suite (δ_n) d'éléments de $\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}'$ qui converge vers $a(\omega * \omega')$. Par continuité, pour tout ω'' de M_*, on a

$$\lambda(\omega'')\delta_n \underset{n\to\infty}{\to} \lambda(\omega'')a(\omega * \omega') = \lambda(\omega'')\lambda(\omega)a(\omega') \text{ par } (2.1.4) \text{ et } (1.1.4.1).$$

Par ailleurs

$\|\lambda(\omega'')\delta_n - \lambda(\omega'' * \omega)\ a\ (\omega')\| = \|a(\omega'' * \rho(\delta_n)) - \lambda(\omega'' * \omega)a(\omega')\|$ par (2.1.4)

$= \|a(\omega'' * \rho(\delta_n)) - a(\omega'' * \omega * \omega')\|$

$= \|\omega'' * (\rho(\delta_n) - \omega * \omega')\|_\varphi$ par (1.1.3b)

$\leq \|\omega''\|\|\rho(\delta_n) - \omega * \omega'\|_\varphi$ d'après(Kv)

$= \|\omega''\|\|\delta_n - a(\omega * \omega')\|$ par(113 b) et(1.1.4.1)

Il en résulte que

$\lambda(\omega'')\delta_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda(\omega'' * \omega)\ a(\omega')$.

Ainsi $\lambda(\omega'')\lambda(\omega\ )\ (\omega'\ ) = \lambda(\omega'' * \omega)\ a(\omega')$, pour tous ω et ω'' de M_* , et ω' dans $\rho(\mathfrak{U}'\ \mathrm{T}\ \mathfrak{U}')$.

Par densité de $\mathfrak{U}'\ \mathrm{T}\ \mathfrak{U}'$ dans H_φ, on en déduit que

$$\lambda(\omega'')\ \lambda\ (\omega) = \lambda(\omega'' * \omega) \quad \forall\omega\ ,\ \omega'' \text{ dans } M_*\ .$$

Supposons maintenant la propriété (b) vérifiée. Nous allons vérifier (Kv) pour l'élément générique de $\mathcal{J}_\varphi$, soit :

$$\omega' = \omega_1 + \sum_{i\in I} \omega_i' * \omega_i''$$

avec I fini, et, pour tout i de I, $\omega_i' \in M_*$, et ω_i'' , $\omega_1 \in \rho(\mathfrak{U}'\ \mathrm{T}\ \mathfrak{U}')$.

Pour tout ω de M_* , $\omega * \omega'$ appartient à $\mathcal{J}_\varphi$, et donc à $\mathcal{L}_\varphi$, et par suite,

$\|\omega * \omega'\|_\varphi = \|a(\omega * \omega')\|$ par (1.1.3b).

Or

$$\begin{aligned} a(\omega * \omega') &= a(\omega * (\omega_1 + \sum_{i\in I} \omega_i' * \omega_i'')) \\ &= a(\omega * \omega_1 + \sum_{i\in I} \omega * \omega_i' * \omega_i'') \\ &= a(\omega * \omega_1) + \sum_{i\in I} a(\omega * \omega_i' * \omega_i'') \\ &= \lambda(\omega)a(\omega_1) + \sum_{i\in I} \lambda(\omega * \omega_i')a(\omega_i'') \text{ par (2.1.4) et (1.1.4.1)} \\ &= \lambda(\omega)a(\omega_1) + \sum_{i\in I} \lambda(\omega)\lambda(\omega_i')a(\omega_i'') \text{ par (b)} \\ &= \lambda(\omega)[\,a(\omega_1) + \sum_{i\in I} \lambda(\omega_i')a(\omega_i'')] \end{aligned}$$

$$= \lambda(\omega)[a(\omega_1) + \sum_{i\in I} a(\omega_i' * \omega_i'')] \text{ par (2.1.4) et (1.1.4.1)}$$

$$= \lambda(\omega)a(\omega')$$

Donc $\|\omega * \omega'\|_\varphi = \|a(\omega * \omega')\| = \|\lambda(\omega)a(\omega')\| \leq \|\lambda(\omega)\|\|a\|(\omega')\| \leq \|\|\omega\|\|\omega'\|_\varphi$ par (2.1.4). On a donc bien (Kv).

D'autre part, la formule (2.1.9.1.) a été démontrée au cours du calcul.

Définition 2.1.10. Par transposition de λ, et restriction à $M_*^\wedge$, on définit une application λ_* de $M_*^\wedge$ dans M, telle que

$$<\lambda_*(\theta) , \omega> = <\lambda(\omega) , \theta> \text{ pour tous } \omega \text{ de } M_* , \theta \text{ de } M_*^\wedge.$$

Remarque 2.1.11. Si les axiomes (Kiv) et (Kv) sont vérifiés, l'application λ est donc, par 2.1.7 et 2.1.9 une représentation de l'algèbre involutive M_*. On l'appellera représentation de Fourier de M_*.

2.2. L'isométrie W est unitaire

Dans tout (2.2), $(M,\Gamma,\kappa,\varphi)$ désigne un quadruplet vérifiant les axiomes (Ki), (Kii), (Kiii), (Kiv) de 1.3.1.

Lemme 2.2.1. Soient ω dans M_*, α,β dans H_φ. Alors

(a) Si ξ appartient à $\mathfrak{D}^\flat$, $\lambda(\omega_{\alpha,\beta})\xi$ appartient également à $\mathfrak{D}^\flat$, et on a

$$F\lambda(\omega_{\alpha,\beta})\xi = \lambda(\omega_{\beta,\alpha})F\xi.$$

Cela s'écrit encore en utilisant 1.2.2.1

$$F\lambda(\omega)\xi = \lambda(\omega^\circ\circ\kappa)F\xi$$

(b) Si η appartient à $\mathfrak{D}^\#$, $\lambda(\omega_{\alpha,\beta})\eta$ appartient également à $\mathfrak{D}^\#$, et on a

$$S\lambda\ \omega_{\alpha,\beta})\eta = \lambda(\omega_{\beta,\alpha})S\eta$$

Cela s'écrit encore, en utilisant 1.2.2.1

$$S\lambda(\omega)\eta = \lambda(\omega^\circ\circ\kappa)S\eta.$$

Démonstration:

(a) Soient x dans $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, α,β dans H_φ, γ, δ dans $\mathfrak{U}'$. On obtient, par simple passage à l'adjoint :

$$<x^* , \omega_{\alpha,\beta} * \omega_{\gamma,\delta}> = \overline{<x , \omega_{\beta,\alpha} * \omega_{\delta,\gamma}>}$$

ce qui s'écrit encore, par (2.1.3 a) et (1.1.3 b)

$$(a(\omega_{\alpha,\beta} * \omega_{\gamma,\delta}) \mid \Lambda_\varphi(x)) = \overline{(a(\omega_{\beta,\alpha} * \omega_{\delta,\gamma}) \mid \Lambda_\varphi(x^*))}$$

$$= (\Lambda_\varphi(x)^\# \mid a(\omega_{\beta,\alpha} * \omega_{\delta,\gamma})).$$

ou encore, en utilisant 2.1.4 et 1.1.4.2.

$$(\lambda(\omega_{\alpha,\beta})(\gamma \top \delta^{\flat}) \mid \Lambda_{\varphi}(x)) = (\Lambda_{\varphi}(x)^{\#} \mid \lambda(\omega_{\beta,\alpha})(\gamma \top \delta^{\flat})^{\flat})$$

Par linéarité, continuité, et par densité de $\mathfrak{A}' \top \mathfrak{A}'$ dans $\mathcal{D}^{\flat}$ pour la norme hilbertienne de $\mathcal{D}^{\flat}$ ([16] p 16) on obtient, pour tous α,β dans H_{φ}, x dans $\mathfrak{N}_{\varphi} \cap \mathfrak{N}_{\varphi}^{*}$, ξ dans $\mathcal{D}^{\flat}$:

$$(\lambda(\omega_{\alpha,\beta})\xi \mid \Lambda_{\varphi}(x)) = (\Lambda_{\varphi}(x)^{\#} \mid \lambda(\omega_{\beta,\alpha})F\xi)$$

d'où le résultat (a).

b) Soient maintenant ξ dans $\mathcal{D}^{\flat}$, η dans $\mathcal{D}^{\#}$, ω dans M_{*}.

On a, par 2.1.7

$$\begin{aligned}
(F\xi \mid \lambda(\omega)\eta) &= (\lambda(\omega^{\circ})F\xi \mid \eta) \\
&= (F\lambda(\omega\circ\kappa)\ \xi \mid \eta) && \text{par}(2.2.1.a) \\
&= (S\eta \mid \lambda(\omega\circ\kappa)\xi) \\
&= (\lambda((\omega\circ\kappa)^{\circ})S\eta \mid \xi) && \text{par } (2.1.7)
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de (2.2.1)

<u>Proposition 2.2.2</u>. L'opérateur modulaire Δ est affilé au commutant de $M\hat{}$.

<u>Démonstration</u>: Soient ξ dans $\mathfrak{A}_{\circ}$, ω dans M_{*}. En utilisant (2.2.1), on voit que $\lambda(\omega)\xi$ appartient à $\mathcal{D}(\Delta)$, et que

$$\Delta\lambda(\omega)\xi = \lambda(\omega)\Delta\xi.$$

Comme $\mathfrak{A}_{\circ}$ est un domaine essentiel pour Δ, la formule ci-dessus est encore vraie pour ξ dans $\mathcal{D}(\Delta)$.

Donc, pour tout ω de M_{*}, on a :

$$\lambda(\omega)\Delta \subset \Delta\lambda(\omega).$$

Comme $\lambda(M_{*})$ engendre l'algèbre de von Neumann $M\hat{}$, on obtient le résultat cherché, par ([6] I § 3 ex.7).

<u>Lemme 2.2.3</u>. Soient ω dans M_{*}, α,β dans H_{φ}. On a

$$J\lambda(\omega_{\alpha,\beta})J = \lambda(\omega_{\beta,\alpha})$$

ce qui s'écrit encore, en utilisant (2.1.7)

$$J\lambda(\omega)^{*}J = \lambda(\omega\circ\kappa)$$

<u>Démonstration</u>: Soient α,β dans H_{φ}, ξ dans $\mathfrak{A}_{\circ}$; on a

$$\begin{aligned}
\lambda(\omega_{\alpha,\beta})J\xi &= \lambda(\omega_{\alpha,\beta})\ \Delta^{1/2}\ \xi^{\#} \\
&= \Delta^{1/2}\ \lambda(\omega_{\alpha,\beta})\xi^{\#} && \text{par } (2.2.2) \\
&= \Delta^{1/2}\ S\ \lambda(\omega_{\beta,\alpha})\xi && \text{par } (2.2.1.b) \\
&= J\lambda(\omega_{\beta,\alpha})\xi
\end{aligned}$$

d'où le résultat, par densité de $\mathfrak{A}_{\circ}$ dans H_{φ}.

Proposition 2.2.4. L'isométrie W définie en 2.1.1 est unitaire. Plus précisément, pour tout isomorphisme V de H_φ sur $\overline{H_\varphi}$ tel que

$$\pi_\varphi(\kappa(x)) = V^{-1}\pi_\varphi(x)^*V$$

on a:

$$W^* = (V^{-1} \otimes J)W(V \otimes J)$$

Démonstration: Rappelons ([6] III 15 théorème 6) que κ est spatial, autrement dit, il existe des isométries V vérifiant l'hypothèse.

On a :

2.2.4.1 $$\omega^\circ_{\alpha,\beta} = \omega_{V\alpha,V\beta} \text{ pour tous } \alpha,\beta \text{ dans } H_\varphi$$

En effet, pour tout $x \in M$, α,β dans H_φ, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\langle x , \omega_{V\beta,V\alpha}\circ\kappa\rangle &= (\pi_\varphi(\kappa(x))V\beta \mid V\alpha) \\
&= (\alpha \mid V^{-1}\pi_\varphi(\kappa(x))V\beta) \\
&= (\alpha \mid \pi_\varphi(x^*)\beta) \\
&= \langle x , \omega_{\alpha,\beta}\rangle
\end{aligned}$$

D'où (2.2.4.1) en utilisant(1.2.2.1)

Soient maintenant $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ dans H_φ. On a

$$\begin{aligned}
((V^{-1} \otimes J)W(V \otimes J)\alpha \otimes \beta \mid \gamma \otimes \delta) &= ((V \otimes J)(\gamma \otimes \delta) \mid W(V \otimes J)(\alpha \otimes \beta)) \\
&= (V\gamma \otimes J\delta \mid W(V\alpha \otimes J\beta)) \\
&= (\lambda(\omega_{V\gamma,V\alpha})J\delta \mid J\beta) && \text{par (2.1.5.a)} \\
&= (\lambda(\omega^\circ_{\gamma,\alpha})J\delta \mid J\beta) && \text{par (2.2.4.1)} \\
&= (J\delta \mid \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})J\beta) && \text{par (2.1.7)} \\
&= (J\lambda(\omega_{\gamma,\alpha})J\beta \mid \delta) \\
&= (\lambda(\omega_{\alpha,\gamma})\beta \mid \delta) && \text{par (2.2.3)} \\
&= (\alpha \otimes \beta \mid W(\gamma \otimes \delta)) && \text{par (2.1.5. a)} \\
&= (W^*(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta).
\end{aligned}$$

D'où le résultat, par linéarité et densité.

Corollaire 2.2.5 (a) Soient E un sous ensemble de M_* , dense dans M_* , et δ un vecteur de H_φ, tels que l'on ait $\lambda(\omega)\delta = 0$, pour tout ω de E. Alors $\delta = 0$.

(b) Soit x un élément de M : on a

$$(\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma(x)) = W(1 \otimes \pi_\varphi(x))W^*$$

(c) Pour tout t réel, on a :

$$\Gamma \circ \sigma_t^\varphi = (1 \otimes \sigma_t^\varphi) \circ \Gamma$$

Démonstration : (a) L'application λ étant continue (2.1.4), les hypothèses impliquent $\lambda(\omega)\delta = 0$ pour tout ω de M_*. En particulier :

$$(W(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta) = (\beta \mid \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta) = 0 \text{ pour tous } \alpha,\beta,\gamma \text{ de } H_\varphi.$$

Donc $W^*\gamma \otimes \delta = 0$, pour tout γ dans H_φ.

Comme W est unitaire (2.2.4) on en déduit $\delta = 0$

(b) immédiat par (2.1.5c) et (2.2.4)

(c) Par(2.2.5b), on a, pour $x \in M$

$$\begin{aligned}(\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma \circ \sigma_t^\varphi(x)) &= W(1 \otimes \Delta^{it}\, \pi_\varphi(x)\Delta^{-it})W^* \\ &= (1 \otimes \Delta^{it})W(1 \otimes \pi_\varphi(x))\, W^*(1 \otimes \Delta^{-it}) \text{par}(2.1.5b) \text{ et } (2.2.2) \\ &= (1 \otimes \Delta^{it})(\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma(x))(1 \otimes \Delta^{-it}) \text{par}(2.2.5b) \\ &= (\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)((1 \otimes \sigma_t^\varphi) \circ \Gamma(x))\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque 2.2.6 : Il résulte de (2.2.5a) que $\lambda(M_*)$ est fortement dense dans $M\hat{}$;par suite l'application λ_* définie en (2.1.10) est injective.

2.3. Construction du poids $\varphi\hat{}$ sur $M\hat{}$.

Dans tout 2.3 , $(M,\Gamma,\kappa,\varphi)$ désigne un quadruplet vérifiant les axiomes (Ki), (Kii), (Kiii), (Kiv), (Kv) de(1.3.1) , et la propriété P_2 de(1.3.5)

On pose $\mathfrak{B} = a(\mathbb{A}_*)$

Proposition 2.3.1 : Soient ω,ω' dans $\mathbb{A}_*$. Les formules

$$(2.3.1.1)\quad a(\omega)\ \hat{\top}\ a(\omega') = a(\omega * \omega')$$

$$(2.3.1.2)\quad a(\omega)\hat{}\ = a(\omega^\circ)$$

permettent de munir $\mathfrak{B}$ d'une structure d'algèbre hilbertienne à gauche, dense dans

H_φ. Si on note $\hat{\pi}$ la représentation canonique de $\mathfrak{B}$ dans H_φ, on a, pour tout ω dans $\mathbb{A}_*$:

$$(2.3.1.3) \qquad \hat{\pi}(a(\omega)) = \lambda(\omega)$$

et l'algèbre de von Neumann engendrée par $\hat{\pi}(\mathfrak{B})$ est égale à $M\hat{}$.

<u>Démonstration</u>: (a) On a vu en (1.2.3) que $\mathbb{A}_*$ est une sous-algèbre involutive de M_*. Comme a est une bijection de $\mathbb{A}_*$ sur $\mathfrak{B}$, on voit que $\mathfrak{B}$, muni de $\hat{\top}$ et $.^{\hat{\#}}$ est une algèbre involutive.

(b) L'ensemble $\mathfrak{B}$ est dense dans H_φ. Soit en effet un vecteur δ de H_φ, orthogonal à $\mathfrak{B}$. Par (1.2.3), cela implique

$$\begin{aligned} 0 &= (a(\omega_1^\circ * \omega_2) \mid \delta) \text{ pour tous } \omega_1 , \omega_2 \text{ dans } \rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}') \\ &= (\lambda(\omega_1^\circ)a(\omega_2) \mid \delta) \quad \text{par } (2.1.4) \text{ et } (1.1.4.1) \\ &= (a(\omega_2) \mid \lambda(\omega_1)\delta) \quad \text{par } (2.1.7) \end{aligned}$$

Par densité de $\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}'$ dans H_φ, cela implique

$$\lambda(\omega_1)\delta = 0 \text{ , pour tout } \omega_1 \text{ dans } \rho(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}').$$

Donc, par (2.1.5) et (2.2.5a), on a $\delta = 0$.

(c) Pour tout ω_1 de $\mathbb{A}_*$, l'application

$$a(\omega) \to a(\omega_1)\, \hat{\top} a(\omega)$$

est continue de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}$.

En effet :

$$\begin{aligned} a(\omega_1)\hat{\top} a(\omega) &= a(\omega_1 * \omega) \quad \text{par } (2.3.1.1) \\ &= \lambda(\omega_1)a(\omega) \quad \text{par } (2.1.9.1) \end{aligned}$$

(d) Pour tous $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ dans $\mathbb{A}_*$, on a

$$(a(\omega_1)\ \hat{\top}\ a(\omega_2) \mid a(\omega_3)) = (a(\omega_1) \mid a(\omega_2)^{\hat{\#}}\ \hat{\top}\ a(\omega_3))$$

En effet :

$$\begin{aligned} (a(\omega_1)\ \hat{\top}\ a(\omega_2) \mid a(\omega_3)) &= (\lambda(\omega_1)a(\omega_2) \mid a(\omega_3)) \text{ par(c)} \\ &= (a(\omega_2) \mid \lambda(\omega_1^\circ)a(\omega_3)) \text{ par } (2.1.7) \\ &= (a(\omega_2) \mid a(\omega_1^\circ * \omega_3)) \text{ par } (2.1.9.1) \\ &= (a(\omega_2) \mid a(\omega_1^\circ)\ \hat{\top}\ a(\omega_3)) \text{ par } (2.3.1.1) \\ &= (a(\omega_2) \mid a(\omega_1)^{\hat{\#}}\ \hat{\top}\ a(\omega_3)) \text{ par } (2.3.1.2) \end{aligned}$$

e) La sous-algèbre $\mathfrak{B}\ \hat{\top}\ \mathfrak{B}$ est dense dans H_φ.

Soit en effet un vecteur δ de H_φ, orthogonal à $\mathfrak{B}\hat{\top}\mathfrak{B}$. On a donc, pour tous ω_1,ω_2 dans $\mathbb{A}_*$

$$\begin{aligned} 0 &= (a(\omega_1^\circ)\ \hat{\top}\ a(\omega_2) \mid \delta) \\ &= (\lambda(\omega_1^\circ)\ a(\omega_2) \mid \delta) \qquad \text{par(c)} \\ &= (a(\omega_2) \mid \lambda(\omega_1)\delta) \qquad \text{par } (2.1.7) \end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{B}$ est dense dans H_φ, on en déduit donc

$$\lambda(\omega_1)\delta = 0 \text{ pour tout } \omega_1 \text{ dans } \mathbb{A}_*.$$

Donc, par(2.1.6) et (2.2.5(a)), on a $\delta = 0$

(f) L'application $\hat{\#}$ est un opérateur fermable de H_φ dans $\overline{H}_\varphi$.

Cela résulte du lemme (2.3.2) qui suit.

<u>Lemme 2.3.2</u> : Soient x dans $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$, η dans $\mathfrak{B}$; on a

$$(\Lambda_\varphi(x) \mid \eta^{\hat{\#}}) = (\eta \mid \Lambda_\varphi(\kappa(x)^*))$$

<u>Démonstration</u>: Pour tout ω de $\mathbb{A}_*$, et x de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$, on a

$$\begin{aligned}(\Lambda_\varphi(x) \mid a(\omega)^{\hat{\#}}) &= (\Lambda_\varphi(x) \mid a(\overset{\circ}{\omega})) \quad \text{par } (2.3.1.2)\\ &= \langle x^* , \omega^\circ\rangle^- \quad \text{par } (1.1.3b)\\ &= \langle \kappa(x) , \omega\rangle\\ &= (a(\omega) \mid \Lambda_\varphi(\kappa(x^*)))\end{aligned}$$

car $\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa} = \kappa(\mathfrak{N}_\varphi^*)$.

<u>fin de la démonstration de 2.3.1</u>:

Le lemme 2.3.2 montre que $\hat{\#}$ possède un adjoint, dont la restriction à $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa})$ est : $\Lambda_\varphi(x) \rightarrow \Lambda_\varphi(\kappa(x^*))$.

Grace à la propriété P_2, cet adjoint est densément défini.

L'application $\hat{\#}$ est donc fermable.

L'algèbre $\mathfrak{B}$ est donc une algèbre hilbertienne à gauche ([16] def. 5.1).

La formule (2.3.1.3) a été démontrée en (c).

En utilisant (2.3.1.3) et (2.1.6), on voit que $\hat{M}$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\hat{\pi}(\mathfrak{B})$.

On notera $\mathfrak{B}'$ l'algèbre hilbertienne à droite associée à $\mathfrak{B}$, et $\mathfrak{B}''$ l'algèbre hilbertienne achevée équivalente à $\mathfrak{B}$.

On notera encore $\hat{T}$ et $\hat{\#}$ (resp. $\hat{\flat}$) le produit et l'involution sur $\mathfrak{B}''$(resp. $\mathfrak{B}'$).

On notera $\hat{S}$ et $\hat{F}$ les fermetures de $\hat{\#}$ et $\hat{\flat}$, de domaines $\mathfrak{D}^{\hat{\#}}$ et $\mathfrak{D}^{\hat{\flat}}$.

On a, en particulier

2.3.2.1. $$\hat{F}\Lambda_\varphi(x) = \Lambda_\varphi(\kappa(x^*)) \qquad x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$$

On notera $\mathfrak{B}_\circ$ la sous-algèbre modulaire maximale de $\mathfrak{B}''$.

Si ξ est borné à gauche relativement à $\mathfrak{B}$, on notera encore $\hat{\pi}(\xi)$ la "multiplication à gauche" par ξ (cf [2].2.1).

<u>Définition 2.3.3</u>. On notera $\hat{\varphi}$ le poids sur $\hat{M}$ canoniquement associé à l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{B}$. ([2] th. 2.11)

Pour tout ω de $\mathbb{A}_*$, $\lambda(\omega)$ appartient à $\hat{\pi}(\mathfrak{B})$ (2.3.1.3), et donc a fortiori à $\mathfrak{N}_{\varphi^\wedge} \cap \mathfrak{N}^*_{\varphi^\wedge}$. De plus, pour ω_1 , ω_2 dans $\mathbb{A}_*$, on a

(2.3.3.1) $$\varphi^\wedge(\lambda(\omega_1)^*\lambda(\omega_2)) = (a(\omega_2) \mid a(\omega_1))$$

On associe au poids $\varphi^\wedge$ l'espace hilbertien $H_{\varphi^\wedge}$, et l'injection canonique $\Lambda_{\varphi^\wedge}$ de $\mathfrak{N}_{\varphi^\wedge}$ dans $H_{\varphi^\wedge}$. Nous noterons $\mathfrak{U}^\wedge$ l'algèbre hilbertienne à gauche associée au poids $\varphi^\wedge$, c'est-à-dire $\Lambda_{\varphi^\wedge}(\mathfrak{N}_{\varphi^\wedge} \cap \mathfrak{N}^*_{\varphi^\wedge})$

On notera $a^\wedge$ à la place de $a_{\varphi^\wedge}$.

<u>Proposition 2.3.4.</u> L'application qui à tout ξ de $\mathfrak{B}''$, associe

(2.3.4.1.) $$\mathcal{F}\xi = \Lambda_{\varphi^\wedge}(\hat{\pi}(\xi))$$

se prolonge de façon unique en un opérateur unitaire de H_φ sur $H_{\hat{\varphi}}$, qu'on notera encore $\mathcal{F}$. On l'appellera application de Fourier - Plancherel.

De plus, si x appartient à $M^\wedge$, on a

(2.3.4.2) $$\pi_{\hat{\varphi}}(x) = \mathcal{F}\, x\, \mathcal{F}^*$$

<u>Démonstration</u>: Si ξ,η appartiennent à $\mathfrak{B}''$, on a

$$(\xi \mid \eta) = \varphi^\wedge(\hat{\pi}(\eta)^*\hat{\pi}(\xi)) \qquad \text{([2] th. 2.11)}$$

$$= (\Lambda_{\hat{\varphi}}(\hat{\pi}(\xi)) \mid \Lambda_{\hat{\varphi}}(\hat{\pi}(\eta))) \qquad \text{([2] Th. 2.13)}$$

$$= (\mathcal{F}\xi \mid \mathcal{F}\eta) \qquad \text{par(2.3.4.1)}$$

Comme $\mathfrak{B}''$ est dense dans H_φ , et $\mathfrak{U}^\wedge$ dans $H_{\varphi^\wedge}$, on en déduit que $\mathcal{F}$ se prolonge en un isomorphisme d'espaces hilbertiens.

Par ailleurs, soient x dans $M^\wedge$, ξ,η dans $\mathfrak{B}''$, on a :

$$(\mathcal{F}^*\pi_{\hat{\varphi}}(x)\mathcal{F}\xi \mid \eta) = (\pi_{\hat{\varphi}}(x)\mathcal{F}\xi \mid \mathcal{F}\eta)$$

$$= (\pi_{\hat{\varphi}}(x)\, \Lambda_{\varphi^\wedge}(\hat{\pi}(\xi)) \mid \Lambda_{\varphi^\wedge}(\hat{\pi}(\eta)))$$

$$= (\Lambda_{\hat{\varphi}}(x\hat{\pi}(\xi)) \mid \Lambda_{\hat{\varphi}}(\hat{\pi}(\eta)))$$

$$= (\Lambda_{\hat{\varphi}}(\hat{\pi}(x\xi)) \mid \Lambda_{\hat{\varphi}}(\hat{\pi}(\eta)))$$

$$= (\mathcal{F}x\xi \mid \mathcal{F}\eta)$$

$$= (x\xi \mid \eta)$$

d'où le résultat.

On en déduit que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme d'algèbre involutive de $\mathfrak{B}''$ sur $\mathfrak{U}^\wedge$. Pour simplifier les notations, on notera aussi $\hat{\top}$, $\hat{\#}$, $\hat{\flat}$ les opérations associées à $\mathfrak{U}^\wedge$ et $\mathfrak{U}^{\wedge\prime}$. De même, les opérateurs $S^\wedge$, $F^\wedge$, $J^\wedge$, $\Delta^\wedge$ seront considérés comme opérant sur H_φ ou bien sur $H_{\hat{\varphi}}$. En particulier, on écrira $J^\wedge = \mathcal{F}^* J^\wedge \mathcal{F}$.

On notera $\mathfrak{U}^\wedge_0$ la sous-algèbre modulaire maximale de $\mathfrak{U}^\wedge$. On a $\mathfrak{U}^\wedge_0 = \mathcal{F}\,\mathfrak{B}_0$.

<u>Proposition 2.3.5.</u> Pour tout ω de $\mathfrak{J}_\varphi$, $a(\omega)$ est borné à gauche relativement à $\mathfrak{B}$, et on a

(2.3.5.1) $\qquad \hat{\pi}(a(\omega)) = \lambda(\omega)$

(2.3.5.2) $\qquad \mathcal{F}\,a(\omega) = \Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\omega))$

En particulier, si α et γ sont dans $\mathfrak{U}'$, $\gamma \top \alpha^\flat$ est borné à gauche relativement à $\mathfrak{B}$, et on a, par 1.1.4.2

(2.3.5.3) $\qquad \hat{\pi}(\gamma \top \alpha^\flat) = \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})$

<u>Démonstration</u>: Soient ω_1 dans $\mathfrak{J}_\varphi$, ω_2 dans $\mathbb{A}_*$, ξ dans $\mathfrak{B}'$; on a

$$\begin{aligned}
\lambda(\omega_2)\ \hat{\pi}'(\xi)a(\omega_1) &= \hat{\pi}'(\xi)\lambda(\omega_2)a(\omega_1) \\
&= \hat{\pi}'(\xi)a(\omega_2 * \omega_1) \quad \text{par}(2.1.9.1) \\
&= \hat{\pi}(a(\omega_2 * \omega_1))\xi \quad \text{car } \omega_2 * \omega_1 \in A_* \\
&= \lambda(\omega_2 * \omega_1)\xi \quad \text{par } (2.3.1.3) \\
&= \lambda(\omega_2)\lambda(\omega_1)\xi.
\end{aligned}$$

Comme 1 est adhérent à $\lambda(\mathbb{A}_*) = \hat{\pi}(\mathfrak{B})$, on a, pour tous ω_1 dans $\mathfrak{J}_\varphi$, ξ dans $\mathfrak{B}'$:

$$\hat{\pi}'(\xi)a(\omega_1) = \lambda(\omega_1)\xi$$

d'où (2.3.5.1).

D'autre part, si ξ appartient à $\mathfrak{B}''$, ω à $\mathfrak{J}_\varphi$, on a

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\,a(\omega) \mid \mathcal{F}\,\xi) &= (a(\omega) \mid \xi) \\
&= (\varphi^\wedge(\hat{\pi}(\xi)^*\hat{\pi}(a(\omega))) \quad \text{par [2] th. 2.11} \\
&= (\Lambda_{\hat{\varphi}}(\hat{\pi}(a(\omega)) \mid \Lambda_{\hat{\varphi}}(\hat{\pi}(\xi))) \\
&= (\Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\omega)) \mid \mathcal{F}\,\xi) \quad \text{par}(2.3.5.1) \text{ et}(2.3.4.1)
\end{aligned}$$

d'où (2.3.5.2) par densité de $\mathcal{F}\,\mathfrak{B}'' = \mathfrak{U}^\wedge$ dans $H_{\varphi^\wedge}$.

<u>Remarque 2.3.6</u> : Grâce à [2],(2.16), on sait que tout élément de $M^\wedge_*$ est de la forme $\Omega_{\alpha,\beta} \mid M^\wedge$ α et β étant des vecteurs de H_φ.

Si α' et β' sont des vecteurs de $H_{\hat{\varphi}}$, on posera

$$\theta_{\alpha',\beta'} = \Omega_{\alpha',\beta'} \circ \pi_{\hat{\varphi}} = \Omega_{\mathcal{F}^*\alpha',\mathcal{F}^*\beta'}|M^{\wedge}.$$

Tout élément de $M_*^{\wedge}$ est donc de la forme $\theta_{\alpha',\beta'}$, α',β' étant des vecteurs de $H_{\varphi^{\wedge}}$.

3 L'ALGEBRE DE HOPF-VON NEUMANN INVOLUTIVE DUALE

Dans ce chapitre, $(M,\Gamma,\kappa,\varphi)$ désigne un quadruplet vérifiant les axiomes (Ki) à (Kv) et la propriété P_2.

3.1. Relations de connection et conséquences.

Proposition 3.1.1.: (Relations de connection).

Les opérations T et $\hat{\mathrm{T}}$ sont reliées par :

(a) pour α,γ dans $\mathfrak{A}'$ et β,δ dans $\mathfrak{B}'$, on a :

$$(W(\alpha\otimes\beta) \mid \gamma\otimes\delta) = (\beta \;\hat{\mathrm{T}}\; \delta^{\hat{\flat}} \mid \gamma \;\mathrm{T}\; \alpha^{\flat})$$

(b) pour α,γ dans $\mathfrak{A}'$ et β,δ dans H_φ, on a :

$$(W(\alpha\otimes\beta) \mid \gamma\otimes\delta) = (\beta \mid \hat{\pi}(\gamma \;\mathrm{T}\; \alpha^{\flat})\delta)$$

(c) l'ensemble $\mathfrak{B}' \;\hat{\mathrm{T}}\; \mathfrak{B}'$ est inclus dans $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)$; pour α,γ dans H_φ et β,δ dans $\mathfrak{B}'$, on a :

$$(W(\alpha\otimes\beta) \mid \gamma\otimes\delta) = (\pi(\beta \;\hat{\mathrm{T}}\; \delta^{\hat{\flat}})\alpha \mid \gamma)$$

Démonstration: La relation(b) provient de (2.1.5.(a)) et (2.3.5.3) :

Nous avons donc, avec les hypothèses de (a) :

$$\begin{aligned}(W(\alpha\otimes\beta) \mid \gamma\otimes\delta) &= (\beta \mid \hat{\pi}(\gamma \;\mathrm{T}\; \alpha^{\flat})\delta)\\ &= (\beta \mid \hat{\pi}'(\delta)(\gamma \;\mathrm{T}\; \alpha^{\flat}))\\ &= (\hat{\pi}'(\delta)^*\beta \mid \gamma \;\mathrm{T}\; \alpha^{\flat})\\ &= (\hat{\pi}'(\delta^{\hat{\flat}})\beta \mid \gamma \;\mathrm{T}\; \alpha^{\flat})\\ &= (\beta \;\hat{\mathrm{T}}\; \delta^{\hat{\flat}} \mid \gamma \;\mathrm{T}\; \alpha^{\flat}) \quad \text{d'où (a).}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}(W(\alpha\otimes\beta) \mid \gamma\otimes\delta) &= (\beta \;\hat{\mathrm{T}}\; \delta^{\hat{\flat}} \mid \pi'(\alpha^{\flat})\gamma)\\ &= (\pi'(\alpha)(\beta \;\hat{\mathrm{T}}\; \delta^{\hat{\flat}}) \mid \gamma)\end{aligned}$$

et, il en résulte que :

$$\begin{aligned}\|\pi'(\alpha)(\beta \;\hat{\mathrm{T}}\; \delta^{\hat{\flat}})\| &= \sup_{\gamma\in\mathfrak{A}',\|\gamma\|\le 1} |(W(\alpha\otimes\beta)\mid\gamma\otimes\delta)|\\ &\le \|\alpha\|\,\|\beta\|\,\|\delta\|\end{aligned}$$

Ainsi $\beta \;\hat{\mathrm{T}}\; \delta^{\hat{\flat}}$ est borné à gauche et on obtient :

$$(W(\alpha\otimes\beta) \mid \gamma\otimes\delta) = (\pi(\beta \;\hat{\mathrm{T}}\; \delta^{\hat{\flat}})\alpha \mid \gamma)$$

qui par continuité, vaut encore pour α et γ dans H_φ; d'où (c).

Lemme 3.I.2.

(a) L'ensemble $\mathfrak{B}' \;\hat{\mathrm{T}}\; \mathfrak{B}'$ est inclus dans $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa})$. Plus précisément pour β et δ dans $\mathfrak{B}'$, on a :

$$\Lambda_\varphi^{-1}(\beta \;\hat{\mathrm{T}}\; \delta^{\hat{\flat}}) = \lambda_*(\Omega_{\delta,\beta}|M^\frown)^*$$

$$\kappa\,[\Lambda_\varphi^{-1}(\beta \;\hat{\mathrm{T}}\; \delta^{\hat{\flat}})]^* = \Lambda_\varphi^{-1}(\delta \;\hat{\mathrm{T}}\; \beta^{\hat{\flat}})$$

(b) le sous-espace $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\cdot\kappa})$ est un domaine essentiel pour $F\hat{}$.

Démonstration: (a) Soient β,δ dans $\mathfrak{B}'$, α,γ dans H_φ. Par définition de λ_*, nous avons :

$$(\pi_\varphi(\lambda_*(\Omega_{\delta,\beta}|M\hat{})^*)\alpha|\gamma) = \overline{<\lambda_*(\Omega_{\delta,\beta}|M\hat{}),\omega_{\gamma,\alpha}>}$$

$$= \overline{<\lambda(\omega_{\gamma,\alpha}) , \Omega_{\delta,\beta}>}$$

$$= (\beta|\lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta)$$

$$= (W(\alpha\otimes\beta)|\gamma\otimes\delta) \quad \text{d'après 2.1.5.(a)}$$

$$= (\pi(\beta \hat{\tau} \delta^\flat)\alpha|\gamma) \quad \text{d'après 3.1.1.(c)}$$

d'où la première égalité, par densité.

On en déduit que pour β,δ dans $\mathfrak{B}'$ et ω dans M_*, on a

$$<\kappa(\Lambda_\varphi^{-1}(\beta \hat{\tau} \delta^{\hat{\flat}})), \omega> = <\kappa(\lambda_*(\Omega_{\delta,\beta}|M\hat{})^*),\omega> \quad \text{d'après ce qui précède}$$

$$= \overline{<\lambda_*(\Omega_{\delta,\beta}|M\hat{}) , \omega^\circ>} \quad \text{d'après 1.2.2}$$

$$= \overline{<\lambda(\omega^\circ),\Omega_{\delta,\beta}>} \quad \text{d'après 2.1.10}$$

$$= \overline{<\lambda(\omega)^*,\Omega_{\delta,\beta}>} \quad \text{d'après 2.1.7}$$

$$= <\lambda(\omega),\Omega_{\beta,\delta}>$$

$$= <\lambda_*(\Omega_{\beta,\delta}|M\hat{}),\omega>$$

Il en résulte que :

$\kappa(\Lambda_\varphi^{-1}(\beta \hat{\tau} \delta^{\hat{\flat}}))^* = \lambda_*(\Omega_{\beta,\delta}|M\hat{})^* = \Lambda_\varphi^{-1}(\delta \hat{\tau} \beta^{\hat{\flat}})$ d'après la première égalité.

Comme $\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa} = \kappa(\mathfrak{N}_\varphi^*)$, (a) en résulte.

(b) Comme $\mathfrak{B}' \hat{\tau} \mathfrak{B}'$ est domaine essentiel pour $F\hat{}$, le résultat est immédiat, d'après [16] ,p.16.

Lemme 3.1.3 : Soit x dans M. On a :

(a) si α appartient à $\hat{\mathcal{D}}^\flat$, $\pi_\varphi(x)\alpha$ appartient à $\hat{\mathcal{D}}^\flat$ et :

$$F\hat{}(\pi_\varphi(x)\alpha) = \pi_\varphi(\kappa(x)^*)F\hat{}\alpha$$

(b) si β appartient à $\hat{\mathcal{D}}^\#$, $\pi_\varphi(x)\beta$ appartient à $\hat{\mathcal{D}}^\#$ et :

$$S\hat{}(\pi_\varphi(x)\beta) = \pi_\varphi(\kappa(x)^*)S\hat{}\beta.$$

Démonstration: (a) Soient α dans $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa})$, ω dans $\mathbb{A}_*$, x dans M. On a :

$$(\pi_\varphi(x)\alpha|a(\omega)^{\hat{\#}}) = (\pi_\varphi(x)\alpha|a(\omega^\circ)) \quad \text{d'après 2.3.1.2}$$

$$= \langle \Lambda_\varphi^{-1}(\pi_\varphi(x)\alpha)^*, \omega^\circ \rangle^- \qquad \text{d'après } 1.1.3.(b)$$

$$= \langle (x\,\Lambda_\varphi^{-1}(\alpha))^*, \omega^\circ \rangle^-$$

$$= \langle \kappa(x\,\Lambda_\varphi^{-1}(\alpha)), \omega \rangle$$

$$= \langle (\kappa(x)^*\,\kappa(\Lambda_\varphi^{-1}(\alpha))^*)^*, \omega \rangle$$

$$= \langle (\kappa(x)^*\,\Lambda_\varphi^{-1}(F\hat{\ }\alpha))^*, \omega \rangle \qquad \text{d'après } 2.3.2.1$$

$$= \langle \Lambda_\varphi^{-1}(\pi_\varphi(\kappa(x)^*)F\hat{\ }\alpha)^*, \omega \rangle$$

$$= (a(\omega) \mid \pi_\varphi(\kappa(x)^*)F\hat{\ }\alpha) \qquad \text{d'après } 1.1.3.(b)$$

Il en résulte que $\pi_\varphi(x)\alpha$ appartient à $\mathfrak{D}^{\hat{b}}$ et que

$$F\hat{\ }\pi_\varphi(x)\alpha = \pi_\varphi(\kappa(x)^*)\,F\hat{\ }\alpha.$$

Comme $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\cdot\kappa})$ est domaine essentiel pour $F\hat{\ }$(3.1.2.(b)). On en déduit le résultat.

(b) Soient α dans $\mathfrak{D}^{\hat{b}}$, β dans $\mathfrak{D}^{\hat{\#}}$ et x dans M. On a :

$$(\pi_\varphi(x)\beta \mid F\hat{\ }\alpha) = (\beta \mid \pi_\varphi(x^*)F\hat{\ }\alpha)$$

$$= (\beta \mid F\hat{\ }\pi_\varphi(\kappa(x))\alpha) \qquad \text{d'après a)}$$

$$= (\pi_\varphi(\kappa(x))\alpha \mid S\hat{\ }\beta)$$

$$= (\alpha \mid \pi_\varphi(\kappa(x)^*)S\hat{\ }\beta) \qquad \text{d'où le résultat.}$$

<u>Proposition 3.1.4</u> :L'opérateur modulaire $\Delta\hat{\ }$est affilié à $\pi_\varphi(M)'$

<u>Démonstration</u> : Soient α dans $\mathfrak{P}_\circ$ et x dans M. On a :

$$\pi_\varphi(x)\Delta\hat{\ }\alpha = \pi_\varphi(x)F\hat{\ }S\hat{\ }\alpha$$

$$= F\hat{\ }\pi_\varphi(\kappa(x)^*)S\hat{\ }\alpha \qquad \text{d'après } 3.1.3(a) \text{ car } S\hat{\ }\alpha \in \mathfrak{D}^{\hat{b}}$$

$$= F\hat{\ }S\hat{\ }\pi_\varphi(x)\alpha \qquad \text{d'après } 3.1.3(b)$$

$$= \Delta\hat{\ }\pi_\varphi(x)\alpha$$

comme $\mathfrak{P}_\circ$ est domaine essentiel pour $\Delta\hat{\ }$, il en résulte :

$\pi_\varphi(x)\Delta\hat{\ } \subset \Delta\hat{\ }\pi_\varphi(x)$, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire 3.1.5</u> : (a) Pour tout x de M, on a : $\pi_\varphi(\kappa(x^*)) = J\hat{\ }\pi_\varphi(x)J\hat{\ }$.

(b) On a : $W^* = (J\hat{\ }\otimes J)W(J\hat{\ }\otimes J)$.

<u>Démonstration:</u>(a) Soient α dans $\mathfrak{P}_\circ$ et x dans M. On a :

$$\begin{aligned}\pi_\varphi(x)J^\wedge\alpha &= \pi_\varphi(x)(\Delta^\wedge)^{1/2} S^\wedge\alpha \\ &= (\Delta^\wedge)^{1/2}\pi_\varphi(x)S^\wedge\alpha && \text{d'après 3.1.4;} \\ &= (\Delta^\wedge)^{1/2} S^\wedge\pi_\varphi(\kappa(x)^*)\alpha && \text{d'après 3.1.3(b)} \\ &= J^\wedge\pi_\varphi(\kappa(x)^*)\alpha\end{aligned}$$

d'où le résultat, par densité de $\mathfrak{B}_o$ dans H_φ.

