MICHEL GATESOUPE

Sur les transformées de Fourier radiales

Mémoires de la S. M. F., tome 28 (1971)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__28__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 28, 1971, 133 p.
(Thèse Sc. math. Orsay, 1970)

SUR LES TRANSFORMEES DE FOURIER RADIALES

par

Michel GATESOUPE (*)

-:-

TABLE DES MATIERES

-:-

(*) Thèse Sc. math. Orsay 1970

INDEX DE NOTATIONS

$\mathcal{D}\left(\left]0, +\infty\right[^k\right)$: espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact contenu dans $\left]0, +\infty\right[^k$, $k \geqslant 1$ entier.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$, $\mathcal{S}_{paire}(\mathbb{R}^k)$: espace des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide à l'infini dans $\mathbb{R}^k$, paires dans le second cas (en chaque variable).

$\mathcal{S}'\left(\left]0, +\infty\right[^k\right)$: espace des distributions T sur $\left]0, +\infty\right[^q$ prolongeables en distributions tempérées sur $\mathbb{R}^q$.

$\sum'_\nu([\mathbb{R}^+]^q)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_q)$, $\nu_j \geqslant -\frac{1}{2}$, $1 \leqslant j \leqslant k$: sous-espace du précédent formé des fonctions f (définies presque partout) telles que $\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant k} x_j^{2\nu_j+1}\right)$ f soit prolongeable en une fonction distribution tempérée paire (en chaque variable) sur $\mathbb{R}^q$.

$J_\nu(z)$, $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$: fonction de Bessel d'ordre $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$.

H_ν : transformation de Hankel d'ordre $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$ (chap. I.1 et 4.)

$L^p(X; d\mu)$: espace de Banach des classes de fonction de puissance p-ième sommable sur l'espace localement compact X par rapport à la mesure de Radon $d\mu$.

$\mathcal{F}(\mathbb{R}^k; p; \omega)$: espace des transformées de Fourier des fonctions de $L^p(\mathbb{R}^k; \omega(t)dt)$, poids convenable, $p \geqslant 1$.

$\mathcal{F}(p; \omega)$: cf. définition précédente lorsque $k = 1$.

$A(\mathbb{R}^k; \omega)$: autre notation pour $\mathcal{F}(\mathbb{R}^k; 1; \omega)$ (chap. III)

$A(\mathbb{T}^k; \omega)$: espace des séries de Fourier en k variables sommables avec le poids $\omega(n)$, $n \in \mathbb{Z}^k$ (chap. III)

$\mathcal{H}(\nu; p; \omega)$, $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$, $p \geqslant 1$, ω poids convenable: espace des transformées de Hankel d'ordre ν de $L^p(\mathbb{R}^+; x^{2\nu+1}\,\omega(x)dx)$ (chap.I.2)

$\mathcal{H}(\nu; \omega)$, $\mathcal{H}(\nu)$: cf. définition précédente lorsque ($p = 1$), ou ($p = 1, \omega = 1$)

$\mathcal{H}(\nu_1, \dots, \nu_q ; p ; \omega)$, $\nu_j \geqslant -\frac{1}{2}$, $p \geqslant 1$, ω poids convenable : espace des transformées de Hankel d'ordre $(\nu_1, \dots, \nu_q)$ de $L^p\left([R^+]^q ; \left(\prod_{1\leqslant j\leqslant q} x_j^{2\nu_j+1}\right) \omega(x)\, dx\right)$ (chap. I.4.).

$\mathcal{H}(\nu_1, \dots, \nu_q ; \omega)$, $\mathcal{H}(\nu_1, \dots, \nu_q)$: cf. définition précédente lorsque $(p = 1)$ et $(p = 1, \omega = 1)$.

$\mathcal{R}(k ; p ; \omega)$: sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^k ; p ; \omega)$ des éléments invariants par rotation.

$\mathcal{R}(k ; \omega)$, $\mathcal{R}(k)$: cf. définition précédente lorsque $(p = 1)$ et $(p = 1, \omega = 1)$.

$\mathcal{R}(k_1, \dots, k_q ; p ; \omega)$, $k_j \geqslant 1$ entiers, $p \geqslant 1$: espace des transformées de Fourier des fonctions "multiradiales" de type $(k_1, \dots, k_q)$ de $L^p(\mathbb{R}^k ; \omega(|t^{(1)}|, \dots, |t^{(q)}|))$, $k = k_1 + \dots + k_q$ (chap. I.4.1.).

$\mathcal{R}(k_1, \dots, k_q ; \omega)$, $\mathcal{R}(k_1, \dots, k_q)$: cf. définition précédente lorsque $(p = 1)$ et $(p = 1, \omega = 1)$.

$\Omega(p ; \nu)$, $\Omega_o(p ; \nu)$, $\Omega'(p ; \nu)$, $\Omega'_o(p ; \nu)$: classes de poids envisagées dans les théorèmes I, II, I', II' (chap. I.2.1, 3.1, 4.3).

$\Omega_o(p ; \nu ; a)$: classe des poids de $\Omega_o(p ; \nu)$ équivalents à l'infini à x^a (a nombre réel).

$\Omega(k)$: classe de poids sur $\mathbb{Z}^k$ ou $\mathbb{T}^k$ (chap. III.1.1).

$\Omega_o(k_1, \dots, k_q)$: classe de poids sur $\mathbb{Z}^k$ ou $\mathbb{T}^k$, $k = k_1 + \dots + k_q$, $k_j \geqslant 1$ entier (chap. III.1.2).

$\Omega_o(1)$: cas particulier de la définition précédente $(q = 1)$ (chap. III.1.2).

Λ_α, $0 < \alpha < 1$: espace des fonctions sur $\mathbb{R}$, Lipschitzienne d'ordre α.

$\mathcal{A}(\Gamma ; \omega)$: espace de fonctions continues sur $\mathbb{R}^k$ associé à une sous-variété Γ de dimension q et à un poids ω sur $\mathbb{R}^q$ convenable (chap. III.2.3).

$S(k_1, \dots, k_q)$: sous-variété de $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{k_q}$ définie pour $t = (t^{(1)}, \dots, t^{(q)})$ par les q équations $|t^{(j)}| = a_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant q$ (chap. III. 6)

$\mathcal{R}$: relation d'équivalence sur un fermé E d'un groupe G (chap. IV.1).

$A_{\mathcal{R}}(E)$: sous-algèbre fermée de l'algèbre des restrictions A(E), constituée des éléments qui respectent $\mathcal{R}$ (chap. IV.1).

S : sous-variété de classe C^0 de dimension k - 1, dans $\mathbb{R}^k$, "étoilée" par rapport à l'origine (chap. IV.1).

(Σ) : classe de surfaces S régulières (chap. IV.1).

$(\mathcal{P})$: classe de surfaces S polyhédrales (chap. IV.2).

r : application de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^+$ positivement homogène de degré un associé à une surface S (chap. IV.1).

"Couronne d'épaisseur $[a, b]$" : fermé de $\mathbb{R}^k$ défini par les inégalités $0 \leqslant a \leqslant r(t) \leqslant b \leqslant +\infty$ (chap. IV.1).

$\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ ou Λ : algèbre des "profils" des fonctions de $A_{\mathcal{R}}(E)$ où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence associée à une surface S, E étant une couronne associée (chap. IV.1).

$A^s(T ; \omega)$, $A^c(T ; \omega)$: espace des séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n \sin nx$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n \cos nx$ telles que $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|\, \omega(n) < +\infty$ (chap. IV.4).

-=-

INTRODUCTION

L'origine de ce travail a été l'étude de la structure locale -dans le complémentaire de l'origine - des transformées de Fourier des fonctions "radiales" sommables dans $\mathbb{R}^k$. Cet espace est une sous-algèbre fermée $\mathfrak{A}(k)$ de $A(\mathbb{R}^k)$ algèbre de Banach (par transport de structure) des transformées de Fourier de $L^1(\mathbb{R}^k)$.

θ étant un homéomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même, on peut chercher à caractériser l'algèbre (par transport de structure) $\Lambda_\theta(\mathbb{R}^+)$ des fonctions Φ continues sur $\mathbb{R}^+$ telles que $(\Phi \circ \theta)(|t|)$ appartienne à $A(\mathbb{R}^k)$, t désignant un vecteur de $\mathbb{R}^k$ de norme Euclidienne $|t|$. Lorsque θ est l'application identique $x \longmapsto x$, l'espace des restrictions à un compact de $]0, +\infty[$ des fonctions de $\Lambda(\mathbb{R}^+)$ coïncide avec l'espace des restrictions de l'espace $A(\mathbb{R} ; (1+|x|)^{\frac{k-1}{2}})$ formé des transformées de Fourier des fonctions sommables sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure $(1+|x|)^{\frac{k-1}{2}}$.
- Ce résultat et quelques généralisations ont fait l'objet de Publications (Ann. Inst. Fourier 17 (1967), C.R. Ac. Sc. Paris 266 (1968) et 267 (1968); le chapitre I en est une refonte et une extension dans un cadre meilleur - A posteriori ce résultat montre que l'algèbre Λ_θ ne peut être décrite directement en termes d'algèbre à poids, mais seulement par changement de variable à partir de Λ, si θ n'est pas linéaire (au moins si θ est de classe C^2 sur un intervalle, d'après un théorème de Katznelson utilisé au chapitre 3). Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^+ ; x^{k-1}dx)$, "profil" d'une fonction $f(|t|)$ de $L^1(\mathbb{R}^k)$ dont la transformée de Fourier a pour "profil" F (dans $\Lambda(\mathbb{R}^+)$), on prend pour définition de la transformation de Hankel (d'ordre $\frac{k-2}{2}$) l'application linéaire injective $f \longmapsto F$ dans les fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. La remarque précédente, outre la signification "géométrique", justifie ce choix. En particulier pour l'objet de notre travail, il ne convient pas de choisir des formes de la transformation de Hankel fréquemment employées et plus simples pour une théorie générale de la transformation, comme par exemple celle qui serait ici $f(x) \longmapsto G(x) = F(\sqrt{x})$.

1. Le chapitre I est consacré à l'étude dans un cadre naturel plus général du problème initial. D'une part, on "interpole" la dimension k, en étudiant les transformées de Hankel d'ordre ν, $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$ réel, de $L^1(\mathbb{R}^+ ; x^{2\nu+1}dx)$. D'autre part la structure d'algèbre (pour la ν-convolution) n'intervenant pas, on est conduit à définir la transformation de Hankel d'ordre ν H_ν, sur $L^p(\mathbb{R}^+ ; x^{2\nu+1}dx)$, l'image $\mathcal{H}(\nu; p)$ étant un sous-espace de distributions "tempérées sur $]0, +\infty[$".

Le résultat (th. I et II) est que la restriction à un ouvert relativement compact dans $]0, +\infty[$, de l'espace $\mathcal{H}(\nu; p)$ coïncide avec celle de l'espace $\mathfrak{F}(p ; \varpi)$ des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$, transformées de Fourier des fonctions de $L^p(\mathbb{R} ; \varpi(x)\,dx)$ où $\varpi(x) = (1+|x|)^{(2-p)(\nu+\frac{1}{2})}$.

On peut généraliser en introduisant un poids convenable ω dans la mesure sur $\mathbb{R}^+$ $x^{2\nu+1}\omega(x)\,dx$ et aussi étudier $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; p)$ espace des transformées de Hankel d'ordre $(\nu_1, \ldots, \nu_q)$ de $L^p([\mathbb{R}^+]^q ; (\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1})dx)$. Dans l'appendice du chap.I on précise dans certains cas comment est en défaut l'isomorphisme local des deux espaces $\mathcal{H}(\nu; p)$ et $\mathcal{F}(p ; \varpi)$ lorsqu'on prend les ouverts $]0, a[$ ou $]a, +\infty[$ $(a > 0)$.

2. Quelques applications sont données au chapitre II: a) Régularité dans le complémentaire de l'origine, des transformées de Fourier des fonctions radiales de $L^p(\mathbb{R}^k)$: ce sont des fonctions continues si $1 \leq p < \frac{2k}{k+1}$ d'autant plus régulière que p est proche de 1.

b) Problèmes de multiplicateurs de $\mathcal{H}(\nu; p ; \omega)$ (ou de ν-convoluteurs de $L^p(\mathbb{R}^+ ; x^{2\nu+1}\omega(x)\,dx)$ pour la ν-convolution). Lorsque p est proche de 2 (par exemple dans le cas "géométrique", $\frac{2k}{k+1} < p < \frac{2k}{k-1}$) les résultats du chap. I sont en fait conséquence d'un travail de D.Guy (Trans. Amer. Math. Soc. 97 - 1960) qui donne une classe de multiplicateurs de $\mathcal{H}(\nu ; p)$ de type Marcinkiewicz.

c) Comparaison des comportements à l'infini des transformées de Fourier et de Hankel d'ordre ν d'une distribution à support compact dans $]0, +\infty[$ et applications.

3. Dans les chapitres suivants, on étudie des problèmes différents encore que leur motivation ait parfois son origine dans le problème initial pour p = 1.

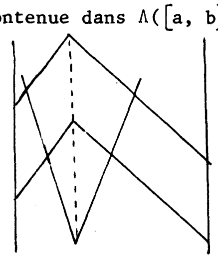
Le chapitre III a d'ailleurs pour fil conducteur des applications du chap. I. Soit ω un poids convenable sur $\mathbb{R}^k$ ou $\mathbb{Z}^k$ et $A(\mathbb{R}^k ; \omega)$ (resp. $A(\mathbb{T}^k;\omega)$) l'espace des transformées de Fourier des fonctions sommables dans $\mathbb{R}^k$ (resp. $\mathbb{Z}^k$) par rapport à la mesure $\omega(t)dt$. On étudie quelques aspects -précisés- du problème vague suivant: comment reconnaître une fonction de $A(\mathbb{R}^k)$ à partir de renseignements sur ses restrictions à certaines sous-variétés de $\mathbb{R}^k$ (par exemple des sous-espaces vectoriels ou affines)? On est conduit à étudier systématiquement la croissance en $|n|$ de $\|e^{inf}\|_{A(\mathbb{T}^k ; \omega)}$. On se limite pour simplifier aux cas où le poids est soit radial $\omega(|n|)$, soit produit tensoriel de k **poids** dépendant d'une seule variable (avec de plus des hypothèses commodes de croissance sur les poids). On obtient des majorations fines de la norme d'une fonction f de $A(\mathbb{T}^k ; \omega)$ en fonction des normes dans $L^2(\mathbb{T}^k)$ des dérivées partielles d'un ordre convenable de f. Ces résultats apparaissent comme des inclusions avec un contrôle fin de la dépendance des normes, de certains espaces espaces $H^s(\Omega)$, de la théorie des équations aux dérivées partielles dans les espaces $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^k ; \omega)$.

On obtient ainsi des majorations de $\|e^{inf}\|$ et en application dans certains cas des résultats de calcul symbolique non analytique sur $A(\mathbb{T}^k ; \omega)$. Par une autre technique on obtient des minorations de $\|e^{inf}\|$ et en application des résultats sur les endomorphismes assez réguliers de $A(\mathbb{T}^k ; \omega)$.

En utilisant I, on obtient alors des résultats "locaux" sur le calcul symbolique et les endomorphismes de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; 1 ; \omega)$, en particulier sur les sous-algèbres de fonctions multiradiales $\mathcal{R}(k_1, \ldots, k_q)$ de $A(\mathbb{R}^k)$. La recherche des <u>endomorphismes globaux</u> de $\mathcal{R}(k_1, \ldots, k_q)$ demande une connaissance au voisinage de zéro des fonctions de $\mathcal{H}(\nu;\omega)$. On donne des indications sur ce problème.

4. Le chapitre IV est consacré à des cas très particuliers du problème suivant. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace E localement compact telle que le saturé d'un compact de E soit compact. Soit X un espace de Banach de fonctions à valeurs scalaires continues sur E, on se propose l'étude du sous-espace $X_{\mathcal{R}}$ fermé dans X des fonctions qui respectent $\mathcal{R}$. On considère dans $\mathbb{R}^k$ une sous-variété S de classe C^0 étoilée par rapport à un point du complémentaire dans le sens que toute demi-droite issue de ce point (pris pour origine) coupe S en un point unique à distance finie. Les classes de $\mathcal{R}$ sont les homothétiques de S dans les homothéties positives de centre O. On associe à $\mathcal{R}$, l'application r de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que r(t) soit le rapport d'homothétie qui transforme S en l'homothétique de S passant par le point t de $\mathbb{R}^k$. E est une "couronne d'épaisseur $[a, b]$" définie par $a \leqslant r(t) \leqslant b$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$. On étudie la sous-algèbre fermée de A(E), des fonctions qui respectent $\mathcal{R}$ (sur E), $A_{\mathcal{R}}(E)$ qui est isomorphe, par transport de structure, à l'algèbre de Banach $\Lambda([a, b])$ des fonctions φ ("profils") continues sur $[a, b]$ telles que $\varphi \circ r$ appartienne à A(E). Lorsque S est assez régulière à courbure gaussienne finie différente de zéro en tout point (classe (Σ)), Y. Domar a récemment démontré que la situation est analogue à celle de la sphère: $\Lambda(\mathbb{R}^+)$ et $A(\mathbb{R} ; (1 + |x|)^{\frac{k-1}{2}}$ coïncident localement sur $]0, +\infty[$. Le cas étudié ici est celui où S est une surface polyédrale de "type minimal" dans le sens que de chaque sommet partent k arêtes (classe $(\mathcal{P})$). On démontre que les algèbres $A_{\mathcal{R}}(\mathbb{R}^k)$ ont la même classe de profils localement sur $]0, +\infty[$ lorsque S décrit $(\mathcal{P})$. Dès lors il est techniquement commode de prendre pour S la surface cubique d'équation $r(t) = \sup_{1 \leqslant j \leqslant k} |t_j| = 1$ et de se ramener à une algèbre $A_{\mathcal{R}_0}(T^k)$, où $[-\pi, \pi]^k$ est le modèle de T^k.

On montre que l'algèbre de restrictions $A([a, b] ; (\log|n|)^{k-1})$ est la "plus grosse" algèbre à poids contenue dans $\Lambda([a, b])$. Mais l'<u>inclusion est stricte</u>.



Un autre point de vue sur les algèbres $A_{\mathcal{R}}(E)$ (symbolisé par la figure) provient de ce que "localement" homothéties et translations convenables " coïncident" pour une surface polyédrale ..

On montre aisément que les fonctions de $\Lambda([a, b])$ coïncident localement sur $]a,b[$ avec les fonctions d'une algèbre à poids $A(\mathbf{T} ;\omega)$; ce poids ne peut donc être que $(\log|n|)^{k-1}$. Mais alors E étant une couronne compacte disjointe de l'origine, associée à $\mathcal{R}$, il existe des fonctions de $A_{\mathcal{R}}(E)$ donc aucun prolongement en fonction de $A(\mathbf{R}^k)$ ne respecte $\mathcal{R}$.

On obtient aussi l'évaluation $\|e^{in\alpha}\|_{A(\mathbf{T}^q)} \sim (\log|n|)^q$ lorsque α est linéaire par morceaux de type minimal (de chaque sommet partent k arêtes) qui reste une conjecture dans le cas général.

On termine par un appendice relatif aux différences de croissance entre $\|\sin nf\|_{A(\mathbf{T}^k)}$ et $\|\cos nf\|_{A(\mathbf{T}^k)}$. Le résultat principal est que si $\|\cos nf\|_{A(\mathbf{T}^k)}$ est bornée, f ne dépend que d'une coordonnée et est une fonction linéaire par morceaux à pente de valeur absolue entière (si le modèle de $\mathbf{T}$ est $[0, 2\pi]$) constante, les points anguleux étant des points de réflexion sur des niveaux $y = q\pi$, q entier. De plus lorsque f est linéaire par morceaux dans $A(\mathbf{T})$ c'est le seul cas où il puisse y avoir une différence de croissance entre $\|\sin nf\|_{A(\mathbf{T})}$ et $\|\cos nf\|_{A(\mathbf{T})}$.

-=-

Additif sur épreuve (1er octobre 1971) :

Page 45 , paragraphe 2.1., après la proposition 5' , le texte cite deux problèmes ouverts.

La réponse au premier problème a été apportée par Charles Fefferman : elle est négative pour $k \geqslant 2$ (sauf si $p = 2$).

En conséquence, pour le deuxième problème, l'inclusion est stricte dans les mêmes conditions.

-=-

CHAPITRE 1

Transformations de Hankel et Transformation de Fourier.

1.1. Les fonctions considérées sont ici et dans la suite, à valeurs complexes, sauf mention spéciale.

$\mathcal{S}(R)$ est l'espace des fonctions définies sur R, indéfiniment différentiables à décroissance rapide. On désigne par $\mathcal{S}_{paire}(R)$ le sous-espace des fonctions paires de $\mathcal{S}(R)$, et on l'identifie naturellement à un espace de fonctions définies sur R^+.

Pour tout nombre réel ν supérieur ou égal à $-\frac{1}{2}$, J_ν est la fonction de Bessel d'ordre ν - Pour tout ce qui concerne les fonctions de Bessel, on pourra se référer à l'ouvrage de G.Watson: Theory of Bessel functions, réédition Cambridge 1966 -

Nous prenons pour définition de la transformation de Hankel d'ordre ν, notée H_ν celle qui fait correspondre à toute fonction φ de $\mathcal{S}_{paire}(R)$, la fonction $H_\nu(\varphi)$ définie sur R^+:

$$(H_\nu(\varphi))(x) = \int_0^{+\infty} x^{-\nu} y^{\nu+1} J_\nu(xy)\varphi(y)\, dy.$$

Cette présentation diffère de la présentation de Hankel, [12], ainsi que de la présentation de N. Sonine [34] reprise par C. Herz [14] . C'est ici la mieux adaptée à l'objet de ce travail. Pour l'étude des propriétés fondamentales de H_ν, on pourra se référer au cours de C. Herz [14], par un passage facile de l'une à l'autre présentation.

En particulier, a lieu la propriété fondamentale:

<u>Théorème (Tricomi): H_ν est un isomorphisme de $\mathcal{S}_{paire}(R)$ sur lui-même, et H_ν^2 est l'identité.</u>

Le sous-espace $\mathcal{S}'_{paire}(R)$ de $\mathcal{S}'(R)$, des distributions tempérées paires s'identifie au dual du sous-espace $\mathcal{S}_{paire}(R)$ de $\mathcal{S}(R)$, pour le produit scalaire $<S,\varphi>$ au sens de $(\mathcal{S}', \mathcal{S})$.

Soit H_ν^t l'isomorphisme transposé de H_ν, de $\mathcal{S}'_{paire}(R)$ sur lui-même défini par

$$< H_\nu^t(S), \varphi > = < S , H_\nu(\varphi) >$$

pour tous les éléments S de $\mathcal{S}'_{paire}(R)$ et φ de $\mathcal{S}_{paire}(R)$. (On remarque qu'avec cette définition $H_\nu^t(\varphi)$ est différent de $H_\nu(\varphi)$).

Considérons l'espace $\mathcal{S}'(]0, +\infty[)$ des distributions tempérées sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire les distributions sur $]0, +\infty[$ prolongeables (d'une infinité de façons) en distributions tempérées paires sur R.

<u>Soit $\sum'_\nu(R^+)$ le sous-espace de $\mathcal{S}'(]0, +\infty[)$ formé des fonctions f -définies presque partout - telles que la distribution sur $]0, +\infty[$, $x^{2\nu+1}f$, admette un prolongement (unique) en une fonction appartenant à $\mathcal{S}'_{paire}(R)$, encore notée $x^{2\nu+1}f$ par abus de langage.</u>

On appellera pré-transformation de Hankel d'ordre ν, l'application injective $\tilde{H}_\nu$ de $\sum'_\nu(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{S}'_{\text{paire}}(\mathbb{R})$ définie par:

$$\tilde{H}_\nu(f) = H^t_\nu(x^{2\nu+1} f)$$

et transformation de Hankel d'ordre ν, l'application (non injective) de $\sum'_\nu(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{S}'(]0, +\infty[)$, notée par abus de langage H_ν, définie par:

$$H_\nu(f) = y^{-2\nu-1} H^t_\nu(x^{2\nu+1} f).$$

On vérifie aisément que la restriction de cette dernière application à $\mathcal{S}_{\text{paire}}(\mathbb{R})$, "coïncide" - dans un sens évident - avec l'isomorphisme de $\mathcal{S}_{\text{paire}}(\mathbb{R})$ sur lui-même défini au début.

__Remarques__: 1. On montre facilement que le noyau de H_ν est l'espace vectoriel engendré par les fonctions x^{2n}, $n = 0, 1, \ldots$

2. Les applications $\tilde{H}_\nu$ et donc aussi H_ν, peuvent bien sûr, être définies de façon analogue sur le sous-espace de $\mathcal{S}'(]0, +\infty[)$ formé des distributions qui au voisinage de l'origine coïncident avec une fonction de $\sum'_\nu(\mathbb{R}^+)$.

1.2. Pour $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$, $1 \leqslant p < +\infty$, définissons une classe de "poids" ω par les propriétés (P_1) suivantes:

i) ω est une application continue de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$

ii) ω^{-1} est à croissance lente à l'infini

iii) pour $p > 1$, la fonction $x^{2\nu+1}\,\omega^{-\frac{1}{p-1}}$ est localement sommable à l'origine, et pour $p = 1$, on a $\liminf\limits_{x \to 0} \omega(x) > 0$.

X étant un espace topologique localement compact, $d\mu$ une mesure de Radon positive sur X, on note $L^p(X ; d\mu)$ l'espace de Banach des classes de fonctions de puissance p-ième sommable par rapport à la mesure $d\mu$ la norme étant:

$$\| f\| = \left[\int_X |f|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}} .$$

__Considérons l'espace de Banach__ $L^p(\mathbb{R}^+; x^{2\nu+1}\omega(x)dx)$. __Les propriétés__ (P_1) __assurent que cet espace est contenu dans__ $\sum'_\nu(\mathbb{R}^+)$. __Soit__ $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p ; \omega)$ __son image par la pré-transformation de Hankel d'ordre__ ν, $\tilde{H}_\nu$. __Un élément__ $F = \tilde{H}_\nu(f)$ __de__ $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p ;\omega)$ __est donc une distribution tempérée paire sur__ $\mathbb{R}$ __définie par son produit scalaire avec une fonction quelconque__ φ __de__ $\mathcal{S}_{\text{paire}}(\mathbb{R})$:

$$(1) \qquad < F , \varphi > = < y^{2\nu+1}f, H_\nu(\varphi) > = 2 \int_{\mathbb{R}^+} dy \int_{\mathbb{R}^+} (xy)^{\nu+1} J_\nu(xy)\varphi(x) f(y)\, dx .$$

__Par transport de structure,__ $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ; p ; \omega)$ __est un espace de Banach, la norme de l'élément__ $F = \tilde{H}_\nu(f)$ __étant__

$$(2) \qquad \| F\| = \|f\| = \left[\int_0^{+\infty} |f(x)|^p \, x^{2\nu+1} \, \omega(x)dx \right]^{\frac{1}{p}} .$$

Soit $\mathcal{H}(\nu;\ p;\ \omega)$ le sous-espace de $\mathcal{S}'(]0,\ +\infty[)$ image de $L^p(\mathbb{R}^+\ ;\ x^{2\nu+1}\omega(x)\ dx)$ par la transformation de Hankel d'ordre ν , H_ν .

La structure du noyau de H_ν montre:

Proposition: La condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de H_ν à $L^p(\mathbb{R}^+\ ;\ x^{2\nu+1}\omega(x)dx)$ soit injective, est que aucune fonction $x^{2\nu+1+np}\omega(x)$, $n \geqslant 0$, ne soit sommable sur $\mathbb{R}^+$.

Lorsque cette condition est remplie, on peut munir $\mathcal{H}(\nu;\ p;\ \tilde{\omega})$ par transport de structure, d'une structure d'espace de Banach isométrique à $\mathcal{H}(\nu;\ p;\ \omega\ )$ avec la norme

$$\| H_\nu(f) \| = \|f\| .$$

C'est la cas si $\liminf\limits_{x\to+\infty} \omega(x)>0$; en particulier lorsque $p = 1$, f étant une fonction de $L^1(\mathbb{R}^+;\ x^{2\nu+1}\omega(x)dx\ )$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (xy)^{\nu+1}J_\nu(xy)f(y)dy$$

définit une fonction continue sur $[0,\ +\infty[$ (car $L(z) = z^{-\nu}J_\nu(z)$ est une fonction entière bornée sur l'axe réel) qui d'après (1) est $\tilde{H}_\nu(f)$. La transformée de Hankel $H_\nu(f)$ est donc une fonction continue sur $]0,\ +\infty[$

$$H_\nu(f)(x) = \int_0^{+\infty} x^{-\nu}y^{\nu+1}J_\nu(xy)f(y)dy$$

prolongeable en une fonction continue sur $[0,\ +\infty[$, la valeur en 0 étant

$$H_\nu(f)(0) = \int_0^{+\infty} y^{2\nu+1}f(y)dy$$

(car $L(0) = 1$). Remarquons que $H_\nu(f)(x)$ tend vers zéro lorsque $x \longrightarrow \infty$, car il en est de même pour $J_\nu(xy)$, $y > 0$ fixé.

Ces espaces ou des espaces analogues définis à partir d'une autre présentation de la transformation de Hankel ont été introduits et étudiés du point de vue de leurs multiplicateurs par de nombreux auteurs en particulier: E. Titchmarsch [38], G. Wing [41], C.Herz [15], D.Guy [11]. Ce dernier auteur, dans une étude des multiplicateurs de $\mathcal{H}(\nu;\ p;\ x^a)$ pour $1 < p < +\infty$ et $\frac{4(\nu+1)+2a}{2\nu+3} < p < \frac{4(\nu+1)+2a}{2\nu+1}$ démontre un résultat intermédiaire (lemme 8C) qui entraîne sous ces hypothèses, avec de plus $a = 0$, les théorèmes I et II qui font l'objet de ce chapitre. Nous les établiront sous des hypothèses plus générales par une méthode toute différente. Nous reviendrons au chapitre II sur les résultats de D. Guy.

1.3. L'origine de ces problèmes ainsi que l'intérêt de l'étude des espaces $\mathcal{H}(\nu;p;\omega)$ apparaissent lorsque ν est un demi-entier, $\nu = \frac{k-2}{2}$, où k est un entier supérieur ou égal à 1. L'espace $L^p(\mathbb{R}^+\ ;\ x^{2\nu+1}\omega(x)dx\ )$ s'identifie alors au sous-espace des fonctions invariantes par rotation, dites "radiales", de $L^p(\mathbb{R}^k;\ \omega(|t|)dt\ )$, où t désigne un point de l'espace euclidient $\mathbb{R}^k$, $|t| = (\sum_{j=1}^{k} |t_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ la distance euclidienne à l'origine, et $\omega(|t|)dt$ la mesure "radiale" absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dt sur $\mathbb{R}^k$, de densité $\omega(|t|)$.

Le choix de ω assure que l'espace $L^p(R^k ; \omega(|t|) dt)$ est tempéré. Soit $\mathfrak{F}(R^k;p;\omega)$ l'espace des transformées de Fourier muni de la structure d'espace de Banach obtenue par transport de structure. Un élément $G = \mathfrak{F}(g)$ est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^k$ définie par son produit scalaire avec une fonction quelconque φ C^∞ à décroissance rapide à l'infini dans $\mathbb{R}^k$:

$$< G, \varphi > = \int_{\mathbb{R}^k} du \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i\, t.u}\varphi(t)g(u)dt\, du$$

où $t.u = \sum_{j=1}^{k} t_j u_j$.

