SABAH FAKIR

Objets algébriquement clos et injectifs dans les catégories localement présentables

Mémoires de la S. M. F., tome 42 (1975)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1975__42__5_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 42, 1975, 75 p.

OBJETS ALGÉBRIQUEMENT CLOS ET INJECTIFS DANS LES CATÉGORIES LOCALEMENT PRÉSENTABLES (*)(**)

par

Sabah FAKIR

-:-:-:-

RESUME.- On étend les notions d'objets algébriquement et existentiellement clos aux catégories localement présentables, et on les étudie dans les catégories des anneaux, monoïdes, petites catégories et petits groupoïdes. On relie ces notions à celle d'injectifs relatifs à une classe de monomorphismes et on démontre un théorème général d'existence de suffisamment de ces objets. On relie aussi la question de stabilité de la classe des objets algébriquement clos par ultraproduits à celle de catégories localement cohérentes, dont on donne un théorème de représentation.

TABLE DES MATIERES

(*) Thèse Sc. math., Paris-Nord , 1973 , 1ère partie. La deuxième partie, indépendante de la première, correspond à des publications antérieures.

(**) AMS (MOS) subject classification (1970). Primary 18.G05,02 H 13

-:-:-:-

INTRODUCTION

Dans cet article on étudie plusieurs notions qui interviennent fréquemment en Algèbre Homologique et en Théorie des Modèles. Pour cela on les place dans leur milieu naturel qui s'est révélé être les catégories localement présentables, introduites en 1971 par P. Gabriel et F. Ulmer. La finesse des techniques dans ces catégories nous permet de retrouver rapidement leurs principales propriétés connues pour quelques structures usuelles , de donner des preuves algébriques de certains résultats qui étaient jusque-là démontrés uniquement à l'aide d'arguments logiques et d'obtenir de nouveaux résultats.

Dans une première section on caractérise les quotients des objets de type α (α cardinal régulier infini) par leur comportement relativement aux colimites α-cofiltrantes et on démontre un lemme essentiel pour la suite : tout mono $A \longrightarrow B$ est une colimite α-cofiltrante de monos $A_i \longrightarrow B_i$ tels que A_i soit de type α et B_i de présentation α (de tels monos seront dits basiques).

On donne ensuite une caractérisation nouvelle des objets de type α et de présentation α à l'aide de la notion de produit réduit d'une famille d'objets relativement à un α-filtre. Ce résultat étend un résultat antérieur de l'auteur et de Haddad [11] obtenu pour les catégories abéliennes.

Dans la 3° section on démontre un théorème général d'existence de suffisamment d'injectifs relatifs à une classe de monos ; à l'aide d'un lemme qui dit que sous certaines conditions un objets dont la classe des sous-objets est équivalente à un ensemble de cardinal $< \alpha$ est de type α , on obtient comme premier corollaire l'existence de suffisamment d'injectifs dans les catégories de Grothendieck. Un 2° corollaire dit que sous certaines conditions il y a suffisamment d'objets α-injectifs, i.e. des injectifs relatifs à la classe des monos basiques.

Dans la 4° section on donne des exemples de ces objets et on montre que leur existence est un test pour la couniversalité des monos. On introduit la notion de catégories localement cohérentes ; on en donne plusieurs exemples, et on démontre un théorème général de caractérisation de ces catégories à l'aide des α-injectifs. Ce théorème donne comme cas particuliers tous les théorèmes analogues connus pour les anneaux et les catégories abéliennes. Enfin ces α-injectifs se révèlent utiles à cause de leurs liens avec les objets α-algébriquement clos.

On sait que W.R. Scott a introduit la notion de groupe algébriquement clos (a.c) resp. existentiellement clos (e.c.) pour avoir l'analogue de la notion de corps a.c. . Ces notions étendues aux structures algébriques se sont montrées essentielles en Logique dans les théories des Modèles-Compagnons et Modèles-Complétions introduites par A. Robinson.

Comme l'ont fait Eklof et Sabbag, on s'intéresse d'abord aux monos a.c. et e.c. . On démontre que la classe des monos a.c. est la plus petite classe stable par colimites cofiltrantes et contenant les monos scindés, et qu'un mono $f : A \to B$ est a.c. (resp. e.c.) SSI il existe une ultrapuissance $A^{\mathfrak{F}}$ de A et un morphisme (resp. un mono) $g : B \to A^{\mathfrak{F}}$ tel que gf = la diagonale.

Dans la 6° section on démontre que chaque objet se plonge dans un objet α - e.c. et que si les monos sont couniversels on a un plongement fonctoriel dans les α-a.c. On relie alors la question de stabilité de la classe des objets α-e.c. par colimites à celle des Modèles-Compagnons et de la cohérence. En exemple, on étudie les objets a.c. et e.c. dans la catégorie des anneaux, dans celle des anneaux réduits et celle des anneaux absolument plats commutatifs ; ce qui nous suggère un théorème général de comparaison qui peut être appliqué à certaines sous-catégories réflexives des catégories l.α-p. .

Dans la section 7, on s'intéresse à la catégorie des Monoïdes. Neumann avait établi qu'un demi-groupe a.c. est simple au sens des congruences. On donne une preuve plus simple de ce résultat, preuve valable en plus pour les monoïdes ; une conséquence est que tout monoïde se plonge dans un monoïde simple et qu'un monoïde a.c. qui n'est pas trivial est infini et e.c. .

Dans la section 8, on résout complètement la question des catégories et des groupoïdes a.c. et e.c. . On démontre qu'une catégorie a.c. est simple (d'où le résultat que chaque petite catégorie se plonge dans une catégorie simple) et qu'une petite catégorie est a.c. (resp. e.c.) SSI tous les objets sont isomorphes et pour chacun d'eux A le monoïde Hom(A,A) est a.c. (resp. SSI tous les objets sont isomorphes, il y en a une infinité et pour chacun d'eux A le monoïde Hom (A,A) est e.c.). On a aussi les résultats correspondants pour les petits groupoïdes.

Enfin en appendice on caractérise les petites catégories $\mathcal{U}$ telles que $\mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{op}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$ soient localement cohérentes.

A l'intention du lecteur qui ne connaît pas les catégories localement présentables, on rappelle après cette introduction les définitions et les propriétés utilisées.

Les principaux résultats de cet article ont paru dans deux Notes aux Comptes Rendus [9] et [10] .

Je suis heureux de remercier J. Bénabou pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec lui, pour l'intérêt qu'il a manifesté à mes recherches en me posant des questions qui se sont révélées être autant de clefs pour la résolution de problèmes soulevés ici.

Dictionnaire des catégories localement présentables [14]

1 - Limite = Limite projective

2 - Colimite = Limite inductive

3 - Soit α un cardinal régulier infini. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite :

a) α-cofiltrante si

- 1) Pour chaque famille d'objets (A_i), $i \in I$, Card $I < \alpha$, il y a un objet B et pour chaque i un morphisme $A_i \longrightarrow B$

- 2) Pour chaque famille de morphismes $f_i : A \to B$, $i \in I$, Card $I < \alpha$, il y a un morphisme $g : B \longrightarrow C$ tel que $g \circ f_i$ soit indépendant de i.

b) α-petite si elle est équivalente à une catégorie $\mathcal{D}$ avec card(Fl $\mathcal{D}$) $< \alpha$.

4 - Une colimite d'un foncteur $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ est dite :

a) monomorphique si pour chaque $d \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{D}$, Fd est un mono

b) α-cofiltrante si $\mathcal{D}$ est α-cofiltrante

c) α-colimite si $\mathcal{D}$ est α-petite.

5 - Une catégorie est dite cocomplète (resp. α-cocomplète) si elle a les colimites (resp. les α-colimites).

6 - Un foncteur est dit continu (resp. α-continu) s'il préserve les limites (resp. les α-limites).

7 - Un objet A est dit α-présentable ou de présentation α(resp. de type α) si le foncteur Hom(A,-) préserve les colimites α-cofiltrantes (resp. les colimites α-cofiltrantes monomorphiques).

8 - Un épimorphisme $f : A \longrightarrow B$ est dit véritable (= echt) si pour chaque diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "k"] \arrow[dl, dashed, "\ell"'] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

où g est mono, il y a $l : B \longrightarrow C$ tel que $lf = h$ (et $gl = k$).

9 - Catégorie localement α-présentable = catégorie complète et cocomplète possédant un système générateur (P_i), $i \in I$, où les P_i sont de présentation α et tels que pour chaque morphisme f

$$f \text{ iso} \Longleftrightarrow \text{pour chaque } i,\ \mathrm{Hom}(P_i,f) \text{ iso.}$$

Dans une telle catégorie :

a) Les colimites α-cofiltrantes commutent aux α-limites, en particulier une colimite α-cofiltrante de monos est un mono.

b) Chaque objet est une colimite α-cofiltrante des objets de p.α (resp. de type α) qui sont "au-dessus" de lui (resp. qui sont des sous-objets).

c) Si $A \to B$ est un épi véritable, alors A de t.α $\Longrightarrow$ B de t.α .

d) Si B est de t.α , il y a un objet A de p.α et un épi véritable $A \to B$.

e) La sous-catégorie $\mathcal{U}$ des objets de p.α est α-cocomplète.

f) La catégorie est équivalente à $\mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{op}, \mathrm{Ens})$, sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}^{op}, \mathrm{Ens})$ dont les objets sont les foncteurs α-continus.

10 - Catégorie localement α-noethérienne = catégorie l.α-p. où chaque objet de t.α est de p.α .

11 - Catégorie localement α-cohérente = catégorie l.α-p. où chaque sous-objet de t.α d'un objet de p.α est de p.α .

EXEMPLES : Les catégories de structures algébriques finitaires usuelles sont l.$\aleph_0$-p. ; Cat est l.$\aleph_0$-p. ; Bool est l.$\aleph_0$-n. ; Comp^{op} est l.$\aleph_1$-n.

-:-:-:-

Tableau des abbréviations

t.α	=	type α
p.α	=	présentation α
ℓ.α-p	=	localement α-présentable
ℓ.α-n	=	localement α-noethérienne
ℓ.α-c	=	localement α-cohérente
mono	=	monomorphisme
épi	=	épimorphisme
iso	=	isomorphisme
a.c.	=	algébriquement clos
e.c.	=	existentiellement clos
SSI	=	si et seulement si
Ann	=	catégorie des algèbres de Boole
Comp	=	catégorie des espaces compacts séparés
Cat	=	catégorie des petites catégories
Grd	=	catégorie des patits groupoïdes
Ens	=	catégorie des ensembles

-:-:-:-

Index des définitions

-:-:-:-

CHAPITRE 1

Préliminaires

α désigne dans tout cet article un cardinal régulier infini.

a) *Type faible d'un objet*

(1-1) Définition.- On dit qu'un objet E d'une catégorie est de type faible α si pour toute colimite α-cofiltrante $A_i \longrightarrow A, i \in I$, l'application canonique

$$\mathrm{Colim}\ (E,\ A_i) \longrightarrow (E,\ A)$$

est injective.

(1-2) Remarque.- (Bénabou) Soit :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

un diagramme de somme amalgamée. On a $g = h$ SSI f est un épimorphisme.

La démonstration est immédiate.

(1-3) Lemme.- Pour toute petite catégorie $\mathcal{D}$ qui est α-cofiltrante, il existe un ensemble ordonné α-cofiltrant $\mathcal{I}$ et un foncteur cofinal $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{D}$.

Démonstration.- La démonstration de P. Deligne ([1], Exposé 1, proposition 8.1.6) pour le cas $\alpha = \aleph_0$, se généralise au cas α quelconque, en remplaçant le mot β fini par $\beta < \alpha$.

(1-4) Proposition.- Soit E un objet d'une catégorie localement α-présentable. On considère les conditions suivantes :

a) E est de type α .

b) E est de type faible α .

c) Il existe un objet F de type α et un morphisme $F \to E$ qui est mono et épi.

d) Il existe un objet F de type α et un épimorphisme $F \to E$.

On a $a \Longrightarrow b \Longleftrightarrow c \Longleftrightarrow d$. Si tout épimorphisme est véritable (= echt), alors $b \Longrightarrow a$.

Démonstration.-

$a \Longrightarrow b$. Soit $\alpha_i : A_i \longrightarrow A$, $i \in I$, une colimite α-cofiltrante. D'après 1.3, on peut supposer que la catégorie I est ordonnée. Si $i \leqslant j$, on appelle α_{ij} le morphisme $A_i \longrightarrow A_j$ qui se déduit de $i \to j$. Soit $i \in I$, et des morphismes $f,g : E \rightrightarrows A_i$ tels que $\alpha_i f = \alpha_i g$. Pour tout $j \geqslant i$, on considère un noyau E_j du couple $(\alpha_{ij}f , \alpha_{ij}g)$

$$E_j \xrightarrow{\;e_j\;} E \overset{\alpha_{ij}f}{\underset{\alpha_{ij}g}{\rightrightarrows}} A_j \quad , \qquad j \geqslant i .$$

On obtient un diagramme α-cofiltrant de noyaux dont on prend une colimite E'

$$E' \xrightarrow{\;e\;} E \overset{\alpha_i f}{\underset{\alpha_i g}{\rightrightarrows}} A_i \; .$$

e est un noyau de $(\alpha_i f , \alpha_i g)$. Comme $\alpha_i f = \alpha_i g$, e est un isomorphisme. E étant de type α, il existe $j \geqslant i$ et $h : E \to E_j$ tel que $\mathrm{id}_E = e_j h$, d'où on tire que e_j est un isomorphisme et que $\alpha_{ij}f = \alpha_{ij}g$.

<u>$b \Longrightarrow c$</u>. On écrit E comme colimite α-cofiltrante de ses sous-objets E_i de type α, $a_i : E_i \longrightarrow E$, $i \in I$. On forme des sommes amalgamées

$$E_i \xrightarrow{\;a_i\;} E \overset{p_i}{\underset{q_i}{\rightrightarrows}} F_i = E \coprod_{E_i} E \; , \quad i \in I \; .$$

Une colimite de ce système de sommes amalgamées est :

$$E \xrightarrow{\;\mathrm{id}_E\;} E \overset{\mathrm{id}_E}{\underset{\mathrm{id}_E}{\rightrightarrows}} E \; ,$$

d'où le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "a_i"] \arrow[d, "a_i"'] & E \arrow[r, shift left, "p_i"] \arrow[r, shift right, "q_i"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_E"] & F_i \arrow[d, "b_i"] \\
E \arrow[r, "\mathrm{id}_E"] & E \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_E"'] & E
\end{tikzcd}$$

Comme E est de type faible α et que $b_i p_i = b_i q_i$, il existe j tel que $p_j = q_j$, donc a_j est un épimorphisme d'après (1-2).

<u>$c \Longrightarrow d$</u>. C'est trivial.

<u>$d \Longrightarrow b$</u>. Soit $F \xrightarrow{\;h\;} E$ un épimorphisme tel que F soit de type α ; soient $a_i : A_i \longrightarrow A$, $i \in I$ une colimite α-cofiltrante, i un élément de I et $f,g : E \to A_i$ tels que $a_i f = a_i g$. On a alors $a_i f\, h = a_i g\, h$. D'après $a \Longrightarrow b$, F est de type faible α, il existe donc $j \geqslant i$ tels que $a_{ij} f\, h = a_{ij}\, g\, h$, où $a_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ est le morphisme canonique, d'où l'on tire $a_{ij}f = a_{ij}g$.

La dernière assertion résulte de ce que un objet quotient véritable d'un objet de type α est de type α.

<u>(1-5) Remarques</u>.- Dans les structures algébriques usuelles, tout morphisme se

factorise en morphisme surjectif suivi d'un monomorphisme, et par suite les épimorphismes véritables coïncident avec les épimorphismes surjectifs.

(1-6) Exemple.- Dans la catégorie Ann , l'anneau Q est de type faible $\aleph_0$ et n'est pas de type $\aleph_0$.

b) *Monomorphismes basiques*

(1-7) Lemme.-

a) Dans une catégorie $1.\alpha$-p , tout mono $f : A \to B$ est une colimite α-cofiltrante de monos $f_s : A_s \longrightarrow B_s$, $s \in S$, où A_s (resp. B_s) est de $t.\alpha$ (resp. $p.\alpha$).

b) Si la catégorie est $1.\alpha$-n , on peut choisir les morphismes canoniques $A_s \longrightarrow A$ et $B_s \longrightarrow B$, de manière qu'ils soient des monos.

Démonstration.-

a) On écrit B comme colimite α-cofiltrante ordonnée d'objets B_i qui sont de p-α . Soient $b_i : B_i \longrightarrow B$, $i \in I$, les morphismes canoniques. On construit alors des produits fibrés

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "a_i"'] & B_i \arrow[d, "b_i"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Les f_i sont des monos. Pour $i \leq K$, on obtient des morphismes canoniques $a_{i,K} : A_i \longrightarrow A_K$; A est une colimite α-cofiltrante des A_i , par l'intermédiaire des a_i .

Pour chaque i , on écrit A_i comme colimite α-cofiltrante ordonnée de sous-objets $A_{i,j}$, $j \in J_i$, qui sont de type α . Soient $d_{(i,j)} : A_{i,j} \longrightarrow A_i$ les morphismes canoniques. On considère l'ensemble $S : \coprod J_i$, $i \in I$, coproduit dans Ens. On définit un préordre sur S de la façon suivante :

$$s = (i,j) \leq t = (k,\ell) \ , \quad \text{où } j \in j_i \ , \ \ell \in j_K$$

si $i \leq K$ et il existe $h : A_{i,j} \longrightarrow A_{K,\ell}$ tel que $a_{i,K}\, d_{(i,j)} = d_{(K,\ell)} h$

$$\begin{tikzcd} A_{i,j} \arrow[r, "d_{(i,j)}"] \arrow[d, dashed, "h"'] & A_i \arrow[d, "a_{i,K}"] \\ A_{K,\ell} \arrow[r, "d_{(K,\ell)}"] & A_K \end{tikzcd}$$

Ce h est alors unique, et on pose $a_{s,t} = h$, $A_{i,j} = A_s$, $B_s = B_i$, $f_s = f_i \circ d_{(i,j)}$, $b_s = b_i$

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[ddr, "a_s"'] & & \\
& A_i \arrow[r, tail] \arrow[d, "a_i"] & B_i = B_s \arrow[d, "b_s"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

On voit facilement que ce préordre sur S est α-cofiltrant. On a de plus :

$$\operatorname*{Colim}_{s\in S} (f_s : A_s \longrightarrow B_s) \simeq \operatorname*{Colim}_{i\in I} (\operatorname*{Colim}_{j\in J_i} A_{i,j} \longrightarrow B_{i,j})$$

$$\simeq \operatorname*{Colim}_{i} (A_i \longrightarrow B_i) \simeq f : A \to B .$$

b) Si la catégorie est $1.\alpha$-n., B est une colimite α-cofiltrante de sous-objets de $t.\alpha$ qui sont alors de $p.\alpha$, on peut donc choisir les b_i monomorphismes. Les a_i sont alors des monomorphismes, ainsi que les $a_s : A_s \longrightarrow A$.

(1-8) Remarque.- Ce lemme va jouer un rôle très important dans tout cet article. Il éclaire et est éclairé par la proposition (1.10) où on étudie la catégorie des monomorphismes d'une catégorie donnée, étude qui a été suggérée à l'auteur par J. Bénabou. Pour alléger les notations, on va user de la terminologie suivante.

(1-9) Terminologie.- Dans une catégorie $1.\alpha$-p. un <u>mono</u> $f : A \to B$ est dit <u>basique</u> si A est de $t.\alpha$ et B de $p.\alpha$.

(1-10) Théorème.- <u>Soit $\mathcal{A}$ une catégorie</u> $1.\alpha$-p., $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$ <u>la catégorie des morphismes de $\mathcal{A}$</u>, $\mathrm{Mono}(\mathcal{A})$ <u>la sous-catégorie pleine de</u> $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$ <u>dont les objets sont les monomorphismes de $\mathcal{A}$</u>. <u>Alors</u> $\mathrm{Mono}(\mathcal{A})$ <u>est</u> $1.\alpha$-p. <u>et ses objets</u> α-p. <u>sont les monos basiques de $\mathcal{A}$</u> (c.f. 1.9).

Démonstration.- Soit I le foncteur d'inclusion canonique $\mathrm{Mono}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{A})$. I préserve les colimites α-cofiltrantes. De plus, il possède un adjoint à gauche L défini comme suit. Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{A}$, il existe une factorisation de f, $A \xrightarrow{\varepsilon} C \xrightarrow{\phi} B$, où ε est un épi véritable et ϕ un mono. On pose $L(f) = \phi$. On conclut à l'aide de ([14], 7, 2, i) que $\mathrm{Mono}(\mathcal{A})$ est $1.\alpha$-p. On va déterminer ses objets α-p.

Soit $\phi : E \to F$ un mono basique de $\mathcal{A}$. Il existe un objet α-p. A et un épi véritable $\varepsilon : A \to E$. Le composé $\phi\,\varepsilon$ est alors un objet α-p. de $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$, et par suite ϕ qui est isomorphe à $L(\phi\,\varepsilon)$ est α-p. dans $\mathrm{Mono}(\mathcal{A})$.

Réciproquement, soit $f : A \to B$ un objet α-p. de $\mathrm{Mono}(\mathcal{A})$. On écrit f comme colimite α-cofiltrante de monos basiques $f_i : A_i \to B_i$ (c.f.(1.7) et (1.9)). Soient $a_i : A_i \to A$ et $b_i : B_i \to B$, $i \in I$ les morphismes canoniques. Par définition d'objet α-p. , il existe alors $i, g : B \to B_i$, $h : A \to A_i$ tels que $b_i g = id_B$ et $a_i h = id_A$. Donc B (resp. A) est un facteur direct d'un objet de p-α (resp. de type α) , et par suite B (resp. A) est de p-α (resp. de type α).

-:-:-:-

CHAPITRE 2

Produits réduits ;ultraproduits

a) *Définitions et propriétés élémentaires*

(2-1) Définition.- On appelle α-filtre sur un ensemble I un filtre $\mathfrak{F}$ tel que toute intersection d'une famille (F_j), $j \in J$, d'éléments de $\mathfrak{F}$, avec Card $J < \alpha$, soit un élément de $\mathfrak{F}$.