(b) Se déduit immédiatement de (a) et 2.2.4.

Lemme 3.1.6 :

(a) pour β,δ dans $\mathfrak{B}'$ et ξ,η dans $H_\varphi \otimes H_\varphi$:

$((1 \otimes W)(\xi \otimes \beta)|\eta \otimes \delta) = ((1 \otimes \pi(\beta \,\hat{\tau}\, \delta^{\flat}))\xi|\eta)$

(b) pour α,γ dans $\mathfrak{U}'$, δ dans $\mathfrak{B}'$, β dans H_φ et ξ dans $H_\varphi \otimes H_\varphi$:

$$((1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(\xi \otimes \alpha)|\beta \otimes \gamma \otimes \delta) = ((1 \otimes \hat{\pi}'(\delta^{\hat{\flat}}))\xi|\beta \otimes (\gamma \,\tau\, \alpha^{\flat}))$$

[où σ désigne l'opérateur de $\mathcal{L}(H_\varphi \otimes H_\varphi)$ défini par $\sigma(\eta_1 \otimes \eta_2) = \eta_2 \otimes \eta_1$

(c) pour β,δ dans $\mathfrak{B}'$, α_1, α_2 dans H_φ et ξ dans $H_\varphi \otimes H_\varphi$:

$$(\alpha_1 \otimes \delta \otimes \alpha_2|(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\xi \otimes \beta)) = (\alpha_1 \otimes \alpha_2|(\pi(\beta \,\hat{\tau}\, \delta^{\hat{\flat}}) \otimes 1)\xi)$$

(d) pour α,γ dans $\mathfrak{U}'$, ξ,η dans $H_\varphi \otimes H_\varphi$:

$$(\gamma \otimes \xi|(W \otimes 1)(\alpha \otimes \eta)) = ((\hat{\pi}(\gamma \,\tau\, \alpha^{\flat}) \otimes 1)\xi|\eta)$$

(e) avec les mêmes hypothèses que (d) :

$$(\gamma \otimes \xi|(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\alpha \otimes \eta)) = (W^*(\hat{\pi}(\gamma \,\tau\, \alpha^{\flat}) \otimes 1)W\xi|\eta).$$

Démonstration : (a) Soient β,δ dans $\mathfrak{B}'$ et $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ dans H_φ. Nous avons :

$$\begin{aligned}((1 \otimes W)(\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \beta)|\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \delta) &= (\xi_1 \otimes W(\xi_2 \otimes \beta)|\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \delta) \\ &= (\xi_1|\eta_1)(W(\xi_2 \otimes \beta)|\eta_2 \otimes \delta) \\ &= (\xi_1|\eta_1)(\pi(\beta \,\hat{\tau}\, \delta^{\hat{\flat}})\xi_2|\eta_2) \quad \text{d'après 3.1.1(c).} \\ &= (\xi_1 \otimes \pi(\beta \,\hat{\tau}\, \delta^{\hat{\flat}})\xi_2|\eta_1 \otimes \eta_2) \\ &= ((1 \otimes \pi(\beta \,\hat{\tau}\, \delta^{\hat{\flat}}))\xi_1 \otimes \xi_2|\eta_1 \otimes \eta_2), \text{d'où}\end{aligned}$$

le résultat par linéarité et continuité.

(b) Soient α,γ dans $\mathfrak{U}'$, δ,ξ_2 dans $\mathfrak{B}'$, β et ξ_1 dans H_φ. On a :

$$((1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \alpha)|\beta \otimes \gamma \otimes \delta) = ((1 \otimes W)(\xi_1 \otimes \alpha \otimes \xi_2)(\beta \otimes \gamma \otimes \delta)$$

$$= (\xi_1 \otimes W(\alpha \otimes \xi_2) \mid \beta \otimes \gamma \otimes \delta)$$

$$= (\xi_1 \mid \beta)(W(\alpha \otimes \xi_2) \mid \gamma \otimes \delta)$$

$$= (\xi_1 \mid \beta)(\xi_2 \hat{\uparrow} \delta^{\hat{\flat}} \mid \gamma \top \alpha^{\flat}) \text{ d'après(3.1.1.(a))}$$

$$= (\xi_1 \otimes (\xi_2 \hat{\uparrow} \delta^{\hat{\flat}}) \mid \beta \otimes (\gamma \top \alpha^{\flat}))$$

$$= (\xi_1 \otimes \hat{\pi}'(\delta^{\hat{\flat}})\xi_2 \mid \beta \otimes (\gamma \top \alpha^{\flat}))$$

$$= ((1 \otimes \hat{\pi}'(\delta^{\hat{\flat}}))(\xi_1 \otimes \xi_2) \mid \beta \otimes (\gamma \top \alpha^{\flat})), \text{ d'où le}$$

résultat par linéarité et continuité.

(c) Soient β, δ dans $\mathfrak{B}'$ et $\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi_2$ dans H_φ. On a :

$$(\alpha_1 \otimes \delta \otimes \alpha_2 \mid W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \beta)) = (\alpha_1 \otimes \delta\ \alpha_2 \mid (W \otimes 1)(\xi_1 \otimes \beta \otimes \xi_2))$$

$$= (\alpha_1 \otimes \delta \otimes \alpha_2 \mid W(\xi_1 \otimes \beta) \otimes \xi_2)$$

$$= (\alpha_1 \otimes \delta \mid W(\xi_1 \otimes \beta))(\alpha_2 (\xi_2)$$

$$= (\alpha_1 \mid \pi(\beta \hat{\uparrow} \delta^{\hat{\flat}})\xi_1)(\alpha_2 \mid \xi_2) \text{ d'après (3.1.1.(c))}$$

$$= (\alpha_1 \otimes \alpha_2 \mid \pi(\beta \hat{\uparrow} \delta^{\hat{\flat}})\xi_1 \otimes \xi_2)$$

$$= (\alpha_1 \otimes \alpha_2 \mid (\pi(\beta \hat{\uparrow} \delta^{\hat{\flat}}) \otimes 1)\ (\xi_1 \otimes \xi_2))$$

d'où le résultat par linéarité et continuité.

(d) Soient α, γ dans $\mathfrak{U}'$, $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ dans H_φ . On a :

$$(\gamma \otimes \xi_1 \otimes \xi_2 \mid (W \otimes 1)(\alpha \otimes \eta_1 \otimes \eta_2)) = (\gamma \otimes \xi_1 \otimes \xi_2 \mid W(\alpha \otimes \eta_1) \otimes \eta_2)$$

$$= (\gamma \otimes \xi_1 \mid W(\alpha \otimes \eta_1))(\xi_2 \mid \eta_2)$$

$$= (\hat{\pi}(\gamma \top \alpha^{\flat})\xi_1 \mid \eta_1)(\xi_2 \mid \eta_2) \text{ d'après (3.1.1.b)),}$$

$$= \hat{\pi}(\gamma \top \alpha^{\flat})\, \xi_1 \otimes \xi_2 \mid \eta_1 \otimes \eta_2)$$

$$= ((\hat{\pi}(\gamma \top \alpha^{\flat}) \otimes 1)(\xi_1 \otimes \xi_2) \mid \eta_1 \otimes \eta_2)$$ d'où le résultat, par linéarité et continuité.

La démonstration de (e) nécessite la proposition suivante.

Proposition 3.1.7 : L'opérateur W vérifie la relation :

$$(W \otimes 1)(1 \otimes W) = (1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)$$

Démonstration : Soient α,γ dans $\mathfrak{U}'$, β,δ dans $\mathfrak{B}'$, $\alpha_\circ,\gamma_\circ$ dans H_φ. On a :

$$((\omega \otimes 1)(1 \otimes W)(W^* \otimes 1)(\alpha_\circ \otimes \alpha \otimes \beta) \mid \gamma_\circ \otimes \gamma \otimes \delta) =$$

$$= ((1 \otimes W)(W^* \otimes 1)(\alpha_\circ \otimes \alpha \otimes \beta) \mid (W^* \otimes 1)(\gamma_\circ \otimes \gamma \otimes \delta))$$

$$= ((1 \otimes W)(W^*(\alpha_\circ \otimes \alpha) \otimes \beta) \mid W^*(\gamma_\circ \otimes \gamma) \otimes \delta)$$

$$= ((1 \otimes \pi(\beta \hat{\top} \hat{\delta^{\flat}}))W^*(\alpha_\circ \otimes \alpha) \mid W^*(\gamma_\circ \otimes \gamma))$$ d'après (3.1.6.(a))

$$= W(1 \otimes \pi(\beta \hat{\top} \hat{\delta^{\flat}}))W^*(\alpha_\circ \otimes \alpha) \mid \gamma_\circ \otimes \gamma)$$

$$= (\Gamma(\pi(\beta \hat{\top} \hat{\delta^{\flat}}))(\alpha_\circ \otimes \alpha) \mid \gamma_\circ \otimes \gamma)$$ d'après (2.2.5.(b))

$$= <\Gamma(\Lambda_\varphi^{-1}(\beta \hat{\top} \hat{\delta^{\flat}})), \omega_{\alpha_\circ,\gamma_\circ} \otimes \omega_{\alpha,\gamma}>$$

$$= <\Gamma(\Lambda_\varphi^{-1}(\beta \hat{\top} \hat{\delta^{\flat}}))^*, \omega_{\gamma_\circ,\alpha_\circ} \otimes \omega_{\gamma,\alpha}>^-$$

$$= <\Gamma(\Lambda_\varphi^{-1}(\beta \hat{\top} \hat{\delta^{\flat}}))^*, \omega_{\gamma_\circ,\alpha_\circ} \otimes \rho(\gamma \top \alpha^{\flat})>^-$$ d'après (1.1.2.)

$$= (W(\gamma_\circ \otimes \beta \hat{\top} \hat{\delta^{\flat}}) \mid \gamma_\circ \otimes (\gamma \top \alpha^{\flat}))$$ d'après (1.3.10.2)

$$= (W(1 \otimes \hat{\pi}'(\hat{\delta^{\flat}}))(\gamma_\circ \otimes \beta) \mid \gamma_\circ \otimes (\gamma \top \alpha^{\flat}))$$

$$= ((1 \otimes \hat{\pi}'(\hat{\delta^{\flat}}))W(\gamma_\circ \otimes \beta) \mid \gamma_\circ \otimes (\gamma \top \alpha^{\flat}))$$ d'après (2.1.5.(b))

$$= ((1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(W(\alpha_\circ \otimes \beta) \otimes \alpha) \mid \gamma_\circ \otimes \gamma \otimes \delta)$$ d'après (3.1.6.(b))

$$= ((1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\alpha_\circ \otimes \beta \otimes \alpha) \mid \gamma_\circ \otimes \gamma \otimes \delta)$$

$$= ((1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\alpha_\circ \otimes \alpha \otimes \beta) \mid \gamma_\circ \otimes \gamma \otimes \delta)$$

d'où, par densité :

$$(W \otimes 1)(1 \otimes W)(W^* \otimes 1) = (1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)$$

et, en utilisant (2.2.4) le résultat.

Démonstration de 3.1.6.(e) : Soient α, γ dans $\mathfrak{U}'$, ξ, η dans $H_\varphi \otimes H_\varphi$. On a :

$((\gamma \otimes \xi) \mid (1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\alpha \otimes \eta)) =$

$= (\gamma \otimes \xi \mid (1 \otimes W^*)(W \otimes 1)(1 \otimes W)(\alpha \otimes \eta))$ d'après 3.1.7

$= ((1 \otimes W)(\gamma \otimes \xi) \mid (W \otimes 1)(1 \otimes W)(\alpha \otimes \eta))$

$= (\gamma \otimes W\xi \mid (W \otimes 1)(\alpha \otimes W\eta))$

$= ((\pi(\gamma \top \alpha^\flat) \otimes 1)W\xi \mid W\eta)$ d'après 3.1.6.(d)

$= (W^*(\pi(\gamma \top \alpha^\flat) \otimes 1)W\xi \mid \eta)$ d'où le résultat.

Corollaire 3.1.8 :

$$W^*(\pi(\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}') \otimes 1)W \subset M\hat{} \otimes \mathcal{L}(H_\varphi).$$

Démonstration : Soient α, γ dans $\mathfrak{U}'$, ξ, η dans $H_\varphi \otimes H_\varphi$, et y dans $M\hat{}'$. On a

$((y \otimes 1)W^*(\pi(\gamma \top \alpha^\flat) \otimes 1)W\xi \mid \eta) =$

$= (W^*(\pi(\gamma \top \alpha^\flat) \otimes 1)W\xi \mid (y^* \otimes 1)\eta)$

$= (\gamma \otimes \xi \mid (1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\alpha \otimes (y^* \otimes 1)\eta))$ d'après 3.1.6(e)

$= (\gamma \otimes \xi \mid (1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes y^* \otimes 1)(\alpha \otimes \eta))$

$= (\gamma \otimes \xi \mid (1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(1 \otimes y^* \otimes 1)(W \otimes 1)(\alpha \otimes \eta))$ d'après 2.1.5(b)

$= (\gamma \otimes \xi \mid (1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes y^*)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\alpha \otimes \eta))$

$= (\gamma \otimes \xi \mid (1 \otimes \sigma)(1 \otimes 1 \otimes y^*)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\alpha \otimes \eta))$

$= (\gamma \otimes \xi \mid (1 \otimes y^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\alpha \otimes \eta))$

$= ((1 \otimes y \otimes 1)(\gamma \otimes \xi) \mid (1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\alpha \otimes \eta))$

$= (\gamma \otimes (y \otimes 1)\xi \mid (1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\alpha \otimes \eta))$

$= (W^*(\pi(\gamma \top \alpha^\flat) \otimes 1)W(y \otimes 1)\xi \mid \eta)$ d'après 3.1.6(e)

d'où : $$(1 \otimes y)W^*(\pi(\gamma \top \alpha^\flat) \otimes 1)W = W^*(\pi(\gamma \top \alpha^\flat) \otimes 1)W(1 \otimes y)$$

et le résultat, par linéarité.

Proposition 3.1.9 : Pour tout ω de $\mathcal{L}_\varphi$, $a(\omega)$ appartient à $\mathcal{F}^*\Lambda_{\varphi\hat{}}(\mathfrak{N}_{\varphi\hat{}})$ et :

$$\pi(a(\omega)) = \lambda(\omega)$$

soit : $$\mathcal{F}\, a(\omega)) = \Lambda_{\varphi\hat{}}(\lambda(\omega))$$

Démonstration : Soient β et δ dans $\mathfrak{B}'$, ω dans $\mathcal{L}_\varphi$. On a :

$$(\pi'(\delta)a(\omega)|\beta) = (a(\omega)|\pi'(\delta^{\hat{b}})\beta)$$

$$= (a(\omega)|\beta \,\mathrm{T}\, \delta^{\hat{b}})$$

$$= \langle \Lambda_{\varphi}^{-1}(\beta \,\mathrm{T}\delta^{\hat{b}})^*,\omega\rangle \qquad \text{d'après}(3.1.1(c)\text{et}(1.1.3.(b))$$

$$= \langle \lambda_*(\Omega_{\delta,\beta}|M\hat{}\,),\omega\rangle \qquad \text{d'après } (3.1.2)$$

$$= \langle \lambda(\omega),\Omega_{\delta,\beta}\rangle$$

$$= (\lambda(\omega)\delta|\beta).$$

Par densité de $\mathfrak{B}'$ dans H_{φ}, il en résulte

$$\pi'(\delta)a(\omega) = \lambda(\omega)\delta$$

donc $a(\omega)$ est borné à gauche relativement à $\mathfrak{B}$, soit

$$a(\omega)\in \mathcal{F}^*\Lambda_{\varphi\hat{}}(\mathfrak{N}_{\varphi\hat{}})$$

de plus $\pi(a(\omega)) = \lambda(\omega)$

soit encore $\mathcal{F}a(\omega) = \Lambda_{\varphi\hat{}}(\lambda(\omega))$.

Cette proposition généralise (2.3.1.3) et (2.3.5)

<u>Corollaire 3.1.10</u> : (Formule de Plancherel). Soient ω_1 et ω_2 dans $\mathcal{L}_{\varphi}$,

on a : $\qquad (a(\omega_1)|a(\omega_2)) = \varphi\hat{}(\lambda(\omega_2)^*\lambda(\omega_1))$

3.2. Le coproduit $\Gamma\hat{}$

D'après (1.1.2), (2.1.6) et (2.3.5.3), $\pi(\mathfrak{U}' \,\mathrm{T}\, \mathfrak{U}')$ est faiblement dense dans $M\hat{}$. Il résulte donc de (3.1.8) que pour tout x de $M\hat{}$ l'opérateur $W^*(x \otimes 1)W$ appartient à $M\hat{} \otimes \mathcal{L}(H_{\varphi})$; en utilisant (2.1.5.(b)), on trouve enfin qu'il appartient à $M\hat{} \otimes M\hat{}$; cela nous conduit à poser :

<u>Définition 3.2.1</u> : On appelle $\Gamma\hat{}$ l'application linéaire de $M\hat{}$ dans $M\hat{} \otimes M\hat{}$

définie par $\Gamma\hat{}(x) = \sigma W^*(x \otimes 1)W\sigma$ pour tout x de $M\hat{}$; où σ désigne l'opérateur défini en (3.1.6.(b)).

Il est clair que $\Gamma\hat{}$ est un morphisme normal et injectif.

<u>Lemme 3.2.2</u> : (a) $(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma) = (\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)$

(b) $(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)(1 \otimes U) = (U \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)$

(c) $(\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(U \otimes 1) = (1 \otimes U)(\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)$

où U désigne un élément quelconque de $\mathcal{L}(H_\varphi \otimes H_\varphi)$.

<u>Démonstration:</u>(a) Soient ξ_1,ξ_2,ξ_3 dans H_φ. On a

$$\begin{aligned}(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \xi_3) &= (1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)(\xi_1 \otimes \xi_3 \otimes \xi_2)\\ &= (1 \otimes \sigma)(\xi_3 \otimes \xi_1 \otimes \xi_2)\\ &= \xi_3 \otimes \xi_2 \otimes \xi_1\\ &= (\sigma \otimes 1)(\xi_2 \otimes \xi_3 \otimes \xi_1)\\ &= (\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\xi_2 \otimes \xi_1 \otimes \xi_3)\\ &= (\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)(\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \xi_3)\end{aligned}$$ d'où le résultat, par linéarité et densité.

(b) Soient, u,v dans $\mathcal{L}(H_\varphi)$. On a :

$$\begin{aligned}(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)(1 \otimes u \otimes v) &= (1 \otimes \sigma)(u \otimes 1 \otimes v)(\sigma \otimes 1)\\ &= (u \otimes v \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)\end{aligned}$$ d'où le résultat, par linéarité et continuité.

(c) La démonstration est analogue à la précédente.

<u>Proposition 3.2.3</u> : L'application $\Gamma\hat{}$ est un coproduit coassociatif au sens de (1.2.1.2).

<u>Démonstration</u>: Compte-tenu de (3.2.1), il nous reste à vérifier la commutativité du premier diagramme de (1.2.1).

Soient x_1 et x_2 dans $M^\wedge$. On a :

$$(\Gamma^\wedge \otimes I)(x_1 \otimes x_2) = \Gamma^\wedge(x_1) \otimes x_2$$

$$= (\Gamma^\wedge(x_1) \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes x_2)$$

$$= ((\sigma W^*(x_1 \otimes 1)W\sigma) \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes x_2) \text{ d'après (3.2.1)}$$

$$= (\sigma \otimes 1)(W^* \otimes 1)(x_1 \otimes 1 \otimes 1)(W \otimes 1)(\sigma \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes x_2)$$

$$= (\sigma \otimes 1)(W^* \otimes 1)(x_1 \otimes 1 \otimes 1)(W \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes x_2)(\sigma \otimes 1)$$

$$= (\sigma \otimes 1)(W^* \otimes 1)(x \otimes 1 \otimes x_2)(W \otimes 1)(\sigma \otimes 1)$$

$$= (\sigma \otimes 1)(W^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(x_1 \otimes x_2 \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\sigma \otimes 1),$$

par linéarité et continuité, il en résulte que pour tout y de $M^\wedge \otimes M^\wedge$ on a :

$$(\Gamma^\wedge \otimes I)(y) = (\sigma \otimes 1)(W^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(y \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\sigma \otimes 1).$$

En particulier, nous avons: pour tout x de $M^\wedge$:

$$(\Gamma^\wedge \otimes I)(\Gamma^\wedge(x)) =$$

$$= (\sigma \otimes 1)(W^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\Gamma^\wedge(x) \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\sigma \otimes 1)$$

$$= (\sigma \otimes 1)(W^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)((\sigma W^*(x \otimes 1)W \sigma) \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\sigma \otimes 1) \text{ d'après(3.2.1.)}$$

$$= (\sigma \otimes 1)[(W^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)](W^* \otimes 1)(x \otimes 1 \otimes 1)(W \otimes 1)[(\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)]$$
$$(\sigma \otimes 1)$$

$$= (\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)[(1 \otimes W^*)(W^* \otimes 1)](x \otimes 1 \otimes 1)[(W \otimes 1)(1 \otimes W)](\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)$$
$$(\sigma \otimes 1) \text{ d'après (3.2.2.(b) et (c))}.$$

$$= [\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)](W^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)[(1 \otimes W^*)(x \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes W)]$$
$$(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)[(\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)] \quad \text{d'après (3.1.7.)}$$

$$= (1 \otimes \sigma)[(\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)](W^* \otimes 1)[(1 \otimes \sigma)(x \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \sigma)](W \otimes 1)$$
$$[(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma \otimes 1)](1 \otimes \sigma) \text{ d'après (3.2.2.(a))}.$$

$= (1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*)(\sigma \otimes 1)(W^* \otimes 1)(x \otimes 1 \otimes 1)(W \otimes 1)(\sigma \otimes 1)(1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)$ d'après (3.2.2.(b)) et (c).

Nous avons ainsi obtenu :

3.2.3.1 $$(\Gamma\hat{} \otimes I)(\Gamma\hat{}(x)) = (1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*)(\sigma \otimes 1)(W^* \otimes 1)(x \otimes 1 \otimes 1)(W \otimes 1)(\sigma \otimes 1)(1 \otimes W)(1 \otimes \sigma).$$

De même, soient x_1 et x_2 dans $M\hat{}$. On a :

$$(I \otimes \Gamma\hat{})(x_1 \otimes x_2) = x_1 \otimes \Gamma\hat{}(x_2)$$

$$= (x_1 \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \Gamma\hat{}(x_2))$$

$$= (x_1 \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes (\sigma W^*(x_2 \otimes 1) W \sigma)) \quad \text{d'après (3.2.1).}$$

$$= (x_1 \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*)(1 \otimes x_2 \otimes 1)(1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)$$

$$= (1 \otimes \sigma)(x_1 \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes W^*)(1 \otimes x_2 \otimes 1)(1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)$$

$$= (1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*)(x_1 \otimes x_2 \otimes 1)(1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)$$

par linéarité et continuité, il en résulte que pour tout y de $M\hat{} \otimes M\hat{}$, on a :

$$(I \otimes \Gamma\hat{})(y) = (1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*)(y \otimes 1)(1 \otimes W)(1 \otimes \sigma).$$

En particulier, pour tout x de $M\hat{}$, nous avons :

$$(I \otimes \Gamma\hat{})(\Gamma\hat{}(x)) = (1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*)(\Gamma\hat{}(x) \otimes 1)(1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)$$

$$= (1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*)((\sigma W^*(x \otimes 1) W \sigma) \otimes 1)(1 \otimes W)(1 \otimes \sigma) \quad \text{d'après (3.2.1)}$$

$$= (1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*)(\sigma \otimes 1)(W^* \otimes 1)(x \otimes 1 \otimes 1)(W \otimes 1)(\sigma \otimes 1)(1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)$$

$$= (\Gamma\hat{} \otimes I)(\Gamma\hat{}(x)) \quad \text{d'après (3.2.3.1.)}$$

ce qui achève la démonstration.

Définition 3.2.4.: On munit $\hat{M}_*$ d'une structure d'algèbre de Banach en posant pour tous x de $\hat{M}$ et θ_1, θ_2 de $\hat{M}_*$:

$$<x_1,\theta_1 \hat{*} \theta_2> = <\hat{\Gamma}(x),\theta_1 \otimes \theta_2>$$

Proposition 3.2.5.: Pour tout t réel, on a : $\hat{\Gamma} \circ \sigma_t^{\hat{\varphi}} = (1 \otimes \sigma_t^{\hat{\varphi}}) \circ \hat{\Gamma}$

Démonstration: Pour tout x de $\hat{M}$ et tout t de R, on a, par définition :

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}(\sigma_t^{\hat{\varphi}}(x)) &= \sigma\, W^*(\sigma_t^{\hat{\varphi}}(x) \otimes 1)W\,\sigma \\
&= \sigma\, W^*(((\hat{\Delta})^{it}\, x(\hat{\Delta})^{-it}) \otimes 1)W\,\sigma \\
&= \sigma\, W^*((\hat{\Delta})^{it} \otimes 1)(x \otimes 1)((\hat{\Delta})^{-it} \otimes 1)W\sigma
\end{aligned}$$

Or W appartient à $\pi_\varphi(M) \otimes \hat{M}$ (2.1.5.b) et $(\hat{\Delta})^{it}$ appartient à $\pi_\varphi(M)$ (3.1.4). Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}(\sigma_t^{\hat{\varphi}}(x)) &= \sigma((\hat{\Delta})^{it} \otimes 1)W^*\,(x \otimes 1)W\,((\hat{\Delta})^{-it} \otimes 1)\sigma \\
&= (1 \otimes (\hat{\Delta})^{it})\sigma\, W^*(x \otimes 1)W\,\sigma\,(1 \otimes (\hat{\Delta})^{-it}) \\
&= (1 \otimes (\hat{\Delta})^{it})\,\hat{\Gamma}(x)(1 \otimes (\hat{\Delta})^{-it}) \quad \text{d'après (3.2.1)} \\
&= (1 \otimes \sigma_t^{\hat{\varphi}})(\hat{\Gamma}(x))
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3.3. L'involution $\hat{\kappa}$

Lemme 3.3.1 : L'application de $\mathcal{L}(H_\varphi)$ dans lui-même définie par $x \to J x^* J$ pour tout x de $\mathcal{L}(H_\varphi)$ est un antiautomorphisme involutif de $\mathcal{L}(H_\varphi)$.

Proposition 3.3.2 : La restriction à $\hat{M}$ de l'application définie ci-dessus est un antiautomorphisme involutif de $\hat{M}$ au sens de (1.2.1.3.). On le notera $\hat{\kappa}$. De plus les involutions κ et $\hat{\kappa}$ sont liées par les relations :

$$\hat{\kappa}(\lambda(\omega)) = \lambda(\omega\circ\kappa) \text{ pour tout } \omega \text{ de } M_*$$

$$\kappa\,(\lambda_*(\theta)) = \lambda_*(\theta\circ\hat{\kappa}) \quad \text{pour tout } \theta \text{ de } \hat{M}_*$$

<u>Démonstration</u> : Soit ω dans M_*. On a :

$$\kappa\hat{}(\lambda(\omega)) = J\,\lambda(\omega)^*\,J$$

$$= \lambda(\omega\circ\kappa) \qquad \text{d'après 2.2.3}$$

Ce qui fournit la première égalité, et assure par continuité que pour tout x de $M\hat{}$, $\kappa\hat{}(x)$ appartient à $M\hat{}$; la première partie de la proposition résulte alors du lemme 3.3.1.

Pour tout ω dans M_* et tout θ dans $M\hat{}_*$, on a :

$$<\kappa(\lambda_*(\theta)),\omega> = <\lambda_*(\theta),\omega\circ\kappa>$$

$$= <\lambda(\omega\circ\kappa),\theta>$$

$$= <\kappa\hat{}(\lambda(\omega)),\theta> \qquad \text{d'après la première égalité}$$

$$= <\lambda(\omega),\theta\circ\kappa\hat{}>$$

$$= <\lambda_*(\theta\circ\kappa\hat{}),\omega> \qquad \text{d'où la deuxième égalité.}$$

<u>Proposition 3.3.3.</u>: Pour tous θ_1,θ_2 de $M\hat{}_*$, on a :

$$\lambda_*(\theta_1 \hat{*} \theta_2) = \lambda_*(\theta_2)\lambda_*(\theta_1).$$

<u>Démonstration</u> : Soient α,γ dans $\mathfrak{U}'$, $\beta_1,\beta_2,\delta_1,\delta_2$ dans $\mathfrak{B}'$. On a :

$$<\lambda_*((\Omega_{\delta_1,\beta_1}|M\hat{})\hat{*}(\Omega_{\delta_2,\beta_2}|M\hat{})),\omega_{\gamma,\alpha}> =$$

$$= <\lambda(\omega_{\gamma,\alpha}),(\Omega_{\delta_1,\beta_1}|M\hat{}) \hat{*} (\Omega_{\delta_2,\beta_2}|M\hat{})>$$

$$= <\Gamma\hat{}(\lambda(\omega_{\gamma,\alpha})),\Omega_{\delta_1,\beta_1} \otimes \Omega_{\delta_2,\beta_2}> \qquad \text{d'après(3.2.4.)}$$

$$= <\sigma\, W^*(\lambda(\omega_{\gamma,\alpha}) \otimes 1)\, W\,\sigma,\ \Omega_{\delta_1,\beta_1} \otimes \Omega_{\delta_2,\beta_2}> \qquad \text{d'après(3.2.1.)}$$

$$= < W^*(\lambda(\omega_{\gamma,\alpha}) \otimes 1)\, W,\ \Omega_{\delta_2,\beta_2} \otimes \Omega_{\delta_1,\beta_1}>$$

$$= < W^*(\pi(\gamma \top \alpha) \otimes 1)W,\ \Omega_{\delta_2,\beta_2} \otimes \Omega_{\delta_1,\beta_1}> \qquad \text{d'après(2.3.5.3.)}$$

$= (W^*(\hat{\pi}(\gamma \; T \; \alpha^\flat) \otimes 1)W(\delta_2 \otimes \delta_1) \mid \beta_2 \otimes \beta_1)$

$= (\gamma \otimes \delta_2 \otimes \delta_1 \mid (1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(\alpha \otimes \beta \;\; \otimes \beta_1))$ d'après 3.1.5.(e)

$= ((1 \otimes \sigma)(\gamma \otimes \delta_2 \otimes \delta_1) \mid (W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W(\alpha \otimes \beta_2) \otimes \beta_1))$

$= (\gamma \otimes \delta_1 \otimes \delta_2 \mid (W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W(\alpha \otimes \beta_2) \otimes \beta_1))$

$= (\gamma \otimes \delta_2 \mid (\pi(\beta_1 \; \hat{T} \; \delta_1^{\hat{\flat}}) \otimes 1)W(\alpha \otimes \beta_2))$ d'après 3.1.6.(c)

$= ((\pi(\beta_1 \; \hat{T} \; \delta_1^{\hat{\flat}})^* \otimes 1)(\gamma \otimes \delta_2 \mid W(\alpha \otimes \beta_2))$

$= (\pi(\beta_1 \; \hat{T} \; \beta_1^{\hat{\flat}})^*\gamma \otimes \delta_2 \mid W(\alpha \otimes \beta_2))$

$= (\pi(\beta_1 \; \hat{T} \; \delta_1^{\hat{\flat}})^*\gamma \mid \pi(\beta_2 \; \hat{T} \; \delta_2^{\hat{\flat}})\alpha)$ d'après 3.1.1.(c)

$= (\pi(\beta_2 \; \hat{T} \; \delta_2^{\hat{\flat}})^*\pi(\beta_1 \; \hat{T} \; \delta_1^{\hat{\flat}})^*\gamma \mid \alpha)$

$= \langle \pi(\beta_2 \; \hat{T} \; \delta_2^{\hat{\flat}})^*\pi(\beta_1 \; \hat{T} \; \delta_1^{\hat{\flat}})^* \; , \; \Omega_{\gamma,\alpha} \rangle$

$= \langle \Lambda_\varphi^{-1}(\beta_2 \; \hat{T} \; \delta_2^{\hat{\flat}})^* \; \Lambda_\varphi^{-1}(\beta_1 \; \hat{T} \; \delta_1^{\hat{\flat}})^* \; , \; \omega_{\gamma,\alpha} \rangle$

$= \langle \lambda_* \, \Omega_{\delta_2,\beta_2}|M\hat{\ })\lambda_*(\Omega_{\delta_1,\beta_1}|M\hat{\ }) \; , \; \omega_{\gamma,\alpha} \rangle$ d'après 3.1.2.(a)

Par densité, on en déduit que :

$$\lambda_*((\Omega_{\delta_1,\beta_1}|M\hat{\ }) \;\hat{*}\; (\Omega_{\delta_2,\beta_2}|M\hat{\ })) = \lambda_*(\Omega_{\delta_2,\beta_2}|M\hat{\ })\lambda_*(\Omega_{\delta_1,\beta_1}|M\hat{\ })$$

On conclut par linéarité et continuité.

Théorème 3.3.4. : Le triplet $(M\hat{\ }, \Gamma\hat{\ }, \kappa\hat{\ })$ est une algèbre de Hopf-von Neumann involutive.

Démonstration : Compte-tenu de 3.2.3 et 3.3.2., il nous reste à vérifier que le diagramme de 1.2.1.3. est commutatif.

Soient ω dans M_*, θ_1, θ_2 dans $M\hat{_*}$. On a :

$\langle \Gamma\hat{\ }(\kappa\hat{\ }(\lambda(\omega))), \theta_1 \otimes \theta_2 \rangle = \langle \kappa\hat{\ }(\lambda(\omega)) \; , \; \theta_1 \;\hat{*}\; \theta_2 \rangle$ d'après 3.2.4.

$= \langle \lambda(\omega \circ \kappa) \; , \; \theta_1 \;\hat{*}\; \theta_2 \rangle$ d'après 3.3.2.

$= \langle \lambda_*(\theta_1 \;\hat{*}\; \theta_2) \; , \; \omega \circ \kappa \rangle$

$= \langle \lambda_*(\theta_2)\lambda_*(\theta_1) \; , \; \omega \circ \kappa \rangle$ d'après 3.3.3.

$$= <\kappa(\lambda_*(\theta_2)\lambda_*(\theta_1)) \;,\; \omega>$$

$$= <\kappa(\lambda_*(\theta_1))\kappa(\lambda_*(\theta_2)) \;,\; \omega>$$

$$= <\lambda_*(\theta_1 \circ \kappa\hat{}\,)\lambda_*(\theta_2 \circ \kappa\hat{}\,) \;,\; \omega> \qquad \text{d'après 3.3.2.}$$

$$= <\lambda_*((\theta_2 \circ \kappa\hat{}\,) \hat{*} (\theta_1 \circ \hat{\kappa})) \;,\; \omega> \qquad \text{d'après 3.3.3.}$$

$$= <\lambda(\omega) \;,\; (\theta_2 \circ \kappa\hat{}\,) \hat{*} (\theta_1 \circ \kappa\hat{}\,)>$$

$$= <\Gamma\hat{}(\lambda(\omega)) \;,\; (\theta_2 \circ \kappa\hat{}\,) \otimes (\theta_1 \circ \kappa\hat{}\,)> \qquad \text{d'après 3.2.4.}$$

$$= <\Gamma\hat{}(\lambda(\omega)) \;,\; (\theta_2 \otimes \theta_1) \circ (\kappa\hat{} \otimes \kappa\hat{}\,)>$$

$$= <(\kappa\hat{} \otimes \kappa\hat{}\,)(\Gamma\hat{}(\lambda(\omega))) \;,\; \theta_2 \otimes \theta_1>$$

$$= <\varsigma(\kappa\hat{} \otimes \kappa\hat{}\,)(\Gamma\hat{}(\lambda(\omega))) \;,\; \theta_1 \otimes \theta_2>$$

d'où, par densité :

$$\Gamma\hat{}(\kappa\hat{}(\lambda(\omega))) = \varsigma(\kappa\hat{} \otimes \kappa\hat{}\,)(\Gamma\hat{}(\lambda(\omega)))$$

puis, par densité de $\lambda(M_*)$ dans $M\hat{}$ et continuité :

$$\Gamma\hat{} \circ \kappa\hat{} = \varsigma \circ (\kappa\hat{} \otimes \kappa\hat{}\,) \circ \Gamma\hat{}$$ ce qui achève la démonstration.

<u>Définition 3.3.5.</u> : Il résulte de ce qui précède que l'on définit une algèbre de Banach involutive en posant, pour tout x de $M\hat{}$ et tout θ de $M\hat{}_*$:

$$<x \;,\; \theta^{\hat{\circ}}> = <\kappa\hat{}(x)^* \;,\; \theta>^-$$

<u>Proposition 3.3.6.</u> : Pour tout θ de $M\hat{}_*$, on a : $\lambda_*(\theta^{\hat{\circ}}) = \lambda_*(\theta)^*$.

<u>Démonstration</u> : Soient θ dans $M\hat{}_*$, α, β dans H_φ . On a :

$$<\lambda_*(\theta^{\hat{\circ}}) \;,\; \omega_{\alpha,\beta}> = <\lambda(\omega_{\alpha,\beta}) \;,\; \theta^{\hat{\circ}}>$$

$$= <\kappa\hat{}(\lambda(\omega_{\alpha,\beta})^*) \;,\; \theta>^- \qquad \text{d'après 3.3.5.}$$

$$= <\kappa\hat{}(\lambda(\omega^\circ_{\alpha,\beta})) \;,\; \theta>^- \qquad \text{d'après 2.1.7.}$$

$$= <\lambda(\omega^\circ_{\alpha\,\beta} \circ \kappa) \;,\; \theta>^- \qquad \text{d'après 3.3.2.}$$

$$= <\lambda(\omega_{\beta,\alpha}) \;,\; \theta>^- \qquad \text{d'après 1.2.2.1.}$$

$$= <\lambda_*(\theta) \;,\; \omega_{\beta,\alpha}>^- \;=\; <\lambda_*(\theta)^* \;,\; \omega_{\alpha,\beta}> \qquad \text{d'où le résultat.}$$

4 DUALITE

4.1. Le quadruplet $(\hat{M}, \hat{\Gamma}, \hat{\kappa}, \hat{\varphi})$ vérifie (Kiii), (Kiv) et (Kv)

Dans 4.1. $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ désigne un quadruplet vérifiant les axiomes (Ki) à (Kv), et la propriété P_2.

Lemme 4.1.1. : Soient N une algèbre de Von Neumann, φ un poids normal, fidèle, semi-fini sur N, ψ un poids normal, semi-fini sur N, invariant par le groupe des automorphismes modulaires associé à φ.

S'il existe un sous-espace vectoriel E de $\mathfrak{N}_\varphi$ tel que $\varphi(x^*x) = \psi(x^*x)$ pour tout x dans E, et tel que $\Lambda_\varphi(E)$ soit dense dans H_φ, les poids φ et ψ sont égaux.

Démonstration : Comme ψ est invariant par σ_t^φ, pour tout t de $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe un opérateur positif auto-adjoint h, affilié à M^φ, tel que $\psi = \varphi(h.)$ au sens de ([14] th.5.12), c'est-à-dire que, pour tout x de M^+

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(h_\varepsilon^{1/2}\ x\ h_\varepsilon^{1/2})$$

où $h_\varepsilon = h(1+\varepsilon h)^{-1} \in M_+^\varphi$.

On a : $\mathcal{D}(h^{1/2}) = \{\xi \in H_\varphi$ tels que $\sup_\varepsilon(h_\varepsilon\xi|\xi) < +\infty\}$ et, pour tout ξ dans $\mathcal{D}(h^{1/2})$

$$||h^{1/2}\xi||^2 = \sup_\varepsilon(h_\varepsilon\xi|\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}(h_\varepsilon\xi|\xi)$$

Comme $h_\varepsilon^{1/2}$ appartient à M^φ, ([14] théorème 3.6.) indique que pour tout x de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, $xh_\varepsilon^{1/2}$ appartient à $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$.

On a donc, pour tout ε positif :

$$\begin{aligned}
\varphi(h_\varepsilon^{1/2}\ x^*xh_\varepsilon^{1/2}) &= \|\Lambda_\varphi(xh_\varepsilon^{1/2})\|^2 \\
&= \|S\Lambda_\varphi((xh_\varepsilon^{1/2})^*)\|^2 \\
&= \|S\Lambda_\varphi(h_\varepsilon^{1/2}\ x^*)\|^2 \\
&= \|S\pi_\varphi(h_\varepsilon^{1/2})S\Lambda_\varphi(x)\|^2 \\
&= \|J\Delta^{1/2}\pi_\varphi(h_\varepsilon^{1/2})\Delta^{-1/2}J\Lambda_\varphi(x)\|^2 \\
&= \|J\pi_\varphi(h_\varepsilon^{1/2})J\Lambda_\varphi(x)\|^2 \quad \text{car } h_\varepsilon^{1/2} \in M^\varphi
\end{aligned}$$

(pour un calcul analogue, voir [14] théorème 5.12.).

Si x appartient à E, on a donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|J\pi_\varphi(h_\varepsilon^{1/2})J\Lambda_\varphi(x)\|^2 = \psi(x^*x) = \varphi(x^*x) < +\infty$$

Donc $J\Lambda_\varphi(E)$ est inclus dans $\mathcal{D}(h^{1/2})$, et, pour tout x de E, on a :

$$\| Jh^{1/2}J\Lambda_\varphi(x)\|^2 = \varphi(x^*x) = \|\Lambda_\varphi(x)\|^2$$

Il résulte alors de ([5]).lemme 2.3.) que $Jh^{1/2}J = 1$, donc $h = 1$, d'où le lemme.

<u>Lemme 4.1.2.</u> : Soient $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ deux algèbres hilbertiennes à gauche. L'algèbre hilbertienne à droite $\mathfrak{U}_1' \otimes \mathfrak{U}_2'$ est équivalente à $(\mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2)'$.

<u>Démonstration</u> : On notera J_i, S_i, F_i les involutions canoniques associées à $\mathfrak{U}_i$ $(i = 1, 2)$.

Il résulte de ([16] §.11) que l'isométrie canonique associée à $\mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2$ est $J_1 \otimes J_2$; de plus, en appliquant [16], lemme 5.2., on voit que $\mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2$ est dense dans $(\mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2)''$ pour la norme hilbertienne associée à $S_1 \otimes S_2$.

Ainsi, $(J_1 \otimes J_2)(\mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2)$ est dense dans $(J_1 \otimes J_2)(\mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2)''$ pour la norme hilbertienne associée à $F_1 \otimes F_2$; grâce à ([16], corollaire 10.1.), cela signifie que $J_1\mathfrak{U}_1 \otimes J_2\mathfrak{U}_2$ est dense dans $(\mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2)'$ pour la norme hilbertienne associée à $F_1 \otimes F_2$. Il en est de même, à fortiori, de $\mathfrak{U}_1' \otimes \mathfrak{U}_2'$, qui contient $J_1\mathfrak{U}_1 \otimes J_2\mathfrak{U}_2$ ([16], corollaire 10.1.), donc ([16], lemme 5.2.) permet de conclure.