La norme de G est:

$$\| G \| = \| g \| = \left[\int_{\mathbb{R}^k} |g(t)|^p \omega(|t|)dt\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Le sous-espace fermé $\mathcal{R}(k; p; \omega)$ des éléments invariants par rotation, image par la transformation de Fourier des fonctions radiales de $L^p(\mathbb{R}^k; \omega(|t|)dt)$, est isométrique comme espace de Banach à l'espace $\tilde{\mathcal{H}}(\nu;p;\omega)$: à tout élément $F = \tilde{H}_\nu(f)$ de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu;p;\omega)$ correspond bijectivement $G = \mathfrak{F}(g)$ de $\mathcal{R}(k;p;\omega)$ où g est la fonction de $L^p(\mathbb{R}^k; \omega(|t|)dt)$ dont le "profil" est f, c'est-à-dire que

$$g(t) = f(|t|)$$

et on a:

$$\|F\|_{\tilde{\mathcal{H}}(\nu;p;\omega)} = C(k)\, \|G\|_{\mathcal{R}(k;p;\omega)}$$

où la constante C(k) dépend de la dimension k et de la convention adoptée pour la transformation de Fourier.

On dira que F est le <u>pré-profil</u> de G et que la distribution définie sur $]0, +\infty[$ $x^{-2\nu-1}F$, <u>est le profil de G dans le complémentaire de l'origine</u>.

Lorsque x^{k-1+np} (x) n'est sommable sur $\mathbb{R}^+$ pour aucun $n \geqslant 0$, l'espace $\mathcal{R}(k;p;\omega)$ est aussi isomorphe à l'espace des profils $\mathcal{H}(\nu;p;\omega)$, la correspondance bijective entre une fonction G de $\mathcal{R}(k;p;\omega)$ et son profil Φ étant $G(t) = \Phi(|t|)$ pour tout t de $\mathbb{R}^k$.

Le but de ce chapitre est de préciser, avec des restrictions convenables sur ω , <u>la structure locale dans le complémentaire de l'origine, de ces profils, ou ce qui revient au même, de ces pré-profils</u>.

2.1. Soit $\Omega(p;\nu)$ la classe des poids ω qui, outre les conditions (P_1), vérifient les conditions supplémentaires (P_2):

i) ω est à croissance lente à l'infini

ii) $\varpi(x) = (1 + x)^{(2-p)(\nu+\frac{1}{2})}\,\omega(1 + x)$ est équivalent à une fonction ϖ_1 monotone lorsque x est assez grand, et il existe une constante C telle que pour tout couple (x, y) de nombres de $\mathbb{R}^+$ on ait:

$\varpi(x + y) \leq C\,\varpi(x)\,\varpi(y)$ si ϖ_1 croit à l'infini

$\varpi(x + y) \geq C\,\varpi(x)\,\varpi(y)$ si ϖ_1 décroit à l'infini

Equivalent est pris ici et dans la suite au sens faible: f(x) et g(x) à valeurs réelles sont équivalents lorsque x tend vers x_o (fini ou infini) s'il existe deux constantes strictement positives A et B telles que

$$Af(x) \leq g(x) \leq Bf(x)$$

lorsque x est assez proche de x_o.

Par exemple un poids équivalent à l'infini à $x^a(\log x)^b$ où a et b sont réels quelconques, satisfait (P_2).

Le théorème I donne une description locale dans le complémentaire de l'origine des éléments de $\mathcal{H}(\nu;\, p;\, \omega)$ en termes de transformée de Fourier d'un espace de fonctions sur $\mathbb{R}$, associé de façon simple. $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$ étant l'espace des fonctions C^∞ à support compact contenu dans $]0, +\infty[$, on a le:

<u>Théorème I</u>:

<u>Ω appartenant à la classe $\Omega(p;\nu)$, $1 \leq p < +\infty$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$, pour toute fonction M de $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$, $F \longmapsto MF$ est une application linéaire continue de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu;p;\omega)$ dans l'espace de Banach $\mathcal{F}(p;\, \varpi)$ des transformées de Fourier de $L^p(\mathbb{R};\, \varpi(|x|)\, dx)$.</u>

Démontrons d'abord:

<u>Lemme 1. ε étant égal à +1 (resp. -1) si ϖ_1 croît (resp. décroît) à l'infini, $\mathcal{F}(1\,;\, \varpi^{\varepsilon/p})$ est contenu avec une topologie plus fine dans l'espace des multiplicateurs de $\mathcal{F}(p;\, \varpi)$.</u>

Soit $\mathcal{F}(f)$ dans $\mathcal{F}(p;\, \varpi)$ et $\mathcal{F}(m)$ dans $\mathcal{F}(1;\, \varpi^{\varepsilon/p})$. Considèrons

$$(f * m)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)m(y)dy$$

intégrale vectorielle portant sur la fonction de x, f(x-y), élément de $L^p(\mathbb{R}\,;\, \varpi(|x|)\, dx)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|^p \varpi(|x|)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|^p \varpi(|u+y|)du$$

il suffit pour conclure d'utiliser les propriétés de ϖ :

- si ϖ_1 croît à l'infini, $\varpi(|u+y|) \leq C_1\, \varpi(|u| + |y|) \leq C_2\, \varpi(|u|)\, \varpi(|y|)$
- si ϖ_1 décroît à l'infini, $\varpi(|u+y|) \leq C_1\, \varpi(\,||u| - |y||\,) \leq C_2\, \dfrac{\varpi(|u|)}{\varpi(|y|)}$.

Notons en corollaire de ce lemme, le fait bien connu que pour $p = 1$, lorsque ϖ_1 croît de façon lente à l'infini, $\mathcal{S}(1\ ;\ \varpi)$ est une algèbre de Banach pour le produit ponctuel, transformée de Gelfand de l'algèbre de Banach de convolution $L^1(\mathbb{R}\ ;\ \varpi(|x|dx)$. Lorsque $\nu = -\frac{1}{2}$ la démonstration du théorème est très simple. Pour $x > 0$,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x\ .$$

Un élément F de $\mathcal{H}(-\frac{1}{2}\ ;\ p\ ;\ \omega)$ est défini par le produit scalaire avec une fonction quelconque φ de $\mathcal{S}_{\text{paire}}(\mathbb{R})$:

$$< F\ ,\ \varphi > = 2\int_{\mathbb{R}^+} dy \int_{\mathbb{R}^+} \cos xy\ \varphi(x)\ f(y)\ dx$$

où $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|^p\ \omega(x)dx < +\infty$.

Ceci montre que $\mathcal{H}(-\frac{1}{2}\ ;\ p\ ;\ \omega)$ s'identifie au sous-espace des fonctions paires transformées de Fourier de $L^p(\mathbb{R}\ ;\omega(|x|)dx\ )$. Dans le cas particulier où $\underline{\lim}_{x\to 0}\ \omega(x)>0$ ce dernier espace est contenu dans $L^p(\mathbb{R}\ ;\ \omega(1+|x|)\ dx)$ et le lemme 1 permet de conclure. Pour un poids quelconque de $\Omega(p\ ;\ \nu)$ on peut décomposer F en la somme des deux distributions G et H définies par les produits scalaires

$$< G\ ,\ \varphi > = \int_0^A dy \int_0^{+\infty} \cos xy\ \varphi(x)\ f(y)dx$$

$$< H\ ,\ \varphi > = \int_A^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \cos xy\ \varphi(x)\ f(y)\ dx$$

où $A > 0$ est une constante arbitraire.

Il est bien connu que si T est une distribution à support compact sur $\mathbb{R}$, et $K(x, y)$ une fonction analytique en les deux variables x et y, $< T_y, K(x,y) >$ est une fonction analytique en x. Donc G coïncide sur $[0, +\infty[$ avec la fonction analytique

$$\int_0^A \cos xy\ f(y)dy\ .$$

M étant la fonction de $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$ fixée, MG appartient aussi à cet espace et donc à fortiori à $\mathcal{S}(p\ ;\ \varpi)$.
H est la transformée de Fourier de la fonction paire g définie par $g(y) = f(|y|)$ pour $|y| > A$, $g(y) = 0$ ailleurs. g appartient évidemment à $L^p(\mathbb{R}\ ;\ \omega(1 + |x|)dx\ )$. Le lemme 1 permet de conclure pour MH.

2.2. Pour le cas général $\nu > -\frac{1}{2}$, on utilise le développement asymptotique de $J_\nu(z)$, [40] , valable pour tout entier $N > 0$ dans une demi-bande $\mathcal{B}$ du plan complexe définie par $u > 0$, $|v| \leqslant c^{te}$ où u et v sont respectivement les parties réelles et imaginaires de z:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{0 \leq j \leq \frac{N-1}{2}} a_j z^{-2j}\right) \cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\sum_{1 \leq j \leq \frac{N}{2}} b_j \, z^{-2j+1}\right) \sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] + \mathbb{R}_N(z),$$

où les a_j et b_j sont des constantes ($a_o = 1$), et où $\mathbb{R}_N(z)$ est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$ avec $|\mathbb{R}_N(z)| = O(|z|^{-N-\frac{1}{2}})$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini dans $\mathfrak{D}$.

On a la même estimation pour une dérivée de $\mathbb{R}_N(z)$ à un ordre quelconque (d'après la formule de Cauchy). $F = \tilde{H}_\nu(f)$ étant défini par (1.2.1) et (1.2.2), on décompose F, comme dans le cas $\nu = -\frac{1}{2}$, en la somme des deux éléments G et H de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu;p;\omega)$ définis par les produits scalaires avec une fonction quelconque φ de $\mathcal{S}_{paire}(R)$:

$$< G \,,\, \varphi >= \int_o^A dy \int_o^{+\infty} (xy)^{\nu+1} \, J_\nu(xy)\varphi(x)f(y)dx$$

$$< H \,,\, \varphi >= \int_A^{+\infty} dy \int_o^{+\infty} (xy)^{\nu+1} \, J_\nu(xy) \, \varphi(x)f(y)dx$$

où $A > 0$ est une constante arbitraire.

Pour G qui est la fonction C^∞ sur $]0, +\infty[$

$$x^{2\nu+1} \int_o^A x^{-\nu} y^{\nu+1} \, J_\nu(xy)f(y)dy \;,$$

(car $z^{-\nu}J_\nu(z)$ est analytique) on conclut comme dans le cas $\nu = -\frac{1}{2}$.

Pour étudier MH, il suffit de se limiter dans la définition de H aux fonctions φ C^∞ à support contenu dans un voisinage compact fixé, disjoint de 0, du support de M.

On utilise alors le développement (3) en choisissant N assez grand pour que

$$L(x) = \int_A^{+\infty} (xy)^{\nu+1} \, \mathbb{R}_N(xy)f(y)dy$$

soit une fonction ayant des dérivées continues d'un ordre suffisant et qu'ainsi ML appartienne à fortiori à $\mathcal{F}(p;\varpi)$.

N étant ainsi choisi (ne dépendant que de (ν; p ; ω)) il suffit de vérifier que l'élément T_k de $\mathcal{S}'_{paire}(\mathbb{R}^+)$ défini par le produit scalaire:

$$< T_k \,,\, \varphi > = \int_A^{+\infty} dy \int_o^{+\infty} (xy)^{\nu+1} \, e^{ixy}(xy)^{-k-\frac{1}{2}} \varphi(x)f(y)dx$$

est tel que MT_k appartient à $\mathcal{F}'(p\,;\,\varpi)$ pour tout $k \geq 0$. Mais l'hypothèse

$$\int_A^{+\infty} |f(x)|^p \, x^{2\nu+1} \, \omega(x)dx < +\infty$$

assure que:

$$\int_A^{+\infty} |x^{\nu + \frac{1}{2} - k} f(x)|^p (1+x)^{(2-p)(\nu + \frac{1}{2})} \omega(1+x)\,dx < +\infty \quad .$$

C'est-à-dire que U_k transformée de Fourier de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$g(x) = x^{\nu + \frac{1}{2} - k} f(x) \text{ pour } x \geqslant A \text{ , } g(x) = 0 \text{ pour } x < A \text{ ,}$$

appartient à $\mathcal{F}(p\ ;\ \varpi)$. Donc MT_k qui est égal à

$$x^{\nu + \frac{1}{2} - k} M(x) U_k$$

appartient à $\mathcal{F}(p;\ \varpi)$ d'après le lemme 1.

La continuité de l'application $F \longmapsto MF$ résulte de ce que son graphe est fermé. En effet F_n tendant vers F dans $\tilde{\mathcal{H}}(\nu;\ p;\ \omega)$ et MF_n tendant vers G dans $\mathcal{F}(p;\ \varpi)$ on a pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(R)$:

$$< MF - G\ ,\ \varphi > = \lim_{n \to \infty} < MF - MF_n\ ,\ \varphi >$$

car la topologie de $\mathcal{F}(p\ ;\ \varpi)$ est plus fine que la topologie de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Puis

$$\lim_{n \to \infty} < F - F_n\ ,\ M\varphi > = 0$$

car la topologie de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ p\ ;\ \omega)$ est plus fine que la topologie de $\mathcal{S}'_{\text{paire}}(\mathbb{R})$.

3.1. Il n'est pas possible d'obtenir une réciproque du théorème I conservant la généralité des poids $\Omega(p\ ;\ \nu)$. En effet ϖ ne fait pas intervenir le comportement de ω à l'origine.

$\Omega(p\ ;\nu)$ contient des poids qui tendent vers l'infini arbitrairement vite lorsque x tend vers 0. Or, une réciproque au théorème I impose que $\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ p\ ;\ \omega)$ contienne les fonctions à support compact assez régulières, ce qui n'est possible que si $x^{2\nu+1}\omega(x)$ est localement sommable à l'origine.

Nous allons voir que sous cette condition, avec une restriction supplémentaire le théorème I admet effectivement une réciproque.

Considèrons les applications possèdant les propriétés (P_3):

i) ω est continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs strictement positives

ii) $\omega(x)$ est monotone lorsque x est assez grand, et il existe une constante C telle que pour tout couple (x, y) de nombres de $\mathbb{R}^+$ on ait:

$$\omega(x + y) \leqslant C\ \ \omega(x)\ \omega(y) \quad \text{si } \omega \text{ croît à l'infini}$$

$$\omega(x + y) \geqslant C\ \ \omega(x)\ \omega(y) \quad \text{si } \omega \text{ décroît à l'infini .}$$

<u>Désignons par $\Omega_0(p\ ;\ \nu)$ la classe des applications ω de $\Omega(p\ ;\ \nu)$ telles que $x^{2\nu+1}\omega(x)$ soit localement sommable à l'origine, et que ω soit équivalent à l'infini à une application possèdant les propriétés (P_3).</u>

Il est clair que les propriétés (P_2) et (P_3) ne sont pas indépendantes. Nous ne cherchons pas à faire les hypothèses les meilleures sur ω mais celles qui techniquement commodes, sont satisfaites par les poids assez réguliers. Par exemple, une application ω continue de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$, telle que $x^{2\nu+1} [\omega(x)]^{-\frac{1}{p-1}}$ (pour $p > 1$) et $x^{2\nu+1}\omega(x)$ soient localement sommables à l'origine, et équivalente à l'infini à $x^a(\mathrm{Log}\ x)^b$, a et b nombres réels quelconques, appartient à $\Omega_o(p;\nu)$.

On a, avec les notations de 2.1, le

Théorème II:

<u>ω étant un poids de la classe $\Omega_o(p ; \nu)$, $1 \leqslant p < +\infty$ et $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$, pour toute fonction M de $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$, $F \longmapsto MF$ est une application linéaire continue de $\mathcal{F}^1(p ; \varpi)$ dans $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p; \omega)$.</u>

On peut pour la démonstration supposer que ω possède lui-même les propriétés (P_3). En effet si ω_j , $j = 1, 2$, sont deux poids de $\Omega_o(p ; \nu)$ équivalents à l'infini, et si $F = \tilde{H}_\nu(f)$ est à support compact et appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p ; \omega_1)$, la convergence de l'intégrale $\int_o^{+\infty} |f(x)|^p \omega_1(x)dx$ entraîne en utilisant seulement le fait que f est borné sur tout compact, la convergence de

$$\int_o^{+\infty} |f(x)|^p \omega_2(x)dx$$

ce qui montre que F appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ; p ; \omega_2)$.

Comme pour le théorème I, la démonstration est très simple lorsque $\nu = -\frac{1}{2}$. On a déjà vu en 2.1. que $\mathcal{H}(-\frac{1}{2} ; p ; \omega)$ s'identifie au sous-espace des fonctions paires transformées de Fourier de $L^p(\mathbb{R} ;\omega(|x|)dx)$. Mais ce dernier espace est ici identique à $L^p(\mathbb{R} ; \varpi(|x|)dx)$. On décompose un élément F de $\mathcal{F}^1(p; \varpi)$ en $F = F_1+F_2$ où F_1 est pair et F_2 impair. A toute M de $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$, associons les prolongements M_1 paire, M_2 impaire fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. MF peut être considéré comme la restriction à $\mathbb{R}^+$ de la distribution paire $M_1F_1 + M_2F_2$, qui appartient à $\mathcal{F}^1(p ; \varpi)$ d'après le lemme 1.

3.2. Dans le cas général $\nu > -\frac{1}{2}$, démontrons d'abord, lorsque ω possède les propriétés (P_3), le

<u>Lemme 2</u>: <u>ε étant égal à +1 (resp. -1) si ω croît (resp. décroît) à l'infini, $\mathcal{H}(\nu; 1; \omega^{\varepsilon/p})$ est contenu avec une topologie plus fine dans l'espace des multiplicateurs de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p; \omega)$.</u>

Il y a une démonstration très simple lorsque $\nu = \frac{k-2}{2}$, k entier $\geqslant 1$. Selon 1.3., on identifie $\mathcal{H}(\nu ; p; \omega)$ avec $\mathcal{R}(k ; p; \omega)$.) Soit F (resp. G) dans $\mathcal{H}(\nu;1;\omega^{\varepsilon/p})$ (resp. $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ;p;\omega)$) le profil (resp. le pré-profil) de la transformée de Fourier d'une fonction radiale f (resp. g) de $L^1(\mathbb{R}^k ; \omega^{\varepsilon/p}(|t|)dt)$ (resp. $L^p(\mathbb{R}^k;\omega(|t|)dt)$.

On considère l'intégrale vectorielle:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}^k} g(t-u)f(u)du$$

où la fonction de t, g(t-u) appartient à $L^p(\mathbb{R}^k;\ \omega(|t|)dt)$.

$$\int_{\mathbb{R}^k} |g(t-u)|^p \omega(|t|)dt = \int_{\mathbb{R}^k} |g(v)|^p \omega(|u+v|)dv$$

et il suffit pour conclure d'utiliser les hypothèses sur ω :

si ω croît à l'infini $\omega(|u+v|) \leqslant C_1\ \omega(|u|+|v|) \leqslant C_2\ \omega(|u|)\omega(|v|)$

si ω décroît à l'infini $\omega(|u+v|) \leqslant C_1\omega(\ |u|-|v|) \leqslant C_2 \dfrac{\omega(|v|)}{\omega(|u|)}$.

La démonstration du lemme dans le cas général est plus délicate, et impose d'utiliser la ν-convolution sur $\mathbb{R}^+$ associée à la transformation de Hankel d'ordre ν:

Soit f, g deux éléments $\mathcal{L}'_\nu(\mathbb{R}^+)$, tels que le produit ponctuel $H_\nu(f).H_\nu(g)$ soit encore un élément de $\mathcal{L}'_\nu(\mathbb{R}^+)$: la ν-convolution fait correspondre au couple (f,g) l'élément de $\mathcal{G}'_\nu(]0, +\infty[)$ $\quad f \underset{\nu}{*} g = H_\nu(H_\nu(f)H_\nu(g))$.

Supposons que f et g soient des fonctions définies presque partout et que:

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} f(y)g(z)D_\nu(x,y,z)(yz)^{2\nu+1}\ dy\ dz$$

soit aussi une fonction définie presque partout, où

$$D_\nu(x,y,z) = C_\nu(xyz)^{-2\nu}\ \Delta^{2\nu-1}(x,y,z)$$

C_ν étant une constante ne dépendant que de ν , et $\Delta(x,y,z)$ la fonction égale à l'aire du triangle de côtés (x,y,z) lorsqu'il existe, et à zéro ailleurs.

Alors $f \underset{\nu}{*} g$ est une fonction égale pour presque tout x à h(x). Tout ceci est classique (voir par exemple D. Guy [11]). Notons la propriété de D_ν :

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} D_\nu(x,y,z)x^{2\nu+1}\ dx = 1\ .$$

Prenons f dans $L^1(\mathbb{R}^+\ ;\ x^{2\nu+1}\omega^{\varepsilon/p}(x)\ dx)$, g dans $L^p(\mathbb{R}^+\ ;\ x^{2\nu+1}\omega(x)dx\ )$ nous voulons montrer que $f \underset{\nu}{*} g$ appartient à ce dernier espace. Calculons:

$$||f \underset{\nu}{*} g||^p = \int_0^{+\infty} \omega(x)x^{2\nu+1} \left|\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} f(y)g(z)D_\nu(x,y,z)(yz)^{2\nu+1}\ dy\ dz\ \right|^p dx\ .$$

Lorsque p = 1, on utilise le théorème de Fubini:

$$||f \underset{\nu}{*} g|| \leqslant \int_{[\mathbb{R}^+]^3} |f(y)||g(z)|\omega(x)\ D_\nu(x,y,z)(xyz)^{2\nu+1}\ dx\ dy\ dz$$

D_ν n'est différent de zéro que si

$$|y - z| < x < y + z\ .$$

Dans ce domaine, si ω croît à l'infini , $\omega(x) \leqslant C_1\omega(y+z) \leqslant C_2\omega(y)\omega(z)$,

et si ω décroit à l'infini, $\omega(x) \leqslant C_1\omega(|y-z|) \leqslant C_2 \frac{\omega(z)}{\omega(y)}$.

Donc, en utilisant (1):

$$\|f \underset{\nu}{*} g\| \leqslant C \int_{\mathbb{R}^+}|f(y)|\omega^{\varepsilon}(y)dy. \int_{\mathbb{R}^+} |g(z)|\omega(z)dz.$$

Lorsque p > 1, utilisant l'inégalité de Hölder, on majore

$$\left|\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} f(y)\ g(z)\ D_\nu(x,y,z)(yz)^{2\nu+1}\ dy\ dz\right|^p \leqslant A(x).B$$

avec

$$A(x) = \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}|f(y)|\ |g(z)|^p\ D_\nu(x,y,z)|\omega(y)|^{\varepsilon(\frac{1}{p}-1)}(yz)^{2\nu+1}\ dy\ dz$$

$$B = \left[\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}|f(y)|D_\nu(x,y,z)\left[\omega(y)\right]^{\frac{\varepsilon}{p}}(yz)^{2\nu+1}\ dy\ dz\right]^{p-1} = \left[\int_{\mathbb{R}^+}|f(y)|\left[\omega(y)\right]^{\frac{\varepsilon}{p}}y^{2\nu+1}dy\right]^{p-1}.$$

On majore ensuite de façon analogue au cas p = 1:

$$\int_{\mathbb{R}^+} A(x)\omega(x)x^{2\nu+1}dx \leqslant C'\left[\int_{\mathbb{R}^+}|f(y)|\left[\omega(y)\right]^{\frac{\varepsilon}{p}}y^{2\nu+1}dy\right].\left[\int_{\mathbb{R}^+}|g(z)|^p\omega(z)z^{2\nu+1}dz\right]$$

si bien qu'en définitive:

$$\|FG\|_{\tilde{\mathcal{H}}(\nu;\ p\ ;\ \omega)} \leqslant C\|F\|_{\mathcal{H}(\nu;\ 1\ ;\ \omega^{\varepsilon/p})} \cdot \|G\|_{\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ p\ ;\ \omega)}$$

Notons en corollaire de ce lemme, le fait que pour p = 1, lorsque ω vérifie (P_3) et croît de façon lente à l'infini, $\mathcal{H}(\nu\ ;\ 1;\ \omega)$ est une algèbre de Banach pour le produit ponctuel, transformée de Gelfand, de l'agèbre de Banach $L^1(\mathbb{R}^+;\ x^{2\nu+1}\omega(x)dx)$ muni de la ν-convolution.

3.3. Démonstration du théorème II lorsque $\nu > -\frac{1}{2}$.

F transformée de Fourier de f, est une distribution tempérée sur R, définie par son produit scalaire avec une fonction quelconque φ de $\mathcal{S}(R)$:

$$(1) \qquad < F\ ,\ \varphi > = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(y)e^{-ixy}dy$$

avec (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\ \varpi(|x|)\ dx < +\infty$.

La fonction M de $\mathcal{D}(]0,+\infty[)$ étant fixée, pour étudier MF on peut supposer que F est déjà à support compact, f est alors une fonction entière; a étant une constante strictement positive telle que le support de M soit contenu dans $]a,+\infty[$, on peut aussi se limiter au cas où F est défini par

$$(1')\ < F\ ,\ \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_a^{+\infty} f(x)\ \varphi(y)e^{-ixy}\ dy\ .$$

Pour commodité technique, on multiplie F par la constante $\exp i(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4})$ et on décompose en une somme de quatre distributions du type F^* définie par:

$$(3)\qquad < F^*, \varphi > \; = \int_0^{+\infty} dx \int_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(y)\cos(xy - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})\,dy$$

où sinus peut remplacer cosinus, et $f(-x)$ peut remplacer $f(x)$.

Soit $A > 0$ une constante arbitraire, on pose $F^* = G + H$, où la distribution G est définie par

$$< G , \varphi > = \int_0^A dx \int_a^{+\infty} f(x)\varphi(y)\cos(xy - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})\,dy$$

G coïncide sur $]0, +\infty[$ avec la fonction C^∞

$$\int_0^A f(x)\cos(xy - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})\,dx .$$

et MG appartient à fortiori à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ; p ; \omega)$.

Pour traiter H, l'idée est d'utiliser un développement asymptotique de $\cos(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})$ faisant intervenir la fonction $J_\nu(z)$. Pour cela reprenons le développement de $J_\nu(z)$ (voir 2.2) en posant $(\frac{\pi}{2}z)^{\frac{1}{2}} J_\nu(z) = K(z)$ et $\zeta = z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}$,

$$(4)\qquad K(z) = \Big(\sum_{0\leq j\leq \frac{N-1}{2}} a_k z^{-2j}\Big)\cos\zeta + \Big(\sum_{1\leq j\leq \frac{N}{2}} b_k z^{-2j+1}\Big)\sin\zeta + S_1(z)$$

où les a_k, b_k sont des constantes, $a_o = 1$, et S_1 est holomorphe dans la demi-bande $\mathcal{B}$, avec $|S_1(z)| = O(|z|^{-N})$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini dans $\mathcal{B}$.

Remplaçons z par $z + \alpha$ dans (4), où α est une constante strictement positive; il existe des constantes (c_k, d_k) telles que

$$(5)\qquad K(z+\alpha) = \sum_{k=o}^{N-1} c_k z^{-k})\cos\zeta + (\sum_{k=o}^{N-1} d_k z^{-k})\sin\zeta + S_2(z)$$

où S_2 a les mêmes propriétés que S_1. Notons que $c_o = \cos\alpha$ et $d_o = -\sin\alpha$.

Il existe des polynômes en z^{-1} de degré (N-1), P_1, P_2, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 tels que

$$P_1(z)\cos\zeta = Q_1(z)K(z) + Q_2(z)K(z+\alpha) + S_3(z)$$

$$P_2(z)\sin\zeta = Q_3(z)K(z) + Q_4(z)K(z+\alpha) + S_4(z)$$

où S_3 et S_4 ont les mêmes propriétés que S_1. P_1 et P_2 ont un terme constant qui peut être par exemple

$$a_o d_o = -\sin\alpha .$$

Il est différent de zéro si α n'est pas multiple de π ce que nous imposerons. Il existe alors des polynômes en z^{-1} de degré (N-1) tels que

$$(6)\quad \begin{cases} \cos\zeta = \left(\sum_{k=o}^{N-1} a'_k\, z^{-k}\right) K(z) + \left(\sum_{k=o}^{N-1} b'_k\, z^{-k}\right) K(z+\alpha) + V(z) \\ \sin\zeta = \left(\sum_{k=o}^{N-1} c'_k\, z^{-k}\right) K(z) + \left(\sum_{k=o}^{N-1} d'_k\, z^{-k}\right) K(z+\alpha) + W(z) \end{cases}$$

où $V(z)$ et $W(z)$ sont holomorphes dans $\mathcal{D}$ et $O(|z|^{-N})$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini dans $\mathcal{D}$. Ces propriétés sont partagées par les dérivées de tous ordres de V et W.

Il est commode de choisir $\alpha = a$.

Pour étudier MH, H étant défini par

$$< H\ ,\ \varphi > = \int_A^{+\infty} dx \int_a^{+\infty} f(x)\varphi(y)\ \cos(xy - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})dy\ ,$$

on utilise le développement asymptotique (6).

Choisissons N assez grand pour que

$$L_1(y) = \int_A^{+\infty} V(xy)f(x)dx \qquad \text{et} \qquad L_2(y) = \int_A^{+\infty} W(xy)f(x)dx$$

soient des fonctions ayant des dérivées continues d'un ordre suffisant et qu'ainsi d'après le lemme 2, ML_1 et ML_2 appartiennent à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p; \omega)$.

Il est ensuite aisé de vérifier que la distribution T_k définie par:

$$< T_k,\ \varphi > = \int_A^{+\infty} dx \int_a^{+\infty} K(xy)(xy)^{-k} f(x)\varphi(y)dy$$

est telle que MT_k appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p; \omega)$ pour tout $k \geqslant 0$.

En effet, l'hypothèse

$$\int_o^{+\infty} |f(x)|^p\ (1+x)^{(2-p)(\nu+\frac{1}{2})}\omega(1+x)dx\ < +\infty$$

assure que:

$$\int_A^{+\infty} |x^{-k-\nu-\frac{1}{2}}\ f(x)|^p\ x^{2\nu+1}\ \omega(x)dx < +\infty$$

c'est donc que U_k pré-transformée de Hankel d'ordre ν de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g(x) = x^{-k-\nu-\frac{1}{2}}\ f(x) \quad \text{pour } x \geqslant 0, \quad g(x) = 0 \ \text{ ailleurs,}$$

appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p; \omega)$. Donc MT_k qui est égale à

$$x^{-k}\ M(x)\ U_k$$

appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p; \omega)$ d'après le lemme 2.

Il reste à montrer que MS_k appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p; \omega)$ où S_k est définie par

$$< S_k\ ,\ \varphi > = \int_A^{+\infty} dx \int_a^{+\infty} K(xy + a)(xy)^{-k} f(x)\varphi(y)dy\ .$$

Or $$\int_A^{+\infty} K(xy+a)(xy)^{-k} f(x)\,dx = \int_{A+\frac{a}{y}}^{+\infty} K(uy)y^{-k}(u-\tfrac{a}{y})^{-k} f(u-\tfrac{a}{y})\,du$$

Décomposons sous la forme $\displaystyle\int_{A+\frac{a}{y}}^{+\infty} = \int_A^{+\infty} - \int_A^{A+\frac{a}{y}} = U - T$.

MT appartient à $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$ donc à fortiori à $\mathcal{H}(\nu\ ;\ p\ ;\ \omega)$. La fonction $f_k(z) = z^{-k} f(z)$ est holomorphe dans le complémentaire de l'origine; il sera commode de prendre $A \geqslant 2$, de sorte que $(u - \frac{a}{y})$ est strictement positif lorsque $u \geqslant A$ et $y \geqslant a' > a$ et alors

$$f_k(u-\tfrac{a}{y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\tfrac{a}{y})^n \frac{1}{n!} f_k^{(n)}(u) .$$

Soit $f_{k,m}(u, y)$ la somme partielle des $(m+1)$ premiers termes et U_m la distribution définie comme U en remplaçant f_k par $f_{k,m}$, nous allons montrer que MU_m est une suite de Cauchy dans $\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ p\ ;\ \omega)$, puis que MU_n tend vers MU au sens des distributions.