(2-2) Définition.- (Voir aussi [11]). Dans une catégorie, soit (A_i), $i \in I$, une famille d'objets, et soit $\mathfrak{F}$ un α-filtre sur I. Pour chaque $F \in \mathfrak{F}$, on suppose que le produit πA_i, $i \in F$, existe et on le note A_F. Le système de projections canoniques

$$p_{G,F} : A_G \longrightarrow A_F \quad , \quad G \supset F \in \mathfrak{F} \quad ,$$

est α-cofiltrant. S'il possède une colimite on la note $\phi_F : A_F \longrightarrow A_{\mathfrak{F}}$, $F \in \mathfrak{F}$, et on l'appelle produit réduit des A_i suivant $\mathfrak{F}$, ou produit α-réduit. Si $\alpha = \aleph_0$ et $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre, on dira Ultraproduit.

Comme on l'a remarqué dans [11], cette définition généralise la notion classique de produit réduit d'ensembles, munis ou non de structures.

Si on a $A_i = A$ pour chaque $i \in I$, on dira que $A_{\mathfrak{F}}$ est une puissance α-réduite de A(resp. une ultrapuissance si $\alpha = \aleph_0$ et $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre). On le notera alors $A^{\mathfrak{F}}$. Il y a dans ce cas un morphisme, dit diagonal, $\Delta : A \longrightarrow A^{\mathfrak{F}}$, défini comme colimite des diagonales

$$\Delta_F : A \longrightarrow A_F \quad , \quad F \in \mathfrak{F} \quad .$$

Δ_F est défini par les équations, $p_{F,i}\, \Delta_F = id_A$, où $i \in F$, et $p_{F,i}$ est la projection canonique ; Δ_F est donc un mono scindé.

(2-3) Proposition.- Dans une catégorie l.α-p., le morphisme diagonal $\Delta : A \longrightarrow A^{\mathfrak{F}}$ d'un objet A dans une de ses puissances α-réduites est un monomorphisme.

Démonstration.- Δ est en effet une colimite α-cofiltrante des monomorphismes Δ_F

b) *Une caractérisation du type et de la présentation*

(2-4) Lemme.- Soit $a_i : A_i \longrightarrow A$, $i \in I$, une colimite α-cofiltrante dans une catégorie ayant des produits et des colimites, et où I est un ensemble ordonné α-cofiltrant. Pour chaque $i \in I$, on pose $\bar{i} = \{j | j \geqslant i\}$. L'ensemble des $\bar{i}$ est une base d'un α-filtre sur I. Soit $\mathfrak{F}$ ce α-filtre (resp., dans le cas où $\alpha = \aleph_0$, soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre plus fin). Il existe un système compatible de monomorphismes scindés

$$f_i : A_i \longrightarrow \prod_{j\geq i} A_j$$

qui détermine, un mono

$$f : A \longrightarrow A_{\mathfrak{I}}$$

tel que, pour chaque $i \in I$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d, "a_i"'] & \prod\limits_{j\geq i} A_j \arrow[d, "\phi_i"] \\ A \arrow[r] & A_{\mathfrak{I}} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Démonstration.- Soit $f_i : A_i \longrightarrow \prod_{j\geq i} A_j$ l'unique morphisme tel que $p_j f_i = a_{ij}$, où p_j est la projection canonique et $a_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ le morphisme du diagramme donné. Comme $p_i f_i = a_{ii} = id_{A_i}$, on a que f_i est un monomorphisme scindé. Le système des f_i est compatible, et est une solution au problème.

(2-5) Lemme [11].- Dans une catégorie localement α-présentable, soit $f_i : A_i \to B_i$, $i \in I$, un diagramme α-cofiltrant de monomorphismes, où I est un ensemble ordonné. On considère les colimites $a_i : A_i \longrightarrow A$, $b_i : B_i \longrightarrow B$ et $f = \text{colim}\, f_i$. Soit E un objet de type α et $s : E \to A$. S'il existe $i \in I$ et $t : E \longrightarrow B_i$ tel que $b_i t = f s$, il existe $j \in I$ et $u : E \longrightarrow A_j$ tel que $s = a_j u$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "t"] \arrow[ddl, "s"'] & \\ A_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[d, "a_i"'] & & B_i \arrow[d, "b_i"] \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

Démonstration.- Pour chaque $j \geq i$, on forme le produit fibré

$$\begin{tikzcd} E \prod\limits_{B_j} A_j \arrow[r, "f'_j"] \arrow[d, "b'_j"'] & E \arrow[d, "b_{ij} t"] \\ A_j \arrow[r, "f_j"] & B_j \end{tikzcd}$$

où $b_{ij} : B_i \longrightarrow B_j$ est le morphisme canonique. On obtient un diagramme α-cofiltrant de produits fibrés dont la colimite est un produit fibré

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "b'"'] & E \arrow[d, "b_i t"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Comme f est un monomorphisme, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "id_E"] \arrow[d, "s"'] & E \arrow[d, "f\ s"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

est aussi un produit fibré. Donc f' est un isomorphisme et par suite il existe $j \geqslant i$ tel que f'_j soit un isomorphisme, d'où le résultat.

<u>(2-6) Théorème</u>.- <u>Soit</u> E <u>un objet d'une catégorie</u> $1.\alpha$-p. $\mathcal{A}$.

a) E <u>est de type faible</u> α <u>SSI pour tout produit</u> α-<u>réduit d'objets de</u> $\mathcal{A}$, $A_F \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$, $F \in \mathcal{F}$, <u>l'application canonique</u>

$$(E,\ A_F)_{\mathcal{F}} \longrightarrow (E,\ A_{\mathcal{F}})$$

<u>est injective</u>.

b) <u>On suppose</u> E <u>de type</u> α, <u>alors</u> E <u>est</u> α-<u>présentable SSI pour tout produit</u> α-<u>réduit l'application précédente est bijective</u>.

c) <u>Si</u> $\alpha = \aleph_0$, <u>on peut remplacer dans ce qui précède le mot "produit α-réduit" par le mot "ultraproduit"</u>.

<u>Démonstration</u>.-

a) Il est clair que la condition est nécessaire. Supposons qu'elle soit vérifiée et soit $a_i : A_i \longrightarrow A$, $i \in I$ une colimite α-cofiltrante. D'après (1.3) on peut supposer que I est un ensemble ordonné α-cofiltrant. On applique la construction (2.4) et on considère $s,t : E \rightrightarrows A_i$ tels que $a_i s = a_i t$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & & \\
 & & A_i \arrow[r, "a_i"] \arrow[d, "f_i"] & A \arrow[d, "f"] & \\
\prod\limits_{j\geq i} A_j \arrow[r, phantom, "="] & & A_{\bar{i}} \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[dr, dashed, "\phi_{\bar{i},F}"'] & A_{\mathfrak{F}} & \\
 & & & A_F \arrow[u] \arrow[r] & A_j
\end{tikzcd}$$

D'après la condition supposée, il existe $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset \bar{i}$, tel que $\phi_{\bar{i},F}\, f_i s = \phi_{\bar{i},F}\, f_i t$. Si $j \in F$, on a alors $a_{ij} s = a_{ij} t$, où $a_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ est le morphisme canonique.

b) On utilise le même argument et on conclut à l'aide du lemme (2.5).

-:-:-:-

CHAPITRE 3

Un théorème d'existence de suffisamment d'injectifs relatifs

a) *Le théorème*

(3-1) Définitions.- Soit Σ une classe de monos d'une catégorie. Un objet I est appelé Σ-injectif si pour chaque $f \in \Sigma$, $f : A \to B$, et chaque morphisme $g : A \to I$ il existe $h : B \to I$ tel que $hf = g$.

On dit alors que la catégorie possède suffisamment d'objets Σ-injectifs si pour chaque objet A il existe un mono $f : A \to I$ où I est Σ-injectif.

(3-2) Définition.- Dans une catégorie l.α-p., un objet I est dit α-injectif s'il est Σ-injectif, où Σ est la classe des monos basiques (1.9).

(3-3) Définition.- Dans une catégorie un mono $f : A \to B$ est dit couniversel si pour chaque somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "K"] \\ C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

h est un mono.

(3-4) Définition.- On dit qu'une catégorie possède la propriété d'amalgamation si pour chaque paire de monos $f : A \to B$, $g : A \to C$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "K"] \\ C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

où h et K sont des monos.

Si la somme amalgamée $B \coprod_A C$ existe, alors cela revient à dire que les morphismes canoniques $B \to B \coprod_A C$ et $C \to B \coprod_A C$ sont des monos.

(3-5) Exemples.- La propriété d'amalgamation est plus faible que celle d'avoir les monos couniversels, au moins dans les catégories ayant des sommes amalgamées ; elle est satisfaite par exemple dans la catégorie des groupes [21] .

Les monos sont couniversels dans une catégorie de modules, dans les topos, plus généralement dans les catégories ayant suffisamment d'objets injectifs et dans la catégorie des anneaux absolument plats commutatifs (3-13).

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie ayant des colimites et où une colimite $\aleph_0$-cofiltrante de monos est un mono ; soit Σ un ensemble de monos de $\mathcal{A}$.

(3-6) Lemme.- On suppose que $\mathcal{A}$ possède la propriété d'amalgamation ; alors pour toute famille de monos $f_i : A \to B_i$, $i \in I$, la colimite $f : A \to B$ est un mono et les morphismes canoniques $b_i : B_i \to B$ sont des monos.

Démonstration.- Si I est fini, ce lemme est immédiat par récurrence sur Card(I). S'il est infini, soit $P_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I. Ordonné par inclusion $P_f(I)$ est $\aleph_0$-cofiltrant. Pour chaque $F \in P_f(I)$, soit $f_F : A \to B_F = \mathrm{Colim}(A \to B_i)$, $i \in F$ et soit :

$$f : A \to B = \mathrm{Colim}(A \to B_F)\ ,\quad F \in P_f(I)\ .$$

Il est clair que f et les morphismes canoniques $b_i : B_i \to B$ sont des monos et que $f : A \to B$ muni de $b_i : B_i \to B$ est une colimite des $f_i : A \to B_i$.

(3-7) Lemme.- On suppose que les monos de $\mathcal{A}$ sont couniversels ; il existe alors un foncteur $H_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ et un morphisme $h_1 : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow H_1$ tel que

1) pour chaque objet A, $h_1(A)$ est un mono ;

2) pour chaque paire $s : E \to F$, $s \in \Sigma$, et $f : E \to A$ il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d] \\ A \arrow[r, tail, "H_1(A)"] & H_1(A) \end{tikzcd}$$

Démonstration.- Soit (Σ, A) l'ensemble de couples (s, f) où $s : E \to F$ est un élément de Σ, et $f : E \to A$. Pour chacun de ces couples, on construit une somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d] \\ A \arrow[r, tail, "i_{(s,f)}"] & A_s \end{tikzcd}$$

et on pose $A \xrightarrow{h_1(A)} H_1(A) = \mathrm{colim}\,(A \longrightarrow A_s)$. D'après (3.6) $h_1(A)$ est un mono.

Soit g un morphisme : $A \longrightarrow B$; il détermine une application $(\Sigma,A) \longrightarrow (\Sigma,B)$, $(s,f) \longrightarrow (s,gf)$, et des morphismes canoniques $g_s : A_s \longrightarrow B_s$, d'où un morphisme

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d] & \\
A \arrow[r, "i_{(s,f)}"] \arrow[d, "g"'] & A_s \arrow[r, "\phi_s(A)"] \arrow[d, dashed, "g_s"] & H_1(A) \arrow[d, dashed, "H_1(g)"] \\
B \arrow[r, "i_{(s,gf)}"'] & B_s \arrow[r, "\phi_s(B)"'] & H_1(B)
\end{tikzcd}$$

unique $H_1(g) : H_1(A) \longrightarrow H_1B$ rendant le diagramme précédent commutatif. L'unicité assure que H_1 est un foncteur, la commutativité assure que les $h_1(A)$ sont fonctoriels.

(3-8) Théorème.- On suppose que les monos de $\mathcal{A}$ sont couniversels et qu'il existe un cardinal régulier infini α tel que pour chaque $s \in \Sigma$, $s : E \longrightarrow F$, E soit de type α ; il existe alors un foncteur $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ et un morphisme $h : id_{\mathcal{A}} \longrightarrow T$ tel que pour chaque A, $h(A)$ soit un mono et TA un objet Σ-injectif .

Démonstration.- On construit par récurrence transfinie une chaîne de foncteurs $H_\beta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, β ordinal, et pour chaque $\beta \leq \gamma$, un mono ponctuel $h_{\beta\gamma} : H_\beta \longrightarrow H_\gamma$, tel que $h_{\beta,\beta} = id$ et si $\beta \leq \gamma \leq \delta$, $h_{\beta\delta} = h_{\gamma\delta}\, h_{\beta\gamma}$.

On pose pour cela $H_o = id_{\mathcal{A}}$; si le programme a été réalisé pour tout $\gamma < \beta$:

a) Si β a un prédécesseur, on pose $H_\beta = H_1(H_{\beta-1})$, $h_{\beta-1,\beta} = h_1\, H_{\beta-1}$, $h_{\gamma\beta} = h_{\beta-1,\beta}\, h_{\gamma\beta-1}$ pour $\gamma \leq \beta_{-1}$,

b) si β est limite , on pose $H_\beta = \operatorname{colim} H_\gamma$, $\gamma < \beta$, et $h_{\gamma,\beta} : H_\gamma \longrightarrow H_\beta$ les morphismes canoniques.

On va montrer que pour chaque objet A, $H_\alpha(A)$ est Σ-injectif. Soit $s : E \longrightarrow F$ un élément de Σ , et $f : E \longrightarrow H_\alpha(A)$. Il existe alors $\beta < \alpha$ et $\ell : E \longrightarrow H_\beta(A)$ tel que $h_{\beta\alpha}(A) \circ \ell = f$. Comme $H_{\beta+1}(A) = H_1(H_\beta(A))$, ℓ se prolonge à $t : F \longrightarrow H_{\beta+1}(A)$ tel que $h_{\beta,\beta+1}(A) \circ \ell = t\, s$

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[r, tail, "s"] \arrow[dll, dashed, "\ell"'] \arrow[dd, "f"] & F \arrow[ddll, dashed, "t"] \\
H_\beta(A) \arrow[drr, "h_{\beta\alpha}(A)"] \arrow[dr] & & & \\
 & H_{\beta+1}A \arrow[r, tail, "h_{\beta+1,\alpha}(A)"'] & H_\alpha(A) &
\end{tikzcd}$$

d'où $h_{\beta+1}(A)\, t\, s = f$.

Il est donc établi que $id_{\mathcal{A}} \xrightarrow{h_{o,\alpha}} H_\alpha$ répond à la question.

b) *Quelques applications*

(3-9) Corollaire.- Dans une catégorie l.α-p. où les monos sont couniversels et où chaque colimite $\aleph_0$-cofiltrante de monos est un mono, chaque objet se plonge fonctoriellement dans un objet α-injectif.

Démonstration.- La classe des monos basiques possède un ensemble de représentants (à isomorphisme près).

(3-10) Corollaire.- Dans une catégorie de Grothendieck (AB5 + générateur) chaque objet se plonge fonctoriellement dans un objet injectif.

Démonstration.- D'après ([18] , lemme 1, page 136) les injectifs sont précisément les Σ-injectifs où Σ est la classe des monos $I \longrightarrow U$, U générateur fixé de la catégorie. Il suffit donc de montrer que les sous-objets de U possèdent un même type. On va montrer qu'ils sont tous de type α , où α est le premier cardinal régulier strictement supérieur au cardinal de l'ensemble des sous-objets de U.

(3-11) Proposition.- Dans une catégorie avec produits fibrés et colimites et où les produits fibrés commutent aux colimites α-cofiltrantes, un objet est de type α si la classe de ses sous-objets est équivalente à un ensemble de Cardinal $< \alpha$.

Démonstration.- Soit E un tel objet, soit $\phi_i : A_i \longrightarrow A$, $i \in I$ une colimite α-cofiltrante monomorphique et soit f un morphisme $f : E \to A$. On suppose que I est ordonné.

On considère pour chaque i un produit fibré

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "f_i"'] & E \arrow[d, "f"] \\ A_i \arrow[r, "\phi_i"'] & A \end{tikzcd}$$

On obtient un diagramme α-cofiltrant monomorphique $(E_i, \psi_{i,j} : E_i \longrightarrow E_j)$ dont une colimite est E par l'intermédiaire des ψ_i.

Dire que f se factorise à travers l'un des ϕ_i , c'est dire que pour un tel i, ψ_i est un isomorphisme.

On suppose que pour tous les i, $i \in I$, ψ_i n'est pas un isomorphisme. On va construire alors une sous-famille des $(E_i, -)$ qu'on peut ordonner en une α-chaîne (i.e. chaîne indexée par α)

$$\begin{tikzcd} E_{i_o} \arrow[r] & E_{i_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{i_s} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\psi_{i_s, i_t}"'] & \cdots & E_{i_t} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

s, t des éléments de α, telle que si on pose $\theta_{s,t} = \psi_{i_s,i_t}$, $\theta_{s,t}$ ne soit pas un iso (pour tout $s < t < \alpha$).

Soit $i \in I$. On pose $E_{i_0} = E_i$. On suppose la chaîne construite jusqu'à $s < \alpha$, s non compris. Si s n'est pas limite, on a par hypothèse que

$$\psi_{i_{s-1}} : E_{i_{s-1}} \longrightarrow E$$

n'est pas un iso ; il existe donc $j \in I$ tel que

$$\psi_{i_{s-1},j} : E_{i_{s-1}} \longrightarrow E_j$$

n'est pas un iso ; on pose $E_{i_s} = E_j$ et, $\theta_{s-1,s} = \psi_{i_{s-1},j}$, et pour $u < s-1$, on pose $\theta_{u,s} = \theta_{s-1,s} \cdot \theta_{u,s-1}$.

Si s est limite, il découle des hypothèses qu'il existe j, $j \in I$, tel que $j \geqslant i_u$, pour tout $u \in s$.

Pour chaque u, $u \in s$,

$$\psi_{i_u,j} : E_{i_u} \longrightarrow E_j$$

n'est pas un iso, puisque pour v tel que $u < v < s$ on a que ψ_{i_u,i_v} n'est pas un iso.

On pose alors $E_s = E_j$ et $\theta_{u,s} = \phi_{i_u,j}$, $u \in s$.

La chaîne est donc construite. Elle est de Cardinal α, ce qui est contraire aux hypothèses.

<u>(3-12) Remarque</u>.- Ce dernier corollaire est implicite dans les preuves classiques d'existence des injectifs, voir par exemple Cartan-Eilenberg [6] et Freyd([12] p. 130).

c) <u>*Exemple des anneaux absolument plats*</u>

(3-13) <u>Un exemple où il y a suffisamment d'objets</u> α<u>-injectifs mais où il n'y a pas suffisamment d'objets injectifs</u>.

La catégorie des anneaux absolument plats commutatifs est l. $\aleph_0$-p. ; cela résulte des propositions (4-12) et (6-16), démontrées dans la suite.

Dans cette catégorie les monos sont couniversels ; soit en effet un diagramme de somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ C & \xrightarrow[h]{} & D \end{array}$$

où f est un mono ; alors D est l'anneau absolument plat universel associé à $B \underset{A}{\otimes} C$. Soient s,t,u les morphismes canoniques

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dl, "t"'] \arrow[dd] \\
& B \otimes_A C \arrow[dr, "s"] & \\
C \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "h"] & & D
\end{tikzcd}
$$

alors u est un mono. Pour chaque $x \in C$,

$$
\begin{aligned}
h(x) = su(x) = 0 &\Longrightarrow \exists\ n \geqslant 1 : u(x)^n = 0 \quad \text{(c.f. 6-16,b)} \\
&\Longrightarrow u(x^n) = 0 \\
&\Longrightarrow x^n = 0 \\
&\Longrightarrow x = 0
\end{aligned}
$$

car C est réduit, étant absolument plat.

Cette catégorie possède donc suffisamment d'objets $\aleph_0$-injectifs (3-9). Cependant dans cette catégorie le corps Q des rationnels ne se plonge dans aucun objet injectif. Soit en effet un mono $Q \longrightarrow I$ où I est injectif, alors pour tout corps K de caractéristique 0, Q se plonge dans K , et par suite il y a un prolongement $K \longrightarrow I$; ce morphisme est nécessairement injectif, donc $\mathrm{Card}\ I \geqslant \mathrm{Card}\ K$; or pour chaque cardinal infini il existe un corps de caractéristique 0 ayant ce cardinal ; ceci montre que I n'existe pas.

-:-:-:-

CHAPITRE 4

Sur les objets α-injectifs, et les objets α-cohérents

a) *Quelques exemples*

(4-1) Remarques.- Soit $\mathcal{A}$ une catégorie localement α-présentable.

a) Un objet α-injectif est β-injectif pour tout cardinal $\beta \leqslant \alpha$.

b) Un objet est injectif SSI il est β-injectif pour tout cardinal régulier β. Cela résulte du fait que pour tout objet il existe un cardinal γ tel que cet objet soit γ-présentable.

c) Si en plus la catégorie est abélienne et si G désigne la somme d'un ensemble de représentants des objets α-présentables, alors α-injectif $\Longleftrightarrow (\alpha,G)$-injectif. On rappelle [11] qu'un objet I est appelé (α,G)-injectif si pour tout sous-objet F de type α de G, tout morphisme, $F \longrightarrow I$, s'étend à G.

d) Dans la catégorie des modules à gauche sur un anneau cohérent à gauche A, un module est $\aleph_0$-injectif SSI il est $(\aleph_0, A)$-injectif, (voir par exemple [36] et [7]). Dans [36] ces modules sont appelés F.P. injectifs.

(4-2) Proposition.- Dans une catégorie abélienne qui est localement $\aleph_0$-noethérienne [14] tout objet $\aleph_0$-injectif est injectif. Ce résultat est implicite dans [13].