<u>Proposition 4.1.3.</u> : Le quadruplet $(M\hat{}, \Gamma\hat{}, \kappa\hat{}, \varphi\hat{})$ vérifie l'axiome (Kiii)

<u>Démonstration</u> : Soient β, β_1, δ, δ_1 dans $\mathfrak{B}'$, et ω dans $\mathcal{L}_\varphi$. On a :

$$((1 \otimes \hat{\pi}'(\delta_1))\sigma W^*\sigma(\delta \otimes a(\omega)) \mid \beta \otimes \beta_1) =$$

$= (\sigma W^*\sigma(\delta \otimes a(\omega)) \mid (1 \otimes \hat{\pi}'(\delta_1^{\flat}))(\beta \otimes \beta_1))$

$= (\sigma W^*\sigma(\delta \otimes a(\omega)) \mid \beta \otimes \beta_1 \hat{\top} \delta_1^{\flat})$

$= (W^*(a(\omega) \otimes \delta) \mid \beta_1 \hat{\top} \delta_1^{\flat} \otimes \beta)$

$= ((a(\omega) \otimes \delta) \mid W((\beta_1 \hat{\top} \delta_1^{\flat}) \otimes \beta))$

$= (a(\omega) \mid \pi(\beta \hat{\top} \delta^{\flat})(\beta_1 \hat{\top} \delta_1^{\flat}))$ par (3.1.1.c)

$= \langle \Lambda_\varphi^{-1}(\pi(\beta \hat{\top} \delta^{\flat})(\beta_1 \hat{\top} \delta_1^{\flat}))^*, \omega\rangle$ par (1.1.3.b)

$= \langle \Lambda^{-1}(\beta_1 \hat{\top} \delta_1^{\flat})^* \Lambda_\varphi^{-1}(\beta \hat{\top} \delta^{\flat})^*, \omega\rangle$

$= \langle \lambda_*(\Omega_{\delta_1,\beta_1}|M\hat{})\lambda_*(\Omega_{\delta,\beta}|M\hat{}), \omega\rangle$ par (3.1.2.a)

$= \langle \lambda_*((\Omega_{\delta,\beta}|M\hat{}) \hat{*} (\Omega_{\delta_1,\beta_1}|M\hat{})), \omega\rangle$ par (3.3.3.)

$= \langle \lambda(\omega), (\Omega_{\delta,\beta}|M\hat{}) \hat{*} (\Omega_{\delta_1,\beta_1}|M\hat{})\rangle$ par (2.1.10)

$= \langle \Gamma\hat{}(\lambda(\omega)) \mid \Omega_{\delta,\beta} \otimes \Omega_{\delta_1,\beta_1} \rangle$

$= (\Gamma\hat{}(\lambda(\omega))(\delta \otimes \delta_1) \mid \beta \otimes \beta_1)$

Par densité, il en résulte :

$$(1 \otimes \hat{\pi}'(\delta_1))\sigma W^*\sigma(\delta \otimes a(\omega)) = \Gamma\hat{}(\lambda(\omega))(\delta \otimes \delta_1)$$

qui vaut, par continuité, pour tout δ de H_φ, δ_1 de $\mathfrak{B}'$, ω de $\mathcal{L}_\varphi$. Donc, pour δ_1, δ_2 dans $\mathfrak{B}'$, ω dans $\mathcal{L}_\varphi$, δ borné à gauche par rapport à $\mathfrak{B}$ (i.e. dans $\mathcal{F}^* \Lambda_{\hat{\varphi}}(\mathfrak{N}_\varphi\lambda)$), on a :

$$\begin{aligned}(\hat{\pi}' \otimes \hat{\pi}')(\delta_2 \otimes \delta_1)\sigma W^*\sigma(\delta \otimes a(\omega)) &= (\hat{\pi}'(\delta_2) \otimes 1)\Gamma\hat{}(\lambda(\omega))(\delta \otimes \delta_1)\\ &= \Gamma\hat{}(\lambda(\omega))(\hat{\pi}'(\delta_2) \otimes 1)(\delta \otimes \delta_1)\\ &= \Gamma\hat{}(\lambda(\omega))(\hat{\pi}(\delta) \otimes 1)(\delta_2 \otimes \delta_1)\end{aligned}$$

Grâce au lemme 4.1.2., il en résulte que $\sigma W^*\sigma(\delta \otimes a(\omega))$ est borné à gauche par rapport à $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ (i.e. appartient à $(\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{F}^*) \Lambda_{\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}}(\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}})$ cf[4].p.141), et que

4.1.3.1. $\quad (\hat{\pi} \otimes \hat{\pi})(\sigma W^*\sigma(\delta \otimes a(\omega))) = \Gamma\hat{}(\lambda(\omega))(\hat{\pi}(\delta) \otimes 1)$

Ainsi :

$(\varphi\hat{} \otimes \varphi\hat{})((\hat{\pi}(\delta)^* \otimes 1)\Gamma\hat{}(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega))(\hat{\pi}(\delta) \otimes 1)) =$

$= \| \sigma W^*\sigma\delta \otimes a(\omega)\|^2$

$= \|\delta\|^2 \|a(\omega)\|^2$

$= \varphi\hat{}(\hat{\pi}(\delta)\ \hat{\pi}(\delta))\varphi\hat{}(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega))$ $\qquad$ par 3.1.9.

ce qui s'écrit encore, pour ω dans $\mathcal{L}_\varphi$, et x dans $\mathfrak{N}_{\varphi\hat{}}$:

4.1.3.2. $\quad (\varphi\hat{} \otimes \varphi\hat{})((x^* \otimes 1)\Gamma\hat{}(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega))(x \otimes 1)) =$

$= \varphi\hat{}(x^*x)\varphi\hat{}(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega))$.

Ceci nous même à considérer le poids ψ sur $M\hat{}$ défini par :

$$\psi(y) = (\varphi\hat{} \otimes \varphi\hat{})((x^* \otimes 1)\Gamma\hat{}(y)(x \otimes 1)) \qquad (y \in M\hat{}_+)$$

où x appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi\hat{}}$.

La relation 4.1.3.2. implique alors :

$$\psi(y^*y) = \varphi\hat{}(x^*x)\varphi\hat{}(y^*y) \quad \text{pour tout } y \text{ de } \lambda(\mathcal{L}_\varphi)$$

Il en résulte que ψ est fini sur $\lambda(\mathfrak{J}_\varphi^\circ * \mathfrak{J}_\varphi)$ qui est faiblement dense dans $M\hat{}$ (d'après 2.1.6.) ; il est donc semi-fini.

De plus, $\hat\varphi \otimes \hat\varphi$ est normal, ainsi que $\hat\Gamma$ et l'application

$$z \longmapsto (x^* \otimes 1)z(x \otimes 1)$$

de $\hat M \otimes \hat M$ dans elle-même. Donc ψ est un poids normal.

Enfin, pour tout t de R, et y de $\hat M_+$, on a :

$$\begin{aligned}\psi(\sigma_t^{\hat\varphi}(y)) &= (\hat\varphi \otimes \hat\varphi)((x^* \otimes 1)\hat\Gamma(\sigma_t^{\hat\varphi}(y))(x \otimes 1))\\ &= (\hat\varphi \otimes \hat\varphi)((x^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma_t^{\hat\varphi})(\hat\Gamma(y))(x \otimes 1)) \qquad \text{par 3.2.5.}\\ &= (\hat\varphi \otimes \hat\varphi)((x^* \otimes 1)(\hat\Gamma(y))(x \otimes 1))\\ &= \psi(y)\end{aligned}$$

Donc le poids ψ est invariant par $\sigma_t^{\hat\varphi}$.
On peut donc appliquer le lemme 4.1.1. à l'algèbre de von Neumann $\hat M$, munie des poids $\hat\varphi(x^*x)\hat\varphi$ et ψ, avec $E = \lambda(\mathcal{L}_\varphi)$.

En effet, $\Lambda_{\hat\varphi}(E) = \mathfrak{F}\, a(\mathcal{L}_\varphi)$ (cf.3.1.9.) est dense dans $H_{\hat\varphi}$ par (1.1.4.).
Il en résulte :

$$\psi(y) = \hat\varphi(x^*x)\hat\varphi(y) \quad \text{pour tout } y \text{ de } \hat M_+$$

Soit :

$$(\hat\varphi \otimes \hat\varphi)((x^* \otimes 1)\hat\Gamma(y)(x \otimes 1)) = \hat\varphi(x^*x)\hat\varphi(y) \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathfrak{N}_{\hat\varphi} \text{ et } y$$

de $\hat M_+$, ce qui implique l'axiome (Kiii).

Grâce à ce qui précède, le quadruplet $(\hat M, \hat\Gamma, \hat\kappa, \hat\varphi)$ vérifie les axiomes (Ki) à (Kiii) ; on peut donc lui appliquer les résultats du § 2.1. et construire l'isométrie fondamentale $\hat W$ et l'application $\hat\lambda$.

<u>Proposition 4.1.4.</u>

(a) $\hat W = (\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F})(\sigma W^* \sigma)(\mathfrak{F}^* \otimes \mathfrak{F}^*)$

L'isométrie $\hat W$ est donc un opérateur unitaire.

(b) pour tout θ de $\hat M_*$, on a :

$$\begin{aligned}\hat\lambda(\theta) &= \mathfrak{F}\, \pi_\varphi(\lambda_*(\theta \circ \hat\kappa))\mathfrak{F}^*\\ &= \mathfrak{F}\, \pi_\varphi(\kappa(\lambda_*(\theta)))\mathfrak{F}^*\end{aligned}$$

<u>Démonstration</u>

(a) L'opérateur $\hat W$ est en effet défini, d'après 2.1.1. , par :

$$\hat W(\Lambda_{\hat\varphi}(x) \otimes \Lambda_{\hat\varphi}(y)) = \Lambda_{\hat\varphi \otimes \hat\varphi}(\hat\Gamma(y)(x \otimes 1))$$

pour tout x,y de $\mathfrak{N}_{\hat\varphi}$.

En particulier, pour δ dans $\mathfrak{F}^*\Lambda_{\varphi^\wedge}(\mathfrak{N}_{\varphi^\wedge})$, et ω dans $\mathcal{L}_\varphi$, on a :

$$W^\wedge(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F})(\delta \otimes a(\omega)) = \Lambda_{\varphi^\wedge \otimes \varphi^\wedge}(\Gamma^\wedge(\lambda(\omega))\hat{\pi}(\delta) \otimes 1) \qquad \text{par } 3.1.9.$$
$$= (\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F})\sigma W^*\sigma(\delta \otimes a(\omega)) \qquad \text{par } 4.1.2.1.$$

Par densité, il en résulte (a).

(b) D'après (2.1.5.a) et (2.3.6.), on a, pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de $H_{\varphi^\wedge}$,

$$
\begin{aligned}
(\beta \mid \lambda^\wedge(\theta_{\gamma,\alpha})\delta) &= (W^\wedge\alpha \otimes \beta \mid \gamma \otimes \delta) \\
&= ((\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F})(\sigma W^*\sigma)(\mathfrak{F}^* \otimes \mathfrak{F}^*)(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta) \\
&= (\sigma W^*\sigma(\mathfrak{F}^*\alpha \otimes \mathfrak{F}^*\beta) \mid \mathfrak{F}^*\gamma \otimes \mathfrak{F}^*\delta) \\
&= (\mathfrak{F}^*\beta \otimes \mathfrak{F}^*\alpha \mid W(\mathfrak{F}^*\delta \otimes \mathfrak{F}^*\gamma)) \\
&= (\lambda(\omega_{\mathfrak{F}^*\beta,\mathfrak{F}^*\delta})\mathfrak{F}^*\alpha \mid \mathfrak{F}^*\gamma) && \text{par } (2.1.5.a) \\
&= \langle \lambda(\omega_{\mathfrak{F}^*\beta,\mathfrak{F}^*\delta}), \Omega_{\mathfrak{F}^*\alpha,\mathfrak{F}^*\delta} \rangle \\
&= \langle \lambda_*(\Omega_{\mathfrak{F}^*\alpha,\mathfrak{F}^*\gamma}|M^\wedge), \omega_{\mathfrak{F}^*\beta,\mathfrak{F}^*\delta} \rangle \\
&= \langle \lambda_*(\theta_{\alpha,\gamma}), \omega_{\mathfrak{F}^*\beta,\mathfrak{F}^*\delta} \rangle && \text{par } 2.3.6. \\
&= (\pi_\varphi(\lambda_*(\theta_{\alpha,\gamma}))\mathfrak{F}^*\beta \mid \mathfrak{F}^*\delta) \\
&= (\beta \mid \mathfrak{F}\pi_\varphi(\lambda_*(\theta_{\alpha,\gamma}))^*\mathfrak{F}^*\delta)
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\lambda^\wedge(\theta_{\gamma,\alpha}) &= \mathfrak{F}\pi_\varphi(\lambda_*(\theta_{\alpha,\gamma}))^*\mathfrak{F}^* \\
&= \mathfrak{F}\pi_\varphi(\lambda_*(\theta^{\hat{\circ}}_{\alpha,\gamma}))\mathfrak{F}^* && \text{par } 3.5.6. \\
&= \mathfrak{F}\pi_\varphi(\lambda_*(\theta_{\gamma,\alpha} \circ \kappa^\wedge))\mathfrak{F}^* && \text{par } 1.2.2.1. \\
&= \mathfrak{F}\pi_\varphi(\kappa \circ \lambda_*(\theta_{\gamma,\alpha}))\mathfrak{F}^* && \text{par } 3.3.2.
\end{aligned}
$$

d'où le résultat.

<u>Proposition 4.1.5.</u> : Le quadruplet $(M^\wedge, \Gamma^\wedge, \kappa^\wedge, \varphi^\wedge)$ vérifie les axiomes (Kiv) et (Kv) .

<u>Démonstration</u> : Soient $\theta, \theta_1, \theta_2$ dans $M^\wedge_*$, on a :

$$\lambda\hat{}(\theta^{\circ}\hat{}) = \mathfrak{F}\,\pi_{\varphi}(\kappa\lambda_{*}(\theta^{\circ}\hat{}))\,\mathfrak{F}^{*} \qquad \text{par (4.1.4.b)}$$
$$= \mathfrak{F}\,\pi_{\varphi}(\kappa\lambda_{*}(\theta)^{*})\,\mathfrak{F}^{*} \qquad \text{par (3.3.6)}$$
$$= (\mathfrak{F}\,\pi_{\varphi}(\kappa\lambda_{*}(\theta))\,\mathfrak{F}^{*})^{*}$$
$$= \lambda\hat{}(\theta)^{*} \qquad \text{par (4.1.4.b)}$$

d'où la première partie de la proposition, d'après 2.1.7.

D'autre part, on a :

$$\lambda\hat{}(\theta_1 \hat{*} \theta_2) = \mathfrak{F}\,\pi_{\varphi}(\kappa\lambda_{*}(\theta_1 \hat{*} \theta_2))\,\mathfrak{F}^{*} \qquad \text{par (4.1.4.b)}$$
$$= \mathfrak{F}\,\pi_{\varphi}(\kappa(\lambda_{*}(\theta_2)\lambda_{*}(\theta_1)))\,\mathfrak{F}^{*} \qquad \text{par (3.3.3.)}$$
$$= \mathfrak{F}\,\pi_{\varphi}(\kappa(\lambda_{*}(\theta_1))\kappa(\lambda_{*}(\theta_2)))\,\mathfrak{F}^{*}$$
$$= \mathfrak{F}\,\pi_{\varphi}(\kappa(\lambda_{*}(\theta_1)))\,\mathfrak{F}^{*}\,\mathfrak{F}\,\pi_{\varphi}(\kappa(\lambda_{*}(\theta_2)))\,\mathfrak{F}^{*}$$
$$= \lambda\hat{}(\theta_1)\lambda\hat{}(\theta_2) \qquad \text{par (4.1.4.b)}$$

d'où la deuxième partie de la proposition, d'après 2.1.9.

Remarque 4.1.6. : On peut montrer également que le quadruplet ($M\hat{}$, $\Gamma\hat{}$, $\kappa\hat{}$, $\varphi\hat{}$) vérifie la propriété P_2 [7] . Mais nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite.

4.2. Le quadruplet ($M\hat{}$, $\Gamma\hat{}$, $\kappa\hat{}$, $\varphi\hat{}$) est une algèbre de Kac

Dans 4.2. , $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ désigne une algèbre de Kac.

Proposition 4.2.1. : Pour tout t de $\mathbb{R}$, on a $\sigma_t^{\varphi\circ\kappa} = \sigma_t^{\varphi}$; l'opérateur modulaire $\Delta\hat{}$ est affilié au centre de $\pi_{\varphi}(M)$, et est égal à la dérivée de Radon-Nikodym du poids φ par rapport à $\varphi\circ\kappa$, au sens de [14] .

Démonstration : L'égalité $\sigma_t^{\varphi\circ\kappa} = \sigma_t^{\varphi}$, pour tout t de $\mathbb{R}$, résulte du lemme 1.3.8. et de (Kvi). Le théorème 5.4. de [14] fournit alors l'existence d'un unique opérateur h auto-adjoint positif, affilié au centre de $\pi_{\varphi}(M)$ et tel que $\varphi\circ\kappa = \varphi(h.)$ (c'est-à-dire, pour tout x de M_+ , $\varphi\circ\kappa(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} (h_\varepsilon x)$, avec $h_\varepsilon = h(1+\varepsilon h)^{-1}$).

Par ailleurs, on a $\mathcal{D}(h^{1/2}) = \{\xi \in H_\varphi \ ; \ \sup_\varepsilon (h_\varepsilon\xi|\xi) < +\infty\}$, et, si $\xi \in \mathcal{D}(h^{1/2})$, $\|h^{1/2}\xi\|^2 = \sup_\varepsilon (h_\varepsilon\xi|\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}(h_\varepsilon\xi|\xi)$.

Soit x dans $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$; on a

$$(h_\varepsilon \Lambda_\varphi(x) | \Lambda_\varphi(x)) = (\Lambda_\varphi(h_\varepsilon x) | \Lambda_\varphi(x))$$

$$= \varphi(h_\varepsilon x^* x) \rightarrow \varphi\circ\kappa(x^* x) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0 .$$

Donc $\Lambda_\varphi(x)$ appartient à $\mathfrak{D}(h^{1/2})$, et on a :

$$\| h^{1/2}\Lambda_\varphi(x)\|^2 = \varphi\circ\kappa(x^* x)$$

$$= \| \Lambda_\varphi(\kappa(x^*))\|^2$$

$$= \| F\hat{}\,\Lambda_\varphi(x)\|^2 \quad \text{d'après 2.3.2.1.}$$

$$= \| J\hat{}\,(\Delta\hat{}\,)^{-1/2}\Lambda_\varphi(x)\|^2$$

$$= \| (\Delta\hat{}\,)^{-1/2}\Lambda_\varphi(x)\|^2$$

Or, d'après 3.1.2.(b), $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa})$ est un domaine essentiel pour $F\hat{}$, donc pour $\Delta\hat{}^{-1/2}$; d'autre part, 3.1.4. implique que $h^{1/2}$ et $\Delta\hat{}^{-1/2}$ commutent. Il en résulte donc, par [5] , lemme 2.3., que $h^{1/2} = \Delta\hat{}^{-1/2}$, et donc $h = \Delta\hat{}^{-1}$; l'opérateur $\Delta\hat{}$ est donc affilié au centre de $\pi_\varphi(M)$, et on a $\varphi\circ\kappa(\Delta\hat{}\,.) = \varphi$, d'où la proposition.

Théorème 4.2.2. : Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac. Le quadruplet $(M\hat{}, \Gamma\hat{}, \kappa\hat{}, \varphi\hat{}\,)$ est alors une algèbre de Kac ; on le notera $\mathbb{K}\hat{}$.

Démonstration : Compte tenu de 2.3.3., 3.3.4. et 4.1. , il nous reste à démontrer que $(M\hat{}, \Gamma\hat{}, \kappa\hat{}, \varphi\hat{}\,)$ vérifie l'axiome (Kvi).

D'après 4.3.1., pour tout t réel, $(\Delta\hat{}\,)^{it}$ appartient au centre de $\pi_\varphi(M)$. On a donc, pour tout x de $M\hat{}$:

$$\kappa\hat{}\,(\sigma_t^{\varphi\hat{}}(x)) = J\,\sigma_t^{\varphi\hat{}}(x)^* J \quad \text{d'après 3.3.2.}$$

$$= J\,(\Delta\hat{}\,)^{it} x^* (\Delta\hat{}\,)^{-it} J$$

$$= (\Delta\hat{}\,)^{-it} J\, x^* J (\Delta\hat{}\,)^{it} \quad \text{d'après [2] 4.10}$$

$$= (\Delta\hat{}\,)^{-it} \kappa\hat{}\,(x) (\Delta\hat{}\,)^{it} \quad \text{d'après 3.3.2.}$$

$$= \sigma_{-t}^{\varphi\hat{}}(\kappa\hat{}\,(x))$$

d'où le théorème.

Définition 4.2.3. : Soit $\mathbb{K}$ une algèbre de Kac. On dira que l'algèbre de Kac $\mathbb{K}\hat{}$ (cf. 4.2.2.) est l'algèbre de Kac duale de $\mathbb{K}$.

Proposition 4.2.4. : Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac, k un réel strictement positif ; alors $(k\,\mathbb{K})\hat{} = k^{-1}(\mathbb{K}\hat{})$.

Démonstration : Du fait que pour tout x de $\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{N}_{k\varphi}$, on ait (cf 1.3.4) $\Lambda_{k\varphi}(x) = k^{1/2}\Lambda_\varphi(x)$, résulte, en utilisant 2.1.1. que $W_{k\varphi} = W_\varphi$; les représentations $\lambda_{k\varphi}$ et λ_φ sont donc égales, par 2.1.5.(a), d'où l'égalité des algèbres de von Neumann duales, puis celles des coproduits duaux (3.2.1.) et des involutions duales (3.3.2. , 1$^{\text{ère}}$ égalité).

Grâce à 3.1.9., le poids dual $(k\varphi)\hat{}$ vérifie, pour tout ω de $\mathcal{L}_{k\varphi} = \mathcal{L}_\varphi$

$$(k\varphi)\hat{}(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega)) = \|a_{k\varphi}(\omega)\|^2$$

$$= \|k^{-1/2}a(\omega)\|^2 \qquad \text{par 1.3.4.}$$

$$= k^{-1}\ \|a(\omega)\|^2$$

$$= k^{-1}\hat{\varphi}(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega)) \qquad \text{par 3.1.9.}$$

D'autre part, l'opérateur modulaire de $(k\varphi)\hat{}$ est la dérivée de Radon-Nikodym de $k\varphi$ par rapport à $k(\varphi\circ\kappa)$ (cf.4.2.1.). Il est donc égal à $\hat{\Delta}$. Les poids $(k\varphi)\hat{}$ et $\hat{\varphi}$ ont donc de mêmes groupes d'automorphismes modulaires, en particulier $(k\varphi)\hat{}$ est invariant par $\sigma^{\hat{\varphi}}$. Comme $\Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\mathcal{L}_\varphi))$ est dense dans $H_{\hat{\varphi}}$ **par 3.1.9.**, on en déduit le résultat, en utilisant 4.1.1.

Proposition 4.2.5. : Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac. On a :

(a) $(\sigma_t^\varphi \otimes 1)\Gamma = (1 \otimes \sigma_t^\varphi)\Gamma = \Gamma\,\sigma_t^\varphi$

(b) $\sigma_t^{\varphi\otimes\varphi}\,\Gamma = \Gamma\,\sigma_{2t}^\varphi$

(c) $\Gamma(M)$ est une sous algèbre $\sigma_t^{\varphi\otimes\varphi}$ une invariante de $M \otimes M$.

Démonstration : (a) Soit x dans M . On a :

$$(\sigma_t^\varphi \otimes 1)\Gamma(x) = \varsigma[(1\otimes\sigma_t^\varphi)\varsigma\Gamma(x)]$$

$$= \varsigma[(1\otimes\sigma_t^\varphi)(\kappa\otimes\kappa)\Gamma(\kappa(x))] \qquad \text{par (1.2.1.3.)}$$

$$= \varsigma[(\kappa\otimes\kappa)(1\otimes\sigma_{-t}^\varphi)\Gamma(\kappa(x))] \qquad \text{par (Kvi)}$$

$$= \varsigma(\kappa\otimes\kappa)\Gamma(\sigma_{-t}^\varphi(\kappa(x))) \qquad \text{par (2.2.5.c)}$$

$$= \varsigma(\kappa\otimes\kappa)\Gamma(\kappa\sigma_t^\varphi(x)) \qquad \text{par (Kvi)}$$

$$= \Gamma(\sigma_t^\varphi(x)) \qquad \text{par (1.2.1.3.)}$$

On en déduit le résultat a) grâce à (2.2.5.c).

(b) Comme $\sigma_t^{\varphi\otimes\varphi} = \sigma_t^{\varphi} \otimes \sigma_t^{\varphi}$, le résultat (b) se déduit trivialement de (a).

(c) Se déduit trivialement de (b).

4.3. Algèbre de Kac biduale

Soit $\mathbb{K}=(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac ; on peut appliquer à $\hat{\mathbb{K}}$ tous les résultats relatifs à $\mathbb{K}$; en particulier nous allons étudier $\hat{\hat{\mathbb{K}}}$, algèbre de Kac duale de $\hat{\mathbb{K}}$

Lemme 4.3.1. : On a : $\mathcal{F}^* \hat{a}(\mathcal{L}_{\hat{\varphi}}) \subset \Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)$.

Plus précisément , pour tout θ de $\mathcal{L}_{\hat{\varphi}}$, on a :

$$\pi(\mathcal{F}^* \hat{a}(\theta)) = \mathcal{F}^* \hat{\lambda}(\theta) \mathcal{F}$$

Démonstration : Soient α et γ dans $\mathfrak{U}'$, et θ dans $\mathcal{L}_{\hat{\varphi}}$. On a :

$$\begin{aligned}
(\pi'(\alpha)\mathcal{F}^* \hat{a}(\theta) \mid \gamma) &= (\mathcal{F}^* \hat{a}(\theta) \mid \pi'(\alpha^\flat)\gamma) \\
&= (\hat{a}(\theta) \mid (\gamma \top \alpha^\flat)) \\
&= \langle \Lambda_{\hat{\varphi}}^{-1}(\mathcal{F}(\gamma \top \alpha^\flat))^* , \theta\rangle && \text{par (2.3.5.) et (1.1.3.b)} \\
&= \langle \hat{\pi}(\gamma \top \alpha^\flat)^*, \theta\rangle \\
&= \langle \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})^* , \theta\rangle && \text{par 2.3.5.3.} \\
&= \langle \lambda(\omega_{\gamma,\alpha}^\circ) , \theta\rangle && \text{par 2.1.7.} \\
&= \langle \lambda(\omega_{\alpha,\gamma}\circ\kappa) , \theta\rangle && \text{par 1.2.2.1.} \\
&= \langle \lambda_*(\theta) , \omega_{\alpha,\gamma}\circ\kappa\rangle && \text{par 2.1.10} \\
&= \langle \kappa(\lambda_*(\theta)) , \omega_{\alpha,\gamma}\rangle \\
&= (\pi_\varphi(\kappa(\lambda_*(\theta)))\alpha \mid \gamma) \\
&= (\mathcal{F}^* \hat{\lambda}(\theta) \mathcal{F} \alpha \mid \gamma) && \text{par (4.1.3.b)}
\end{aligned}$$

Donc on trouve, pour α dans $\mathfrak{U}'$ et θ dans $\mathcal{L}_{\hat{\varphi}}$:

$$\pi'(\alpha) \mathcal{F}^* \hat{a}(\theta) = \mathcal{F}^* \hat{\lambda}(\alpha) \mathcal{F} \alpha \quad .$$

Donc $\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta)$ est borné à gauche relativement à $\mathfrak{U}$, et on a :

$$\pi(\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta)) = \mathcal{F}^*\lambda\hat{}(\theta)\mathcal{F}$$

<u>Lemme 4.3.2.</u> : On a $\mathcal{F}^*a\hat{}(\mathcal{L}_{\varphi\hat{}} \cap \mathcal{L}^{\hat{o}}_{\varphi\hat{}}) \subset \mathfrak{U}$.

Plus précisément, pour tout θ de $\mathcal{L}_{\varphi\hat{}} \cap \mathcal{L}^{\hat{o}}_{\varphi\hat{}}$, on a :

$$(\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta))^\# = \mathcal{F}^*a\hat{}(\theta^{\hat{o}})$$

<u>Démonstration</u> : Soit θ dans $\mathcal{L}_{\varphi\hat{}} \cap \mathcal{L}^{\hat{o}}_{\varphi\hat{}}$. On a, d'après le lemme précédent

$$\begin{aligned}\pi(\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta))^* &= (\mathcal{F}^*\lambda\hat{}(\theta)\mathcal{F})^* \\ &= \mathcal{F}^*\lambda\hat{}(\theta^{\hat{o}})\mathcal{F} \\ &= \pi(\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta^{\hat{o}}))\end{aligned}$$

Donc, par ([2], lemme 2.4.), $\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta)$ appartient à $\mathfrak{U}$, et on a :

$$(\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta))^\# = \mathcal{F}^*a\hat{}(\theta^{\hat{o}})$$

<u>Proposition 4.3.3.</u> : On construit $\mathfrak{B}\hat{} = a\hat{}(\mathbb{A}^{\hat{}}_*)$ comme en 2.3. . Alors $\mathcal{F}^*\mathfrak{B}\hat{}$ est une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{U}$, dense dans H_φ, isomorphe à $\mathfrak{B}\hat{}$.

<u>Démonstration</u> : Grâce à 2.3.1. , on voit que $\mathfrak{B}\hat{}$ est dense dans $H_{\varphi\hat{}}$. Donc $\mathcal{F}^*\mathfrak{B}\hat{}$ est dense dans H_φ. Grâce au lemme 4.3.2. , on voit que $\mathcal{F}^*\mathfrak{B}\hat{}$ est un sous ensemble de $\mathfrak{U}$, stable par $\#$. De plus, on a, pour θ_1 et θ_2 dans $\mathbb{A}^{\hat{}}_*$

$$\begin{aligned}\pi(\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta_1))\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta_2) &= \mathcal{F}^*\lambda\hat{}(\theta_1)a\hat{}(\theta_2) && \text{par 4.3.1.} \\ &= \mathcal{F}^*a\hat{}(\theta_1 * \theta_2) && \text{par 2.1.9.1.}\end{aligned}$$

Donc, si θ_1 et θ_2 appartiennent à $\mathbb{A}^{\hat{}}_*$,

4.3.3.1. $$(\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta_1))\ \mathrm{T}\ (\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta_2)) = \mathcal{F}^*a\hat{}(\theta_1 * \theta_2)$$

Le sous ensemble $\mathcal{F}^*\mathfrak{B}\hat{}$ est donc aussi stable par T. C'est donc une sous algèbre involutive de $\mathfrak{U}$.

Notons $\mathrm{T}\hat{}\hat{}$ et $\#\hat{}\hat{}$ les opérations définies sur $\mathfrak{B}\hat{}$ en 2.3.1. Les résultats 4.3.2. et 4.3.3.1. peuvent alors s'écrire, pour θ, θ_1, θ_2 dans $\mathbb{A}^{\hat{}}_*$

$$(\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta_1))\mathrm{T}(\mathcal{F}^*a\hat{}(\theta_2)) = \mathcal{F}^*[(a\hat{}(\theta_1))\,\mathrm{T}\hat{}\hat{}\,(a\hat{}(\theta_2))]$$

$$(\mathfrak{F}^{*}a\hat{}(\theta))^{\#} = \mathfrak{F}^{*}[a\hat{}(\theta)^{\#\hat{}\hat{}}]$$

Donc $\mathfrak{F}^{*}\mathfrak{B}\hat{}$ est une sous algèbre hilbertienne à gauche de $\mathfrak{U}$, isomorphe à $\mathfrak{B}\hat{}$ (par [16], lemme 5.1.) .

Proposition 4.3.4.

(a) L'algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{F}^{*}\mathfrak{B}\hat{}$ est équivalente à $\mathfrak{U}$ (aù sens de [16], définition 5.1.).

(b) L'opérateur modulaire Δ est affilié au centre de $M\hat{}$.

Démonstration : (a) D'après ([16], lemme 5.2.), il suffit de montrer que l'opérateur S est la fermeture de sa restriction à $\mathfrak{F}^{*}\mathfrak{B}\hat{}$. Or, $\mathfrak{F}^{*}S\hat{}\hat{}\mathfrak{F}$ est la fermeture de la restriction de S à $\mathfrak{F}^{*}\mathfrak{B}\hat{}$. D'où, $\mathfrak{F}^{*}S\hat{}\hat{}\mathfrak{F} \subset S$.

Soit ξ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{F}^{*}S\hat{}\hat{}\mathfrak{F})$. On a :

$$\mathfrak{F}^{*}S\hat{}\hat{}\mathfrak{F}\ \xi = S\xi$$

donc $\|\mathfrak{F}^{*}J\hat{}\hat{}(\Delta\hat{}\hat{})^{1/2}\mathfrak{F}\ \xi\| = \|J\Delta^{1/2}\xi\|$, soit :

$$\|\mathfrak{F}^{*}(\Delta\hat{}\hat{})^{1/2}\mathfrak{F}\ \xi\| = \|\Delta^{1/2}\xi\|$$

Comme $\Delta\hat{}\hat{}$ est affilié au centre de $\pi_{\varphi\hat{}}(M\hat{})$, d'après 4.2.1., l'opérateur $\mathfrak{F}^{*}(\Delta\hat{}\hat{})^{1/2}\mathfrak{F}$ est affilié au centre de $M\hat{}$.

D'autre part, par 2.2.2., Δ est affilié au commutant de $M\hat{}$

Donc, par [5], lemme 2.3. , on a :

$$\Delta^{1/2} = \mathfrak{F}^{*}(\Delta\hat{}\hat{})^{1/2}\mathfrak{F}$$

Donc Δ est affilié au centre de $M\hat{}$; de plus, on voit que :

$$\mathcal{D}(\mathfrak{F}^{*}S\hat{}\hat{}\mathfrak{F}) = \mathcal{D}(\mathfrak{F}^{*}(\Delta\hat{}\hat{})^{1/2}\mathfrak{F}) = \mathcal{D}(\Delta^{1/2}) = \mathcal{D}^{\#}$$

et donc $$S = \mathfrak{F}^{*}S\hat{}\hat{}\mathfrak{F}$$

d'où le résultat (a).

Le résultat (b) a été démontré au cours de la démonstration de (a).

Définition 4.3.5. : Soient $\mathbb{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \kappa_1, \varphi_1)$ et $\mathbb{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \kappa_2, \varphi_2)$ deux algèbres de Kac. On dira que u est un isomorphisme normalisé de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$ si u est un isomorphisme de W^*-algèbres de M_1 dans M_2 tel que :

$$\Gamma_2 \circ u = (u \otimes u) \circ \Gamma_1$$

$$\kappa_2 \circ u = u \circ \kappa_1$$

$$\varphi_2 \circ u = \varphi_1$$

Théorème 4.3.6. : L'application $\Phi_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}\hat{}\hat{}$ définie par :

$$\Phi_{\mathbb{K}}(x) = \mathfrak{F}\, \pi_\varphi(x)\, \mathfrak{F}^*$$

est un isomorphisme normalisé de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}\hat{}\hat{}$.

Démonstration : Par (4.3.4.a) , $\mathfrak{F}^*$ est un isomorphisme d'algèbres hilbertiennes à gauche entre $(\mathfrak{B}\hat{})''$ et $\mathfrak{U}$. On en déduit que les algèbres de von Neumann engendrées , $M\hat{}\hat{}$ et $\pi_\varphi(M)$, vérifient :

$$M\hat{}\hat{} = \mathfrak{F}\, \pi_\varphi(M)\, \mathfrak{F}^* \text{ . Donc } \Phi_{\mathbb{K}} \text{ est bien définie de M dans } M\hat{}\hat{}.$$

On en déduit aussi que les poids canoniquement associés, sur $M_+\hat{}\hat{}$ et $\pi_\varphi(M)_+$, respectivement à $(\mathfrak{B}\hat{})''$ et $\mathfrak{U}$ sont reliés par la relation, pour tout x de $M_+\hat{}\hat{}$

$$\varphi\hat{}\hat{}(x) = \varphi(\mathfrak{F}\, x\, \mathfrak{F}^*)$$

D'autre part, on a, pour tout x de M :

$$\begin{aligned}
\Gamma\hat{}\hat{}(\Phi_{\mathbb{K}}(x)) &= \sigma W\hat{}^*(\Phi_{\mathbb{K}}(x) \otimes 1)W\hat{}\sigma && \text{par 3.2.1.}\\
&= \sigma(\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F})(\sigma W\sigma)(\mathfrak{F}^* \otimes \mathfrak{F}^*)(\Phi_{\mathbb{K}}(x) \otimes 1)(\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F})(\sigma W^*\sigma)(\mathfrak{F}^* \otimes\mathfrak{F}^*)\sigma && \text{par (4.1.4.a)}\\
&= (\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F})W\sigma(\pi_\varphi(x) \otimes 1)\sigma W^*(\mathfrak{F}^* \otimes \mathfrak{F}^*) && \text{par définition de } \Phi_{\mathbb{K}}\\
&= (\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F})W(1 \otimes \pi_\varphi(x))W^*(\mathfrak{F}^* \otimes \mathfrak{F}^*)\\
&= (\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F})(\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma(x))(\mathfrak{F}^* \otimes \mathfrak{F}^*) && \text{par (2.2.5.b)}\\
&= (\Phi_{\mathbb{K}} \otimes \Phi_{\mathbb{K}})(\Gamma(x)) && \text{par définition de } \Phi_{\mathbb{K}}
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\kappa\hat{}\hat{}(\Phi_{\mathbb{K}}(x)) &= J\hat{}\Phi_{\mathbb{K}}(x^*)J\hat{} && \text{par 3.3.2.}\\
&= J\hat{}\,\mathfrak{F}\, \pi_\varphi(x^*)\, \mathfrak{F}^* J\hat{}\\
&= \mathfrak{F}\, J\hat{}\pi_\varphi(x)^* J\hat{}\, \mathfrak{F}^* && \text{par l'abus de notation signalé en 2.3.4.}\\
&= \mathfrak{F}\, \pi_\varphi(\kappa(x))\, \mathfrak{F}^* && \text{par (3.1.5.a)}\\
&= \Phi_{\mathbb{K}}(\kappa(x)) && \text{par définition de } \Phi_{\mathbb{K}}
\end{aligned}$$

L'isomorphisme $\Phi_{\mathbb{K}}$ vérifie donc bien la définition 4.3.5.

Proposition 4.3.7. : Soit θ dans $M_*^\wedge$; on a :

$$\Phi_{\mathbb{K}}(\kappa(\lambda_*(\theta))) = \lambda^\wedge(\theta)$$

Cela résulte de 4.1.3.(b) et de la définition de $\Phi_{\mathbb{K}}$.

Corollaire 4.3.8. : La représentation de Fourier λ est injective.

Démonstration : D'après 2.2.6., λ_* est injective. Donc $\lambda^\wedge$ aussi par 4.3.7. En remplaçant $\mathbb{K}$ par $\mathbb{K}^\wedge$, on en déduit que λ est injective.

4.3.9. Regroupons certaines propriétés des chapitres 1 à 4

Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac, $\mathbb{K}^\wedge = (M^\wedge, \Gamma^\wedge, \kappa^\wedge, \varphi^\wedge)$ l'algèbre de Kac duale. Identifions M à $M_\varphi(M)$ par π_φ, H_φ à $H_{\hat\varphi}$ par $\mathcal{F}$, donc $M^\wedge$ à $\pi_{\varphi^\wedge}(M^\wedge)$ et $M^{\wedge\wedge}$ à M par $\Phi_{\mathbb{K}}$.

Alors :

- il existe un opérateur unitaire W dans $M \otimes M^\wedge$ qui vérifie :

$$W(\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(y)) = \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(y)(x \otimes 1)) \qquad (x,y \in \mathfrak{N}_\varphi)$$

$$W^* = (J^\wedge \otimes J)W(J^\wedge \otimes J)$$

$$(W \otimes 1)(1 \otimes W) = (1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)$$

$$\Gamma(x) = W^*(1 \otimes x)W \qquad (x \in M)$$

$$W^\wedge = \sigma W^* \sigma$$

- il existe une représentation injective λ de l'algèbre de Banach involutive M_* , d'image faiblement dense dans $M^\wedge$, telle que :

$$\lambda(\omega)a(\omega') = a(\omega * \omega') \qquad (\omega \in M_* \ , \ \omega' \in \mathfrak{I}_\varphi)$$

$$(W(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta) = (\beta \mid \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta) \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta \in H_\varphi)$$

$$\lambda(\omega \circ \kappa) = \kappa^\wedge(\lambda(\omega)) \qquad (\omega \in M_*)$$

$$a(\omega) = \Lambda_{\varphi^\wedge}(\lambda(\omega)) \qquad (\omega \in \mathcal{L}_\varphi)$$

$$\kappa(\lambda_*(\theta)) = \lambda^\wedge(\theta) \qquad (\theta \in M_*^\wedge)$$, où λ_* est la transposée de λ .

- l'involution J , l'opérateur modulaire Δ , le groupe d'automorphismes modulaires σ_t^{φ} vérifient :

$$Jx^*J = \kappa\hat{}(x) \qquad (x \in M\hat{})$$

Δ est affilié au centre de $M\hat{}$; c'est la dérivée de Radon-Nikodym de $\varphi\hat{}$ par rapport à $\varphi\hat{}\circ \kappa\hat{}$

$$\Gamma \circ \sigma_t^{\varphi} = (1 \otimes \sigma_t^{\varphi}) \circ \Gamma = (\sigma_t^{\varphi} \otimes 1) \circ \Gamma \qquad (t \in R)$$

Remarque 4.3.10. : Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac. Il résulte de (Ki), (Kii), (Kiv), (Kvi) et 4.2.5.(a) que le quadruplet $(M, \Gamma, \kappa', \varphi)$ (où κ' désigne l'application de M dans M définie par $\kappa'(x) = \kappa(x)^*$, pour tout x de M) vérifie les axiomes de [22] .

Nous ne disposons pas d'assez d'éléments pour nous prononcer sur la réciproque.

5 LES $\mathcal{K}$-MORPHISMES

5.1. Définition et premières propriétés des $\mathcal{K}$-morphismes

Définition 5.1.1. : Soient M_1 et M_2 deux W^*-algèbres et u un morphisme normal de M_1 dans M_2. On notera $1-R_u$ le générateur de l'idéal Ker_u ; ainsi R_u appartient au centre de M_1.

Définition 5.1.2. : Soient $\mathbb{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \kappa_1, \varphi_1)$ et $\mathbb{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \kappa_2, \varphi_2)$ deux algèbres de Kac. On appelle $\mathcal{K}$-morphisme de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$ un morphisme normal u de M_1 dans M_2 tel que $u(1) = 1$ et :

(Mi) $\Gamma_2 u = (u \otimes u)\,\Gamma_1$,

(Mii) $\kappa_2 u = u\kappa_1$,

(Miii) il existe un nombre réel strictement positif k_u tel que $\varphi_2(u(x)) = k_u\varphi_1(R_u x)$ pour tout x de M_1^+ ,

(Miv) $u(M_1)$ est invariant par $\sigma_t^{\varphi_2}$ pour tout t de $\mathbb{R}$.

On appellera k_u le coefficient de u ; on dira que u est normalisé s'il est de coefficient égal à 1.

Remarques 5.1.3. : (a) Les isomorphismes normalisés définis en 4.3.5. sont les $\mathcal{K}$-morphismes normalisés bijectifs.