Considérons la distribution $\Phi_{n,k}$ définie par le produit scalaire

$$< \Phi_{n,k}\ ,\ \varphi > = \int_A^{+\infty} du \int_a^{+\infty} K(uy)y^{-k-n} \frac{1}{n!} f_k^{(n)} \varphi(y)\,dy.$$

Soit $g_{n,k}(u)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, égale à:

$$u^{-\nu-\frac{1}{2}} \frac{1}{n!} f_k^{(n)}(u) \quad \text{pour } u \geqslant A, \text{ nulle ailleurs,}$$

d'après la formule de Cauchy

$$\frac{1}{n!} f_k^{(n)}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(u+e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$$

d'où

$$g_{n,k}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_k(u,\ \theta)e^{-in\theta}\,d\theta$$

avec $g_k(u,\theta) = u^{-\nu-\frac{1}{2}} f_k(u+e^{i\theta})$ pour $u \geqslant A$, $g_k(u,\theta) = 0$ ailleurs.

Pour montrer que cette fonction a, pour θ fixé, une pré-transformée de Hankel d'ordre ν, appartenant à $\mathcal{H}(\nu\ ;\ p\ ;\ \omega)$, de norme bornée indépendamment de θ, il suffit de montrer que

$$(7) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |u|)^{(2-p)(\nu+\frac{1}{2})} \omega(1+|u|)\,|f(u+e^{i\theta})|^p\,du \leqslant C$$

C ne dépendant pas de θ. Cette intégrale est la norme dans $\mathcal{F}(p;\ \varpi)$ de la distribution $\lambda_\theta F$, où $\lambda_\theta(x)$ est la fonction C^∞

$$\lambda_\theta(x) = \exp[ix \exp i\theta] .$$

Soit P une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 sur le support de F

$$\lambda_\theta F = \lambda_\theta\ P\ F$$

et d'après le lemme 1, $\|\lambda_\theta F\|_{\mathcal{F}(p;\ \varpi)} \leqslant \|\lambda_\theta P\|_{\mathcal{F}(1;\ \varpi^{\varepsilon/p})} \cdot \|F\|_{\mathcal{F}(p;\ \varpi)}$.

L'application $\theta \mapsto \lambda_\theta P$ de $[0, 2\pi]$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc à fortiori dans $\mathcal{F}(1 ; \varpi^{\varepsilon/p})$, est continue car les dérivées de tous ordres en x de la fonction $\lambda_\theta(x)P(x)$ sont continues par rapport à θ uniformément en x.

Ainsi $\|\lambda_\theta P\|_{\mathcal{F}(p;\varpi)}$ est majoré par une constante indépendante de θ. En conséquence $g_{n,k}$ a une pré-transformée de Hankel $\psi_{n,k}$ qui appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ; p ; \omega)$ et de norme majorée par une constante indépendante de n. Alors $M\,\Phi_{n,k}$ qui est égale à

$$M(x)\, x^{-k-n-\nu-\frac{1}{2}}\, \psi_{n,k}$$

appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p ; \omega)$ d'après le lemme 2, avec une norme majorée par

$$C_1 \| M(x) x^{-k-n-\nu-\frac{1}{2}} \|_{\mathcal{H}(\nu ; 1; \omega^{\varepsilon/p})} .$$

Soit P une fonction de $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$ égale à 1 sur le support de M, on a :

$$M(x)x^{-k-n-\nu-\frac{1}{2}} = M(x)x^{-n} . P(x)x^{-k-\nu-\frac{1}{2}}$$ et puisque $\mathcal{H}(\nu ; 1 ; \omega^{\varepsilon/p})$

est une algèbre de Banach pour le produit ponctuel, on a :

$$\|M(x)x^{-k-n-\nu-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{H}(\nu ; 1 ; \omega^{\varepsilon/p})} \leq C \| M(x)x^{-n}\|_{\mathcal{H}(\nu; 1; \omega^{\varepsilon/p})}$$

où C ne dépend pas de n.

Nous choisissons maintenant a < 1, de sorte que le support de M soit contenu dans $]a^{\frac{1}{2}} , +\infty[$, ainsi est assurée la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \| M\, \Phi_{n,k}\|_{\tilde{\mathcal{H}}(\nu;p;\omega)}$$

puisque $a^{\frac{1}{2}} x^{-1}$ est strictement inférieur à 1 sur le support de M ce qui entraîne que $M(x)(a^{\frac{1}{2}}x^{-1})^n$ tend vers zéro au sens de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ donc à fortiori au sens de $\mathcal{H}(\nu; 1 ; \omega^{\varepsilon/p})$.

Sachant que MU_m est donc une suite de Cauchy de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ; p ;\omega)$, il reste à montrer que, φ appartenant à $\mathcal{S}_{paire}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{m\to +\infty} < MU_m, \varphi > =< MU, \varphi > .$$

Or,

$$< MU_m , \varphi > = \int_A^{+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{a^{\frac{n}{2}}}{n!} f_k^{(n)}(u). \lambda_n(u)du$$

avec

$$\lambda_n(u) = \int_a^{+\infty} (- \frac{a^{\frac{1}{2}}}{y})^n K(uy)y^{-k} M(y) \varphi(y) dy.$$

Majorant $$\left| \frac{1}{n!} f_k^{(n)}(u)\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(u + e^{i\theta})| d\theta ,$$

il suffit de vérifier que

$$(8) \qquad \sum_{n=o}^{+\infty} a^{\frac{n}{2}} \int_o^{2\pi} d\theta \left[\int_A^{+\infty} |f(u + e^{i\theta})| \, |\lambda_n(u)| \, du \right] < +\infty$$

λ_n est une fonction à décroissance rapide car c'est la transformée de Hankel d'une fonction de $\mathcal{D}$ ($]0, +\infty[$), de plus elle tend vers zéro au sens de $\mathcal{S}_{paire}(\mathbb{R})$ lorsque n tend vers + ∞ . (8) est alors une conséquence de (7).

Ceci achève de démontrer que MF appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p; \omega)$. La continuité de l'application $F \longmapsto MF$ résulte de ce que sont graphe est fermé, par une démonstration analogue à celle du théorème I.

Remarques. 1. Dans le cas particulier où $p = 2$ et $\omega = 1$, les théorèmes I et II se réduisent à une évidence. En effet la transformation de Hankel d'ordre $\nu \geq -\frac{1}{2}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^+ ; x^{2\nu+1} dx)$ sur lui-même. C'est un résultat classique de Hankel, voir par exemple E. Titchmarsch [38] , qui est d'ailleurs conséquence immédiate lorsque $\nu = \frac{k-2}{2}$, k entier supérieur ou égal à 1, de ce que la transformation de Fourier est elle-même une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^k; dt)$. Alors les théorèmes I et II expriment simplement que les espaces de fonctions $L^2(\mathbb{R}^+; x^{2\nu+1}dx)$ et $L^2(\mathbb{R} ; dx)$ ont la même restriction à tout compact de $]0, +\infty[$.

2. Les théorèmes I et II expriment que les espaces des restrictions à un ouvert relativement compact dans $]0, +\infty[$, de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p ; \omega)$, ou aussi bien de $\mathcal{H}(\nu; p; \omega)$, et de $\mathcal{F}(p; \varpi)$ coïncident. Il n'en est pas de même pour les restrictions à un ouvert quelconque de $]0, +\infty[$.

Il y a évidemment lieu de distinguer alors entre $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ; p ; \omega)$ et $\mathcal{H}(\nu ; p ; \omega)$. C'est en fait pour ce dernier espace qu'il est intéressant de comparer les restrictions à un ouvert quelconque de $]0, + \infty[$, avec celles de $\mathcal{F}(p ; \varpi)$ à cause de l'interprétation géométrique en termes de profil dans les cas $\nu = \frac{k-2}{2}$, $k \geq 1$ entier (cf. 1.2)

<u>Proposition 1</u>. <u>Pour</u> $\nu \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, ω <u>appartenant à</u> $\Omega_o(p, \nu)$ <u>il existe une fonction appartenant à</u> $\mathcal{F}(p ; \varpi)$ <u>dont la restriction à</u> $]A, +\infty[$ <u>(</u>$A \geq 0$ <u>quelconque) ne coïncide pas avec la restriction d'un élément de</u> $\mathcal{H}(\nu ; p ; \omega)$.

Considérons la fonction entière paire $f(x) = x^{-\nu} J_\nu(x)$ pour $\nu > -\frac{1}{2}$. Sa transformée de Fourier est la fonction à support compact $[-1 , +1]$, égale à $(1-x^2)^{\nu - \frac{1}{2}}$ sur cet intervalle. Donc f appartient à $\mathcal{F}(p; \varpi)$ si et seulement si $p(\nu - \frac{1}{2}) > -1$. Par ailleurs la transformée de Hankel d'ordre ν de f est une mesure de masse finie au point +1.

Ceci est un contre-exemple à l'analogue du théorème II pour un intervalle $]A,+\infty[$. Nous verrons (appendice, théorème 3), un contre exemple au théorème I pour un intervalle $]0, A[$:

<u>Proposition 2.</u> <u>Pour</u> $p = 1$, $\omega = 1$, <u>il existe une fonction appartenant à</u> $\mathcal{H}(\nu;1;1)$ <u>dont la restriction à tout compact</u> $[0, A]$ <u>ne coïncide pas avec la restriction d'une fonction de</u> $\mathcal{F}(1; \varpi)$.

4.1. Espaces de Hankel généralisés.

L'étude des éléments radiaux de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^k; p; \omega)$ conduit à étudier l'espace $\mathcal{H}(\nu; p; \omega)$. Or il est des espaces de distributions sur $\mathbb{R}^k$ généralisant les distributions radiales en préservant l'existence d'un groupe de transformations de $\mathbb{R}^k$ qui opère: ce sont les distributions "multiradiales".

Soit $k = k_1 + \ldots + k_q$ une décomposition de l'entier k en une somme de q entiers $k_j \geqslant 1$, et $t = (t^{(1)}, \ldots, t^{(q)})$ la décomposition canonique d'un vecteur t de $\mathbb{R}^k$ suivant les vecteurs $t^{(j)}$ de $\mathbb{R}^{k_j}$. Soit $SO(k_j)$ le groupe des rotations de $\mathbb{R}^{k_j}$, et

$$SO(k_1, \ldots, k_q) = SO(k_1) \times \ldots \times SO(k_q)$$

le groupe des "multirotations" $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_q)$ de $\mathbb{R}^k$.

Une fonction définie sur $\mathbb{R}^k$ est dite multiradiale de type $(k_1, \ldots, k_q)$ si elle est invariante par le groupe $SO(k_1, \ldots, k_q)$: pour tout σ de ce groupe, et tout t de $\mathbb{R}^k$, on a

$$(\sigma f)(t) = f(\sigma_1 t^{(1)}, \ldots, \sigma_q t^{(q)}) = f(t) .$$

A une telle fonction f est associée de façon biunivoque une fonction F définie sur $(\mathbb{R}^+)^q$ telle que

$$f(t) = F(|t^{(1)}|, \ldots, |t^{(q)}|)$$

on dira encore que F est le profil de f.

Une distribution sur $\mathbb{R}^k$ multiradiale de type $(k_1, \ldots, k_q)$ est une distribution invariante par le groupe SO. Il lui est associé de même façon biunivoque une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^q$, paire en chaque variable, qui est son pré-profil T.

Soit ω une application continue de $[\mathbb{R}^+]^q$ dans $]0, +\infty[$ si $p = 1$, et de $\left[]0, +\infty[\right]^q$ dans $]0, +\infty[$ si $p > 1$, la fonction $x_1^{k_1-1} \ldots x_k^{k_q-1} \omega^{-\frac{1}{p-1}}$ étant localement sommable dans $[\mathbb{R}^+]^q$. On suppose en outre ω^{-1} à croissance lente à l'infini . (Conditions (P_1')).

Considérons le sous-espace fermé de $L^p(\mathbb{R}^k; \omega(|t^{(1)}|, \ldots, |t^{(q)}|dt)$ des fonctions multiradiales de type $(k_1, \ldots, k_q)$ et $\mathcal{R}(k_1, \ldots, k_q ; p ; \omega)$ l'espace de Banach, par transport de structure, des transformées de Fourier. L'étude de cet espace conduit à définir l'espace $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q; p ; \omega)$ généralisant $\mathcal{H}(\nu ;p ;\omega)$.

4.2. Pour tout $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_q)$, $\nu_j \geqslant -\frac{1}{2}$, $j = 1, \ldots, q$, on définit la transformation de Hankel d'ordre ν, H_ν sur $\mathcal{S}_{paire}(\mathbb{R}^q)$, espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide à l'infini, paire en chaque variable, par:

$$(H_\nu \varphi)(x) = \int_{[\mathbb{R}^+]^q} \left[\prod_{j=1}^{q} x_j^{-\nu_j} \; y_j^{\nu_j+1} \; J_{\nu_j}(x_j y_j)\right] \varphi(y)dy$$

où $x = (x_1, \ldots, x_q)$ et $y = (y_1, \ldots, y_q)$ appartiennent à $[\mathbb{R}^+]^q$. Comme pour $q = 1$ H_ν est une isométrie de $\mathcal{S}_{paire}(\mathbb{R}^q)$ sur lui-même et H_ν^2 est l'identité.

Le sous-espace $\mathcal{S}'_{paire}(\mathbb{R}^q)$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^q)$ des distributions tempérées en chaque variable, s'identifie au dual du sous-espace $\mathcal{S}_{paire}(\mathbb{R}^q)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$, pour le produit scalaire ordinaire $< S, \varphi >$ au sens de $(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Soit H_ν^t l'isomorphisme transposé de H_ν, de $\mathcal{S}'_{paire}(\mathbb{R}^q)$ dans lui-même défini par

$$< H_\nu^t (S), \varphi > = <S, H_\nu(\varphi) >$$

pour tous les éléments S de $\mathcal{S}'_{paire}(\mathbb{R}^q)$ et φ de $\mathcal{S}_{paire}(\mathbb{R}^q)$.

Considérons l'espace $\mathcal{S}'(\left[\,]0, +\infty[\,\right]^q)$ des distributions tempérées sur $]0, +\infty[^q$, c'est-à-dire des distributions sur $]0, +\infty[^q$ prolongeables (d'une infinité de façons) en distributions tempérées paires sur $\mathbb{R}^q$.

<u>Soit $\Sigma'_\nu([\mathbb{R}^+]^q)$ le sous-espace de $\mathcal{S}'(\left[\,]0, +\infty[\,\right]^q)$ formé des fonctions f -définies presque partout - telles que la distribution sur $\left[\,]0, +\infty[\,\right]^q$, $(\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1})$ f admette un prolongement (unique) en une fonction appartenant à $\mathcal{S}'_{paire}(\mathbb{R}^q)$, encore notée $(\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1})$ f par abus de langage.</u>

On appellera pré-transformation de Hankel d'ordre ν , l'application injective $\tilde{H}_\nu$ de $\Sigma'_\nu([\mathbb{R}^+]^q)$ dans $\mathcal{S}'_{paire}(\mathbb{R}^q)$ définie par:

$$\tilde{H}_\nu(f) = H_\nu^t((\prod_{q=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1}) f) ,$$

et transformation de Hankel d'ordre ν , l'application (non injective) de $\Sigma'_\nu([\mathbb{R}^+]^q)$ dans $\mathcal{S}'(\left[\,]0, +\infty[\,\right]^q)$, noté par abus de langage H_ν défini par:

$$H_\nu(f) = (\prod_{j=1}^{q} y_j^{-2\nu_j-1}) H_\nu^t ((\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1}) f).$$

La restriction de cette dernière application à $\mathcal{S}_{paire}(\mathbb{R}^q)$, coïncide avec l'isomorphisme de $\mathcal{S}_{paire}(\mathbb{R}^q)$ sur lui-même précédemment défini.

Soit ω un poids vérifiant les conditions (P'_1) où k_j est remplacé par $2\nu_j+2$, $j=1, 2, \ldots, q$, considérons l'espace de Banach $L^p([\mathbb{R}^+]^q, (\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1})\omega(x)dx)$, $\tilde{\mathcal{H}}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; p ; \omega)$ est le sous-espace de Banach isomorphe des pré-transformées de Hankel d'ordre ν , $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q; p ; \omega)$ est le sous-espace de $\mathcal{S}'(\left[\,]0, +\infty[\,\right]^q)$ formé des transformées de Hankel d'ordre ν .

4.3. Il est possible en imposant à ω des condtions supplémentaires d'obtenir des théorèmes analogues aux théorèmes I et II. Limitons-nous aux classes de poids suivantes: $\Omega'(p ; \nu)$ est la classe des poids $\omega(x) = \omega(x_1, \ldots, x_q) = \prod_{j=1}^{q} \omega_j(x_j)$ où ω_j appartient à $\Omega(p ; \nu_j)$, $j = 1, \ldots, q$, les fonctions

$$\varpi_j(x_j) = (1+x_j)^{(2-p)(\nu_j+\frac{1}{2})} \omega_j(1+x_j) \qquad j=1, .., q$$

étant simultanément du type croissant ou décroissant.

$\Omega'_o(p; \nu)$ est la classe définie de façon analogue en remplaçant $\Omega(p; \nu_j)$ par $\Omega_o(p; \nu_j)$.

Posons $\varpi(x) = \varpi(x_1, \ldots, x_q) = \prod_{j=1}^{q} (1+x_j)^{(2-p)(\nu_j+\frac{1}{2})} \omega_j(1+x_j)$ et soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}^q; p; \varpi)$ l'espace des transformées de Fourier de $L^p(\mathbb{R}^q; \varpi(|x_1|, \ldots, |x_q|)dx)$, $\mathcal{D}([\,]0, +\infty[\,]^q)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact contenu dans $[\,]0, +\infty[\,]^q$, on a

<u>Théorème I'</u>: ω <u>appartenant à la classe</u> $\Omega'(p; \nu)$, <u>pour toute fonction</u> M <u>de</u> $\mathcal{D}([\,]0, +\infty[\,]^q)$, $F \longmapsto MF$ <u>est une application linéaire continue de</u> $\tilde{\mathcal{H}}(\nu_1, \ldots, \nu_q; p; \omega)$ <u>dans</u> $\mathcal{F}(R^q; p; \varpi)$.

<u>Théorème II'</u>: ω <u>appartenant à la classe</u> $\Omega'_o(p; \nu)$, <u>pour toute fonction</u> M <u>de</u> $\mathcal{D}([\,]0, +\infty[\,]^q)$, $F \longmapsto MF$ <u>est une application linéaire continue de</u> $\mathcal{F}(R^q; p; \varpi)$ <u>dans</u> $\tilde{\mathcal{H}}(\nu_1, \ldots, \nu_q; p; \omega)$.

4.4. Dans le cas particulier $p = 1$, qui est celui qui nous intéressera dans les chapitres suivants, on peut donner une démonstration très simple qui fait de ces théorèmes une application des théorèmes I et II, mais elle utilise de façon essentielle le fait que la mesure $\omega(x)dx$ est produit tensoriel de mesures $\omega_j(x_j)dx_j$.

$L^1([\mathbb{R}^+]^q; (\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1})\omega(x)dx)$ est égal (A. Grothendieck [10]) au produit tensoriel complété $\hat{\bigotimes}_{j=1,..,q} L^1(\mathbb{R}^+; x_j^{2\nu_j+1} \omega(x_j)\, dx_j)$. De même $L^1(\mathbb{R}^q; \varpi(x)\, dx)$ est égal au produit tensoriel des q espaces $L^1(\mathbb{R}; \varpi_j(x_j)dx_j)$. Il en résulte que

$$\tilde{\mathcal{H}}(\nu_1, \ldots, \nu_q; 1; \omega) = \hat{\bigotimes}_{j=1,..,q} \tilde{\mathcal{H}}(\nu_j; 1; \omega_j)$$

et

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^q; 1; \varpi) = \hat{\bigotimes}_{j=1, .., q} \mathcal{F}(1; \varpi_j) .$$

Or dans la démonstration des théorèmes I' et II' on peut se limiter à prendre $M(x)$ sous la forme $\prod_{j=1}^{q} M_j(x_j)$ où M_j appartient à $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$ pour $j=1, \ldots q$ (le cas général résulte de l'application des lemmes 1' et 2' ci-dessous). Le théorème I (resp. II) appliqué alors aux q couples d'espaces associés $(\tilde{\mathcal{H}}(\nu_j; 1; \omega_j), \mathcal{F}(1; \omega_j))$ entraîne le théorème I' (resp. II').

4.5. Les démonstration générales pour $p > 1$, ont l'avantage, étant encore valables pour $p = 1$, de permettre d'aborder des poids ω plus généraux que des produits tensoriels de poids ω_j. La méthode est celle utilisée pour les théorèmes I et II avec des complications dues aux termes mixtes intervenant dans les produits de développements asymptotiques. On utilise les lemmes:

Lemme 1': ω appartenant à $\Omega'(p;\nu)$, ε étant égal à +1 (resp. -1) si ϖ est de type croissant (resp. décroissant), $\mathcal{S}(\mathbb{R}^q; 1; \varpi^{\varepsilon/p})$ est contenu avec une topologie plus fine dans l'espace des multiplicateurs de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^q; p; \varpi)$.

Lemme 2': ω_j possédant les propriétés (P_3) pour $j=1, \ldots, q$ (voir 3.1.), ε étant égal à +1 (resp. -1) si ω est de type croissant (resp. décroissant) $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q; 1; \omega^{\varepsilon/p})$ est contenu avec une topologie plus fine dans l'espace des multiplicateurs de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu_1, \ldots, \nu_q; p; \omega)$.

Les démonstrations du lemme 1', et du lemme 2' dans le cas où les ν_j sont des demi-entiers ne présentent pas de difficultés. Pour obtenir le lemme 2' dans le cas général, il est nécessaire d'utiliser la ν-convolution des fonctions définies sur $(\mathbb{R}^+)^q$, associée au produit ponctuel des transformées de Hankel d'ordre $(\nu_1, \ldots \ldots \nu_q)$.

Démonstration du théorème I':

$F = \tilde{H}_\nu(f)$ est donné par le produit scalaire avec une fonction quelconque φ de $\mathcal{S}_{\text{paire}}([\mathbb{R}]^q)$:

$$(1) \qquad < F, \varphi > = 2^q \int_{[\mathbb{R}^+]^q} dy \int_{[\mathbb{R}^+]^q} \Big(\prod_{j=1}^{q} (x_j y_j)^{\nu_j+1} J_{\nu_j}(x_j y_j)\Big)\varphi(x) f(y)\, dx$$

$$(2) \qquad \text{avec} \quad \int_{[\mathbb{R}^+]^q} |f(y)|^p \left[\prod_{j=1}^{q} y_j^{2\nu_j+1}\, \omega_j(y_j)\right] dy < +\infty .$$

On décompose dans (1), le domaine d'intégration en y $[\mathbb{R}^+]^q$ en tous les domaines de la forme $[0, A]^m \times [A, +\infty[^n$, A étant une constante positive, m et n deux entiers $\geqslant 0$, de somme q.

Pour le domaine n = 0, on a une fonction C^∞ en x.

Pour le domaine m = 0, on utilise les développements asymptotiques de $J_{\nu_j}(z)$, $j = 1, \ldots, q$. On conclut comme dans le théorème I sauf pour les termes qui font intervenir à la fois des restes et des exponentielles, pour lesquels on procède de la façon suivante que nous présentons dans le cas q = 2, pour plus de clarté (mais qui s'étend sans difficulté au cas général).

On doit traiter pour k entier $\geqslant 0$, l'élément T_k de $\mathcal{S}'_{\text{paire}}([\mathbb{R}^+]^q)$ défini par

$$< T_k, \varphi > = \iint_{[A,+\infty]^2} dy_1 dy_2 \iint_{[\mathbb{R}^+]^2} (x_1 y_1)^{\nu_1+1} (x_2 y_2)^{\nu_2+1} \frac{e^{ix_1 y_1}}{(x_1 y_1)^{k+\frac{1}{2}}} R(x_2 y_2) f(y_1, y_2)\, \varphi(x_1 x_2)\, dx_1 dx_2 .$$

On intègre d'abord en la variable intervenant dans le reste R. Soit

$$K(x_2,y_1) = \int_A^{+\infty} y_2^{\nu_2+1} R(x_2,y_2)f(y_1,y_2)dy_2.$$

L'ordre N du développement asymptotique de J_{ν_2} sera choisi assez grand pour assurer une décroissance assez rapide de $R(z)$ à l'infini. y_1 étant fixé, la fonction en x_2 : $M_2(x_2)K(x_2,y_1)$ est une fonction dont la transformée de Fourier réciproque (où $[a,b]$ contient le support de M_2)

$$(1) \qquad \lambda(y_1, u) = \int_a^b e^{ixu} M_2(x) \left[\int_A^{+\infty} v^{\nu_2+1} R(xv)f(y_1, v)dv\right]dx$$

est à décroissance d'autant plus rapide en u que N est plus grand. Pour conclure que MT_k appartient à $\mathcal{F}'(R^2; p ; \varpi)$ il suffit de montrer que:

$$(2) \qquad \int_A^{+\infty}\int_A^{+\infty} |\lambda(y_1,u)|^p y_1^{2\nu_1+1} u^{2\nu_2+1} \omega_1(y_1)\omega_2(u)dy_1du$$

est borné, sachant que cette propriété a bien lieu lorsque f remplace λ . On peut dans (1) faire N' (dépendant de N) intégrations par parties successives, pour obtenir:

$$\lambda(y_1, u) = u^{-N'} \int_a^b e^{ixu} \left[\int_A^{+\infty} S_{N'}(x,v)f(y_1,v)dv\right] dx.$$

. Si $p > 1$, soit p' l'exposant conjugué, on choisit N assez grand pour que

$$(3) \qquad \int_a^b du \int_A^{+\infty} |S_{N'}(x,v)|^{p'} \left[v^{2\nu_2+1} \omega_2(v)\right]^{1-p'} < +\infty .$$

$$(4) \qquad \text{et} \quad \int_A^{+\infty} u^{2\nu_2+1} u^{-N'p} \omega_2(u)du < +\infty ,$$

alors (3) entraîne à l'aide de l'inégalité de Hölder:

$$|\lambda (y_1, u)|^p \leqslant C u^{-N'p} \int_A^{+\infty} |f(y_1,v)|^p v^{2\nu_2+1} \omega_2(v)dv$$

ce qui assure, compte-tenu de (4), que (2) est borné.

. Le cas $p = 1$ est déjà traité, mais la démonstration générale n'exclut pas ce cas car

$$| \lambda(y_1, u)| \leqslant u^{-N'} \int_a^b du \int_A^{+\infty} |f(y_1, v) S_{N'}(u, v)|dv$$

on choisit N assez grand pour que

$$|S_{N'}(u,v)| \leqslant C v^{2\nu_2+1} \omega_2(v)$$

$$\text{et} \quad \int_A^{+\infty} u^{2\nu_2 + 1} u^{-N'} \omega_2(u)du < +\infty ,$$

ce qui assure encore que (2) est borné.

Pour les domaines $[0, A]^m \times [A, +\infty[^n$ avec $nm \neq 0$, on met la contribution T sous la forme symbolique

$$T = \int_{[A,+\infty[^n} \left[\prod_{j=1}^{q} x_j^{-\nu_j}\right] \left[\prod_{j=1}^{n} y_j^{\nu_j+1} J_{\nu_j}(x_j y_j)\right] K(x_{n+1},\dots,x_q \; ; \; y_1,\dots,y_n)\, dy_1 \dots dy_n$$

avec

$$K(x_{n+1},\dots,x_q \; ; \; y_1,\dots,y_n) = \int_{[0,A]^m} \left[\prod_{j=n+1}^{q} y_j^{\nu_j+1} J_{\nu_j}(x_j y_j)\right] f(y)\, dy_{n+1} \dots dy_q$$

et on procède de façon analogue au cas précédent avec cette simplification que la transformée de Fourier de la fonction

$$\left[\prod_{j=n+1}^{q} M_j(x_j)\right] K(x_{n+1},\dots,x_q \; ; \; y_1,\dots,y_n)$$

considérée comme fonction des variables $(x_{n+1}, \dots, x_q)$ est une fonction $\lambda(y_1,\dots,y_n \; ; \; u_1,\dots,u_m)$ à décroissance rapide en les variables $u_1,\dots, u_m$.

Nous ne donnerons pas la démonstration du théorème II' qui serait trop fastidieuse. Une technique analogue à celle qui précède permettrait d'adapter la méthode du théorème II. L'outil essentiel étant le développement asymptotique de cos z_j (ou sin z_j) faisant intervenir la fonction j_{ν_j} ceci pour chaque $J=1,\dots,q$. Des fonctions holomorphes de plusieurs variables interviennent que l'on traite sans difficulté à l'aide de la formule de Cauchy.

Remarque: Comme lorsque $q = 1$, dans le cas particulier où $p = 2$ et $\omega = 1$, les théorèmes I' et II' sont des évidences et expriment simplement que les espaces de fonctions $L^2([\mathbb{R}^+]^q; (\prod x_j^{2\nu_j+1})\, dx)$ et $L^2(\mathbb{R}^q; dx)$ ont la même restriction à tout compact de $\left[]0, +\infty[\right]^q$.

4.6. On peut définir les éléments "radiaux" de $\sum_\nu'([\mathbb{R}^+]^q)$ comme les fonctions f telles que $|x|^{2\nu_o-1} f$ soit prolongeable en une fonction radiale appartenant à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^q)$, où

$$\nu_o = \sum_{j=1}^{q} \nu_j + q - 1 \qquad \text{et} \qquad |x| = \left[\sum_{j=1}^{q} x_j^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Proposition: ω vérifiant les propriétés (P_1'), le sous-espace des éléments radiaux de $\mathcal{H}(\nu_1, \dots, \nu_q; p ; \omega)$ est $\mathcal{H}(\nu_o; p ; \omega^*)$, ω^* étant la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$:

$$\omega^*(\eta) = \int_{S_q} \left(\prod_{j=1}^{q} u_j^{2\nu_j+1}\right) \omega(\eta u)\, d\sigma(u)$$

où S_q est l'intersection avec $[\mathbb{R}^+]^q$, de la sphère de rayon 1 centrée à l'origine de $\mathbb{R}^q$, u le point courant de S_q, $d\sigma(u)$ la mesure positive de masse totale 1 uniformément répartie sur la sphère.

Soit $F = H_\nu(f)$ où f est une fonction radiale de $L^p([\mathbb{R}^+]^q;\left[\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1}\right]\omega(x)dx)$.
Le profil g de la fonction radiale f, appartient à $L^p(\mathbb{R}^+;\eta^{2\nu_o+1}\omega^*(\eta))$ car

$$\|f\| = \left[\int_o^{+\infty} |g(\eta)|^p \eta^{2\nu_o+1}\omega^*(\eta)d\eta\right]^{1/p} < +\infty$$

$\eta^{2\nu_o+1}\left[\omega^*(\eta)\right]^{-1/(p-1)}$ est localement sommable au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^+$ car d'après l'inégalité de Hölder

$$|\omega^*(\eta)|^{-1/(p-1)} \leqslant C \int_{S_q} \left[\prod_{j=1}^{q} u_j^{2\nu_j+1}\right]\left[\omega(\eta u)\right]^{-1/(p-1)} d\sigma(u)$$

et $\left[\prod_{j=1}^{q} y_j^{2\nu_j+1}\right]\left[\omega(y)\right]^{-1/(p-1)}$ est par hypothèse localement sommable au voisinage de l'origine dans $[\mathbb{R}^+]^q$.