Démonstration.- Soit G un générateur de la catégorie. Il suffit, d'après le lemme 1, page 136 de [18], de montrer que pour tout sous-objet A de G, tout morphisme f de A dans un objet $\aleph_0$-injectif s'étend à G. Soit (U_j), $j \in \beta$, β ordinal, l'ensemble des sous-objets de type $\aleph_0$ de G. On va étendre f à tous les sous-objets de G de la forme $A_\gamma = A + U_0 + \ldots + U_\gamma$, γ ordinal $\leqslant \beta$. A_γ est le sous-objet de G engendré par A et les U_i, pour $i \leqslant \gamma$.

1°) Si γ est un ordinal limite et si pour chaque $\delta < \gamma$ on a construit $f_\delta : A_\delta \longrightarrow I$ tel que pour tout $\delta \leqslant \delta' < \gamma$ on a $f_{\delta'} \circ i_{\delta\delta'} = f_\delta$ où $i_{\delta\delta'}$ est le monomorphisme canonique $A_\delta \to A_{\delta'}$, on remarque que $A_\gamma = \operatorname{colim} A_\delta$, $\delta < \gamma$, et on pose $f_\gamma = \operatorname{colim} f_\delta$; $f_\gamma : A \longrightarrow I$.

2°) Pour chaque $\gamma < \beta$, le carré suivant est cartésien et cocartésien (c.a.d. produit fibré et somme amalgamée)

$$\begin{tikzcd}
A_\gamma \cap U_{\gamma+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"'] & U_{\gamma+1} \arrow[d, "\ell"] \\
A_\gamma \arrow[r, "i"] & A_\gamma + U_{\gamma+1} = A_{\gamma+1}
\end{tikzcd}$$

où i, j, k, ℓ sont les morphismes canoniques ; de plus $A_\gamma \cap U_{\gamma+1}$ est de type $\aleph_0$ (la catégorie est localement $\aleph_0$ noethérienne). Par suite, si on a un morphisme $f_\gamma : A_\gamma \longrightarrow I$, il existe $g : U_{\gamma+1} \longrightarrow I$ tel que $g\,j = f_\gamma k$ et il existe aussi un morphisme unique $f_{\gamma+1} : A_{\gamma+1} \longrightarrow I$, tel que $f_{\gamma+1} i = f_\gamma$ et $f_{\gamma+1} \ell = g$.

(4-3) Remarque.- Le résultat précédent n'est pas vrai pour des catégories non abéliennes. En effet, la catégorie Bool des algèbres de Boole est localement α-noethérienne pour tout cardinal régulier infini α , les algèbres de type α et de présentation α coïncidant avec les algèbres de Cardianl $< \alpha$. Les algèbres α-complètes , c'est-à-dire où toute famille d'éléments (x_i), $i \in I$, card $I < \alpha$, possède un Sup , sont α-injectives. Pour le voir, on peut appliquer le lemme 2 , page 141 de [19] , ou procéder directement comme suit. Soit $i : A \longrightarrow B$ un mono où A est de cardinal $< \alpha$. Soit E une algèbre α-complète et $f : A \longrightarrow E$. Pour chaque $b \in B$, on pose $g(b) = \operatorname{Sup}\{f(a) \mid i(a) \leqslant b\}$, $a \in A$. On vérifie facilement que g est morphisme et que $g\,i = f$.

En particulier, tout algèbre de Boole est $\aleph_0$-injective, alors qu'une algèbre de Boole infinie, injective est de cardinal $\geqslant 2^{\aleph_0}$, ([34], (25.4)).

Dans [9] une erreur dans la démonstration nous a fait affirmer que α-injectif $\Longrightarrow$ α-complet. Il n'en est rien.

b) *Un critère d'existence*

(4-4) Lemme.- Dans une catégorie l.α-p. une colimite α-cofiltrante $f : A \to B$ de monos couniversels $f_i : A_i \longrightarrow B_i$, $i \in I$, est un mono couniversel.

Démonstration.- Soient $a_i : A_i \longrightarrow A$ et $b_i : B_i \longrightarrow B$ les morphismes de colimites. Pour chaque somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

on forme, pour chaque i, une somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h\,a_i"'] & B_i \arrow[d, "K_i"] \\ C \arrow[r, "g_i"'] & D_i \end{tikzcd}$$

On obtient un système α-cofiltrant de monos g_i dont une colimite est g , qui est donc également mono.

(4-5) Proposition.- Si une catégorie l.α-p. possède suffisamment d'objets α-injectifs, alors les monomorphismes sont couniversels.

Démonstration.- Il suffit d'après (4-4) et (1-7) de montrer que tout mono basique (1.9) est couniversel. On considère alors une somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & B \arrow[d, "h"] \\ D \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

où f est mono basique. Par hypothèse, il existe un monomorphisme $\ell : D \to E$, avec E objet α-injectif ; d'où un morphisme $s : B \to E$ tel que $s\,f = \ell\,k$. On en conclut l'existence de $t : C \to E$ tel que $t\,g = \ell$; ce qui montre que g est un monomorphisme.

(4-6) Remarque.- (4-5) et (3-9) fournissent donc un critère d'existence de suffisamment d'objets α-injectifs dans certaines catégories l.α-p. Les conditions de (3-9) sont satisfaites dans une catégorie de modules, ou dans Bool pour $\alpha \geq \aleph_0$ et dans la catégorie des C^*-algèbres commutatives pour $\alpha \geq \aleph_1$.

Pour trouver des contre exemples, on a besoin de la notion d'objets simples.

(4-7) Définition.- Dans une catégorie de structures algébriques usuelles, un objet est dit simple s'il a au plus deux congruences, la congruence égalité ($a \sim b \Longleftrightarrow a = b$) et la congruence totale (pour tous a, b, on a $a \sim b$).

Cette définition est valable aussi pour une catégorie (c.f. 8.4).

On sait que dans la catégorie des groupes et celle des demi-groupes, il y a suffisamment d'objets simples, ([26] ,[27]) . On va montrer qu'il en est de même pour la catégorie des monoïdes et celle des petites catégories (c.f. § 8). Dans ces catégories et dans Ann , la proposition suivante due à G. Sabbagh (non publiée) montre que les monos ne sont pas couniversels.

(4-8) Proposition.- Dans une catégorie de structures algébriques usuelles, si un mono $f : A \longrightarrow B$ est couniversel et si B est simple, alors A est simple.

Démonstration.- Soit une somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

avec f et h des monos ; alors k constant (resp. mono) $\Longrightarrow g$ constant (resp.

mono). Dans le cas de la catégorie $\underset{\sim}{Cat}$, il faut remplacer les mots constant , (mono) par localement constant (fidèle). (c.f. 8.4).

c) *Catégories localement cohérentes*

(4-9) Définition.- On dit qu'un objet d'une catégorie est α-cohérent s'il est de type α , et si ses sous-objets de t.α sont de p.α .

(4-10) Définition.- On dit qu'une catégorie est localement α-cohérente (en abrégé l.α-c.) si elle est l.α-p. et si chaque objet α-p. est α-cohérent.

(4-11) Exemples

a) La catégorie des modules à droite sur un anneau cohérent à droite est ℓ. $\aleph_0$-c. ([5] , exercice 12 , page 63).

b) On caractérisera, dans l'appendice, les petites catégories U telles que $\mathrm{Cont}_\alpha(U^o, \underset{\sim}{Ens})$ soient l.α-c. .

c) La catégorie des groupes n'est pas l. $\aleph_0$-c. . Le théorème de Higman [20] dit en effet qu'un groupe de type fini est plongeable dans un groupe de présentation finie SSI il est récursivement énumérable, et il existe des groupes de type fini et récursivement énumérables qui ne sont pas de présentation finie ([33], p. 324).

d) Toute catégorie l.α-n. [14] est évidemment l.α-c. Les catégories $\underset{\sim}{Ann}$, $\underset{\sim}{Bool}$ sont ℓ. $\aleph_0$-n. , $\underset{\sim}{Cat}$ et $\underset{\sim}{Comp}^{op}$ sont l. $\aleph_1$-n. [14] .

e) A partir des exemples a), b), d) et de la proposition suivante (4-13), on obtient de nouveaux exemples.

(4-12) Lemme.- Soit $I : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$, un foncteur ayant un adjoint à gauche F. On suppose $\mathcal{B}$ cocomplète, I fidèle, réfléchit les isomorphismes et préserve les colimites β-cofiltrantes pour un certain cardinal régulier β . Si $\mathcal{A}$ est ℓ.β-p. alors $\mathcal{B}$ aussi.

Démonstration.- Ce lemme est essentiellement un raffinement de ([14], (7.2,i), p. 72). Soit M un ensemble générateur véritable de $\mathcal{A}$, dont les éléments sont β-p. Alors $\{F\,U \mid U \in M\}$ est un ensemble générateur véritable de $\mathcal{B}$, et les F U sont β-p.

(4-13) Proposition.- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie l.α-p. (resp. l.α-c.) (resp. l.α-n) et X un objet quelconque (resp. α-p) (resp. α-p). Alors $(X, \mathcal{C}) = X/\mathcal{C}$ est une catégorie l.α-p. (resp. l.α-c.) (resp. l.α-n.)

Démonstration.- On rappelle que les objets de $X/\mathcal{C}$ sont les morphismes $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$. Un morphisme $g : (X \xrightarrow{f} Y) \to (X \xrightarrow{h} Z)$ est un morphisme $g : Y \longrightarrow Z$ tel que $g\,f = h$.

Soit H le foncteur : $X/\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, défini par :

$$U(X \xrightarrow{f} Y) = Y \text{ et } U(g) = g.$$

U possède un adjoint à gauche F défini sur les objets par $F\,Y = i : X \to X \amalg Y$, où i est le morphisme canonique, et de la façon évidente sur les morphismes. On a facilement les propriétés suivantes :

a) $X/\mathcal{C}$ est cocomplète ; U crée les colimites α-cofiltrantes, donc il les préserve et les réfléchit.

b) U est fidèle et réfléchit les isomorphismes.

c) U préserve et réfléchit les monos, les épis, et les épis véritables.

En vertu du lemme précédent, $X/\mathcal{C}$ est donc l.α-p. . Si on suppose que X est α-p. , il résulte de c) que les objets de t.α (resp. p.α) de $X/\mathcal{C}$ sont les $f : X \longrightarrow Y$ où Y est de t.α (resp. p.α) dans $\mathcal{C}$. En utilisant de nouveau c) on voit que si $\mathcal{C}$ est l.α-c. (resp. l.α-n.), il en est de même de $X/\mathcal{C}$.

Les objets α-injectifs ont été inventés, à l'origine, pour obtenir une caractérisation des catégories l.α-c. , analogue à celle des anneaux cohérents, [36] et [7] , des catégories l.c. abéliennes [11] , ou celle des catégories localement noethériennes [28] .

(4-14) Proposition.- Dans une catégorie quelconque (resp. l.α-c.), une colimite α-cofiltrante monomorphique (resp. α-cofiltrante quelconque) d'objets α-injectifs est un objet α-injectif.

Démonstration.- Soit $a_i : A_i \longrightarrow A$, $i \in I$, une colimite α-cofiltrante monomorphique (resp. quelconque) d'objets α-injectifs A_i . Soit $f : U \longrightarrow V$ un monomorphisme basique, i.e. tel que U soit de type α et V de p.α. Soit $g : U \longrightarrow A$; il existe alors $i \in I$ et $h : U \longrightarrow A_i$, tels que $a_i h = g$.

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[r, tail, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & V \arrow[dll, dashed, "K"] \\ A_i \arrow[r, "a_i"'] & A & \end{tikzcd}$$

Comme A_i est α-injectif, il existe $K : V \longrightarrow A_i$ tel que $K\,f = h$, d'où $a_i\,K\,f = g$.

(4-15) Théorème.- Soit $\mathcal{A}$ une catégorie l.α-p. et ayant suffisamment d'objets α-injectifs (c.f. 3-2). Les conditions suivantes sont alors équivalentes

a) *$\mathcal{A}$ est l.α-c.*

b) *Toute colimite α-cofiltrante d'objets α-injectifs est un objet α-injectif.*

c) *Tout produit α-réduit (ou tout ultraproduit si $\alpha = \aleph_0$) d'objets α-injectifs est un objet α-injectif.*

<u>Démonstration</u>.- a) $\Longrightarrow$ b) d'après (4-14). b) $\Longrightarrow$ c) résulte de la remarque qu'un produit d'objets α-injectifs est α-injectif et qu'un produit α-réduit est une colimite α-cofiltrante de produits (c.f. 2.2).

<u>c $\Longrightarrow$ a</u>. Soit $f:U \rightarrowtail V$ un mono avec U de $t.\alpha$, et V de $p.\alpha$. Pour montrer que U est α-p. , il suffit d'après (2.6) de montrer que pour tout produit α-réduit (ou, si $\alpha = \aleph_0$, tout ultraproduit) $D_F \xrightarrow{\phi_F} D_{\mathfrak{F}}$, $F \in \mathfrak{F}$, d'objets D_i , $i \in I$, et tout morphisme $g : U \longrightarrow D_{\mathfrak{F}}$, il existe $F \in \mathfrak{F}$ et $h : U \longrightarrow D_F$ tel que $\phi_F h = g$. Pour chaque $i \in I$, on considère alors un mono $D_i \xrightarrow{s_i} E_i$ où E_i est un objet α-injectif, puis un produit réduit des E_i , relativement à $\mathfrak{F}$. Cela détermine un diagramme commutatif, pour chaque $F \in \mathfrak{F}$.

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"'] & V \arrow[ddl, dashed, "t"] \\
D_F \arrow[r, "\phi_F"'] \arrow[d, tail, "\underset{i\in F}{\pi} s_i = s_F"'] & D_{\mathfrak{F}} \arrow[d, "s"'] & \\
E_F \arrow[r, "\psi_F"] & E_{\mathfrak{F}} &
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, $E_{\mathfrak{F}}$ est α-injectif ; il existe donc $t : V \longrightarrow E_{\mathfrak{F}}$ tel que $t\ f = s\ g$. Comme V est α-p. , il existe $G \in \mathfrak{F}$ et $u : V \longrightarrow E_G$ tel que $\psi_G u = t$. Puisque les s_F sont des monos, on peut alors appliquer le lemme (2.5), qui donne le résultat cherché.

-:-:-:-

CHAPITRE 5

Monomorphismes algébriquement et existentiellement clos

a) *Remplacement des équations par des diagrammes*

(5-1) Terminologie.- Dans une catégorie, pour tout diagramme du type suivant (1) (resp. (2)) où s est un monomorphisme,

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & F \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

$$(2)\qquad \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{s} & F & \overset{h_i}{\underset{g_i}{\leftleftarrows}} & P_i \ , \quad i \in I \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & & & \\ A & & & & \end{array}$$

on dit que ce diagramme possède une solution dans une extension B de A définie par un monomorphisme $f : A \longrightarrow B$, s'il existe un morphisme $b : F \longrightarrow B$ tel que $b\, s = f\, a$ (resp. $b\, s = f\, a$ et $b\, g_i \neq b\, h_i$ pour tout $i \in I$). Si $f = id_A$, on dira alors que le diagramme possède une solution dans A. Enfin, on dira que le diagramme est compatible s'il possède une solution dans une extension de A.

(5-2) Remarque.- Si la somme amalgamée existe

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & F \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a'} \\ A & \xrightarrow{s'} & F \coprod_E A \end{array} ,$$

dire que le diagramme (1) (resp. (2)) est compatible, est équivalent à s' est un monomorphisme (resp. s' est un monomorphisme et $a' g_i \neq a' h_i$, pour tout $i \in I$). Le couple (s', a') est alors appelé une solution canonique.

La terminologie (5-1) est justifiée par le résultat suivant.

(5-3) Proposition.- Dans une catégorie de structures algébriques finitaires, il est équivalent de se donner un diagramme compatible D du type (1) (resp. (2)) et un système compatible D' d'équations (resp. d'équations et d'inéquations) du type (1)' (resp. (2)')

$$(1)' \qquad c_\ell(x_m,\ a_n) = d_\ell(x_m,\ a_n)$$

$$(2)' \quad \begin{cases} c_\ell(x_m, a_n) = d_\ell(x_m, a_n) \\ g_k(x_m, a_n) \neq h_k(x_m, a_n) \end{cases}$$

où $k \in K$, $\ell \in L$, $m \in M$, $n \in N$, les c_ℓ, d_ℓ, g_k, h_k sont des "polynômes" en les variables x_m et les constantes a_n éléments de A , tel que :

a) E de type α , F et les P_i de présentation α , avec Card $I < \alpha \Longleftrightarrow$ les ensembles K, L, M, N sont de cardinal $< \alpha$.

b) D possède une solution dans une extension B de $A \Longleftrightarrow D'$ possède une solution dans B ; il y a de plus une correspondance canonique biunivoque entre les solutions.

Démonstration.- On rappelle d'abord qu'un système d'équations (resp. d'équations et d'inéquations), à coefficients dans A , est dit compatible s'il possède une solution dans une extension de A .

1) Soit un diagramme du type (1). On écrit E comme quotient d'un libre $\mathcal{L}(N)$, de base $(\bar{n})_{n\in N}$: $\mathcal{L}(N) \xrightarrow{\psi} E$. On écrit F comme conoyau : $\mathcal{L}(L) \overset{c}{\underset{d}{\rightrightarrows}} \mathcal{L}(M) \xrightarrow{\phi} F$, où $\mathcal{L}(L)$ est libre de base $(\bar{\ell})_{\ell\in L}$, et $\mathcal{L}(M)$ libre de base $(\bar{m})_{m\in M}$. Il existe alors $\theta : \mathcal{L}(N) \longrightarrow \mathcal{L}(M)$ tel que $\phi\theta = s\psi$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(N) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathcal{L}(M) \arrow[d, "\phi"] \arrow[dd, dashed, bend right, "b'"'] & \mathcal{L}(L) \arrow[l, shift right, "c"'] \arrow[l, shift left, "d"] \\
E \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, "a"'] & F \arrow[d, dashed, "b"] & \\
A \arrow[r, dashed, tail, "f"] & B &
\end{tikzcd}$$

On pose $a\,\psi(\bar{n}) = a_n$, $\theta(\bar{n}) = \theta_n((\bar{m})_{m\in M})$, $c(\bar{\ell}) = c_\ell((\bar{m}))$, $d(\bar{\ell}) = d_\ell((\bar{m}))$.
θ_n , c_ℓ et d_ℓ sont des mots ou "polynômes" en les $(\bar{m})$, $m \in M$.

Trouver un monomorphisme $f : A \rightarrowtail B$ et une solution $b\,s = f\,a$, revient à trouver f et un morphisme $b' : \mathcal{L}(M) \longrightarrow B$ tels que $b'\theta = f\,a\,\psi$ et $b'c=b'd$ c'est donc trouver une extension B de A et des éléments x_m de B , $m \in M$, tels que :

$$(*) \quad \begin{cases} c_\ell((x_m)) = d_\ell((x_m)) \;, & \ell \in L \\ \theta_n((x_m)) = f(a_n) \;, & n \in N . \end{cases}$$

C'est un système d'équations du type (1)' . Si E est de type α , on peut choisir N de Cardinal $< \alpha$; si F est de présentation α , on peut choisir L et M de Card $< \alpha$.

1') Réciproquement soit donné un système d'équations du type (1)', à coefficients

a_n dans A. On considère un objet libre $\mathcal{L}(N)$ de base $(\bar{n})_{n\varepsilon N}$, un libre $\mathcal{L}(L)$ de base $(\bar{\ell})_{\ell\varepsilon L}$, un libre $\mathcal{L}(M \cup N)$ de base $(\bar{m})_{n\varepsilon M} \cup (\bar{\bar{n}})_{n\varepsilon N}$. On définit alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(N) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dd, "\bar{a}"'] & & \mathcal{L}(M \cup N) \arrow[dr, "\phi"] \arrow[dd] & & \mathcal{L}(L) \arrow[ll, shift right, "c"'] \arrow[ll, shift left, "d"] \\
& E \arrow[rr, "s"] \arrow[dl, "a"] & & F \arrow[dl, "b"] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & B & &
\end{tikzcd}$$

au moyen des équations

$$\bar{a}(\bar{n}) = a_n \quad ; \quad \theta(\bar{n}) = \bar{\bar{n}} \quad ; \quad c(\bar{\ell}) = c_\ell(..\bar{m}..,..\bar{\bar{n}}..) \quad ;$$

$$d(\bar{\ell}) = d\,(..\bar{m}..,\bar{\bar{n}}) \text{ , (i.e. on remplace } x_m \text{ par } \bar{m} \text{ et } a_n \text{ par } \bar{\bar{n}}) \text{ ,}$$

finalement ϕ est un conoyau de (c,d). Si le système d'équations donné possède une solution (x_m) dans une extension $f : A \longrightarrow B$ de A , on définit un morphisme $\bar{b} : \mathcal{L}(M \cup N) \longrightarrow B$ par $\bar{b}(\bar{m}) = x_m$ et $\bar{b}(\bar{\bar{n}}) = f(a_n)$. On a alors $\bar{b}c = \bar{b}d$ et $\bar{b}\theta = f\bar{a}$. Il existe b unique : $F \longrightarrow B$ tel que $b\phi = \bar{b}$. Soit une factorisation de $\phi\theta$ en $s\psi$ tel que s soit un monomorphisme et ψ un morphisme surjectif. On voit alors qu'il existe a unique $E \longrightarrow A$ tel que $a\,\psi = \bar{a}$ et $b\,s = f\,a$.

On a ainsi construit un diagramme du type (1) ; il est clair qu'il répond aux conditions exigées.

2) Soit un diagramme compatible du type (2). On obtient comme dans 1) un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(N) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathcal{L}(M) \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{L}(L) \arrow[l, shift right, "c"'] \arrow[l, shift left, "d"] \\
E \arrow[r, "s"] \arrow[d, "a"'] & F \arrow[d, "b"'] & P_i \arrow[l, shift right, "g_i"'] \arrow[l, shift left, "h_i"] \\
A \arrow[r, "f"] & B &
\end{tikzcd}$$

et un système d'équations $(*)$, tel que $b\,s = f\,a$ et $bg_i \neq bh_i$ pour tout $i\varepsilon I$. Il existe donc pour chaque $i \varepsilon I$, un élément $p_i \varepsilon P_i$ tel que $bg_i(p_i \neq bh_i(p_i)$.