(b) L'axiome (Miii) entraîne que la restriction de φ_2 à $u(M_1)$ est un poids semi-fini ; nous le noterons $\tilde{\varphi}_2$. De plus, pour x dans $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$, on a $R_u x$ dans $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$, et donc, grâce à (Miii) :

$$u(x) \in \mathfrak{N}_{\varphi_2} \cap u(M_1) = \mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_2} .$$

Réciproquement, supposons que $u(x)$ appartienne à $\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_2}$. D'après (Miii), cela implique que $R_u x$ appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$, donc $u(x) = u(R_u x)$ appartient à $u(\mathfrak{N}_{\varphi_1})$. Finalement :

$$u(\mathfrak{N}_{\varphi_1}) = \mathfrak{N}_{\varphi_2} \cap u(M_1) = \mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_2}$$

d'où

$$u(\mathfrak{M}_{\varphi_1}^+) = \mathfrak{M}_{\varphi_2}^+ \cap u(M_1) = \mathfrak{M}_{\tilde{\varphi}_2}^+$$

et, par linéarité :

$$u(\mathfrak{M}_{\varphi_1}) = \mathfrak{M}_{\varphi_2} \cap u(M_1) = \mathfrak{M}_{\vartheta_2}$$

(c) Soient N une algèbre de von Neumann, φ un poids normal, semi-fini, fidèle sur N, P une sous-algèbre de von Neumann de N telle que $\sigma_t^\varphi(P) = P$ pour tout t de R et que la restriction de φ à P^+ soit un poids semi-fini. Alors, le théorème du §3 de [18] assure qu'il existe une unique espérance conditionnelle E, normale, fidèle de N sur P telle que $\varphi(E(x)) = \varphi(x)$ pour tout x de $\mathfrak{M}_\varphi^+$, d'où, par linéarité, pour tout x de $\mathfrak{M}_\varphi$

Soit x dans $\mathfrak{M}_\varphi$; on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma_{-t}^\varphi(E(\sigma_t^\varphi(x)))) &= \varphi(E(\sigma_t^\varphi(x))) \\ &= \varphi(\sigma_t^\varphi(x)) \quad \text{car } \mathfrak{M}_\varphi \text{ est stable par } \sigma_t^\varphi \\ &= \varphi(x)\end{aligned}$$

d'où, grâce à l'unicité de l'espérance conditionnelle :

$$E\,\sigma_t^\varphi = \sigma_t^\varphi\,E$$

Cela implique, en particulier, que le poids $\varphi \circ E$ est invariant par σ_t^φ pour tout t, et, en appliquant [14], théorème 5.9., que $\varphi \circ E = \varphi$.

(d) Il est clair que l'axiome (Miv) permet d'appliquer la remarque précédente à M_2 et $u(M_1)$. Dans ce cas, on notera E_u l'espérance conditionnelle, normale, fidèle de M_2 sur $u(M_1)$.

<u>Lemme 5.1.4.</u> : Soient deux algèbres de Kac $\mathbb{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \kappa_1, \varphi_1)$ et $\mathbb{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \kappa_2, \varphi_2)$ et u un morphisme normal de M_1 dans M_2 tel que $u(1) = 1$ et vérifiant (Mi) et (Mii), on a :

(a) $\Gamma_1(R_u) \geq R_u \otimes R_u$

(b) $\kappa_1(R_u) = R_u$

<u>Démonstration</u> : On a successivement :

$$\begin{aligned}(u \otimes u)(\Gamma_1(R_u)) &= \Gamma_2(u(R_u)) \qquad \text{d'après (Mi)} \\ &= \Gamma_2(1) \\ &= 1 \otimes 1\end{aligned}$$

donc $(u \otimes u)(\Gamma_1(R_u) - 1 \otimes 1) = 0$

soit $(R_u \otimes R_u)(\Gamma_1(R_u) - 1 \otimes 1) = 0$ par définition de R_u,

puis $(R_u \otimes R_u)\Gamma_1(R_u) = R_u \otimes R_u$ d'où (a).

De la même manière :

$$\begin{aligned} u(\kappa_1(R_u)) &= \kappa_2(u(R_u)) && \text{d'après (Mii)} \\ &= \kappa_2(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où $\kappa_1(R_u) \geq R_u$. Comme κ_1 est involutif , on en déduit (b).

<u>Lemme 5.1.5.</u> : Soient $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac, R un projecteur du centre de M tel que $\Gamma(R) \geq R \otimes R$ et $\kappa(R) = R$. On a :

$$\Gamma(R)(R \otimes 1) = \Gamma(R)(1 \otimes R) = R \otimes R$$

et $(1 \otimes \pi_\varphi(R))W(1 \otimes \pi_\varphi(R)) = (\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W = W(\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))$

<u>Démonstration</u> : Dans le calcul ci-dessous, nous utiliserons à plusieurs reprises le fait que l'on a $J\pi_\varphi(R)J = \pi_\varphi(R)$ car R appartient au centre de M ,

et $\hat{J}\pi_\varphi(R)\hat{J} = \pi_\varphi(R)$ d'après 3.1.5.(a) car R est invariant par κ .

Nous avons alors successivement :

$$\begin{aligned} \pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R) &= (\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))(\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma(R)) && \text{par hypothèse} \\ &= (\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W(1 \otimes \pi_\varphi(R))W^* && \text{d'après 2.2.5.(b)} \\ &= (\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W(1 \otimes \pi_\varphi(R))(\hat{J} \otimes J)W(\hat{J} \otimes J) && \text{d'après 3.1.5.(b)} \\ &= (\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W(\hat{J} \otimes J)(1 \otimes \pi_\varphi(R))W(\hat{J} \otimes J) \\ &= (\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))(\hat{J} \otimes J)W^*(1 \otimes \pi_\varphi(R))W(\hat{J} \otimes J) && \text{d'après 3.1.5.(b)} \\ &= (\hat{J} \otimes J)(\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W^*(1 \otimes \pi_\varphi(R))W(\hat{J} \otimes J) \end{aligned}$$

d'où, en composant cette égalité à droite et à gauche par $\hat{J} \otimes J$:

$$\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R) = (\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W^*(1 \otimes \pi_\varphi(R))W$$

donc :

$$(\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W^* = (\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W^*(1 \otimes \pi_\varphi(R))$$

puis

$$W(\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R)) = (1 \otimes \pi_\varphi(R))W(\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))$$

$$= (\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W(1 \otimes \pi_\varphi(R)) \quad \text{d'après 2.1.1.}$$

$$= (\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W$$

d'après la deuxième égalité du calcul ci-dessus, multipliée à droite par W.

Or , $(\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma(R)(R \otimes 1) = W(1 \otimes \pi_\varphi(R))W^*(\pi_\varphi(R) \otimes 1)$ d'après 2.2.5.(b)

$$= W(\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W^* \quad \text{d'après 2.1.1.}$$

$$= \pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R) .$$

Et par ailleurs :

$$R \otimes R = \varsigma(\kappa \otimes \kappa)(R \otimes R)$$

$$= \varsigma(\kappa \otimes \kappa)(\Gamma(R)(R \otimes 1)) \quad \text{d'après ce qui précède}$$

$$= \varsigma(\kappa \otimes \kappa)(\Gamma(R))\ \varsigma(\kappa \otimes \kappa)(R \otimes 1)$$

$$= \Gamma(\kappa(R))(1 \otimes R) \quad \text{d'après 1.2.1.3.}$$

$$= \Gamma(R)(1 \otimes R)$$

On en déduit que :

$$\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R) = (1 \otimes \pi_\varphi(R))W(1 \otimes \pi_\varphi(R))W^* \quad \text{d'après 2.2.5.(b)}$$

d'où

$$(\pi_\varphi(R) \otimes \pi_\varphi(R))W = (1 \otimes \pi_\varphi(R))W(1 \otimes \pi_\varphi(R))$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

5.2. Algèbres de Kac réduites

Définitions 5.2.1. Soient $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac et R un projecteur du centre de M tel que :

$$\Gamma(R) \geq R \otimes R$$

$$\kappa(R) = R .$$

On notera $\mathbb{K}_R$ le quadruplet $(M_R, \Gamma_R, \kappa_R, \varphi_R)$ où :

(1) M_R est l'algèbre réduite de M par R ; on notera r la surjection canonique de M sur M_R.

(2) $\Gamma_R(r(x)) = (r \otimes r)(\Gamma(x))$ pour tout x de M.

(3) $\kappa_R(r(x)) = r(\kappa(x))$ pour tout x de M.

(4) φ_R est le poids réduit de φ par R ([4] , définition 3.2.4.).

Lemme 5.2.2. : L'application $\Lambda_{\varphi_R}(r(x)) \to \Lambda_\varphi(Rx)$ définie pour x dans $\mathfrak{N}_\varphi$ se prolonge en une isométrie de H_{φ_R} dans H_φ que l'on notera I_R.

On a : (a) $I_R^*\Lambda_\varphi(x) = \Lambda_{\varphi_R}(r(x))$ pour tout x de $\mathfrak{N}_\varphi$.

(b) $I_R I_R^* = \pi_\varphi(R)$

(c) $\pi_\varphi(x) I_R = I_R \pi_{\varphi_R}(r(x))$ pour tout x dans M.

(d) $\omega_{I_R\gamma, I_R\alpha} = \omega_{\gamma,\alpha} \circ r$ pour tout γ et α dans H_{φ_R}.

(e) si ω appartient à $\mathcal{L}_{\varphi_R}$, on a $\omega \circ r \in \mathcal{L}_\varphi$ et $a(\omega \circ r) = I_R a(\omega)$.

Démonstration : Pour tous x, y de $\mathfrak{N}_\varphi$, nous avons :

$$\varphi_R(r(y)^* r(x)) = \varphi(Ry^*x)$$

donc $r(x)$ et $r(y)$ appartiennent à $\mathfrak{N}_{\varphi_R}$, et :

$$(\Lambda_{\varphi_R}(r(x)) \mid \Lambda_{\varphi_R}(r(y))) = (\Lambda_\varphi(Rx) \mid \Lambda_\varphi(Ry))$$

d'où l'existence d'une isométrie I_R définie par :

$$I_R \Lambda_{\varphi_R}(r(x)) = \Lambda_\varphi(Rx) = \pi_\varphi(R)\Lambda_\varphi(x) \qquad \text{pour } x \text{ dans } \mathfrak{N}_\varphi.$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}(\Lambda_{\varphi_R}(r(x)) \mid \Lambda_{\varphi_R}(r(y))) &= (\Lambda_\varphi(x) \mid \Lambda_\varphi(Ry)) \\ &= (\Lambda_\varphi(x) \mid I_R\Lambda_{\varphi_R}(r(y))) \\ &= (I_R^*\Lambda_\varphi(x) \mid \Lambda_{\varphi_R}(r(y)))\end{aligned}$$

d'où (a) par densité.

Il en résulte que, pour tout x de $\mathfrak{N}_\varphi$:

$$I_R I_R^* \Lambda_\varphi(x) = I_R \Lambda_{\varphi_R}(r(x)) = \pi_\varphi(R)\Lambda_\varphi(x)$$

d'où (b).

Soient x dans M , y dans $\mathfrak{N}_{\varphi}$. On a :

$$\begin{aligned}\pi_{\varphi}(x)I_R\Lambda_{\varphi_R}(r(y)) &= \pi_{\varphi}(x)\Lambda_{\varphi}(Ry)\\ &= \Lambda_{\varphi}(Rxy)\\ &= I_R\Lambda_{\varphi_R}(r(xy))\\ &= I_R\pi_{\varphi_R}(r(x)\Lambda_{\varphi_R}(r(y))) \quad \text{d'où (c).}\end{aligned}$$

Soient x dans M , γ et α dans H_{φ_R} . On a :

$$\begin{aligned}<x\ ,\ \omega_{I_R\gamma,I_R\alpha}> &= (\pi_{\varphi}(x)I_R\gamma \mid I_R\alpha)\\ &= (I_R\pi_{\varphi_R}(r(x))\gamma \mid I_R\alpha) \quad \text{d'après (c)}\\ &= (\pi_{\varphi_R}(r(x))\gamma \mid \alpha) = <r(x)\ ,\ \omega_{\gamma,\alpha}>\\ &= <x\ ,\ \omega_{\gamma,\alpha}\circ r> \quad \text{d'où (d)}\end{aligned}$$

Soient ω dans $\mathcal{L}_{\varphi_R}$ et x dans $\mathfrak{N}_{\varphi}$. On a :

$$\begin{aligned}(I_R a_{\varphi_R}(\omega) \mid \Lambda_{\varphi}(x)) &= (a_{\varphi_R}(\omega) \mid I_R^*\Lambda_{\varphi}(x))\\ &= (a_{\varphi_R}(\omega) \mid \Lambda_{\varphi_R}(r(x)) \quad \text{d'après (a)}\\ &= <r(x)^*\ ,\ \omega> \quad \text{d'après 1.1.3.(b)}\\ &= <x^*\ ,\ \omega\circ r>\end{aligned}$$

d'où $\omega\circ r \in \mathcal{L}_{\varphi}$ et $a(\omega\circ r) = I_R a_{\varphi_R}(\omega)$.

<u>Théorème 5.2.3.</u> : Le quadruplet $\mathbb{K}_R$ défini en 5.2.1. est une algèbre de Kac. La réduction r est un $\mathcal{K}$-morphisme surjectif de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}_R$.

De plus, soient W_R l'opérateur fondamental et λ_R la représentation de Fourier associés à $\mathbb{K}_R$. On a :

(a) $(I_R \otimes I_R)W_R = W(I_R \otimes I_R)$

(b) $(I_R^* \otimes I_R^*)W = W_R(I_R^* \otimes I_R^*)$

(c) Pour tout ω de $(M_R)_*$: $I_R\lambda_R(\omega) = \lambda(\omega\circ r)I_R$

et (d) $\lambda_R(\omega)I_R^* = I_R^*\lambda(\omega\circ r)$.

Il en résulte que $\pi_{\varphi}(R)$ commute aux $\lambda(\omega\circ r)$ pour ω dans $(M_R)_*$.

On dira que $\mathbb{K}_R$ (resp. par abus de langage M_R) est l'algèbre de Kac réduite de $\mathbb{K}$ (resp. de M) par R.

Démonstration : Grâce aux hypothèses, on voit immédiatement que $\mathbb{K}_R$ vérifie (Ki) et (Kii). Soient alors x dans $\mathfrak{N}_\varphi$ et y dans $\mathfrak{M}_\varphi^+$, il résulte de 5.2.1. que :

$$
\begin{aligned}
(\varphi_R \otimes \varphi_R)((r(x)^* \otimes 1)\Gamma_R(r(y))(r(x) \otimes 1)) &= (\varphi_R \otimes \varphi_R)((r \otimes r)((x^* \otimes 1)\Gamma(y)(x \otimes 1))) \\
&= (\varphi \otimes \varphi)((R \otimes R)(x^* \otimes 1)(\Gamma(y))(x \otimes 1)) \\
&= (\varphi \otimes \varphi)((R \otimes 1)\Gamma(R)(x^* \otimes 1)\Gamma(y)(x \otimes 1)) \quad \text{d'après 5.1.5.} \\
&= (\varphi \otimes \varphi)((Rx^* \otimes 1)\Gamma(Ry)(Rx \otimes 1)) \\
&= \varphi(Rx^* x)\varphi(Ry) \quad \text{d'après (Kiii)} \\
&= \varphi_R(r(x^* x))\varphi_R(r(y))
\end{aligned}
$$

comme $\mathfrak{N}_{\varphi_R} = r(\mathfrak{N}_\varphi)$ et donc $\mathfrak{M}_{\varphi_R}^+ = r(\mathfrak{M}_\varphi^+)$, on en déduit que $\mathbb{K}_R$ vérifie (Kiii)
On peut donc appliquer à $\mathbb{K}_R$ les résultats de 2.1. et construire W_R et λ_R

Pour tous x, y de $\mathfrak{N}_\varphi$, on a :

$$
\begin{aligned}
(I_R \otimes I_R)W_R(\Lambda_{\varphi_R}(r(x)) \otimes \Lambda_{\varphi_R}(r(y))) &= (I_R \otimes I_R)\Lambda_{\varphi_R \otimes \varphi_R}(\Gamma_R(r(y))(r(x) \otimes 1)) \quad \text{d'après 2.1.1.} \\
&= (I_R \otimes I_R)\Lambda_{\varphi_R \otimes \varphi_R}((r \otimes r)(\Gamma(y)(x \otimes 1))) \quad \text{d'après 5.2.1.2.} \\
&= \Lambda_{\varphi \otimes \varphi}((R \otimes R)\Gamma(y)(x \otimes 1)) \\
&= \Lambda_{\varphi \otimes \varphi}(\Gamma(R)(R \otimes 1)\Gamma(y)(x \otimes 1)) \quad \text{d'après 5.1.5.} \\
&= \Lambda_{\varphi \otimes \varphi}(\Gamma(Ry)(Rx \otimes 1)) \\
&= W(\Lambda_\varphi(Rx) \otimes \Lambda_\varphi(Ry)) \quad \text{d'après 2.1.1.} \\
&= W(I_R \otimes I_R)(\Lambda_{\varphi_R}(r(x)) \otimes \Lambda_{\varphi_R}(r(y)))
\end{aligned}
$$

d'où, par densité :

$$(I_R \otimes I_R)W_R = W(I_R \otimes I_R) .$$

On a également :

$$
\begin{aligned}
(I_R^* \otimes I_R^*)W(\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(y)) &= (I_R^* \otimes I_R^*)\Lambda_{\varphi \otimes \varphi}(\Gamma(y)(x \otimes 1)) \quad \text{d'après 2.1.1.} \\
&= \Lambda_{\varphi_R \otimes \varphi_R}((r \otimes r)(\Gamma(y)(x \otimes 1))) \quad \text{d'après 5.2.2.(a)}
\end{aligned}
$$

$$= \Lambda_{\varphi_R \otimes \varphi_R}(\Gamma_R(r(y))(r(x) \otimes 1))$$ d'après 5.2.1.2.

$$= W_R(\Lambda_{\varphi_R}(r(x)) \otimes \Lambda_{\varphi_R}(r(y)))$$ d'après 2.1.1.

$$= W_R(I_R^* \otimes I_R^*)(\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(y))$$ d'après 5.2.2.(a)

d'où 5.2.3.(b) par densité.

Soient α, β, γ dans H_{φ_R}, δ dans H_φ. On a :

$$(\beta \mid \lambda_R(\omega_{\gamma,\alpha})I_R^*\delta) = (W_R(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes I_R^*\delta)$$ d'après 2.1.5.(a)

$$= ((1 \otimes I_R)W_R(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta)$$

$$= ((I_R \otimes I_R)W_R(\alpha \otimes \beta) \mid I_R\gamma \otimes \delta)$$

$$= (W(I_R \otimes I_R)(\alpha \otimes \beta) \mid I_R\gamma \otimes \delta)$$ d'après 5.2.3.(a)

$$= (I_R\beta \mid \lambda(\omega_{I_R\gamma, I_R\alpha})\delta)$$ d'après 2.1.5.(a)

$$= (\beta \mid I_R^*\lambda(\omega_{\gamma,\alpha} \circ r)\delta)$$ d'après 5.2.2.(d)

d'où 5.2.3.(d).

De plus, pour tout x de M, on a :

$$\langle x\ ,\ (\omega \circ r)^\circ\rangle = \overline{\langle \kappa(x)^*\ ,\ \omega \circ r\rangle}$$ d'apr[illegible] .2.2.

$$= \overline{\langle r(\kappa(x))^*\ ,\ \omega\rangle}$$

$$= \overline{\langle \kappa_R(r(x))^*\ ,\ \omega\rangle}$$ d'après 5.2.1.3.

$$= \langle r(x)\ ,\ \omega^\circ\rangle$$ d'après 1.2.2.

$$= \langle x\ ,\ \omega^\circ \circ r\rangle$$

d'où :

5.2.3.1. $$(\omega \circ r)^\circ = \omega^\circ \circ r$$

Dans ces conditions, nous avons, pour tout ω de $(M_R)_*$:

$$\lambda_R(\omega^\circ) = I_R^*\lambda(\omega^\circ \circ r)I_R$$ d'après 5.2.3.(d)

$$= I_R^*\lambda((\omega \circ r)^\circ)I_R$$

$$= I_R^*\lambda(\omega \circ r)^* I_R = (I_R^*\lambda(\omega)I_R)^*$$ d'après 2.1.7.

$$= \lambda_R(\omega)^* .$$

Il en résulte, grâce à 2.1.7. que $\mathbb{K}_R$ vérifie l'axiome (Kiv). De plus, en transposant l'égalité 5.2.3.(d), on obtient :

$I_R\lambda_R(\omega) = \lambda(\omega\circ r)I_R$ ce qui achève la démonstration 5.2.3.

Par ailleurs, soient ω_1 et ω_2 deux éléments de $(M_R)_*$. On a, pour tout x de M :

$$\begin{aligned} \langle x , (\omega_1 * \omega_2) \circ r\rangle &= \langle r(x) , \omega_1 * \omega_2\rangle \\ &= \langle \Gamma_R(r(x)) , \omega_1 \otimes \omega_2\rangle && \text{d'après 1.2.2.} \\ &= \langle (r \otimes r)(\Gamma(x)), \omega_1 \otimes \omega_2\rangle && \text{d'après 5.2.1.2.} \\ &= \langle \Gamma(x) , (\omega_1\circ r) \otimes (\omega_2\circ r)\rangle \\ &= \langle x, (\omega_1\circ r) * (\omega_2\circ r)\rangle && \text{d'après 1.2.2.} \end{aligned}$$

d'où :

5.2.3.2. $(\omega_1 * \omega_2) \circ r = (\omega_1\circ r) * (\omega_2\circ r)$.

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \lambda_R(\omega_1 * \omega_2) &= I_R^*\lambda((\omega_1 * \omega_2) \circ r)I_R && \text{d'après 5.2.3.(d)} \\ &= I_R^*\lambda((\omega_1\circ r) * (\omega_2\circ r))I_R \\ &= I_R^*\lambda(\omega_1\circ r)\lambda(\omega_2\circ r)I_R && \text{d'après 2.1.9.} \\ &= I_R^*\lambda(\omega_1\circ r)I_R\lambda_R(\omega_2) && \text{d'après 5.2.3.(c)} \\ &= \lambda_R(\omega_1)\lambda_R(\omega_2) \end{aligned}$$

donc, d'après 2.1.9. , $\mathbb{K}_R$ véfifie l'axiome (Kv) .

Pour tout x de M , on a :

$$\begin{aligned} \kappa_R(\sigma_t^{\varphi_R}(r(x))) &= \kappa_R(r(\sigma_t^{\varphi}(x))) && \text{d'après [4] , 3.2.6.} \\ &= r(\kappa(\sigma_t^{\varphi}(x))) && \text{d'après 5.2.1.3.} \\ &= r(\sigma_{-t}^{\varphi}(\kappa(x))) && \text{d'après (Kvi)} \\ &= \sigma_{-t}^{\varphi_R}(r(\kappa(x))) && \text{d'après [4] , 3.2.6.} \\ &= \sigma_{-t}^{\varphi_R}(\kappa_R(r(x))) && \text{d'après 5.2.1.3.} \end{aligned}$$

on en déduit que $\mathbb{K}_R$ vérifie (Kvi).

Ce qui achève la démonstration du théorème.

5.3. Sous-algèbres de Kac

Définitions 5.3.1. Soient $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac et $\tilde{M}$ une sous-W^*-algèbre de M, contenant 1, telle que :

1) $\Gamma(\tilde{M}) \subset \tilde{M} \otimes \tilde{M}$

2) $\kappa(\tilde{M}) = \tilde{M}$

3) $\sigma_t^\varphi(\tilde{M}) = \tilde{M}$ pour tout t de $\mathbb{R}$

4) la restriction de φ à $\tilde{M}^+$, que l'on notera $\tilde{\varphi}$, est un poids semi-fini.

On notera $\tilde{\mathbb{K}}$ le quadruplet $(M, \tilde{\Gamma}, \tilde{\kappa}, \tilde{\varphi})$ où $\tilde{\Gamma}$ et $\tilde{\kappa}$ désignent les restrictions de Γ et κ à $\tilde{M}$, et i désignera l'injection canonique de $\tilde{M}$ dans M.

Lemme 5.3.2. : Sous les hypothèses précédentes, il existe, d'après 5.1.3. (c), une espérance conditionnelle normale unique E de M sur $\tilde{M}$ telle que $\varphi \circ E = \varphi$ et une isométrie $\tilde{I}$ de $H_{\tilde{\varphi}}$ dans H_φ définie par :

(a) $\tilde{I}\Lambda_{\tilde{\varphi}}(Ex) = \Lambda_\varphi(Ex)$ pour tout x de $\mathfrak{N}_\varphi$

ou $\tilde{I}\Lambda_{\tilde{\varphi}}(x) = \Lambda_\varphi(i(x))$ pour tout x de $\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}}$.

Cette isométrie vérifie, de plus, les conditions suivantes (où l'on pose $P = \tilde{I}\tilde{I}^*$) :

(b) $\tilde{I}^*\Lambda_\varphi(x) = \Lambda_{\tilde{\varphi}}(Ex)$ pour tout x de $\mathfrak{N}_\varphi$

(c) $P\,\Lambda_\varphi(x) = \Lambda_\varphi(Ex)$ pour tout x de $\mathfrak{N}_\varphi$

(d) $\pi_{\tilde{\varphi}}(Ex) = \tilde{I}^*\pi_\varphi(x)\tilde{I}$ pour tout x de M

(e) pour tout x de M, $\pi_\varphi(i(Ex))$ est l'unique élément de $\pi_\varphi(M)$ tel que :

$$\pi_\varphi(i(Ex)) = P\pi_\varphi(x)P$$

(f) si $\tilde{\mathfrak{U}}$, $\tilde{\mathfrak{U}}'$, $\tilde{\mathfrak{U}}_\circ$ désignent les algèbres hilbertiennes à gauche, à droite, modulaire maximale associées à $\tilde{\varphi}$, $\tilde{I}$ est un morphisme d'algèbres involutives de $\tilde{\mathfrak{U}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{U}}'$, resp. $\tilde{\mathfrak{U}}_\circ$) dans $\mathfrak{U}$ (resp. $\mathfrak{U}'$, resp. $\mathfrak{U}_\circ$). On notera de la même façon les opérations sur $\tilde{\mathfrak{U}}$ et sur $\mathfrak{U}$. On notera $\tilde{\rho}$ et $\tilde{a}$ les applications associées à $\tilde{\mathbb{K}}$ de façon analogue à 1.1.2. et 1.1.3.(b).

(g) soient γ, α dans $H_{\tilde{\varphi}}$. On a : $\omega_{\tilde{I}\gamma,\tilde{I}\alpha} = \omega_{\gamma,\alpha} \circ E$.

(h) soit ω dans $\mathcal{L}_\varphi$. On a $\omega \circ i \in \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}$ et $\tilde{a}(\omega \circ i) = \tilde{I}^* a(\omega)$

(i) soit ω dans $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}$. On a $\omega \circ E \in \mathcal{L}_{\varphi}$ et $a(\omega \circ E) = \tilde{\tilde{I}}a(\omega)$

(j) soit ω dans $\mathcal{L}_{\varphi}$. Alors $\omega \circ E = \omega \circ i \circ E$ appartient à $\mathcal{L}_{\varphi}$ et $a(\omega \circ E) = Pa(\omega)$.

<u>Démonstration</u> : Les résultats (a) à (f) se déduisent de [18] . Soient γ, α dans $H_{\tilde{\varphi}}$ et x dans M. On a :

$$\begin{aligned}
\langle x \,,\, \omega_{\tilde{I}\gamma, \tilde{I}\alpha} \rangle &= (\pi_{\varphi}(x)\tilde{I}\gamma \mid \tilde{I}\alpha) \\
&= (\tilde{I}^{*}\pi_{\varphi}(x)\tilde{I}\gamma \mid \alpha) \\
&= (\pi_{\tilde{\varphi}}(Ex)\gamma \mid \alpha) && \text{d'après (d)} \\
&= \langle Ex \,,\, \omega_{\gamma,\alpha} \rangle \\
&= \langle x \,,\, \omega_{\gamma,\alpha} \circ E \rangle
\end{aligned}$$

d'où (g).

Soient ω dans $\mathcal{L}_{\varphi}$ et x dans $\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}}$. On a :

$$\begin{aligned}
(\tilde{I}^{*}a(\omega) \mid \Lambda_{\tilde{\varphi}}(x)) &= (a(\omega) \mid \tilde{I}\Lambda_{\tilde{\varphi}}(x)) \\
&= (a(\omega) \mid \Lambda_{\varphi}(i(x))) && \text{d'après (a)} \\
&= \langle i(x)^{*} \,,\, \omega \rangle && \text{d'après 1.1.3.(b)} \\
&= \langle x^{*} \,,\, \omega \circ i \rangle
\end{aligned}$$

donc $\omega \circ i$ appartient à $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}$ et $\tilde{a}(\omega \circ i) = \tilde{I}^{*}a(\omega)$, d'où (h).

Soient ω dans $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}$ et x dans $\mathfrak{N}_{\varphi}$. On a :

$$\begin{aligned}
(\tilde{\tilde{I}}a(\omega) \mid \Lambda_{\varphi}(x)) &= (\tilde{a}(\omega) \mid \tilde{I}^{*}\Lambda_{\varphi}(x)) \\
&= (\tilde{a}(\omega) \mid \Lambda_{\tilde{\varphi}}(Ex)) && \text{d'après (b)} \\
&= \langle Ex^{*} \,,\, \omega \rangle && \text{d'après 1.1.3.(b)} \\
&= \langle x^{*} \,,\, \omega \circ E \rangle
\end{aligned}$$

donc $\omega \circ E$ appartient à $\mathcal{L}_{\varphi}$ et $a(\omega \circ E) = \tilde{\tilde{I}}a(\omega)$, d'où (i).

Soit enfin ω dans $\mathcal{L}_{\varphi}$. Il est clair que $\omega \circ E = \omega \circ i \circ E$ appartient à $\mathcal{L}_{\varphi}$ et que :

$$\begin{aligned}
a(\omega \circ E) &= a(\omega \circ i \circ E) \\
&= \tilde{\tilde{I}}a(\omega \circ i) && \text{d'après (i)}
\end{aligned}$$

$= \tilde{\tilde{I}}^* a(\omega)$ d'après (h)

$= Pa(\omega)$ d'où (j) grâce à 1.1.4.2.

Théorème 5.3.3. : Le quadruplet $\tilde{\mathbb{K}}$ défini en 5.3.1. est une algèbre de Kac. L'injection i est un $\mathcal{K}$-morphisme injectif de $\tilde{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$.

De plus, soient $\tilde{W}$ l'opérateur fondamental et $\tilde{\lambda}$ la représentation de Fourier associés à $\tilde{\mathbb{K}}$. On a (avec les notations de 5.3.2.) :

(a) $(\tilde{I} \otimes \tilde{I})\tilde{W} = W(\tilde{I} \otimes \tilde{I})$

(b) $\tilde{I}\tilde{\lambda}(\omega) = \lambda(\omega \circ E)\tilde{I}$ pour tout ω de $(\tilde{M})_*$

(c) $\tilde{\Gamma} E = (E \otimes E)\, \Gamma$

On dira que $\tilde{\mathbb{K}}$ (resp. par abus de langage $\tilde{M}$) est une sous-algèbre de Kac de $\mathbb{K}$ (resp. M).

Démonstration : Il résulte des définitions que nous avons :

$$\Gamma\, i = (i \otimes i)\, \tilde{\Gamma}$$

5.3.3.1. $$\kappa\, i = i\, \tilde{\kappa}$$

$$\varphi(i(x)) = \tilde{\varphi}(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } \tilde{M}^+ .$$

De plus, grâce aux hypothèses, on voit immédiatement que $\tilde{\mathbb{K}}$ vérifie (Ki) et (Kii). De plus, comme $\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}} = \mathfrak{N}_{\varphi} \cap \tilde{M}$, il est clair que $\tilde{\varphi}$ vérifie (Kiii). On peut donc appliquer les résultats de 2.1. et notamment construire $\tilde{W}$ et $\tilde{\lambda}$.

Par ailleurs, il résulte de 5.3.2.(g) que pour γ et α dans $H_{\tilde{\varphi}}$, on a :

$$\omega_{\tilde{I}\gamma, \tilde{I}\alpha} \circ i = \omega_{\gamma,\alpha} \circ E \circ i$$

$$= \omega_{\gamma,\alpha}$$

En particulier, pour γ et α dans $\mathfrak{U}'$, cela s'écrit, d'après 5.3.2.(f) et 1.1.2. :

$$\rho(\tilde{I}(\gamma \top \alpha^\flat)) \circ i = \tilde{\rho}(\gamma \top \alpha^\flat)$$

d'où, par linéarité :

$$\tilde{\rho}(\delta) = \rho(\tilde{I}\delta) \circ i \qquad \text{pour tout } \delta \text{ de } \tilde{\mathfrak{U}}' \top \tilde{\mathfrak{U}}' .$$

Ainsi, comme $\mathbb{K}$ vérifie (Kiv), on trouve, pour ξ, η dans $\tilde{\mathfrak{U}}_\circ \top \tilde{\mathfrak{U}}_\circ$ et ω dans M

$$\langle \Gamma(\Lambda_\varphi^{-1}(I\xi)^*)\, ,\, \omega \otimes \rho(I\eta)\rangle = \langle \Gamma(\Lambda_\varphi^{-1}(I\eta)^*)\, ,\, \omega^\circ \otimes \rho(I\xi)\rangle^- \quad , \quad \text{soit}$$

$<\Gamma(i(\Lambda_{\tilde\varphi}^{-1}(\xi)^*))\ ,\ \omega \otimes \rho(I\eta)> = <\Gamma(i(\Lambda_{\varphi}^{-1}(\eta)^*))\ ,\ \omega^\circ \otimes \rho(I\xi)>^-$ d'après 5.3.2.(a)

$<(i \otimes i)\tilde\Gamma(\Lambda_{\tilde\varphi}^{-1}(\xi)^*)\ ,\ \omega \otimes \rho(I\eta)> = <(i \otimes i)\tilde\Gamma(\Lambda_{\tilde\varphi}^{-1}(\eta)^*))\ ,\ \omega^\circ \otimes \rho(I\xi)>^-$ d'après 5.3.3.1.

$<\tilde\Gamma(\Lambda_{\tilde\varphi}^{-1}(\xi)^*)\ ,\ \omega{\circ}i \otimes \rho(I\eta){\circ}i> = <\tilde\Gamma(\Lambda_{\tilde\varphi}^{-1}(\eta)^*))\ ,\ \omega^\circ{\circ}i \otimes \rho(I\xi){\circ}i>^-$

$<\tilde\Gamma(\Lambda_{\tilde\varphi}^{-1}(\xi)^*)\ ,\ \omega{\circ}i \otimes \tilde\rho(\eta)> = <\tilde\Gamma(\Lambda_{\tilde\varphi}^{-1}(\eta)^*))\ ,\ \omega^\circ{\circ}i \otimes \tilde\rho(\xi)>^-$

Or, pour tout x de $\tilde M$:

$$<x\ ,\ \omega^\circ{\circ}i> = <i(x)\ ,\ \omega^\circ>$$

$$= <\kappa(i(x))^*\ ,\ \omega>^- \qquad \text{d'après 1.2.2.}$$

$$= <i(\tilde\kappa(x))^*\ ,\ \omega>^- \qquad \text{d'après 5.3.3.1.}$$

$$= <\tilde\kappa(x)^*\ ,\ \omega{\circ}i>^-$$

$$= <x\ ,\ (\omega{\circ}i)^\circ> \qquad \text{d'après 1.2.2.}$$

donc $\qquad \omega^\circ{\circ}i = (\omega{\circ}i)^\circ$.

Comme tout élément de $\tilde M_*$ est de la forme $\omega{\circ}i$ avec ω dans M_* il résulte que $\tilde{\mathbb{K}}$ vérifie l'axiome (Kiv) ; cela entraîne d'après 2.2.4. que $\tilde W$ est unitaire .

Soient x et y dans $\mathfrak{N}_{\tilde\varphi}$. On a :

$$(\tilde I \otimes \tilde I)\tilde W(\Lambda_{\tilde\varphi}(x) \otimes \Lambda_{\tilde\varphi}(y)) = (\tilde I \otimes \tilde I)\Lambda_{\tilde\varphi\otimes\tilde\varphi}(\tilde\Gamma(y)(x \otimes 1)) \qquad \text{d'après 2.1.1.}$$

$$= \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}((i \otimes i)(\tilde\Gamma(y)(x \otimes 1))) \qquad \text{d'après 5.3.2.(a)}$$

$$= \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(i(y))(i(x) \otimes 1)) \qquad \text{d'après 5.3.3.1.}$$

$$= W(\Lambda_\varphi(i(x))\otimes\Lambda_\varphi(i(y))) \qquad \text{d'après 2.1.1.}$$

$$= W(\tilde I \otimes \tilde I)(\Lambda_{\tilde\varphi}(x) \otimes \Lambda_{\tilde\varphi}(y))$$

d'où, par densité, 5.3.3.(a).

Comme $\tilde W$ est uniatire , on a :

$$W^*(\tilde I \otimes \tilde I) = W^*(\tilde I \otimes \tilde I)\tilde W\tilde W^*$$

$$= W^*W(\tilde I \otimes \tilde I)\tilde W^* \qquad \text{d'après 5.3.3.(a)}$$

$$= (\tilde I \otimes \tilde I)\tilde W^*$$

d'où, en transposant :

5.3.3.2. $$(\tilde{I}^* \otimes \tilde{I}^*)W = \tilde{W}(\tilde{I}^* \otimes \tilde{I}^*)$$

On en déduit que, pour tout x de M :

$$\begin{aligned}
(\pi_{\tilde\varphi} \otimes \pi_{\tilde\varphi})((E \otimes E)\Gamma(x)) &= (\tilde{I}^* \otimes \tilde{I}^*)(\pi_\varphi \otimes \pi_\varphi)(\Gamma(x))(\tilde{I} \otimes \tilde{I}) && \text{d'après 5.3.2.(d)}\\
&= (\tilde{I}^* \otimes \tilde{I}^*)W(1 \otimes \pi_\varphi(x))W^*(\tilde{I} \otimes \tilde{I}) && \text{d'après 2.1.1.}\\
&= \tilde{W}(\tilde{I}^* \otimes \tilde{I}^*)(1 \otimes \pi_\varphi(x))(\tilde{I} \otimes \tilde{I})\tilde{W}^* && \text{d'après 5.3.3.2.}\\
&= \tilde{W}(1 \otimes \tilde{I}^*\pi_\varphi(x)\tilde{I})\tilde{W}^* &&\\
&= \tilde{W}(1 \otimes \pi_{\tilde\varphi}(Ex))\tilde{W}^* && \text{d'après 5.3.2.(d)}\\
&= (\pi_{\tilde\varphi} \otimes \pi_{\tilde\varphi})(\tilde{\Gamma}\, E(x)) && \text{d'après 2.1.1.}
\end{aligned}$$

d'où l'égalité 5.3.3.(c).

Soient α, γ, δ dans $H_{\tilde\varphi}$ et β dans H_φ. On a :

$$\begin{aligned}
(\beta \mid \lambda(\omega_{\gamma,\alpha}\circ E)\tilde{I}\delta) &= (\beta \mid \lambda(\omega_{\tilde{I}\gamma,\tilde{I}\alpha})\tilde{I}\delta) && \text{d'après 5.3.2.(g)}\\
&= (W(\tilde{I}\alpha \otimes \beta) \mid \tilde{I}\gamma \otimes \tilde{I}\delta) && \text{d'après 2.1.5.(a)}\\
&= ((\tilde{I}^* \otimes \tilde{I}^*)W(\tilde{I}\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta) &&\\
&= (\tilde{W}(\tilde{I}^* \otimes \tilde{I}^*)(\tilde{I}\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta) && \text{d'après 5.3.3.2.}\\
&= (\tilde{W}(\alpha \otimes \tilde{I}^*\beta) \mid \gamma \otimes \delta) &&\\
&= (\tilde{I}^*\beta \mid \tilde{\lambda}(\omega_{\gamma,\alpha})\delta) && \text{d'après 2.1.5.(a)}\\
&= (\beta \mid \tilde{I}\tilde{\lambda}(\omega_{\gamma,\alpha})\delta) &&
\end{aligned}$$

il en résulte que pour tout ω de $\tilde{M}_*$, on a :

$$\tilde{I}\tilde{\lambda}(\omega) = \lambda(\omega\circ E)\tilde{I}$$

ce qui achève la démonstration de 5.3.3.

Soient ω_1 et ω_2 dans $\tilde{M}_*$. On a, pour tout x de M :

$$\begin{aligned}
\langle x, (\omega_1 * \omega_2)\circ E\rangle &= \langle Ex, \omega_1 * \omega_2\rangle &&\\
&= \langle\tilde{\Gamma}(Ex), \omega_1 \otimes \omega_2\rangle && \text{d'après 1.2.2.}\\
&= \langle(E \otimes E)\Gamma(x), \omega_1 \otimes \omega_2\rangle && \text{d'après 5.3.3.(c)}
\end{aligned}$$

$$= \langle \Gamma(x) \, , \, (\omega_1 \circ E) \otimes (\omega_2 \circ E) \rangle$$

$$= \langle x \, , \, (\omega_1 \circ E) * (\omega_2 \circ E) \rangle \qquad \text{d'après 1.2.2.}$$

donc :

5.3.3.3. $$(\omega_1 * \omega_2) \circ E = (\omega_1 \circ E) * (\omega_2 \circ E) \, .$$

On obtient alors :

$$\tilde{\lambda}(\omega_1 * \omega_2) = \tilde{I}^* \lambda((\omega_1 * \omega_2) \circ E) \tilde{I} \qquad \text{d'après 5.3.3.(b)}$$

$$= \tilde{I}^* \lambda((\omega_1 \circ E) * (\omega_2 \circ E)) \tilde{I}$$

$$= \tilde{I}^* \lambda(\omega_1 \circ E) \lambda(\omega_2 \circ E) \tilde{I} \qquad \text{d'après 2.1.9.}$$

$$= \tilde{I}^* \lambda(\omega_1 \circ E) \tilde{I} \tilde{\lambda}(\omega_2) \qquad \text{d'après 5.3.3.(b)}$$

$$= \tilde{\lambda}(\omega_1) \tilde{\lambda}(\omega_2) \qquad \text{" \quad "}$$

il résulte de 2.1.9. que $\tilde{\mathbb{K}}$ vérifie l'axiome (Kv).

Enfin, comme $\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x) = \sigma_t^{\varphi}(x)$ pour tout x de $\tilde{M}$ et tout t de R, la vérification de (Kvi) est immédiate.

Ce qui achève la démonstration du théorème.

<u>Lemme 5.3.4.</u> : On a ,

(a) $\tilde{I}^* \lambda(\omega) = \tilde{I}^* \lambda(\omega \circ E)$ pour tout ω de M_*

(b) $\tilde{I}^* \lambda(\omega) \tilde{I} = \tilde{\lambda}(\omega \circ i)$ pour tout ω de M_*.

<u>Démonstration</u> : Soient ω et ω' dans M_*. On a successivement :

$$(\omega * \omega') \circ i = (\omega \circ i) * (\omega' \circ i) \qquad \text{d'après 5.3.3.3.}$$

$$= (\omega \circ i \circ E \circ i) * (\omega' \circ i)$$

$$= ((\omega \circ i \circ E) * \omega') \circ i \qquad \text{d'après 5.3.3.3.}$$

$$= ((\omega \circ E) * \omega') \circ i$$

Ainsi, dans le cas où ω appartient à M_* et ω' à $\mathfrak{J}_\varphi$:

$$\tilde{I}^* \lambda(\omega) a(\omega') = \tilde{I}^* a(\omega * \omega') \qquad \text{d'après 2.1.9.1.}$$

$$= \tilde{a}((\omega * \omega') \circ i) \qquad \text{d'après 5.3.2.(h)}$$

$= \tilde{a}(((\omega \circ E) * \omega') \circ i)$ d'après ce qui précède

$= \tilde{I}^* a((\omega \circ E) * \omega')$ d'après 5.3.2.(h)

$= \tilde{I}^* \lambda(\omega \circ E) a(\omega')$ d'après 2.1.9.1.

par densité, il en résulte (a).

On a, pour tout ω de M_* :

$\tilde{I}^* \lambda(\omega) \tilde{I} = \tilde{I}^* \lambda(\omega \circ E) \tilde{I}$ d'après (a)

$= \tilde{I}^* \lambda(\omega \circ i \circ E) \tilde{I}$

$= \tilde{I}^* \tilde{I} \tilde{\lambda}(\omega \circ i)$ d'après 5.3.3.(b)

$= \tilde{\lambda}(\omega \circ i)$

d'où (b).

Lemme 5.3.5. :

(a) P appartient au commutant de $M\hat{}$

(b) l'application v définie par $v(x) = \tilde{I}^* x \tilde{I}$ pour x dans $M\hat{}$ est un morphisme normal surjectif de $M\hat{}$ dans $(\tilde{M})\hat{}$ tel que $v(1) = 1$

(c) $\hat{\tilde{\varphi}}(v(\lambda(\omega)^* \lambda(\omega)) = \| Pa(\omega) \|^2$ pour tout ω de $\mathcal{L}_\varphi$

(d) $P \geq R_v$, où R_v est défini comme en 5.1.1.