Il suffit pour établir la proposition de montrer que F s'identifie à $G = H_{\nu_o}(g)$. On dira encore que G est le "profil" de F. Ceci est évident, d'après 4.1. lorsque $\nu_j = (k_j-2)/2$, $k_j \geqslant 1$ entier pour j=1, ..., q. En effet $L^p([\mathbb{R}^+]^q;\left[\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1}\right]\omega(x)dx$ est l'espace des fonctions multiradiales de type $(\nu_1,\ldots,\nu_q)$ de $L^p(\mathbb{R}^k;\omega(|t^{(1)}|, \ldots, |t^{(q)}|)dt)$ dont l'espace des fonctions radiales n'est autre que $L^p(\mathbb{R}^+;\eta^{2\nu_o+1}\omega^*(\eta)d\eta)$. Donc $F = H_\nu(f)$ s'identifie à $G = H_{\nu_o}(g)$.

Dans le cas général , l'identification de F à G, repose sur une identité concernant les fonctions de Bessel.

Soit $\eta = \left[\sum_{j=1}^{q} y_j^2\right]^{1/2}$, et $u = (u_1, \ldots, u_q)$ un point de S_q. F est donné par l'intégrale - prise au sens des distributions - :

$$(1)\quad F(x) = \left[\prod_{j=1}^{q} x_j^{-\nu_j}\right]\int_o^{+\infty} g(\eta)\eta^{\nu_o+q}\left[\int_{S_q}\left[\prod_{j=1}^{q} u_j^{\nu_j+1} J_{\nu_j}(\eta x_j u_j)\right]d\sigma(u)\right]d\eta \quad .$$

On utilise l'identité suivante due à N. Sonine pour le cas q= 2 (voir G.Watson [40] 12.12) :

$$\int_{S_q}\left[\prod_{j=1}^{q} u_j^{\nu_j+1} J_{\nu_j}(\alpha_j u_j)\right]d\sigma(u) = \left[\prod_{j=1}^{q} \alpha_j^{\nu_j}\right]\left[\sum_{j=1}^{q} \alpha_j^2\right]^{(-\nu_o)/2} J_{\nu_o}\left(\left[\sum_{j=1}^{q} \alpha_j^2\right]^{1/2}\right)$$

où les α_j sont des réels positifs, et $\nu_o = \sum \nu_j + q - 1$.

Par exemple lorsque q = 2 :

$$\int_o^{\pi/2} (\cos\theta)^{\nu_1+1} (\sin\theta)^{\nu_2+1} J_{\nu_1}(\alpha_1\cos\theta)J_{\nu_2}(\alpha_2\sin\theta)d\theta =$$

$$= \alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2\right]^{-(\nu_1+\nu_2+1)/2} J_{\nu_1+\nu_2+1}(\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2\right]^{1/2}).$$

Utilisant en (1) cette identité, on obtient en posant $\xi = \left[\sum_{j=1}^{q} x_j^2\right]^{1/2}$:

$$F(x) = G(\xi) = \int_0^{+\infty} \xi^{-\nu_o} \eta^{\nu_o+1} J_{\nu_o}(\xi\eta) g(\eta) d\eta \quad .$$

Compte-tenu de cette proposition, on peut utiliser les théorèmes I et II avec des hypothèses convenables sur ω^* pour étudier les profils des éléments radiaux de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; p ; \omega)$. Par exemple pour $\omega = 1$, on a le

Théorème: Les profils des éléments radiaux de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; p ; 1)$ coïncident localement dans le complémentaire de l'origine, avec les transformées de Fourier de l'espace $L^p(R ; (1+|x|)^{(2-p)(\nu_o+1/2)} dx)$.

-=-

APPENDICE

1. Les restrictions à un ouvert $]0, a[$ des éléments de $\mathcal{H}(\nu;p;\omega)$ et $\mathcal{F}(p;\varpi)$ ne coïncident pas en général. Nous allons le montrer lorsque $p = 1$, avec des restrictions sur ω entraînant que $\mathcal{H}(\nu;\ 1;\ \omega)$ est un espace de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ isomorphe à $L^1(\mathbb{R}^+;\ x^{2\nu+1}\omega(x)dx)$.

Commençons par montrer qu'il existe des fonctions de $\mathcal{H}(\nu\ ;\ 1;\ \omega)$ noté $\mathcal{H}(\nu\ ;\omega\ )$ dont la régularité à l'origine est "mauvaise" (et ce d'autant plus que ω croît plus lentement à l'infini.

Théorème 1. Soit ω une application continue croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$ telle que $\omega(x\ y) \leqslant C_1\omega(x)\omega(y)$ pour tout couple (x,y) de $[\mathbb{R}^+]^2$ et telle qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ pour lequel $\liminf\limits_{x\to+\infty} x^{-p}\omega(x) > 0$. Soit $\nu \geqslant -1/2$. Pour toute fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives qui tend vers zéro lorsque x tend vers zéro, il existe une suite $x_n > 0$ tendant vers zéro lorsque $n \to +\infty$, et une fonction f appartenant à $\mathcal{H}(\nu\ ;\ \omega)$ de classe C^p sur $\mathbb{R}^+$ dont la p-ième dérivée a la propriété

$$|f^{(p)}(x_n) - f^{(p)}(0)| > C\left[x_n^p\ \omega\left(\frac{1}{x_n}\right)\right]^{-1} \varphi(x_n)$$

où $C > 0$ ne dépend que de ν, ω , p .

On remarque d'abord que les hypothèses sur ω entraînent que $\omega(x+y) \leqslant C_2\omega(x)\omega(y)$ pour tout couple (x,y) de $[\mathbb{R}^+]^2$. On considère pour $\lambda > 0$ entier assez grand, la fonction $K_\lambda(x)$ définie sur R par $K_\lambda(x) = (1-x^2)^\lambda$ pour $|x| \leqslant 1$, $K_\lambda(x) = 0$ ailleurs.

Choisissons λ assez grand pour que

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1/2\ -\ \lambda}\ \omega(x)dx < +\infty \quad .$$

Ceci assure (voir chapitre II, théorème 4) que K_λ appartient à $\mathcal{H}(\nu\ ;\omega\ )$. Soit pour $n = 1, 2, \ldots$ une suite infinie de nombres $b_n > 0$ tels que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$. Choisissons une suite $x_n > 0$, qui décroît vers zéro lorsque $n \to +\infty$, de façon que $(x_{n+1})/x_n$ tende vers zéro, et que $\varphi(x_n) \leqslant b_n$. Posons $a_n = b_n[\omega(1/x_n)]^{-1}$. La fonction $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} a_j K_\lambda(x/x_j)$ appartient à $\mathcal{H}(\nu;\ \omega)$ car $K_\lambda(x)$ étant la transformée de Hankel d'ordre ν d'une fonction α de $L^1(\mathbb{R}^+;\ y^{2\nu+1}\omega(y)dy)$, on a

$$\|f\|_{\mathcal{H}(\nu;\ \omega)} \leqslant \int_0^{+\infty}\left[\sum_{j=1}^{+\infty} a_j\omega\left(\frac{y}{x_j}\right)\right] y^{2\nu+1}|\alpha(y)|dy$$

et d'après les hypothèses sur ω :

$$\leqslant C_1\left[\sum_{j=1}^{+\infty} a_j\omega\left(\frac{1}{x_j}\right)\right] \|K_\lambda\|_{\mathcal{H}(\nu\ ;\ \omega)} < +\infty \quad .$$

D'après le choix des suites $(a_j),(x_j)$ la série $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{a_j}{x_j^p}$ converge, donc f est de classe C^p et la p-ième dérivée est:

$$f^{(p)}(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{x_j^p} K_\lambda^{(p)}\left(\frac{x}{x_j}\right) .$$

On a :

$$(1) \qquad f^{(p)}(x_n) - f^{(p)}(0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{x_j^p} \left[K_\lambda^{(p)}\left(\frac{x_n}{x_j}\right) - K_\lambda^{(p)}(0)\right] ,$$

avec pour $j \geqslant n$, $K_\lambda^{(p)}\left(\frac{x_n}{x_j}\right) = 0$.

<u>1er cas</u>: p est pair $p = 2q$. On a $K_\lambda^{(2q)}(0) = (-1)^q(2q)!\binom{\lambda}{q}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$, x_n/x_j est assez proche de zéro, lorsque n est grand, pour que $\left[K_\lambda^{(2q)}(\frac{x_n}{x_j})-K_\lambda^{(2q)}(0)\right]$ garde un signe constant qui est celui de $K^{(2q+2)}(0)$. Ainsi tous les termes de la série figurant dans le second membre de (1) ont le même signe $(-1)^{q+1}$, donc

$$|f^{(2q)}(x_n) - f^{(2q)}(0)| > (2q)!\binom{\lambda}{q} \frac{a_n}{x_n^{2p}} = (2q)!\binom{\lambda}{q} b_n\left[x_n^{2q}\,\omega\left(\frac{1}{x_n}\right)\right]^{-1}$$

<u>2ème cas</u>: p est impair $p = 2q + 1$. Pour tout x, il existe u, $0 \leqslant u \leqslant 1$, tel que $f^{(2q)}(x) - f^{(2q)}(0) = x\, f^{(2q+1)}(ux)$. $K_\lambda^{(2q+1)}(x)$ est nul pour $x = 0$ et est monotone lorsque $x > 0$ reste assez petit, il en est donc de même pour $f^{(2q+1)}$ et ainsi

$$|f^{(2q+1)}(x_n)| \geqslant |f^{(2q+1)}(ux_n)| > (2q)!\binom{\lambda}{q} b_n\left[x_n^{2q+1}\,\omega\left(\frac{1}{x_n}\right)\right]^{-1}$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>: <u>Si outre les hypothèses du théorème 1</u> , $\liminf_{x\to+\infty} x^{-p-1}\omega(x) = 0$, $\mathcal{H}(\nu;\omega)$ <u>contient des fonctions qui ne sont pas de classe</u> C^{p+1} <u>au voisinage de l'origine</u>. <u>Lorsque</u> $\omega = 1$, $\mathcal{H}(\nu;\, 1)$ <u>contient des fonctions ayant un module de continuité à l'origine arbitrairement fixé</u>.

Dans le cas $\omega = 1$, le théorème est dû à A.Lee Schwartz [32]. Posons $\varpi(x) = (1 + |x|)^{\nu+1/2}\omega(x)$, il est clair d'après ce corollaire qu'il existe des fonctions de $\mathcal{H}(\nu\,;\omega)$ qui ne coïncident pas dans un voisinage de zéro avec une fonction de $\mathcal{F}(1\,;\varpi)$ lorsque $\nu \geqslant 1/2$ et $\liminf_{x\to+\infty} x^{-1}\omega(x) = 0$.

Avec une restriction sur le poids ω , on va voir que ceci a lieu pour $\nu > -1/2$, dans le cas général. La raison en est la régularité lipschitzienne des fonctions de $\mathcal{F}(1\,;\varpi)$:

<u>Lemme 2</u>: <u>Soit</u> ϖ <u>une application continue paire de</u> $\mathbb{R}$ <u>dans</u> $[1, +\infty[$ <u>telle qu'il existe un entier</u> $q \geqslant 0$ <u>pour lequel</u> $x^{-q}\varpi(x)$ <u>croît et</u> $x^{-q-1}\varpi(x)$ <u>décroît lorsque</u> $x > 0$ <u>est assez grand</u>. <u>Alors toute fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{F}(1;\varpi)$ <u>est de classe</u> C^q <u>et sa dérivée q-ième admet pour module de continuité la fonction</u> $[h^q\varpi(1/|h|)]^{-1}$ (h <u>tendant vers zéro</u>).

Ce résultat est connu; faute de référence classique en voici une démonstration:

Soit $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\varphi(u)du$, la q-ième dérivée de f est $f^{(q)}(x) = \int_{\mathbb{R}} (iu)^q\varphi(u)du$.

Pour $x \neq y$ on a :

$$|f^{(q)}(x) - f^{(q)}(y)| \leqslant \int_{|u(x-y)| \leqslant 1} |u|^q |u(x-y)| |\varphi(u)du + 2\int_{|u(x-y)|>1} |u|^q \varphi(u)du .$$

Puisque $|u|^{-q-1}\varpi(u)$ décroît lorsque $|u|$ est assez grand, on a :

$$|u(x-y)| \leqslant \frac{\varpi(u)}{|u|^q} |x-y|^{-q} \left[\varpi\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right]^{-1} \quad \text{pour} \quad |u(x-y)| \leqslant 1 .$$

Puisque $|u|^{-q}\varpi(u)$ croît lorsque $|u|$ est assez grand, on a :

$$|u|^q \leqslant \left[|x-y|^q \varpi\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right]^{-1} \varpi(u) \quad \text{pour} \quad |u(x-y)| > 1 .$$

D'où $$|f^{(q)}(x)-f^{(q)}(y)| \leqslant 3\left[\int_R |\varphi(u)|\varpi(u)du\right]\left[|x-y|^q \varpi\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right]^{-1} .$$

Remarquons que si $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-q}\varpi(x) < +\infty$, le lemme ne donne rien, mais $\mathcal{F}(1;\varpi)$ est alors l'ensemble des fonctions de classe C^q dont la q-ième dérivée appartient à $\mathcal{F}(1;1)$ et on peut seulement assurer que $|f^{(q)}(x) - f^{(q)}(y)| = o(1)$ lorsque $|x-y|$ tend vers zéro.

Il est alors facile d'établir le résultat suivant qui complète les résultats du chapitre I :

<u>Théorème 3</u>: <u>Soit</u> $\nu > -1/2$, ω <u>une application continue croissante de</u> $\mathbb{R}^+$ <u>dans</u> $[1,+\infty[$, <u>telle qu'il existe un entier</u> $q \geqslant 0$ <u>pour lequel</u> $x^{-q+\nu+1/2}\omega(x)$ <u>croît</u>, $x^{-q+\nu-1/2}\omega(x)$ <u>décroît, lorsque</u> $x > 0$ <u>est assez grand et telle que</u> $\omega(xy) \leqslant C\omega(x)\omega(y)$ <u>pour tout couple</u> (x,y) <u>de</u> $[\mathbb{R}^+]^2$. <u>Alors il existe une fonction de</u> $\mathcal{H}(\nu\,;\,\omega)$ <u>qui ne coïncide pas au voisinage de zéro avec une fonction de</u> $\mathcal{F}(1\,;\,\varpi)$, <u>où</u> $\varpi(x) = (1+|x|)^{\nu+1/2}\omega(x)$.

Distinguons deux cas selon que $\liminf\limits_{x\to+\infty} x^{-q}\omega(x)$ est nul ou non.

Dans le premier cas, d'après le corollaire du théorème 1, $\mathcal{H}(\nu\,;\,\omega)$ contient une fonction qui n'est pas de classe C^q, alors que toute fonction de $\mathcal{F}(1\,;\,\varpi)$ est de classe C^q.

Dans le second cas, appliquons le théorème 1, en remplaçant p par q, et en choisissant $\varphi(x) = x^{\nu+1/2-\varepsilon}$ avec $0 < \varepsilon < \nu+1/2$: il existe une suite $x_n > 0$ décroissant vers zéro et une fonction f de $\mathcal{H}(\nu\,;\,\omega)$ telle que

$$(1) \qquad |f^{(q)}(x_n) - f^{(q)}(0)| > C_1\, x_n^{\nu+1/2-\varepsilon} \left[x_n^q \omega\left(\frac{1}{x_n}\right)\right]^{-1}$$

où $C_1 > 0$ ne dépend pas de (x_n). Or, d'après le lemme 2, si f appartient à $\mathcal{F}(1;\varpi)$ on a pour $x \geqslant 0$:

$$(2) \qquad |f^{(q)}(x) - f^{(q)}(0)| \leqslant C\left[x^{q-\nu-1/2}\omega\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-1}$$

d'où la contradiction avec (1).

2. Ainsi le théorème I est en défaut au voisinage de l'origine.

On peut conjecturer que le théorème II est encore valable.

Nous ne savons pas le démontrer en général mais dans le cas particulier où $\nu = n + 1/2$, $n \geq -1$ entier, en utilisant les propriétés particulières aux fonctions de Bessel $J_{n+1/2}$ (qui sont des fonctions élémentaires) cela est possible et beaucoup plus simple que la démonstration générale du théorème II :

Théorème 4 : Soit ω un poids de la classe $\Omega_o(p ; n+1/2)$, $1 \leq p < +\infty$, $n \geq 0$ entier. Pour toute fonction paire M de $\mathcal{D}(R)$, $F \longmapsto MF$ est une application linéaire du sous-espace des éléments paire de $\mathcal{Y}(p ; \varpi)$ dans $\mathcal{H}(n+1/2; p ; \omega)$, avec $\varpi(x) = (1+x)^{(2-p)(n+1)}\omega(1+x)$.

Pour tout λ réel et tout $m \geq 0$ entier on a :

$$z^{-(\lambda+m)} J_{\lambda+m}(z) = (-1)^m (\frac{1}{z}\frac{d}{dz})^{(m)} (z^{-\lambda} J_\lambda(z))$$

ce qui donne avec $\lambda = -1/2$, $m = n+1$, et $z^{1/2} J_{-1/2}(z) = (\frac{2}{\pi})^{1/2} \cos z$:

$$z^{-(n+1/2)} J_{n+1/2}(z) = (-1)^{n+1} (\frac{2}{\pi})^{1/2} (\frac{1}{z}\ \frac{d}{dz})^{(n+1)} (\cos z) \ .$$

Soit alors $F = H_{n+1/2}(f)$ un élément de $\mathcal{H}(n+1/2; p; \omega)$, on a au sens des distributions sur $]0, +\infty[$:

$$(1) \qquad F(x) = (-1)^{n+1} (\frac{2}{\pi})^{1/2} (\frac{1}{x}\ \frac{d}{dx})^{(n+1)} \left(\int_0^{+\infty} \cos xy\ f(y)\ dy \right)$$

avec $\int_0^{+\infty} y^{2n+2} |f(y)|^p \omega(y) dy < +\infty$.

Soit Φ un élément de $\mathcal{Y}(p ; \varpi)$, pair à support contenu dans $[-a, a]$, $0 < a < +\infty$,

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} \cos xy\ f(y)\ dy$$

où f est une fonction entière paire de type exponentiel telle que

$$\int_0^{+\infty} |f(y)|^p (1+y)^{(2-p)(n+1)} \omega(1+y) dy < +\infty \ ,$$

$x\Phi$ est alors un élément de $\mathcal{Y}(p ; \varpi)$ impair de même support :

$$x\Phi(x) = \int_0^{+\infty} \sin xy\ g(y)\ dy$$

où g est une fonction entière impaire de même type exponentiel que f, et telle que

$$\int_0^{+\infty} |g(y)|^p (1+x)^{(2-p)(n+1)} \omega(1+y) dy < +\infty \ .$$

Soit Φ_1 la primitive de $x\Phi$ au sens des distributions :

$$\Phi_1(x) = \int_0^{+\infty} - \cos xy\ \frac{1}{y}\ g(y)\ dy$$

$\frac{-1}{y}\ g(y) = f_1(y)$ est une fonction entière paire ayant même type exponentiel que f, et

$$\int_0^{+\infty} |f_1(y)|^p (1+y)^{(2-p)(n+1)+p} \omega(1+y) dy < +\infty \ .$$

Φ_1 est donc un élément de $\mathcal{Y}(p ; (1+y)^p\ \varpi(y))$, pair à support contenu dans $[-a,a]$. On recommence cette construction à partir de Φ_1 pour obtenir Φ_2 etc ...

Ainsi à la (n+1)-ième étape on obtient Φ_{n+1} élément pair de $\mathcal{F}(p;(1+y)^{2n+2}\varpi(y))$:

(2) $$\Phi_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} \cos xy\, f_{n+1}(y)\, dy$$

avec
$$\int_0^{+\infty} |f_{n+1}(y)|^p (1+y)^{2n+2}\omega(1+|y|)dy < +\infty$$

ce qui entraîne

(3) $$\int_0^{+\infty} |f_{n+1}(y)|^p\, y^{2n+2}\omega(y)dy < +\infty \quad .$$

Or, $\Phi(x) = (\frac{1}{x}\frac{1}{dx})^{(n+1)}(\Phi_{n+1}(x))$,

ce qui montre d'après (1) et (2) que Φ est la transformée de Hankel d'ordre (n+1/2) de la fonction $(-1)^{n+1}(\frac{\pi}{2})^{1/2} f_{n+1}$, donc d'après (3) appartient à $\mathcal{H}(n+1/2;\ p\ ;\ \omega)$.

3. La situation est en quelque sorte inverse à l'infini : pour $\nu > 1/2 - 1/p$, ω appartenant à $\Omega_o(p\ ;\ \nu)$, la restriction à $]a, +\infty[$, $0 < a < +\infty$, d'un élément de $\mathcal{F}(p\ ;\ \varpi)$, n'est pas en général la restriction d'un élément de $\mathcal{H}(\nu\ ;\ p\ ;\varpi)$ (prop. 1 fin du paragraphe 3). Cela suggère la conjecture que le théorème I est encore valable. Nous ne savons le démontrer que dans le cas particulier $\nu = n + 1/2$, $n \geqslant -1$ entier, et $p = 1$.

<u>Théorème 5</u> : <u>Soit ω un poids de la classe</u> $\Omega_o(1\ ;\ n + 1/2)$, $n \geqslant 0$ <u>entier, tel que $\omega(0)$ soit fini (différent de zéro). Pour toute fonction</u> M, C^∞ <u>à support contenu dans</u> $]0, +\infty[$, $F \longmapsto MF$ <u>est une application linéaire de</u> $\mathcal{H}(n+1/2;\ 1;\ \omega)$ <u>dans</u> $\mathcal{F}(1\ ;\ \varpi)$ <u>avec</u> $\varpi(x) = (1+x)^{n+1}\omega(1+x)$.

Pour tout λ réel et tout entier $m \geqslant 0$, on a :
$$z^{\lambda-m}J_{\lambda-m}(z) = (\frac{1}{z}\frac{d}{dz})^{(m)}(z^\lambda J_\lambda(z)) \quad .$$

Donc pour tout élément $F = H_{n+1/2}(f)$ de $\mathcal{H}(n+1/2;\ 1\ ;\ \omega)$ on a au sens des distributions sur $]0, +\infty[$:

(1) $$(\frac{1}{x}\frac{1}{dx})^{(n+1)}(x^{2n+2}F(x)) = (\frac{2}{\pi})^{1/2}\int_0^{+\infty} \cos xy\ y^{2n+2} f(y)dy$$

avec

(2) $$\int_0^{+\infty} y^{2n+2}|f(y)|\omega(y)dy < +\infty \quad .$$

Nous voulons montrer que si le support de F est contenu dans $]0, +\infty[$, F appartient à $\mathcal{F}(1;\varpi)$. Il suffit de montrer que pour tout entier j, $0 \leqslant j \leqslant n+1$, la j-ième dérivée $F^{(j)}$ appartient à $\mathcal{F}(1\ ;\ \omega)$.

Soit $k = 2n+3$, et f la distribution sur $\mathbb{R}^k$ dont le profil est la fonction F ; f est transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^k;\ \omega(|t|)dt)$. La restriction de f à un sous-espace vectoriel de dimension 2m+3, $-1 \leqslant m \leqslant n-1$, est transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^{2m+3};\ \omega(|u|)du)$, ce qui montre que F appartient à $\mathcal{H}(m+1/2\ ;\ 1\ ;\ \omega)$ pour tout entier m tel que $-1 \leqslant m \leqslant n$.

En choisissant $m = -1$, ceci montre que F appartient à $\mathfrak{F}(1\ ;\omega)$. Supposons démontré que $F^{(j)}$ appartient à $\mathfrak{F}(1\ ;\ \omega)$ pour tous les entiers $0 \leqslant j \leqslant m$, démontrons le pour $F^{(m+1)}$. D'après (1), (2), où m remplace n,

$$G_m = \left(\frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}\right)^{(m+1)} (x^{2m+2} F(x))$$

appartient à $\mathfrak{F}(1\ ;\ \omega)$. On a :

$$G_m = x^{m+1}\ F^{(m+1)} + \sum_{j=o}^{m} a_j\ x^{m+1-j}\ F^{(j)}$$

où les a_j sont des constantes.

Soit θ une fonction C^∞ , paire, égale à 1 sur un voisinage $[-a,\ a]$ de l'origine à support compact disjoint du support de F. Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, soit γ_j une fonction paire convexe sur $\mathbb{R}^+$, continue à l'origine, C^∞ dans le complémentaire de l'origine, égale à $\frac{1}{|x|^j}$ dans le complémentaire de $[-a,\ a]$. D'après un résultat classique γ_j appartient à $\mathfrak{F}(1\ ;\ 1)$, donc il en est de même pour $\varphi_j = \gamma_j - \theta\gamma_j$. On a :

$$F^{(m+1)} = \varphi_{m+1}\ G_m - \sum_{j=o}^{m} a_j\ \varphi_j\ F^{(j)}$$

et on pourra conclure si l'on sait que φ_j appartient pour $1 \leqslant j \leqslant m+1$, à l'espace $\mathfrak{F}(1\ ;\ [\omega]^\varepsilon)$ où ε est égal à +1 (resp. -1) si ω croît (resp. décroît) à l'infini (voir 2.1, lemme 1). Ceci résulte de la remarque suivante : si φ est une fonction de classe C^p sur $\mathbb{R}$, dont les (p-1) premières dérivées tendent vers zéro à l'infini, et dont la dérivée d'ordre p, $\varphi^{(p)}$, est sommable, la transformée de Fourier de φ coïncide dans le complémentaire de l'origine avec la fonction continue :

$$\psi(x) = \frac{1}{(ix)^p} \int_{-}^{+\infty} e^{-ixy}\ \varphi^{(p)}\ (y)dy\ .$$

Ici φ_j étant C^∞ et ayant une transformée de Fourier ψ_j sommable, $|x^p\psi_j(x)|$ est bornée pour tout entier $p \geqslant 1$ et ψ_j est donc sommable par rapport à toute mesure $(1 + |x|^\ell)dx$, où ℓ est un nombre réel quelconque.

-=-

CHAPITRE II

Applications.

1.1. Soit $p > 1$, p' son conjugué. ω vérifiant les propriétés (P_1') (4.1.chap.I). Considérons la dualité entre les espaces de Banach $L^p([\mathbb{R}^+]^q;\ (\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1})\omega(x)dx)$ et $L^{p'}([\mathbb{R}^+]^q;\ (\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1})[\omega(x)]^{1-p'}dx)$ pour le produit scalaire

$$< f\ ,\ g >_\nu = \int_{[\mathbb{R}^+]^q} f(x)g(x)(\prod_{j=1}^{q} x_j^{2\nu_j+1})dx\ .$$

Cette dualité se transporte aux deux espaces

$\tilde{\mathcal{H}}(\nu_1, \ldots, \nu_q\ ;\ p\ ;\ \omega)$ et $\tilde{\mathcal{H}}(\nu_1, \ldots, \nu_q\ ;\ p'\ ;\ \omega^{1-p'})$.

Nous allons voir en application des théorèmes I et I' que plus p est proche de 1 et plus ω croît à l'infini, plus les éléments du premier espace sont réguliers dans $(\,]0, +\infty[\,)^q$. La dualité indique alors que les éléments de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu_1,\ldots,\nu_q;p;\omega)$ peuvent être des distributions d'ordre d'autant plus élevé que p est grand et que ω décroît à l'infini.

Lorsque $1 < p < 2$, on sait en utilisant le théorème de convexité de Riesz-Thorin que l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}^q;\ p\ ;\ 1)$ est topologiquement contenu dans $L^{p'}(\mathbb{R}^q)$. Une conséquence du théorème I' est alors :

<u>Proposition 1</u> : <u>Soit</u> $1 < p \leq 2$, p' <u>son conjugué</u>, ω <u>appartenant à la classe</u> $\Omega'(p;\nu)$ <u>avec</u> $\lim_{x_j \to +\infty} \varpi_j(x_j) > 0$ <u>pour</u> $j = 1, \ldots, q$.

<u>Un élément de</u> $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q\ ;\ p\ ;\ \omega)$ <u>est dans</u> $\left]0, +\infty\right[^q$, <u>une fonction appartenant localement à</u> $L^{p'}(\mathbb{R}^q)$.

Pour $p = 1$, le théorème I' est plus précis. En particulier un élément de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q;\ 1\ ;\ \omega)$ est sous l'hypothèse du théorème 1, une fonction continue sur $\left]0, +\infty\right[^q$.

Par exemple un poids ω de $\Omega'(p\ ;\ \nu)$ tel que $\omega_j(x_j)$ soit équivalent à l'infini à $x_j^{a_j}$ avec $a_j \geq (p-2)(\nu_j+1/2)$, $j = 1, \ldots, q$, satisfait l'hypothèse de la proposition 1 destinée à assurer que $\varpi(x) = \prod_{j=1}^{q} \varpi_j(x_j)$ reste supérieur à une constante différente de zéro lorsque $|x|$ tend vers l'infini.

Des propriétés de régularité plus fortes apparaissent si ϖ tend vers l'infini lorsque $|x|$ tend vers l'infini. Par exemple

<u>Proposition 2</u> : <u>Soit</u> p' <u>le conjugué de</u> $p > 1$, ω <u>appartenant à la classe</u> $\Omega'(p;\nu)$ <u>avec la condition supplémentaire que</u> $[\varpi_j(x_j)]^{1-p'}$ <u>soit sommable sur</u> $\mathbb{R}^+$.

<u>Alors un élément de</u> $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q\ ;\ p\ ;\ \omega)$ <u>coïncide localement dans</u> $\left]0, +\infty\right[^q$

<u>avec la transformée de Fourier d'une fonction sommable dans $\mathbb{R}^q$, donc en particulier est continue dans</u> $\left[\left]0, +\infty\right[\right]^q$.

Par exemple la condition est réalisée si $\omega_j(x_j)$ est équivalent à l'infini à $x_j^{a_j}$ avec $a_j > (p-2)(\nu_j+1/2)+p-1$, $j = 1, \ldots, q$.

Notons que contrairement à la proposition 1, il n'y a plus de restriction sur p, mais la condition de croissance sur ω est d'autant plus exigeante que p est plus grand.

Cette proposition résulte du théorème I' et du:

<u>Lemme</u> : <u>Soit</u> p' <u>le conjugué de</u> $p > 1$, α <u>et</u> β <u>deux fonctions positives mesurables sur</u> $\mathbb{R}^q$ <u>telles que</u> $(\alpha^{1-p'}\ \beta^{p'})$ <u>soit sommable dans</u> $\mathbb{R}^q$. <u>Alors</u> $L^p(\mathbb{R}^q;\ \alpha(x)dx)$ <u>est topologiquement contenu dans</u> $L^1(\mathbb{R}^q\ ;\ \beta(x)\ dx)$.

C'est une application immédiate de l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\mathbb{R}^q}|f(x)|\beta(x)dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^q}|f(x)|^p\alpha(x)dx\right]^{1/p}\left[\int_{\mathbb{R}^q}[\alpha(x)]^{1-p'}[\beta(x)]^{p'}dx\right]^{1/p'} .$$

Ce lemme est utile lorsque $\beta(x) \geqslant 1$, ce qui impose à α d'avoir une croissance à l'infini suffisamment forte.

Ainsi les meilleures propriétés de régularité dans $(]0, +\infty[)^q$ des éléments de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q\ ;\ p\ ;\omega\ )$ qu'on puisse obtenir par cette méthode correspondent à la fonction $\beta(x)$ ayant la croissance à l'infini la plus rapide compatible avec la sommabilité de

$$[\varpi(x)]^{1-p'}\ [\beta(x)]^{p'} \quad \text{dans } \mathbb{R}^q .$$

Le cas p = 1 est celui où pour un poids ω fixé, la régularité est la meilleure. C'est celle de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}^q\ ;\ 1\ ;\ \varpi)$.