On pose :

$$g_i(p_i) = g'_i(..\phi(\bar{m})..)$$

$$h_i(p_i) = h'_i(..\phi(\bar{m})..)$$

où g'_i et h'_i sont des mots en les $\phi(\bar{m})$, $m \varepsilon M$. On a alors

$$g'_i(..x_m..) \neq h'_i(..x_m..) .$$

Considérons alors le système d'inéquations, en les variables x_m

$$(**)\ g'_i(..x_m..) \neq h'_i(..x_m..) , \quad i \in I , \quad m \in M.$$

Si les systèmes (*) et (**) possèdent une solution commune dans B, il est clair qu'on a $b : F \longrightarrow B$ tel que $bs = fa$, et $bg_i \neq bh_i$, pour tout $i \in I$.

2') Réciproquement, soit un système d'équations et d'inéquations du type (2)'.

$$c_\ell(x_m, a_n) = d_\ell(x_m, a_n) , \quad \ell \in L , \quad m \in M , \quad n \in N$$

$$g_k(x_m, a_n) \neq h_k(x_m, a_n) .$$

Si ce système a une solution dans B, on a vu dans 1') que les équations déterminent un diagramme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, "a"'] & F \arrow[d, "b"] & \mathcal{L}(M \cup N) \arrow[l, "\phi"'] \\ A \arrow[r, tail] & B & \end{tikzcd}$$

Chaque inéquation $g_k(x_m, a_n) \neq h_k(x_m, a_n)$ peut être représentée par une double flèche :

$$\mathcal{L}(1) \overset{g_k}{\underset{h_k}{\rightrightarrows}} \mathcal{L}(M \cup N)$$

où (1) est l'algèbre libre sur un générateur 1 , tel que :

$$g_k(1) = g_k(..\bar{m}.., ..\bar{\bar{n}}..)$$

$$h_k(1) = h_k(..\bar{m}, ..\bar{\bar{n}}..)$$

Dire que $b\phi g_k \neq b\phi h_k \Longleftrightarrow g_k(x_m, f(a_n)) \neq h_k(x_m, f(a_n))$.

<u>(5-4) Terminologie</u>.- Dans une catégorie l.α-p. un diagramme du type (1) (resp. (2)) sera dit <u>basique</u> si E est de type α , F de présentation α (resp. E de t.α , F et les P_i de p.α avec Card I < α). On dira aussi qu'il est à coefficients dans A.

<u>(5-5) Définition</u>.- Dans une catégorie l.α-p. , on dit qu'un <u>monomorphisme</u> $f : A \longrightarrow B$ est α-<u>algébriquement clos</u> , en abrégé α-a.c. , (resp. α-<u>existentiellement clos</u> , en abrégé α-e.c.) si pour tout diagramme basique, à coefficients dans A, et du type (1) (resp. du type (2)) si ce diagramme a une solution dans B, alors il a une solution dans A.

Si $\alpha = \aleph_0$, on dira simplement algébriquement clos (a.c.) et existentiellement clos (e.c.).

b) <u>*Etude de la classe*</u> $\mathcal{E}_\alpha$ <u>*des monos*</u> *α-a.c.* <u>*d'une catégorie*</u> *ℓ.α-p* $\mathcal{A}$

(5-6) Proposition.-

a) Les isomorphismes de $\mathcal{A}$ appartiennent à $\mathcal{E}_\alpha$.

b) $\mathcal{E}_\alpha$ est stable par composition.

c) $g\, f \in \mathcal{E}_\alpha \Longrightarrow f \in \mathcal{E}_\alpha$.

d) Tout monomorphisme scindé appartient à $\mathcal{E}_\alpha$.

e) $\mathcal{E}_\alpha$ est stable par colimites α-cofiltrantes.

f) La diagonale $\Delta : A \longrightarrow A^{\mathcal{F}}$, d'un objet A dans une de ses puissances α-réduites (c.f. (2.2.)) appartient à $\mathcal{E}_\alpha$.

g) $\mathcal{E}_\alpha$ est stable par produits.

h) $\mathcal{E}_\alpha$ est stable par produits α-réduits (2.2) .

Démonstrations.- a), b) et c) résultent immédiatement des définitions. d) Soit $f : A \longrightarrow B$ un monomorphisme tel qu'il existe $g : B \longrightarrow A$ avec $gf = id_A$. D'après a) $gf \in \mathcal{E}_\alpha$, d'après c) $f \in \mathcal{E}_\alpha$. e) Soit $f_i : A_i \longrightarrow B_i$, $i \in I$, un diagramme α-cofiltrant d'éléments de $\mathcal{E}_\alpha$, dont une colimite est $f : A \longrightarrow B$. f est d'abord un monomorphisme. Soit un diagramme basique du type (1) à coefficients dans A , et ayant une solution dans B

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[rr, tail, "s"] \arrow[dl, dashed, "h_i"'] \arrow[dd, "a" near start] & & F \arrow[dl, dashed, "g_i"'] \arrow[dd, "b"] \arrow[dlll, dashed, "k_i"' near start] \\
A_i \arrow[rr, tail, "f_i" near end] \arrow[dr, "a_i"'] & & B_i \arrow[dr, "b_i"'] & \\
 & A \arrow[rr, tail, "f"'] & & B
\end{tikzcd}$$

En vertu de (1.10), il existe $i \in I$, $g_i : F \longrightarrow B_i$, $h_i : E \longrightarrow A_i$ tels que $b_i\, g_i = b$, $g_i\, s = f_i\, h_i$ et $a_i\, h_i = a$. Comme $f_i \in \mathcal{E}_\alpha$, il existe $k_i : F \longrightarrow A_i$ tel que $k_i\, s = h_i$; d'où $a_i\, k_i\, s = a$. f) D'après (2.3) , $\Delta : A \longrightarrow A^{\mathcal{F}}$ est une colimite α-cofiltrante de monomorphismes scindés ; d'après d) et e) , c'est donc un élément de $\mathcal{E}_\alpha$. g) Soit $A_i \xrightarrow{f_i} B_i$, $i \in I$, $f_i \in \mathcal{E}_\alpha$. On considère $f = \underset{i}{\pi}\, f_i = \pi\, A_i \longrightarrow \pi\, B_i$. C'est un monomorphisme. On considère un diagramme basique du type (1) ayant une solution dans $\pi\, B_i$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, "a"'] & F \arrow[d, "b"] \arrow[dl, dashed, "t"'] \arrow[ddl, dashed, "t_i" near end] \\
\pi\, A_i \arrow[r, tail, "f = \pi f_i"] \arrow[d, "p_i"'] & \pi\, B_i \arrow[d, "q_i"] \\
A_i \arrow[r, tail, "f_i"] & B_i
\end{tikzcd}$$

Pour chaque i , il existe $t_i : F \longrightarrow A_i$ tel que $t_i\, s = p_i\, a$, où p_i et q_i

sont les projections canoniques ; d'où un morphisme $t : F \longrightarrow \pi A_i$ tel que $t\,s = a$. h) En effet, un produit α-réduit (c.f. 2.2) est un colimite α-cofiltrante de produits.

(5-7) Théorème.- Dans $\mathcal{A}$, soit $f : A \longrightarrow B$ un monomorphisme. Les énoncés suivants sont équivalents :

a) $f \in \mathcal{E}_\alpha$.

b) Il existe une puissance α-réduite $A^{\mathfrak{F}}$ de A et un morphisme $s : B \longrightarrow A^{\mathfrak{F}}$ tel que $sf = \Delta : A \longrightarrow A^{\mathfrak{F}}$.

c) f est une colimite α-cofiltrante de monomorphismes scindés.

Si $\alpha = \aleph_0$, on peut remplacer dans b) le mot puissance α-réduite par ultrapuissance.

Démonstration.- On a $b \Longrightarrow a$ d'après ((5.6) f et c). On a aussi $c \Longrightarrow a$ d'après (5.6,e).

$a \Longrightarrow b$. Il existe d'après (1.7) et (1.3) un diagramme ordonné α-cofiltrant de monomorphismes $f_i : E_i \longrightarrow F_i$, $i \in I$, tels que E_i de type α , F_i de présentation α , et dont une colimite est $f : A \longrightarrow B$.

(1)
$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[rr, tail, "f_i"] \arrow[dr, "a_{ij}"] \arrow[dd, "a_i"'] & & F_i \arrow[dr, "b_{ij}"] & \\
& E_j \arrow[rr, tail, "f_j"] \arrow[dl, "a_j"] & & F_j \arrow[dl, "b_j"] \\
A \arrow[rr, tail, "f"'] & & B &
\end{tikzcd}$$

Les morphismes du diagramme ci-dessus sont les morphismes canoniques. Comme f est α-a.c. il existe pour chaque $i \in I$, $s_i : F_i \longrightarrow A$ tel que $s_i\, f_i = a_i$.

(2)
$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "a_i"'] & F_i \arrow[d, "b_i"] \arrow[dl, dashed, "s_i"'] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Pour chaque $i \in I$, soit $\bar{i} = \{j \mid j \geqslant i\}$. L'ensemble des $\bar{i}$ est une base d'un α-filtre sur I. Soit $\mathfrak{F}$ un α-filtre plus fin. Si $\alpha = \aleph_0$, on peut supposer que $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre.

On pose $A_i = A$ pour tout $i \in I$. On a alors des morphismes

$$s_{\bar{i}} = F_i \longrightarrow A_{\bar{i}} = \pi_{j \in \bar{i}} A_j$$

définis par $q_{i,j}\, s_{\bar{i}} = s_j\, b_{ij}$, et rendant commutatifs les diagrammes suivants :

(3)
$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "a_i"'] & F_i \arrow[d, "s_{\bar{i}}"] \arrow[ddr, "s_j b_{ij}"] & \\
A_i \arrow[r, "\Delta_{\bar{i}}"] \arrow[drr, dashed, "id"'] & A_{\bar{i}} \arrow[dr, "q_{\bar{i},j}"] & \\
 & & A_j
\end{tikzcd} \qquad j \geqslant i$$

(4)
$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[r, "b_{ij}"] \arrow[d, "s_{\bar{i}}"'] & F_j \arrow[d, "s_{\bar{j}}"] & \\
A_{\bar{i}} \arrow[r, "q_{\bar{i},\bar{j}}"] & A_{\bar{j}} \arrow[dr, "q_{\bar{j},K}"] & \\
 & & A_K
\end{tikzcd} \qquad j \geqslant i$$

où les morphismes $q_{i,j}$, $q_{\bar{i},j}$ .. désignent des projections canoniques, et Δ_i est la diagonale.

En effet, pour $K \geqslant j \geqslant i$, on a :

$$q_{\bar{j},K}\, s_{\bar{j}}\, b_{ij} = s_K\, b_{jK}\, b_{ij} = s_K\, b_{iK}$$

et

$$q_{\bar{j}K}\, q_{\bar{i},\bar{j}}\, s_{\bar{i}} = q_{\bar{i},K}\, s_{\bar{i}} = s_K\, b_{iK}$$

En passant à la colimite suivant $i \in I$, on trouve un morphisme unique $s : B \to A^{\mathfrak{F}}$ tel que, pour chaque i, le diagramme :

(5)
$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[r, "s_{\bar{i}}"] \arrow[d, "b_i"'] & A_{\bar{i}} \arrow[d, "\phi_{\bar{i}}"] \\
B \arrow[r, "s"] & A^{\mathfrak{F}}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, où $\phi_{\bar{i}}$ est le morphisme canonique.

Pour montrer que $s \circ f = \Delta : A \longrightarrow A^{\mathfrak{F}}$, il suffit de remarquer que $\Delta = \phi_{\bar{i}} \circ \Delta_{\bar{i}}$,

(7)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta_{\bar{i}}"] \arrow[dr, "\Delta"'] & A_{\bar{i}} \arrow[d, "\phi_{\bar{i}}"] \\
 & A^{\mathfrak{F}}
\end{tikzcd}$$

A est une colimite des A_i , par l'intermédiaire des $a_i : A_i \longrightarrow A$ et que $s\, f\, a_i \underset{(2)}{=} s\, b_i\, f_i \underset{(5)}{=} \phi_{\bar{i}}\, s_{\bar{i}}\, f_i \underset{(3)}{=} \phi_{\bar{i}}\, \Delta_{\bar{i}}\, a_i \underset{(7)}{=} \Delta\, a_i$.

a $\Longrightarrow$ c.- On écrit f comme colimite α-cofiltrante de monomorphismes basiques : $f_i : E_i \longrightarrow F_i$, $i \in I$. Il existe alors, pour chaque i, $s_i : F_i \longrightarrow A$ tel que $s_i f_i = a_i$

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, tail, "f_i"] \arrow[d, "a_i"'] & F_i \arrow[d, "b_i"] \arrow[dl, dashed, "s_i"'] \\ A \arrow[r, tail, "f"] & B \end{tikzcd}$$

On considère alors des sommes amalgamées :

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "a_i"'] & F_i \arrow[d, "a'_i"] \\ A \arrow[r, "f'_i"] & F'_i \end{tikzcd}$$

les f'_i sont des monos scindés, puisqu'il existe $t_i : F'_i \longrightarrow A$ tel que $t_i f'_i = id$ et $t_i a'_i = s_i$. Il est clair que f est une colimite des f'_i .

<u>(5-8) Corollaire.</u>- <u>Si on a une somme amalgamée</u>

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "K"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

<u>alors</u> $f \in \mathcal{E}_\alpha \Longrightarrow g \in \mathcal{E}_\alpha$.

<u>Démonstration.</u>- D'après (5.7,c), il existe un diagramme α-cofiltrant de monos scindés $A \underset{q_i}{\overset{f_i}{\rightleftarrows}} B_i$, dont une colimite est f. On construit alors des sommes amalgamées

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h"'] & B_i \arrow[d, "h_i"] \\ C \arrow[r, "g_i"] & D_i \end{tikzcd}$$

Il existe $p_i : D_i \longrightarrow C$ tel que $p_i h_i = h q_i$ et $p_i g_i = id_C$. Donc g_i est un mono scindé. Il est clair que $g = \operatorname{colim} g_i$, $i \in I$. D'après (5.7), on a $g \in \mathcal{E}_\alpha$.

c) *<u>Etude de la classe</u>* $\mathcal{E}'_\alpha$ *<u>des monos</u>* α-*e.c.* *<u>d'une catégorie</u>* $\ell.\alpha$-*p* $\mathcal{A}$

(5-9) Proposition.-

a) $\mathcal{C}'_\alpha \subset \mathcal{C}_\alpha$.

b) Les isomorphismes de $\mathcal{A}$ appartiennent à $\mathcal{C}'_\alpha$.

c) $\mathcal{C}'_\alpha$ est stable par composition.

d) $g\,f \in \mathcal{C}'_\alpha$ et g mono $\Longrightarrow f \in \mathcal{C}'_\alpha$.

e) Si $\alpha = \aleph_0$ et $\Delta : A \longrightarrow A^{\mathfrak{F}}$ la diagonale d'un objet A dans une de ses ultrapuissances, alors $\Delta \in \mathcal{C}'_\alpha$.

f) Une colimite α-cofiltrante $f : A \longrightarrow B$ d'éléments $f_i : A_i \longrightarrow B_i$, $i \in I$ de $\mathcal{C}'_\alpha$, est élément de $\mathcal{C}'_\alpha$ si les morphismes canoniques $A_i \longrightarrow A$ sont des monos.

Démonstration.- a) et b) sont évidents.

c) Soient f et $g \in \mathcal{C}'_\alpha$, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. On considère un diagramme basique du type (2) à coefficients dans A et ayant une solution dans C.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, "a"'] & F \arrow[dl, dashed, "t"'] \arrow[d, dashed, "b"] \arrow[dr] & P_i \arrow[l, shift right, "g_i"'] \arrow[l, shift left, "h_i"] \quad , \quad i \in I \\
A \arrow[r, tail, "f"'] & B \arrow[r, tail, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

On peut le considérer à coefficients dans B. Comme $g \in \mathcal{C}'_\alpha$, il existe une solution $b : F \longrightarrow B$, (telle que $b\,s = f\,a$ et $b\,g_i \neq b\,h_i$, $i \in I$). Comme $f \in \mathcal{C}'_\alpha$ il existe donc aussi une solution dans A , $t : F \longrightarrow A$.

d) La démonstration est analogue.

e) On suppose $\alpha = \aleph_0$. On considère une ultrapuissance A d'un objet A, relativement à un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ sur un ensemble J. Soit $\Delta : A \longrightarrow A^{\mathfrak{F}}$ la diagonale. Soit un diagramme basique du type (2), à coefficients dans A et ayant une solution dans $A^{\mathfrak{F}}$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "s"] \arrow[dd, "a"'] & & F \arrow[dl, "b_G"'] \arrow[dd, "b"] & P_i \arrow[l, shift right, "g_i"'] \arrow[l, shift left, "h_i"] \quad , \quad i \in I \\
& A_G \arrow[dr, dashed, "\phi_G"] & & \\
A \arrow[ur, "\Delta_G"] \arrow[rr, "\Delta"'] & & A^{\mathfrak{F}} &
\end{tikzcd}$$

Puisque s est basique, il y a un relèvement $b_G : F \longrightarrow A_G$, où $G \in \mathfrak{F}$ et $A_G = \pi A_j$, $j \in G$, tel que :

$$b_G\, s = \Delta_G\, a \quad \text{et} \quad \phi_G\, b_G = b ,$$

où ϕ_G est canonique. Et alors $b_G\, g_i \neq b_G\, h_i$, pour tout $i \in I$.

Soient $q_{G,j}$ les projections $A_G \longrightarrow A_j$, $j \in G$. Pour chaque $i \in I$, soit $G_i = \{j \in G \mid q_{G,j}\, b_G\, g_i = q_{G,j}\, b_G\, h_i\}$. Si $G_i \in \mathfrak{F}$, on aurait $b\,g_i = b\,h_i$, car $b = \phi_{G_i}\, q_{G,G_i}\, b_G$

$$F \xrightarrow{b_G} A_G \xrightarrow{q_{G,G_i}} A_{G_i} \xrightarrow{\phi_{G_i}} A^{\mathfrak{F}} .$$

Donc $G_i \notin \mathcal{F}$, et par suite son complémentaire $G - G_i \in \mathcal{F}$. Soit $H = \bigcap_{i \in I}(G-G_i)$ on a $H \in \mathcal{F}$ car I est fini . Soit $j \in H$ et $q = q_{H,j} : A_H \longrightarrow A_j = A$, on a alors :

$$q\, b_H\, g_i \neq q\, b_H\, h_i \quad , \qquad i \in I$$

$$q\, b_H\, s = a$$

donc $q\, b_H$ est une solution du diagramme donné.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, tail, "s"] \arrow[ddd, "a"'] & & F \arrow[dl, "b_G"'] \arrow[dd, "b_H"] \arrow[dddrr, "b"] & & P_j \arrow[ll, shift right, "g_i"'] \arrow[ll, shift left, "h_i"] \\
& A_G \arrow[dr, "q_{G,H}"] & & & \\
& & A_H \arrow[drr, "\phi_H"] \arrow[dll, dashed, "q"] & & \\
A \arrow[urr, "\Delta_H"] \arrow[rrrr, tail, "\Delta"'] & & & & A
\end{tikzcd}$$

f) Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme qui est une colimite α-cofiltrante de monos $f_i : A_i \longrightarrow B_i$, $i \in I$, et tel que les morphismes canoniques $a_i : A_i \longrightarrow A$ soient des monos. On suppose les f_i dans $\mathcal{E}'_\alpha$. Soit un diagramme basique du type (2) à coefficients dans A et ayant une solution dans B , $b : F \longrightarrow B$.

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[rr, tail, "s"] \arrow[dl, dashed, "r_i"'] \arrow[dd, "a"] & & F \arrow[dl, dashed, "s_i"] \arrow[dlll, dashed, "t_i"'] \arrow[dd, "b"] & P_j \arrow[l, shift right, "g_j"'] \arrow[l, shift left, "h_j"] \\
A_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "a_i"'] & & B_i \arrow[dr, "b_i"] & & \\
& A \arrow[rr, tail, "f"'] & & B &
\end{tikzcd} \quad , \qquad j \in J$$

Comme s est basique, il existe $i \in I$, $r_i : E \longrightarrow A_i$, $s_i : F \longrightarrow B_i$ tels que $b_i\, s_i = b$, $a_i\, r_i = a$ et $s_i\, s = f_i\, r_i$. On a alors $s_i\, g_j \neq s_i\, h_j$, pour tout $j \in J$; or $f_i \in \mathcal{E}'_\alpha$, il existe donc $t_i : F \longrightarrow A_i$ tel que $t_i s = r_i$ et $t_i\, g_j \neq t_i\, h_j$, $j \in J$; d'où $a_i\, t_i\, s = a_i\, r_i = a$, et $a_i\, t_i\, g_j \neq a_i\, t_i\, h_j$, $j \in J$.

<u>(5-10) Théorème</u>.- <u>On suppose que $\mathcal{A}$ est</u> $\ell.\ \aleph_\circ$-p. . <u>Soit</u> $f : A \longrightarrow B$ <u>un mono les énoncés suivants sont équivalents</u>.

a) f <u>est existentiellement clos</u>.

b) <u>Il existe une ultrapuissance</u> $A^{\mathcal{F}}$ <u>de</u> A <u>et un mono</u> $s : B \longrightarrow A^{\mathcal{F}}$ <u>tel que</u> $s\, f = \Delta : A \longrightarrow A^{\mathcal{F}}$.

<u>Démonstration</u>.- b $\Longrightarrow$ a résulte de (5.9, e et d).