Démonstration : Pour tous x et y de $\mathfrak{N}_\varphi$, on a :

$W(1 \otimes P)(\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(y)) = W(\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(Ey))$ d'après 5.3.2.(c)

$= \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(Ey)(x \otimes 1))$ d'après 2.1.1.

$= \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}((1 \otimes E)(\Gamma(Ey)(x \otimes 1))$ car $\Gamma(Ey)(x\otimes 1) \in M\otimes\tilde{M}$

$= (1 \otimes P)\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(Ey)(x \otimes 1))$ d'après 5.3.2.(c)

$= (1 \otimes P)W(1\otimes P)(\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(y))$

d'après le début du calcul. Donc, par densité :

$$W(1 \otimes P) = (1 \otimes P)W(1 \otimes P)$$

Dans ces conditions, pour tous α, β, γ, δ de H_φ , on a :

$$(\beta \mid P\lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta) = (P\,\beta \mid \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta)$$

$$= (W(\alpha \otimes P\beta) \mid \gamma \otimes \delta) \qquad \text{d'après 2.1.5.(a)}$$

$$= ((1 \otimes P)W(\alpha \otimes P\beta) \mid \gamma \otimes \delta)$$

$$= (W(a \otimes P\beta) \mid \gamma \otimes P\delta)$$

$$= (\beta \mid P\lambda(\omega_{\gamma,\alpha})P\delta) \qquad \text{d'après 2.1.5.(a)}$$

ainsi : $P\lambda(\omega) = P\lambda(\omega)P$ pour tout ω de M_*. En passant aux adjoints, grâce à 2.1.7. , on en déduit (a).

Par définition, les $\tilde{\lambda}(\omega\circ i)$, avec ω dans M_* engendrent $\tilde{M}\hat{}$. Il résulte alors de 5.3.4.(b) par continuité, que pour tout x de $M\hat{}$, $v(x)$ appartient à $\tilde{M}\hat{}$. Il est clair que v est normal, surjectif, que $v(1) = 1$, et que pour tout x de $M\hat{}$ on a $v(x^*) = v(x)^*$. Pour tous x et y de $M\hat{}$, on a :

$$v(xy) = \tilde{I}^* xy\, \tilde{I}$$

$$= \tilde{I}^* P\, xy\, \tilde{I} \qquad \text{par définition de } P$$

$$= \tilde{I}^* x\, Py\, \tilde{I} \qquad \text{d'après (a)}$$

$$= \tilde{I}^* x\, \tilde{I}\, \tilde{I}^* y\, \tilde{I}$$

$$= v(x)\, v(y)$$

d'où (b).

Soit ω dans $\mathcal{L}_\varphi$. On a :

$$\tilde{\varphi}\hat{}(v(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega))) = \tilde{\varphi}\hat{}(\tilde{\lambda}(\omega\circ i)^*\tilde{\lambda}(\omega\circ i)) \qquad \text{d'après 5.3.4.(b)}$$

$$= \|\tilde{a}(\omega\circ i)\|^2 \qquad \text{d'après 3.1.9.}$$

$$= \|\tilde{I}^* a(\omega)\|^2 \qquad \text{d'après 5.3.2.(b)}$$

$$= \|\tilde{I}\tilde{I}^* a(\omega)\|^2$$

$$= \|Pa(\omega)\|^2 \qquad \text{d'où (c).}$$

Soit ξ dans Ker P. Comme $a(\mathcal{L}_\varphi)$ est dense dans H_φ d'après 1.1.4.2., il existe une suite (ω_n) dans $\mathcal{L}_\varphi$ telle que $a(\omega_n)$ tende vers ξ . Associons-lui la suite $a(\omega_n - \omega_n\circ E) = (1 - P)a(\omega_n)$, (cf.5.3.2.(j)), il est clair qu'elle appartient à $a(\mathcal{L}_\varphi) \cap \operatorname{Ker} P$ et qu'elle converge vers $(1-P)\xi = \xi$. Donc $a(\mathcal{L}_\varphi) \cap \operatorname{Ker} P$ est dense dans Ker P.

Soit maintenant ω dans $\mathcal{L}_\varphi$ tel que $Pa(\omega) = 0$. D'après (c), cela entraîne $\tilde{\varphi}\hat{}(v(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega))) = 0$, comme le poids $\tilde{\varphi}\hat{}$ est fidèle, cela entraîne $v(\lambda(\omega))=0$, soit $R_v\lambda(\omega) = 0$, ce qui, d'après 3.1.9. peut s'écrire : $R_v\hat{\pi}(a(\omega)) = 0$. Comme R_v appartient au centre de $M\hat{}$, on obtient $\hat{\pi}(R_v a(\omega)) = 0$. Comme la représentation $\hat{\pi}$ est fidèle, on trouve finalement que $R_v a(\omega) = 0$. On a ainsi acquis que $a(\mathcal{L}_\varphi)\cap \mathrm{Ker}\, P$ est inclus dans $\mathrm{Ker}\, R_v$, par densité on obtient $\mathrm{Ker}\, P \subset \mathrm{Ker}\, R_v$, d'où (d).

Lemme 5.3.6. : Soient φ et ψ deux poids normaux, fidèles, semi-finis sur une W^*-algèbre M , tels que $\sigma_t^\varphi = \sigma_t^\psi$ pour tout t de R . Alors, $\psi = \varphi(h.)$ au sens de [14] , où h est un opérateur auto-adjoint positif affilié au centre de M (cf. [14] , théorème 5.4.).

Soit $\tilde{M}$ une sous W^*-algèbre de M , σ_t^φ-invariante pour tout t de R et telle que les restrictions $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ de φ et ψ à $\tilde{M}$ soient semi-finies. On note E_φ l'espérance conditionnelle normale de M sur $\tilde{M}$ telle que $\varphi\circ E_\varphi = \varphi$ (voir [18] , théorème du § 3).

(a) La dérivée de Radon-Nikodym de $\tilde{\psi}$ par rapport à $\tilde{\varphi}$ existe et vaut $E_\varphi(h)$ défini par (où h_ε est défini comme en 1.3.9.)

$$\mathcal{D}\,(E\,(h)^{1/2}) = \{\xi \in H_{\tilde{\varphi}}\ ;\ \lim_\varepsilon \pi_{\tilde{\varphi}}(E_\varphi(h_\varepsilon))^{1/2}\xi \text{ existe}\}$$

et, pour tout ξ de $\mathcal{D}\,(E_\varphi(h)^{1/2})$:

$$E_\varphi(h)^{1/2}\xi = \lim_\varepsilon \pi_{\tilde{\varphi}}(E_\varphi(h_\varepsilon))^{1/2}\xi \quad .$$

(b) En utilisant les notations de 5.3.2. , on a :

$$E_\varphi(h) = \tilde{I}^* h\, \tilde{I}$$

Démonstration : On a : $\psi(x^*x) = \varphi(hx^*x)$ pour tout x de M

$= \lim_\varepsilon \varphi(h_\varepsilon x^*x)$ voir [14] , théorème 5.4.

où h_ε appartient au centre de M et tend en croissant vers h .

Soit x dans $\tilde{M}$. On a :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(x^*x) &= \lim_\varepsilon \varphi(h_\varepsilon x^*x)\\ &= \lim_\varepsilon \varphi(E_\varphi(h_\varepsilon x^*x))\\ &= \lim_\varepsilon \varphi(E_\varphi(h_\varepsilon)x^*x)\end{aligned}$$

on en déduit que :

$$\Lambda_{\tilde\varphi}(\mathfrak{N}_{\tilde\varphi} \cap \mathfrak{N}_{\tilde\psi}) \subset \mathfrak{D}(E_\varphi(h)^{1/2}) .$$

L'hypothèse $\sigma_t^\varphi = \sigma_t^\psi$ entraîne alors $\sigma_t^{\tilde\varphi} = \sigma_t^{\tilde\psi}$, d'après [4] , lemme 1.4.3. ce qui, d'après 1.3.9. entraîne que $\Lambda_{\tilde\varphi}(\mathfrak{N}_{\tilde\varphi} \cap \mathfrak{N}_{\tilde\psi})$ est dense dans $H_{\tilde\varphi}$.

Ainsi $E_\varphi(h)^{1/2}$ est un opérateur auto-adjoint, positif, affilié au centre de $\tilde M$ et il en est de même de $E_\varphi(h)$ qui apparait de plus comme la dérivée de Radon-Nikodym de $\tilde\psi$ par rapport à $\tilde\varphi$. En effet, par définition :

$$\tilde\psi(x^*x) = \lim_\varepsilon \tilde\varphi(E_\varphi(h_\varepsilon)x^*x) = \tilde\varphi(E_\varphi(h)x^*x) \quad ; \quad \text{d'où (a)} .$$

On a :

$$E_\varphi(h)^{1/2} = \lim_\varepsilon \pi_{\tilde\varphi}(E_\varphi(h_\varepsilon))^{1/2}$$

$$= \lim_\varepsilon (\tilde I^* h_\varepsilon \tilde I)^{1/2} \qquad \text{d'après 5.3.2.(d)}$$

Donc :

$$E_\varphi(h) = \lim_\varepsilon \tilde I^* h_\varepsilon \tilde I$$

$$= \tilde I^* \, h \, \tilde I \qquad \text{d'où (b)} .$$

<u>Proposition 5.3.7.</u> : Le projecteur P appartient au centre de $M\hat{}$; plus précisément $P = R_v$ (où v est le morphisme défini en 5.3.5.(b)).

<u>Démonstration</u> : Pour simplifier les notations, on appelera ψ' le poids sur $(M\hat{})_{R_v}$ défini par $\psi'(x) = \tilde\varphi\hat{}(v(x))$ et ψ'' le poids défini sur la même algèbre en réduisant $\varphi\hat{}$ par R_v , soit $\psi''(x) = \varphi\hat{}_{R_v}(x)$.

La restriction de v à $(M\hat{})_{R_v}$ est un isomorphisme de $(M\hat{})_{R_v}$ sur $\tilde M\hat{}$. On a donc, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$v(\sigma_t^{\psi'}(x)) = \sigma_t^{\tilde\varphi\hat{}}(v(x)) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } (M\hat{})_{R_v}$$

Or, il résulte de 5.3.1. et de 4.2.1. que l'opérateur modulaire associé à $\tilde\varphi\hat{}$ est la dérivée de Radon-Nikodym de $\tilde\varphi \circ \tilde\kappa$ par rapport à $\tilde\varphi$, c'est-à-dire (comme la dérivée de Radon-Nikodym de $\varphi\circ\kappa$ par rapport à φ est $\Delta\hat{}$ d'après 4.2.1.) égal à $\tilde I^*\Delta\hat{}\tilde I$ d'après 5.3.6.(b).

L'égalité ci-dessus s'écrit alors :

5.3.7.1. $\qquad v(\sigma_t^{\psi'}(x)) = \tilde I^*(\Delta\hat{})^{it}\tilde I \, v(x) \tilde I^*(\Delta\hat{})^{-it}\tilde I$ pour tout x de $(M\hat{})_{R_v}$ et tout t de $\mathbb{R}$

Par ailleurs, l'opérateur modulaire associé à ψ'' est égal à $R_v\Delta\hat{}$. On en déduit que :

$$v(\sigma_t^{\psi''}(x)) = \tilde I^* \sigma_t^{\psi''}(x) \tilde I \qquad \text{d'après 5.3.5.(b)}$$

$$= \tilde I^*(\Delta\hat{} R_v)^{it} x (R_v \Delta\hat{})^{-it} \tilde I$$

$$= \tilde{I}^*(\Delta\hat{})^{it} R_v \times R_v (\Delta\hat{})^{-it}\tilde{I}$$

$$= \tilde{I}^*(\Delta\hat{})^{it} P R_v \times R_v P (\Delta\hat{})^{-it}\tilde{I} \qquad \text{d'après 5.3.5.(d)}$$

$$= \tilde{I}^*(\Delta\hat{})^{it} \tilde{I}\tilde{I}^* R_v \times R_v \tilde{I}\tilde{I}^* (\Delta\hat{})^{-it}\tilde{I}$$

$$= \tilde{I}^*(\Delta\hat{})^{it} \tilde{I}\ v(R_v \times R_v) \tilde{I}^* (\Delta\hat{})^{-it}\tilde{I} \qquad \text{d'après 5.3.5.(b)}$$

$$= \tilde{I}^*(\Delta\hat{})^{it} \tilde{I}\ v(x)\ \tilde{I}^* (\Delta\hat{})^{-it}\tilde{I} \qquad \text{par définition de } R_v$$

$$= v(\sigma_t^{\psi'}(x)) \qquad \text{d'après 5.3.7.1.}$$

Comme la restriction de v à $(M\hat{})_{R_v}$ est injective, il en résulte :

$$\sigma_t^{\psi'} = \sigma_t^{\psi''} .$$

Dans ces conditions, d'après [14] , théorème 5.4. , il existe un opérateur auto-adjoint positif h affilié au centre de $(M\hat{})_{R_v}$ tel que :

$$\psi' = \psi''(h.)$$

ce qui s'écrit, par définition de ces deux poids :

$$\tilde{\varphi}\hat{}(v(x)) = \varphi\hat{}(h\ R_v\ x) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } (M\hat{})^+$$

En particulier, pour tout ω de $\mathcal{L}_\varphi$, on a :

$$\tilde{\varphi}\hat{}(v\ (\lambda(\omega)^*\lambda(\omega))) = \varphi\hat{}(h\ R_v\ \lambda(\omega)^*\lambda(\omega))$$

$$= \lim_\varepsilon \varphi\hat{}((h_\varepsilon^{1/2}\ R_v\ \lambda(\omega))^*(h_\varepsilon^{1/2}\ R_v\ \lambda(\omega)))$$

$$= \lim_\varepsilon \|\Lambda_{\varphi\hat{}}(h_\varepsilon^{1/2}\ R_v\ \lambda(\omega))\|^2 \qquad \text{d'après 3.1.9.}$$

$$= \lim_\varepsilon \|\pi_{\varphi\hat{}}(h_\varepsilon^{1/2}\ R_v)\Lambda_{\varphi\hat{}}(\lambda(\omega))\|^2$$

$$= \lim_\varepsilon \|\mathfrak{F}\, h_\varepsilon^{1/2}\ R_v\ \mathfrak{F}^*\ \Lambda_{\varphi\hat{}}(\lambda(\omega))\|^2 \qquad \text{d'après 2.3.4.2.}$$

$$= \lim_\varepsilon \|\mathfrak{F}\, h_\varepsilon^{1/2}\ R_v\ a(\omega)\|^2$$

$$= \lim_\varepsilon \|h_\varepsilon^{1/2}\ R_v\ a\ (\omega)\|^2$$

il en résulte que : $R_v a(\omega)$ appartient à $\mathcal{D}(h^{1/2})$ et que :

$$\tilde{\varphi}\hat{}(v(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega)) = \|h^{1/2}\ R_v\ a(\omega)\|^2$$

On en conclut, en utilisant 5.3.5.(c) que pour tout ω de $\mathcal{L}_\varphi$:

$$\|P\ a(\omega)\| = \|h^{1/2}\ R_v\ a(\omega)\|$$

or, $h^{1/2}R_v$ est affilié au centre de $M^\wedge$ et P appartient au commutant de $M^\wedge$, d'après 5.3.5.(a). Ces deux opérateurs positifs commutent. Comme $a(\mathcal{L}_\varphi)$ est dense dans H_φ (1.1.4.2.) et P borné, on en déduit en utilisant [5], lemme 23 que $P = h^{1/2}R_v$ d'où $P \leq R_v$. La proposition résulte finalement de 5.3.5.(d).

Corollaire 5.3.8. : Avec les notations de 5.3.2. : $\kappa E = E \kappa$.

Démonstration : Il résulte de 5.3.2.(e) que, pour tout x de M :

$$\begin{aligned}
\pi_\varphi(i(E(\kappa(x))))P &= P\,\pi_\varphi(\kappa(x))P && \\
&= P\,J^\wedge\pi_\varphi(x^*)J^\wedge\,P && \text{d'après 3.1.5.(a)}\\
&= J^\wedge\,P\,\pi_\varphi(x^*)P\,J^\wedge && \text{d'après 5.3.7.}\\
&= J^\wedge\,\pi_\varphi(i(Ex^*))P\,J^\wedge && \text{d'après 5.3.2.(e)}\\
&= J^\wedge\,\pi_\varphi(i(Ex^*))J^\wedge\,P && \text{d'après 5.3.7.}\\
&= \pi_\varphi(\kappa(i(Ex)))P && \text{d'après 3.1.5.(a)}\\
&= \pi_\varphi(i(\kappa(Ex)))P && \text{d'après 5.3.3.1.}
\end{aligned}$$

et 5.3.2.(e) permet de conclure.

Grâce aux théorèmes de [18], il résulte de 5.3.3. et 5.3.8. que l'on a finalement :

Théorème 5.3.9. : Soient $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac, $\tilde{M}$ une sous W^*-algèbre de M. Alors $\tilde{M}$ est une sous-algèbre de Kac de M si et seulement si il existe une espérance conditionnelle normale E de M sur $\tilde{M}$ telle que :

$$\Gamma E = (E \otimes E)\,\Gamma$$

$$\kappa E = E \kappa$$

$$\varphi E = \varphi$$

5.4. Décomposition canonique des $\mathcal{K}$-morphismes

Proposition 5.4.1. : Soient $\mathbb{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \kappa_1, \varphi_1)$ et $\mathbb{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \kappa_2, \varphi_2)$ deux algèbres de Kac, j un $\mathcal{K}$-morphisme bijectif de $\mathbb{K}_1$ sur $\mathbb{K}_2$. Soient W_1, λ_1, Δ_1 (resp. W_2, λ_2, Δ_2) les opérateurs fondamentaux, représentations de Fourier et opérateurs modulaires associés à $\mathbb{K}_1$ (resp. $\mathbb{K}_2$). Il existe un opérateur unitaire U de H_{φ_1} sur H_{φ_2} défini par :

(a) $k_j^{-1/2}\, U\, \Lambda_{\varphi_1}(x) = \Lambda_{\varphi_2}(j(x))$ pour tout x de $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$ et vérifiant :

(b) $\pi_{\varphi_2}(j(x))U = U\, \pi_{\varphi_1}(x)$ pour tout x de M_1

(c) $\omega_{\gamma,\alpha}\circ j = \omega_{U^*\gamma, U^*\alpha}$ pour tous α,γ de H_{φ_2}

(d) $(U \otimes U)W_1 = W_2(U \otimes U)$

(e) $\lambda_2(\omega)U = U\, \lambda_1(\omega\circ j)$ pour tout ω de M_{2_*}

(f) si ω appartient à $\mathcal{L}_{\varphi_2}$, alors $\omega\circ j \in \mathcal{L}_{\varphi_1}$ et $a_1(\omega\circ j) = k_j^{-1/2} U^* a_2(\omega)$

(g) $\Delta_2^{\hat{}} = U\, \Delta_1^{\hat{}}\, U^*$

<u>Démonstration</u> : Soient x et y dans $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$. Alors $j(x), j(y) \in \mathfrak{N}_{\varphi_2}$ et :

$$\begin{aligned}(\Lambda_{\varphi_2}(j(x)) \mid \Lambda_{\varphi_2}(j(y))) &= \varphi_2(j(y^*x)) \\ &= k_j^{-1}\varphi_1(y^*x) \qquad \text{d'après (Miii)} \\ &= (k_j^{-1/2}\Lambda_{\varphi_1}(x) \mid k_j^{-1/2}\Lambda_{\varphi_1}(y))\end{aligned}$$

il existe donc U isométrique vérifiant (a). Or, $\Lambda_{\varphi_2}(\mathfrak{N}_{\varphi_2})$ est inclus dans $U(H_{\varphi_1})$ et dense dans H_{φ_2}, donc $U(H_{\varphi_1}) = H_{\varphi_2}$; U est donc unitaire, d'où (a).

Soient x dans M_1 et y dans $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$. On a :

$$\begin{aligned}\pi_{\varphi_2}(j(x))U\,\Lambda_{\varphi_1}(y) &= k_j^{-1/2}\,\pi_{\varphi_2}(j(x))\,\Lambda_{\varphi_2}(j(y)) \qquad \text{d'après (a)} \\ &= k_j^{-1/2}\,\Lambda_{\varphi_2}(j(xy)) \\ &= U\,\Lambda_{\varphi_1}(xy) \qquad \text{d'après (a)} \\ &= U\,\pi_{\varphi_1}(x)\,\Lambda_{\varphi_1}(y) \qquad \text{d'où (b)}.\end{aligned}$$

Soient α, γ dans H_{φ_2}, x dans M_1. On a :

$$\begin{aligned}\langle x\, ,\, \omega_{U^*\gamma, U^*\alpha}\rangle &= (\pi_{\varphi_1}(x)U^*\gamma \mid U^*\alpha) \\ &= (U^*\pi_{\varphi_2}(j(x))\,\gamma \mid U^*\alpha) \qquad \text{d'après (b)}\end{aligned}$$

$= (\pi_{\varphi_2}(j(x))\gamma \mid \alpha)$ d'après (a)

$= \langle j(x) , \omega_{\gamma,\alpha}\rangle$

$= \langle x , \omega_{\gamma,\alpha}\circ j\rangle$ d'où (c) .

Soient x et y dans $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$. On a :

$(U \otimes U)W_1(\Lambda_{\varphi_1}(x) \otimes \Lambda_{\varphi_1}(y) = (U \otimes U)\Lambda_{\varphi_1\otimes\varphi_1}(\Gamma_1(y)(x \otimes 1))$ d'après 2.1.1.

$= k_j\ \Lambda_{\varphi_2\otimes\varphi_2}((j \otimes j)(\Gamma_1(y)(x \otimes 1))$ d'après (a)

$= k_j\ \Lambda_{\varphi_2\otimes\varphi_2}(\Gamma_2(j(y))(j(x) \otimes 1))$ d'après (Mi)

$= k_j\ W_2(\Lambda_{\varphi_2}(j(x)) \otimes \Lambda_{\varphi_2}(j(y))$ d'après 2.1.1.

$= W_2(U \otimes U)(\Lambda_{\varphi_1}(x) \otimes \Lambda_{\varphi_1}(y))$ d'après (a)

par densité, il en résulte (d).

Soient α, β, γ dans H_{φ_2} et δ dans H_{φ_1} . On a :

$(\beta \mid \lambda_2(\omega_{\gamma,\alpha})U\delta) = (W_2(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes U\delta)$ d'après 2.1.5.(a)

$= ((U^* \otimes U^*)W_2(\alpha \otimes \beta) \mid U^*\gamma \otimes \delta)$ d'après (a)

$= (W_1(U^* \otimes U^*)(\alpha \otimes \beta) \mid U^*\gamma \otimes \delta)$ d'après (d)

$= (U^*\beta \mid \lambda_1(\omega_{U^*\gamma,U^*\alpha})\delta)$ d'après 2.1.5.(e)

$= (\beta \mid U\lambda_1(\omega_{\gamma,\alpha}\circ j)\delta)$ d'après (c)

il en résulte (e).

Soient ω dans $\mathcal{L}_{\varphi_2}$ et x dans $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$. On a :

$(k_j^{-1/2}U^*a_2(\omega) \mid \Lambda_{\varphi_1}(x)) = (a_2(\omega) \mid k_j^{-1/2}U\ \Lambda_{\varphi_1}(x))$

$= (a_2(\omega) \mid \Lambda_{\varphi_2}(j(x)))$ d'après (a)

$= \langle j(x)^* , \omega\rangle$ d'après 1.1.3.(b)

$= \langle x^* , \omega\circ j\rangle$

$= (a(\omega\circ j) \mid \Lambda_{\varphi_1}(x))$ d'où (f).

Soit x dans M_1^+ . On a :

$\varphi_2(\kappa_2(j(x))) = \varphi_2(j(\kappa_1(x)))$	d'après (Mii)
$= k_j\varphi_1(\kappa_1(x))$	d'après (Miii)
$= k_j\varphi_1(\hat{\Delta}_1 x)$	d'après 4.2.1.
$= k_j \lim_\varepsilon \varphi_1((\hat{\Delta}_1)_\varepsilon x)$	par définition
$= \lim_\varepsilon \varphi_2(j((\hat{\Delta}_1)_\varepsilon)j(x))$	d'après (Miii)

donc la dérivée de Radon-Nikodym de $\varphi_2 \circ \kappa_2$ par rapport à φ_2 est la limite de $j((\hat{\Delta}_1)_\varepsilon)$ ce qui s'exprime, représenté dans H_{φ_2} , d'après (b) par $\lim_\varepsilon U(\hat{\Delta}_1)_\varepsilon U^*$ soit $U\,\hat{\Delta}_1\,U^*$, or d'après 4.2.1. cet élément est égal à $\hat{\Delta}_2$, on en conclut (g).

<u>Définition 5.4.2.</u> : Soient $\mathbb{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \kappa_1, \varphi_1)$ et $\mathbb{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \kappa_2, \varphi_2)$ deux algèbres de Kac et u un $\mathcal{K}$-morphisme de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$. En reprenant les notations de 5.1., on décompose le morphisme normal u de façon unique en une réduction r , un isomorphisme j et une injection i selon le diagramme :

$$M_1 \xrightarrow{\ r\ } M_{1R_u} \xrightarrow{\ j\ } u(M_1) \xrightarrow{\ i\ } M_2$$

c'est-à-dire que : $\qquad u = i\ j\ r$

ce que, pour tout x de M_1 :

$$j(r(x)) = u(x)$$

$$i(u(x)) = u(x)\ .$$

Dans ces conditions, nous avons :

<u>Proposition 5.4.3.</u> :

(a) M_{1R_u} est une algèbre de Kac réduite de M_1 ;

(b) $u(M_1)$ est une sous-algèbre de Kac de M_2 ;

(c) r est un $\mathcal{K}$-morphisme normalisé surjectif ;

(d) j est un $\mathcal{K}$- morphisme bijectif de coefficient k_u

(e) i est un $\mathcal{K}$- morphisme normalisé injectif.

Démonstration : D'après 5.1.4., le projecteur R_u vérifie les hypothèses du théorème 5.2.3. D'autre part $u(M_1)$ vérifie celles de 5.3.3. ; en effet, l'axiome (Miii) assure que la restriction de φ_2 à $u(M_1)$ est un poids semi-fini. Cela prouve (a), (b), (c), (e).

Pour tout x de M_1, on a :

$$\begin{aligned}
(i \otimes i)(\tilde{\Gamma}_2(j(r(x)))) &= \Gamma_2(i(j(r(x))) && \text{d'après ce qui précède} \\
&= \Gamma_2(u(x)) \\
&= (u \otimes u)\Gamma_1(x) && \text{d'après (Mi)} \\
&= (i \otimes i)(j \otimes j)(r \otimes r)\Gamma_1(x) \\
&= (i \otimes i)(j \otimes j)\Gamma_{1R_u}(r(x)) && \text{d'après ce qui précède}
\end{aligned}$$

donc : $\tilde{\Gamma}_2\, j = (j \otimes j)\Gamma_{1R_u}$.

On montrerait de même que $\tilde{\kappa}_2\, j = j\, \kappa_{1R_u}$. Enfin, pour tout x de M_1^+, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_2(j(r(x))) &= \varphi_2(i(j(r(x)))) \\
&= \varphi_2(u(x)) \\
&= k_u\, \varphi_1(R_u x) && \text{d'après (Miii)} \\
&= k_u\, \varphi_{1R_u}(r(x))
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

On en déduit immédiatement :

Corollaire 5.4.4. : Soient $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ deux algèbres de Kac.

(a) Si u est un $\mathcal{K}$-morphisme surjectif de $\mathbb{K}_1$ sur $\mathbb{K}_2$, il se décompose en la réduction canonique de $\mathbb{K}_1$ sur $\mathbb{K}_{1R_u}$ et un isomorphisme de coefficient k_u de $\mathbb{K}_{1R_u}$ dans $\mathbb{K}_2$.

(b) Si u est un $\mathcal{K}$-morphisme injectif de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$, il se décompose en un isomorphisme de coefficient k_u de $\mathbb{K}_1$ sur $u(\mathbb{K}_1)$ et l'injection canonique de $u(\mathbb{K}_1)$ dans $\mathbb{K}_2$.

Corollaire 5.4.5. : Soient $\mathbb{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \kappa_1, \varphi_1)$ et $\mathbb{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \kappa_2, \varphi_2)$ deux algèbres de Kac ; u un $\mathcal{K}$-morphisme de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$. On reprend les notations de 5.4.2. et on note W_1 et W_2 (resp. λ_1 et λ_2) les opérateurs fondamentaux (resp. les représentations de Fourier) associés à $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$, I_1 l'injection de $H_{\varphi_{1R_u}}$ dans H_{φ_1} (construite comme en 5.2.2.) , I_2 l'injection de $H_{\tilde{\varphi}_2}$ dans H_{φ_2} (construite comme en 5.3.2.), U l'opérateur unitaire de $H_{\varphi_{1R_u}}$ sur $H_{\tilde{\varphi}_2}$ (construite comme en 5.4.1.) c'est-à-dire respectivement définis par :

$I_1\, \Lambda_{\varphi_{1R_u}}(r(x)) = \Lambda_{\varphi_1}(R_u x)$ pour tout x de $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$

$I_2\, \Lambda_{\tilde{\varphi}_2}(x) = \Lambda_{\varphi_2}(i(x))$ pour tout x de $\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}_2}$

$k_u^{-1/2}\, U\, \Lambda_{\varphi_{1R_u}}(x) = \Lambda_{\tilde{\varphi}_2}(j(x))$ pour tout x de $\mathfrak{N}_{\varphi_{1R_u}}$

On a : $I_1 I_1^* = \pi_{\varphi_1}(R_u)$ d'après 5.2.2.(b). Posons $I_2 I_2^* = P_u$, alors :

(a) $\Gamma_2\, E_u = (E_u \otimes E_u)\, \Gamma_2$, $\kappa_2\, E_u = E_u\, \kappa_2$ et P_u appartient au centre de $\hat{M_2}$;

(b) $(I_2 \otimes I_2)(U \otimes U)(I_1^* \otimes I_1^*)W_1 = W_2(I_2 \otimes I_2)(U \otimes U)(I_1^* \otimes I_1^*)$

et $I_1\, U^* I_2^*\, \lambda_2(\omega) I_2\, U\, I_1^* = \lambda_1(\omega \circ u)\pi_{\varphi_1}(R_u) = \pi_{\varphi_1}(R_u)\lambda_1(\omega\circ u)$ pour tout ω de M_{2*}

(c) si ω appartient à $\mathcal{L}_{\varphi_2}$, $\omega\circ u \in \mathcal{L}_{\varphi_1}$ et $a_1(\omega\circ u) = k_u^{-1/2} I_1 U^* I_2^* a_2(\omega)$

(d) $U\, I_1^*\, \hat{\Delta_1}\, I_1\, U^* = I_2^*\, \hat{\Delta_2}\, I_2$.

<u>Démonstration</u> : Remarquons tout d'abord que 5.4.3. nous permet de munir M_{1R_u} et $u(M_1)$ de structures d'algèbres de Kac isomorphes et telles qu'elles soient respectivement réduites de K_1 et sous-algèbre de Kac de K_2. On notera W_{R_u} , λ_{R_u} , $\tilde{W}$, $\tilde{\lambda}$ les opérateurs fondamentaux et représentations de Fourier associés. Enfin, il est clair que $R_u = R_r$, $E_u = E_i$ et $k_u = k_j$; d'après 5.3.7. cela entraîne en particulier que P_u appartient au centre de $\hat{M_2}$.

Dans ces conditions, en appliquant 5.3.3. et 5.3.8. , on obtient aisément (a).

On a, d'une part :

$$\begin{aligned}(I_2 \otimes I_2)(U \otimes U)(I_1^* \otimes I_1^*)W_1 &= (I_2 \otimes I_2)(U \otimes U)W_{R_u}(I_1^* \otimes I_1^*) && \text{d'après 5.2.3.(b)}\\ &= (I_2 \otimes I_2)\tilde{W}(U \otimes U)(I_1^* \otimes I_1^*) && \text{d'après 5.4.1.(d)}\\ &= W_2(I_2 \otimes I_2)(U \otimes U)(I_1^* \otimes I_1^*) && \text{d'après 5.3.3.(a)}\end{aligned}$$

et d'autre part, pour tout ω de M_{2*} :

$$
\begin{aligned}
I_1\, U^* I_2^* \,\lambda_2(\omega) I_2\, U\, I_1^* &= I_1 U^* \tilde{\lambda}(\omega \circ i)\, U\, I_1^* && \text{d'après 5.3.4.(b)}\\
&= I_1\, \lambda_{R_u}(\omega \circ i \circ j)\, I_1^* && \text{d'après 5.4.1.(e)}\\
&= \lambda_1(\omega \circ i \circ j \circ r) I_1 I_1^* && \text{d'après 5.2.3.(c)}\\
&= \lambda_1(\omega \circ u)\pi_{\varphi_1}(R_u) && \text{d'après 5.4.2.}\\
&= \pi_{\varphi_1}(R_u)\lambda_1(\omega \circ u) && \text{d'après 5.2.3.}
\end{aligned}
$$

ce qui achève la démonstration de (b).

Soit ω dans $\mathcal{L}_{\varphi_2}$. D'après 5.3.2.(h) $\omega \circ i$ appartient à $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}_2}$ et $\tilde{a}(\omega \circ i) = I_2^* a_2(\omega)$. D'après 5.4.1.(f), $\omega \circ i \circ j$ appartient à $\mathcal{L}_{\varphi_{R_u}}$ et $a_{R_u}(\omega \circ i \circ j) = k_u^{-1/2}\, U^* I_2^*\, a_2(\omega)$. D'après 5.2.2.(e), $\omega \circ i \circ j \circ r = \omega \circ u$ appartient à $\mathcal{L}_{\varphi_1}$ et $a_1(\omega \circ u) = k_u^{-1/2} I_1 U^* I_2^* a_2(\omega)$, d'où (c) .

Comme $\hat{\Delta}_1$ est la dérivée de Radon-Nikodym de $\varphi_1 \circ \kappa_1$ par rapport à φ_1 (voir 4.2.1.), il est clair que la dérivée de Radon-Nikodym de $(\varphi_1 \circ \kappa_1)_{R_u}$ par rapport à φ_{1R_u} est égale à $R_u\, \hat{\Delta}_1$. D'après 5.2.2.(c), elle se représente donc dans $H_{\varphi_{1R_u}}$ par $I_1^*\, \hat{\Delta}_1\, I_1$. Il résulte alors de 5.4.1.(g) que la dérivée de Radon-Nikodym de $\tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\kappa}_2$ par rapport à $\tilde{\varphi}_2$ est égale à $U I_1^* \hat{\Delta}_1 I_1 U^*$, et de 5.3.6.(b) qu'elle vaut $I_2^* \hat{\Delta}_2\, I_2$, d'où (d).

Proposition 5.4.6. : Soient $\mathbb{K}_i = (M_i, \Gamma_i, \kappa_i, \varphi_i)$ $(i = 1, 2)$ deux algèbres de Kac et u un $\mathcal{K}$-morphisme de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$. On a , pour tout x de M_1 et t réel :

$$\sigma_t^{\varphi_2}(u(x)) = u(\sigma_t^{\varphi_1}(x)) \quad .$$

Démonstration : Reprenons les notations de 5.4.2. ; j est un isomorphisme de M_{1R_u} sur $u(M_1)$ tel que $\varphi_{1R_u} = k_u^{-1}(\tilde{\varphi}_2 \circ j)$.

On a alors, d'après [4], lemme 1.2.10. :

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}_2} \circ j = j \circ \sigma^{\varphi_{1R_u}}$$

Cela entraîne, pour tout x de M_1 :

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}_2}(u(x)) = \sigma_t^{\tilde{\varphi}_2}(j(r(x)))$$

$$
\begin{aligned}
&= j(\sigma_t^{\varphi_1 R_u}(r(x))) \\
&= j(r(\sigma_t^{\varphi_1}(R_u x))) && \text{d'après [4],3.2.6.} \\
&= u(\sigma_t^{\varphi_1}(R_u x)) \\
&= u(R_u\ \sigma_t^{\varphi_1}(x)) \\
&= u(\sigma_t^{\varphi_1}(x))
\end{aligned}
$$

Or, d'après [4] , lemme 1.4.3. , on a , pour tout x de M_1 :

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}_2}(u(x)) = \sigma_t^{\varphi_2}(u(x))$$

d'où le résultat.

6 LA CATEGORIE DES ALGEBRES DE KAC

6.1. Composition des $\mathcal{K}$ -morphismes

Lemme 6.1.1. : Soient $\mathbb{K}_i = (M_i, \Gamma_i, \kappa_i, \varphi_i)$ $(i = 1,2,3)$ trois algèbres de Kac et u (resp. v) un $\mathcal{K}$-morphisme de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$ (resp. de $\mathbb{K}_2$ dans $\mathbb{K}_3$). L'application vu vérifie les axiomes (M_i), (Mii) et (Miv).

Démonstration : Il est clair que vu est un morphisme normal de M_1 dans M_3, tel que $vu(1) = 1$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_3 vu &= (v \otimes v)\Gamma_2 u && \text{par (Mi)} \\ &= (v \otimes v)(u \otimes u)\Gamma_1 && \text{par (Mi)} \\ &= (vu \otimes vu)\Gamma_1 \end{aligned}$$

Donc vu vérifie (Mi).

De même
$$\begin{aligned} \kappa_3 vu &= v\kappa_2 u && \text{par (Mii)} \\ &= vu\kappa_1 && \text{par (Mii)} \end{aligned}$$

Donc vu vérifie (Mii).

Enfin, pour tout t réel, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_t^{\varphi_3} vu &= v\, \sigma_t^{\varphi_2}\, u && \text{par 5.4.6.} \\ &= vu\, \sigma_t^{\varphi_1} && \text{par 5.4.6.} \end{aligned}$$

Donc $vu(M_1)$ est $\sigma_t^{\varphi_3}$-invariante ; le lemme en résulte.

Lemme 6.1.2. : Reprenons les notations de 6.1.1.

(a) Il existe un unique élément Q de M_1 tel que $u(Q) = E_u(R_v)$ et $Q = R_u Q$.

De plus, Q est positif, non nul, et appartient au centre de M_1.

(b) Pour tout x de M_1^+, on a :

$$\varphi_3(vu(x)) = k_u k_v \Gamma_1(Qx)$$

(c) R_{vu} est le support de Q .

Démonstration : (a) L'existence et l'unicité de Q proviennent de l'existence d'un isomorphisme entre M_{1R_u} et $u(M_1)$.

Comme R_v est positif, $E_u(R_v)$ également, et, grâce à cet isomorphisme, on voit que Q est également positif. Comme $v(1) = 1$, v n'est pas nul, R_v non plus. Donc, $E_u(R_v)$ est différent de 0 et Q également. Enfin, comme $E_u(R_v)$ appartient au centre de $u(M_1)$, et R_u au centre de M_1 , on voit que Q appartient au centre de M_1.

(b) Soit x dans M_1^+ ; on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(Qx) &= \varphi_1(R_u\, Qx) && \text{par 6.1.2.(a)} \\
&= k_u^{-1}\, \varphi_2(u(Qx)) && \text{par (Miii)} \\
&= k_u^{-1}\, \varphi_2(E_u(R_v)u(x)) && \text{par 6.1.2.(a)} \\
&= k_u^{-1}\, \varphi_2 \circ E_u(R_v\, u(x)) && \\
&= k_u^{-1}\, \varphi_2(R_v\, u(x)) && \text{par 5.1.3.(c)} \\
&= k_u^{-1}\, k_v^{-1}\, \varphi_3(vu(x)) && \text{par (Miii)}
\end{aligned}$$

d'où (b).

(c) Pour tout x dans M_1^+ , $\varphi_1(Qx) = 0$ est donc équivalent à $\varphi_3(vu(x)) = 0$.

Comme les poids φ_1 et φ_3 sont fidèles, on en déduit :

$$(x \in M_1^+) \quad Qx = 0 \Leftrightarrow vu(x) = 0 \Leftrightarrow R_{vu}x = 0$$

d'où (c).

Lemme 6.1.3. : Reprenons les notations de 6.1.1. et 6.1.2. Il résulte de (6.1.1.) et de (5.1.4.) que :

$$\Gamma_1(R_{vu}) \geq R_{vu} \otimes R_{vu}$$

et

$$\kappa_1(R_{vu}) = R_{vu}$$

D'après (5.2.3.), $(M_{1R_{vu}}, \Gamma_{1R_{vu}}, \kappa_{1R_{vu}}, \varphi_{1R_{vu}})$ est une algèbre de Kac que nous noterons, pour simplifier $\mathbb{K}_o = (M_o, \Gamma_o, \kappa_o, \varphi_o)$. Notons r_o la réduction

$M_1 \to M_{1R_{vu}}$. Posons $q = \pi_{\varphi_o}(r_o(Q))$. Alors :

(a) l'opérateur q est d'image dense dans H_{φ_o}

(b) $\kappa_o(r_o(Q)) = r_o(Q)$

(c) pour tout x de M_1^+ , on a :

$$k_v\, k_u\, \varphi_o(r_o(Qx)) = \varphi_3(vu(x))$$

Démonstration : Par (6.1.2. c), on voit que, pour tout x de M_o^+ , $r_o(Q)x = 0$ est équivalent à $x = 0$.

En particulier, on voit que le support de q est égal à 1 .

Comme q est auto-adjoint, on en déduit (a).

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} u(\kappa_1(Q)) &= \kappa_2(u(Q)) && \text{par (Mii)} \\ &= \kappa_2(E_u(R_v)) && \text{par 6.1.2.(a)} \\ &= E_u(\kappa_2(R_v')) && \text{par 5.4.5.(a)} \\ &= E_u(R_v) && \text{par 5.1.4.(b)} \\ &= u(Q) && \text{par 6.1.2.(a)} \end{aligned}$$

Donc, à fortiori $vu(\kappa_1(Q)) = vu(Q)$

soit $$r_o(\kappa_1(Q)) = r_o(Q)$$

d'où (b), par (Mii).