1.2. Nous allons voir que cette méthode donne des résultats précis, en restreignant l'étude au cas $q = 1$ pour simplifier - mais il serait possible d'obtenir des énoncés valables pour plusieurs dimensions - ainsi qu'au cas particulier où ω , appartenant à $\Omega_o(p\ ;\ \nu)$, est équivalent à l'infini à x^a, a étant un nombre réel quelconque. Nous désignerons par $\Omega_o(p\ ;\ \nu\ ;\ a\ )$ l'ensemble de ces ω (lorsque a est fixé). Compte-tenu de la remarque faite au chapitre I en 3.1., dans les propriétés qui vont suivre et qui ne font intervenir que le comportement à l'infini des ω de $\Omega_o(\ p\ ;\ \nu)$, on peut si l'on veut choisir $\omega(x) = (1 + x)^a$. Si on fait l'hypothèse supplémentaire $-(2\nu+2) < a < (p-1)(2\nu+2)$ on peut choisir $\omega(x) = x^a$.

Rappelons que les applications les plus intéressantes correspondent au cas $\nu = (k-2)/2$, $k \geqslant 1$ entier, $a = 0$, pour lequel ces énoncés donnent la régularité des profils des éléments de $\mathcal{R}(k\ ;\ p\ ;\ 1)$, noté simplement $\mathcal{R}(k\ ;\ p\ )$, transformées de Fourier des fonctions radiales de $L^p(\mathbb{R}^k)$.

Théorème 3 : ω appartenant à $\Omega_0(p\,;\nu\,;\,a)$, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit un élément de $\mathcal{H}(\nu;\,p\,;\omega)$ coïncide sur tout ouvert relativement compact de $]0,+\infty[$ avec une transformée de Fourier d'une fonction sommable sur R par rapport à la mesure $(1+|x|)^{b-\varepsilon}dx$, avec

$$b = (\frac{2}{p} - 1)(\nu + \frac{1}{2}) + \frac{1+a}{p} - 1 \quad .$$

Et ce résultat est le meilleur possible en ce sens qu'il existe un élément de $\mathcal{H}(\nu\,;\,p\,;\,\omega)$ qui sur un ouvert relativement compact de $]0,+\infty[$ ne coïncide avec aucune transformée de Fourier de fonctions sommables sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure $(1+|x|)^{b+\varepsilon}$.

La première partie est une conséquence immédiate du théorème I et du lemme de 1.1.

Pour la seconde partie considérons pour tout nombre réel λ la fonction K_λ, associée au noyau de Bochner-Riesz [3], définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}$ complémentaire des points ± 1 par : $K_\lambda(x) = (1-x^2)^\lambda$ pour $|x| < 1$, $K_\lambda(x) = 0$ pour $|x| > 1$.

Lorsque λ n'est pas un entier négatif on lui associe la distribution pseudofonction sur $\mathbb{R}$, encore noté K_λ, qui coïncide avec $K_\lambda(x)$ sur l'ouvert de définition (voir Gelfand et Chilov [9]).

La transformée de Fourier de la pseudofonction K_λ est pour $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, la fonction entière

$$\hat{K}_\lambda(y) = C_\lambda\, y^{-\lambda-1/2}\, J_{\lambda+1/2}(y)$$

qui à l'infini, est équivalente à

$$C'_\nu\, y^{-\lambda-1} \cos\left[y - \frac{\pi}{2}(\lambda + \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{4}\right] .$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{K}_\lambda$ appartienne à $L^p(\mathbb{R}\,;\,(1+|x|)^{(2-p)(\nu+1/2)+a}dx)$ lorsque $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, est que :

(1) $\qquad \lambda > b \quad .$

D'autre part K_λ est une fonction analytique au voisinage de l'origine. Soit M_j, $j = 1, 2$, deux fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, $M_1(x) = 1$ pour $0 \leq x \leq 1/2$, M_1 ayant son support dans $[0, 3/2]$, M_2 ayant son support dans $[1/2, 2]$, avec

$$M_1(x) + M_2(x) = 1 \text{ sur un voisinage de } [0, 1] \quad .$$

Alors sous la condition (1) les deux éléments $M_j K_\lambda$ appartiennent à $\mathcal{H}(\nu\,;\,p\,;\,\omega)$, donc K_λ aussi.

Par ailleurs lorsque $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{K}_\lambda$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}\,;\,(1+|x|)^{b+\varepsilon}dx)$ est :

(2) $\qquad \lambda > b + \varepsilon \, .$

Choisissons un ouvert relativement compact de $]0, +\infty[$ qui soit un voisinage du point +1. Il est impossible que K_λ coïncide sur cet ouvert avec un élément de $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}\,;\,(1+|x|)^{b+\varepsilon}dx))$ sans appartenir lui-même à cet espace.

La deuxième partie du théorème est obtenue en prenant pour élément (dépendant de ε) de $\mathcal{H}(\nu; p; \omega)$, la pseudofonction K_λ où λ n'est pas un entier négatif et vérifie la condition $b < \lambda \leq b+\varepsilon$.

1.3. Lorsque $1 \leq p < \frac{4(\nu+1)+2a}{2\nu+3}$, ce qui suppose $a > -(\nu + 1/2)$, on peut donner un corollaire (affaibli) du théorème 3 en terme de régularité lipschitzienne car b est alors strictement positif. D'après le lemme 2 de l'appendice du Chap. I, $\mathcal{F} L^1(\mathbb{R} ; (1+|x|)^\alpha dx)$ est en effet formé, lorsque $0 < \alpha < 1$, de fonctions lipschitziennes d'ordre α .

Dans le cas $p = 1$, qui est celui de la plus forte régularité, ce lemme donne en corollaire du théorème I, lorsque $a = 0$:

Proposition 4 : un élément de $\mathcal{H}(\nu ; 1 ; 1)$, simplement noté $\mathcal{H}(\nu)$, a sur $]0, +\infty[$ des dérivées continues jusqu'à l'ordre $[\nu + 1/2]$, la dernière dérivée étant lipschitzienne d'ordre $(\nu + 1/2 - [\nu+ 1/2])$.

(On désigne par $[x]$ la partie entière de $x \geq 0$).

Remarque : Il est immédiat de vérifier que les éléments de $\mathcal{H}(\nu)$ sont des fonctions continues à l'origine.

Mais on a vu (Théorème 1 de l'appendice du chap. I) qu'il existe des fonctions de $\mathcal{H}(\nu)$ qui ont à l'origine un module de continuité arbitrairement donné.

Plus généralement:

Théorème 3' : ω appartenant à $\Omega_0(p ; \nu ; a)$, avec $1 < p < \frac{4(\nu+1)+2a}{2\nu+3}$, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, un élément de $\mathcal{H}(\nu ; p ; \omega)$ a sur $]0, +\infty[$ des dérivées continues jusqu'à l'ordre $[b - \varepsilon]$, la dernière dérivée étant lipschitzienne d'ordre $(b - \varepsilon - [b-\varepsilon])$ avec $b = (\frac{2}{p} - 1)(\nu + \frac{1}{2}) + \frac{1+a}{p} - 1$. Ce résultat est le meilleur possible en ce sens qu'il existe une fonction de $\mathcal{H}(\nu ; p ; \omega)$ dont la dérivée d'ordre $[b]$ n'est pas lipschitzienne d'ordre $(b + \varepsilon - [b])$ sur $]0, +\infty[$.

Pour la première partie, il suffit de remarquer que lorsque $\alpha > 1$, la dérivée d'ordre $[\alpha]$ d'une fonction de $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R} ;(1 + |x|)^\alpha dx)$ appartient à $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R} ; (1 + |x|)^{\alpha-[\alpha]} dx)$.

On applique ceci avec $\alpha = b -\varepsilon$.

Pour la seconde partie, il suffit de remarquer qu'en choisissant λ tel que

$$b < \lambda < b + \varepsilon$$

$K_\lambda(x)$ est une fonction appartenant à $\mathcal{H}(\nu ; p ; \omega)$ ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $[b]$; la dernière dérivée n'étant pas lipschitzienne d'ordre $b + \varepsilon - [b]$.

Application au cas $\nu = \frac{k-2}{2}$, $k \geq 1$ entier , $a = 0$.

On sait déjà que pour $1 \leq p \leq 2$, $\mathcal{R}(k, p)$ est formé de fonctions appartenant à $L^{p'}(\mathbb{R}^k)$, le théorème 3' indique que si $1 \leq p < \frac{2k}{k+1}$, les fonctions de $\mathcal{R}(k, p)$ sont en fait continues dans le complémentaire de l'origine et d'autant plus régulières que p est proche de 1.

Lorsque $p > \frac{2k}{k+1}$, comme dans le cas général $p > \frac{4(\nu+1)+2a}{2\nu+3}$, $\mathcal{R}(k, p)$ ou $\mathcal{H}(\nu ; p ; \omega)$ contiennent des fonctions discontinues par exemple les pseudofonctions $K_\lambda(x)$ pour

$$(\frac{2}{p} - 1)(\nu + \frac{1}{2}) + \frac{1+a}{p} - 1 < \lambda \leq 0 .$$

Notons que la fonction $K_0(x)$ fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1]$ (on considère la restriction à $\mathbb{R}^+$) appartient à $\mathcal{H}(\nu ; p ; \omega)$ si et seulement si $p > \frac{4(\nu+1)+2a}{2\nu+3}$ ce qui suppose $a \geqslant -(\nu + 1/2)$. En particulier :

<u>Proposition 5</u> : <u>La fonction caractéristique d'une boule de</u> $\mathbb{R}^k$ <u>appartient à</u> $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^k)$ <u>si et seulement si</u> $p > 2k/k+1$.

Elle n'appartient pas à cet espace dans le cas critique $p = 2k/(k+1)$ pour lequel nous ne savons pas en général, étudier la régularité de $\mathcal{R}(k; p)$.

2. Problèmes de multiplicateurs.

2.1. Un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^k)$ appartient localement à cet espace, donc une condition nécessaire de régularité sur les éléments de $\mathcal{R}(k; p)$ donne à fortiori une condition nécéssaire de régularité pour les multiplicateurs radiaux. On peut interpréter en ce sens les résultats précédents.

En particulier la proposition 5 entraîne:

<u>Proposition 5'</u> : (C. Herz) : <u>Pour</u> $1 \leqslant p \leqslant 2k/(k+1)$ (<u>et l'intervalle conjugué</u> $p \geqslant 2k/(k-1)$), <u>la fonction caractéristique</u> χ <u>d'une boule de</u> $\mathbb{R}^k$ <u>n'est pas un multiplicateur de</u> $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^k)$.

Cette proposition a été démontrée par C. Herz, de façon tout à fait différente, dans [15] .

C'est un problème ouvert célèbre de savoir si χ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^k)$ pour $2k/(k+1) < p < 2k/(k-1)$.

Soit $\mathcal{M}(k ; p)$ l'algèbre de Banach des multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^k)$ et $\mathcal{M}_r(k; p)$ la sous-algèbre fermée des multiplicateurs radiaux. A priori $\mathcal{M}_r(k; p)$ est topologiquement contenue dans l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{R}(k; p))$ des multiplicateurs de $\mathcal{R}(k; p)$. C'est un problème ouvert de savoir si l'inclusion est stricte. Ce problème est lié au précédent car C. Herz montre dans la même étude [15] , que la fonction caractérisque d'une boule centrée à l'origine est un multiplicateur de $\mathcal{R}(k; p)$ et même d'une famille de sous-espaces de $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^k)$ plus généraux.

Utilisant les polynômes harmoniques homogènes dans $\mathbb{R}^k$, S. Bochner a introduit, [4] [5], des espaces qui généralisent l'espace des fonctions radiales de $L^1(\mathbb{R}^k)$ et de $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^k)$. On peut consulter à ce sujet E. Stein [37]. C.Herz donne dans [15], un théorème complétant les résultats de S. Bochner :

<u>Théorème</u> (S. Bochner, C. Herz) : <u>Pour</u> $1 \leq p \leq 2$ et σ <u>entier positif ou nul, soit</u> F <u>une fonction de</u> $L^p(\mathbb{R}^k)$ <u>ayant la forme</u> :

$$F(t) = f(|t|)P(t)$$

t <u>désignant un point de l'espace euclidien</u> $\mathbb{R}^k$, $|t| = \left[\sum_{j=1}^{k} t_j^2\right]^{1/2}$ <u>la norme euclidienne où</u> P(t) <u>est un polynôme harmonique homogène de degré</u> σ. <u>Alors</u> f <u>appartient à</u> $L^p(\mathbb{R}^+ ; x^{\sigma p+k-1}dx)$ <u>et la transformée de Fourier</u> G <u>de</u> F <u>est</u> :

$$G(u) = C_\sigma g(|u|)P(u)$$

<u>où</u> g <u>est la transformée de Hankel d'ordre</u> $((k-2)/2 + \sigma)$ <u>de</u> f <u>et</u> C_σ <u>une constante ne dépendant que de</u> σ .

Soit $\mathcal{R}_\sigma(k; p)$ l'ensemble des fonctions G pour un degré fixé σ . Son étude se ramène donc dans le cas particulier $\nu = (k-2)/2$, $\sigma \geq 0$ entier, $1 \leq p \leq 2$, à celle de l'espace général $\mathcal{H}(\nu + \sigma; p; \omega)$, où $\nu \geq -1/2$,$\sigma \geq 0$ et $\omega(x) = x^{-\sigma(2-p)}$.

Il est aisé de vérifier que ω appartient à la classe de poids $\Omega_o(p ; \nu + \sigma)$ (voir chap. I). On peut alors appliquer les théorèmes I et II et l'étude locale des éléments de $\mathcal{R}_\sigma(k; p)$ dans le complémentaire de l'origine se ramène à l'étude locale sur $]0, +\infty[$ de l'espace $\mathcal{F}(p; \varpi)$ avec

$$\varpi(x) = (1+x)^{(2-p)(\nu+\sigma+1/2)}(1+x)^{-\sigma(2-p)} = (1+x)^{(2-p)(\nu+1/2)} .$$

Ainsi avec les notations ci-dessus :

<u>Proposition 6</u> : <u>Pour toute fonction</u> M <u>de</u> $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$, $F \mapsto MF$ <u>est une application linéaire continue de</u> $\mathcal{H}(\nu+\sigma; p; \omega)$ (<u>resp.</u> $\mathcal{H}(\nu ; p; 1)$) <u>dans</u> $\mathcal{H}(\nu; p ; 1)$ (<u>resp.</u> $\mathcal{H}(\nu+\sigma ; p; \omega)$).

(On peut vérifier que ω satisfait la condition nécéssaire et suffisante pour que la restriction de H_ν à $L^p(\mathbb{R}^+; x^{2(\nu+\sigma)}\omega(x)dx)$ soit injective).

Et en conséquence du théorème de Bochner :

<u>Théorème 7</u> : <u>La régularité des fonctions de</u> $\mathcal{R}_\sigma(k; p)$ <u>dans le complémentaire de l'origine, ne dépend pas de</u> $\sigma \geq 0$. <u>Elle est celle des fonctions</u> $\mathcal{F}(L^p(\mathbb{R}; (1+|x|)^{(2-p)(k-1)/2}dx)$.

2.2. Le théorème de C. Herz, [15], est en utilisant nos notations

<u>Théorème</u> (C. Herz) : <u>Pour</u> $\frac{4(\nu+1)}{2\nu+3} < p < \frac{4(\nu+1)}{2\nu+1}$ <u>la fonction caractéristique</u> $\chi([0, 1])$ <u>est un multiplicateur de</u> $\mathcal{H}(\nu+\sigma; p ; \omega)$ <u>avec</u> $\nu \geq -1/2$, $\sigma > 0$, $\omega(x) = x^{-\sigma(2-p)}$.

Il est facile de retrouver ce résultat.

Il suffit de montrer que $\chi([-1, +1])$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}(p; \varpi)$ avec l'hypothèse indiquée sur p.

En effet une fonction de $\mathcal{S}_{paire}(\mathbb{R})$ est un multiplicateur de $\mathcal{H}(\nu+\sigma; p ; \omega)$ car ω appartient à $\Omega_o(p ; \nu+\sigma)$, on utilise la remarque faite au chap. I en 3.2 pour se ramener au cas où $\omega(0)$ est fini et différent de zéro et on applique le lemme 2. On met alors $\chi([-1, +1])$ sous la forme $\varphi_1 + \varphi_2$ où φ_1 est dans $\mathcal{D}(\,]-3/4, 3/4[)$, et φ_2 est à support dans $[-1, -1/2] \cup [1/2, 1]$.

Pour $-1 < \alpha < p-1$, les deux espaces $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}\ ;\ (1+|x|)^\alpha dx)$ et $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}\ ;\ |x|^\alpha dx)$ ont les mêmes éléments à support compact puisque les espaces $L^p(\mathbb{R}\ ;(1+|x|)^\alpha\, dx)$ et $L^p(\mathbb{R}\ ;\ |x|^\alpha dx)$ contiennent les mêmes fonctions bornées à l'origine.
Il est alors techniquement plus simple - bien qu'équivalent - de montrer que $\chi([-1, +1])$ est un multiplicateur de $L^p(\mathbb{R}\ ;\ |x|^\alpha dx)$ lorsque $-1 < \alpha < p-1$.

La transformée de Fourier de $\chi([-1, +1])$ étant $\sin x / \pi x$, on est conduit à démontrer le lemme suivant sur la transformation de Hilbert :

<u>Lemme 8</u> : <u>Pour</u> $p > 1$ <u>et</u> $-1 < \alpha < p-1$, <u>l'application</u> $f \mapsto f * vp(1/x)$ <u>est une application linéaire continue de</u> $L^p(\mathbb{R}\ ,\ |x|^\alpha dx)$ <u>dans lui-même.</u>

C'est un cas particulier de théorèmes plus généraux que nous verrons plus loin. Mais on peut en donner une démonstration directe - utilisant le théorème de Marcel Riesz, [30], auquel se réduit le lemme pour $\alpha = 0$ - inspirée à la fois d'une partie de la démonstration de Herz (utilisation du lemme de Schur) et d'une démonstration directe indiquée par P. Koosis [25], d'un lemme analogue où le poids $|x|^\alpha$ est remplacé par $(1 + |x|)^\alpha$.

Soit $\tilde{f} = f * vp(1/x)$, nous voulons montrer que

$$\int_R |\tilde{f}(x)|^p |x|^\alpha dx \leq C_{a,p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^\alpha dx\ .$$

Posons $\alpha = \beta p$, $\varphi(x) = |x|^\beta f(x)$, on a

$$\tilde{f}(x) = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)\,|y|^{-\beta}}{x - y}\, dy\ ,$$

$$|x|^\beta \tilde{f}(x) = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{x-y}\, dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{x-y} \; \frac{|x|^\beta - |y|^\beta}{|y|^\beta}\, dy\ .$$

D'après le théorème de Marcel Riesz [27], $\varphi * vp(1/x)$ appartient à $L^p(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer qu'il en est de même pour

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) K(x,y)\, dy$$

où $K(x,y) = \dfrac{1}{x-y}\left[\left|\dfrac{x}{y}\right|^\beta - 1\right]$ est un noyau homogène de degré -1. On utilise alors la méthode du lemme de Schur (voir Hardy, Littlewood, Polya [13]). Posant $y = xz$, on a

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xz)\, \mathrm{sgn}\ x\ K(1, z)\, dz$$

qui est une intégrale vectorielle convergente dans $L^p(\mathbb{R})$, si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(1,z)|\ |z|^{-1/p}\, dz < +\infty\ .$$

La convergence à l'infini a lieu si $\beta > -1/p$ et
la convergence à l'origine a lieu si $\beta < 1 - 1/p$,
ce qui achève la démonstration. Notons d'après un contre exemple de P. Koosis [25], que la condition $\alpha < p-1$ est nécessaire (on prend pour fonction f la fonction $\chi([-1, +1]))$. Ce lemme utilisé avec $\alpha = (2-p)(\nu+1/2)$, et les remarques qui précèdent achèvent la démonstration du théorème de C. Herz.

2.3. L'usage des théorèmes I et II ramènent évidemment l'étude des multiplicateurs locaux de $\mathcal{R}_\sigma(k; p)$ dans le complémentaire de l'origine, à celle des multiplicateurs locaux sur $]0, +\infty[$ de $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R} ; (1+|x|)^{(2-p)(\nu+1/2)}dx)$ dans le cas général $1 \leqslant p < +\infty$ et de $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R} ; |x|^{(2-p)(\nu+1/2)}dx)$ lorsque $\frac{4(\nu+1)}{2\nu+3} < p < \frac{4(\nu+1)}{2\nu+1}$.

Cette idée est celle de D. Guy, [11] , qui obtient une classe de multiplicateurs de type Marcinkiewicz de $\mathcal{H}(\nu ; p ; x^a)$ sous les hypothèses (H) :

$$1 < p < +\infty \quad \text{et} \quad \frac{4(\nu + 1) + 2a}{2\nu + 3} < p < \frac{4(\nu + 1) + 2a}{2\nu + 1} .$$

Remarquons que ces hypothèses entraînent que la restriction de H_ν à $L^p(\mathbb{R}^+;x^{2\nu+1+a}dx)$ est injective de sorte que $\mathcal{H}(\nu; p ; x^a)$ est un espace de Banach par transport de structure.

Soit M(C) la classe des fonctions Φ bornées sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$, telles que pour tout n de $\mathbb{Z}$:
$$\int_{2^{n-1}}^{2^n} |d\Phi(t)| \leqslant C \quad \text{et si } \Phi \text{ est définie sur } R : \int_{-2^n}^{-2^{n-1}} |d\Phi(t)| \leqslant C$$

D. Guy établit d'abord (Th. 8A) :

<u>Théorème</u> (D. Guy) : <u>pour</u> $1 < p < +\infty$ <u>et</u> $-1 < \alpha < p-1$, <u>toute fonction</u> Φ <u>de</u> M(C) <u>est un multiplicateur de</u> $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R} ; |x|^\alpha dx)$.

Pour pouvoir passer de $\mathcal{F}(L^p(\mathbb{R}; |x|^\alpha dx))$ à $\mathcal{H}(\nu ; p ; x^a)$ avec $\alpha = a+(2-p)(\nu+\frac{1}{2})$ il établit ensuite le lemme 8C :

<u>Lemme</u> (D. Guy) : <u>pour</u> $-1 < \alpha < p-1$, <u>soit</u> g <u>une fonction mesurable sur</u> $\mathbb{R}^+$ <u>telle que</u> $\int_0^{+\infty} x^{-(1+\alpha)/p}|g(x)|dx < +\infty$. <u>Posons pour tout</u> $\nu > -1/2$, $G_\nu(y) = \int_0^{+\infty}(xy)^{1/2}J_\nu(xy)g(x)dx$.
<u>Si</u> G_ν <u>appartient à</u> $L^p(\mathbb{R}^+; x^\alpha dx)$ <u>pour une valeur</u> ν , <u>alors il en est de même pour</u> $G_{\nu'}$, <u>quel que soit</u> $\nu' > -1/2$, <u>et il existe une constante absolue</u> $A > 1$ <u>telle que</u>
$$A^{-1}\,||G_\nu|| \leqslant ||G_{\nu'}|| \leqslant A||G_\nu|| .$$

La démonstration de ce lemme utilise un résultat plus faible (Th.4D) que le th. 8A, les hypothèses sur Φ étant plus fortes : Φ est borné et à variation totale sur $\mathbb{R}$ bornée.

<u>Ce lemme</u> 8C, <u>qui fait intervenir la présentation</u> "<u>Hankelienne</u>" <u>de la transformation de Hankel</u>, <u>entraîne les théorèmes</u> I <u>et</u> II <u>sous les hypothèses</u> (H) <u>avec</u>

$\omega(x) = x^a$, <u>à la condition supplémentaire que les éléments de $\mathcal{F}(p;\varpi)$ soient des fonctions localement sommables.</u>

Pour le voir, désignons par H_ν^* la transformation

$$f \longmapsto \int_0^{+\infty} (xy)^{1/2} J_\nu(xy) f(x)\,dx$$

on a $\qquad (H_\nu(f))(y) = y^{-\nu-1/2} H_\nu^* (x^{\nu+1/2} f(x))$.

Soit alors $\varphi(y)$ une fonction à support compact contenu dans $]0, +\infty[$ et sommable. D'après le lemme l'existence d'une fonction h de $L^p(\mathbb{R}^+;\ x^\alpha dx)$ telle que

$$y^{\nu+1/2}\varphi(y) = H_\nu^*(h)$$

équivaut à l'existence d'une fonction k de $L^p(\mathbb{R}^+;\ x^\alpha dx)$ telle que

$$y^{\nu+1/2}\varphi(y) = H_{1/2}^*(k) .$$

Compte-tenu de ce que $H_{1/2}^*$ s'identifie à la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$ restreinte aux fonctions impaires, et de ce que $-1 < \alpha < p-1$, la propriété précédente est équivalente aux théorèmes I et II relatifs aux espaces $\mathcal{H}(\nu\ ;\ p\ ;\ \omega)$ et $\mathcal{F}(p\ ;\ \varpi)$ avec $\alpha = (2-p)(\nu + 1/2) + a$, $\omega(x) = x^a$, $\varpi(x) = (1 + x)^\alpha$, sous les hypothèses (H) : $1 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < p-1$, et l'hypothèse supplémentaire que les éléments de $\mathcal{F}(p;\ \varpi)$ ou (ce qui est équivalent) de $\mathcal{H}(\nu\ ;\ p\ ;\ \omega)$ sont des fonctions localement sommables sur $]0, +\infty[$.

Lorsque $a = 0$, il est facile de se débarasser de cette hypothèse supplémentaire en utilisant un argument de dualité. L'hypothèse supplémentaire est vérifiée pour l'intervalle $\frac{4(\nu+1)}{2\nu+3} < p \leq 2$, car $\mathcal{F}(p;\ \varpi)$ est contenu dans $L^{p'}(\mathbb{R})$, où p' est le conjugué de p, espace de fonctions localement sommables.

Les théorèmes I et II étant établis pour $\mathcal{H}(\nu\ ;\ p\ ;\ 1)$ et $\mathcal{F}(p;\ \varpi)$ dans l'intervalle $\frac{4(\nu+1)}{2\nu+3} < p \leq 2$, s'étendent à l'intervalle conjugué $2 \leq p < \frac{4(\nu+1)}{2\nu+1}$ par la méthode classique: on considère la dualité des espaces $L^p(\mathbb{R}\ ;\ \varpi(|x|)dx)$ et $L^{p'}(\mathbb{R}\ ;\ [\varpi(|x|)]^{1-p'}dx)$ pour le produit scalaire :

$$< f, g > = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx .$$

Le second espace est $L^{p'}(\mathbb{R}\ ;\ \varpi'(|x|)dx)$ avec $\varpi'(x) = (1+x)^{(2-p')(\nu+1/2)}$. La dualité précédente se transporte donc en la dualité de $\mathcal{F}(p\ ;\ \varpi)$ avec $\mathcal{F}(p',\ \varpi')$ pour le produit scalaire

$$< F , G > = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx .$$

D'autre part, la dualité des espaces $L^p(\mathbb{R}^+\ ;\ x^{2\nu+1}dx)$ et $L^{p'}(\mathbb{R}^+;\ x^{2\nu+1}dx)$ pour le produit scalaire

$$< f , g >_\nu = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)x^{2\nu+1}\,dx$$

se transporte en la dualité des espaces $\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ p;\ 1)$ et $\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ p'\ ;\ 1)$ pour le produit scalaire $\quad < F , G >_\nu = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)x^{2\nu+1}dx$.

Pour $p > 2$ et M une fonction de $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$, montrons que si F appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ; p ; 1)$, MF appartient au dual de $\mathcal{F}(p'; \varpi')$. Pour tout G de $\mathcal{F}(p'; \varpi')$ on sait que MG appartient à $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ; p'; 1)$ et

$$|<F,MG>_\nu| \leqslant ||F||_{\tilde{\mathcal{H}}(\nu;p;1)} ||MG||_{\tilde{\mathcal{H}}(\nu;p';1)} \leqslant C ||F||_{\tilde{\mathcal{H}}(\nu;p;1)} ||G||_{\mathcal{F}(p'; \varpi')} .$$

Donc $(F,G) \longmapsto < F, MG >_\nu$ est une forme bilinéaire continue sur $\tilde{\mathcal{H}}(\nu; p ; 1) \times \mathcal{F}(p' ; \varpi')$. Choisissons F dans l'espace $X = \tilde{\mathcal{H}}(\nu;p;1) \cap \tilde{\mathcal{H}}(\nu;2;1)$, G dans l'espace $Y = \mathcal{F}(p'; \varpi') \cap L^2(\mathbb{R})$.

Utilisons le théorème de Plancherel classique ainsi que celui qui est relatif à l'isométrie H_ν de $\mathcal{H}(\nu ; 2 ; 1)$ (Titchmarsch [38])

$$\int_0^{+\infty} H_\nu(f)(x)H_\nu(g)(x)x^{2\nu+1}dx = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)x^{2\nu+1}dx ,$$

la forme bilinéaire $< F , MG >_\nu$ coïncide sur le sous-espace dense $X \times Y$ avec le produit scalaire ordinaire $< x^{-2\nu-1}MF, G >$. Cette deuxième forme bilinéaire se prolonge donc à tout l'espace $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ; p; 1) \times \mathcal{F}(p'; \varpi')$. Ceci prouve que $x^{-2\nu-1}MF$ appartient à $\mathcal{F}(p; \varpi)$ ainsi que MF puisque M est à support compact dans $]0, +\infty[$. De plus

$$||MF||_{\mathcal{F}(p; \varpi)} \leqslant C' ||F||_{\mathcal{H}(\nu ;p; 1)} .$$

On montre de façon analogue que si F appartient à $\mathcal{F}(p ; \varpi)$ MF appartient au dual de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu ; p' ; 1)$.

En utilisant le lemme 8C, D. Guy obtient comme conséquence du théorème 8A, le résultat principal de son travail :

Théorème (D. Guy Th.8D) : Sous les hypothèses (H) toute fonction Φ de $M(C)$ est un multiplicateur de $\mathcal{H}(\nu ; p; x^a)$.

L'usage des théorèmes I et II ainsi que du th.4D déja cité, ne peut donner qu' une version locale :

Sous les hypothèses (H), une fonction localement à variation bornée sur $]0, +\infty[$ est un multiplicateur local sur $]0, +\infty[$ de $\mathcal{H}(\nu ; p ; x^a)$.

3. Le lemme 1 du chapitre I donne une classe de multiplicateurs de $\mathcal{F}(p ; \varpi)$, et donc une classe de multiplicateurs locaux sur $]0, +\infty[$ de $\mathcal{H}(\nu ; p ; \omega)$ lorsque ω appartient à la classe $\Omega_0(p ; \nu)$:

Théorème 9 : Pour $1 \leqslant p < +\infty$,ω appartenant à $\Omega_0(p ; \nu)$,ε étant égal à $+1$ (resp. -1) si ϖ croît (resp. décroît) à l'infini, toute fonction de $\mathcal{F}(1 ; \varpi^{\varepsilon/p})$ est un multiplicateur local sur $]0, +\infty[$ de $\mathcal{H}(\nu ; p ; \omega)$.

Dans le cas particulier où ω appartient à $\Omega_0(p ; \nu; a)$:

Corollaire 1 : Toute transformée de Fourier d'une fonction sommable sur R par rapport à la mesure

$$(1 + |x|)^c dx \ , \text{ où } c = \left| \left(\frac{2}{p} - 1\right)\left(\nu + \frac{1}{2}\right) + \frac{a}{p} \right|$$

est un multiplicateur local sur $]0, +\infty[$ de $\mathcal{H}(\nu \ ; \ p \ ; \ \omega)$ lorsque ω appartient à $\Omega_o(p \ ; \ \nu ; \ a)$.