<u>a $\Longrightarrow$ b</u>. On reprend la démonstration de (5.7, a $\Longrightarrow$ b) , en modifiant le filtre $\mathcal{F}$. On écrit f comme colimite d'un diagramme ordonné $\aleph_\circ$-cofiltrant de monos basiques $f_i : E_i \longrightarrow F_i$, $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "a_{ij}"] \arrow[dd, "a_i"'] & & F_i \arrow[dr, "b_{ij}"] \arrow[dd, "b_i" near start] & \\
& E_j \arrow[rr] \arrow[dl, "a_j"] & & F_j \arrow[dl, "b_j"] \\
A \arrow[rr, "f"'] & & B &
\end{tikzcd}$$

On considère ensuite un ensemble X de rerpésentants (x,i) des diagrammes du type suivant :

$$x_i^\ell : P_x \longrightarrow F_i \ , \quad \ell \in L_x \ , \ L_x$$

ensemble fini de Card $\geqslant 2$ où P_x est $\aleph_0$-p. et les $b_i\, x_i^\ell$ sont tous distincts.

On met sur X un préordre en posant $(x,i) \leqslant (y,j)$ si $i \leqslant j$ et pour tout $s : F_j \longrightarrow A$ si les sy_j^t , $t \in L_y$, sont tous distincts alors les $sb_{ij}\, x_i^\ell$ le sont également.

$$\begin{tikzcd}
P_x \arrow[d, "x_i^\ell"'] & P_y \arrow[d, "y_j^t"'] & \\
F_i \arrow[r, "b_{ij}"'] & F_j \arrow[r, "s"'] & A
\end{tikzcd}$$

Ce préordre est $\aleph_0$-cofiltrant. En effet soient (x,i), $(y,j) \in X$; il existe k tel que $k \geqslant i$ et $k \geqslant j$. On considère :

$$(b_{ik}\, x_i^\ell \ , \ b_{jk}\, y_j^t) \ : \ P_x \amalg P_y \longrightarrow F_k \ .$$

Soit $s : F_k \longrightarrow A$ tel que les $s(b_{ik}\, x_i^\ell, b_{jk}\, y_j^t)$ soient tous distincts. Soit $\ell \in L_x$, $t, t' \in L_y$, alors $sb_{jk}\, y_j^t \neq sb_{jk}\, y_j^{t'}$, donc $(P_x \amalg P_y \longrightarrow F_k)$ majore (y,j) et de même majore (x,i).

Pour chaque $(x,i) \in X$, on pose $\overline{(x,i)} = \{(y,j) \geqslant (x,i)\}$. C'est une base de filtre. On considère un ultrafiltre plus fin $\mathfrak{F}$, et une ultrapuissance $A^{\mathfrak{F}}$ de A modulo $\mathfrak{F}$.

Puisque f est existentiellement clos, il existe pour chaque (x,i) un morphisme $s_{(x,i)} : F_i \longrightarrow A$ tel que $s_{(x,i)} f_i = a_i$ et les $s_{(x,i)} x_i^\ell$, $\ell \in L_x$, tous distincts.

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "a_i"'] & F_i \arrow[d, "b_i"] \arrow[dl, dashed, "s_{(x,i)}"] & P_x \arrow[l] \\
A \arrow[r, "f"] & B &
\end{tikzcd}$$

On définit alors des morphismes

$$s_{\overline{(x,i)}} \ : \ F_i \longrightarrow A_{\overline{(x,i)}} = \prod_{(y,j) \geqslant (x,i)} A_{(y,j)}$$

par les équations :

$$q_{(y,j)}\, s_{\overline{(x,i)}} = s_{(y,j)}\, b_{ij}$$

où $q_{(y,j)}$ sont les projections canoniques, et où $A_{(y,j)} = A$ pour tout (y,j).

Ces morphismes rendent commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "a_i"'] & F_i \arrow[r, "b_{ij}"] \arrow[d, "s_{\overline{(x,i)}}"] & F_j \arrow[d, "s_{\overline{(y,j)}}"] \\
A_{(x,i)} \arrow[r, "\Delta_{\overline{(x,i)}}"'] & A_{\overline{(x,i)}} \arrow[r, "q"'] & A_{\overline{(y,j)}}
\end{tikzcd}$$

pour $(x,i) \leqslant (y,j)$.

En posant pour chaque $(x,i) \in X$, $F_{(x,i)} = F_i$, on voit que par passage à la colimite suivant X , on obtient un morphisme unique $s : B \longrightarrow A$, tel que pour chaque (x,i) , le diagramme suivant soit :

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[r, "s_{\overline{(x,i)}}"] \arrow[d, "b_i"'] & A_{\overline{(x,i)}} \arrow[d, "\phi_{(x,i)}"] \\
B \arrow[r, dashed, "s"'] & A^{\mathfrak{F}}
\end{tikzcd}$$

commutatif, où $\phi_{(x,i)}$ est le morphisme canonique.

On a alors $s\, f\, a_i = s\, b_i\, f_i = \phi_{(x,i)}\, s_{(\overline{x},i)}\, f_i$

$$= \phi_{(x,i)}\, \Delta_{(\overline{x},i)}\, a_i = \Delta\, a_i \ , \quad i \in I.$$

On en conclut que $s\, f = \Delta : A \longrightarrow A^{\mathfrak{F}}$. On va voir que c'est aussi un monomorphisme. Il suffit pour cela de démontrer que pour tout $P \underset{n}{\overset{m}{\rightrightarrows}} B$, où P est $\aleph_0$-p. et $m \neq n$, on a $sm \neq sn$. Pour une telle donnée, il existe en effet $i \in I$, m_i , $n_i : P \underset{n_i}{\overset{m_i}{\rightrightarrows}} F_i$ tel que $b_i\, m_i = m$, et $b_i\, n_i = n$.

Soit (x,i) un représentant dans X de $P \underset{n_i}{\overset{m_i}{\rightrightarrows}} F_i$. On peut supposer que c'est $P \underset{n_i}{\overset{m_i}{\rightrightarrows}} F_i$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F_i \arrow[r, "s_{\overline{(x,i)}}"] \arrow[d, "b_i"'] & A_{\overline{(x,i)}} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\phi_{(x,i)}"] & A_F \arrow[d, "q"] \\
 & B \arrow[r, "s"'] & A^{\mathfrak{F}} & A_{(y,j)}
\end{tikzcd}$$

Si $sm = sn$, il existe alors $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset \overline{(x,i)}$ tel que $qs_{\overline{(x,i)}}m_i = qs_{\overline{(x,i)}}n_i$ où q désigne la projection canonique.

En projetant sur $A_{(y,j)}$ avec $(y,j) \in F$, on obtient

$$s_{(y,j)}\, b_{ij}\, m_i = s_{(y,j)}\, b_{ij}\, n_i \, .$$

Or par construction les $s_{(y,j)}\, y_j^t$, $t \in L_y$, sont tous distincts, et comme $(x,i) \leqslant (y,j)$, on conclut que $s_{(y,j)}\, b_{ij}\, m_i \neq s_{(y,j)}\, b_{ij}\, n_i$. On tombe sur une contradiction, donc $sm \neq sn$.

Notons aussi la proposition facile suivante.

(5-11) Proposition.- Un monomorphisme $f : E \longrightarrow F$, où E est de t.α et F de p.α est α-a.c SSI il est scindé .

Démonstration.- Cela résulte de (5.6, d) et du diagramme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & F \arrow[d, "id"] \arrow[dl, dashed] \\ E \arrow[r, "f"'] & F \end{tikzcd}$$

(5-12) Exemples.-

a) Dans Bool , tout mono $f : E \longrightarrow F$, où E est fini est scindé puisque E est alors un objet injectif. Il résulte alors de (1.7) que tout mono de Bool est a.c. . Cependant un mono $E \longrightarrow F$ où E et F sont finis est e.c. SSI c'est un isomorphisme.

b) Dans une catégorie modules à gauche sur un anneau A , un mono est a.c. SSI il est pur ([5] , ex. 24 , p. 66), ([22] , th. 2.3.).

c) Dans Ann , tout mono a.c. est pur au sens d'Olivier [29] . La réciproque est fausse, en effet l'injection canonique $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est pure, puisque scindée en tant que morphisme de $\mathbb{R}$-modules. Elle n'est cependant pas a.c. , car l'équation $\exists\, x : x^2 = -1$ a une solution dans $\mathbb{C}$ et n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

(5-13) Remarques.-

a) Il résulte de (5.3) que les notions de mono a.c. et e.c. coïncident avec les notions classiques dans le cas des structures algébriques usuelles.

b) Pour ces structures, les propositions (5.7, a $\Longleftrightarrow$ b) et (5.10) sont connues des Logiciens, voir par exemple [2] [31] et [33], et étaient démontrées à l'aide d'arguments logiques. On en a donné ici des preuves algébriques.

-:-:-:-

CHAPITRE 6

Objets algébriquement et existentiellement clos

a) *Théorème de plongement*

(6-1) Définition.- Dans une catégorie l.α-p. on dit qu'un objet A est α-algébriquement clos, en abrégé α-a.c. (resp. α-existentiellement clos, en abrégé α-e.c.) si tout monomorphisme de source A est α-a.c. (resp. α-e.c.). Si $\alpha = \aleph_0$, on dira simplement algébriquement clos (a.c.), et existentiellement clos (e.c.).

(6-2) Remarque.- Pour $\alpha = \aleph_\varepsilon$, ces notions furent introduites par W.R. Scott [32] dans la catégorie des groupes, sous la dénomination de faiblement algébriquement clos (resp. algébriquement clos) et furent ensuite développées par B.H. Neumann.

Notre terminologie est celle des Logiciens [7], [23], [35]. Ces notions jouent en effet un rôle essentiel dans les théories de Modèle-Complétion et Modèle-Compagnon.

Le théorème de plongement de Scott [32], voir aussi [7], se généralise comme suit.

(6-3) Théorème.- Dans une catégorie l.α-p. où toute colimite $\aleph_0$-cofiltrante de monomorphismes est un monomorphisme, tout objet est sous-objet d'un objet α-e.c.

Démonstration.- Soit A un objet, S_A un ensemble de représentants des diagrammes s du type (2), basiques, à coefficients dans A et qui sont compatibles (Voir 5.4).

$$s\ :\quad \begin{array}{ccccc} E_s & \overset{s}{\rightarrowtail} & F_s & \underset{h_i}{\overset{g_i}{\leftleftarrows}} & P_i \\ \big\downarrow{\scriptstyle a_s} & & & & \\ A & & & & \end{array}\quad ,\quad i\in I_s$$

Dans une première étape, on va construire un mono $h_1(A) : A \longrightarrow H_1(A)$ tel que pour tout $s \in S_A$, si s a une solution dans une extension de $H_1(A)$, alors il a une solution dans $H_1(A)$.

Pour cela, on considère un bon ordre sur S_A. On va construire pour chaque $s\in S_A$ des monos $A \xrightarrow{j_s} B_s \xrightarrow{k_s} A_s$, pour chaque (s,t) avec $s \leqslant t$, un mono $i_{s,t} : A_s \longrightarrow A_t$, tels que si on pose $i_s = k_s j_s$ on ait :

1) $i_{ss} = id$
2) Pour $s \leqslant t$, $i_{st}\, i_s = i_t$
3) Pour $s \leqslant t \leqslant u$, $i_{tu}\, i_{st} = i_{su}$.

Si p désigne le premier élément de S_A, on construit une somme amalgamée

$$\begin{tikzcd}
E_p \arrow[r, tail, "p"] \arrow[d, "a_p"'] & F_p \arrow[d, "\tilde{p}"] \\
A \arrow[r, "p'"] & B
\end{tikzcd}$$

D'après (5-2), p' est un mono et $\tilde{p}\, g_i \neq \tilde{p}\, h_i$, $i \in I_p$.

On pose $j_p = id_A$, $B_p = A$, $k_p = p'$ et $A_p = B$.

Soit $s \in S_A$; si on a réalisé le programme pour les t, $t < s$, on pose $j_s : A \longrightarrow B_s = \text{colim}\ (i_t : A \longrightarrow A_t)$, $t < s$. C'est un mono . Soient $b_{ts} : A_t \longrightarrow B_s$ les morphismes canoniques. Ce sont aussi des monos.

Si le diagramme s a une solution dans une extension de B_s , on définit k_s à l'aide d'une somme amalgamée

$$\begin{tikzcd}
E_s \arrow[r, "s"] \arrow[d, "j_s a_s"'] & F_s \arrow[d, "\tilde{s}"] \\
B_s \arrow[r, "k_s"] & A_s
\end{tikzcd}$$

(voir 5-2) , et on pose $i_{ts} = k_s b_{ts} : A_t \longrightarrow B_s \longrightarrow A_s$.

Sinon, on pose $A_s = B_s$, $k_s = id$, et $i_{ts} = b_{ts}$.

Finalement, on pose $h_1(A) : A \longrightarrow H_1(A) = \text{colim}\ i_s$, $s \in S_A$. Soient $\phi_s : A_s \longrightarrow H_1(A)$ les morphismes canoniques ; ce son des monos.

Soit $s \in S_A$, ayant une solution dans une extension de $H_1(A)$. Alors s a une solution dans une extension de B_s , et par suite a une solution dans A_s (c'est $\tilde{s}$) donc une solution dans $H_1(A)$, c'est $\phi_s \tilde{s}$.

$$\begin{tikzcd}
E_s \arrow[rr, "s"] \arrow[d, "a_s"'] & & F_s \arrow[d, dashed, "\tilde{s}"] \arrow[drr] & P_i \arrow[l, shift right, "g_i"'] \arrow[l, shift left, "h_i"] & \\
A \arrow[r, tail, "j_s"'] & B_s \arrow[r, tail, "k_s"'] & A_s \arrow[r, tail, "\phi_s"'] & H_1(A) \arrow[r, tail] & C
\end{tikzcd}$$

<u>En 2ème étape</u>, on va itérer cette construction en définissant une suite transfinie d'extensions $H_\beta(A)$ de A , munies d'un système compatible de monos

$$h_{\beta\gamma} : H_\beta \longrightarrow H_\gamma \quad , \qquad \beta \leq \gamma .$$

On pose $H_o(A) = A$; si H_β a été défini, on pose $H_{\beta+1}(A) = H_1(H_\beta(A))$, $h_{\beta,\beta+1} = h_1(H_\beta(A))$, et si $\delta \leq \beta$, $h_{\delta,\beta+1} = h_{\beta,\beta+1}\, h_{\delta,\beta}$.

Si γ est un ordinal limite, on pose $H_\gamma = \operatorname{colim} H_\beta$, $\beta < \gamma$, $h_{\beta,\gamma} : H_\beta \longrightarrow H_\gamma$ les morphismes canoniques ; ce sont des monos.

On va montrer que H_α est α-e.c. . Soit s un diagramme basique, du type (2) à coefficients dans $H_\alpha(A)$ et compatible. Comme E_s est de type α, $f_s : E_s \longrightarrow H_\alpha(A)$ se relève en $f_\beta : E_s \longrightarrow H_\beta$, $\beta < \alpha$. Donc s , considéré à coefficients dans H_β a une solution dans une extension de $H_{\beta+1}$, donc une solution dans $H_{\beta+1}$ et dans H_α .

$$\begin{tikzcd}
 & & E_s \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f_s"] \arrow[lld, dashed, "f_\beta"'] & F_s \arrow[d] \arrow[lld, dashed] & P_i \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\
H_\beta(A) \arrow[r, tail] & H_{\beta+1}(A) \arrow[r, tail] & H_\alpha(A) \arrow[r, tail] & C &
\end{tikzcd}$$

b) *Fonctorialité du plongement*

(6-4) Proposition.- Dans une catégorie l.α-p. ,

a) Chaque objet α-injectif est α-a.c. ,

b) La réciproque est vraie si les monos sont couniversels (3.3).

Démonstration.- a) Découle directement des définitions.

b) Soit A un objet α-a.c. , et soit un diagramme basique du type (1) à coefficients dans A. Ce diagramme possède alors une solution dans la somme amalgamée.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, "a"'] & F \arrow[d] \arrow[ld, dashed, "t"'] \\
A \arrow[r, "f"'] & F \coprod_E A
\end{tikzcd}$$

puisque f est alors un mono. Il existe donc $t : F \longrightarrow A$ tel que $ts = a$; donc A est α-injectif.

(6-5) Corollaire.- Soit $\mathcal{A}$ une catégorie l.α-p. où les monos sont couniversels et où chaque colimite $\aleph_0$-cofiltrante de monos est un mono. Il existe alors un foncteur $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ et $h : id_{\mathcal{A}} \longrightarrow T$ tel que, pour chaque objet A , TA soit α-a.c. et $h(A)$ un mono.

Démonstration.- Cela résulte de (3.9) et (6.4) .

(6-6) Proposition.- Soit $\mathcal{A}$ une catégorie l.α-p. ayant sufisamment d'objets α-a.c. (resp. α-e.c.). Les conditions suivantes sont alors équivalentes.

a) $\mathcal{A}$ possède la propriété d'amalgamation (3.4).

b) Pour chaque paire de monos , $f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow C$ où B et C sont α-a.c. (resp. α-e.c.) Il y a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "K"] \\ C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

où h et K sont des monos et D un objet α-a.c. (resp. α-e.c.).

Démonstration.- a ⟹ b. On considère la somme amalgamée $B \coprod_A C$ et on la plonge dans un objet α-a.c. (resp. α-e.c.) D.

b ⟹ a. Soient des monos $f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow C$. On plonge B, C, dans des objets α-a.c. (resp. α-e.c.) respectivement et on applique b).

Pour éclairer la suite, il convient de rappeler quelques notions usuelles en logique, [35].

c) *Notions sur les Modèles Complétions*

(6-7) Rappels

a) Une théorie T est Modèle-Complète si chaque modèle de T est e.c.

b) Une théorie T possède un Modèle-Compagnon T^* si

1) T^* est une théorie et $T \subset T^*$.

2) Pour chaque modèle A de T, il existe un modèle B de T^* tel que $A \subset B$.

3) T^* est Modèle-Complète.

c) Dans certains cas ([35], th. 5.2) une théorie T possède un Modèle-Compagnon si la classe des modèles e.c. est élémentaire dans le sens large, c.à.d. close par ultraproduits et équivalences élémentaires.

Dans une catégorie 1.α-p. $\mathcal{A}$, on a les énoncés suivants :

(6-8) Proposition.- Une colimite α-cofiltrante monomorphique d'objets α-a.c. (resp. α-e.c.) est α-a.c. (resp. α-e.c.).

Démonstration.- Soit $a_i : A_i \longrightarrow A$, $i \in I$, une colimite α-cofiltrante où les a_i sont des monos. Soit $f : A \longrightarrow B$ un mono, alors $f = \operatorname{colim} fa_i$, $i \in I$. Si on suppose les A_i α-a.c. (resp. α-e.c.) il résulte de (6.1) que les fa_i sont α-a.c. (resp. α-e.c.), et de (5-6,e) (resp. 5-9,f) que f est α-a.c. (resp. α-e.c.).

Le lemme suivant est comparable au corollaire 7-7 de [7].

(6-9) Lemme.- Soit $f : A \longrightarrow B$ un mono.

a) Si f est e.c. et si B est a.c. (resp. e.c.), il en est de même de A.

b) Si f est α-a.c. (resp. α-e.c.) et si la catégorie vérifie la propriété d'amalgamation, alors si B est α-a.c. (resp. α-e.c.), il en est de même de A.

Démonstration.-

a) Soit $g : A \longrightarrow C$ un mono. En vertu de (5-10), il existe une ultrapuissance $A^{\mathfrak{F}}$ de A et un mono $s : B \longrightarrow A^{\mathfrak{F}}$, tel que $s\,f = \Delta$. Le morphisme g détermine alors un mono $g^{\mathfrak{F}} : A^{\mathfrak{F}} \longrightarrow C^{\mathfrak{F}}$ tel que $\Delta\, g = g^{\mathfrak{F}}\, \Delta$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[dd, "g"'] & B \arrow[d, "s"] \\
 & A^{\mathfrak{F}} \arrow[dd, "g^{\mathfrak{F}}"] \\
C \arrow[dr, "\Delta"'] & \\
 & C^{\mathfrak{F}}
\end{tikzcd}$$

Puisque B est a.c. (resp. e.c.) , $g^{\mathfrak{F}} \circ s$ est a.c. (resp. e.c.), donc aussi $g^{\mathfrak{F}}\, \Delta$ (5-6,b et 5-9,c) , et par suite aussi g , d'après (5-6,d et 5-9,d).

b) Soit $g : A \longrightarrow C$ un mono . On considère alors une somme amalgamée, où d'après les hypothèses, h et K

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "K"] \\
C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

sont alors des monos. On conclut exactement comme dans a).

(6-10) Proposition.- On suppose que $\mathcal{A}$ possède la propriété d'amalgamation, alors si la classe des objets α-a.c. est stable par produits α-réduits (ou par ultraproduits dans le cas $\alpha = \aleph_0$) , elle est aussi stable par colimites α-cofiltrantes.

Démonstration.- Il résulte de (2-4) que si $A_i \longrightarrow A$, $i \in I$, est une colimite α-cofiltrante, il existe un produit α-réduit $A_{\mathcal{U}}$ des objets A_i et un mono $A \longrightarrow A_{\mathcal{U}}$, qui est α-a.c. étant colimite α-cofiltrante de monos scindés (5-6,f) Si $A_{\mathcal{U}}$ est α-a.c. , il résulte de (6-8,b) qu'il en est de même de A.

Un cas où cela se produit est quand une théorie possède une Modèle-Compagnon. On a en effet.

(6-11) Proposition.- (Voir aussi [7], cor. 7-14). Si $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objets α-e.c. et la propriété d'amalgamation, alors si la classe des objets α-e.c est stable par produits α-réduits (ou ultraproduits dans le cas $\alpha = \aleph_0$) il en est de même de la classe des objets α-a.c.

Démonstration.- Soit A_i , $i \in I$, une famille d'objets α-a.c., et soit $\mathcal{U}$ un

α-filtre (resp. un ultrafiltre dans le cas $\alpha = \aleph_0$) sur I. Pour chaque i , on considère un mono $A_i \xrightarrow{f_i} B_i$, où B_i est α-e.c. . Ces f_i sont α-a.c., et par suite aussi le morphisme qui s'en déduit : $f : A_{\mathcal{U}} \longrightarrow B_{\mathcal{U}}$. Si on suppose que $B_{\mathcal{U}}$ est α-a.c. , il résulte alors de (6-9,b) qu'il en est de même de $A_{\mathcal{U}}$.