Enfin, pour tout x de M_1^+ , on a :

$$\begin{aligned} k_v k_u \varphi_o(r_o(Qx)) &= k_v k_u \varphi_1(R_{vu}Qx) && \text{par définition de } \varphi_o \\ &= k_v k_u \varphi_1(Qx) && \text{par 6.1.2.(c)} \\ &= \varphi_3(vu(x)) && \text{par 6.1.2.(b)} \end{aligned}$$

Lemme 6.1.4. : Reprenons les notations de 6.1.3.. Soit W_o l'opérateur fondamental associé à $\mathbb{K}_o$. On a :

$$(1 \otimes q)W_o = W_o(1 \otimes q)$$

Démonstration : Soient x, y dans $\mathfrak{N}_{\varphi_1}$. Comme $r_o(x)$ et $r_o(y)$ appartiennent à $\mathfrak{N}_{\varphi_o}$, on a :

$$\|(q^{1/2} \otimes q^{1/2})\Lambda_{\varphi_o}(r_o(x)) \otimes \Lambda_{\varphi_o}(r_o(y))\|^2 =$$

$$= \varphi_o(r_o(Qx^*x))\varphi_o(r_o(Qy^*y))$$

$$= (k_v k_u)^{-2}\varphi_3(vu(x^*x))\varphi_3(vu(y^*y)) \qquad \text{par 6.1.3.(c)}$$

$$= (k_v k_u)^{-2}(\varphi_3 \otimes \varphi_3)[(vu(x^*) \otimes 1)(\Gamma_3 vu(y^*y))(vu(x) \otimes 1)] \qquad \text{par (Kiii)}$$

$$= (k_v k_u)^{-2}(\varphi_3 \otimes \varphi_3)[(vu \otimes vu)((x^* \otimes 1)\Gamma_1(y^*y)(x \otimes 1))] \qquad \text{par 6.1.2.}$$

$$= (\varphi_o \otimes \varphi_o)[(r_o \otimes r_o)[(Q \otimes Q)(x^* \otimes 1)\Gamma_1(y^*y)(x \otimes 1)]] \qquad \text{par 6.1.3.(c)}$$

$$= \|\Lambda_{\varphi_o \otimes \varphi_o}[(r_o \otimes r_o)[(Q^{1/2} \otimes Q^{1/2})\Gamma_1(y)(x \otimes 1)]]\|^2$$

$$= \|(q^{1/2} \otimes q^{1/2})\Lambda_{\varphi_o \otimes \varphi_o}((r_o \otimes r_o)(\Gamma_1(y)(x \otimes 1)))\|^2$$

$$= \|(q^{1/2} \otimes q^{1/2})\Lambda_{\varphi_o \otimes \varphi_o}(\Gamma_o(r_o(y))(r_o(x) \otimes 1)\|^2 \qquad \text{par (Mi)}$$

$$= \|(q^{1/2} \otimes q^{1/2})W_o(\Lambda_{\varphi_o}(r_o(x)) \otimes \Lambda_{\varphi_o}(r_o(y)))\|^2 \qquad \text{par 2.1.1.}$$

Par polarisation, il résulte alors de 6.1.3.(a) qu'il existe une isométrie W' de $H_{\varphi_o} \otimes H_{\varphi_o}$ dans lui-même, telle que :

$$W'(q^{1/2} \otimes q^{1/2}) = (q^{1/2} \otimes q^{1/2})W.$$

Comme Q appartient au centre de M_1, 6.1.2.(a) , on voit que $q^{1/2}$ appartient au centre de $\pi_{\varphi_o}(M_o)$. Donc, par (2.1.1.), cela s'écrit aussi :

$$W'(1 \otimes q^{1/2})(q^{1/2} \otimes 1) = (1 \otimes q^{1/2})W_o(q^{1/2} \otimes 1)$$

et on a donc, en utilisant 6.1.3.(a) :

6.1.4.1. $\qquad W'(1 \otimes q^{1/2}) = (1 \otimes q^{1/2})W_o$

Comme W_o est unitaire, on en déduit :

$$W'^*(1 \otimes q^{1/2}) = W'^*(1 \otimes q^{1/2})W_o W_o^*$$

$$= W'^*W'(1 \otimes q^{1/2})W_o^* \qquad \text{par 6.1.4.1.}$$

$$= (1 \otimes q^{1/2})W_o^* \qquad \text{car } W' \text{ est isométrique}$$

Donc, en transposant :

$$(1 \otimes q^{1/2})W' = W_o(1 \otimes q^{1/2})$$

On en déduit alors que :

$$(1 \otimes q^{1/2})W'(1 \otimes q^{1/2}) = W_o(1 \otimes q)$$

Mais, d'après 6.1.4.1. , on a :

$$(1 \otimes q^{1/2})W'(1 \otimes q^{1/2}) = (1 \otimes q)W_o$$

d'où le résultat.

Lemme 6.1.5. : Reprenons les notations de 6.1.2. Il existe un nombre $m > o$ tel que :

$$Q = m\, R_{vu}$$

Démonstration : On a :

$$(\pi_{\varphi_o} \otimes \pi_{\varphi_o})(\Gamma_o(r_o(Q)) = W_o(1 \otimes q)W_o^* \qquad \text{par 2.2.5.(b)}$$

$$= 1 \otimes q \qquad \text{par 6.1.4.}$$

Donc $$\Gamma_o(r_o(Q)) = 1 \otimes r_o(Q)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} r_o(Q) \otimes 1 &= \varsigma(\Gamma_o(r_o(Q)) \\ &= (\kappa_o \otimes \kappa_o)\Gamma_o(\kappa_o(r_o(Q))) && \text{par 1.2.1.3.} \\ &= (\kappa_o \otimes \kappa_o)\Gamma_o(r_o(Q)) && \text{par 6.1.3.(b)} \\ &= (\kappa_o \otimes \kappa_o)(1 \otimes r_o(Q)) && \text{par ce qui précède} \\ &= 1 \otimes \kappa_o(r_o(Q)) \\ &= 1 \otimes r_o(Q) && \text{par 6.1.3.(b)} \end{aligned}$$

Il en résulte que $r_o(Q)$ est proportionnel à 1. Ainsi donc, il existe un nombre réel m tel que $Q\, R_{vu} = m\, R_{vu}$

Par 6.1.2.(c), on en déduit :

$$Q = m\, R_{vu}$$

Par 6.1.3.(a) , on voit que m est strictement positif.

Proposition 6.1.6. : Reprenons les hypothèses de 6.1.2. L'application vu est un $\mathcal{K}$ -morphisme de coefficient $mk_v k_u$ (où m a été introduit en 6.1.5.).

<u>Démonstration</u> : D'après 6.1.2. , il ne reste que (Miii) à démontrer. Or, il résulte de 6.1.2.(b) et 6.1.5. que, pour tout x de M_1^+ :

$$\varphi_3(vu(x)) = m\, k_v\, k_u\, \varphi_1\, (R_{vu}x)$$

On en déduit :

<u>Théorème 6.1.7.</u> : La classe des algèbres de Kac peut être munie d'une structure de catégorie dont les flèches sont les $\mathcal{K}$-morphismes.

<u>Lemme 6.1.8.</u> : Soient M une W^*-algèbre, $\tilde{M}$ une sous W^*-algèbre de M, E une espérance conditionnelle fidèle de M sur $\tilde{M}$, P un projecteur de M. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $E(P)$ est un projecteur

(ii) $P \in \tilde{M}$

<u>Démonstration</u> : (ii) $\Rightarrow$ (i) est trivial .

Supposons donc (i). On a :

$$E(P\, E(P)) = E(P)\, E(P) = E(P)$$

Or : $\quad P\, E(P) \leq E(P)$

donc, grâce à la fidélité de E, on a : $P\, E(P) = E(P)$

et donc : $\quad P \leq E(P)$

Or : $\quad E(P) = E(E(P))$;

donc, par la fidélité de E, on a :

$$P = E(P) .$$

<u>Proposition 6.1.9.</u> : Reprenons les hypothèses de 6.1.2. Alors, on a $k_{vu} = k_v k_u$ si et seulement si R_v appartient à $u(M_1)$.

<u>Démonstration</u> : Utilisons les notations de 6.1.5. Si $k_{vu} = k_v k_u$, on déduit de 6.1.5. et 6.1.6. que $Q = R_{vu}$. Donc $E_u(R_v) = u(Q)$ (cf. 6.1.2. (a)) est un projecteur. Par 6.1.8., on en déduit que R_v appartient à $u(M_1)$.

Réciproquement, supposons que R_v appartienne à $u(M_1)$. Alors :

$$u(R_{vu}) = m^{-1}u(Q) = m^{-1}E_u(R_v) = m^{-1}R_v \quad .$$

Donc $m^{-1}R_v$ est un projecteur, ce qui impose $m = 1$, et donc, grâce à 6.1.6. ,

$$k_{vu} = k_v k_u \quad .$$

6.2. Construction du $\mathcal{K}$-morphisme dual

Soient $\mathbb{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \kappa_1, \varphi_1)$ et $\mathbb{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \kappa_2, \varphi_2)$ deux algèbres de Kac, et $u : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ un $\mathcal{K}$-morphisme de coefficient k_u. On reprend les notations de 5.4.2. et 5.4.5.

Lemme 6.2.1. : Soit N l'algèbre faiblement fermée engendrée par l'ensemble des $\lambda_1(\omega\circ r)$, où ω parcourt $(M_{1R_u})_*$. Alors :

(a) l'identité sur H_{φ_1} appartient à N, qui est donc une sous-algèbre de von Neumann de $\hat{M_1}$; de plus, $\pi_{\varphi_1}(R_u)$ appartient à N' ;

(b) soit x dans $\hat{M_1}$; alors $x\,\pi_{\varphi_1}(R_u) = 0$ entraîne $x = 0$. En particulier, la réduction $N \to N_{\pi_{\varphi_1}(R_u)}$ est un isomorphisme. On notera $\mathfrak{J}$ l'isomorphisme inverse.

Démonstration : (a) Remarquons d'abord que l'ensemble des $\lambda_1(\omega\circ r)$, où ω parcourt $(M_{1R_u})_*$ est une algèbre involutive (grâce à, d'une part 2.1.9. et 5.2.3.2., et, d'autre part 2.1.7. et 5.2.3.1.). D'autre part, comme tout élément de $(M_{1R_u})_*$ est de la forme $\omega_{\gamma,\alpha}$ avec γ,α dans $H_{\varphi_{1R_u}}$, le lemme 5.2.2.(d) nous indique que tout élément de M_{1*} de la forme $\omega\circ r$ (avec ω dans $(M_{1R_u})_*$) est de la forme $\omega_{I_1\gamma, I_1\alpha}$ avec γ, α dans $H_{\varphi_{1R_u}}$, ou encore de la forme :

$$\omega_{\pi_{\varphi_1}(R_u)\gamma,\pi_{\varphi_1}(R_u)\alpha} \quad \text{avec } \gamma,\alpha \text{ dans } H_{\varphi_1}$$

car $I_1I_1^* = \pi_{\varphi_1}(R_u)$ (5.4.5.) .

Soit maintenant β dans H_{φ_1}, tel que :

$(\beta \mid \lambda_1(\omega\circ r)\delta) = 0$ pour tout ω de $(M_{1R_u})_*$, δ dans H_{φ_1} .

Cela s'écrit donc aussi :

$(\beta \mid \lambda_1(\omega_{\pi_{\varphi_1}(R_u)\gamma,\pi_{\varphi_1}(R_u)\alpha})\delta) = 0$ pour tous α, γ, δ dans H_φ

et donc, par 2.1.5.(a) :

$$(W_1(\pi_{\varphi_1}(R_u)\alpha \otimes \beta) \mid \pi_{\varphi_1}(R_u)\gamma \otimes \delta) = 0$$

Comme R_u appartient au centre de M, on a, par 2.1.1. :

$$(W_1(\pi_{\varphi_1}(R_u)\alpha \otimes \beta) | \gamma \otimes \delta) = 0 \quad \text{pour tous } \alpha,\ \gamma,\ \delta \text{ dans } H_{\varphi_1}.$$

On en déduit que $\pi_{\varphi_1}(R_u)\alpha \otimes \beta = 0$ pour tout α de H_{φ_1}.

Comme $u(1) = 1$, R_u est différent de 0, et on a donc $\beta = 0$.

Alors, par ([6], chapitre 4.3.4., lemme 6), l'identité sur H_{φ_1} appartient à N.

D'autre part, $\pi_{\varphi_1}(R_u)$ appartient à N' par 5.4.5.(b).

(b) Comme R_u est dans le centre de M_1, on a, grâce à ([2], lemme 4.10), pour tous ξ,η dans $\mathfrak{A}'_{\varphi_1}$:

$$\pi_{\varphi_1}(R_u)\xi \in \mathfrak{A}'_{\varphi_1}, \qquad (\pi_{\varphi_1}(R_u)\xi)^{\flat} = \pi_{\varphi_1}(R_u)\xi^{\flat}$$

$$(\pi_{\varphi_1}(R_u)\ )\ \top\ (\pi_{\varphi_1}(R_u)\eta) = \pi_{\varphi_1}(R_u)(\xi\top\eta)$$

Soit alors x dans $\hat{M_1}$, tel que $x\,\pi_{\varphi_1}(R_u) = 0$. On a, pour tous ξ,η dans $\mathfrak{A}'_{\varphi_1}$:

$$\begin{aligned} x\lambda_1(\omega_{\pi_{\varphi_1}(R_u)\xi,\pi_{\varphi_1}(R_u)\eta}) &= x\,\hat{\pi}_1((\pi_{\varphi_1}(R_u)\xi)\ \top\ (\pi_{\varphi_1}(R_u)\eta)^{\flat}) \text{ par 2.3.5.3.} \\ &= x\,\hat{\pi}_1(\pi_{\varphi_1}(R_u)(\xi\ \top\ \eta^{\flat})) \\ &= \hat{\pi}_1(x\,\pi_{\varphi_1}(R_u)(\xi\ \top\ \eta^{\flat})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par continuité de λ_1, on en déduit, pour tous $\xi,\ \eta$ de H_{φ_1}

$$x\ \lambda_1(\omega_{\pi_{\varphi_1}(R_u)\xi,\pi_{\varphi_1}(R_u)\eta}) = 0$$

ou encore $\qquad x\ \lambda_1(\omega\circ r) = 0 \qquad$ pour tout ω de $(M_{1R_u})_*$

Grâce à (a), on en déduit $x = 0$.

<u>Proposition 6.2.2.</u> : L'application de $\lambda_2(M_{2*})$ dans $\lambda_1(M_{1*})$ définie par

$$\lambda_2(\omega) \to \lambda_1(\omega\circ u) \qquad (\omega \in M_{2*})$$

se prolonge de façon unique en un morphisme normal $u\hat{}$ de $\hat{M_2}$ dans $\hat{M_1}$, tel que $u\hat{}(1) = 1$.

On a, de plus, $u\hat{}(\hat{M_2}) \subset N$ $\qquad$ (où N a été défini en 6.2.1.)

Démonstration : Rappelons que la représentation λ_2 est fidèle (4.3.8.), ce qui donne un sens à l'énoncé ci-dessus.

Par 5.4.5.(b), on a, pour tout ω de M_{2_*} :

$$\lambda_1(\omega\circ u)\pi_{\varphi_1}(R_u) = I_1\ U^* I_2^*\ \lambda_2(\omega) I_2\ U\ I_1^*$$

Comme $\lambda_1(\omega\circ u) = \lambda_1(\omega\circ i\circ j\circ r)$ appartient à N (car $\omega\circ i\circ j$ appartient à $(M_{1R_u})_*$), on a :

$$\lambda_1(\omega\circ u) = \mathfrak{J}\,(I_1\ U^*\ I_2^*\ \lambda_2(\omega) I_2\ U\ I_1^*)$$

(où $\mathfrak{J}$ a été défini en 6.2.1.).

Posons, pour tout x de $M_2^\wedge$:

$$u^\wedge(x) = \mathfrak{J}\,(I_1\ U^*\ I_2^*\ x\ I_2\ U\ I_1^*)\ .$$

On a ainsi clairement défini une application linéaire positive, normale, de $M_2^\wedge$ dans N (et donc dans $M_1^\wedge$).

On peut écrire aussi :

6.2.2.1. $$u^\wedge(x)\pi_{\varphi_1}(R_u) = I_1\ U^*\ I_2^*\ x\ I_2\ U\ I_1^*$$

On voit que $u^\wedge(1) = \mathfrak{J}\,(\pi_{\varphi_1}(R_u))$ par 5.4.5.
$= 1$

Enfin, soient x, y dans $M_2^\wedge$, on a :

$$\begin{aligned} u^\wedge(x)u^\wedge(y) &= \mathfrak{J}\,(I_1U^*I_2^*xI_2UI_1^*)\ \ \mathfrak{J}\,(I_1U\ I_2^*yI_2UI_1^*) \\ &= \mathfrak{J}\,(I_1U^*I_2^*xI_2UI_1^*I_1U^*I_2^*yI_2UI_1^*) \\ &= \mathfrak{J}\,(I_1U^*I_2^*xP_uyI_2UI_1^*) \\ &= \mathfrak{J}\,(I_1U^*I_2^*P_uxyI_2UI_1^*) && \text{par 5.4.5.(a)} \\ &= \mathfrak{J}\,(I_1U^*I_2^*xyI_2UI_1^*) && \text{par 5.4.5.} \\ &= u^\wedge(xy) \end{aligned}$$

L'unicité de $u^\wedge$ est évidente par densité de $\lambda_2(M_{2_*})$ dans $M_2^\wedge$.

Proposition 6.2.3. : On a $R_{\hat{u}} = P_u$.

Démonstration : Soit x dans $M_2^\wedge$; $u^\wedge(x) = 0$ est équivalent à $u^\wedge(xx^*) = 0$ et donc à $I_1U^*I_2^*xx^*I_2UI_1^* = 0$, ou encore à $I_1U^*I_2^*x = 0$ et donc à $I_2^*x = 0$, soit $P_ux = 0$.

Comme P_u appartient au centre de $M_2^{\wedge}$ (5.4.5.(a)), on en déduit le résultat.

<u>Théorème 6.2.4.</u> : L'application $u^{\wedge}$ de $M_2^{\wedge}$, défini en 6.2.2. est un $\mathcal{K}$-morphisme de coefficient k_u^{-1}.

<u>Démonstration</u> : Soit x dans $M_2^{\wedge}$; on a :

$\Gamma_1^{\wedge}(u^{\wedge}(x))(\pi_{\varphi_1}(R_u) \otimes \pi_{\varphi_1}(R_u)) =$

$$= \sigma W_1^*(u^{\wedge}(x) \otimes 1)W_1\sigma(\pi_{\varphi_1}(R_u) \otimes \pi_{\varphi_1}(R_u)) \qquad \text{par 3.2.1.}$$

$$= \sigma W_1^*(u^{\wedge}(x) \otimes 1)W_1(\pi_{\varphi_1}(R_u) \otimes \pi_{\varphi_1}(R_u))\sigma$$

$$= \sigma W_1^*(u^{\wedge}(x) \otimes 1)(\pi_{\varphi_1}(R_u) \otimes \pi_{\varphi_1}(R_u))W_1\sigma \qquad \text{par 5.1.5.}$$

$$= \sigma W_1^*(u^{\wedge}(x)\pi_{\varphi_1}(R_u) \otimes \pi_{\varphi_1}(R_u))W_1\sigma$$

$$= \sigma W_1^*(I_1U^*I_2xI_2UI_1^* \otimes I_1U^*I_2^*I_2UI_1^*)W_1\sigma \qquad \text{par 6.2.2.1.}$$

$$= \sigma W_1^*(I_1 \otimes I_1)(U^* \otimes U^*)(I_2^* \otimes I_2^*)(x \otimes 1)(I_2 \otimes I_2)(U \otimes U)(I_1^* \otimes I_1^*)W_1\sigma$$

$$= \sigma(I_1 \otimes I_1)(U^* \otimes U^*)(I_2^* \otimes I_2^*)W_2^*(x \otimes 1)W_2(I_2 \otimes I_2)(U \otimes U)(I_1^* \otimes I_1^*)\sigma \qquad \text{par 5.4.5.(b)}$$

$$= (I_1 \otimes I_1)(U^* \otimes U^*)(I_2^* \otimes I_2^*)\sigma W_2^*(x \otimes 1)W_2\sigma(I_2 \otimes I_2)(U \otimes U)(I_1^* \otimes I_1^*)$$

$$= (I_1 \otimes I_1)(U^* \otimes U^*)(I_2^* \otimes I_2^*)\,\Gamma_2^{\wedge}(x)(I_2 \otimes I_2)(U \otimes U)(I_1^* \otimes I_1^*) \qquad \text{par 3.2.1.}$$

$$= (u^{\wedge} \otimes u^{\wedge})(\Gamma_2^{\wedge}(x))(\pi_{\varphi_1}(R_u) \otimes \pi_{\varphi_1}(R_u)) \qquad \text{par 6.2.2.1.}$$

Donc, par 6.2.1.(b), on trouve :

$$\Gamma_1^{\wedge}(u^{\wedge}(x)) = (u^{\wedge} \otimes u^{\wedge})(\Gamma_2^{\wedge}(x)) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } M_2^{\wedge}.$$

Le morphisme $u^{\wedge}$ vérifie donc (Mi).

Soit ω dans M_{2*} ; on a :

$$u^{\wedge}(\kappa_2^{\wedge}(\lambda_2(\omega))) = u^{\wedge}(\lambda_2(\omega\circ\kappa_2)) \qquad \text{par 3.3.2.}$$

$$= \lambda_1(\omega\circ\kappa_2\circ u) \qquad \text{par 6.2.2.}$$

$$= \lambda_1(\omega\circ u\circ\kappa_1) \qquad \text{par (Mii)}$$

$$= \kappa_1^{\wedge}(\lambda_1(\omega\circ u)) \qquad \text{par 3.3.2.}$$

$= \kappa_1^{\wedge}(u^{\wedge}(\lambda_2(\omega)))$ par 6.2.2.

Donc, par continuité, $u^{\wedge}\kappa_2^{\wedge} = \kappa_1^{\wedge}u^{\wedge}$, et $u^{\wedge}$ vérifie donc (Mii).

Soit x dans $M_2^{\wedge}$; on a :

$$
\begin{aligned}
u^{\wedge}(\sigma_t^{\varphi_2^{\wedge}}(x))\pi_{\varphi_1}(R_u) &= u^{\wedge}(R_{u^{\wedge}}\ \sigma_t^{\varphi_2^{\wedge}}(x))\pi_{\varphi_1}(R_u) \\
&= u^{\wedge}(\sigma_t^{\varphi_2^{\wedge}}(R_{u^{\wedge}}x))\pi_{\varphi_1}(R_u) \\
&= I_1U^*I_2^*\ \sigma_t^{\varphi_2^{\wedge}}(R_{u^{\wedge}}x)I_2UI_1^* && \text{par 6.2.2.1.} \\
&= I_1U^*I_2^*\hat{\Delta}_2^{-it}R_{u^{\wedge}}\ x\ R_{u^{\wedge}}\hat{\Delta}_2^{it}I_2UI_1^* \\
&= I_1U^*I_2^*\hat{\Delta}_2^{-it}P_uxP_u\hat{\Delta}_2^{it}I_2UI_1^* && \text{par 6.2.3.} \\
&= I_1U^*I_2^*\hat{\Delta}_2^{-it}I_2I_2^*xI_2I_2^*\hat{\Delta}_2^{it}I_2UI_1^* && \text{par 5.4.5.} \\
&= I_1U^*UI_1^*\hat{\Delta}_1^{-it}I_1U^*I_2^*xI_2UI_1^*\hat{\Delta}_1^{it}I_1U^*UI_1 && \text{par 5.4.5.(d)} \\
&= \pi_{\varphi_1}(R_u)\hat{\Delta}_1^{-it}I_1U^*I_2^*xI_2UI_1^*\hat{\Delta}_1^{it}\pi_{\varphi_1}(R_u) \\
&= \pi_{\varphi_1}(R_u)\hat{\Delta}_1^{-it}u^{\wedge}(x)\pi_{\varphi_1}(R_u)\hat{\Delta}_1^{it}\pi_{\varphi_1}(R_u) && \text{par 6.2.2.1.} \\
&= \hat{\Delta}_1^{-it}\pi_{\varphi_1}(R_u)u^{\wedge}(x)\pi_{\varphi_1}(R_u)\hat{\Delta}_1^{it}\pi_{\varphi_1}(R_u) && \text{par 3.1.4.} \\
&= \hat{\Delta}_1^{-it}u^{\wedge}(x)\pi_{\varphi_1}(R_u)\hat{\Delta}_1^{it}\pi_{\varphi_1}(R_u) && \text{par 6.2.1.(a) et 6.2.2.} \\
&= \hat{\Delta}_1^{-it}u^{\wedge}(x)\hat{\Delta}_1^{it}\pi_{\varphi_1}(R_u) && \text{par 3.1.4.} \\
&= \sigma_t^{\varphi_1^{\wedge}}(u^{\wedge}(x))\pi_{\varphi_1}(R_u)
\end{aligned}
$$

On en déduit, par 6.2.1.(b), que :

6.2.4.1. $u^{\wedge}(\sigma_t^{\varphi_2^{\wedge}}(x)) = \sigma_t^{\varphi_1^{\wedge}}(u^{\wedge}(x))$ pour tout x de $M_2^{\wedge}$ et t réel.

Donc $u^{\wedge}(M_1^{\wedge})$ est $\sigma_t^{\varphi_1^{\wedge}}$-invariant ; et $u^{\wedge}$ vérifie l'axiome (Miv).

Soit ω dans $\mathcal{L}_{\varphi_2}$; on a :

$$
\begin{aligned}
\varphi_1^{\wedge}(u^{\wedge}(\lambda_2(\omega)^*\lambda_2(\omega)) &= \varphi_1^{\wedge}(\lambda_1(\omega\circ u)^*\lambda_1(\omega\circ u)) && \text{par 6.2.2.} \\
&= \| a_1(\omega\circ u)\|^2 && \text{par 5.4.5.(c) et 3.1.9.} \\
&= k_u^{-1}\| I_1U^*I_2^*a_2(\omega)\|^2 && \text{par 5.4.5.(c)}
\end{aligned}
$$

$$= k_u^{-1} \| I_2^* a_2(\omega) \|^2$$

$$= k_u^{-1} \| P_u a_2(\omega) \|^2 \qquad \text{par } 5.4.5.$$

$$= k_u^{-1} \| R_{u^\frown} a_2(\omega) \|^2 \qquad \text{par } 6.2.3.$$

$$= k_u^{-1} \hat{\varphi}_2(R_{u^\frown} \lambda_2(\omega)^* \lambda_2(\omega)) \qquad \text{par } 3.1.9.$$

Notons, pour simplifier $\psi' = k_u \hat{\varphi}_1 \circ u^\frown | \hat{M}_{2_{R_{u^\frown}}}$

et $\psi'' = \hat{\varphi}_{2_{R_{u^\frown}}}$

Ce sont deux poids normaux, fidèles, semi-finis, tels que :

$$\psi'(R_{u^\frown} \lambda_2(\omega)^* \lambda_2(\omega)) = \psi''(R_{u^\frown} \lambda_2(\omega)^* \lambda_2(\omega)) \qquad \text{pour tout } \omega \text{ de } \mathcal{L}_{\varphi_2}.$$

De plus, pour x dans $(\hat{M}_2)^+_{R_{u^\frown}}$, on a :

$$\psi'(\sigma_t^{\psi''}(x)) = k_u \hat{\varphi}_1 \circ u^\frown (R_{u^\frown} \sigma_t^{\hat{\varphi}_2}(x))$$

$$= k_u \hat{\varphi}_1 \circ u^\frown (\sigma_t^{\hat{\varphi}_2}(x))$$

$$= k_u \hat{\varphi}_1 (\sigma_t^{\hat{\varphi}_1} u^\frown(x)) \qquad \text{par } 6.2.4.1.$$

$$= k_u \hat{\varphi}_1 \circ u^\frown(x)$$

$$= \psi'(x)$$

Enfin, comme $\Lambda_{\hat{\varphi}_2}(\lambda_2(\mathcal{L}_{\varphi_2})) = \mathcal{F}_2 a_2(\mathcal{L}_{\varphi_2})$ est dense dans H_{φ_2} (cf. 3.1.9.), on voit que $\Lambda_{\psi''}(R_{u^\frown} \lambda_2(\mathcal{L}_{\varphi_2}))$ est dense dans $H_{\psi''}$.

Les hypothèses du lemme 4.1.1. sont donc vérifiées ; on en déduit que $\psi' = \psi''$, soit encore :

$$k_u \hat{\varphi}_1(u^\frown(x)) = \hat{\varphi}_2(R_{u^\frown} x) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } \hat{M}_{2+}.$$

Donc $u^\frown$ vérifie l'axiome (Miii), et le théorème est démontré.

6.3. Dualité dans la catégorie des algèbres de Kac

Proposition 6.3.1. : Soient $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ deux algèbres de Kac, u un $\mathcal{K}$-morphisme de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$. Alors, on a :

$$u\hat{}\hat{} = \phi_{\mathbb{K}_2}\, u\, \phi_{\mathbb{K}_1}^{-1}$$

(où $\phi_{\mathbb{K}}$ est l'isomorphisme canonique de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}\hat{}\hat{}$ défini en 4.3.6.)

<u>Démonstration</u> : Soient θ dans $M\hat{}_{1*}$ et ω dans M_{2*}. On a :

$$\begin{aligned}
<\phi_{\mathbb{K}_2}^{-1}(u\hat{}\hat{}(\lambda\hat{}_1(\theta)))\ ,\ \omega> &= <\phi_{\mathbb{K}_2}^{-1}(\lambda\hat{}_2(\theta\circ u\hat{}))\ ,\ \omega> && \text{par 6.2.2.}\\
&= <\kappa_2(\lambda_{2*}(\theta\circ u\hat{}))\ ,\ \omega> && \text{par 4.3.7.}\\
&= <\lambda_{2*}(\theta\circ u\hat{})\ ,\ \omega\circ\kappa_2> &&\\
&= <\lambda_2(\omega\circ\kappa_2)\ ,\ \theta\circ u\hat{}> && \text{par 2.1.10}\\
&= <u\hat{}(\lambda_2(\omega\circ\kappa_2))\ ,\ \theta> &&\\
&= <\lambda_1(\omega\circ\kappa_2\circ u)\ ,\ \theta> && \text{par 6.2.2.}\\
&= <\lambda_1(\omega\circ u\circ\kappa_1)\ ,\ \theta> && \text{par (Mii)}\\
&= <\lambda_{1*}(\theta)\ ,\ \omega\circ u\circ\kappa_1> && \text{par 2.1.10}\\
&= <\kappa_1(\lambda_{1*}(\theta)\ ,\omega\circ u> &&\\
&= <\phi_{\mathbb{K}_1}^{-1}(\lambda\hat{}_1(\theta))\ ,\ \omega\circ u && \text{par 4.3.7.}\\
&= <u(\phi_{\mathbb{K}_1}^{-1}(\lambda\hat{}_1(\theta))\ ,\ \omega> &&
\end{aligned}$$

Donc, pour tout θ de $M\hat{}_{1*}$, on a :

$$\phi_{\mathbb{K}_2}^{-1}(u\hat{}\hat{}(\lambda\hat{}_1(\theta))) = u(\phi_{\mathbb{K}_1}^{-1}(\lambda\hat{}_1(\theta)))$$

d'où, par continuité, le résultat.

<u>Théorème 6.3.2.</u> : La correspondance qui, a toute algèbre de Kac $\mathbb{K}$ associe l'objet dual $\mathbb{K}\hat{}$ défini en 4.2.2., et à tout $\mathcal{K}$-morphisme $u : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ le $\mathcal{K}$-morphisme $u\hat{} : \mathbb{K}\hat{}_2 \to \mathbb{K}\hat{}_1$ défini en 6.2.3. , est un foncteur de dualité de la catégorie $\mathcal{K}$ (défini en 6.1.8.).

<u>Démonstration</u> : Soient $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$, $\mathbb{K}_3$ trois algèbres de Kac, et u (resp. v) un $\mathcal{K}$-morphisme de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$ (resp. de $\mathbb{K}_2$ dans $\mathbb{K}_3$). Soit λ_i la représentation de Fourier de $\mathbb{K}_i$ (i = 1, 2, 3). On a, pour tout ω de M_{3*} :

$$u\hat{}v\hat{}(\lambda_3(\omega)) = u\hat{}(\lambda_2(\omega\circ u)) \qquad \text{par } 6.2.2.$$

$$= \lambda_1(\omega\circ v\circ u) \qquad \text{par } 6.2.2.$$

$$= (vu)\hat{}\lambda_3(\omega)$$

Par continuité, on en déduit $u\hat{}v\hat{} = (vu)\hat{}$.

Ainsi, nous obtenons un foncteur contravariant de $\mathcal{K}$ dans elle-même. De plus, on a vu que $\mathbb{K}\hat{}\hat{}$ (resp. $u\hat{}\hat{}$) était naturellement isomorphe à $\mathbb{K}$ (resp. u) (cf. 4.3.6. et 6.3.1.) . Ce foncteur est donc bien une dualité.

Proposition 6.3.3. (a) Les morphismes injectifs et surjectifs se correspondent dans la dualité décrite au théorème 6.3.2.

(b) Soit $\mathbb{K}$ une algèbre de Kac , $\tilde{\mathbb{K}}$ une sous algèbre de Kac de $\mathbb{K}$. Il existe une algèbre de Kac réduite de $\mathbb{K}\hat{}$ isomorphe à $\tilde{\mathbb{K}}\hat{}$.

(c) Soit $\mathbb{K}$ une algèbre de Kac, $\mathbb{K}_R$ une algèbre de Kac réduite de $\mathbb{K}$. Il existe une sous-algèbre de Kac de $\mathbb{K}\hat{}$ isomorphe à $\hat{\mathbb{K}}_R$.

Démonstration : (a) Soit u un $\mathcal{K}$ -morphisme de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$; u est surjectif si et seulement si $E_u = 1$, et donc si et seulement si $P_u = 1$; u est injectif si et seulement si $R_u = 1$.

Comme $P_u = R_{\hat{u}}$ (6.2.3.), la proposition (a) en résulte.

(b) et (c) se démontrent en utilisant (a) et 5.4.4.

Définition 6.3.4. : (a) On notera $\mathcal{K}\mathfrak{a}$ (resp. $\mathcal{K}\mathcal{S}$) la sous catégorie pleine de $\mathcal{K}$ obtenue en prenant pour objets les algèbres de Kac abéliennes (resp. symétriques).

(b) On notera $\mathcal{K}\mathfrak{T}$ (resp. $\mathcal{K}\mathfrak{I}$, resp. $\mathcal{K}\mathfrak{U}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}$ obtenue en prenant pour objet les algèbres de Kac à trace (resp. à poids invariant, resp. unimodulaires).

Théorème 6.3.5. : (a) La restriction du foncteur dualité à $\mathcal{K}\mathfrak{a}$ (resp. $\mathcal{K}\mathcal{S}$) est un foncteur contravariant de $\mathcal{K}\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{K}\mathcal{S}$ (resp. de $\mathcal{K}\mathcal{S}$ dans $\mathcal{K}\mathfrak{a}$). Ces deux foncteurs réalisent une dualité entre $\mathcal{K}\mathfrak{a}$ et $\mathcal{K}\mathcal{S}$.

(b) La restriction du foncteur dualité à la sous catégorie $\mathcal{K}\mathfrak{a} \cap \mathcal{K}\mathcal{S}$ est une dualité de $\mathcal{K}\mathfrak{a} \cap \mathcal{K}\mathcal{S}$ dans elle-même.

Démonstration : (a) Si $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ et symétrique, le prédual M_* est muni d'une structure d'algèbres de Banach commutative (cf. 1.2.2.). Par densité de $\lambda(M_*)$ dans $M\hat{}$, on en déduit que $\mathbb{K}\hat{}$ est une algèbre de Kac abélienne.

Si $\mathbb{K}$ est une algèbre de Kac abélienne, $\mathbb{K}\hat{}\hat{}$ également. Donc $\lambda\hat{}(M\hat{}_*)$ est une algèbre abélienne. Par la fidélité de $\lambda\hat{}$ (4.3.3.) on voit que $M\hat{}_*$ est abélienne, et donc $\mathbb{K}\hat{}$ est symétrique. D'où (a).

(b) résulte trivialement de (a).

7 LES SOUS-CATEGORIES $\mathcal{KT}$, $\mathcal{KJ}$ et $\mathcal{KU}$

7.1. La dualité entre $\mathcal{KT}$ et $\mathcal{KJ}$

Si φ est une trace, les algèbres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}_o$ sont égales, ainsi que les involutions $^{\#}$, $^{\flat}$ et J ; on en conservera que cette dernière notation. On a donc, $\mathfrak{A}' \top \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_o \top \mathfrak{A}_o = \Lambda_\varphi(\mathfrak{N}^{\cdot}_\varphi)$; de plus $\rho\circ\Lambda_\varphi \,|\mathfrak{M}_\varphi$ est l'injection canonique de $\mathfrak{M}_\varphi$ dans M_*, identifié à $L^1(\varphi)$.

Proposition 7.1.1. : Soient (M, Γ, κ) une algèbre de Hopf-von Neumann involutive et φ une trace normale fidèle semi-finie sur M.

(a) Pour tout ω de M_* on pose $C\omega = (\omega\circ\kappa)^\circ$. Pour tout x de M, on a donc $\langle C\omega, x\rangle = \langle\omega\circ\kappa, \kappa(x)^*\rangle^- = \langle\omega, x^*\rangle^-$. D'où $\|C\omega\|_\varphi = \|\omega\|_\varphi$ et, pour tous ω_1, ω_2 de M_*, $C(\omega_1 * \omega_2) = (C\omega_1) * (C\omega_2)$.

(b) Pour tout x de $\mathfrak{M}_\varphi$, on a $\rho(\Lambda_\varphi(x))^\circ = \rho(\Lambda_\varphi(x^*))\circ\kappa$, autrement dit, pour tout δ de $\Lambda_\varphi(\mathfrak{M}_\varphi)$ on a : $C\rho(\delta) = \rho(J\delta)$.

Démonstration : On obtient trivialement (a).
Soient x et y dans $\mathfrak{M}_\varphi$. On a :

$$\begin{aligned} \langle y, \rho(\Lambda_\varphi(x^*))\circ\kappa\rangle &= \langle\kappa(y), \rho(\Lambda_\varphi(x^*))\rangle \\ &= \varphi(\kappa(y)x^*) && \text{d'après 1.1.2.} \\ &= \varphi(\kappa(y^*)x)^- && \text{car } \varphi \text{ est une trace} \\ &= \langle\kappa(y)^*, \rho(\Lambda_\varphi(x))\rangle^- && \text{d'après 1.1.2.} \\ &= \langle y, (\rho(\Lambda_\varphi(x)))^\circ\rangle && \text{d'après 1.2.2.} \end{aligned}$$

d'où (b).

Théorème 7.1.2. : Soit $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ un quadruplet vérifiant :

(KTi) (M, Γ, κ) est une algèbre de Hopf-von Neumann involutive,

(KTii) φ est une trace normale, fidèle, semi-finie sur M,

(KTiii) pour tous x, y, z de $\mathfrak{M}_\varphi$ on a :

$$(\varphi\otimes\varphi)((x\otimes y)\Gamma(z)) = (\varphi\otimes\varphi)((x\circ\kappa\otimes z)\Gamma(y))$$

(le deuxième terme de cette égalité est un abus d'écriture pour :

$$<\Gamma(y)\ ,\ \rho(\Lambda_\varphi(x)) \circ \kappa \otimes \rho(\Lambda_\varphi(z))>).$$

Alors $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ est une algèbre de Kac à trace. (Ces axiomes sont exactement ceux utilisés dans ([17]) .

Proposition 7.1.3. : Soit $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ un quadruplet vérifiant (KTi) et (KTii). L'axiome (KTiii) est alors équivalent à (K iv).

Démonstration : Soient x, y, z dans $\mathfrak{M}_\varphi$. On a :

$$\begin{aligned}
<\Gamma(x^*)\ ,\ \rho(\Lambda_\varphi(z)) \otimes \rho(\Lambda_\varphi(y))> &= (\varphi \otimes \varphi)((z \otimes y)\Gamma(x^*)) && \text{d'après 1.1.2.}\\
&= (\varphi \otimes \varphi)((z^* \otimes y^*)\Gamma(x))^- && \text{car } \varphi \text{ est une trace}\\
&= (\varphi \otimes \varphi)((z^* \circ \kappa \otimes x)\Gamma(y^*))^- && \text{d'après (KTiii)}\\
&= <\Gamma(y^*)\ ,\ \rho(\Lambda_\varphi(z^*))\circ\kappa \otimes \rho(\Lambda_\varphi(x))>^- && \text{d'après 1.1.2.}\\
&= <\Gamma(y^*)\ ,\ \rho(\Lambda_\varphi(z))^\circ \otimes \rho(\Lambda_\varphi(x))>^- && \text{d'après 7.1.1.(b)}
\end{aligned}$$

donc, par densité de $\rho(\Lambda_\varphi(\mathfrak{M}_\varphi))$ dans M_* (cf. 2.1.6.), il vient, pour tous x et y de $\mathfrak{M}_\varphi$ et tout ω de M_* :

$$<\Gamma(x^*)\ ,\ \omega \otimes \rho(\Lambda_\varphi(y))> = <\Gamma(y^*)\ ,\ \omega^\circ \otimes \rho(\Lambda_\varphi(x))>^- \qquad \text{ce qui est (Kiv).}$$

La réciproque est immédiate en prenant des ω de la forme $\rho(\Lambda_\varphi(z))$ pour z dans $\mathfrak{M}_\varphi$.

Dans ces conditions, on dira d'une trace normale fidèle semi-finie sur une algèbre de Hopf-von Neumann involutive qui vérifie (KTiii) qu'elle est invariante à gauche. Cette terminologie est donc cohérente avec celle de 1.2.4., on retrouve, de plus, la définition utilisée dans [17] (où l'on note $x^\wedge$, pour x dans $\mathfrak{M}_\varphi$; ce que nous avons noté $x \circ \kappa$ par abus d'écriture).

Démonstration de 7.1.2. : Le lemme 4.2. de [17] exprime que pour x et y dans un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ faiblement dense dans M (voir [17], page 683) $\Gamma(y)(x \otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi}$ et :

$$(\varphi \otimes \varphi)((x^* \otimes 1)\Gamma(y^*y)(x \otimes 1)) = \varphi(x^*x)\varphi(y^*y).$$

Soit (e_i) une famille de projecteurs de $\mathfrak{a}$ qui converge fortement vers 1 dans M (voir [17], page 688). On a donc :

$$(\varphi \otimes \varphi)((x^* \otimes 1)\Gamma(y^*e_i\, y)(x \otimes 1)) = \varphi(x^*x)\varphi(y^*e_i\, y) \quad \text{pour tous } x \text{ de } \mathfrak{a} \text{ et } y \text{ de } M.$$

et, comme φ et $\varphi \otimes \varphi$ sont des traces normales et que $y^*e_i\, y$ tend en croissant vers y^*y , ainsi que $(x^* \otimes 1)\Gamma(y^*e_i\, y)(x \otimes 1)$ vers $(x^* \otimes 1)\Gamma(y^*y)(x \otimes 1)$. On obtient :

$$(\varphi \otimes \varphi)((x^* \otimes 1)\Gamma(y^*y)(x \otimes 1)) = \varphi(x^*x)\varphi(y^*y) \quad \text{pour tous } x \text{ de } \mathfrak{A} \text{ et } y \text{ de } M.$$

Il en résulte, en utilisant de nouveau les projecteurs e_i

$$(\varphi \otimes \varphi)((e_i x^* \otimes 1)\Gamma(y^*y)(xe_i \otimes 1)) = \varphi(x^*e_i x)\varphi(y^*y) \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ de } M.$$

Or, le premier terme est égal à :

$$(\varphi \otimes \varphi)(\Gamma(y^*y)(xe_i x^* \otimes 1)) = (\varphi \otimes \varphi)(\Gamma(y)(xe_i x^* \otimes 1)\Gamma(y^*)) ,$$

et, comme $xe_i x^*$ tend en croissant vers xx^* , et, qu'en conséquence, $\Gamma(y)(xe_i x^* \otimes 1)\Gamma(y^*)$ tend en croissant vers $\Gamma(y)(xx^* \otimes 1)\Gamma(y^*)$, on a :

$$(\varphi \otimes \varphi)(\Gamma(y)(xx^* \otimes 1)\Gamma(y^*)) = \varphi(x^*x)\varphi(y^*y)$$

pour tous x et y de M , puis , $\varphi \otimes \varphi$ étant une trace :

$$(\varphi \otimes \varphi)((x^* \otimes 1)\Gamma(y^*y)(x \otimes 1)) = \varphi(x^*x)\varphi(y^*y) \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ de } M ,$$

ce qui implique l'axiome (Kiii).

Comme φ est une trace semi-finie, φ est tristement semi-finie (voir [3] proposition 4.2.i)). Donc, d'après 1.1.6., φ vérifie la proposition P_1. D'après 2.1.3.(b), $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ qui vérifie (Ki), (Kii) et (Kiii) d'après ce qui précède vérifie (Kv). D'après 7.1.3. il vérifie également (Kiv), enfin la vérification de (Kvi) est triviale et le théorème en résulte.

<u>Théorème 7.1.4.</u> : L'algèbre de Kac duale d'une algèbre de Kac à trace est une algèbre de Kac à poids invariant.