Dans le cas particulier $\omega = 1$, $\nu = (k-2)/2$ où $k \geq 1$ est entier.

Corollaire 2 : Toute transformée de Fourier d'une fonction radiale sommable sur $\mathbb{R}^k$ par rapport à la mesure

$$(1 + |t|)^{-(1-1/p)(k-1)} dt \qquad , \quad 1 \leq p \leq 2$$

est un multiplicateur local dans le complémentaire de l'origine de $\mathcal{R}(k; p)$.

En relation avec le problème de l'inclusion des multiplicateurs radiaux de $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^k)$ dans ceux de $\mathcal{R}(k \ ; \ p)$, remarquons que les transformées de Fourier des fonctions radiales sommables sur $\mathbb{R}^k$ par rapport à la mesure dt, sont évidemment des multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^k)$ et pas seulement de $\mathcal{R}(k; p)$. Cette classe de multiplicateurs a la régularité de $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R} \ ; \ (1 + |x|)^{(k-1)/2}dx))$ alors que celle du corollaire 2 a la régularité, plus faible, de $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}; (1+|x|)^{|(2/p)-1|(k-1)/2}dx)$

En application du corollaire 1, on a :

Théorème 10 : Le noyau de Bochner-Riesz, K_λ défini sur $\mathbb{R}^+$ par $K_\lambda(x) = (1-x^2)^\lambda$ pour $x < 1$, $K_\lambda(x) = 0$ pour $x > 1$ est un multiplicateur de $\mathcal{H}(\nu \ ; \ p \ ; \ \omega)$, ω appartenant à $\Omega_o(p \ ; \ \nu \ ; \ a)$ pour $\lambda > |(2/p - 1)(\nu + 1/2) + a/p|$, et n'en est pas un pour

$$\lambda \leq \left(\frac{2}{p} - 1\right)\left(\nu + \frac{1}{2}\right) + \frac{1+a}{p} - 1$$

et λ non entier négatif.

K_λ est une fonction C^∞ au voisinage de l'origine, il suffit donc de vérifier que K_λ (définie par parité sur $\mathbb{R}$) appartient à $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R} \ ; \ (1 + |x|)^c dx)$ avec $c = |(2/p - 1)(\nu + 1/2) + a/p|$. Mais (voir (1.2)) ceci a lieu si et seulement si $\lambda > c$.

La fin du théorème résulte de 1.2. puisque K_λ appartient à $\mathcal{H}(\nu \ ; \ p \ ; \ \omega)$ lorsque λ n'est pas un entier négatif, si et seulement si

$$\lambda > b = \left(\frac{2}{p} - 1\right)\left(\nu + \frac{1}{2}\right) + \frac{1+a}{p} - 1 \ .$$

Lorsque $a = 0$, $\nu = (k-2)/2$, $k \geq 1$ entier, E. Stein a montré [36], la propriété plus forte :

Théorème (E. Stein) : Pour $1 \leq p < +\infty$ et $\lambda > |2/p - 1|((k-1)/2)$, $K_\lambda(|t|)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^k)$, où $|t|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^k$.

(Lorsque $\lambda \geq (k-1)/2$, indice "critique" de S. Bochner [3], le résultat est évident).

4.1. Soit T une distribution tempérée paire sur $]0, +\infty[$, dont le support est borné à droite et qui au voisinage de 0, coïncide avec une fonction de $\Sigma'_\nu(R^+)$.

La distribution sur $]0, +\infty[$, $x^{2\nu+1}T$, est alors prolongeable de façon unique dans $\mathcal{S}'_{\text{paire}}(R)$ en une distribution qui coïncide avec une fonction au voisinage de l'origine. Par abus de langage, on note encore $x^{2\nu+1}T$ ce prolongement. La transformée de Hankel d'ordre ν de T est alors la distribution sur $]0, +\infty[$ définie par $H_\nu(T) = x^{-2\nu-1}\,\tilde{H}_\nu(y^{2\nu+1}T_y)$ (cf. chap. I, 1.1.).

Nous nous proposons de comparer les comportements à l'infini de $H_\nu(T)$ et de la transformée de Fourier de l'élément $x^{2\nu+1}T$ de $\mathcal{S}'_{\text{paire}}(R)$. Les résultats précis seront obtenus lorsque le support de T est disjoint de l'origine. Lorsqu'il n'en est pas ainsi on a cependant :

<u>Proposition 11</u> ; <u>Soit T un élément de $\mathcal{S}'(]0, +\infty[)$ ayant son support borné à droite et qui au voisinage de 0 coïncide avec une fonction de $\Sigma'_\nu(R^+)$. Soit $n \geq 0$ entier, l'ordre de la distribution $x^{2\nu+1}T$ élément de $\mathcal{S}'_{\text{paire}}(R)$. Alors la transformée de Hankel d'ordre ν de T, $H_\nu(T)$, est la restriction à $[0, +\infty[$ d'une fonction entière en x^2 telle que :</u>

$$H_\nu(T)(x) = O(x^{n-\nu-1/2}) \quad \underline{\text{lorsque}} \quad x \longrightarrow \infty .$$

<u>Ce résultat est le meilleur possible dans le sens qu'il existe pour tout entier $n \geq 0$ un élément T de $\Sigma'_\nu(R^+)$ tel que $x^{2\nu+1}T$ est d'ordre n et $H_\nu(T)(x)$ n'est pas $o(x^{n-\nu-1/2})$ lorsque $x \longrightarrow \infty$.</u>

Puisque $y^{2\nu+1}T_y$ est à support compact, $H_\nu(T)(x)$ est égale à la restriction à $]0, +\infty[$ de la fonction

$$< y^{2\nu+1}T_y \ , \ (xy)^{-\nu}J_\nu(xy) >$$

qui est une fonction entière en x^2, car $L(z) = z^{-\nu}J_\nu(z)$ est une fonction entière en z^2.

La distribution à support compact $y^{2\nu+1}T_y$ est une combinaison linéaire finie d[e] dérivées de mesures bornées portées par le support. L'ordre maximum des dérivées étant n, on a :

$$|H_\nu(T)(x)| \leq \sum_{0\leq j\leq n} c_j \text{ Sup } |x^j \frac{d^{(j)}L}{dz^j}(xy)|$$

où les c_j sont des constantes dépendant de T, le Sup étant pris lorsque y décrit le support de T.

D'après le développement asymptotique de $J_\nu(z)$, pour tout entier $j \geq 0$, on a

$$\left(\frac{d^{(j)}L}{dz^j}\right)(\zeta) = O(\zeta^{-\nu-1/2}) \quad \text{lorsque} \quad \zeta \longrightarrow +\infty ,$$

ce qui entraîne $H_\nu(T)(x) = O(x^{n-\nu-1/2})$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Pour s'assurer que le résultat est le meilleur possible il suffit pour tout entier n, de prendre pour T la dérivée d'ordre n, $\delta_{(1)}^{(n)}$ de la mesure de masse +1 portée par le point +1. L'expression de $H_\nu(\delta_{(1)}^{(n)})$ est

$$H_\nu(\delta_{(1)}^{(n)})(x) = \langle y^{2\nu+1}(\delta_{(1)}^{(n)})_y,\ (xy)^{-\nu}J_\nu(xy)\rangle = \frac{d^n}{dy^n}\left[y^{2\nu+1}(xy)^{-\nu}J_\nu(xy)\right]\Big|_{y=1},$$

de la propriété $\frac{d^j}{dz^j}(z^{-\nu}J_\nu(z) = (-1)^j z^{-\nu}J_{\nu+j}(z)$ pour tout entier $j \geqslant 0$, on déduit que

$H_\nu(\delta_{(1)}^{(n)})(x)$ est $0(x^{n-\nu-1/2})$ mais n'est pas $o(x^{n-\nu-1/2})$ lorsque $x \to +\infty$.

Signalons le cas particulier suivant:

Proposition : Une mesure radiale bornée à support compact dans $\mathbb{R}^k$, absolument continue au voisinage de l'origine, a une transformée de Fourier fonction entière en $|t|^2$ (où $|t|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^k$) qui est $0(|t|^{-((k-1)/2)})$ lorsque $|t| \longrightarrow +\infty$. Ce résultat est le meilleur possible.

La condition sur le support est nécéssaire. En effet :

Proposition : Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une transformée de Fourier f d'une fonction radiale sommable dans $\mathbb{R}^k$, telle que $f(t) \geqslant (1 + |t|)^{-\varepsilon}$.

Considérons la fonction $g(x) = (1 + |x|)^{-\varepsilon/k}$, qui est transformée de Fourier d'une fonction sommable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $G(t) = \prod_{j=1}^{k} g(t_j)$ est transformée de Fourier d'une fonction sommable sur $\mathbb{R}^k$, on en prend la moyenne f par le groupe des rotations SO(k) :

$$f(t) = \int_{SO(k)} G(\sigma^{-1}t)d\sigma .$$

Il est clair que $f(t) \geqslant (1 + |t|)^{-\varepsilon}$.

4.2. Soit T une distribution à support compact dans $]0, +\infty[$, on a le résultat précis :

Théorème 12 : Soit T une distribution à support compact dans $]0, +\infty[$, f sa transformée de Fourier, g sa transformée de Hankel d'ordre ν. α étant un nombre réel quelconque, si $f(x) = 0(|x|^\alpha)$ lorsque $|x| \to +\infty$ (resp. $g(x) = 0(x^\alpha)$ lorsque $x \longrightarrow \infty$) alors $g(x) = 0(x^{\alpha-\nu-1/2})$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$(resp. $f(x) = 0(|x|^{\alpha+\nu+1/2})$ lorsque $|x| \longrightarrow +\infty$.

L'énoncé 1 (resp. 2) est une conséquence du théorème I (resp. II). L'hypothèse $f(x) = 0(|x|^\alpha)$ lorsque $|x| \to +\infty$, équivaut à assurer que l'application

$$\varphi \longmapsto \langle f, \varphi\rangle = \int_R f(x)\varphi(x)dx$$

est une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R}\ ;\ (1+|x|)^\alpha dx)$, ce qui est équivalent à assurer que l'application définie sur les fonctions C^∞, $\Phi \longmapsto \langle T, \Phi\rangle$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R};(1 + |x|)^\alpha dx))$.

Pour $\omega(x) = (1+x)^{\alpha-\nu-1/2}$, considérons l'espace $\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ 1\ ;\ \omega)$ et montrons que l'application définie sur les fonctions C^∞, $\Psi \longmapsto \langle T , \Psi \rangle$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ 1\ ;\ \omega)$:

Soit M une fonction de $\mathcal{D}(\,]0, +\infty[\,)$ égale à 1 sur le support de T, le théorème I assure que $\Psi \longmapsto M\Psi$ est une application linéaire continue de $\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ 1\ ;\ \omega)$ dans $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}\ ;\ (1+|x|)^\alpha dx))$, ce qui entraine la propriété puisque $\langle T, \Psi \rangle = \langle T, M\Psi \rangle$.
C'est donc que l'application :

$$\psi \longmapsto \int_0^{+\infty} g(x)\psi(x)x^{2\nu+1}dx$$

est une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R}^+\ ;(1+x)^{\alpha-\nu-1/2}x^{2\nu+1}dx)$ ce qui équivaut à $g(x) = 0(x^{\alpha-\nu-1/2})$ lorsque $x \to +\infty$.

De façon analogue, pour la seconde partie, $\psi \longmapsto \langle T , \psi \rangle$ étant une forme linéaire continue sur $\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ p\ ;\ \omega)$ avec $\omega(x) = (1+x)^\alpha$; $\Phi \longmapsto \langle T , \Phi \rangle$ en est une sur $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}\ ;(1+|x|)^{\alpha+\nu+1/2}dx))$.

En effet M étant une fonction de $\mathcal{D}(\,]0, +\infty[\,)$ égale à 1 sur le support de T, on a $\langle T, \Phi\rangle = \langle T , M\Phi \rangle$ et d'après le théorème II, $\Phi \longmapsto M\Phi$ est une application linéaire continue de $(L^1(\mathbb{R}\ ;\ (1+|x|)^{\alpha+\nu+1/2}dx))$ dans $\tilde{\mathcal{H}}(\nu\ ;\ p\ ;\ \omega)$.
On conclut comme précédemment.

<u>Remarque</u> : En s'inspirant des démonstrations des théorèmes I et II, on pourrait étudier directement le comportement à l'infini, pour la première partie de :

$$g(x) = \langle y^{2\nu+1}T_y\ ,\ (xy)^{-\nu}J_\nu(xy) \rangle$$

et pour la seconde partie de :

$$f(x) = \langle T_y\ ,\ e^{ixy} \rangle ,$$

et retrouver ainsi le théorème précédent.

Le corollaire important du théorème est avec les notations précédentes :
<u>Corollaire 2'</u> : <u>Soit σ (resp. σ_ν) la borne inférieure des nombres α tels que $f(x) = 0(|x|^\alpha)$ lorsque $|x| \longrightarrow +\infty$ (resp. $g(x) = 0(|x|^\alpha)$ lorsque $x \to +\infty$), on a :</u> $\sigma_\nu = \sigma - (\nu + 1/2)$.

4.3. Soit $p > 1$ et p' son conjugué. Pour tout poids ω de la classe $\Omega_0(p, \nu)$, considérons les espaces $X = L^p(\mathbb{R}^+;\ x^{2\nu+1}\ \omega(x)dx)$, $X' = L^{p'}(\mathbb{R}^+;\ x^{2\nu+1}[\omega(x)]^{1-p'}dx)$ en dualité pour le produit scalaire

$$\langle f , g \rangle_\nu = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)x^{2\nu+1}dx .$$

<u>Proposition</u> : <u>Pour tout couple (f, g) de $X \times X'$, la ν-convolution $f \underset{\nu}{*} g$ est une fonction égale pour presque tout x à</u>

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} f(y)g(z)D_\nu(x,y,z)(yz)^{2\nu+1}dy\,dz$$

ε étant égal à +1 (resp. -1) si ω croît (resp. décroît) à l'infini, $(f \underset{\nu}{*} g).\omega^{-\varepsilon/p}$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\|(f \underset{\nu}{*} g).\omega^{-\varepsilon/p}\|_\infty \leq C_\nu \|f\|_X \|g\|_{X'} .$$

Si $\omega = 1$, $(f \underset{\nu}{*} g)(x)$ est une fonction continue tendant vers zéro lorsque $x \to +\infty$.

Cette proposition est une conséquence immédiate du lemme 2, chap. I.3.2. En effet d'après ce lemme pour toute fonction φ de l'espace $Y = L^1(\mathbb{R}^+; x^{2\nu+1}[\omega(x)]^{\varepsilon/p}dx)$ et pour toute fonction f (resp. g) de X (resp. X'), $f \underset{\nu}{*} \varphi$ (resp. $g \underset{\nu}{*} \varphi$) appartient à X (resp. X'). Alors puisque

$$(1) \quad \int_{[\mathbb{R}^+]^3} \varphi(x)f(y)g(z)D_\nu(x,y,z)(xyz)^{2\nu+1}dx\,dy\,dz = \langle f, g \underset{\nu}{*} \varphi\rangle_\nu = \langle f \underset{\nu}{*} \varphi, g\rangle_\nu$$

$f \underset{\nu}{*} g$ est définie et est une fonction égale pour presque tout x à h(x), et est une forme linéaire continue sur Y avec

$$\langle f \underset{\nu}{*} g , \varphi\rangle_\nu = \int_0^{+\infty} (f \underset{\nu}{*} g)(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx$$

donc $(f \underset{\nu}{*} g).\omega^{-\varepsilon/p}$ est borné et d'après (1) :

$$(2) \qquad \|(f \underset{\nu}{*} g).\omega^{-\varepsilon/p}\|_\infty \leq C_\nu \|f\|_X \|g\|_{X'} .$$

Dans le cas particulier $\omega = 1$, on approche f (resp. g) dans X (resp. X') par une suite f_n (resp. g_n) de fonctions continues à support compact dans $[0, +\infty[$, et on remarque que $f_n \underset{\nu}{*} g_n$ converge uniformément vers $f * g$ d'après l'inégalité (2). Ceci prouve que $(f \underset{\nu}{*} g)(x)$ est une fonction continue qui tend vers zéro lorsque $x \longrightarrow \infty$.

Nous nous limitons maintenant au cas particulier $\omega(x) = (1 + x)^a$, a nombre réel quelconque. La majoration (2) entraîne :

$$(f \underset{\nu}{*} g)(x) = O(x^{|a|/p}) \quad \text{lorsque } x \to +\infty .$$

Nous allons voir que lorsque $H_\nu(f \underset{\nu}{*} g)$ est à support compact disjoint de l'origine, on peut donner une estimation meilleure utilisant le théorème 12 :

Théorème 13 : Soit $\omega(x) = (1+x)^a$, $p > 1$ et p' son conjugué, f dans $L^p(\mathbb{R}^+ ; x^{2\nu+1}\omega(x)dx)$, g dans $L^{p'}(\mathbb{R}^+; x^{2\nu+1}|\omega(x)|^{1-p'}dx)$, et supposons que $H_\nu(f \underset{\nu}{*} g)$ soit à support compact disjoint de l'origine, alors :

Si $a \leq (p-2)(\nu + \frac{1}{2})$, $(f \underset{\nu}{*} g)(x) = O(x^{-(2\nu+1+a)/p})$ lorsque $x \to +\infty$

Si $a > (p-2)(\nu + \frac{1}{2})$, $(f \underset{\nu}{*} g)(x) = O(x^{(2\nu+1+a)/p - 2\nu - 1})$ lorsque $x \to +\infty$

Soit M une fonction de $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$ égale à 1 sur le support de $H_\nu(f \underset{\nu}{*} g)$. Posons $F = MH_\nu(f)$, $G = M H_\nu(g)$. D'après le lemme 2, chap. I.3.2, F appartient à $\mathcal{H}(\nu ; p ; \omega)$ et G appartient à $\mathcal{H}(\nu ; p' ; \omega^{1-p'})$. D'après le théorème I, F (res. G) est transformée de Fourier d'une fonction φ (resp. ψ) appartenant à $L^p(\mathbb{R} ; \varpi(|x|)dx)$ (resp. $L^{p'}(\mathbb{R} ; \varpi'(|x|)dx)$) avec

$$\varpi(|x|) = (1 + |x|)^{(2-p)(\nu+1/2)+a} \quad , \quad \varpi'(|x|) = (1 + |x|)^{(2-p')(\nu+1/2)+a(1-p')} \; .$$

Alors la fonction entière $\theta = \varphi * \psi$, transformée de Fourier réciproque de $FG = H_\nu(f \underset{\nu}{*} g)$, définit une forme linéaire continue

$$h \longmapsto \int_R h(x)\theta(x)dx$$

sur l'espace $L^1(\mathbb{R} \; ; \; (1 + |x|)^c dx)$ avec $c = \left|(\frac{2}{p} - 1)(\nu + \frac{1}{2}) + \frac{a}{p}\right|$ ceci d'après le lemme 1, chap. I, 2.1.

C'est dire que $\theta(x) = 0(|x|^c)$ lorsque $|x| \to +\infty$.

Il reste à passer de la transformée de Fourier θ de FG, à la transformée de Hankel d'ordre ν , $f \underset{\nu}{*} g$, de FG , ce qui utilise la première partie du théorème 12 :

$$(f \underset{\nu}{*} g)(x) = 0(|x|^{c-\nu-1/2}) \text{ lorsque } |x| \to +\infty \quad .$$

Il est immédiat de vérifier que cette estimation est strictement meilleure que l'estimation $(f \underset{\nu}{*} g)(x) = 0(x^{|a|/p})$.

Remarques :

1) L'estimation est la même pour deux valeurs a et a' dont la demi-somme est $(p-2)(\nu+1/2)$. En particulier $(f \underset{\nu}{*} g)(x)$ tend vers zéro lorsque $x \longrightarrow +\infty$ pour $-(2 +1) < a < (2\nu+1)(p-1)$.

2) Dans le cas particulier où $p = p' = 2$ et $a = 0$, l'estimation $0(x^{-\nu-1/2})$ ne peut être améliorée en $0(x^{-\nu-1/2-\varepsilon})$ avec $\varepsilon > 0$.

En effet, H_ν étant une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^+;x^{2\nu+1}dx)$ sur lui-même, F et G appartiennent chacun à cet espace, ce qui entraîne que FG est une fonction sommable sur R (pour la mesure dx) : Inversement une fonction Φ sommable sur R, pour la mesure dx, à support compact dans $]0, +\infty[$, peut se factoriser en le produit ponctuel de deux fonctions $|\Phi|^{1/2}$ et $\Phi|\Phi|^{-1/2}$, appartenant chacune à $L^2(\mathbb{R}^+; x^{2\nu+1}dx)$. Ceci prouve que la transformée de Fourier de FG, tend vers zéro à l'infini, et pour un choix convenable de F et G aussi lentement qu'on le désire. La seconde partie du théorème 12, prouve donc que $(f \underset{\nu}{*} g)(x)$ est $0(x^{-\nu-1/2})$ et n'est pas $0(x^{-\nu-1/2-\varepsilon})$ en général.

On peut cependant améliorer l'estimation en remplaçant 0 par o :

Proposition : Soit f une fonction sommable à support compact dans $]0, +\infty[$, la transformée de Hankel d'ordre ν , $H_\nu(f)$ est $o(x^{-\nu-1/2})$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

On fait pour cela une étude directe de

$$H_\nu(f)(x) = < y^{2\nu+1} f(y), (xy)^{-\nu}J_\nu(xy) > \quad .$$

On utilise pour $x \geqslant \varepsilon > 0$, le développement asymptotique de $J_\nu(z)$ à l'ordre 1. Soit $R_1(z)$ le reste qui est $0(|z|^{-3/2})$, on a

$$< y^{2\ +1}f(y), (xy)^{-\nu}R_1(xy) > = 0(x^{-\nu-3/2}) \text{ lorsque } x \to +\infty \; .$$

Il reste à étudier

$$< y^{2\nu+1} f(y) \ , \ (xy)^{-\nu-1/2} e^{ixy} > = x^{-\nu-1/2} < y^{\nu+1/2} f(y), e^{ixy} > \quad .$$

Soit M une fonction de $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$ égale à $y^{\nu+1/2}$ sur le support de f, la transformée de Fourier de Mf tend vers zéro à l'infini d'où le résultat.

3. Dans le cas particulier $\nu = (k-2)/2$, $k \geq 1$ entier, on a le corollaire suivant du théorème 13 :

<u>Théorème 13'</u> : <u>Soit</u> f <u>et</u> g <u>deux fonctions radiales appartenant respectivement à</u> $L^p(\mathbb{R}^k)$ <u>et</u> $L^{p'}(\mathbb{R}^k)$ <u>avec</u> $1 < p < 2$ et p' <u>son conjugué</u>. <u>Supposons que la transformée de Fourier de</u> $f * g$ <u>soit à support compact disjoint de l'origine</u>, <u>alors</u>

$$(f * g)(t) = 0(|t|^{-(k-1)(1-1/p)}) \text{ lorsque } |t| \to +\infty \quad .$$

$|t|$ <u>étant la norme euclidienne dans</u> R^k .

<u>Lorsque</u> p = 2, <u>on peut remplacer</u> 0 <u>par</u> o <u>et le résultat est le meilleur possible</u>.

Lorsque p = 2, l'ensemble des produits de convolutions $f * g$ où f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^k)$, n'est autre que $\mathcal{A}(k\ ;\ 1)$. Le théorème concerne donc les fonctions radiales à support compact disjoint de l'origine, sommables dans $\mathbb{R}^k$.

-=-

CHAPITRE III

Quelques propriétés de transformées de Fourier de fonctions sommables sur R^k ou Z^k

1.1. Soit $\Omega(\mathbf{R}^k)$ (resp. $\Omega(\mathbf{Z}^k)$) la classe des poids ω possédant les propriétés suivantes :

i) ω est une application continue de $\mathbf{R}^k$ (resp. $\mathbf{Z}^k$) dans $[1, +\infty[$

ii) ω est à croissance lente à l'infini

iii) il existe une constante C telle que pour tout couple (t, u) d'éléments de $\mathbf{R}^k$ (resp. $\mathbf{Z}^k$) :

$$\omega(t + u) \leqslant C\omega(t)\omega(u)$$

iv) pour tout $r > 0$ fixé, le poids ω_r défini par $\omega_r(t) = \omega(rt)$, est équivalent à ω.

Il est bien connu que $L^1(\mathbf{R}^k; \omega(t)dt)$ est une algèbre de Banach régulière semi-simple, pour le produit de convolution ordinaire, dont l'algèbre transformée de Gelfand est l'espace des transformées de Fourier qu'on notera désormais $A(\mathbf{R}^k ; \omega)$ ou $A(R^k)$ lorsque $\omega = 1$.

De même l'algèbre de convolution $\ell^1(\mathbf{Z}^k ; \omega)$ des suites $c = (c_n)_{n\in\mathbf{Z}^k}$, telles que

$$||c|| = \sum_{n\in\mathbf{Z}^k} |c_n| \omega(n) < +\infty$$

a pour transformée de Gelfand une algèbre de fonctions continues sur la puissance k-ième du tore $\mathbf{T}$, noté $A(\mathbf{T}^k ; \omega)$ ou simplement $A(\mathbf{T}^k)$ lorsque $\omega = 1$.

On identifie $\mathbf{T}$ à $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ groupe additif des nombres réels modulo 2π, et $\mathbf{T}^k$ à $\mathbf{R}^k/(2\pi\mathbf{Z})^k$. $A(\mathbf{T}^k ; \omega)$ s'identifie à l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbf{R}^k$, 2π-périodique en chaque variable, à série de Fourier absolument convergente :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^k} c_n e^{int}$$

telles que :

$$||f|| = \sum_{n\in\mathbf{Z}^k} |c_n| \omega(n) < +\infty .$$

<u>Proposition</u> : <u>Soit</u> ω_1 <u>appartenant à</u> $\Omega(\mathbf{R}^k)$, ω_2 <u>appartenant à</u> $\Omega(\mathbf{Z}^k)$, <u>tels qu'il existe deux constantes</u> $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ <u>avec</u> $C_1 \leqslant \omega_1(n) / \omega_2(n) \leqslant C_2$ <u>pour tout</u> n <u>de</u> $\mathbf{Z}^k$.

<u>Alors les algèbres</u> $A(\mathbf{R}^k ; \omega_1)$ <u>et</u> $A(\mathbf{T}^k ; \omega_2)$ <u>sont localement isomorphes. De façon précise, prenant</u> $[-\pi , +\pi]$ <u>pour modèle de</u> T^k, <u>pour tout</u> a, $0 < a < \pi$, <u>toute fonction</u> f <u>de</u> $A(\mathbf{R}^k ; \omega_1)$ (<u>resp.</u> g <u>de</u> $A(\mathbf{T}^k ; \omega_2)$) <u>à support dans</u> $[-a, +a]^k$, <u>s'identifie à une fonction</u> g <u>de</u> $A(\mathbf{T}^k ; \omega_2)$ (<u>resp.</u> f <u>de</u> $A(R^k ; \omega_1)$ <u>et il existe deux constantes</u> $C(a) > 0$, $C'(a) > 0$, <u>telles que</u> :

$$C(a) ||f|| \leqslant ||g|| \leqslant C'(a) ||f|| .$$

Ceci résulte de l'isomorphisme local des groupes $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{T}^k$. C'est un résultat classique pour $\omega_1 = \omega_2 = 1$ (voir W. Rudin [31]). La démonstration s'adapte aisément au cas général. On peut aussi utiliser un théorème général pour deux groupes localement isomorphes quelconques démontré par R. Spector [35] .

Dans la suite nous ferons l'abus de notation de confondre $\Omega(\mathbb{R}^k)$ et $\Omega(\mathbb{T}^k)$ en $\Omega(k)$.

1.2. Soit $t = (t^{(1)}, \ldots, t^{(q)})$ la décomposition canonique d'un vecteur de $R^k = R^{k_1} \times \ldots \times R^{k_q}$ ($k_j \geqslant 1$, entier pour $j = 1, \ldots q$). ω appartenant à $\Omega(k)$, on considère la sous-algèbre fermée $\mathcal{R}(k_1, \ldots, k_q ; \omega)$ des fonctions de $A(R^k ; \omega)$ qui ne dépendent que des q distances $(|t^{(j)}|)$ $j = 1 \ldots q$. Cette algèbre de fonctions multiradiales s'identifie (voir chapitre I.4) à l'espace $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; 1 ; \omega^*)$ avec $\nu_j = (k_j-2)/2$ pour $j = 1, \ldots, q$, ω^* étant définie sur $[R^+]^q$ par

$$\omega^*(x_1, \ldots, x_q) = \int_{S_{k_1, \ldots, k_q}} \omega(x_1 t^{(1)}, \ldots, x_q t^{(q)}) d\mu(t)$$

où $S_{k_1, \ldots, k_q}$ est la multi-sphère de centre 0 de R^k définie par les q équations $|t^{(j)}| = 1$, $1 \leqslant j \leqslant q$, et $d\mu$ la mesure de masse +1 uniformément répartie sur $S_{k_1, \ldots, k_q}$.

On se limitera au cas où

$$\omega^*(x_1, \ldots, x_q) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant q} \omega_j^*(x_j) ,$$

chaque ω_j^* possède alors les propriétés i), ii), iv) de 1.1.

Nous imposerons en plus que ω_j^* soit croissant et possède la propriété iii), <u>et nous désignerons par $\Omega_o(k_1, \ldots, k_q)$ la classe des poids ω correspondants.</u>

Par exemple $\Omega_o(k_1, \ldots, k_q)$ contient :

- les poids de la forme $\omega(t) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant q} \omega_j(|t^{(j)}|)$

 où ω_j est un poids de $\Omega_o(1)$ (poids de $\Omega(1)$ pair et croissant sur R^+),

- les poids de la forme $\omega(t) = \prod_{1 \leqslant \ell \leqslant k} \omega_\ell(t_\ell)$

 où ω_ℓ est un poids de $\Omega_o(1)$, dans ce dernier cas ω^* est équivalent au poids $\prod_{1 \leqslant j \leqslant q} \left(\prod_{h_{j-1}+1 \leqslant \ell \leqslant h_j} \omega_\ell(x_j) \right)$ avec $h_j = k_1 + \ldots + k_j$.

On a vu au chapitre I.4 que $\mathcal{H}(\omega_1, \ldots, \omega_q ; 1 ; \omega^*)$ est égal au produit tensoriel $\widehat{\bigotimes}_{1 \leqslant j \leqslant q} \mathcal{H}(\nu_j ; 1 ; \omega_j^*)$.

C'est une algèbre de Banach semi-simple régulière de spectre $[\mathbb{R}^+]^k$, identique à sa transformée de Gelfand.

En application des théorèmes I' et II' (chapitre I.4) on a avec les notations introduites :

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit</u> $k_j \geq 1$ <u>entier</u>, $j = 1, \ldots, q$, ω <u>un poids de</u> $\Omega_0(k_1, \ldots, k_q)$ <u>avec</u> $\omega^*(x) = \prod_{j=1}^{q} \omega_j^*(x_j)$. <u>Posons</u>

$$\varpi(x) = \prod_{j=1}^{q} (1 + x_j)^{(k_j-1)/2} \quad \omega_j^*(x_j) .$$

<u>Pour toute fonction</u> M <u>appartenant à</u> $\mathcal{D}\left(\left]0 , +\infty\right[^q\right)$:

a) $F(|t^{(1)}|, \ldots, |t^{(q)}|) \longmapsto M(x)F(x)$

<u>est une application linéaire continue de</u> $\mathcal{B}(k_1, \ldots, k_q ; \omega)$ <u>dans</u> $A(\mathbb{R}^q; \varpi(|x|))$

b) $F(x) \longmapsto M(|t^{(1)}|, \ldots, |t^{(q)}|)F(|t^{(1)}|, \ldots, |t^{(q)}|)$

<u>est une application linéaire continue de</u> $A(\mathbb{R}^q ; \varpi(|x|))$ <u>dans</u> $\mathcal{B}(k_1, \ldots, k_q ; \omega)$.