On peut finalement reformuler le théorème (4-15) en s'aidant de (6-4).

(6-12) Théorème.- Soit $\mathcal{A}$ une catégorie l.α-p. ayant suffisamment d'objets α-a.c. et où les monos sont couniversels. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

a) $\mathcal{A}$ est l-α-c. (4-10) .

b) Toute colimite α-cofiltrante d'objets α-a.c. est α-a.c. .

c) Tout produit α-réduit (ou tout ultraproduit si $\alpha = \aleph_0$) d'objets α-a.c. est α-a.c. .

d) *Objets a.c. de Ann*

(6-13).- Soit Ann la catégorie des anneaux commutatifs avec élément unité .

a) On dit qu'un anneau A est bon si tout polynôme de $A[X]$ du type $X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_o$, avec $n \geqslant 1$, est un produit de facteurs du premier degré.

On a facilement les résultats suivants.

1) Un anneau bon qui est un corps est un corps algébriquement clos.

2) Si $f : A \to B$ est un morphisme surjectif de Ann et si A est bon alors B aussi. Les quotients d'un anneau bon par des idéaux maximaux sont des corps algébriquement clos.

3) Un produit (resp. une colimite $\aleph_0$-cofiltrante) d'anneaux bons sont bons.

4) Si $f : A \rightarrowtail B$ est un mono a.c. et si B est bon alors A aussi.

A. Besserre a démontré dans [4] que tout anneau se plonge dans un anneau bon. En utilisant ce résultat et 4), Sabbagh [31] a remarqué qu'un anneau a.c. est bon.

b) Un anneau a.c. qui est réduit (i.e. sans éléments nilpotents) est absolument plat. Soit en effet A un anneau a.c. et réduit. Il existe d'après Olivier [30] un anneau absolument plat T(A) et un épimorphisme $\phi : A \longrightarrow T(A)$ dont le noyau est contenu dans le nilradical de A , (nilradical = idéal des éléments nilpotents) Ce noyau est donc réduit à 0. Pour chaque $a \in A$ l'équation : $\exists\, x : a^2 x = a$ possède une solution dans T(A) et par suite dans A , donc A est absolument plat.

c) Un anneau a.c. qui est intègre est un corps algébriquement clos. En effet d'après b) il est absolument plat, et étant intègre il est un corps, donc un corps algébriquement clos d'après a).

d) Réciproquement un corps algébriquement clos est un objet a.c. de Ann . La démonstration suivante de ce fait a été obtenue avec l'aide de L. Haddad.

Soit K un corps algébriquement clos et soient $P_1, \ldots, P_m$ des polynômes de $K[X_1, \ldots, X_n]$. On suppose qu'il existe un sur-anneau commutatif A de K et un élément a de A^n tel que :

$$P_1(a) = 0, \ \ldots, \ P_m(a) = 0.$$

Soit J l'idéal de $K[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par $P_1, \ldots, P_m$. L'élément unité 1 de K n'appartient pas à J ; sinon on aurait une relation :

$$1 = \Sigma \, Q_i \, P_i$$

avec $Q_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$, d'où $1 = 1(a) = 0$, ce qui est faux.

D'après le Nullstellensatz de Hilbert ([17], th. 4, page 417) il existe au moins un élément x de K^n tel que :

$$P_1(x) = 0, \ \ldots, \ P_m(x) = 0.$$

e) Un objet e.c. de Ann n'est pas réduit. En effet, si A est un anneau e.c. le morphisme canonique

$$A \longrightarrow A[X] \, / \, (X^2)$$

est un mono. L'équation $\exists x$, $x \neq 0$ et $x^2 = 0$ possède donc une solution dans A.

e) *Un théorème de comparaison*

Le lemme et le théorème suivants nous seront utiles pour l'étude des anneaux réduits et des anneaux absolument plats.

(6-14) Lemme.- Soit un foncteur $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$, où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ sont l.α.p.

a) Si T préserve les colimites α-cofiltrantes, alors g mono α-a.c. de $\mathcal{B} \Longrightarrow T(g)$ mono α-a.c. de $\mathcal{A}$.

b) Si T préserve les limites et les colimites α-cofiltrantes et s'il est pleinement fidèle, alors g mono α-a.c. de $\mathcal{B} \Longleftrightarrow T(g)$ mono α-a.c. de $\mathcal{A}$.

c) Si $\alpha = \aleph_0$, on a de plus les résultats suivants.

(c-1) . Sous les hypothèses de a) g mono e.c. de $\mathcal{B} \Longrightarrow T(g)$ mono e.c.

(c-2) . Sous les hypothèses de b) g mono e.c. de $\mathcal{B} \Longleftrightarrow T(g)$ mono e.c.

Démonstration.-

a) Cela résulte de la caractérisation (5-7) des monos α-a.c. comme colimites α-cofiltrantes de monos scindés.

b) Soit $g : B \longrightarrow B'$. Si $T(g)$ est α-a.c., il existe d'après (5-7) un α-filtre $\mathfrak{F}$, et $s : T\,B' \longrightarrow (T\,B)^{\mathfrak{F}}$ tel que

$$\begin{tikzcd}
T\,B \arrow[rr, "T(g)"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & T\,B' \arrow[dl, "s"] \\
& (T\,B)^{\mathfrak{F}} &
\end{tikzcd}$$

Commutatif. Les hypothèses entraînent que g est un mono, et que $(T\,B)^{\mathfrak{F}} \simeq T(B^{\mathfrak{F}})$.

Il existe alors $t : B' \longrightarrow B^{\mathfrak{F}}$ tel que :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & B' \arrow[dl, "t"] \\ & B^{\mathfrak{F}} & \end{tikzcd}$$

commutatif, donc g est α-a.c. d'après (5-7).

c) Si $\alpha = \aleph_0$, on utilise la caractérisation (5-10) des monos e.c. et on conclut comme avant.

(6-15) Théorème de comparaison.- Soit un foncteur $I : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$. On suppose que $\mathcal{A}$ est l.α-p. , que I est pleinement fidèle, préserve les colimites α-co-filtrantes et possède un adjoint à gauche S. Soient $\alpha : id_{\mathcal{A}} \longrightarrow IS$ et $\beta : SI \longrightarrow id_{\mathcal{B}}$ les morphismes d'adjonction. On a alors :

a) $\mathcal{B}$ est l.α-p.

b) f mono α-a.c. de $\mathcal{A} \Longrightarrow S\,f$ mono α-a.c. de $\mathcal{B}$.

c) g mono α-a.c. de $\mathcal{B} \Longleftrightarrow I\,g$ mono α-a.c. de $\mathcal{A}$.

d) Si $\alpha = \aleph_0$, alors g mono e.c. de $\mathcal{B} \Longleftrightarrow I\,g$ mono e.c.

e) $I\,B$ objet α-a.c. de $\mathcal{A} \Longrightarrow B$ objet α-a.c. de $\mathcal{B}$.

f) Si $\alpha = \aleph_0$, alors $I\,B$ objet e.c. $\Longrightarrow B$ objet e.c.

g) Si S préserve les monos alors $I\,B$ objet α-a.c. de $\mathcal{A} \Longleftrightarrow B$ objet α-a.c. de $\mathcal{B}$.

h) Si pour chaque A objet de $\mathcal{A}$, $\alpha_A : A \longrightarrow I\,S\,A$ est un mono , alors $I\,B$ α-a.c. $\Longleftrightarrow B$ α-a.c. et si $\alpha = \aleph_0$, $I\,B$ e.c. $\Longleftrightarrow B$ e.c.

Démonstration.- a) résulte de [14] ou de (4-12) . b) c) et d) résultent du lemme précédent.

e) On suppose que $I\,B$ est α-a.c. . Soit $g : B \to B'$ un mono de $\mathcal{B}$; alors $I(g)$ est un mono, donc un mono α-a.c. puisque $I\,B$ est un objet α-a.c. . D'après c) g est donc α-a.c. .

f) La preuve est similaire à la précédente.

g) On peut supposer que $S\,I = id_{\mathcal{B}}$ et $\beta = id$. Si S préserve les monos et si B est α-a.c. dans $\mathcal{B}$, alors pour tout mono de $\mathcal{A}$, $f : I\,B \longrightarrow A$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} I\,S\,I\,B = I\,B \arrow[r] \arrow[dr, "I\,S\,f"'] & A \arrow[d, "\alpha_A"] \\ & I\,S\,A \end{tikzcd}$$

de plus $S\,f$ mono $\Longrightarrow S\,f$ α-a.c. $\Longrightarrow I\,S\,f$ α-a.c. $\Longrightarrow f$ α-a.c.

h) Soit B α-a.c. , soit $f : I\,B \longrightarrow A$ un mono , on considère le diagramme précédent , où α_A est supposé un mono , alors $I\,S\,f$ est un mono , donc aussi $S\,f$, et par suite $S\,f$ est α-a.c. . On termine comme dans g) .

Si $\alpha = \aleph_0$, et si B est e.c. , alors dans le diagramme précédent $S\,f$ est un mono e.c. . Il en est de même de $I\,S\,f$, d'après d) , et comme α_A est un mono, on conclut que f est e.c. , par (5-9) .

f) *Applications : cas de Ann. réd. et Ann. abs. plats*

(6-16).- Soit $\mathcal{B}$ la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Ann}}$ dont les objets sont les anneaux réduits. Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}$ dont les objets sont les anneaux absolument plats. Les injections canoniques $I : \mathcal{B} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ann}}$ et $J : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ préservent les colimites $\aleph_0$-cofiltrantes et possèdent des adjoints à gauche $S : \underline{\mathrm{Ann}} \longrightarrow \mathcal{B}$, $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ définis comme suit :

a) $S\,A = A/N(A)$, où $N(A)$ est le nilradical de A. S préserve les monos, car si $f : A \longrightarrow B$ est un mono , $u \in S\,A$, et x un représentant de u dans A, on a :

$$\begin{aligned} S(f)\ (u) = 0 &\Longrightarrow \exists n\ ,\ n \geqslant 1 : f(x)^n = 0 \\ &\Longrightarrow x^n = 0 \Longrightarrow u = 0 \end{aligned}$$

b) Le foncteur T est construit par Olivier dans [30] ; pour chaque anneau réduit B, $\eta_B : B \longrightarrow J\,T\,B$ est un mono car son noyau est contenu dans le nilradical de B.

On a alors les résultats suivants.

$$\begin{array}{lcl} A \text{ corps algébriquement clos} & \Longleftrightarrow & A \text{ intègre , a.c. dans } \underline{\mathrm{Ann}} \\ & \Downarrow & \\ & & A \text{ réduit , a.c. dans } \underline{\mathrm{Ann}} \\ & \Updownarrow & \\ & & A \text{ réduit , a.c. dans } \mathcal{B} \\ & \Updownarrow & \\ & & A \text{ absolument plat , a.c. dans } \mathcal{C}\ . \end{array}$$

A e.c. dans $\mathcal{B} \Longleftrightarrow A$ e.c. dans $\mathcal{C}$.

(6-17) Théorème.- Dans $\underline{\mathrm{Ann}}$, un anneau réduit A est a.c. SSI il existe un morphisme injectif $f : A \longrightarrow \pi\,K_i$, $i \in I$, où les K_i sont des corps a.c. et f un mono a.c. .

Démonstration.- Suffisance. En effet, dans ce cas $\pi\,K_i$ est absolument plat donc A également, car f est a.c. . On peut donc se placer dans la catégorie des anneaux absolument plats où a.c. $\Longleftrightarrow$ $\aleph_0$-injectif ; il en résulte que $\pi\,K_i$ est a.c. . On termine à l'aide de (6-9, b) .

Nécessité. Le morphisme canonique $A \longrightarrow \pi\,A/P$, $P \in \mathrm{Spec}(A)$, est injectif, et les A/P sont des corps (puisque A est absolument plat) qui sont bons d'après (6-13, 2) , donc des corps a.c. .

Remarque.- Ce résultat a été aussi obtenu par Lipshitz et Saracino [37], ainsi que par Cherlin [38] .

-:-:-:-

CHAPITRE 7

Monoïdes a.c. et e.c.

Neumann, dans [27], a montré qu'un demi-groupe (i.e. un ensemble muni d'une loi de composition interne associative) a.c. est simple. On va donner de ce fait, plus précisément de son lemme principal (lemme 1) une preuve beaucoup plus simple que la sienne et qui est valable aussi pour les monoïdes (demi-groupes ayant un élément unité 1).

(7-1) Lemme.- *Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des demi-groupes (resp. des monoïdes). Pour chaque objet A et chaque application $\phi : A \longrightarrow A$, il y a un objet B muni d'un mono $\mu : A \longrightarrow B$, et de deux éléments σ, τ tels que pour tout $a \in A$, on ait :*

$$\sigma\ \mu(a)\ \tau = \mu(\phi(a)).$$

Démonstration.- Soit $A[t]$ l'objet obtenu en adjoignant à A un élément libre t. C'est un coproduit dans la catégorie de A et d'un objet libre à un générateur t. Un élément z de $A[t]$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$z = a_o\, t^{P_1}\, a_1 \dots a_{m-1}\, t^{P_m}\, a_m ,$$

où $m \geqslant o$; $P_1, \dots, P_m \geqslant 1$, $a_o, \dots, a_m$ éléments de A, et si $m > 1$ alors a_o ou a_m ou les deux peuvent être absents (resp. si $m > 1$, alors a_o ou a_m ou les deux peuvent être égaux à 1, l'élément unité, et $a_1, \dots, a_{m-1}$ sont différents de 1).

Soit $B = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(A[t], A[t])$ = ensemble des applications de $A[t]$ dans lui-même. B est muni canoniquement d'une structure de monoïde. Soit $\mu : A \longrightarrow B$ l'application définie par $\mu(a)(z) = a.z$, où $z \in A[t]$. On a $\mu(ab) = \mu(a)\ \mu(b)$ (resp. $\mu(ab) = \mu(a)\ \mu(b)$ et $\mu(1) = 1$). Si $a \neq b$, on a $a\,t \neq bt$ donc $\mu(a) \neq \mu(b)$. Il en résulte que μ est un mono.

Soient σ et τ les éléments de B définis par :

1) $\tau(z) = t.z.$.

2) Si $z = a\ t\ y$ avec $a \in A$, $y \in A[t]$, les éléments a et y sont uniques pour cette propriété, on pose alors $\sigma(z) = \phi(a)\ y$. Si z n'est pas de cette forme, on choisit arbitrairement $\sigma(z)$. On a alors, pour chaque $a \in A$, et chaque $z \in A[t]$,

$$[\sigma\ \mu(a)\ \tau]\ (z) = \sigma(a\ t\ z) = \phi(a).\ z\ .$$

(7-2) Remarque.- Si $\mathcal{A}$ est la catégorie des demi-groupes, on peut choisir σ tel que $\sigma(t\ z) = t\ \sigma(z)$; on a alors, en plus du résultat précédent, la relation $\sigma\,\tau = \tau\,\sigma$.

(7-13) Corollaire.- *Dans la catégorie des demi-groupes (resp. des monoïdes),*

a) <u>Chaque objet</u> a.c. <u>est simple</u> (c.f. (4-7)) ,

b) <u>Il y a suffisamment d'objets simples</u> ,

c) <u>Tout objet</u> a.c. <u>qui n'est pas réduit à un élément est infini et est</u> e.c. .

<u>Démonstration</u>.- La démonstration est identique à celle de Neumann [27] pour les demi-groupes. Rappelons seulement la démonstration de a) .

Soit A un objet a.c. , et soit $\sim$ une congruence sur A qui n'est pas l'égalité. Il existe alors deux éléments distincts a et b tels que $a \sim b$. Soient c et d deux éléments quelconques. Soit $\phi : A \longrightarrow A$, l'application définie par $\phi(a) = c$, $\phi(b) = d$, $\phi(z)$ arbitraire où z est distinct de a et de b. D'après le lemme (7-1) le système d'équations

$$x\,a\,y = c \quad , \quad x\,b\,y = d$$

est compatible, donc possède une solution dans A, puisque A est a.c. , donc $c \sim d$ et la congruence est totale.

-:-:-:-

CHAPITRE 8

Catégories et groupoïdes simples a.c. et e.c.

a) *Sur la Simplicité*

Quelques remarques vont nous être utiles pour étudier les catégories simples et les catégories a.c.

(8-1) Définition.- Une congruence $\sim$ sur une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée pour chaque paire d'objets A, B d'une relation d'équivalence dans Hom(A,B) , notée encore $\sim$, compatible avec la composition, i.e. pour tout diagramme

$$C \xrightarrow{h} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{K} D$$

$$f \sim g \Longrightarrow K f h \sim K g h .$$

(8-2) Définition.- Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est dit localement constant si pour chaque $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ on a $F(f) = F(g)$.

(8-3) Remarques.-

a) Sur chaque catégorie, il y a deux congruences remarquables : la congruence totale (pour tous $f, g : A \rightrightarrows B$, on a $f \sim g$) et la congruence égalité ($f \sim g \Longleftrightarrow f = g$) .

b) Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ détermine sur $\mathcal{C}$ une congruence $\sim$ comme suit: pour tous $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$, $f \sim g$ si $F(f) = F(g)$.

c) F est fidèle (resp. Localement constant) SSI la congruence qu'il détermine est la congruence égalité (resp. totale).

d) Chaque congruence est déterminée par un foncteur. En effet, si $\sim$ est une congruence sur $\mathcal{C}$ on construit une catégorie $\mathcal{C}/_\sim$ comme suit :

- les objets de $\mathcal{C}/_\sim$ sont les objets de $\mathcal{C}$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\sim}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)/_\sim$.
- les identités et la composition sont déterminées canoniquement par celles de $\mathcal{C}$.

On a un foncteur canonique : $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/_\sim$, qui est l'identité sur les objets, et qui détermine la congruence $\sim$.

(8-4) Définition.- Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite simple si les seules congruences dessus sont l'égalité et la congruence totale. D'après ce qui précède, cela revient à dire que tout foncteur de source $\mathcal{C}$ est fidèle ou localement constant.

(8-5) Contre exemple (travaillé avec L. Haddad).- La catégorie Ens n'est pas simple. En effet si A et B sont des ensembles, f et g des applications $A \to B$, on pose $f \sim g$ si $f = g$ ou si f et g sont toutes deux des applications constantes. Ceci définit une congruence sur Ens qui n'est pas l'égalité et qui n'est pas totale.

(8-6) Proposition.- *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories équivalentes. Si l'une est simple, alors l'autre l'est également.*

Démonstration.- Soient F et G des équivalences réciproques, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$. On suppose que $\mathcal{C}$ est simple. Soit $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}$, alors $H\,F$ est fidèle, ou localement constant. Or $H \overset{\sim}{\sim} H\,F\,G$; on en déduit que $H\,F$ fidèle (resp. localement constant) implique la même propriété pour H.

(8-7) Remarque.- Les monos de Cat sont les foncteurs fidèles et injectifs sur les objets, c'est-à-dire les plongements.

(8-8) Remarque.- Les épimorphismes véritables de Cat sont les foncteurs $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, surjectifs sur les objets et tels que tout morphisme de $\mathcal{B}$ soit un composé de morphismes de la forme $F(f)$, $f \in \mathcal{A}$.

(8-9) Remarque.- Le foncteur $Ob : \text{Cat} \longrightarrow \text{Ens}$, qui à une catégorie associe l'ensemble de ses objets, possède un adjoint à gauche G et un adjoint à droite D, définis comme suit. Si X est un ensemble, D X est la catégorie dont les objets sont les éléments de X, et telle que entre deux objets il y ait exactement un morphisme ; G X est la catégorie discrète dont l'ensemble des objets est X.

Il en résulte que le foncteur Ob préserve les limites et les colimites.

(8-10) Remarque.- Cat est une catégorie $1.\aleph_0$-p. . Soit Δ la catégorie ayant 3 objets et 3 morphismes qui ne sont pas des identités

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd} .$$

Δ est un générateur dense de Cat ([14], p. 77). Un objet K de Cat est $\aleph_0$-p. SSI K est un conoyau

$$\coprod_J \Delta \rightrightarrows \coprod_I \Delta \longrightarrow K$$

([14], p. 77), où I et J sont des ensembles finis. En particulier, toute catégorie finie (resp. Catégorie libre sur un graphe fini) est $\aleph_0$-p. . Une catégorie de type fini a un nombre fini d'objets et est engendrée par un nombre fini de morphismes.

(8-11) Remarque.- Il y a une correspondance canonique biunivoque entre les diagrammes basiques du type (2) (resp. (1)) à coefficients dans une catégorie $\mathcal{E}$ et compatibles (c.f. (5-1), (5-3), (5-4)), et les systèmes compatibles d'équations et d'inéquations du type suivant :

$\exists$ des morphismes $x_1, \ldots, x_m$; $\exists$ des objets $X_1, \ldots, X_n$:

$$P_i(x_1,\ldots,x_m, id_{X_1},\ldots,id_{X_n},a_1,\ldots,a_p) = Q_i(x_1,\ldots,x_m, id_{X_1},\ldots,id_{X_n}, a_1,\ldots,a_p)$$

$$G_j(x_1,\ldots,x_m, id_{X_1},\ldots,id_{X_n},a_1,\ldots,a_p) \neq H_j(x_1,\ldots,x_m, id_{X_1},\ldots,id_{X_n}, a_1,\ldots,a_p)$$

où

a) $a_1,\ldots,a_p$ sont des morphismes donnés de $\mathcal{C}$.

b) P_i, Q_i, G_j, H_j sont des polynômes en les variables et les constantes.

c) $i \in I$, $j \in J$, I fini , J fini (resp. J vide).