<u>Démonstration</u> : Il résulte de 7.1.1.(a) que l'application de $a(\mathcal{L}_\varphi)$ dans H_φ définie par $a(\omega) \to a(C\omega)$ est isométrique et antilinéaire, de plus, il résulte de 7.1.1.(b) qu'elle coïncide sur $\Lambda_\varphi(\mathfrak{M}_\varphi)$ avec l'application J. On a donc, pour tout ω de $\mathcal{L}_\varphi$:

7.1.4.1. $$a(C\omega) = J\, a(\omega)$$

Soient ω dans M_* et δ dans $\Lambda_\varphi(\mathfrak{M}_\varphi)$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda(C\omega)J\,\delta &= a(C\omega * \rho(J\delta)) && \text{d'après 2.1.4.} \\ &= a(C\omega * C\,\rho(\delta)) && \text{d'après 7.1.1.(b)} \\ &= a(C(\omega * \rho(\delta))) && \text{d'après 7.1.1.(a)} \end{aligned}$$

$= J\ a(\omega * \rho(\delta))$ d'après 7.1.4.1.

$= J\ \lambda(\omega)\delta$ d'après 2.1.4.

il en résulte que :

7.1.4.2. $\lambda(C\omega)J = J\ \lambda(\omega)$ pour tout ω dans M_*

Soit ω dans $\mathcal{L}_\varphi$. On a :

$\varphi\hat{}(\kappa\hat{}(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega))) = \varphi\hat{}(J\ \lambda(\omega)^*\lambda(\omega)J)$ d'après 3.3.2.

$= \varphi\hat{}(J\ \lambda(\omega)^*JJ\ \lambda(\omega)J)$

$= \varphi\hat{}(\lambda(C\omega)^*\lambda(C\omega))$ d'après 7.1.4.2.

$= \| a(C\omega)\|^2$ d'après 7.1.1.(a) et 3.1.9.

$= \| a(\omega)\|^2$ d'après 7.1.4.1.

$= \varphi\hat{}(\lambda(\omega)^*\lambda(\omega))$ d'après 3.1.9.

De plus, il résulte de 1.3.8. et de (Kvi) que le poids $\varphi\hat{}\circ\kappa\hat{}$ est invariant par $\sigma_t^{\varphi\hat{}}$ pour tout réel t . En appliquant 4.1.1., on obtient $\varphi\hat{}\circ\kappa\hat{} = \varphi\hat{}$, d'où le théorème.

<u>Remarque 7.1.5.</u> : Soit $\mathbb{K}$ une algèbre de Kac à trace. Alors $\mathbb{K}\hat{}$ est l'objet dual construit dans [17].

Il résulte, en effet, de 4.2.1. que l'opérateur modulaire $\Delta\hat{}$ est égal à l'opérateur noté Δ dans [17], page 682. L'idéal $\mathfrak{a}$ ([17], page 683) vérifie $\Lambda_\varphi(\mathfrak{a}) \subset \Lambda_\varphi(\mathfrak{M}_\varphi) \subset a(\mathcal{L}_\varphi) \subset \mathfrak{F}^*\Lambda_{\varphi\hat{}}(\mathfrak{N}_{\varphi\hat{}})$, d'après 1.1.4. et 3.1.9. ; de plus, par construction, il est stable par $(\Delta\hat{})^n$, pour tout n de $\mathbb{Z}$, donc, en appliquant [2], lemme 2.7., on voit que $\Lambda_\varphi(\mathfrak{a})$ est inclus dans $\mathfrak{B}_o$. Il résulte alors de [16] lemme 6.3. que $\Lambda_\varphi(\mathfrak{a})$ est une sous-algèbre hilbertienne à gauche de $\mathfrak{B}_o$.

Il résulte de [17], page 706 que l'algèbre de von Neumann associée à $\Lambda_\varphi(\mathfrak{a})$ est égale à $M\hat{}$.

Soit alors ψ le poids canonique sur $M\hat{}$ associée à $\Lambda_\varphi(\mathfrak{a})$. On a $\psi(x) = \varphi\hat{}(x)$ pour tout x de $\hat{\pi}(\Lambda_\varphi(\mathfrak{a}))$ qui est une sous-algèbre faiblement dense de $M\hat{}$. Comme $\Lambda_\varphi(\mathfrak{a})$ est invariant par $\Delta\hat{}$, $\hat{\pi}(\Lambda_\varphi(\mathfrak{a}))$ est invariant par $\sigma_t^{\varphi\hat{}}$, pour tout t de $\mathbb{R}$; donc, en appliquant [14], proposition 5.9. , on voit que $\psi = \varphi\hat{}$. Le poids $\varphi\hat{}$ est donc égal au poids (noté φ) introduit en [17] , relation 7.17.

Par densité de $\Lambda_\varphi(\mathfrak{a})$ dans $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)$, il est clair que l'opérateur W de

[17], §4, lemme 4.2. est le même que celui construit en 2.1.1. Il en résulte que le coproduit $\Gamma^\wedge$ de 3.2.1. est le même que celui de [17], page 716. Enfin, l'involution $\kappa^\wedge$ a été définie en 3.3.2. comme en [17], page 718, ce qui achève de justifier la remarque.

Théorème 7.1.6. : (a) La restriction du foncteur de dualité à $\mathcal{KT}$ (resp. $\mathcal{KJ}$) est un foncteur contravariant de $\mathcal{KT}$ dans $\mathcal{KJ}$ (resp. de $\mathcal{KJ}$ dans $\mathcal{KT}$). Ces deux foncteurs réalisent une dualité entre $\mathcal{KT}$ et $\mathcal{KJ}$.

(b) La restriction du foncteur de dualité à $\mathcal{KU}$ réalise une dualité de $\mathcal{KU}$ dans elle-même.

Démonstration : Soit $\mathbb{K}$ une algèbre de Kac à poids invariant, il résulte de 4.2.1. que $\Delta^\wedge = 1$ et donc que $\mathbb{K}^\wedge$ est une algèbre de Kac à trace. En appliquant 7.1.4. et 6.3.2., on obtient donc (a).

On déduit aisément (b) de (a), car $\mathcal{KU} = \mathcal{KT} \cap \mathcal{KJ}$

Remarque 7.1.7. : Il résulte de 7.1.6.(a) et de 7.1.5. que les objets duaux construits dans [17] sont les algèbres de Kac à poids invariant.

Proposition 7.1.8. : Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac. Les conditions ci-dessous sont équivalentes :

(i) φ est un poids strictement semi-fini

(ii) il existe une sous-algèbre de Kac de $\mathbb{K}$ qui soit une algèbre de Kac à trace

(iii) il existe une algèbre de Kac réduite de $\mathbb{K}^\wedge$ qui soit à poids invariant

(iv) M^φ est une sous-algèbre de Kac de M.

Démonstration : Remarquons tout d'abord qu'il résulte de (Kvi) que $\kappa(M^\varphi) = M^\varphi$ et de 4.2.4.(b) que $\Gamma(M^\varphi)$ est inclus dans $M^\varphi \otimes M^\varphi$, pour toute algèbre de Kac $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$. De plus, on sait, d'après [2], théorème 3.4. et [3], définition 4.1. , que φ est strictement semi-fini si et seulement si la restriction de φ de M^φ est une trace semi-finie. On voit donc, en utilisant 5.3.1., que φ est strictement semi-fini si et seulement si M^φ est une sous-algèbre de Kac à trace de K .

Ainsi (i) entraîne (ii).

Réciproquement, supposons qu'il existe une sous-algèbre de Kac à trace de $\mathbb{K}$, notée $\tilde{\mathbb{K}} = (\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\kappa}, \tilde{\varphi})$. D'après [4], lemme 1.4.3., on a, pour tout x de $\tilde{M}$, $\sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x) = x$; donc $\tilde{M}$ est inclus dans M^φ et, à fortiori, la restriction de

φ à M^{φ} est semi-finie, donc φ est strictement semi-fini.

L'équivalence de (ii) et (iii) résulte immédiatement de 7.1.6.(a) et 6.3.3.(b) et (c).

7.2. Algèbre de Kac de type compact

Définition 7.2.1. : Une algèbre de Kac à poids fini sera dite de type compact. On notera $\mathcal{KC}$ la sous catégorie pleine de $\mathcal{K}$ des algèbres de Kac de type compact.

Théorème 7.2.2. : Soit $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ un quadruplet vérifiant :

(KCi) (M, Γ, κ) est une algèbre de Hopf-von Neumann involutive

(KCii) φ est un poids normal, fidèle, fini sur M

(KCiii) pour tous x et y dans M, on a :

$$(\varphi \otimes \varphi)((x^* \otimes 1)\Gamma(y)(x \otimes 1)) = \varphi(x^*x)\varphi(y)$$

(KCiv) φ est invariant à gauche.

Alors $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ est une algèbre de Kac unimodulaire.

Démonstration : Il est immédiat que $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ vérifie (Ki) à (Kiv). Il résulte de [3], proposition 4.2.(i) que φ est strictement semi-fini. D'après 1.1.6. il vérifie donc la propriété P_1 et il résulte de 2.1.3.(b) que $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ vérifie (Kv). De plus, comme $M = \mathfrak{N}_{\varphi} = \mathfrak{N}_{\varphi} \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$, la propriété P_2 est trivialement vérifiée ; on pourra donc appliquer au quadruplet tous les résultats jusqu'au paragraphe 4.1.

Comme 1 appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi} \cap \mathfrak{N}_{\varphi}^*$, on a $\Lambda_{\varphi}(1) \in \mathfrak{U}$ et $\Lambda_{\varphi}(1)^{\#} = \Lambda_{\varphi}(1)$. on vérifie alors facilement que $\Lambda_{\varphi}(1)$ appartient à $\mathcal{D}^{\flat}$ et que $\Lambda_{\varphi}(1)^{\flat} = \Lambda_{\varphi}(1)$. Il en résulte que $\Lambda_{\varphi}(1)$ appartient à $\mathfrak{U}_0$, donc à $\mathfrak{U}_0 \top \mathfrak{U}_0$ car $\Lambda_{\varphi}(1)^{\cdot} = \Lambda_{\varphi}(1) \top \Lambda_{\varphi}(1)$.

Soit x dans $\Lambda_{\varphi}^{-1}(\mathfrak{U}_0 \top \mathfrak{U}_0)$. Pour tout ω dans M_*, en appliquant (KCiv), on obtient :

$$\begin{aligned}\langle x , \omega * \rho(\Lambda_{\varphi}(1))\rangle &= \langle 1 , \omega^{\circ} * \rho(\Lambda_{\varphi}(x^*))\rangle^{-} \\ &= \langle \Gamma(1) , \omega^{\circ} \otimes \rho(\Lambda_{\varphi}(x^*))\rangle^{-} \qquad \text{d'après 1.2.2.} \\ &= \langle 1 \otimes 1 , \omega^{\circ} \otimes \rho(\Lambda_{\varphi}(x^*))\rangle^{-}\end{aligned}$$

$$= \langle 1 , \omega^\circ\rangle^- \langle 1 , \rho(\Lambda_\varphi(x^*))\rangle^-$$

$$= \langle\kappa(1) , \omega\rangle \langle 1 , \rho(\Lambda_\varphi(x^*))^- \qquad \text{d'après 1.2.2.}$$

$$= \langle 1 , \omega\rangle \varphi(x^*)^- \qquad \text{d'après 1.1.2.}$$

$$= \langle 1 , \omega\rangle \varphi(x)$$

$$= \langle 1 , \omega\rangle \langle x , \rho(\Lambda_\varphi(1))\rangle \qquad \text{d'après 1.1.2.}$$

Par densité de $\Lambda_\varphi^{-1}(\mathfrak{U}_o \top \mathfrak{U}_o)$ dans M , il en résulte que pour tout ω de M_* , on a :

$$\omega * \rho(\Lambda_\varphi(1)) = \langle 1 , \omega\rangle \rho(\Lambda_\varphi(1))$$

On en déduit qu'en particulier :

$$\rho(\Lambda_\varphi(1)) = \langle 1 , \rho(\Lambda_\varphi(1))^\circ\rangle^{-1} \rho(\Lambda_\varphi(1))^\circ * \rho(\Lambda_\varphi(1))$$

$$= \varphi(1)^{-1} \rho(\Lambda_\varphi(1))^\circ * \rho(\Lambda_\varphi(1))$$

$$\rho(\Lambda_\varphi(1)) \in \rho(\mathfrak{U}_o \top \mathfrak{U}_o)^\circ * \rho(\mathfrak{U}_o \top \mathfrak{U}_o) \subset \mathbb{A}_*$$

et $$\rho(\Lambda_\varphi(1))^\circ = \rho(\Lambda_\varphi(1))$$

Ce qui, d'après 2.3.1.2. se traduit par :

$$\Lambda_\varphi(1) \in \mathfrak{B}$$

et $$\Lambda_\varphi(1)^{\hat{\#}} = \Lambda_\varphi(1)$$

On a de plus $\Lambda_\varphi(H) = \Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}) \subset \mathcal{D}^{\hat{b}}$ d'après 2.3.2. qui indique de plus que :

$$F\hat{}\Lambda_\varphi(1) = \Lambda_\varphi(1)$$

Finalement : $$\Lambda_\varphi(1) \in \mathcal{D}(\Delta\hat{}) \quad \text{et} \quad \Delta\hat{}\Lambda_\varphi(1) = \Lambda_\varphi(1)$$

Soit x dans M . On a :

$$\Lambda_\varphi(x) = \pi_\varphi(x) \Lambda_\varphi(1)$$

$$= \pi_\varphi(x) \Delta\hat{} \Lambda_\varphi(1)$$

$$= \Delta\hat{} \pi_\varphi(x) \Lambda_\varphi(1) \qquad \text{d'après 2.2.2.}$$

$$= \Delta\hat{} \Lambda_\varphi(x) .$$

Comme $\Delta\hat{}$ est un opérateur fermé, on a : $\Delta\hat{} = 1$. Ainsi $\varphi\hat{}$ est une trace. On a, pour tout x de M :

$$\begin{aligned}\varphi(\kappa(x^*x)) &= \|\Lambda_\varphi(\kappa(x^*))\|^2 \\ &= \|F\hat{}\Lambda_\varphi(x)\|^2 && \text{d'après 2.3.2.1.} \\ &= \|\Lambda_\varphi(x)\|^2 && \text{car } \varphi\hat{} \text{ est une trace ,} \\ &= \varphi(x^*x) \ .\end{aligned}$$

Il en résulte que $\varphi\circ\kappa = \varphi$ et l'axiome (Kvi) résulte alors trivialement de 1.3.8.

De plus, l'axiome (KCiii) entraîne que pour tout x de M :

$$(\varphi \otimes \varphi)(\Gamma(x)) = \varphi(1)\ \varphi(x) \ .$$

Soit ψ la restriction de $\varphi \otimes \varphi$ à $\Gamma(M)$. D'après 4.2.4.(c), $\Gamma(M)$ est $\sigma_t^{\varphi\otimes\varphi}$ invariant pour tout t de $\mathbb{R}$. En appliquant [18], §3. et [4], lemme 1.4.3. on voit que tout x de M :

$$\sigma_t^{\psi}(\Gamma(x)) = \sigma_t^{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(x))$$

Comme de plus, Γ est un isomorphisme de M sur $\Gamma(M)$, il résulte de [4], lemme 1.2.10. que l'égalité $\psi\circ\Gamma = \varphi(1)\ \varphi$ implique :

$$\sigma_t^{\psi}(\Gamma(x)) = \Gamma(\sigma_t^{\varphi}(x)) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } M.$$

On trouve finalement :

$$\sigma_t^{\varphi\otimes\varphi}\ \Gamma = \Gamma\ \sigma_t^{\varphi} \qquad \text{pour tout } t \text{ de } R \ .$$

La relation 4.2.4.(b) entraîne donc :

$$\Gamma\ \sigma_t^{\varphi} = \Gamma\ \sigma_{2t}^{\varphi}$$

d'où, comme Γ est injective :

$$\sigma_t^{\varphi} = \sigma_{2t}^{\varphi}$$

puis $\sigma_t^{\varphi} = 1$. Ainsi, φ est une trace et le théorème en résulte. La dernière partie de la démonstration nous permet d'affirmer :

<u>Corollaire 7.2.3.</u> : Toute algèbre de Kac de type compact est unimodulaire.

Théorème 7.2.4. : Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac de type compact.

(a) l'algèbre $\hat{M}_*$ est unifère

(b) la représentation λ se décompose en une somme directe de représentations irréductibles de dimensions finies. Toute représentation irréductible de dimension finie de M_* est unitairement équivalente à une composante de λ .

(c) l'algèbre de von Neumann $\hat{M}$ est atomique et finie (c'est-à-dire, rappelons-le, produit d'algèbres de matrices).

Démonstration : Nous avons vu dans la démonstration de 7.2.2. que $\Lambda_\varphi(1)$ appartient à $\mathfrak{U}_0 \top \mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}'$. Or, pour tout ω de M_* , on a :

$$
\begin{aligned}
<\Phi_{\mathbb{K}}^{-1}(\hat{\lambda}(\Omega_{\Lambda_\varphi(1),\Lambda_\varphi(1)}|\hat{M})) , \omega> &= <\kappa(\lambda_*(\Omega_{\Lambda_\varphi(1),\Lambda_\varphi(1)}|\hat{M}) , \omega> && \text{d'après 4.3.7.}\\
&= <\lambda_*(\Omega_{\Lambda_\varphi(1),\Lambda_\varphi(1)}|\hat{M}) , \omega\circ\kappa> \\
&= <\lambda(\omega\circ\kappa) , \Omega_{\Lambda_\varphi(1),\Lambda_\varphi(1)}> \\
&= (\lambda(\omega\circ\kappa)\Lambda_\varphi(1)|\Lambda_\varphi(1)) \\
&= (a((\omega\circ\kappa) * \rho(\Lambda_\varphi(1)))|\Lambda_\varphi(1)) && \text{d'après 2.1.4.}\\
&= <1 , (\omega\circ\kappa)^{\cdot} * \rho(\Lambda_\varphi(1))> && \text{d'après 1.1.4.}\\
&= <\Gamma(1) , (\omega\circ\kappa) \otimes \rho(\Lambda_\varphi(1))> && \text{d'après 1.2.2.}\\
&= <1 \otimes 1, (\omega\circ\kappa) \otimes \rho(\Lambda_\varphi(1))> \\
&= <1 , \omega\circ\kappa> <1 , \rho(\Lambda_\varphi(1))> \\
&= <1 , \omega> \varphi(1) && \text{d'après 1.1.2.}
\end{aligned}
$$

Il en résulte que $\hat{\lambda}(\Omega_{\Lambda_\varphi(1),\Lambda_\varphi(1)}|\hat{M}) = \varphi(1)\ 1$. Comme d'après 4.3.8. $\hat{\lambda}$ est fidèle, on voit que $\varphi(1)^{-1}\ \Omega_{\Lambda_\varphi(1),\Lambda_\varphi(1)}|\hat{M}$ est une unité de $\hat{M}_*$, d'où (a).

La proposition (b) est le théorème 13 de [17] et (c) résulte immédiatement de (b).

7.3. Algèbres de Kac de type discret

Définition 7.3.1.: Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac. Elle sera dite de type discret si l'algèbre M_* est unifère. On notera $\mathcal{KD}$ la sous-catégorie pleine des algèbres de Kac de type discret.

Théorème 7.3.2. : Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac de type discret.

(a) l'algèbre duale $\hat{\mathbb{K}}$ est de type compact

(b) l'algèbre de von Neumann M est atomique et finie.

Démonstration : Comme M_* est unifère, $\lambda(M_*)$ l'est aussi ; soit e l'unité de $\lambda(M_*)$. On a $xe = x$ pour tout x de $\lambda(M_*)$. En faisant tendre fortement x vers 1, on en déduit que $1 = e \in \lambda(M_*)$. Comme de plus $\mathbb{A}_*$ est dense dans M_* d'après 2.1.6. et λ normiquement continue d'après 2.1.4., on en déduit que 1 appartient à l'adhérence normique de $\lambda(\mathbb{A}_*)$ et donc à fortiori de $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}} \cap \mathfrak{N}^*_{\hat{\varphi}}$. Il existe donc un élément inversible dans $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}} \cap \mathfrak{N}^*_{\hat{\varphi}}$; on en déduit que $\mathfrak{N}_{\hat{\varphi}} = \hat{M}$ et donc que $\hat{\varphi}$ est un poids fini, d'où (a).

D'après 7.2.4.(c) on en déduit que $\hat{\hat{M}}$ est atomique et finie. Il en est de même de M d'après 4.3.6., ce qui achève la démonstration.

Théorème 7.3.3. : Toute algèbre de Kac de type discret est unimodulaire.

Démonstration : Soit $\mathbb{K}$ une algèbre de Kac de type discret. D'après 7.3.2. (a) et 7.2.3. on voit que $\hat{\mathbb{K}}$ est unimodulaire. Il en est de même de $\hat{\hat{\mathbb{K}}}$ d'après 7.1.6.(b) et de $\mathbb{K}$ d'après 4.3.6. .

Théorème 7.3.4. : (a) La restriction du foncteur de dualité à $\mathcal{KC}$ (resp. $\mathcal{KD}$) est un foncteur contravariant de $\mathcal{KC}$ dans $\mathcal{KD}$ (resp. de $\mathcal{KD}$ dans $\mathcal{KC}$). Ces deux foncteurs réalisent une dualité entre $\mathcal{KC}$ et $\mathcal{KD}$.

(b) La restriction du foncteur de dualité à $\mathcal{KC} \cap \mathcal{KD}$ est une dualité de cette catégorie.

Démonstration : Cela résulte de 7.2.4.(a), 7.3.2.(a) et 6.3.2.

Proposition 7.3.5. : Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac. Les conditions ci-dessous sont équivalentes :

(i) $\mathbb{K} \in \mathcal{KC} \cap \mathcal{KD}$

(ii) M est de dimension finie.

<u>Démonstration</u> : Il résulte de 7.1.2. que l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est démontrée par le théorème 12 de [17] .

Réciproquement, supposons (ii). On a alors :

$$\dim \lambda(M_\star) = \dim M_\star = \dim M$$

Donc $\lambda(M_\star)$ est égal à son adhérence $M^\wedge$, ce qui implique que $\lambda(M_\star)$ contient l'unité, puis que $M_\star$ est unifère. Ainsi, on a obtenu que $\dim M^\wedge = \dim M$ et que $\mathbb{K}$ est de type discret ; on peut alors itérer la démonstration et on trouve que $\mathbb{K}^\wedge$ est également de type discret, en appliquant 7.3.4. on obtient donc (i).

8 LES SOUS-CATEGORIES $\mathcal{K}a$ ET $\mathcal{K}s$

Dans ce qui suit, $\mathcal{GLC}$ désigne la catégorie dont les objets sont les couples (G,m) (G , groupe localement compacts ; m mesure de Haar à gauche sur G), et les flèches sont les homomorphismes stricts de groupe à image ouverte et noyau compact. On note λ_G la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G,m)$ (c'est un homéomorphisme sur son image, pour la topologie faible, par [9], lemme 2.2.), et $\mathcal{M}(G)$ l'algèbre de von Neumann qu'elle engendre.

On note $\mathcal{C}_c(G)$ l'espace vectoriel des fonctions complexes continues à support compact sur G ; muni du produit de convolution, de l'involution $f(g) \to \Delta(g^{-1})f(g^{-1})^-$ (où Δ est la fonction modulaire du groupe), et de la restriction du produit scalaire de $L^2(G,m)$, c'est une algèbre hilbertienne à gauche. L'algèbre de von Neumann associée est $\mathcal{M}(G)$. L'algèbre $\mathcal{C}_c(G)$ induit donc sur $\mathcal{M}(G)^+$ un poids canonique, que nous noterons φ_m.

8.1. Les foncteurs KA et KS

Proposition 8.1.1. : On identifie $L^\infty(G \times G)$ à $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$.

(a) Soit $(G,m) \in \mathcal{GLC}$. Pour tout f dans $L^\infty(G)$, on pose :

$$\Gamma_G^a(f)\ (g_1, g_2) = f(g_1 g_2) \quad (g_1, g_2 \in G)$$

$$\kappa_G^a(f)\ (g) = f(g^{-1}) \quad (g \in G)$$

$$m(f) = \int_G f\, dm \quad \text{pour } f \text{ dans } L^\infty(G)^+$$

Alors $(L^\infty(G), \Gamma_G^a, \kappa_G^a, m)$ est une algèbre de Kac abélienne ; nous la noterons KA(G,m).

(b) Soient (G_1,m_1), (G_2, m_2) dans $\mathcal{GLC}$, et α une flèche de (G_1,m_1) dans (G_2,m_2). Pour tout f dans $L^\infty(G_2)$, on pose :

$$KA(\alpha)(f) = f \circ \alpha$$

L'application KA(α) ainsi définie est un $\mathcal{K}$-morphisme de KA(G_2,m_2) dans KA(G_1,m_1). Son coefficient est égal à la densité de $\alpha(m_1)$ par rapport à $m_2|\alpha(G_1)$.

Démonstration : (a) se trouve dans [17], page 678.

(b) soient f dans $L^\infty(G_2)$, et g, g_1, g_2 dans G_1. On a :

$$\Gamma^a_{G_1}(KA(\alpha)f)(g_1,g_2) = [\Gamma^a_{G_1}(f\circ\alpha)](g_1,g_2) \qquad \text{par définition de } KA(\alpha)$$

$$= f\circ\alpha(g_1 g_2) \qquad \text{par définition de } \Gamma^a_{G_1}$$

$$= f(\alpha(g_1)\alpha(g_2))$$

$$= \Gamma^a_{G_2}(f)(\alpha(g_1),\ \alpha(g_2)) \qquad \text{par définition de } \Gamma^a_{G_2}$$

$$= [\Gamma^a_{G_2}(f) \circ \alpha \otimes \alpha](g_1,g_2)$$

$$= (KA(\alpha) \otimes KA(\alpha))\Gamma^a_{G_2}(f)\ (g_1,g_2)$$

donc :

$$\Gamma^a_{G_1}\ KA(\alpha) = (KA(\alpha) \otimes KA(\alpha))\Gamma^a_{G_2}$$

De même :

$$\kappa^a_{G_1}(KA(\alpha)f(g)) = \kappa^a_{G_1}(f\circ\alpha)(g)$$

$$= f(\alpha(g^{-1}))$$

$$= f(\alpha(g)^{-1})$$

$$= \kappa^a_{G_2}(f)(\alpha(g))$$

$$= KA(\alpha)\kappa^a_{G_2}(f)(g)$$

donc
$$\kappa^a_{G_1}\ KA(\alpha) = KA(\alpha)\kappa^a_{G_2}$$

Enfin, pour f dans $L^\infty(G_2)^+$

$$m_1(KA(\alpha)f) = \int_{G_1}(KA(\alpha)f)dm_1$$

$$= \int_{G_1}(f\circ\alpha)dm_1$$

$$= \int_{\alpha(G_1)}(f \mid \alpha(G_1))\ d(\alpha(m_1))$$

or $\alpha(m_1)$ et $m_2|\alpha(G_2)$ sont deux mesures de Haar à gauche sur $\alpha(G_1)$; elles sont proportionnelles. Soit $\alpha(m_1) = k(m_2|\alpha(G_1))$. Donc :

$$m_1(KA(\alpha)f) = k \int_{\alpha(G_1)} (f \mid \alpha(G_1))d(m_2|\alpha(G_1))$$

ou encore :

$$m_1(KA(\alpha)f) = k \int_{G_2} f\ \chi_{\alpha(G_1)}\ dm_2$$

$$= k\ m_2(\chi_{\alpha(G_1)}f)$$

Il est clair que $\chi_{\alpha(G_1)}$ est égal à $R_{KA(\alpha)}$; (Miii) est donc vérifié ; comme (Miv) est trivial, la proposition en résulte.

Corollaire 8.1.2. : (a) Soient m', m'' deux mesures de Haar à gauche sur G, et soit $k > o$ tel que $m'' = k.m'$. Alors (cf. 1.3.4.)

$$KA(G,m'') = k.KA(G,m')$$

(b) Soit K un sous groupe compact distingué de G. Si m est une mesure de Haar sur G, munissons $G_{/K}$ de la mesure m' image par m par la surjection canonique $G \xrightarrow{s} G_{/K}$. Alors $KA(s)$ est un $\mathcal{K}$-morphisme surjectif normalisé de $KA(G_{/K},m')$ dans $KA(G,m)$.

(c) Soit H un sous groupe ouvert de G. Si m est une mesure de Haar sur G, munissons H de la mesure m'' restriction de M à H. Si on note ε l'injection canonique de H dans G, $KA(\varepsilon)$ est un $\mathcal{K}$-morphisme surjectif normalisé de $KA(G,m)$ sur $KA(H,m'')$.

(d) Soit $(G,m) \in \mathcal{GLC}$. L'algèbre de Kac $KA(G,m)$ est unimodulaire (resp. de type compact, resp. de type discret, resp. de dimension finie, resp. symétrique) si et seulement si le groupe G est unimodulaire (resp. compact, resp. discret, resp. fini, resp. abélien).

Démonstration : (a) est évident

(b) et (c) découlent de 8.1.1.b) ; il suffit de remarquer que $KA(s)$ (resp. $(KA(i))$ est injectif (resp. surjectif), ce qui est clair d'après la définition.

(d) en effet, le groupe G est unimodulaire si et seulement si, pour tout f dans $\mathcal{C}_c(G)$, on a :

$$\int_G f(g)dm(g) = \int_G f(g^{-1})dm(g)$$

ce qui est clairement équivalent à m invariant par κ_G^a .

Le groupe G est compact si et seulement si m est finie, ce qui est équivalent à $KA(G,m)$ de type compact (7.2.).

Le groupe G est discret si et seulement si l'algèbre $L^1(G)$ est unifère, ce qui est équivalent à $KA(G,m)$ de type discret (7.3.).

Le groupe G est fini si et seulement si l'espace vectoriel $L^\infty(G)$ est de dimension finie.

Le groupe G est abélien si et seulement si l'algèbre $L^1(G)$ est abélienne ce qui est équivalent à $KA(G,m)$ symétrique (1.2.2.).

Proposition 8.1.3. : Soit (G,m) dans $\mathcal{GLC}$. Alors :

(a) Il existe un coproduit Γ_G^s et une involution κ_G^s uniques sur $\mathfrak{M}(G)$, tels que, pour tout g de G :

$$\Gamma_G^s(\lambda_G(g)) = \lambda_G(g) \otimes \lambda_G(g)$$

$$\kappa_G^s(\lambda_G(g)) = \lambda_G(g^{-1})$$

Alors $(\mathfrak{M}(G), \Gamma_G^s, \kappa_G^s, \varphi_m)$ (où φ_m est le poids sur $\mathfrak{M}(G)^+$ défini dans l'introduction du §8) est une algèbre de Kac symétrique ; nous la noterons $KS(G,m)$.

(b) Soient (G_1, m_1) , (G_2, m_2) dans $\mathcal{GLC}$, et α une flèche de (G_1,m_1) dans (G_2,m_2). Il existe un unique morphisme normal $KS(\alpha)$ de $\mathfrak{M}(G_1)$ dans $\mathfrak{M}(G_2)$ tel que :

$$KS(\alpha)(\lambda_{G_1}(g)) = \lambda_{G_2}(\alpha(g))$$

pour tout g de G_1.

De plus $KS(\alpha)$ est un $\mathcal{K}$-morphisme de $KS(G, m_1)$ dans $KS(G, m_2)$. Son coefficient est égal à la densité de $m_2|\alpha(G_1)$ par rapport à $\alpha(m_1)$.

Théorème 8.1.4. : (a) La correspondance qui a tout objet (G,m) (resp. à toute flèche α) de la catégorie $\mathcal{GLC}$ associe $KA(G,m)$ (resp. $KA(\alpha)$) est un foncteur contravariant de $\mathcal{GLC}$ dans $\mathcal{KA}$. Nous le noterons KA.

(b) La correspondance qui a tout objet (G,m) (resp. à toute flèche α) de la catégorie $\mathcal{GLC}$ associe $KS(G,m)$ (resp. $KS(\alpha)$) est un foncteur covariant de $\mathcal{GLC}$ dans $\mathcal{KS}$. Nous le noterons KS.

(c) Si D désigne le foncteur de dualité introduit en en 6.3.2., on a :

$$KS = D \circ KA .$$

Démonstration de 8.1.3. et 8.1.4. :

Le coproduit Γ_G^s sur $L^\infty(G)$ induit clairement sur le produit $L^1(G, m)$ le produit de convolution usuel. D'autre part, comme m est une trace, l'ensemble $\mathfrak{U}_{o,m} \top \mathfrak{U}_{o,m}$ est égal à $\Lambda_m(\mathfrak{N}_m)$, soit $\Lambda_m(L^\infty(G) \cap L^1(G))$. Pour simplifier les notations, on identifiera tout f de $L^\infty(G) \cap L^1(G)$ avec $\Lambda_m(f)$ dans $L^2(G,m)$. De plus, $\mathcal{L}_m = L^1(G,m) \cap L^2(G,m)$; on identifiera également tout f de $L^1(G,m) \cap L^2(G,m)$ avec $a(f)$.

Dans ces conditions, la représentation de Fourier de l'algèbre de Kac $KA(G,m)$ est définie par :

$$\lambda(f)h = f * h \qquad (f \text{ dans } L^1(G,m),\ h \text{ dans } L^1(G,m) \cap L^\infty(G))$$

On vérifie facilement que, pour tout f de $L^1(G,m)$, on a :

8.1.4.1. $$\lambda(f) = \int_G f(g)\ \lambda_G(g)dm(g) \qquad (\text{cf. [17] , page 679})$$

Il en résulte que $L^\infty(G)\hat{} = \mathfrak{M}(G)$.

D'autre part, nous noterons dorénavent λ_G la représentation de Fourier de l'algèbre de Kac $KA(G,m)$ (Cette notation est justifiée par la formule 8.1.4.1.)

On vérifie également que l'opérateur fondamental W de $KA(G,m)$ est défini par ([17], §2, formule 2.8.)

$$(Wf)(g_1 \otimes g_2) = f(g_1\ , g_1g_2) \qquad (f \in L^2(G \times G\ , m \otimes m))$$

(on identifie $L^2(G\ , m) \otimes L^2(G,m)$ à $L^2(G \times G\ , m \otimes m)$).

D'après ([17], §2, formule 2.9.), on a alors :

$$\Gamma_G^{\hat{a}}(\lambda_G(g)) = \lambda_G(g) \otimes \lambda_G(g)$$

et $$\kappa_G^{\hat{a}}(\lambda_G(g)) = \lambda_G(g^{-1})$$

Cela fournit l'existence de Γ_G^s et κ_G^s ; comme $\lambda_G(G)$ engendre $\mathfrak{M}(G)$, l'unicité est évidente.

Comparons maintenant le poids φ_m et $m\hat{}$; l'ensemble $\mathcal{C}_c(G)$ est inclus dans $L^1(G,m) \cap L^2(G,m)$, c'est-à-dire dans $a(\mathcal{L}_m)$, et donc dans $\Lambda_{m\hat{}}(\mathfrak{N}_{m\hat{}})$ par 3.1.9.

De plus, il résulte de la définition de κ_G^a et de 4.2.1. que l'opérateur modulaire $\Delta_{m\hat{}}$ est égal à la multiplication par la fonction modulaire du groupe G.

L'ensemble $\mathcal{C}_c(G)$ est donc invariant par la multiplication par $\Delta_{m^\wedge}$; par ([2] , 2.7.), $\mathcal{C}_c(G)$ est inclus dans l'algèbre modulaire maximale $\mathfrak{B}_o$, et donc dans $\mathfrak{B}''$. Comme d'autre part $\mathcal{C}_c(G)$ est inclus dans $\Lambda_m(\mathfrak{N}_m \cap \mathfrak{N}_{m\circ\kappa_G^a})$, il est clair, par 2.3.2.1. , que :

$$(F^\wedge f)(g) = \overline{f}(g^{-1}) \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{C}_c(G), \text{ et } g \in G .$$

Donc, pour tout f de $\mathcal{C}_c(G)$ et g de G :

$$(S^\wedge f)(g) = \Delta(g^{-1})f(g^{-1})^-$$

L'algèbre $\mathcal{C}_c(G)$ est donc une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{B}''$. L'algèbre hilbertienne à gauche $\mathcal{C}_c(G)$ induit sur $\mathfrak{M}(G)^+$ le poids φ_m , et $\mathfrak{B}''$ le poids $m^\wedge$. Ces deux poids sont donc égaux sur $\pi^\wedge(\mathcal{C}_c(G) * \mathcal{C}_c(G))$, qui est une sous algèbre faiblement dense de $\mathfrak{M}(G)$. Par ailleurs, ces deux poids ont le même groupe modulaire d'automorphismes (induit par la multiplication par la fonction modulaire de G), et cette sous algèbre est invariante par ce groupe d'automorphismes. Donc, par ([14], lemme 5.2.), on a $m^\wedge = \varphi_m$.

On voit donc que $(\mathfrak{M}(G), \Gamma_G^s , \varphi_G^s , \varphi_m) = KA(G,m)^\wedge$; d'où le résultat 8.1.3.(a) ; de plus, on a $KS(G,m) = KA(G,m)^\wedge$.

Nous noterons donc $\lambda_G^\wedge$ la représentation de Fourier de KS(G,m).

Soient θ dans $\mathfrak{M}(G)_*$, et f dans $L^1(G)$; on a :

$$\begin{aligned}
<\phi_{KA(G,m)}^{-1}(\lambda_G^\wedge(\theta)) , f> &= <\kappa_G^a(\lambda_{G^*}(\theta)) , f> && \text{par } 4.3.7.\\
&= <\lambda_{G^*}(\theta) , f\circ\kappa_G^a> \\
&= <\lambda_G(f\circ\kappa_G^a) , \theta> \\
&= <\kappa_G^s \lambda_G(f) , \theta> && \text{par } 3.3.2.\\
&= \int_G f(g) <\kappa_G^s \lambda_G(g) , \theta> dm(g) && \text{par } 8.1.4.1.\\
&= \int_G f(g) <\lambda_G(g^{-1}) , \theta> dm(g)
\end{aligned}$$

Si θ appartient à $\mathfrak{M}(G)_*$, $\phi_{KA(G,m)}^{-1}(\lambda_G^\wedge(\theta))$ est un élément de $L^\infty(G)$. Le calcul ci-dessus montre que, pour tout g de G :

8.1.4.2. $$[\phi_{KA(G,m)}^{-1}(\lambda_G^\wedge(\theta))](g) = <\lambda_G(g^{-1}) , \theta>$$

Soient maintenant (G_1,m_1) et (G_2,m_2) deux objets de la catégorie et α une flèche de (G_1,m_1) dans (G_2,m_2). On notera ϕ_i, λ_i, $\lambda_i^\wedge$, ... au lieu de $\phi_{KA(G_i,m_i)}$, λ_{G_i} , $\lambda^{\wedge}_{G_i}$, ... (i = 1, 2).

Soient g_1 dans G_1, et θ dans $\mathfrak{M}(G_2)_*$. On a :

$$\begin{aligned}
<\lambda_2(\alpha(g_1)) \ , \ \theta> &= (\phi_2^{-1}(\lambda_2^{\wedge}(\theta)))(\alpha(g_1)^{-1}) && \text{par 8.1.4.2.}\\
&= KA(\alpha)(\phi_2^{-1}(\lambda_2^{\wedge}(\theta)))(g_1^{-1}) && \text{par 8.1.1.(b)}\\
&= (\phi_1^{-1}\ KA(\alpha)^{\wedge\wedge}\lambda_2^{\wedge}(\theta))(g_1^{-1}) && \text{par 6.3.1.}\\
&= (\phi_1^{-1}\ \lambda_1^{\wedge}(\theta \circ KA(\alpha)^{\wedge}))(g_1^{-1}) && \text{par 6.2.2.}\\
&= <\lambda_1(g_1) \ , \ \theta \circ KA(\alpha)^{\wedge}> && \text{par 6.1.4.2.}\\
&= <KA(\alpha)^{\wedge}(\lambda_1(g_1)) \ , \ \theta>
\end{aligned}$$

Donc $\lambda_2(\alpha(g_1)) = KA(\alpha)^{\wedge}\lambda_1(g_1)$.

L'existence du morphisme $KS(\alpha)$ est donc démontrée ; l'unicité est claire car $\lambda_{G_1}(G_1)$ engendre $\mathfrak{M}(G_1)$.

De plus, comme $KS(\alpha) = KA(\alpha)^{\wedge}$, la fin de 8.1.3.(b) résulte de (6.2.4.).

Soient (G_i,m_i) (i = 1, 2, 3) trois objets de la catégorie $\mathcal{GLC}$, α(resp. β) une flèche de (G_1,m_1) dans (G_2,m_2) (resp. de (G_2,m_2) dans (G_3,m_3) , et f dans $L^\infty(G_3)$. On a :

$$KA(\beta\alpha)f = f\circ(\beta\alpha) = KA(\alpha)(f\circ\beta) = KA(\alpha)\ KA(\beta)f \ .$$

Donc : $KA(\beta\alpha) = KA(\alpha)KA(\beta)$; le théorème 8.1.4.(a) en résulte.

Comme $KS(G,m) = KA(G,m)^{\wedge}$, et $KS(\alpha) = KA(\alpha)^{\wedge}$, on en déduit 8.1.4.(b) et (c).

<u>Corollaire 8.1.5.</u> : (a) Soient m', m'' deux mesures de Haar à gauche sur G, et soit $k > o$ tel que $m'' = km'$. Alors :

$$KS(G,m'') = k^{-1}KS(G,m')$$

(b) Soit K un sous groupe compact distingué de G. Si m est une mesure de Haar à gauche sur G, munissons $G_{/K}$ de la mesure m' image de m par la surjection canonique $G \overset{s}{\to} G_{/K}$. Alors KS(s) est un $\mathcal{K}$-morphisme surjectif normalisé de KS(G,m) sur $KS(G_{/K},m')$.

(c) Soit H un sous groupe ouvert de G. Si m est une mesure de Haar à gauche sur G, munissons H de la mesure m'' restriction de m à H. Si on note ε l'injection canonique de H dans G , KS(ε) est un $\mathcal{K}$-morphisme injectif normalisé de KS(H,m") dans KS(G,m).

(d) Soit $(G,m) \in \mathcal{G}\ell\mathcal{C}$. L'algèbre de Kac KS(G,m) est unimodulaire (resp. de type discret, resp. de type compact, resp. de dimension finie, resp. abélienne) si et seulement si le groupe G est unimodulaire (resp. compact, resp. discret, resp. fini, resp. abélien).

Démonstration : (a) résulte de 8.1.2.(a) et 4.2.3.

(b) et (c) résultent de 8.1.4.(c) et 6.3.3.(a)

(d) résulte de 8.1.4.(c) et de 7.1.6.(c) (resp. 7.3.4.(a), resp. 7.3.4.(a), resp. 7.3.4.(b), resp. 6.3.5.).

Proposition 8.1.6. : Soient (G_1,m_1), (G_2,m_2) deux objets de $\mathcal{G}\ell\mathcal{C}$, et α, β deux flèches de (G_1,m_1) dans (G_2,m_2). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\alpha = \beta$

(ii) $KA(\alpha) = KA(\beta)$

(iii) $KS(\alpha) = KS(\beta)$

Les foncteurs KA et KS sont donc fidèles.

Démonstration : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) est trivial.

Supposons (iii). Par définition 8.1.3.(b), on a, pour tout g de G ,

$$\lambda_{G_2}(\alpha(g)) = \lambda_{G_2}(\beta(g))$$

Comme λ_{G_2} est injective, on en déduit $\alpha = \beta$.

8.1.7. : Soit (G,m) un objet de $\mathcal{G}\ell\mathcal{C}$. Explicitons dans les cas de KA(G,m) et KS(G,m) les principaux objets utilisés dans la théorie générale :

Dans le cas de KA(G,m) :

- la W^*-algèbre est $L^\infty(G)$; le coproduit est fourni par la formule :

$$\Gamma^a_G(f)(g_1 , g_2) = f(g_1g_2)$$

(On identifie $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$ à $L^\infty(G \times G)$.

L'involution est fournie par la formule :

$$\kappa^a_G(f)\ (g) = f(g^{-1})$$

Le poids invariant à gauche sur $L^{\infty}(G)$ est la mesure de Haar à gauche m.