Compte-tenu de la proposition de 1.1., on peut dans l'énoncé précédent remplacer $A(\mathbb{R}^q ; \varpi(|x|))$ par $A(\mathbb{T}^q ; \varpi(|n|))$ en supposant le support de M contenu dans $\left]0, \pi\right[^k$, ce qui n'est pas une restriction car la propriété 1.1.iv assure la stabilité de l'algèbre $A(\mathbb{R}^k; \omega)$ par homothétie de centre 0.

2.1. $\mathbb{R}^k$ étant muni de sa structure canonique d'espace Euclidien, soit p un entier tel que $1 \leq p \leq k-1$, et L une sous-variété linéaire de dimension p de $\mathbb{R}^k$. A toute fonction f continue sur $\mathbb{R}^k$ on associe sa restriction f_L à la sous-variété L. f_L est la classe des fonctions continues sur $\mathbb{R}^p$, lectures de f_L dans chaque carte isomorphisme de $\mathbb{R}^p$ sur L .

<u>Si un des représentants de</u> f_L <u>appartient à un espace</u> X <u>de fonctions continues sur</u> $\mathbb{R}^p$, <u>stable par transformation linéaire, on dit que</u> f_L <u>appartient à</u> X.

Soit O_L la projection orthogonale de l'origine O de $\mathbb{R}^k$ sur L ; notons ℓ le vecteur $\overrightarrow{OO_L}$ de $\mathbb{R}^k$. On obtient un représentant naturel g de f_L en choisissant un repère euclidien centré en O_L dans L : u étant la lecture dans ce repère, du vecteur $(t-\ell)$ pour tout point t de $\mathbb{R}^k \cap L$, on a :

$$g(u) = f(t) .$$

Lorsque X est un espace de Banach, nous supposons qu'il existe deux constantes, $0 < C < C'$, telles que pour toute fonction g appartenant à X, et tout élément σ appartenant au groupe des rotations SO(p) :

$$C \|g\|_X \leq \|\sigma g\|_X \leq C' \|g\|_X$$

où σg est la fonction appartenant à X définie par

$$(\sigma\, g)(u) = g(\sigma^{-1}(u)) .$$

En particulier il en est ainsi pour $X = A(\mathbb{R}^p ; \omega(|u|))$ où ω appartient à $\Omega_o(1)$.

Cette condition étant satisfaite, on définit la norme de f_L dans X comme la norme $\| g \|_X$ d'un représentant naturel g de f_L.

Lorsque f appartient à $A(\mathbb{R}^k)$ il est immédiat que f_L appartient à $A(\mathbb{R}^p)$. On peut poser le problème de reconstruire $A(\mathbb{R}^k)$ à partir des restrictions aux sous-variétés linéaires :

Problème 1. p étant un entier $1 \leqslant p \leqslant k-1$, chercher un poids ω appartenant à $\Omega_o(1)$, pour lequel une fonction continue sur $\mathbb{R}^k$, à support compact, appartienne à $A(\mathbb{R}^k)$ si sa restriction à tout sous espace vectoriel de dimension p appartient à $A(\mathbb{R}^p;\omega(|u|))$ avec une norme majorée par une constante ne dépendant pas du sous-espace vectoriel.

La condition sur le support est nécessaire pour l'existence d'un tel poids. En effet, pour $\nu = (k-2)/2$, $k \geqslant 2$ la fonction entière paire $F(x) = x^{-\nu} J_\nu(x)$ appartient à $A(\mathbb{R} ; \omega)$ pour tout poids ω de $\Omega_o(1)$, puisque sa transformée de Fourier est la fonction sommable à support compact

$$\sup(0,\ (1-x)^{\nu-(1/2)}\ ).$$

Cependant la fonction définie sur $\mathbb{R}^k$ $f(t) = F(|t|)$ est transformée de Fourier d'une mesure uniformément répartie sur la sphère de rayon 1, et n'appartient pas à $A(\mathbb{R}^k)$ mais à l'algèbre de Banach $B(\mathbb{R}^k)$ des transformées de Fourier des mesures de Radon bornées dans $\mathbb{R}^k$. On pourrait poser le problème 1 en remplaçant $A(\mathbb{R}^k)$ par $B(\mathbb{R}^k)$. La réponse est encore négative sans la restriction sur le support.

<u>Proposition : il existe une fonction continue sur</u> $\mathbb{R}^k$, <u>qui n'appartient pas à</u> $B(\mathbb{R}^k)$, <u>et dont la restriction à tout sous-espace vectoriel de dimension</u> 1, <u>appartient à</u> $A(\mathbb{R} ; \omega)$ <u>pour tout poids</u> ω <u>de</u> $\Omega_o(1)$.

L'exemple est fourni par la fonction précédente F, en prenant pour fonction sur $\mathbb{R}^k$: $f(t) = F (\sup_{i\leqslant j\leqslant k} | t_j|)$. Un calcul direct montre que la transformée de Fourier de $f(t_1,\ t_2) = F(\sup(|t_1|,|t_2|))$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction définie presque partout qui n'est pas sommable dans $\mathbb{R}^2$. Une réponse positive au problème 1 est difficile car des conditions de régularité sur les restrictions aux sous-espaces vectoriels n'entraîne pas de régularité pour f dans $\mathbb{R}^k$. Par exemple F étant une fonction à support compact dans $]0, +\infty[$ aussi régulière qu'on le désire

$$f(t) = F(\sup_{1\leqslant j\leqslant k} |t_j|)$$

n'est pas de classe C^1. Cependant nous verrons plus loin que cette fonction appartient à $A(\mathbb{R}^k)$ dès que F appartient à $A(\mathbb{R} ; (\log|x|)^{k-1})$ (le poids correct est $\mathrm{Sup}\ (1\ ,\ (\log|x|)^{k-1})$ ou un poids équivalent; nous ferons souvent l'abus de notation de ne conserver que l'équivalent à l'infini). Ce dernier résultat correspond à un problème plus facile que nous présenterons au chapitre IV, dans lequel les surfaces de niveaux de la fonction f seront imposées à l'avance, et $p = 1$.

Une application immédiate de la proposition 1, donne une limite inférieure pour une solution du problème 1 :

Proposition 2 : *Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq k-1$, $\varepsilon > 0$, ω un poids qui appartient à $\Omega_o(1)$ et est $O(|x|^{(k-p)/2 - \varepsilon})$ lorsque $|x| \longrightarrow +\infty$. Il existe une fonction continue sur $\mathbb{R}^k$ à support compact disjoint de l'origine, qui n'appartient pas à $A(\mathbb{R}^k)$ et dont la restriction à tout sous-espace vectoriel de dimension p appartient à $A(\mathbb{R}^p ; \omega(|u|))$ avec une norme majorée par une constante ne dépendant pas du sous-espace vectoriel.*

Remarquons d'abord qu'il existe des fonctions à support compact appartenant à $A(\mathbb{R} ; (1 + x)^{\alpha-\varepsilon})$ sans appartenir à $A(\mathbb{R} ;(1 + |x|^{\alpha})$: il suffit de considérer pour $\alpha > -1$, la fonction $\sup(0, (1-x^2)^{\alpha})$ dont la transformée de Fourier $x^{-(1/2+\alpha)} J_{1/2+\alpha}(x)$ est sommable par rapport à la mesure $(1 + |x|)^{\alpha-\varepsilon}$ sans l'être par rapport à la mesure $(1 + |x|)^{\alpha}$.

Choisissons donc une fonction F à support compact appartenant à $A(\mathbb{R};(1+|x|)^{(k-1)/2 - \varepsilon})$ sans appartenir à $A(\mathbb{R};(1+|x|)^{(k-1)/2})$. On peut sans modifier ces propriétés par une éventuelle translation sur F, choisir F à support compact contenu dans $]0, +\infty[$. La fonction $f(t) = F(|t|)$ n'appartient pas à $A(\mathbb{R}^k)$ alors que la restriction de f à tout sous-espace vectoriel de dimension p est la fonction radiale $g(u) = F(|u|)$ qui appartient à $X = A(\mathbb{R}^p;(1+|u|)^{(k-p)/2 - \varepsilon})$ et donc à fortiori à $A(\mathbb{R}^p ; \omega(|u|))$ avec

$$\|g\|_{A(\mathbb{R}^p;\omega)} \leq C\|F\|_X$$

où C ne dépend que du support de F.

2.2. On peut affaiblir le problème 1 en remplaçant les sous-espaces vectoriels de dimension p par les sous-variétés linéaires de dimension p. Là encore la régularité des restrictions de f aux sous-variétés linéaires n'entraîne pas de différentiabilité pour f (il est facile de construire, par exemple dans $\mathbb{R}^2$, une fonction continue à support compact, de restriction C^∞ sur tout droite, et qui n'est pas de classe C^1).

Nous allons voir que la limite inférieure obtenue pour le problème 1 est aussi une limite inférieure pour ce problème 2.

Nous aurons à utiliser une généralisation facile d'un théorème de S. Bernstein (voir par exemple A. Zygmund [42] , chap. VI 3.1). Pour $0 < \alpha < 1$, désignons par Λ_α les fonctions lipschitziennes d'ordre α , sur $\mathbb{R}$:

Lemme 3 : (type Bernstein) : Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, f une fonction 2π-périodique

1) Si f appartient à $\Lambda_{(1/2)+\alpha+\varepsilon}$ avec $0 \leq \alpha < 1/2$, alors f appartient à $A(\mathbf{T} ; 1 + |n|^{\alpha})$, ce qui n'a pas lieu en général si f appartient à Λ_{α}

2) Si f est de classe C^1, avec une dérivée appartenant à $\Lambda_{\alpha+\varepsilon}$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$, alors f appartient à $A(\mathbf{T} ; 1 + |n|^{\alpha+(1/2)})$; ce qui n'a pas lieu en général si la dérivée appartient à Λ_{α} .

Nous suivons la démonstration classique qui permet de démontrer un résultat plus général :

Soit ω une application continue, paire, de $\mathbf{R}$ dans $]0, +\infty[$, telle que pour tout $r > 0$ $\omega(rx)$ soit équivalent à $\omega(x)$ lorsque $|x| \longrightarrow +\infty$. Désignons encore par $A(\mathbf{T} ; \omega)$ l'espace des fonctions f de $L^1(\mathbf{T})$, telle que

$$\|f\| = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n| \, \omega(n) < +\infty$$

où $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ sont les coefficients de Fourier de f. $A(\mathbf{T} ; \omega)$ est un espace de Banach contenu topologiquement dans $L^1(\mathbf{T})$. Lorsque $\omega \geq 1$ et $\omega(x + y) \leq C\omega(x)\omega(y)$ pour tout couple (x,y) de $\mathbf{R}$, $A(\mathbf{T} ; \omega)$ est une algèbre de Banach.

Soit φ le module de continuité d'une fonction continue f 2π-périodique. On a

$$(1) \qquad \Delta(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x+h) - f(x-h)\right]^2 dx = 4 \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2 \sin^2 nh \ .$$

Pour tout entier positif j, posons :

$$B_j = \sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} \omega(n)\,|c_n| \leq \left[\sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} \omega^2(n)\right]^{1/2} \left[\sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} |c_n|^2\right]^{1/2}$$

Pour $\frac{\pi}{3} \leq |nh| \leq \frac{2\pi}{3}$, on a $\sin^2 nh \geq \frac{3}{4}$. En choisissant $h = \frac{\pi}{3}\, 2^{-j}$, on a donc d'après (1)

$$B_j \leq C\, 2^{j/2} \omega(2^j) \left[\Delta(\tfrac{\pi}{3}\, 2^{-j})\right]^{1/2} \leq C'\, 2^{j/2} \omega(2^j)\varphi(2^{-j}) \ .$$

La condition

$$(2) \qquad \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j/2} \omega(2^j)\varphi(2^{-j}) < +\infty$$

assure donc que f appartient à $A(\mathbf{T} ; \omega)$. (Lorsque $\omega = 1$, S. Bernstein montre que cette condition est aussi nécéssaire, voir J.P. Kahane [22]).

Notons que, posant $\theta(t) = \omega(t)\varphi(\frac{1}{t})$, et supposant que $\frac{\theta(\lambda t)}{\theta(t)}$ tend vers 1 uniformément en t, lorsque λ tend vers 1, la condition (2) est équivalente à

$$(2') \qquad \int_0^1 x^{-3/2}\, \omega(\tfrac{1}{x})\, \varphi(x)\, dx < +\infty \ .$$

Pour la deuxième partie, soit ψ le module de continuité de la dérivée f' de f. La condition

$$(3) \qquad \sum_{j=o}^{+\infty} \omega(2^j)\psi(2^{-j}) < +\infty$$

assure d'après la première partie, que f' appartient à $A(\mathbf{T}\,;(1+|n|)^{-1/2}\,\omega(n))$, c'est-à-dire que f appartient à $A(\mathbf{T}\,;\,(1+|n|)^{1/2}\,\omega(n))$.

Notons qu'avec la même hypothèse que pour (2), la condition (3) est équivalente à :

$$(3') \qquad \int_o^1 x^{-1}\,\omega(\tfrac{1}{x})\,\psi(x)dx < +\infty \; .$$

Il reste à montrer que les conditions de régularité sont critiques. Ceci résulte des propriétés des séries de Hardy et Littlewood (voir A. Zygmund [42], chap. V.4): Pour $0 < \beta < 1$, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\log n}}{n^{\beta+(1/2)}}\, e^{inx}$$

est uniformément convergente et sa somme est une fonction appartenant à Λ_β, mais qui n'appartient pas à $A(\mathbf{T}\,;\,1+|n|^{\beta-(1/2)})$ ce qui achève la démonstration de(1').

Pour (2') choisissons pour fonction f la primitive 2π-périodique de la fonction précédente avec $\beta = \alpha$, f n'appartient pas à $A(T\,;\,1+|n|^{\alpha+(1/2)})$. Notons que pour $\alpha > 1/2$ la seconde partie du lemme est conséquence immédiate de la première.

Nous pouvons maintenant démontrer :

<u>Théorème 4</u> : <u>Soit</u> ω <u>un poids appartenant à</u> $\Omega_o(1)$ <u>et</u> $O(x^{(k-1)/2+\alpha-\varepsilon})$ <u>lorsque</u> $x \to +\infty$, <u>avec</u> $\alpha \geqslant 0$, <u>et</u> $\varepsilon > 0$ <u>arbitrairement petit</u>. <u>Soit</u> p <u>la partie entière de</u> $(k-1)/2 + \alpha$.

<u>Il existe une fonction de classe</u> C^p <u>à support compact sur</u> R^k $(k \geqslant 2)$ <u>qui n'appartient pas à</u> $A(\mathbf{R}^k\,;\,1+|t|^\alpha)$ <u>et dont la restriction à toute droite appartient à</u> $A(\mathbf{R}\,;\,\omega)$ <u>avec une norme majorée par une constante indépendante de la droite</u>.

Soit $N \geqslant 0$ le plus grand entier strictement inférieur à $(k-1)/2 + \alpha$. Posons $\beta = (k-1)/2 + \alpha - N$.

1. Traitons d'abord le cas $0 < \beta \leq 1/2$.

Choisissons une fonction F à support compact contenu dans $]0, +\infty[$ de classe C^N, la dérivée d'ordre N, $F^{(N)}$ appartenant à $\Lambda_{(1/2)+\beta-\varepsilon'}$, avec $0 < \varepsilon' < \varepsilon < \beta$. La restriction de $f(t) = F(|t|)$ à une droite L de $\mathbf{R}^k$, a pour représentant naturel (voir 2.1.) la fonction sur $\mathbf{R}$:

$$g_\ell(x) = F(\left[|x|^2+|\ell|^2\right]^{1/2})$$

qui a les mêmes propriétés de régularité que F. D'après la première partie du lemme 3, $g_\ell^{(N)}$ appartient à $A(\mathbf{R}\,;\,1+|x|^{\beta-\varepsilon})$ c'est-à-dire que g appartient à $A(\mathbf{R}\,;\,1+|x|^{N+\beta-\varepsilon})$.

Montrons que sa norme dans cet espace, est majorée par une constante indépendante de ℓ .

Désignons par $\theta(x,y)$ la fonction C^∞ dans le complémentaire de l'origine de $\mathbb{R}^2$, $(x^2+y^2)^{1/2}$. Posons $G_y(x) = F^{(N)}(\theta(x,y))$, on a :

$$|G_y(x+h) - G_y(x-h)| \leq C|\theta(x+h,y)-\theta(x-h,y)|^\gamma \leq C|2h \sup_E \frac{\partial\theta}{\partial x}(x,y)|^\gamma$$

avec $\gamma = (1/2)+\beta-\varepsilon'$, E étant une couronne compact de $\mathbb{R}^2$ disjointe de l'origine, contenant le support de $F(\theta(x,y))$.

La démonstration du lemme 3, montre alors que la norme de G_y dans $A(\mathbb{R};1+|x|^{\beta-\varepsilon})$ est majorée par une constante indépendante de y.

D'autre part, pour tout entier $0 \leq j \leq N-1$, $F^{(j)}(\theta(x,y))$ a une norme dans $A(\mathbb{R})$ majorée par une constante indépendante de y. Cela résulte de l'inégalité valable pour toute fonction f de $A(\mathbb{R})$ qui appartient ainsi que sa dérivée (au sens des distributions) à $L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_{A(\mathbb{R})} \leq \text{Cte}\ (\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f'\|_{L^2(\mathbb{R})}) .$$

En conséquence pour tout j $0 \leq j \leq N$, $F^{(j)}(\theta(x,y))$ a une norme dans $A(\mathbb{R};1+|x|^{\beta-\varepsilon})$ majorée par une constante indépendante de y. Il en est donc de même pour la norme de $g^{(N)}$ dans $A(\mathbb{R};1+|x|^{\beta-\varepsilon})$ et pour la norme de g dans $A(\mathbb{R};1+|x|^{N+\beta-\varepsilon})$.

Il reste à montrer qu'il est possible de choisir F de façon que $F^{(N)}$ n'appartienne pas à $A(\mathbb{R};\ 1+|x|^\beta)$: considérons pour $\gamma = (1/2)+\beta-\varepsilon'$, la fonction

$$H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\log n}}{n^{\gamma+(1/2)}} \frac{1}{(in)^N} e^{inx}$$

dont la dérivée d'ordre N, $H^{(N)}$, appartient à Λ_γ sans appartenir à $A(\mathbb{T};1+|n|^\beta)$.

Soit $(\varphi_j)_{j=1,2}$ une partition de l'unité de classe C^∞ sur $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'une des deux fonctions $\varphi_j H^{(N)}$ n'appartient pas à $A(\mathbb{T};1+|n|^\beta)$. Pour chaque entier $0 \leq m \leq N-1$, $(\varphi_j^{(N-m)}H^{(m)})$ appartient à $A(\mathbb{T};1+|n|)$ donc à fortiori à $A(\mathbb{T};1+|n|^\beta)$. C'est donc que l'une des deux fonctions $(\varphi_j H)^{(N)}$ appartient à Λ_γ sans appartenir à $A(\mathbb{T};1+|n|^\beta)$. Ceci prouve qu'il existe une fonction F à support compact contenu dans $]0,\pi[$, de classe C^N dont la N-ième dérivée $F^{(N)}$ appartient à Λ_γ sans appartenir à $A(\mathbb{R};1+|x|^\beta)$.

2. Lorsque $1/2 < \beta \leq 1$, choisissons une fonction F à support compact dans $\mathbb{R}$, de classe C^{N+1}, la dérivée d'ordre N+1, $F^{(N+1)}$ appartenant à $\Lambda_{\beta-(1/2)}$. La fonction

$$g_\ell(x) = F(\left[|x|^2 + |\ell|^2\right]^{1/2})$$

appartient à $A(\mathbb{R};\ 1+|x|^{N+\beta-\varepsilon})$ car d'après la seconde partie du lemme 3, $g_\ell^{(N)}$ appartient à $A(\mathbb{R};\ 1+|x|^{\beta-\varepsilon})$. Montrons que la norme de $g_0^{(N)}$ dans cet espace est majorée par une constante indépendante de ℓ . Posons

$$G_y(x) = F^{(N)}(\theta(x,y))$$

et soit $$G'_y(x) = \frac{d\theta}{dx}(x,y)F^{(N+1)}(\theta(x,y))$$

la dérivée par rapport à x. On a

$$|G'_y(x+h) - G'_y(x-h)| \leq C|h|^{\beta-(1/2)}$$

où C ne dépend pas de ℓ . La démonstration du lemme 3 montre alors que la norme de G_y dans $A(\mathbb{R};\ 1+|x|^{\beta-\varepsilon})$ est majorée par une constante indépendante de y. La suite de la démonstration est analogue à celle du premier cas. On choisit pour $\gamma = \beta - \frac{1}{2}$ la fonction

$$H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in \log n}}{n^{\gamma+(1/2)}} \frac{1}{(in)^{N+1}} e^{inx}$$

dont la dérivée d'ordre N+1, $H^{(N+1)}$ appartient à Λ_γ et dont la dérivée d'ordre N, $H^{(N)}$ n'appartient pas à $A(\mathbf{T};\ 1+|n|^{\beta})$. On conclut d'une façon analogue à celle du premier cas.

Cette démonstration s'adapte au cas général des variétés linéaires de dimension quelconque :

<u>Théorème 4'</u> : <u>Soit</u> k, q <u>deux entiers</u> $1 \leq q \leq k-1$, ω <u>un poids appartenant à</u> $\Omega_o(1)$ <u>et</u> $O(x^{(k-q)/2+\alpha-\varepsilon})$ <u>lorsque</u> $x \to +\infty$, <u>avec</u> $\alpha \geq 0$ <u>et</u> $\varepsilon > 0$ <u>arbitrairement petit</u>. <u>Soit</u> p <u>la partie entière de</u> $(k-1)/2+\alpha$. <u>Soit</u> $\rho > 0$ <u>quelconque</u>.

<u>Il existe une fonction de classe</u> C^p <u>à support compact sur</u> $\mathbb{R}^k$, <u>qui n'appartient pas à</u> $A(\mathbb{R}^k;\ 1+|t|^{\alpha})$, <u>et dont la restriction à toute sous-variété linéaire L de dimension</u> q, <u>distante au plus de</u> ρ <u>de l'origine, appartient à</u> $A(\mathbb{R}^q\ ;\ \omega(|u|))$ <u>ave une norme majorée par une constante indépendante de</u> L

Soit F une fonction continue à support compact contenu dans $]\rho, +\infty[$. La restriction de $f(t) = F(|t|)$ à une sous-variété L linéaire de dimension q sur $\mathbb{R}^k$, a pour représentant naturel la fonction continue sur $\mathbb{R}^q$ (voir 2.1.) :

$$g_\ell(u) = F\left(\left[|u|^2 + |\ell|^2\right]^{1/2}\right).$$

La différence avec le cas q = 1 est la précaution à prendre sur le support de g_ℓ (disjoint de l'origine) pour obtenir son appartenance à $A(\mathbb{R}^q;\omega(|u|))$ à partir de l'appartenance à $A(\mathbb{R}\ ;\ 1+|x|^{(k-1)/2+\alpha-\varepsilon})$ de la fonction définie sur R

$$G_\ell(x) = F\left(\left[|x|^2 + |\ell|^2\right]^{1/2}\right).$$

On procède comme au théorème 4 pour remplir cette condition avec une fonction, à support compact dans $]\rho, +\infty[$, F , qui n'appartient pas à $A(\mathbb{R};\ 1+|x|^{(k-1)/2+\alpha})$.

<u>Remarque</u> : Si q est impair, on peut dans le théorème 4', se débarrasser de la

condition portant sur la distance des sous-variétés à l'origine. On utilise pour cela le théorème 4 de l'appendice du chapitre I : une fonction paire à support compact de $A(\mathbb{R};\ 1+|x|^{(k-1)/2+\alpha-\varepsilon})$ est profil d'une fonction de $A(\mathbb{R}^q;\omega(|u|))$ si q est impair. Le choix de la fonction F à support compact dans $]0,+\infty[$, est alors indépendant de la distance à l'origine des sous-variétés de dimension q.

2.3. Soit Γ une sous-variété de $\mathbb{R}^k$, de dimension q, de classe C^p, $p \geqslant 0$ entier. f étant une fonction continue dans $\mathbb{R}^k$, considérons la forme différentielle de degré zéro f_Γ restriction de f à Γ. Soit φ une carte locale de Γ, application de classe C^p, de rang q, d'un ouvert de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^k$

On dira que la restriction de f _à_ Γ, _appartient localement à_ $A(\mathbb{R}^q;\ \omega(|u|))$, ω _étant un poids de_ $\Omega_o(1)$, _si pour toute carte_ φ, $f\circ\varphi$ _appartient localement dans son ouvert de définition, à_ $A(\mathbb{R}^q;\ \omega(|u|))$.

L'ensemble des fonctions f qui possèdent cette propriété, est une algèbre (sans topologie) que nous notons $\mathcal{A}(\Gamma\ ;\ \omega)$. Cette notion dépend évidemment de la classe de Γ. Si Γ, de classe C^p, et Γ', de classe $C^{p'}$, coïncident comme ensembles, avec $p < p'$, on a l'inclusion

$$\mathcal{A}(\Gamma\ ;\ \omega) \subset \mathcal{A}(\Gamma'\ ;\ \omega).$$

On pourrait poser le problème de chercher la valeur minimum de p pour laquelle $\mathcal{A}(\Gamma\ ;\ \omega)$ n'est pas vide. Nous supposerons dans la suite p assez grand pour que les fonctions suffisamment régulières appartiennent à $\mathcal{A}(\Gamma\ ;\ \omega)$.

Par exemple lorsque $\omega = 1$, pour toute sous-variété Γ de dimension q, de classe C^q, $\mathcal{A}(\Gamma\ ;\ 1)$ contient les fonctions de classe C^q. Ceci résulte de la :

Proposition : _Soit_ f _une fonction appartenant à_ $L^2(\mathbb{T}^k)$ _ainsi que toutes les dérivées partielles (au sens des distributions)_ $(\partial^{(j)}/\partial t_{\ell_1} \ldots \partial t_{\ell_j})(f)$, _où_ $(\ell_1, \ldots, \ell_j)$ _est une combinaison de_ j _termes extraits de_ $(1, \ldots, k)$. _Alors_ f _appartient à_ $A(\mathbb{T}^k)$ et

$$\|f\|_{A(\mathbb{T}^k)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^k)} + \sum_{j=1}^{k} a_j \left(\sum \left\| \frac{\partial^{(j)} f}{\partial t_{\ell_1} \ldots \partial t_{\ell_2}} \right\|_{L^2} \right)$$

C'est une conséquence de la majoration

$$\sum_{n_1\ldots n_j \neq 0} |C_{n_1\ldots n_j}| \leqslant \left[\sum_{n_1\ldots n_j\neq 0} |n_1\ldots n_j\, C_{n_1\ldots n_j}|^2 \right]^{1/2} \left[2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right]^{j/2}$$

Nous nous limitons maintenant au cas où Γ est de dimension 1 ("courbe"). On a en conséquence du lemme 3 :

Proposition 5 : _Soit_ N _la partie entière de_ $\alpha \geqslant 0$, ω _un poids de_ $\Omega_o(1)$ _tel que_ $\omega(x) = O(x^\alpha)$ _lorsque_ $x \to +\infty$.

1. Si $\alpha - N < 1/2$, pour toute courbe Γ de classe C^{N+1} de $\mathbb{R}^k$, $\mathcal{A}(\Gamma\ ;\ \omega)$ contient les fonctions de classe C^N dont les dérivées partielles d'ordre N sont en chaque variable dans $\Lambda_{(1/2)+\alpha-N+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

2. Si $(1/2) \leq \alpha - N < 1$, pour toute courbe Γ de classe C^{N+2}, $\mathcal{A}(\Gamma\ ;\ \omega)$ contient les fonctions de classe C^{N+1} dont les dérivées partielles d'ordre N+1 sont en chaque variable dans $\Lambda_{\alpha-N-(1/2)+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Soit Γ une courbe de $\mathbb{R}^k$ non linéaire de classe quelconque, il est clair que $A(\mathbb{R}^k)$ n'est pas contenu dans $\mathcal{A}(\Gamma\ ;\ \omega)$. Pour le voir il suffir de considérer les fonctions de $A(\mathbb{R}^k)$ qui localement ne dépendent que d'une coordonnée en laquelle ce sont des fonctions de $A(\mathbb{R})$. D'après le théorème de Beurling et Helson, [2], elles ne peuvent être lues dans une carte non linéaire, comme des fonctions de $A(\mathbb{R})$.

On peut poser le problème de chercher le poids $\tilde{\omega}$ de $\Omega_o(1)$ le plus lent pour lequel $A(\mathbb{R}^k;\ \tilde{\omega}(|t|))$ est contenu dans $\mathcal{A}(\Gamma\ ;\ \omega)$ pour une courbe Γ non linéaire de classe C^∞ et un poids ω de $\Omega_o(1)$. La réponse est :

Théorème 6 : Soit ω et $\tilde{\omega}$ deux poids appartenant à $\Omega_o(1)$ la condition nécéssaire et suffisante pour que les restrictions des fonctions de $A(\mathbb{R}^k;\ \tilde{\omega}(|t|))$ à une courbe non linéaire Γ de $\mathbb{R}^k$, de classe C^∞, appartiennent localement à $A(\mathbb{R};\ \omega(x))$ est

$$\liminf_{x \to +\infty} x^{-1/2} \left[\omega(x)\right]^{-1} \tilde{\omega}(x) > 0.$$

Soit f une fonction de $A(\mathbb{T}^k;\ \tilde{\omega})$

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} c_n e^{int} \quad \text{avec} \quad \|f\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} |c_n|\ \tilde{\omega}(|n|) < +\infty .$$

Considérons une carte de Γ qu'on peut supposer application $\varphi : x \longmapsto (\varphi_j(x))$ $j=1,\dots,k$ d'un intervalle ouvert contenu dans $[-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < \pi$ arbitraire) dans un cube $[-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon]^k$. On prolonge cette application en une application C^∞ de $[-\pi+\varepsilon\ ,\ \pi-\varepsilon]$ dans $[-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon]^k$. D'après le théorème du graphe fermé, une condition nécessaire et suffisante pour que $f\circ\varphi$ appartienne à $A(\mathbb{T}\ ;\ \omega)$ pour toute fonction f de $A(\mathbb{T}^k;\ \tilde{\omega})$ est que

$$(1) \qquad \| e^{i(n_1\varphi_1(x)+\ \dots\ +\ n_k\varphi_k(x)} \|_{A(\mathbb{T};\omega)} = O(\ \tilde{\omega}(|n|)\ )$$

lorsque $|n| \longrightarrow +\infty$.

Il est clair qu'il existe un intervalle de $[-\pi,\ +\pi]$ sur lequel l'une des dérivées secondes $\varphi_j''(x)$, reste supérieur à une constante $\rho > 0$ (sinon Γ serait linéaire).