Démonstration.- C'est essentiellement le même argument que dans (5-3).

b) *Une catégorie a.c. est simple*

(8-12) Lemme.- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soient des applications ϕ_o:ob $\mathcal{C} \to$ ob $\mathcal{C}$, $\phi_1 : F\ell\, \mathcal{C} \longrightarrow F\ell\, \mathcal{C}$ telles que pour chaque $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$, on ait $\phi_1(f) : \phi_o(A) \longrightarrow \phi_o(B)$. (On va noter ϕ l'une quelconque de ces applications). Il existe alors une catégorie $\mathcal{D}$ et un plongement $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, telle que $\mathcal{D}$ soit munie, pour chaque objet A de $\mathcal{C}$, de morphismes $\tau_A : \mu(\phi(A)) \longrightarrow \mu(A)$, $\sigma_A : \mu(A) \longrightarrow \mu(\phi(A))$, et munie aussi, pour chaque paire d'objets A, B de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $\mathcal{S}_{AB} : \mu(\phi(B)) \longrightarrow \mu(\phi(B))$ tel que pour chaque $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mu(A) \arrow[rr, "\mu(f)"] & & \mu(B) \arrow[dr, "\sigma_B"] & \\
& & & \mu(\phi(B)) \arrow[dl, "\mathcal{S}_{AB}"] \\
\mu(\phi(A)) \arrow[uu, "\tau_A"] \arrow[rr, "\mu(\phi(f))"'] & & \mu(\phi(B)) &
\end{tikzcd}$$

Démonstration.- Soit $\mathcal{C}_1$ la catégorie obtenue en adjoignant à la catégorie $\mathcal{C}$, pour chaque objet A , des morphismes libres $t_A : \phi(A) \longrightarrow A$, $s_A : A \longrightarrow \phi(A)$. $\mathcal{C}_1$ est petite et il y a un plongement canonique : $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_1$. Soit $\underset{\sim}{Ens}$ une petite catégorie d'ensembles telle que, pour chaque paire d'objets A, B de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1(A,B)$ soit un objet de $\underset{\sim}{Ens}$.

Soit $Y : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_1^{op} , \underset{\sim}{Ens})$ le plongement de Yoneda : $A \rightarrowtail \mathcal{C}_1(-, A)$. Soit $\mathcal{C}_3$ la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}_2$ et les morphismes $\theta : F \longrightarrow G$ sont les familles (θ_A) , A objet de $\mathcal{C}_1$, et θ_A une application $F\,A \longrightarrow G\,A$, (et cela sans aucune condition de naturalité). La composition $F \xrightarrow{\theta} G \xrightarrow{\gamma} H$ est définie par $(\gamma\,\theta)_A = \gamma_A\,\theta_A$. $\mathcal{C}_2$ est canoniquement une sous-catégorie de $\mathcal{C}_3$.

Soit μ le foncteur : $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_3$, composé de :

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_3 \quad ;$$

c'est un plongement.

Pour chaque objet A de $\mathcal{C}$, on a 2 morphismes de $\mathcal{C}_3$

$$\tau_A = \mathcal{C}_1(-, t_A) : \mathcal{C}_1(-, \phi(A)) \longrightarrow \mathcal{C}_1(-, A)$$

$$\sigma_A = \mathcal{C}_1(-, s_A) : \mathcal{C}_1(-, A) \longrightarrow \mathcal{C}_1(-, \phi(A)) .$$

Pour chaque paire d'objets A, B de $\mathcal{C}$, on définit un morphisme $\mathcal{S}_{AB} : \mathcal{C}_1(-, \phi(B)) \longrightarrow \mathcal{C}_1(-, \phi(B))$, dans $\mathcal{C}_3$, comme suit :

Soit $u : X \longrightarrow \phi(B)$ un morphisme de $\mathcal{C}_1$. Si $u = s_B\, g\, t_A\, y$, avec $g \in \mathcal{C}$, $y \in \mathcal{C}_1$, alors g et y sont déterminés de façon unique ; on pose alors :

$$\mathcal{S}_{AB}(X)\ (u) = \phi(g)\ y .$$

Sinon, on choisit arbitrairement $\mathcal{S}_{AB}(X)\ (u) : X \longrightarrow \phi(B)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "u"] \arrow[d, "y"'] & & \phi(B) \\
\phi(A) \arrow[r, "t_A"'] \arrow[urr, "\phi(g)"] & A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "s_B"']
\end{tikzcd}$$

Il est clair alors que pour chaque paire A, B d'objets de $\mathcal{C}$, et chaque $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$, on a :

$$(\mathcal{S}_{AB} \circ \sigma_B \circ \mu(f) \circ \tau_A)\ (X)\ (u) = \mathcal{S}_{AB}(s_B\ f\ t_A\ u) = \phi(f)\ u = \mu[\phi(f)]\ (X)\ (u)$$

où $u : X \longrightarrow \phi(A)$ est un morphisme de $\mathcal{C}_1$

$$X \xrightarrow{u} \phi(A) \xrightarrow{t_A} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{s_B} \phi(B) .$$

Le résultat du lemme en découle.

<u>(8-13) Corollaire</u>.- <u>Toute catégorie</u> a.c. <u>est simple</u> .

<u>Démonstration</u>.- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie a.c. Soit $\sim$ une congruence sur $\mathcal{C}$. Si elle n'est pas l'égalité, il existe $f, g : A \rightrightarrows B$ tels que $f \sim g$ et $f \neq g$. Soient f' , g' des morphismes : $A' \rightrightarrows B'$. On considère l'application $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ définie par : $A \longmapsto A'$, $B \longmapsto B'$, $f \longmapsto f'$, $g \longmapsto g'$ et définie arbitrairement ailleurs. On considère aussi le système d'équations $\exists z , y , x$:

$$\begin{aligned}
z\,x\,f\,y &= f' \\
z\,x\,g\,y &= g' \\
id_{B'} z\ id_{B'} &= z \\
id_{B'} x\ id_{B} &= x \\
id_{A}\ y\ id_{A'} &= y .
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[dr, dashed, "x"] & \\
& & B' \arrow[dl, dashed, "z"] \\
A' \arrow[uu, dashed, "y"] \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & B' &
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme précédent ce système d'équations est compatible, donc possède une solution dans $\mathcal{C}$. On en déduit que $f' \sim g'$, et que $\sim$ est totale.

(8-14) Théorème.- Il y a suffisamment d'objets simples dans Cat .

Démonstration.- Il y a en effet suffisamment de catégories a.c. (6-3) , et chaque objet a.c. est simple (8-13).

(8-15) Corollaire.- Deux objets quelconques d'une catégorie a.c. sont isomorphes.

Démonstration.- Soient A et B des objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ qui est a.c. . En utilisant (8-13) et un $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que $\phi(id_A) = id_B$, on montre qu'il existe x, y, z tels que $id_B = z\ x\ id_A\ y$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id_A"] & & A \arrow[dr, "x"] & \\
& & & B \arrow[dl, "z"] \\
B \arrow[uu, "y"] \arrow[rr, "id_B"] & & B &
\end{tikzcd}$$

On en conclut qu'il existe un monomorphisme scindé $y : B \longrightarrow A$. On montre de même qu'il y a un mono scindé : $y' : A \longrightarrow B$.

Si on remarque que $\mathcal{C}$ se plonge dans Ens par un foncteur T , et que $T(y) : T\,B \longrightarrow T\,A$, $T(y') : T\,A \longrightarrow T\,B$ sont alors des injections , et qu'alors $T\,A$ et $T\,B$ sont isomorphes, d'après le théorème de Cantor-Bernstein, on voit que A et B sont isomorphes dans $\mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est a.c. et que l'isomorphisme se traduit par des équations :

$$\exists u , v \ : \ u\,v = id_A \quad \text{et} \quad v\,u = id_B \ .$$

Remarque.- Ce résultat a été aussi obtenu indépendamment par L. Haddad et G. Sabbagh qui montrent directement que toute petite catégorie se plonge dans une catégorie où tous les objets sont isomorphes.

c) *Stabilité de la propriété a.c. par équivalence*

(8-16) Lemme.- On suppose donné un diagramme de catégories

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "a"'] & \arrow[d, phantom, "\theta"] & \mathcal{B} \arrow[dl, "b"] \\
& \mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

où s est injectif sur les objets et θ un iso : $b\,s \longrightarrow a$. Il existe alors un foncteur $c : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que $c\,s = a$.

Démonstration.- Pour chaque objet B de $\mathcal{B}$ on associe un objet cB de $\mathcal{C}$ et un iso $f(B) : bB \longrightarrow cB$ de la manière suivante.

S'il existe un objet A de $\mathcal{A}$ tel que $B = sA$, alors A est unique pour cette propriété et on pose $cB = aA$ et $f(B) = \theta(A)$.

Sinon, on pose $cB = bB$ et $f(B) = id_{bB}$.

La correspondance $B \longrightarrow cB$ se prolonge alors de manière unique en un foncteur c tel que la famille des isomorphismes f(B) définisse une transformation naturelle $b \longrightarrow c$; le foncteur c vérifie $c\ s = a$.

(8-17) Proposition.- On considère un diagramme de catégories

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, shift left, "I"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

tel que I soit un plongement et I F isomorphe à $id_{\mathcal{A}}$; alors si $\mathcal{S}$ est a.c., il en est de même de $\mathcal{A}$.

Démonstration.- Soit un diagramme basique du type (1) à coefficients dans $\mathcal{A}$ et ayant une solution dans une extension $\mathcal{B}$, (c.f. 5-4), (en termes clairs, système d'équations compatibles).

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r, "s"] \arrow[d, "a"'] & E' \arrow[dll, dashed, "d"'] \arrow[dl, dashed, "e"'] \arrow[d, shift right, "b"'] \arrow[d, shift left, dashed, "c"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, shift left, "I"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift left, "F"] \arrow[r, "J"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

On a alors $J\,I\,F\,a \simeq J\,a = b\,s$. D'après le lemme (8-16), il existe un foncteur $c : E' \longrightarrow \mathcal{B}$ tel que $c\,s = J\,I\,F\,a$. Comme $\mathcal{S}$ est a.c. et J I est un plongement, il existe $d : E' \longrightarrow \mathcal{S}$, tel que $d\,s = F\,a$. On a alors $Ids = IFa \simeq a$. On applique de nouveau le lemme (8-16) et on trouve $e : E' \longrightarrow \mathcal{A}$ etl que $es=a$.

(8-18) Corollaire.- Si le squelette d'une catégorie est a.c. , alors la catégorie l'est aussi.

(8-19) Exemple.- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie telle que pour tout couple d'objets (A,B) $\mathcal{C}(A,B)$ contienne exactement un élément, alors $\mathcal{C}$ est a.c. .

En effet son squelette est la catégorie finale $\underset{\sim}{1}$ (un objet et un seul morphisme identité) qui est visiblement a.c. .

(8-20) Proposition.- Soit $I : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ un monomorphisme a.c. ; si $\mathcal{A}$ est a.c. , il en est de même de $\mathcal{S}$.

Démonstration.- Il faut montrer que tout mono $J : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{B}$ est a.c. (c.f. (6-1). On construit pour cela la somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "I"] \arrow[d, "J"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "J'"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "I'"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

D'après (5-8) I' est un mono a.c. . D'après (8-9) et le fait que dans Ens les injections sont couniverselles, J' est injectif sur les objets. D'après (8-13) et (8-4) , J' est fidèle ou localement constant. Si J' est fidèle, il est alors un plogement a.c. puisque $\mathcal{A}$ est a.c. . Le composé $J'I$ est alors a.c. (5-6, b), donc aussi $I'J$ et par suite J est a.c. (5-6, c) .

Si J' est localement constant, on va montrer que $\mathcal{S}$ est du type étudié dans l'exemple 8-19) , donc est a.c. . En effet, pour chaque paire d'objets A, B de $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ (I A, I B) n'est pas vide (8-15) , donc $\mathcal{S}(A,B) \neq \emptyset$ puisque I est a.c. (L'équation $\exists f : id_B\ f\ id_A$ a une solution dans $\mathcal{A}$, donc dans $\mathcal{S}$). Soient $f, g : A \rightrightarrows B$ dans $\mathcal{S}$, on a $J'I(f) = J'I(g)$ puisque J' est localement constant, donc $I'J(f) = I'J(g)$; or $I'J$ est fidèle, donc $f = g$.

(8-21) Corollaire.- Si une catégorie est a.c. , son squelette l'est également.

Démonstration.- Soit $\mathcal{S}$ le squelette de $\mathcal{A}$. Il y a $I : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ et $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}$ tel que $F\ I = id_{\mathcal{S}}$. I est un mono scindé, donc a.c. d'après (5-6, d).

(8-22) Théorème.- Soient des catégories équivalentes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Si l'une de ces catégories est a.c. l'autre l'est aussi.

Démonstration.- Cela résulte de (8-18), (8-21) et le fait que les squelettes de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont isomorphes.

(8-23) Remarque.- Par contre, l'équivalence de catégories ne préserve pas la propriété d'être e.c. ; cela résultera de (8-28).

d) *Structure des catégories a.c. et e.c.*

(8-24) Rappel.- Il convient de rappeler que les systèmes d'équations pour les monoïdes sont du type suivant :

$$\exists (x_j) \quad : \quad P_i(x_j,\ a_K) = Q_i(x_j,\ a_k)$$

où P_i, Q_i sont des mots en les constantes a_k et les variables x_j , et où $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ avec I, J, K finis. Ils sont donc un cas particulier des systèmes d'équations pour les catégories.

(8-25) Lemme.- Soit $\mathcal{A}$ une catégorie ayant un seul objet A , alors $\mathcal{A}$ est a.c.

<u>SSI le monoïde</u> Hom(A,A) <u>est</u> a.c. .

<u>Démonstration</u>.- Si $\mathcal{A}$ est a.c. , il résulte assez facilement de (8-24) que le monoïde Hom(A,A) est a.c. . Réciproquement on suppose que le monoïde Hom(A,A) es a.c. ; d'après (6-3) , il y a un plongement $I : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est a.c. ; soit $\mathcal{S}$ le squelette de $\mathcal{E}$ et F le foncteur d'équivalence $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{S}$; le composé F I est un plongement. Comme $\mathcal{S}$ est a.c. (8-21) il suffit d'après (8-20) de montrer que F I est un plongement a.c. ; or les seuls systèmes d'équations à coefficients dans $\mathcal{A}$ et qui ont une solution dans $\mathcal{S}$ sont du type décrit dans (8-24), et par suite ils ont une solution dans $\mathcal{A}$.

<u>(8-26) Théorème</u>.- <u>Une catégorie est</u> a.c. <u>SSI les objets sont tous isomorphes et pour chacun d'eux</u> A <u>le monoïde</u> Hom(A,A) <u>est</u> a.c. .

<u>Démonstration</u>.- Cela résulte de (8-15), (8-22) et (8-25) .

Notons aussi le résultat suivant :

<u>(8-27) Proposition</u>.- <u>Dans une catégorie</u> a.c. ,

a) <u>les idempotents se scindent</u> ;

b) <u>chaque sous-catégorie finie possède des flèches nulles</u>.

<u>Démonstration</u>.-

a) Soit f un idempotent : $A \longrightarrow A$; on considère le système d'équations

$$\exists x \ \exists y \ \exists Z \ : \ f = x\, y \ \text{ et } \ y\, x = id_Z \ .$$

D'après ([12] , p. 61) , chaque catégorie se plonge dans une catégorie où les idempotents se scindent. Ce système d'équations est donc compatible et par suite possède une solution dans la catégorie.

b) On peut en effet plonger chaque catégorie dans une catégorie ayant des flèches nulles.

On peut décrire les catégories e.c. comme suit :

<u>(8-28) Théorème</u>.- <u>Une catégorie</u> $\mathcal{E}$ <u>est</u> e.c. <u>SSI les conditions suivantes sont vérifiées</u>.

a) <u>Les objets sont tous isomorphes</u>.

b) <u>L'ensemble des objets est infini</u>.

c) <u>Pour chaque objet</u> A , <u>le monoïde</u> $\mathcal{E}(A,A)$ <u>est</u> e.c. .

<u>Démonstration</u>.- On suppose que $\mathcal{E}$ est e.c. , elle est alors a.c. , donc la condition a) est réalisée. De plus, pour chaque entier n , le système d'inéquations : $\exists$ des objets $X_1, \ldots, X_n$: $X_i \neq X_j$ pour $i \neq j$, est compatible ; on peut en effet adjoindre à $\mathcal{E}$ des objets distincts $Z_1, \ldots, Z_n$; donc ce système admet une solution dans $\mathcal{E}$. De même, pour chaque objet A , le système d'équations et d'inéquations $\exists f,g : A \rightrightarrows A$ avec $f \neq g$, est compatible puisqu'on peut adjoindre des morphismes libres à une catégorie. Donc le monoïde $\mathcal{E}(A,A)$ qui est

a.c. d'après (8-26) n'est pas trivial, et par suite il est infini et e.c., par (7-3) .

Réciproquement, on suppose que $\mathcal{E}$ vérifie les conditions a), b) et c) . On va montrer que tout mono $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{D}$ est e.c. . On peut supposer que $\mathcal{D}$ est a.c. car si ce n'est pas le cas on considère un mono $J : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{Z}$ avec $\mathcal{Z}$ a.c. ; si on démontre que $J\,F$ est e.c. , il résulte de (5-9, d) que F l'est aussi.

On va construire un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ sur un ensemble I, tel que si $\Delta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{\mathfrak{F}}$ désigne (c.f. 2-2) la diagonale de $\mathcal{E}$ dans une ultrapuissance de $\mathcal{E}$ suivant $\mathfrak{F}$, il existe un mono $t : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}^{\mathfrak{F}}$ tel que $t\,F = \Delta$. Il résultera alors de (5-10) que F est e.c. .

On va pour cela raffiner la démonstration de (5-7, a $\Longrightarrow$ b) . On écrit $F : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ comme colimite $\aleph_0$-cofiltrante ordonnée de monos $f_i : E_i \longrightarrow F_i$, $i \in I$, où E_i (resp. F_i) est de t. $\aleph_0$ (resp. p. $\aleph_0$). D'après (8-10) les ensembles d'objets de E_i et F_i sont finis.

$\mathcal{E}$ est a.c. d'après (8-26) , donc F est a.c. . Il existe par suite pour chaque $i \in I$, un morphisme $s_i : F_i \longrightarrow \mathcal{E}$ tel que $s_i\, f_i = a_i$. On va modifier les s_i de façon à les rendre injectifs sur les objets qui ne sont pas dans $f_i(E_i)$

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[rr, tail, "f_i"] \arrow[dr] \arrow[dd, "a_i"'] & & F_i \arrow[dr, "b_{ij}"] \arrow[dd, "b_i"] \arrow[ddll, dashed, "s_i"] & \\
& E_j \arrow[rr, tail] \arrow[dl] & & F_j \arrow[dl] \\
\mathcal{E} \arrow[rr, tail, "F"'] & & \mathcal{D} &
\end{tikzcd}$$

On appelle $X_1,\dots,X_n$ les objets distincts de F_i qui ne sont pas dans $f_i(E_i)$. On considère dans $\mathcal{E}$ des objets distincts $A_1,\dots,A_n$ qui ne sont pas dans $a_i(E_i)$. Pour chaque objet X de F_i , on définit un objet de $\mathcal{E}$ noté $t_i X$ et un isomorphisme $\phi_X : s_i\, X \longrightarrow t_i\, X$;

1) si $X \in f_i(E_i)$, on pose $t_i X = s_i\, X$ et $\phi_X = id$;

2) si $X = X_p$, $p = 1, 2, \dots, n$, on pose $t_i\, X = A_p$ et on choisit un isomorphisme arbitraire : $s_i\, X_p \longrightarrow A_p$.

On sait alors que t_i se prolonge en un foncteur $t_i : F_i \longrightarrow \mathcal{E}$, et on a $t_i\, f_i = a_i$.

On achève la démonstration comme dans (5-7, a $\Longrightarrow$ b), en choisissant un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ contenant les $\bar{i} = \{j \mid j \geqslant i\}$, en posant $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}$ pour chaque i et en définissant :

$$t_{\bar{i}} \;:\; F_i \longrightarrow \mathcal{E}_{\bar{i}} = \prod_{j \geqslant i} \mathcal{E}_j$$

par $q_{\bar{i},j} \circ t_{\bar{i}} = t_j\, b_{ij}$, où $q_{\bar{i},j}$ est la projection canonique $\mathcal{E}_{\bar{i}} \longrightarrow \mathcal{E}_j$. On a en particulier $q_{\bar{i},i} \circ t_{\bar{i}} = t_i$. Soit $t : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}^{\mathfrak{F}}$ le morphisme détermiminé par les $t_{\bar{i}}$.

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[r, rightarrowtail, "f_i"] \arrow[d, "a_i"'] & F_i \arrow[r, "t_{\bar{i}}"] \arrow[d, "b_i"] \arrow[dl, "t_i"'] & \mathcal{C}_i \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\phi_{\bar{i}}"] & \mathcal{C}_F \\
\mathcal{C} \arrow[r, rightarrowtail, "F"] \arrow[rr, rightarrowtail, bend right, "\Delta"'] & \mathcal{D} \arrow[r, "t"] & \mathcal{C}^{\mathfrak{F}} &
\end{tikzcd}$$

On va d'abord montrer que t est injectif sur les objets. Soient D,D' des objets de $\mathcal{D}$; il existe $i \in I$ et des objets X,X' de F_i tels que $b_i X = D$, $b_i X' = D'$.

On suppose $D \neq D'$ et $tD = tD'$, alors $\phi_{\bar{i}}\, t_{\bar{i}} X = \phi_{\bar{i}}\, t_{\bar{i}}\, X'$; il existe donc $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset \bar{I}$ tel que $q\, t_{\bar{i}}\, X = q\, t_{\bar{i}}\, X'$.

Soit $j \in F$, en projetant sur $\mathcal{C}_j$ on a alors :

$$t_j\, b_{ij}\, X = t_j\, b_{ij}\, X' .$$

Si $b_{ij}\, X$ et $b_{ij}\, X'$ ne sont pas dans $f_j(E_j)$, ou si $b_{ij}\, X \in f_j(E_j)$ et $b_{ij}\, X' \notin f_j(E_j)$, on sait alors que $t_j b_{ij}\, X \neq t_j b_{ij} X'$, ce qui contredit ce qui précède. Donc ce cas ne se produit pas.