- L'idéal $\mathfrak{N}_m$ est donc $L^{\infty}(G) \cap L^2(G)$, et l'algèbre $\mathfrak{M}_m$ est égale à $L^{\infty}(G) \cap L^1(G)$. L'espace hilbertien H_m est le complété de $L^{\infty}(G) \cap L^2(G)$; nous l'identifions avec $L^2(G)$. La représentation π_m est alors la représentation usuelle de $L^{\infty}(G)$ dans $L^2(G)$. Comme m est une trace, les algèbres $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U}_o$ sont égales à $L^{\infty}(G) \cap L^2(G)$; les involutions J, S, F sont égales à l'isométrie $f \to \bar{f}$ de $L^2(G)$ dans lui-même ; l'opérateur modulaire est égal à 1, et les automorphismes modulaires sont égaux à l'identité.

Le produit τ est le produit des fonctions point par point. Les algèbres $\mathfrak{U}' \tau \mathfrak{U}'$ et $\mathfrak{U}_o \tau \mathfrak{U}_o$ sont égales à $L^{\infty}(G) \cap L^1(G)$.

- Le prédual de $L^{\infty}(G)$ est identifié à $L^1(G)$; son produit $*$ est le produit de convolution usuel ; l'involution $°$ est définie par $f°(g) = \Delta_G(g^{-1})\bar{f}(g^{-1})$ où Δ_G est la fonction modulaire de G.

Le sous-ensemble $\mathcal{L}_m$ est égal à $L^1(G) \cap L^2(G)$; l'application a est l'injection canonique de $L^1(G) \cap L^2(G)$ dans $L^2(G)$.

L'application ρ est l'application canonique de $L^{\infty}(G) \cap L^1(G)$ dans $L^1(G)$; l'idéal $\mathfrak{J}_m$ est égal à $L^{\infty}(G) \cap L^1(G)$.

L'algèbre $\mathbb{A}_*$ est formée des fonctions f de $L^1(G) \cap L^{\infty}(G)$, telles que $f°$ appartienne à $L^{\infty}(G)$; elle contient clairement $\mathcal{C}_c(G)$.

- L'opérateur fondamental W est fourni par la formule

$$Wf(g_1 , g_2) = f(g_1 , g_1g_2)$$

(on identifie $L^2(G) \otimes L^2(G)$ à $L^2(G \times G)$).

La représentation de Fourier est fournie par :

$$\lambda_G(f) = \int_G f(g) \lambda_G(g) \, dm(g).$$

Dans le cas de $KS(G,m)$:

- La W^*-algèbre est l'algèbre de von Neumann engendrée par la représentation régulière gauche λ_G de G ; on la note $\mathfrak{M}(G)$. Le coproduit est déterminé par la formule :

$$\Gamma_s^G(\lambda_G(g)) = \lambda_G(g) \otimes \lambda_G(g) \qquad \forall g \in G .$$

L'involution est déterminée par la formule :

$$\kappa_s^G(\lambda_G(g)) = \lambda_G(g^{-1})$$

Le poids invariant à gauche φ_m est l'unique poids normal semi-fini fidèle sur $\mathfrak{M}(G)^+$ tel que :

$$\varphi\left(\int_G f(g)\lambda_G(g)dm(g)\right) = f(e) \quad , \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(G) * \mathcal{C}_c(G)$$

et

$$\sigma_t^{\varphi}(x) = \Delta^{it}\, x\, \Delta^{-it} \qquad \forall x \in \mathfrak{M}(G)$$

(où Δ est la multiplication par la fonction modulaire de G).

En effet, si $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c(G)$, si φ_m est le poids défini au début du § 8, on a :

$$\varphi_m(\lambda_G(f_1 * f_2)) = \varphi_m(\lambda_G(f_1^{\#})^{*}\lambda_G(f_2)) = (f_2 \mid f_1^{\#}) = (f_1 \mid f_2^{\flat}) = (f_1 * f_2)(e)$$

par [1], chapitre VIII, §4, corollaire de la proposition 15.

L'unicité se montre par ([14], lemme 5.2.), car $\lambda_G(\mathcal{C}_c(G) * \mathcal{C}_c(G))$ est une sous algèbre, invariante par σ_t^{φ}, faiblement dense, de $\mathfrak{M}(G)$.

- L'idéal $\mathfrak{N}_\varphi$ (et les autres objets associés à φ) n'est pas connu explicitement ; il contient $\lambda_G(L^1(G) \cap L^2(G))$ (cf. 3.1.9.). L'algèbre $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ contient $\lambda_G(\mathcal{C}_c(G))$. On peut identifier l'espace hilbertien H_φ à $L^2(G)$. Alors $\mathcal{C}_c(G)$, muni du produit de convolution, et de l'involution $f(g) \to \Delta_G(G^{-1})\,\overline{f}(g^{-1})$ (où Δ_G est la fonction modulaire de G) est une sous algèbre hilbertienne de $\mathfrak{U}$, équivalente à $\mathfrak{U}$. L'involution J est fournie par :

$$(Jf)(g) = \Delta_G(g^{-1/2})\,\overline{f}(g^{-1})$$

L'involution S est la fermeture de l'involution de $\mathcal{C}_c(G)$ définie ci-dessus ; l'involution F est la fermeture de $f(g) \to \overline{f}(g^{-1})$ $(f \in \mathcal{C}_c(G))$.

Le produit $\top$, restreint à $\mathcal{C}_c(G)$, est donc le produit de convolution $*$.

L'opérateur modulaire est la multiplication par la fonction modulaire de G. L'algèbre $\mathcal{C}_c(G)$ est une algèbre modulaire, qui est donc incluse dans $\mathfrak{U}_o$ et dans $\mathfrak{U}'$. Les algèbres $\mathfrak{U}' \top \mathfrak{U}'$ et $\mathfrak{U}_o \top \mathfrak{U}_o$ contiennent donc $\mathcal{C}_c(G) * \mathcal{C}_c(G)$.

- Le prédual de $\mathfrak{M}(G)$ est formé des applications $\omega_{f,g} : x \to (xf \mid g)$ $(x \in \mathfrak{M}(G)\ ;\ f,g \in L^2(G))$.

L'involution ° est fournie par $\omega_{f,g}^{\circ} = \omega_{\overline{g},\overline{f}}$.

L'opérateur fondamental W est fourni par :

$$(Wf)(g_1\ ,\ g_2) = f(g_2^{-1}\, g_1\ ,\ g_1) \qquad (g_2\ ,\ g_2 \in G)$$

et la représentation de Fourier λ par :

$$\lambda(\omega_{f,g}) = f * g^{\flat} \qquad (f,g \in L^2(G))$$

(au sens de [1], chapitre VIII, §4 cor. de la proposition 15).

Si l'on identifie le prédual M_* à son image par λ, il devient l'ensemble des fonctions sur G qui peuvent s'écrire sous la forme $f * g^{\flat}$ $(f,g \in L^2(G))$. C'est l'ensemble $A(G)$ de [10]. Le produit de M_* devient alors la multiplication point par point et l'involution devient la conjugaison.

L'ensemble $\mathcal{L}_\varphi$ contient alors $A(G) \cap L^1(G)$, par 3.1.9.

Les applications λ, a, ρ sont réduites à l'identité.

Enfin, l'algèbre $\mathbb{A}_*$ contient $\mathcal{C}_c(G) * \mathcal{C}_c(G)$.

8.2. Le foncteur KS est une équivalence

Proposition 8.2.1. : Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac symétrique. Alors,

(a) Le prédual M_* est une algèbre de Banach involutive abélienne. Son spectre $X(M_*)$ est un sous groupe de l'ensemble des opérateurs unitaires de M ; la W^*-algèbre engendré par $X(M_*)$ est égale à M. Si on munit $X(M_*)$ de la topologie induite par $\sigma(M,M_*)$, c'est un groupe localement compact.

(b) La reperésentation de Fourier λ associée à K peut s'étendre en une présentation $\overline{\lambda}$ de la C^*-algèbre enveloppante de M_*, qu'on peut identifier à l'ensemble des fonctions continues sur $X(M_*)$, tendant vers 0 à l'infini. Alors, pour tout f de $\mathcal{C}_c(X(M_*))$, $\overline{\lambda}(f)$ appartient à $\mathfrak{M}_{\hat{\varphi}}$, et l'application $f \to \hat{\varphi}(\overline{\lambda}(f))$ définit une mesure de Haar à gauche sur $X(M_*)$; notons là m.

(c) Il existe un isomorphisme normalisé unique j de K sur $KS(X(M_*),m)$ tel que, pour tout g de $X(M_*)$

$$j(g) = \lambda_{X(M_*)}(g)$$

Le foncteur KS est donc représentatif.

(d) L'algèbre de Banach abélienne M_* est régulière.

Démonstration : (a) Par 6.3.5., on voit que $\hat{\mathbb{K}}$ est une algèbre de Kac abélienne, et donc appartient à $\mathcal{K}\mathcal{T}$. Par 6.3.2. et 6.3.5., on voit donc que $\mathbb{K}$ appartient à $\mathcal{K}\mathcal{I}$. C'est donc, par 7.1.7., un objet dual au sens de [17]. Le résultat a) provient alors du théorème 14 de [17].

(b) résulte de [17], lemme 10.5 et de [17], lemme 10.6.

(c) La construction de l'isomorphisme est faite en [17], lemme 10.7. (page 759 à 761) (il est noté θ_o) . Comme $X(M_*)$ engendre M, l'unicité est immédiate.

(d) On déduit de [10], lemme 3.2. et théorème 3.3.4. que, pour tout groupe localement compact G , le prédual de $\mathfrak{M}(G)$ est une algèbre de Banach régulière. Par (c), en transposant j, on trouve un isomorphisme d'algèbres de Banach entre M_* et le prédual de $\mathfrak{M}(X(M_*))$. D'où le résultat.

Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac abélienne. Alors $\mathbb{K}^\wedge$ est symétrique (cf. 6.3.5.). Par 8.2.1., $X(M^\wedge_*)$ peut être muni d'une structure de groupe localement compact. On a :

Corollaire 8.2.2. : Soit m une mesure de Haar sur $X(M^\wedge_*)$ il existe alors un unique isomorphisme j' de K sur $KA(X(M^\wedge_*),m)$ tel que :

$$[j'(\phi_K^{-1}(\lambda^\wedge(\theta)))](g) = \langle g^{-1} , \theta\rangle$$

pour tout g de $X(M^\wedge_*)$ et θ de $M^\wedge_*$.

On peut choisir m de telle sorte que j' soit normalisé.

Le foncteur KA est donc représentatif.

Démonstration : Prenons pour mesure de Haar sur $X(M^\wedge_*)$ la mesure introduite en 8.2.1.(b). Par 8.2.1.(c), il existe un isomorphisme normalisé j de $\mathbb{K}^\wedge$ sur $KS(X(M^\wedge_*),m)$. Donc, par 6.3.3.(a) et 6.2.4., $j^\wedge$ est un isomorphisme normalisé de $KS(X(M^\wedge_*),m)^\wedge$ sur $\mathbb{K}^{\wedge\wedge}$, c'est-à-dire de $KA(X(M^\wedge_*),m)^{\wedge\wedge}$ sur $\mathbb{K}^{\wedge\wedge}$. Par 4.3.6., il en résulte que :

$$\phi^{-1}_{KA(X(M^\wedge_*),m)} \circ j^{\wedge -1} \circ \phi_{\mathbb{K}}$$

est un isomorphisme normalisé de $\mathbb{K}$ sur $KA(X(M^\wedge_*),m)$. Notons le j' . Pour tout g de $X(M^\wedge_*)$, et θ de $M^\wedge_*$, on a :

$$\begin{aligned} j'(\phi_K^{-1}(\lambda^\wedge(\theta)))(g) &= (\phi^{-1}_{KA(X(M^\wedge_*),m)} \circ j^{\wedge -1} \circ \lambda^\wedge(\theta))(g) \\ &= \phi^{-1}_{KA(X(M^\wedge_*),m)} \ \lambda^\wedge_{X(M^\wedge_*)} (\theta \circ j^{-1})(g) \\ &= \langle \lambda_{X(M^\wedge_*)}(g^{-1}) , \theta \circ j^{-1}\rangle \qquad \text{par 8.1.4.2.} \end{aligned}$$

$$= \langle j^{-1} \circ \lambda_{X(M^{\wedge}_{*})}(g^{-1}) \ , \ \theta \rangle$$

$$= \langle g^{-1} \ , \ \theta \rangle \qquad \text{par 8.2.1.(c)}$$

L'unicité de j' provient du fait que $\phi_K^{-1}(\lambda^{\wedge}(M^{\wedge}_{*}))$ est dense dans M.

<u>Proposition 8.2.3.</u> : Soient (G,m) un objet de $\mathcal{G}\ell\mathcal{C}$, et $\mathbb{K}$ une algèbre de Kac réduite de $KS(G,m)$, et r la réduction de $KS(G,m)$ sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un unique sous-groupe compact distingué K de G tel qu'il existe un isomorphisme j normalisé de $\mathbb{K}$ sur $KS(G_{/K},m')$ (où m' est la mesure de Haar image de m par la surjection canonique $G \overset{s}{\to} G/_K$) faisant commuter le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
KS(G,m) \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "KS(s)"'] & & \mathbb{K} \arrow[dl, "j"] \\
& KS(G/_K,m') &
\end{tikzcd}$$

De plus, j est unique.

<u>Démonstration</u> : On note L_x (resp. R_x) l'endomorphisme de $\mathcal{M}(G)$ défini par $y \to yx$ (resp. $y \to xy$). Soient x,y dans $\mathcal{M}(G)$, et ω dans $(r(\mathcal{M}(G)))_*$; on a :

$$\begin{aligned}
\langle x \ , \ \omega \circ r \circ L_y \rangle &= \langle yx \ , \ \omega \circ r \rangle \\
&= \langle r(yx) \ , \ \omega \rangle \\
&= \langle L_{r(y)} r(x) \ , \ \omega \rangle \\
&= \langle r(x) \ , \ \omega \circ L_{r(y)} \rangle \\
&= \langle x \ , \ \omega \circ L_{r(y)} \circ r \rangle
\end{aligned}$$

On a donc , $\omega \circ r \circ L_y = \omega \circ L_{R(y)} \circ r$ pour tout $y \in \mathcal{M}(G)$, et ω de $(r(\mathcal{M}(G)))_*$ et de même, pour tout y de $\mathcal{M}(G)$, et ω de $(r(\mathcal{M}(G)))_*$

8.2.3.1. $\qquad \omega \circ r \circ R_y = \omega \circ R_{r(y)} \circ r$

Il en résulte que $[r(\mathcal{M}(G))]_* \circ r$ est une sous algèbre fermée de $\mathcal{M}(G)_*$, invariante à gauche et à droite au sens de ([19] , §5) . Posons :

$$K = \{ g \in G \ ; \ \omega \circ R_{\lambda_G(g)} = \omega \quad \forall \, \omega \in [r(\mathcal{M}(G))]_* \circ r \}$$

Alors, par ([19] , théorème 9), K est un sous groupe compact de G.

Soit g dans G. On définit une application de G dans $r(\mathfrak{M}(G))$ par

$$\alpha(g) = r(\lambda_G(g)) .$$

On a clairement $\Gamma(\alpha(g)) = \alpha(g) \otimes \alpha(g)$ par (Mi) et 8.1.3.(a) . Donc $\alpha(g)$ s'identifie à une forme linéaire multiplicative sur $(r(\mathfrak{M}(G)))_*$. Supposons $\alpha(g) = 0$. Alors, pour tout ω de $[r(\mathfrak{M}(G))]_*$, et f de $L^1(G)$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \alpha(g) , \omega \circ R_{r(\lambda_G(f))} \rangle \\ &= \langle r(\lambda_G(f)) r(\lambda_G(g)) , \omega \rangle \\ &= \langle r(\lambda_G({}_g f)) , \omega \rangle \end{aligned}$$

où ${}_g f$ désigne la translatée à gauche par g de la fonction f .

Soit :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \lambda_G({}_g f) , \omega \circ r \rangle \\ &= \langle (\lambda_G)_*(\omega \circ r) , {}_g f \rangle \\ &= \langle \kappa \circ \phi^{-1}_{KA(G,m)} \circ \hat{\lambda}_G(\omega \circ r) , {}_g f \rangle \quad \text{par 4.3.7.} \\ &= \langle \kappa \circ \phi^{-1}_{KA(G,m)} \circ \hat{r} \circ \hat{\lambda}_G(\omega) , {}_g f \rangle \quad \text{par 6.2.2.} \end{aligned}$$

En faisant tendre $\hat{\lambda}_G(\omega)$ vers 1 , on en déduit $\langle 1 , {}_g f \rangle = 0$, soit

$$0 = \int_G f(gg')dm(g') = \int_G f(g')dm(g') \quad \text{pour tout } f \text{ de } L^1(G),$$

ce qui est absurde.

Donc $\alpha(g) \neq 0$.

Il en résulte donc, que pour tout g de G , $\alpha(g)$ appartient à $X((r(\mathfrak{M}(G)))_*)$ qui est un groupe localement compact par 8.2.1.(a).

Il résulte de la définition de α , et de [9] , lemme 2.2. que α est un homomorphisme strict de groupes de G dans $X([r(\mathfrak{M}(G))]_*)$; $\alpha(G)$ est donc un sous groupe ouvert (donc fermé) de $X([r(\mathfrak{M}(G))]_*)$. Soit maintenant ω dans $[r(\mathfrak{M}(G))]_*$, tel que :

$$\langle \alpha(g) , \omega \rangle = 0 \qquad g \in G .$$

On en déduit :

$$\langle \lambda_G(g) , \omega \circ r \rangle = 0 \qquad g \in G$$

Cela entraîne $\omega \circ r = 0$; comme r est surjectif, on en déduit $\omega = 0$. En appliquant

8.2.1.(d) à $[r(\mathfrak{M}(G))]_*$, on voit que $[r(\mathfrak{M}(G)_*)]_*$ est une algèbre de Banach régulière. Donc $\alpha(G) = X[(r(\mathfrak{M}(G)))_*]$.

Le morphisme de groupes α de G dans $X([r(\mathfrak{M}(G))]_*)$ est donc surjectif.

Recherchons $\operatorname{Ker}\alpha$: soit g dans $\operatorname{Ker}\alpha$; cela équivaut à $\alpha(g')\alpha(g) = \alpha(g')$ pour tout g' de G , ou encore :

$\langle\alpha(g') , \omega\circ R_{\alpha(g)}\rangle = \langle\alpha(g') , \omega\rangle$ pour tout ω de $[r(\mathfrak{M}(G))]_*$ et pour tout g' de G.

Comme α est surjectif, et que $(X[r(\mathfrak{M}(G))]_*)$ engendre $r(\mathfrak{M}(G))$ par 8.2.1.(a) , cela équivaut à :

$$\omega \circ R_{\alpha(g)} = \omega \text{ pour tout } \omega \text{ de } [r(\mathfrak{M}(G))]_*$$

ou encore, à :

$$\begin{aligned} \omega\circ r &= \omega\circ R_{\alpha(g)} \circ r \\ &= \omega\circ r \circ R_{\lambda_G(g)} \qquad \text{par 8.2.3.1.} \end{aligned}$$

pour tout ω de $[r(\mathfrak{M}(G))]_*$.

Donc g appartient à K , par définition de K. Ainsi $K = \operatorname{Ker}\alpha$; K est donc un sous-groupe distingué.

On peut décomposer α en la surjection canonique $s : G \to G/_K$, et un isomorphisme bicontinu β de $G/_K$ sur $X((r(\mathfrak{M}(G)))_*)$; on a donc $\alpha = \beta s$.

On a vu en 8.2.1.(c) qu'il existe un isomorphisme normalisé d'algèbres de Kac j' de $\mathbb{K}$ sur $KS[X((r(\mathfrak{M}(G)))_*)]$, où m est une mesure de Haar convenable sur $X((r(\mathfrak{M}(G)))_*)$.

Posons :

$$j = KS(\beta^{-1}) \circ j'$$

On a ainsi défini un isomorphisme normalisé de $\mathbb{K}$ sur $KS(G_{/K} , m')$ où m' est une mesure de Haar convenable sur $G/_K$.

Soit $\alpha(g)$ dans $X([r(\mathfrak{M}(G))]_*)$; on a :

$$\begin{aligned} j(\alpha(g)) &= KS(\beta^{-1}) \circ \lambda_{X([r(\mathfrak{M}(G))]_*)}(\alpha(g)) && \text{par 8.2.1.(c)} \\ &= \lambda_{G/_K}(\beta^{-1} \circ \alpha(g)) && \text{par 8.1.3.(b)} \\ &= \lambda_{G/_K}(s(g)) \\ &= KS(s)\, \lambda_G(g) && \text{par 8.2.1.(c)} \end{aligned}$$

Par définition de α , on en déduit :

$$j \circ r\, \lambda_G(g) = KS(s)\, \lambda_G(g)$$

et, comme $\lambda_G(G)$ engendre $\mathfrak{M}(G)$, on en déduit :

$$jr = KS(s) \; .$$

Il est clair maintenant que si on choisit comme mesure de Haar sur $G/_K$ l'image par s de la mesure de Haar sur G, l'isomorphisme j sera normalisé par 8.1.5.(b).

Comme r est surjectif, l'unicité de j est évidente.

Montrons maintenant l'unicité du sous groupe K ;supposons qu'il existe K_1 et K_2 vérifiant les conclusions de 8.2.3. alors, il existe un isomorphisme ψ de $KS(G/_{K_1}, m_1')$ sur $KS(G/_{K_2}, m_2')$ qui fait commuter le diagramme suivant, où s_i est la surjection $G \to G/_{K_i}$ (i = 1,2)

$$\begin{tikzcd} KS(G,m) \arrow[rr, "KS(s_2)"] \arrow[dr, "KS(s_1)"'] & & KS(G/_{K_2}, m_2') \\ & KS(G/_{K_1}, m_1') \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Par 8.1.4., il résulte que $KA(G/_{K_1}, m_1')$ et $KA(G/_{K_2}, m_2')$ sont isomorphes. Par [24], il existe alors un isomorphisme γ bicontinu de $G/_{K_1}$ sur $G/_{K_2}$ tel que $\psi = KS(\gamma)$.

Il en résulte donc que :

$$KS(\gamma s_1) = KS(s_2)$$

d'où $\gamma \circ s_1 = s_2$ par 8.1.6.

Donc $\operatorname{Ker} s_1 = \operatorname{Ker} s_2$ soit $K_1 = K_2$.

Proposition 8.2.4. : Soient (G,m) un objet de $\mathcal{G}\ell\mathcal{B}$, $\mathbb{K}$ une algèbre de Kac réduite de KA(G,m) , r la réduction de KA(G,m) sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un unique sous groupe ouvert H de G tel qu'il existe un isomorphisme j normalisé de $\mathbb{K}$ sur KA(H,m") (où m" est la restriction de m à H), faisant commuter le diagramme ci-dessous, où ε désigne l'injection de H dans G :

$$\begin{tikzcd} KA(G,m) \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "KA(\varepsilon)"'] & & \mathbb{K} \arrow[dl, "j"] \\ & KA(H,m') & \end{tikzcd}$$

De plus, j est unique.

Démonstration : De même qu'en 8.2.3., on voit que $[r(L^{\infty}(G))]_{*} \circ r$ est une sous-algèbre fermée de $L^{1}(G)$, invariante à gauche et à droite au sens de [19], §5. Posons :

$H = \{g \in G$; l'application $g' \to f(g^{-1}g')$ appartient à $[r(L^{\infty}(G))]_{*} \circ r$, pour tout f dans $[r(L^{\infty}(G))]_{*} \circ r\}$.

Alors, par [19], théorème 10, H est un sous groupe ouvert de G. De plus, $[r(L^{\infty}(G))]_{*} \circ r$ est l'ensemble des f de $L^{1}(G)$ nulles en dehors de H.

Soit donc ω dans $[r(L^{\infty}(G))]_{*}$; l'application $\omega \to \omega \circ r \mid H$ est donc un isomorphisme de $[r(L^{\infty}(G))]_{*}$ sur $L^{1}(H,m'')$.

Par transposition, on en déduit l'existence d'un isomorphisme j de $r(L^{\infty}(G))$ sur $L^{\infty}(H)$ défini, pour toute f de $L^{\infty}(G)$, par :

$$\begin{aligned} \langle j(r(f)) , \omega\circ r|H\rangle &= \langle r(f) , \omega\rangle \\ &= \langle f , \omega\circ r\rangle \\ &= \langle f \mid H , \omega\circ r|H\rangle \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} j(r(f)) &= f|H \\ &= f \circ \varepsilon \quad \text{où } \varepsilon \text{ désigne l'injection } H \to G \\ &= KA(\varepsilon)f \qquad \text{par 8.1.1.(b)} \end{aligned}$$

Il en résulte que $$jr = KA(\varepsilon) .$$

On en déduit que j est un isomorphisme normalisé entre $\mathbb{K}$ et $KA(H,m')$. Comme r est surjectif, il est clair que j est unique.

Montrons maintenant l'unicité du sous groupe H :

Supposons qu'il existe deux sous groupes ouverts H_1 et H_2 de G satisfaisant aux conclusions de 8.2.5. Dans ces conditions, il est clair qu'il existe un isomorphisme ψ de $KA(H_2 , m''_2)$ sur $KA(H_1 , m''_1)$ qui fasse commuter le diagramme (ε_i est l'injection $H_i \to G(i = 1,2)$)

$$\begin{tikzcd} KA(G,m) \arrow[rr, "KA(\varepsilon_1)"] \arrow[dr, "KA(\varepsilon_2)"'] & & KA(H_1 , m''_1) \\ & KA(H_2 , m''_2) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Par [24] , il existe un isomorphisme bicontinu γ de H_1 sur H_2 tel que ψ soit égal à $KA(\gamma)$.

On a donc $\quad KA(\varepsilon_2\gamma) = KA(\varepsilon_1)$

d'où $\quad \varepsilon_2 \circ \gamma = \varepsilon_1 \quad$ par 8.1.6.

d'où $\quad \mathrm{Im}\ \varepsilon_1 = \mathrm{Im}\ \varepsilon_2$

soit $\quad H_2 = H_1$.

Corollaire 8.2.5. : Soient (G,m) un objet de $\mathfrak{glb}$, $\mathbb{K}$ une sous algèbre de Kac de KS(G,m) , i l'injection canonique de $\mathbb{K}$ dans KS(G,m). Alors, il existe un unique sous groupe ouvert H de G , tel qu'il existe un isomorphisme j normalisé de $\mathbb{K}$ sur KS(H , m'') (où m'' est la restriction de m à H), faisant commuter le diagramme ci-dessous, où ε désigne l'injection canonique de H dans G

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & KS(G,m) \\ & KS(H,m'') \arrow[ur, "KS(\varepsilon)"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, j est unique.

Démonstration : Le résultat s'obtient par dualité à partir de 8.2.4.

Corollaire 8.2.6. : Soit (G,m) un objet de $\mathfrak{glb}$; on note e l'unité de G. Le poids φ_m sur $\mathfrak{M}(G)^+$ canoniquement associé à l'algèbre modulaire $\mathcal{C}_c(G)$ est strictement semi-fini si et seulement si il existe un sous-groupe ouvert de G qui soit unimodulaire.

Démonstration : Par 7.1.8., le poids φ_m sera strictement semi-fini si et seulement si il existe une algèbre de Kac réduite de KS(G,m)^ (ou, par isomorphisme de KA(G,m)) qui soit à poids invariant. Comme KA(G,m) est abélienne, donc à trace, cela équivaut à l'existence d'une algèbre de Kac réduite de KA(G,m) qui soit unimodulaire. Par 8.2.5., cela équivaut à l'existence d'un sous groupe ouvert

H de G tel que KA(H,m") soit unimodulaire. Par 8.1.2.(d), cela équivaut donc à l'existence d'un sous groupe ouvert H de G qui soit unimodulaire.

<u>Corollaire 8.2.7.</u> : Soient $(G_1,m_1),(G_2,m_2)$ deux objets de $\mathcal{GLC}$, et u un $\mathcal{K}$-morphisme de $KS(G_1,m_1)$ dans $KS(G_2,m_2)$. Alors, il existe un unique homomorphisme strict α de G_1 dans G_2 , à image ouverte et à noyau compact, tel que :

$$u = KS(\alpha) .$$

Le foncteur KS est donc plein et fidèle.

<u>Démonstration</u> : En utilisant la décomposition canonique u = ijr définie en 5.4.2., et les résultats 8.2.3. et 8.2.5., on voit qu'il existe un unique sous groupe compact distingué K_1 de G_1 , et un unique sous groupe ouvert H_2 de G_2 tels que, si s_1 est la surjection canonique de G_1 sur $G_1/_{K_1}$, et ε_2 l'injection canonique de H_2 dans G_2 , on ait :

$$r = KS(s_1)$$

$$i = KS(\varepsilon_2)$$

D'autre part, j est un isomorphisme de $KS(G_{1/K_1}, m_1')$ sur $KS(H_2, m_2'')$. Par 8.1.4., il en résulte que $KA(G_{1/K_1}, m_1')$ et $KA(H_2,m_2'')$ sont isomorphes. Par [24], il existe un isomorphisme bicontinu γ de G_{1/K_1} sur H_2 tel que :

$$j = KS(\gamma) .$$

On a alors $u = KS(\varepsilon_2 \circ \gamma \circ s_1)$.

Il est clair que $\varepsilon_2\, \gamma\, s_1$ est une flèche de (G_1, m_1) dans (G_2, m_2) . L'unicité résulte de 8.1.6.

<u>Définition 8.2.8.</u> : On notera $\mathcal{GLCU}$ (resp. $\mathcal{GC}$, $\mathcal{GD}$, resp. $\mathcal{GF}$, resp. $\mathcal{GLCA}$) la sous catégorie pleine de $\mathcal{GLC}$ obtenue en prenant pour objets les groupes localement compacts unimodulaires (resp. compacts, resp. discrets, resp. finis, resp. abéliens).

<u>Théorème 8.2.9.</u>:(a) Le foncteur KS est une équivalence entre $\mathcal{GLC}$ et $\mathcal{KS}$. La restriction de KS à $\mathcal{GLCU}$ (resp. $\mathcal{GC}$, resp. $\mathcal{GD}$, resp. $\mathcal{GF}$, resp. $\mathcal{GLCA}$) est une équivalence entre $\mathcal{GLCU}$ (resp. $\mathcal{GC}$, resp. $\mathcal{GD}$, resp. $\mathcal{GF}$, resp. $\mathcal{GLCA}$) et $\mathcal{KS} \cap \mathcal{KU}$ (resp. $\mathcal{KS} \cap \mathcal{KD}$, resp. $\mathcal{KS} \cap \mathcal{KC}$, resp. $\mathcal{KS} \cap \mathcal{KC} \cap \mathcal{KD}$,resp. $\mathcal{KS} \cap \mathcal{KA}$).

(b) Le foncteur KA est une dualité entre $\mathcal{G}\mathcal{L}\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}\mathcal{A}$. La restriction de KA à $\mathcal{G}\mathcal{L}\mathcal{C}\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{G}\mathcal{C}$, resp. $\mathcal{G}\mathcal{D}$, resp. $\mathcal{G}\mathcal{F}$, resp. $\mathcal{G}\mathcal{L}\mathcal{C}\mathcal{A}$) est une dualité entre $\mathcal{G}\mathcal{L}\mathcal{C}\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{G}\mathcal{C}$, resp. $\mathcal{G}\mathcal{D}$, resp. $\mathcal{G}\mathcal{F}$, resp. $\mathcal{G}\mathcal{L}\mathcal{C}\mathcal{A}$), et $\mathcal{K}\mathcal{A} \cap \mathcal{K}\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{K}\mathcal{A} \cap \mathcal{K}\mathcal{C}$, resp. $\mathcal{K}\mathcal{A} \cap \mathcal{K}\mathcal{D}$, resp. $\mathcal{K}\mathcal{A} \cap \mathcal{K}\mathcal{C} \cap \mathcal{K}\mathcal{D}$, resp. $\mathcal{K}\mathcal{A} \cap \mathcal{K}\mathcal{S}$).

Démonstration : (a) Le foncteur KS de $\mathcal{G}\mathcal{L}\mathcal{C}$ dans $\mathcal{K}\mathcal{S}$ est plein (8.2.7.), fidèle (8.1.6.) et représentatif (8.2.2.). c'est donc une équivalence. Le reste du théorème provient de 8.1.5. (d).

(b) Le foncteur KA est une dualité par (a), 8.1.4.(c) et 6.3.5. Le reste du théorème provient de 8.1.2.(d).

8.3. Théorème de dualité

Théorème 8.3.1. : Soit (G,m) un objet de $\mathcal{G}\mathcal{L}\mathcal{C}$. Alors :

(a) L'ensemble $X(\mathfrak{M}(G)_*)$ est un sous groupe localement compact de l'ensemble des unitaires de $\mathfrak{M}(G)$, muni de la topologie faible.

(b) La représentation régulière à gauche λ_G de G est un isomorphisme bicontinu de G sur $X(\mathfrak{M}(G)_*)$.

Démonstration : (a) L'algèbre de Kac KS(G,m) est symétrique ; par 8.2.1.(a), on en déduit (a).

(b) Soit j l'isomorphisme de KS(G,m) sur $KS(X(\mathfrak{M}(G)_*),m')$ défini en 8.2.1.(c) . Par 8.2.8.(b), il existe un isomorphisme bicontinu α de G sur $X(\mathfrak{M}(G)_*)$, tel que $j = KS(\alpha)$. D'autre part, pour tout g de G , on voit, par définition de Γ_G^s (8.1.3.(a)) que $\lambda_G(g)$ est une forme linéaire multiplicative non nulle sur $\mathfrak{M}(G)_*$, c'est-à-dire un élément de $X(\mathfrak{M}(G)_*)$. On a donc, pour tout g de G :

$$\begin{aligned}
\lambda_{X(\mathfrak{M}(G)_*)}(\lambda_G(g)) &= j(\lambda_G(g)) && \text{par } 8.2.1.(c)\\
&= (KS(\alpha))(\lambda_G(g)) &&\\
&= \lambda_{X(\mathfrak{M}(G)_*)}(\alpha(g)) && \text{par } 8.1.3.(b)
\end{aligned}$$

Par l'injectivité de $\lambda_{X(\mathfrak{M}(G)_*)}$, on en déduit que $\alpha = \lambda_G$.

D'où le résultat (b).

Remarque 8.3.2. : Grâce à la proposition 8.2.1., on voit que le spectre de $\mathfrak{M}(G)_*$ est le groupe intrinsèque de KS(G,m) (au sens de [9], définition 3.5.). Le théorème 8.3.1. est donc le théorème 3.8 de [9] . Ermest a montré en [9], proposition 3.1.3., remarques 3.1.4. et 3.1.6. qu'on peut en déduire les théorèmes de Tatsuuma et de Tannaka.

Théorème 8.3.3. (Pontryagin)

Soit (G,m) un élément de $\mathcal{GLG}$.

(a) L'ensemble $G^\wedge$ des caractères sur G, muni de la restriction de la topologie $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ est un groupe localement compact abélien.

(b) Il existe une mesure de Haar unique $m^\wedge$ sur $G^\wedge$, telle qu'il existe un isomorphisme normalisé entre KS(G,m) et $KA(G^\wedge, m^\wedge)$. Si on identifie ces deux algèbres de Kac, la représentation de Fourier λ_G de KA(G,m) est fournie par la formule :

$$\lambda_G(f)(\chi) = \int_G f(g) \overline{<g,\chi>} \, dm(g) \qquad (f \in L^1(G))$$

(ce qui justifie la terminologie de 2.1.11).

(c) (Théorème de Plancherel). On effectue encore l'identification faite en b) ; si f appartient à $L^1(G) \cap L^2(G)$, alors $\lambda_G(f)$ appartient à $L^2(G^\wedge)$, et on a , $(f_1,f_2 \in L^1(G) \cap L^2(G))$

$$\int_{G^\wedge} \lambda_G(f_1)(\chi) \overline{\lambda_G(f_2)(\chi)} dm^\wedge(\chi) = \int_G f_1(g)\overline{f_2(g)} \, dm(g)$$

(d) Soit g dans G. Posons $g^\wedge(\chi) = \chi(g)$ pour tout χ de $G^\wedge$. Alors, l'application $g \to g^\wedge$ est un isomorphisme bicontinu de G sur $G^{\wedge\wedge}$.

(e) Si G est compact (resp. discret, resp. fini), $G^\wedge$ est discret (resp. compact, resp. fini).

Démonstration : (a) Comme G est abélien, par 8.2.9.(a), KA(G,m) est une algèbre de Kac symétrique. Donc, par 8.2.1.(a), $X(L^1(G))$, muni de la restriction de $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ est un groupe localement compact (qui est évidemment abélien). Or, les éléments de $X(L^1(G))$ sont les éléments non nuls de $L^\infty(G)$, tels que $\Gamma_G^a(f)=f\otimes f$. On en déduit a), par la définition de Γ_G^a (8.1.1.(a)).

(b) Par 8.2.1.(b) et (c), il existe une mesure de Haar $m^\wedge$ sur $G^\wedge$, et un isomorphisme j_G de KA(G,m) sur $KS(G^\wedge,m^\wedge)$, définis par :

8.3.3.1. $$j_G(\chi) = \lambda_{\hat{G}}(\chi) \qquad (\chi \in G\hat{\ })$$

On en déduit que $\phi^{-1}_{KA(G\hat{\ },m\hat{\ })} \circ (j_G^{-1})\hat{\ }$ est un isomorphisme normalisé de $KS(G,m)$ sur $KA(G\hat{\ },m\hat{\ })$. Il vérifie, pour tout f de $L^1(G)$, et χ de $G\hat{\ }$:

$$[\phi^{-1}_{KA(G\hat{\ },m\hat{\ })} \circ (j_G^{-1})\hat{\ }\lambda_G(f)](\chi) =$$

$$= [\phi^{-1}_{KA(G\hat{\ },m\hat{\ })}(\lambda_{\hat{G}\hat{\ }}(f \circ j_G^{-1}))](\chi) \qquad \text{par 6.2.2.}$$

$$= \langle \lambda_{G\hat{\ }\hat{\ }}(\chi^{-1}) \ , \ f \circ j_G^{-1} \rangle \qquad \text{par 8.1.4.2.}$$

$$= \langle f \ , \ \chi^{-1} \rangle \qquad \text{par 8.3.3.1.}$$

$$= \int_G f(g) \ \overline{\langle g \ , \ \chi \rangle} \ dm(g).$$

D'où (b).

(c) Se déduit de (b) et de 3.1.9.

(d) On déduit de (b), que pour tout g de G :

$$[\phi^{-1}_{KA(G\hat{\ },m\hat{\ })} \circ (j_G^{-1})\hat{\ }\lambda_G(g)](\chi) = \langle g^{-1} \ , \ \chi \rangle = (g^{-1})\hat{\ }(\chi)$$

ou encore :

$$\phi^{-1}_{KA(G\hat{\ },m\hat{\ })} \circ (j_G^{-1})\hat{\ } \ (\lambda_G(g)) = (g^{-1})\hat{\ }$$

En appliquant 8.3.3.1. à $KA(G\hat{\ }, m\hat{\ })$, on trouve :

8.3.3.2. $$j_{\hat{G}} \circ \phi^{-1}_{KA(G\hat{\ },m\hat{\ })} \circ (j_G^{-1})\hat{\ }(\lambda_G(g)) = \lambda_{G\hat{\ }\hat{\ }}((g^{-1})\hat{\ }).$$

Comme $j_{\hat{G}} \circ \phi^{-1}_{KA(G\hat{\ },m\hat{\ })} \circ (j_G^{-1})\hat{\ }$ est un isomorphisme normalisé de $KS(G,m)$ sur $KS(G\hat{\ }\hat{\ },m\hat{\ }\hat{\ })$, par 8.2.9.(b), il existe un isomorphisme bicontinu ε de G sur $G\hat{\ }\hat{\ }$ tel que :

$$KS(\varepsilon) = j_{G\hat{\ }} \circ \phi^{-1}_{KA(G\hat{\ },m\hat{\ })} \circ (j_G^{-1})\hat{\ }$$

ce qui s'écrit encore, par 8.3.3.2. et 8.1.3.(b)

$$\lambda_{G\hat{\ }\hat{\ }}((g^{-1})\hat{\ }) = \lambda_{G\hat{\ }\hat{\ }}(\varepsilon(g))$$

Par l'injectivité de $\lambda_{G^{\wedge\wedge}}$, on en déduit que, pour tout g de G , on a :

$$g^{\wedge} = \varepsilon(g^{-1}) \quad , \qquad \text{d'où (d)} .$$

(e) Se démontre en utilisant (d) et 8.2.9.

9 BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki : Intégration, Chapitre 8 : Convolution et représentations Hermann, Paris (1963).

[2] F. Combes : Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche. Compos Math. vol. 23, Fasc. 1 (1971) p. 49-77.

[3] F. Combes : Poids et espérances conditionnelles dans les algèbres de von Neumann. Bull. Soc. Math. France 99 (1971) p. 73-112.

[4] A. Connes : Une classification des facteurs de type III. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 6, fasc. 2 (1973) p. 133-252.

[5] J. Dixmier : Algèbres quasi-unitaires. Comm. Math. Helv. 26 (1952) p. 275-322

[6] J. Dixmier : Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Gauthier-Villars, Paris (1969).

[7] M. Enock et J.M. Schwartz : Une dualité dans les algèbres de von Neumann. C.R. Acad. Sc. Paris t. 277, série A (1973) p. 683-685.

[8] M. Enock et J.M. Schwartz : Une catégorie d'algèbres de Kac. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 279, série A (1974) p. 643-645.

[9] J. Ernest : Hopf-von Neumann algebras. Proc. Conf. Functional analysis. (Irvine, Calif.) Academic Press, New-York, (1967) p. 195-215.

[10] P. Eymard : L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact. Bull. Soc. Math. France 92 (1964) p. 181-236.

[11] A. Guichardet : Analyse harmonique commutative. Dunod, Paris (1967)

[12] U. Haagerup : Normal weights on W^*-algebras. Københavns Univ. Math. Inst. Preprint series n° 17 (1973).

[13] G.I. Kac : Ring-groups and the principle of duality, I et II. Trud. Moscow Math. Obs. 12 (1963) p. 259-301 et 13 (1965) p. 84-113.

[14] G.K. Pedersen et M. Takesaki : The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras Acta Math. 130 (1973) p. 53-87.

[15] W.F. Stinespring : Integration theorems for gages and duality for unimodular locally compact groups. Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959)p.15-56

[16] M. Takesaki : Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications. Lectures notes in Math, n° 128. Springer-Verlag, Berlin (1970)

[17] M. Takesaki : Duality and von Neumann algebras, in Lectures on operator algebras Lectures notes in Math, n° 247. Springer-Verlag, Berlin (1972) p. 665-785.

[18] M. Takesaki : Conditional expectations in von Neumann algebras. J. of Funct. Anal. 9 (1972) p. 306-321.

[19] M. Takesaki et N. Tatsuuma : Duality and subgroups. Ann. of Math. 93 (1971) p. 344-364.

[20] T. Tannaka : Über den Dualität der nichtkommutativen topologischen Gruppen. Tôhoku Math. J. 45 (1938) p. 1-12.

[21] N. Tatsuuma : A duality theorem for locally compact groups. J. Math. Kyoto Univ. 6 (1967) p. 187-293.

[22] L.I. Vainerman et G.I. Kac : Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras. Sov. Math. Dokl 14 (1974) p. 1144-1148, (traduction de : Dokl. Akad. Nauk SSSR. t. 211, (1973), n° 5).

[23] M.E. Walter : W^*-algebras and nonabelian harmonic analysis. J. of Funct. Anal. 11 (1972) p. 17-38.

[24] J.G. Wendel : Left centralizers and isomorphismes of groups algebras. Pacific J. of Math. 2 (1952) p. 251-261.

10 INDEX DES NOTATIONS

11 INDEX TERMINOLOGIQUE

Michel ENOCK et Jean-Marie SCHWARTZ
Mathématiques UER 48, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05