Si $b_{ij} X = f_j(A)$ et $b_{ij} X' = f_j(A')$, alors

$$D = b_j f_j(A) = F a_j(A)$$

$$D' = F a_j(A')$$

Les relations $tD = tD'$ et $tF = \Delta$ impliquent $\Delta\, a_j\, A = \Delta\, a_j\, A'$ d'où $a_j\, A = a_j\, A'$ et $D = D'$. Contradiction.

Il reste à montrer que t est fidèle. Si ce n'est pas le cas, il serait localement constant puisque $\mathcal{D}$ est simple (8-4). Pour chaque objet A de $\mathcal{C}$ et chaque paire de morphismes $f,g : A \rightrightarrows A$, on aurait $t\,F(f) = t\,F(g)$, d'où $\Delta(f)=\Delta(g)$, d'où $f = g$; $\mathcal{C}(A,A)$ serait réduit à 1 élément, ce qui contredit l'hypothèse b.

e) *Structure des groupoïdes a.c. et e.c.*

(8-28).- Soit $\underset{\sim}{Grd}$ la sous-catégorie pleine de $\underset{\sim}{Cat}$ dont les objets sont les groupoïdes, c'est-à-dire les catégories où tout morphisme est inversible. On sait (voir [15]) que le foncteur d'inclusion $I : \underset{\sim}{Grd} \longrightarrow \underset{\sim}{Cat}$ possède un adjoint à gauche Gr et un adjoint à droite D , définis comme suit :

1) $Gr\, \mathcal{C} = \mathcal{C}(\Sigma^{-1})$, où Σ est l'ensemble des morphismes de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ désigne la catégorie de fractions.

2) $D\, \mathcal{C} = \mathcal{C}^* =$ la sous-catégroie de $\mathcal{C}$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les morphismes inversibles de $\mathcal{C}$.

Par suite le foncteur $I : \underset{\sim}{Grd} \longrightarrow \underset{\sim}{Cat}$ préserve les limites et les colimites. D'après ([14] , (7-2, i)) , ou (4-12) dans ce texte , $\underset{\sim}{Grd}$ est une catégorie 1. $\aleph_0$-p.

De plus, il est facile de voir que D préserve les colimites $\aleph_0$-cofiltrantes. Il en résulte que si G est un objet de t. $\aleph_0$(resp. de p. $\aleph_0$) dans Grd, alors I G est de t. $\aleph_0$(resp. p. $\aleph_0$) dans Cat ; on a en effet des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cat}(I\,G\,,\ \operatorname{colim}_i C_i) &\simeq \mathrm{Grd}\,(G\,,\ D \operatorname{colim} C_i) \\ &\simeq \mathrm{Grd}\,(G\,,\ \operatorname{colim} D\,C_i) \\ &\simeq \operatorname{Colim} \mathrm{Grd}\,(G,\ D\,C_i) \\ &\simeq \operatorname{Colim} \mathrm{Cat}\,(I\,G\,,\ C_i) \end{aligned}$$

où dans ces formules $\operatorname{Colim} C_i$ est une colimite $\aleph_0$-cofiltrante monomorphique (resp. $\aleph_0$-cofiltrante quelconque).

Réciproquement, il résulte du fait que I est pleinement fidèle, préserve les monos et les colimites, que si I G est de t. $\aleph_0$(resp. p. $\aleph_0$) dans Cat , alors G est de t. $\aleph_0$ (resp. p. $\aleph_0$) dans Grd .

Dans Cat , tout objet C de p. $\aleph_0$ est un conoyau

$$\coprod_J \Delta \rightrightarrows \coprod_I \Delta \longrightarrow C$$

où I et J sont finis ([14] ; p. 77) . Dans Grd tout objet G de p. $\aleph_0$ est aussi un conoyau

$$\coprod_J \mathrm{Gr}(\Delta) \rightrightarrows \coprod_I \mathrm{Gr}(\Delta) \longrightarrow C$$

avec I et J finis .

(8-30) Lemme.- Dans la catégorie des groupoïdes ,

a) l'équivalence préserve la propriété d'être a.c. ,

b) un objet a.c. est connexe ,

c) un objet ayant un seul objet A est a.c. SSI le groupe Hom(A,A) est a.c.

Démonstration.-

a) La preuve est la même que pour les catégories (8-18), (8-21), (8-23) .

b) Soit G un groupoïde a.c. ; on le plonge dans une catégorie a.c. $\mathcal{C}$ par un foncteur $F : G \longrightarrow \mathcal{C}$; d'après (8-15) les objets de $\mathcal{C}$ sont tous isomorphes. On choisit un objet A de G , et , pour chaque objet B de G , on choisit un isomorphisme $\mathcal{S}_{AB} : F\,A \longrightarrow F\,B$ dans $\mathcal{C}$. La sous-catégorie de $\mathcal{C}$ engendrée par F(G) et les $(\mathcal{S}_{A,B}\,,\ \mathcal{S}^{-1}_{A,B})_B$ est un groupoïde connexe et F détermine un plongement de G dans ce groupoïde. Il en résulte que G est connexe.

c) La démonstration est semblable à celle de (8-25).

(8-31) Théorème.- Dans la catégorie des groupoïdes ,

a) un objet a.c. est simple, il y a donc suffisamment d'objets simples ;

b) un objet est a.c. SSI il est connexe et pour chacun de ses objets A le groupe Hom(A,A) est a.c. ;

c) un objet est e.c. SSI il est connexe, il a une infinité d'objets et pour chacun d'eux A le groupe Hom(A,A) est e.c. .

Démonstration.-

a) D'après Neumann [26] un groupe a.c. est simple. En utilisant (8-31, c) on voit facilement qu'un groupoïde a.c. ayant un seul objet est simple. D'après (8-6) l'équivalence préserve la propriété d'être simple ; d'après (8-31, b) on voit donc que tout objet a.c. est simple. Le dernier énoncé résulte de ce qu'il y a suffisamment d'objets a.c.

b) Cela résulte de (8-31) .

c) La démonstration est semblable à celle de (8-28).

(8-32) Remarque.- Un objet a.c. de Cat se plonge dans un groupoïde SSI c'est une catégorie préordonnée chaotique i.e. du type (8-19).

Démonstration.- D'après (8-27, b) une catégorie a.c. possède "localement" des flèches nulles qui ne peuvent être inversibles que si la catégorie est un ensemble préordonné chaotique.

f) *Sur une question de B. Mitchell*

(8-33).- Dans une conversation privée, B. Mitchell a posé la question suivante. Quelles sont les catégories algébriquement closes au sens des systèmes d'équations du type (*) ci-dessous.

(*) : $\exists x_1,\dots,x_n : P_i(x_1,\dots,x_n, a_1,\dots,a_p) = Q_i(x_1,\dots,x_n, a_1,\dots,a_p)$ où $i = 1,\dots,m$, les a_i des morphismes donnés et P_i , Q_i des mots en les x_j et les a_K .

Il est clair que la différence entre ce type d'équations et le type décrit dans (8-11) est qu'on ne pourra pas demander à une variable d'être une identité, sauf si cette identité est un morphisme a_i donné.

Il est donc immédiat qu'une catégorie a.c. (au sens 8-11) , est a.c. au sens (*) .

La réciproque est aussi exacte. En effet ceci résulte de la suite de remarques suivantes.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie a.c. au sens (*) , alors :

a) Si $\mathcal{C}$ a un seul objet le monoïde $\mathcal{C}(A,A)$ est a.c.

b) Le lemme (8-12) et le corollaire (8-15) sont valables pour $\mathcal{C}$, puisque les démonstrations utilisent seulement des systèmes d'équations du type (*). On en conclut que $\mathcal{C}$ est simple et que deux objets quelconques de $\mathcal{C}$ sont isomorphes.

c) Le squelette de $\mathcal{C}$ est a.c. au sens (*).

d) $\mathcal{C}$ est a.c. .

Démonstration.-

a) Ceci est évident car un système d'équations pour la structure de monoïdes, à coefficients dans $\mathcal{C}(A,A)$ et ayant une solution dans un monoïde M, extension de $\mathcal{C}(A,A)$, et automatiquement du type ($*$) ci-dessus. Si on considère une catégorie $\mathcal{D}$ ayant un objet D, et telle que $\mathcal{D}(D,D) = M$, on obtient un plongement $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, et le système d'équations donné possède une solution dans $\mathcal{C}$, et par suite dans $\mathcal{C}(A,A)$.

b) Il suffit de regarder les démonstrations de (8-12) et (8-15).

c) D'après b), le squelette de $\mathcal{C}$ est une catégorie ayant un seul objet. Soit I l'inclusion : $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$, il y a un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$ tel que $F\, I = id_{\mathcal{S}}$. I est donc un mono a.c. au sens ($*$). On montre alors comme dans (8-20) que est a.c. au sens ($*$).

d) Il résulte de ce qui précède et du théorème (8-25, c) que $\mathcal{C}$ est a.c.

-:-:-:-

CHAPITRE 9

Appendice : Un théorème de représentation des catégories localement α-cohérentes

On sait (corollaire 7-9 de [14]) qu'une catégorie l.α-p. est équivalente à la catégorie $\mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{op}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$ où $\mathcal{U}$ est une petite catégorie α-cocomplète et $\mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{op}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$ désigne la sous-catégorie pleine de $(\mathcal{U}^{op}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$ dont les objets sont les foncteurs α-continus , c'est-à-dire qui préservent les limites indexées par des catégories de Cardinal < α . On va caractériser les catégories $\mathcal{U}$ telles que $\mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{op}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$ soient l.α-c. , c'est-à-dire d'après (4-10) telles que tout sous-objet de t.α d'un objet de p.α soit de p.α .

(9-1) Lemme.- Soit $\mathcal{U}$ une petite catégorie α-cocomplète ; le foncteur $I : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{op}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$, induit par le foncteur Yoneda, préserve et réfléchit les épis et les monos ; il réfléchit aussi les épis véritables.

Démonstration.- I réfléchit les monos et les épis car il est fidèle. Il préserve les monos car ob $\mathcal{U}$ est un ensemble générateur de $\mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{op}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$ et I est pleinement fidèle. Il préserve les épis car il est α-cocontinu [14] . Enfin, il réfléchit les épis véritables car il préserve les monos et il est pleinement fidèle Tous ces énoncés découlent des définitions.

(9-2) Théorème.- Soit $\mathcal{U}$ une petite catégorie α-cocomplète. Les énoncés suivants sont alors équivalents.

a) $\mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{op}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$ est localement α-cohérente .

b) $\mathcal{U}$ vérifie les deux conditions suivantes :

b_1) Tout morphisme de $\mathcal{U}$ se factorise en un épi véritable suivi d'un mono.

b_2) Le foncteur $I : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{op}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$ préserve les épis véritables.

c) $\mathcal{U}$ vérifie la condition b_1) ainsi que la condition suivante c_2 .

c_2) Pour tout épi véritable $f : E \longrightarrow F$ de $\mathcal{U}$ et tout système α-cofiltrant de morphismes de $\mathcal{U}$, $G_j \longrightarrow F$, $j \in J$ tel que :

i) pour tout objet U de $\mathcal{U}$ le morphisme canonique

$$\underset{j}{\underline{\mathrm{Colim}}}\ (U , G_j) \longrightarrow (U , F)$$

est injectif ,

ii) f appartient à l'image de

$$\underset{J}{\underline{\mathrm{Colim}}}\ (E , G_j) \longrightarrow (E , F) ,$$

alors, pour tout objet U de $\mathcal{U}$, $\underset{J}{\underline{\mathrm{Colim}}}\ (U,G_j) \longrightarrow (U,F)$ est un isomorphisme.

Démonstration.- On va montrer que a) $\Longleftrightarrow$ b) et que $b_2) \Longleftrightarrow c_2)$. Si A (resp. f) est un objet (resp. morphisme) de $\mathcal{U}$, on note I A par $\hat{A}$ et I(f) par $\hat{f}$.

<u>$a \Longrightarrow b_1$</u> : Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{U}$. On factorise $\hat{f}$ en $\hat{A} \xrightarrow{\varepsilon} G \xrightarrow{\phi} \hat{B}$ où ε est un épi véritable et ϕ un mono ([14], 1-3) G est donc un objet α-p. et par suite il existe un objet C de $\mathcal{U}$ et des morphismes $A \xrightarrow{g} C$ et $C \xrightarrow{h} B$ tels que $\hat{g} = \varepsilon$ et $\hat{h} = \phi$. D'après le lemme précédent, g est un épi véritable et h un mono.

<u>$a \Longrightarrow b_2$</u> : Soit $f : A \longrightarrow B$ un épi véritable dans $\mathcal{U}$. Soit $\hat{A} \xrightarrow{\varepsilon} G \xrightarrow{\phi} \hat{B}$ une factorisation de f dans $\mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{\circ p}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$ où ε est un épi véritable et ϕ un mono. Comme précédemment on voit qu'il existe dans $\mathcal{U}$, $A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} B$ tels que $\hat{g} = \varepsilon$ et $\hat{h} = \phi$. Par suite h est un épi véritable et un mono donc un iso. Il en résulte que $\hat{f}$ est un épi véritable.

<u>$b \Longrightarrow a$</u> : Soit $i : G \longrightarrow \hat{H}$ un mono de $\mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{\circ p}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$ où G est de t.α et $\hat{H}$ de p.α. Il existe un objet α-p. $\hat{E}$ et un épi véritable $p : \hat{E} \longrightarrow G$. Comme I est plein, il existe $f : E \longrightarrow H$ dans $\mathcal{U}$, tel que $\hat{f} : i\, p$. On factorise f dans $\mathcal{U}$ en $E \xrightarrow{g} D \xrightarrow{h} H$ où g est un épi véritable et h un mono. Alors $\hat{g}$ est un épi véritable et $\hat{h}$ un mono. A cause de l'unicité de factorisation G et $\hat{D}$ sont isomorphes, donc G est α-p .

<u>$b_2 \Longrightarrow c_2$</u> : Soit $f : E \longrightarrow F$ un épi véritable de $\mathcal{U}$ et soit $g_j : G_j \to F$, $j \in J$, un système α-cofiltrant de morphismes de $\mathcal{U}$ tel que les conditions de (C_2) soient vérifiées. Soit $G' = \underset{J}{\mathrm{Colim}}\, G_j$ dans $\mathrm{Cont}_\alpha(\mathcal{U}^{\circ p}, \underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$. Il existe $k \in J$ et $f' : E \longrightarrow G_k$ tels que $g_k f' = f$ (c'est la condition ii). Il existe aussi $i : G' \longrightarrow \hat{F}_j$, tel que pour tout $j \in J$, $i\, \phi_j = \hat{g}_j$, où ϕ_j est le morphisme canonique.

$$\begin{tikzcd}
\hat{E} \arrow[rr, "\hat{f}"] \arrow[dr, "\hat{f}'"'] & & \hat{F} \\
& \hat{G}_k \arrow[ur, "\hat{g}_k"] \arrow[r, "\phi_k"'] & G' \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd} .$$

D'après (b_2), $\hat{f}$ est un épi véritable, donc aussi i. De plus pour chaque objet U de $\mathcal{U}$, $\mathrm{Colim}(\hat{U}, \hat{G}_j) \approx (\hat{U}, G')$, d'où $(\hat{U}, i)$ est un mono ; donc i est un mono et par suite un iso.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Colim}(U, G_j) \arrow[r, tail] & (U, F) \approx (\hat{U}, \hat{F}) \\
\mathrm{Colim}(\hat{U}, \hat{G}_j) \arrow[u, "\approx"] \arrow[r, "\approx"] & (\hat{U}, G') \arrow[u, "{(\hat{U}, i)}"']
\end{tikzcd}$$

Le résultat en découle trivialement.

<u>$c_2 \Longrightarrow b_2$</u> : Soit $f : E \longrightarrow F$ un épi véritable de $\mathcal{U}$; alors $\hat{f} : \hat{E} \longrightarrow \hat{F}$

est un épi. On le factorise en $\hat{E} \xrightarrow{\varepsilon} G \xrightarrow{\phi} \hat{F}$ où ε est un épi véritable et ϕ un mono. On va montrer que, en fait, ϕ est un iso. Il suffit pour cela de montrer que $(\hat{U}, \phi)$ est un iso pour chaque objet U. Or G est une colimite α-cofiltrante d'objets α-p. $\hat{G}_j$ par l'intermédiaire de $g_j : \hat{G}_j \longrightarrow G$, $j \in J$. Pour chaque j, soit $f_j : G_j \longrightarrow F$ l'unique morphisme tel que $\hat{f}_j = \phi\, g_j$. Ce système vérifie les conditions c_2, et par suite pour chaque U

$$\mathrm{Colim}(U\, , G_j) \longrightarrow (U\, , F)$$

est un iso ; or cette application diffère de $(\hat{U}, \phi)$ par un iso, d'où le résultat

Acknowledgement

La condition (c_2) a été trouvée avec l'aide de P. Gabriel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN(M.), GROTHENDIECK(A.), VERDIER(J.L.).- *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S.*, 1963-1964.

[2] BELL(J.L.), SLOMSON(A.B.).- *Models and Ultraproducts : An introduction* , North-Holland, Amsterdam, 1969.

[3] BENABOU(J.).- *Séminaire*, I.H.P., Paris, 1971-1972.

[4] BESSERRE(A.).- Sur quelques propriétés des couples d'anneaux ou de modules, *J. Math. Pures et appl.*, 9e série, 46(1967), 314-352.

[5] BOURBAKI(N.).- *Eléments de mathématiques, Algèbre commutative, Chap. I,II,* Hermann, Paris, 1961.

[6] CARTAN(H.), EILENBERG(S.).- *Homological Algebra,* Princeton University Press, Princeton, 1956.

[7] EKLOF(P.), SABBAGH(G.).- Model Completions and Modules, *Ann. Math. Logic,* 2(1971) 251-288.

[8] ELLERMAN(D.).- Sheaves of Relational Structures and Ultraproducts, *Boston Univer. Research Reports,* 71-19(1971).

[9] FAKIR(S.).- Catégories localement cohérentes et objets α-injectifs, *C.R. Acad. Sc. Paris,* 274 (1972) 1392-1395.

[10] FAKIR(S.).- Monomorphismes et objets algébriquement et existentiellement clos dans les catégories localement présentables. Applications aux monoïdes, catégories et groupoïdes, *C.R. Acad. Sc. Paris,* 276 (1973) 723-726.

[11] FAKIR(S.), HADDAD(L.).- Objets cohérents et ultroproduits dans les catégories, *J. Algebra,* 20 (1972) 410-421.

[12] FREYD(P.).- *Abelian Categories : An introduction,* Harper and Row, New-York, 1964.

[13] GABRIEL(P.).- Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France,* 90 (1962) 323-448.

[14] GABRIEL(P.), ULMER(F.).- Local präsentierbare Kategorien, *Lecture Notes in Mathematics,* Vol. 221, Springer-Verlag, 1971.

[15] GABRIEL(P.), ZISMAN(M.).- *Calculus of fractions and Homotopy theory,* Ergebnisse der Mathematik, Vol. 35, Springer-Verlag, 1967.

[16] GIRAUD(J.).- Méthode de la descente, *Bull. Soc. Math. France,* Mémoire 2 , 1964.

[17] GODEMENT(R.).- *Cours d'Algèbre,* Hermann, Paris, 1963.

[18] GROTHENDIECK(A.).- Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.,* 9 (1957) 119-221.

[19] HALMOS(P.).- *Lectures on Boolean Algebras,* Van Nostrand Mathematical Studies, Van Nostrand, 1963.

[20] HIGMAN(G.).- Subgroups of finitely presented groups, *Proc. Royal. Soc. London,* Ser A, 262 (1961) 455-475.

[21] KUROCH(A.G.).- *The theory of groups,* Vol. I, II, Chelsea Publishing Company, New-York, 1960.

[22] LAZARD(D.).- Autout de la platitude, *Bull. Soc. Math. France,* 97 (1969) 81-128

[23] MACINTYRE(A.).- On algebraically closed groups, *Annals of Math.,* 96 (1972) 53-97.

[24] MACLANE(S.).- *Categories for the working mathematicians,* Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1971.

[25] MITCHELL(B.).- *Theory of Categories,* Academic Press, New-York, 1965.

[26] NEUMANN(B.H.).- A note on algebraically closed groups, *J. London Math. Soc.* , 27 (1952) 247-249.

[27] NEUMANN(B.H.).- Algebraically closed semi-groups, *Studies in Pure Math.* , *Ed. Mirsky,* Academic Press, New-York, London, 1971.

[28] NOUAZE(Y.).- Catégories localement de type fini et catégories localement noethériennes, *C.R. Acad. Sc. Paris,* 257 (1967) 823-825.

[29] OLIVIER(J.P.).- Descente par morphismes purs, *C.R. Acad. Sc. Paris* , 271 (1970) 821-823.

[30] OLIVIER(J.P.).- *Séminaire P. Samuel,* Algèbre commutative, Paris, 1967-1968.

[31] SABBAGH(G.).- Embedding problems for modules and rings with application to Model-Companion, *J. Algebra,* 18 (1971) 390-403.

[32] SCOTT(W.R.).- Algebraically closed groups, *Proc. Amer. Soc.,* 2 (1951) 118-121.

[33] SHOENFIELD(J.R.).- *Mathematical Logic,* Addison-Wesley, 1967.

[34] SIKORSKI(R.).- *Boolean Algebras,* Springer-Verlag, 1964.

[35] SIMMONS(H.).- Existentially closed structures, *J. Symbolic Logic,* 37 (1972) 293-310.

[36] STENSTRÖM(B.).- Coherent rings and F.P. injective modules, *J. London Math. Soc.,* (2), 2 (1970) 323-329.

[37] LIPSHITZ(L.), SARACINO(D.).- The Model Companion of the theory of commutative rings without nilpotent elements, *Proc. Amer. Math. Soc.* 38 (1973) 381-387.

[38] CHERLIN(G.L.).- Algebraically closed commutative rings, *J. Symbolic Logic* , 38 (1973) 493-499.

Sabah FAKIR
Département de Mathématiques
Université PARIS-NORD
Place du 8 Mai 1945
93206 SAINT-DENIS