Supposons qu'il en soit ainsi pour $\varphi_1''(x)$, la minoration

$$\|e^{in_1\varphi_1(x)}\|_{A(\mathbf{T};\omega)} \geqslant C|n_1|^{1/2}\omega(n_1)$$

qui d'après (1) entraîne la condition nécessaire du théorème, est une application d'un théorème de Y.Katznelson, [24] :

Théorème (Y.Katznelson) : Soit ω une application de $\mathbf{Z}$ dans $[1, +\infty[$ telle que $\limsup_{|n|\to\infty} \omega(2n)/\omega(n) < +\infty$, $A(\mathbf{T};\omega)$ l'espace de Banach des séries de Fourier

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx} \quad \text{telles que } \|f\|_{A(\mathbf{T};\omega)} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|\omega(n) < +\infty .$$

Si φ est une fonction à valeurs réelles de classe C^2 sur un intervalle I où $\varphi''(x) \geqslant \rho > 0$ et si $e^{i\varphi}$ est 2π-périodique, on a pour tout n de $\mathbf{Z}$:

$$\|e^{in\varphi(x)}\|_{A(\mathbf{T};\omega)} \geqslant C|n|^{1/2}\omega(n)$$

où $C > 0$ ne dépend que de I et ρ .

Reste à montrer que la condition est suffisante.

Soit u un point de la sphère unité de $\mathbf{R}^k$, à tout point n de Z^k correspond un point u tel que $n = |n|u$. Posons

$$\psi_u(x) = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} u_j\varphi_j(x) .$$

On doit montrer que

$$\|e^{i|n|\psi_u(x)}\|_{A(\mathbf{T};\omega)} \leqslant C(1+|n|)^{1/2}\omega(|n|)$$

où C ne dépend que de φ.

Ceci est une conséquence du théorème suivant :

Théorème 7 : Soit $p \geqslant 1$ un entier, ω une application continue paire de $\mathbf{R}$ dans $[1, +\infty]$, croissante sur $\mathbf{R}^+$ et telle que pour un $\varepsilon > 0$, $x^{-p+(1/2)+\varepsilon}\omega(x)$ soit décroissant lorsque x est assez grand. Une fonction f à valeurs réelles, 2π- périodique, appartenant à $L^2(\mathbf{T})$ ainsi que sa p-ième dérivée (au sens des distributions), appartient à $A(\mathbf{T};\omega)$ et pour tout nombre réel n on a :

$$\|e^{inf}\|_{A(\mathbf{T};\omega)} \leqslant C(1+|n|^{(1/2)}\omega(n))$$

où C ne dépend que des normes dans $L^2(\mathbf{T})$ des p premières dérivées de f (qui est en fait de classe C^{p-1}).

Nous le démontrerons au paragraphe suivant. L'application en est immédiate car les dérivées de tous ordres en x de la fonction $\psi_u(x)$ sont majorés en modules par une constante indépendante de u. Ceci achève la démonstration du théorème 6.

Remarques :

1. On obtiendra dans les paragraphes suivants, une généralisation à plusieurs dimensions du théorème 7 ainsi que du théorème de Katznelson, si bien qu'il est

possible d'obtenir sans difficultés une généralisation du théorème 6 :

Théorème : Soient ω et $\tilde{\omega}$ deux poids appartenant à $\Omega_o(1)$, la condition nécessaire et suffisante pour que les restrictions des fonctions de $A(\mathbb{R}^k;\ \tilde{\omega}(|t|))$ à une sous-variété non linéaire Γ de $\mathbb{R}^k$, de classe C^∞ de dimension q, $1 \leqslant q \leqslant k-1$, appartiennent localement à $A(\mathbb{R}^q;\omega(|u|))$ est:

$$\liminf_{x\to+\infty} x^{-q/2}\left[\omega(x)\right]^{-1}\tilde{\omega}(x) > 0 .$$

2. On peut poser le problème de chercher un poids ω tel que toute fonction continue sur $\mathbb{R}^k$ appartenant à $\mathcal{A}(\Gamma;\omega)$ pour toute courbe Γ de classe C^∞, appartienne à $A(\mathbb{R}^k)$. La démonstration du théorème 4 s'adapte immédiatement pour obtenir la même limitation inférieure que dans le cas des droites.

Théorème : Soit ω un poids appartenant à $\Omega_o(1)$ et $O(x^{(k-1)/2\,+\,\alpha\,-\,\varepsilon})$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$, avec $\alpha \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Soit p la partie entière de $(k-1)/2 + \alpha$. Il existe une fonction de classe C^p à support compact sur $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ qui n'appartient pas à $A(\mathbb{R}^k;\ 1 + |t|^\alpha)$ et dont la restriction à toute courbe C^∞ de $\mathbb{R}^k$, appartient localement à $A(\mathbb{R}\ ;\ \omega)$.

3.1. Le théorème 7 est un corollaire d'un résultat qui donne une condition suffisante de régularité pour qu'une fonction appartienne à l'espace $A(\mathbb{T}\ ;\omega)$ avec un bon contrôle de la norme, ceci pour un poids ω convenable;

Théorème 8 : Soit $p \geqslant 1$ un entier, ω une application continue paire de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty]$, croissante sur $\mathbb{R}^+$ et telle que pour un $\varepsilon > 0$, $x^{-p+(1/2)+\varepsilon}\omega(x)$ soit décroissante lorsque x est assez grand. Une fonction f, 2π-périodique appartenant à $L^2(\mathbb{T})$ ainsi que sa p-ième dérivée au sens des distributions, appartient à $A(\mathbb{T};\omega)$ et on a

$$\|f\|_{A(\mathbb{T};\omega)} \leqslant C\,\|f\|_{L^2}^{1-\,1/2p}\,\|f^{(p)}\|_{L^2}^{1/2p}\ \omega\left(\left|\frac{\|f^{(p)}\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}}\right|^{1/p}\right)$$

où C ne dépend pas de f.

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de f, $N > 0$ arbitraire, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\omega(n)|c_n| \leqslant \left[\sum_{|n|\leqslant N}|c_n|^2\right]^{1/2}\left[A(N)\right]^{1/2} + \left[\sum_{|n|>N}|n^p\,c_n|^2\right]^{1/2}\left[B(N)\right]^{1/2}$$

avec : $A(N) = \sum_{|n|\leqslant N}|\omega(n)|^2 \leqslant (2N+1)\left[\omega(N)\right]^2$

et $B(N) = \sum_{|n|>N}\left|\frac{\omega(n)}{n^{2p}}\right|^2 \leqslant \frac{\left[\omega(N)\right]^2}{N^{2p-1-2\varepsilon}}\sum_{|n|>N}\frac{1}{|n|^{1+2\varepsilon}} \leqslant C_1\,N^{1-2p}\left[\omega(N)\right]^2 .$

Posons $a = \|f\|_{L^2}$, $b = \|f^{(p)}\|_{L^2}$, on a donc :

$$\|f\|_{A(\mathbb{T};\omega)} \leqslant C_2\left[aN^{1/2} + bN^{(1/2)-p}\right]\omega(N) .$$

En choisissant $N = \left|\frac{b}{a}\right|^{1/p}$, on obtient le résultat.

En particulier, on a le :

Corollaire : Soit $\alpha \geqslant 0$, f une fonction 2π-périodique appartenant à $L^2(\mathbf{T})$ ainsi que sa p-ième dérivée, avec $p > \alpha + 1/2$. Alors f appartient à $A(\mathbf{T};\ 1+|n|^{\alpha})$ (et en particulier est de classe C^{p-1}) et

$$\|f\|_{A(\mathbf{T};1+|n|^{\alpha})} \leqslant C\,\|f\|_{L^2}^{1-(1/p)(\alpha+(1/2))}\,\|f^{(p)}\|_{L^2}^{(1/p)(\alpha+(1/2))}$$

où C ne dépend pas de f.

Un second corollaire est le théorème 7 qu'on obtient en appliquant le théorème 8 à la fonction $\varphi(x) = e^{\inf(x)}$. Les hypothèses du théorème 8 sur la fonction f, entraînant que f est de classe C^{p-1}, sont alors satisfaites aussi par la fonction $\varphi(x)$.

D'autre part, on remarque que pour tout $\lambda \geqslant 0$, on a lorsque x est assez grand :

$$\omega(\lambda x) \leqslant \sup(1,\ \lambda^{p-(1/2)-\varepsilon})\,\omega(x)\ .$$

Cela résulte, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, de la croissance de ω sur $\mathbf{R}^+$, et pour $\lambda \geqslant 1$ de la décroissance de $x^{-p+(1/2)+\varepsilon}\,\omega(x)$ lorsque x est assez grand.

Remarque : La majoration du théorème 7 est encore valable, en prenant n dans $\mathbf{Z}$, pour une fonction g définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, telle que e^{ig} soit 2π -périodique, et $g = f + h$ où f vérifie les hypothèses du théorème 7 et h est de classe C^p.

Le théorème 7 signifie que pour toute fonction F de $A(\mathbf{T};1+|n|^{1/2}\omega(n))$, F(f) appartient à $A(\mathbf{T};\omega)$ dès que f est une fonction de $A(\mathbf{T};\omega)$ à valeurs réelles suffisamment régulière. Lorsque cette propriété a lieu pour toute fonction f à valeurs réelles de $A(\mathbf{T};\ \omega)$ on dit que $A(\mathbf{T};1+|n|^{1/2}\omega(n))$ opère dans $A(\mathbf{T};\omega)$. Il en est ainsi lorsque ω a une croissance assez "proche" de celle d'une puissance entière de x :

Théorème 7' : Soit ω une application continue paire de $\mathbf{R}$ dans $[1,\ +\infty]$. Supposons qu'il existe un entier $\ell \geqslant 1$ tel que $x^{-\ell}\omega(x)$ soit croissant et, pour un $\varepsilon > 0$, $x^{-2\ell+(1/2)+\varepsilon}\omega(x)$ décroissant; lorsque $x > 0$ est assez grand. Alors pour toute fonction f appartenant à $A(\mathbf{T};\omega)$ à valeurs réelles, et pour tout nombre réel u, on a :

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T};\omega)} \leqslant C(1+|u|^{1/2}\omega(u))$$

où C ne dépend pas de u.

Les fonctions de $A(\mathbf{T};\omega)$ sont de classe C^{ℓ}. On pose $\varpi(x) = \dfrac{\omega(x)}{1+|x|^{\ell}}$ et on remarque que :

$$\|\varphi\|_{A(\mathbf{T};\omega)} \leqslant C_1\left[\|\varphi\|_{L^2} + \|\varphi^{(\ell)}\|_{A(\mathbf{T};\varpi)}\right]$$

où C_1 ne dépend pas de φ . Donc,

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T};\omega)} \leq C_2(1 + |u|^{\ell})\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T};\varpi)}$$

où C_2 ne dépend pas de u. ϖ vérifie les hypothèses du théorème 7 relatives à $p = \ell$, f étant de classe C^{ℓ}, on a donc :

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T};\varpi)} \leq C_2(1+|u|^{1/2}\,\varpi(u)) \quad \text{d'où le résultat.}$$

Remarquons que les restrictions sur le poids ω ne sont pas nécessaires. Lorsque $\omega(x) = 1 + |x|^{\alpha}$ il est facile de montrer directement (voir N.Leblanc [26]) que la propriété a lieu pour $\alpha \geq 1$, alors que le théorème 7' ne s'applique que si $1 \leq \alpha < 3/2$ et $\alpha \geq 2$.

3.2. Il est possible d'obtenir un résultat analogue pour les espaces $A(\mathbf{T}^k;\omega)$ lorsque ω est un poids radial dans $\mathbf{R}^k$, ou un produit tensoriel de k poids ne dépendant que d'une coordonnée.

Dans le premier cas, on a :

Théorème 9 : Soit $k \geq 1$, $q \geq 1$, deux entiers, ω une application continue paire de R dans $[1, +\infty[$ croissante sur $\mathbf{R}^+$ et telle que pour un $\varepsilon > 0$, $x^{-2q+(k/2)+\varepsilon}\omega(x)$ soit décroissante lorsque x est assez grand. Une fonction f sur $\mathbf{R}^k$, 2π-périodique en chaque variable appartenant à $L^2(\mathbf{T}^k)$ ainsi que $\Delta^q(f)$ où Δ^q est la puissance q-ième du Laplacien, appartenant à $A(\mathbf{T}^k;\omega(|n|))$ et on a :

$$\|f\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega(|n|))} \leq C\|f\|_{L^2}^{1-(k/4q)}\,\|\Delta^q f\|_{L^2}^{k/4q}\,\omega\left(\left|\frac{\|\Delta^q f\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}}\right|^{1/2q}\right)$$

où C ne dépend pas de f.

Soit $n = (n_1, \dots, n_k)$ un point de $\mathbf{Z}^k$ et $|n| = \left[\sum_{1\leq j\leq k} n_j^2\right]^{1/2}$, on a :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}^k} \omega(|n|)|c_n| \leq \left[\sum_{|n|\leq N}|c_n|^2\right]^{1/2}\left[A(N)\right]^{1/2} + \left[\sum_{|n|>N}|n^{2q}c_n|^2\right]^{1/2}\left[B(N)\right]^{1/2}$$

$N > 0$ arbitraire, avec :

$$A(N) = \sum_{|n|\leq N}\left[\omega(|n|)\right]^2 \leq C_1\, N^k\left[\omega(N)\right]^2, \quad \text{et}$$

$$B(N) = \sum_{|n|>N}\frac{\left[\omega(|n|)\right]^2}{|n|^{4q}} \leq \frac{\left[\omega(N)\right]^2}{N^{4q-k-2\varepsilon}}\sum_{|n|>N}\frac{1}{|n|^{k+2\varepsilon}} \leq C_2\, N^{k-4q}\left[\omega(N)\right]^2.$$

Posons $a = \|f\|_{L^2(\mathbf{T}^k)}$, $b = \|\Delta^q f\|_{L^2(\mathbf{T}^k)}$, on a

$$\|f\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega(|n|))} \leq C_3\left[a\,N^{k/2} + b\,N^{(k/2)-2q}\right]\omega(N)$$

On obtient le résultat en choisissant $N = \left|\frac{b}{a}\right|^{1/2q}$

En particulier, notons le :

Corollaire : Soit $\alpha \geqslant 0$ et f une fonction sur $\mathbb{R}^k$, 2π-périodique en chaque variable, appartenant à $L^2(\mathbb{T}^k)$ ainsi que $\Delta^q f$ où $q > \alpha/2 + k/4$ est entier. Alors f appartient à $A(\mathbb{T}^k;\ 1+|n|^\alpha)$ et

$$\|f\|_{A(\mathbb{T}^k;1+|n|^\alpha)} \leqslant C\|f\|_{L^2}^{1-(1/2q)(\alpha+k/2)}\ \|\Delta^q f\|_{L^2}^{(1/2q)(\alpha+k/2)}$$

où C ne dépend pas de f.

Remarquons que l'hypothèse que f et $\Delta^q f$ appartiennent à $L^2(\mathbb{T}^k)$ $q \geqslant 1$ entier, entraîne donc que f est de la classe C^p où p est le plus grand entier strictement inférieur à $2q - k/2$.

Dans le cas d'un produit tensoriel de k poids, on a :

Théorème 10 : Soit $k \geqslant 2$ entier, et pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant k$ un entier $p_j \geqslant 1$ et une application ω_j continue paire de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ et telle que pour un $\varepsilon_j > 0$, $x^{-p_j+(1/2)+\varepsilon_j}\,\omega_j(x)$ soit décroissant lorsque x est assez grand. Soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_j)$ un élément de l'ensemble $\mathscr{C}(j)$ des combinaisons de j termes extraits de $(1, \dots, k)$ et D_ℓ la dérivation $(\partial/\partial t_{\ell_1})^{(p_{\ell_1})} \dots (\partial/\partial t_{\ell_j})^{(p_{\ell_j})}$. On convient de faire correspondre l'identité (dérivation vide) à l'ensemble $\mathscr{C}(0)$.

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^k$, 2π-périodique en chaque variable, appartenant à $L^2(\mathbb{T}^k)$ ainsi que la dérivée partielle $D_\ell f$ pour tout ℓ et tout j. Alors f appartient à $A(\mathbb{T}^k;\omega)$ où ω est le poids sur $\mathbb{Z}^k$ défini par $\omega(n_1,\dots,n_k) = \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \omega_j(n_j)$. Posons

- pour chaque entier $1 \leqslant q \leqslant k$:

  $\varepsilon(\ell,q) = +1$ si q appartient à $(\ell_1, \dots, \ell_j)$, $\varepsilon(\ell,q) = -1$ sinon.

- pour $1 \leqslant j \leqslant k$

$$a(\lambda,\ell) = 2^{1-k}\sum_{1\leqslant q\leqslant j}\frac{\varepsilon(\lambda,\ell_q)}{p_{\ell_q}}(1/2 - p_{\ell_q}) + 2^{-k}\sum_{j+1\leqslant q\leqslant k}\frac{\varepsilon(\lambda,\ell_q)}{p_{\ell_q}} \quad \text{si } \lambda \neq \ell$$

$$a(\ell,\ell) = 1 + 2^{1-k}\sum_{1\leqslant q\leqslant j}\frac{1}{p_{\ell_q}}(1/2 - p_{\ell_q}) - 2^{k}\sum_{j+1\leqslant q\leqslant k}\frac{1}{p_{\ell_q}}$$

- et pour $j = 0$:

$$a(\lambda,\ell) = 2^{-k}\sum_{1\leqslant q\leqslant k}\frac{1}{p_q} \quad \text{si } \lambda \neq \ell\ ,\quad a(\ell,\ell) = 1 - 2^{-k}\sum_{1\leqslant q\leqslant k}\frac{1}{p_q}$$

On a:

$$\|f\|_{A(\mathbb{T}^k;\omega)} \leqslant C\Bigg[\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant k\\ \ell\in\mathscr{C}(j)}}\ \prod_{\substack{0\leqslant r\leqslant k\\ \lambda\in\mathscr{C}(r)}} \|D_\lambda f\|_{L^2}^{a(\lambda,\ell)}\Bigg]\ \prod_{1\leqslant j\leqslant k}\omega_j\Bigg(\prod_{\substack{0\leqslant r\leqslant k\\ \lambda\in\mathscr{C}(r)}}\|D_\lambda f\|_{L^2}^{(2^{1-k})\frac{\varepsilon(\lambda,j)}{p_j}}\Bigg)$$

où C ne dépend pas de f.

Pour chaque entier $1 \leq q \leq k$, soit $N_q > 0$ arbitraire. Pour chaque ℓ de $\mathcal{C}(j)$ $0 \leq j \leq k$, on considère le sous-ensemble E_ℓ de $\mathbb{Z}^k$ défini par

$|n_q| > N_q$ lorsque q appartient à $(\ell_1, \ldots, \ell_j)$

$|n_q| \leq N_q$ lorsque q appartient au complémentaire $(\ell_{j+1}, \ldots, \ell_k)$.

$\mathbb{Z}^k$ est la réunion des ensembles disjoints E_ℓ ; Pour majorer $\|f\|_{A(\mathbb{T}^k;\omega)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} \omega(n)|c_n|$

on majore sur chaque bloc E_ℓ par la méthode du théorème 8 :

$$\sum_{n\in E_\ell} \omega(n)|c_n| \leq \left[\sum_{n\in Z^k} |n_{\ell_1}^{p_{\ell_1}} \cdots n_{\ell_j}^{p_{\ell_j}} c_n|^2\right]^{1/2} \left[\prod_{1\leq q\leq j} \sum_{|n_{\ell_q}|>N_{\ell_q}} \left|\frac{\omega_{\ell_q}(n_{\ell_q})}{n_{\ell_q}^{p_{\ell_q}}}\right|^2\right] \left[\prod_{j+1\leq q\leq k} \sum_{|n_{\ell_q}|\leq N_{\ell_q}} [\omega_{\ell_q}(n_{\ell_q})]^2\right]^{1/2}$$

avec la convention que si $j = 0$, on remplace $n_{\ell_1}^{p_{\ell_1}}, \ldots, n_{\ell_j}^{p_{\ell_j}}$, ainsi que le second facteur par 1. On choisit :

$$N_q = \prod_{\substack{0\leq r\leq k \\ \lambda\in\mathcal{C}(r)}} \|D_\lambda f\|_{L^2}^{(2^{1-k})\frac{\varepsilon(\lambda,q)}{p_q}}$$

On obtient par les majorations analogues à celles du théorème 8 :

$$\sum_{n\in E_\ell} \omega(n)|c_n| \leq C\left[\prod_{\substack{0\leq r\leq k \\ \lambda\in\mathcal{C}(r)}} \|D_\lambda f\|_{L^2}^{a(\lambda,\ell)}\right] \prod_{1\leq q\leq k} \omega_q\Big(\prod_{\substack{0\leq r\leq k \\ \lambda\in\mathcal{C}(r)}} \|D_\lambda f\|_{L^2}^{(2^{1-k})\frac{\varepsilon(\lambda,q)}{p_q}}\Big)$$

ce qui donne le résultat. Par exemple, pour $k = 2$, en posant

$$P = \|f\|_{L^2(T^2)},\quad Q = \left\|\frac{\partial^{p_1} f}{\partial t_1^{p_1}}\right\|_{L^2},\quad R = \left\|\frac{\partial^{p_2} f}{\partial t_2^{p_2}}\right\|_{L^2},\quad S = \left\|\frac{\partial^{p_1+p_2} f}{\partial t_1^{p_1}\,\partial t_2^{p_2}}\right\|_{L^2},\ \text{on a :}$$

$$\|f\|_{A(\mathbb{T}^2;\,\omega)} \leq 2C\, P^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2})}\, Q^{\frac{1}{4}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}\, R^{\frac{1}{4}(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})}\, S^{\frac{1}{4}(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2})-\frac{1}{2}} \left((PS)^{\frac{1}{2}}+(QR)^{\frac{1}{2}}\right)\omega_1\Big(\left|\frac{QS}{PR}\right|^{\frac{1}{2p_1}}\Big)\,\omega_2\Big(\left|\frac{RS}{QP}\right|^{\frac{1}{2p_2}}\Big).$$

3.3. Les théorèmes 9 et 10 donnent lieu à des corollaires analogues au théorème 7, lorsqu'on les applique à une fonction e^{iuf} où u est un nombre réel et f est à valeurs réelles. Toutefois alors qu'il n'y a pas d'hypothèse supplémentaire sur f à ajouter à celles du théorème 8 pour obtenir le théorème 7, les propriétés de régularité de e^{iuf} en plusieurs dimensions exigent des hypothèses de régularité supplémentaires pour f. Pour simplifier, nous supposerons que toutes les dérivées partielles de f qui interviennent dans l'application des théorèmes 9 et 10 à e^{iuf} sont continues. On a :

Théorème 9' : Soit $k \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ deux entiers, ω une application continue paire de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ et telle que pour un $\varepsilon > 0$, $x^{-2q+(k/2)+\varepsilon}\omega(x)$ soit décroissante lorsque x est assez grand. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^k$, de classe C^{2q} à valeurs réelles, 2π- périodique en chaque variable. Alors f appartient à $A(\mathbb{T}^k;\omega(|n|))$ et pour tout u réel, on a :

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbb{T}^k;\omega(|n|))} \leqslant C(1 + |u|^{k/2}\omega(u))$$

où C ne dépend que des normes dans $L^2(\mathbb{T}^k)$ des dérivées partielles de f d'ordre inférieur ou égal à 2q.

Remarque: La majoration est encore valable en prenant u dans $\mathbb{Z}$, lorsque au lieu de supposer f, 2π-périodique en chaque variable, on fait cette hypothèse sur e^{if}.

Ce théorème 9' est une application immédiate du théorème 9.

Il est facile de montrer à partir du théorème 9' que si ω a une croissance assez "proche" de celle d'une puissance paire de x, $A(T; 1+|n|^{1/2}\omega(n))$ opère dans $A(\mathbb{T}^k;\omega(|n|))$:

Théorème 9" : Soit $k \geqslant 1$, $\ell \geqslant 1$ deux entiers, ω une application continue paire de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$ telle que $x^{-2\ell}\omega(x)$ soit croissant et, pour un $\varepsilon > 0$, $x^{-4\ell+(k/2)+\varepsilon}\omega(x)$ décroissant lorsque $x > 0$ est assez grand. Alors pour toute fonction f appartenant à $A(\mathbb{T}^k;\omega(|n|))$, à valeurs réelles et pour tout nombre réel u, on a :

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbb{T}^k;\omega(|n|))} \leqslant C(1 + |u|^{1/2}\omega(u))$$

où C ne dépend pas de u.

On remarque que toute fonction φ de $A(T^k; \omega(|n|))$ est de classe $C^{2\ell}$ et en posant $\varpi(x) = \omega(x)/(1+|x|^{2\ell})$ on a :

$$\|\varphi\|_{A(\mathbb{T}^k;\omega(|n|))} \leqslant C_1\left[\ \|\varphi\|_{L^2} + \|\Delta^\ell\varphi\|_{A(\mathbb{T}^k;\varpi(|n|))}\right]$$

où Δ^ℓ désigne la puissance ℓ -ième du Laplacien, et C_1 ne dépend pas de φ . Donc

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbb{T}^k;\omega(|n|))} \leqslant C_2(1 + |u|^{2\ell})\|e^{iuf}\|_{A(\mathbb{T}^k;\, \varpi(|n|))}$$

où C_2 ne dépend pas de u. ϖ vérifie les hypothèses du théorème 9' relatives à $q = \ell$, f étant de classe $C^{2\ell}$ on a donc

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbb{T}^k;\varpi(|n|))} \leqslant C_3\ (1 + |u|^{1/2}\ \varpi(u)) \quad \text{d'où le résultat.}$$

Les restrictions sur le poids ω ne sont pas nécessaires : Lorsque $\omega(x) = 1+|x|^\alpha$ le théorème 9" s'applique si $\alpha \geqslant k/2 + 4$, mais on peut obtenir un résultat meilleur par une méthode directe :

Théorème 9''' : Soit $k \geqslant 1$ entier. Pour tout α supérieur ou égal au plus petit entier pair $> k/2$, pour toute fonction f de $A(\mathbf{T}^k;\ 1+|n|^{\alpha})$ à valeurs réelles et pour tout nombre réel u, on a :

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;1+|n|^{\alpha})} \leqslant C(1+|u|^{(k/2)+\alpha})$$

où C ne dépend pas de u.

Soit $q \geqslant 1$ le plus grand entier tel que $\alpha = 2q+\beta$ avec $0 \leqslant \beta < 2$, on a :

$$(1) \qquad \|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;1+|n|^{\alpha})} \leqslant C_1(1+|u|^{2q})\,\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;1+|n|^{\beta})}$$

Lemme : Soit $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ et φ une fonction de $A(\mathbf{T}^k;1+|n|^{\alpha_3})$ on a :

$$\|\varphi\|_{A(\mathbf{T}^k;1+|n|^{\alpha_2})} \leqslant \left[\|\varphi\|_{A(\mathbf{T}^k;1+|n|^{\alpha_1})}\right]^{(\alpha_3-\alpha_2)/(\alpha_3-\alpha_1)} \left[\|\varphi\|_{A(\mathbf{T}^k;1+|n|^{\alpha_3})}\right]^{(\alpha_2-\alpha_1)/(\alpha_3-\alpha_1)}$$

Ceci résulte de l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}^k}|c_n|\,|n|^{\alpha_2} \leqslant \left[\sum_{n\in\mathbf{Z}^k}|c_n|\,|n|^{\alpha_1}\right]^{(\alpha_3-\alpha_2)/(\alpha_3-\alpha_1)}\left[\sum_{n\in\mathbf{Z}^k}|c_n|\,|n|^{\alpha_3}\right]^{(\alpha_2-\alpha_1)/(\alpha_3-\alpha_1)}$$

On utilise ce lemme avec $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \beta$, $\alpha_3 = 2$, $\varphi = e^{iuf}$. Puisque f est de classe C^{2q} avec $2q > k/2$, le théorème 9' entraîne en prenant le poids identique à 1:

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k)} \leqslant C_2(1+|u|^{k/2}) \quad \text{où } C_2 \text{ ne dépend pas de } u \text{ et}$$

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;1+|n|^2)} \leqslant C_3(1+|u|^2)\,\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k)} \leqslant C_4(1+|u|^{(k/2)+2})$$

Compte tenu de (1) le lemme entraîne alors le résultat.

3.4. Dans le cas où le poids est un produit tensoriel, l'analogue du théorème 9' est de démonstration plus délicate. Par ailleurs les hypothèses de régularité sur f sont plus restrictives que dans le cas précédent : l'application du théorème qui suit au poids identique à 1 considéré comme un produit tensoriel, suppose f de classe C^k alors que d'après le théorème 9' il suffit que f soit de classe C^p avec $p > k/2$ pair.

Théorème 11 : Soit $k \geqslant 2$ entier, et pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant k$ un entier $p_j \geqslant 1$ et une application ω_j continue paire de $\mathbf{R}$ dans $[1, +\infty[$ croissante sur $\mathbf{R}^+$ et telle que pour un $\varepsilon_j > 0$, $x^{-p_j+(1/2)+\varepsilon_j}\,\omega_j(x)$ soit décroissant lorsque x est assez grand. Soit f une fonction sur $\mathbf{R}^k$ de classe C^p avec $p = p_1 + \dots + p_k$, à valeurs réelles, 2π- périodique en chaque variable. Alors f appartient à $A(\mathbb{T}^k;\omega(n))$ avec $\omega(n_1,\dots,n_k) = \prod_{1\leq j\leq k} \omega_j(n_j)$ et pour tout u réel on a :

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbb{T}^k;\omega(n))} \leq C(1+|u|)^{k/2} \prod_{1\leq j\leq k} \omega_j(u))$$

où C ne dépend que des normes dans $L^2(\mathbb{T}^k)$ des dérivées partielles de f d'ordre inférieur ou égal à p.

Remarque :La majoration est encore valable en prenant u dans $\mathbb{Z}$, lorsque au lieu de supposer f 2π-périodique en chaque variable, on fait cette hypothèse sur e^{if}.

Il suffit de démontrer le théorème en supposant qu'aucune des k dérivées partielles premières $\partial f/\partial t_j$ n'est identiquement nulle. En effet, s'il n'en est pas ainsi. on est ramené à une fonction dépendant de k' variables avec $0 \leq k' < k$, pour laquelle la majoration relative à $\mathbb{T}^{k'}$ entraîne à fortiori celle relative à $\mathbb{T}^k$.

Montrons par récurrence sur l'entier j, $1 \leq j \leq k$, qu'un produit de puissances positives de j dérivées partielles premières de f, $|\partial f/\partial t_{\ell_1}|^{p_{\ell_1}}\dots|\partial f/\partial t_{\ell_j}|^{p_{\ell_j}}$, ne peut être alors identiquement nul. Pour j=1 c'est l'hypothèse, supposons la propriété établie pour j dérivées partielles et supposons $|\partial f/\partial t_{\ell_1}|^{p_{\ell_1}}\dots|\partial f/\partial t_{\ell_{j+1}}|^{p_{\ell_{j+1}}}$ identiquement nul. Soit A l'ouvert de $\mathbb{T}^k$ défini par

$$|\partial f/\partial t_{\ell_1}|^{p_{\ell_1}}\dots|\partial f/\partial t_{\ell_j}|^{p_{\ell_j}} \neq 0$$

et A' son complémentaire. Dans A, qui n'est pas vide d'après l'hypothèse de récurrence, $\partial f/\partial t_{\ell_{j+1}}$ est identiquement nul donc la restriction de f à A ne dépend pas de $t_{\ell_{j+1}}$. La fonction $|\partial f/\partial t_{\ell_1}|^{p_{\ell_1}}\dots|\partial f/\partial t_{\ell_j}|^{p_{\ell_j}}$ est identiquement nulle dans A' qui n'est pas vide (sinon $\partial f/\partial t_{\ell_{j+1}}$ serait nul dans $\mathbb{T}^k$) et ne dépend pas de $t_{\ell_{j+1}}$ dans A, elle devrait donc être identiquement nulle dans $\mathbb{T}^k$ contrairement à l'hypothèse de récurrence.

Il résulte de cette remarque que pour tout entier $0 \leq j \leq k$ et tout ℓ de $\mathscr{C}(j)$ (notations du théorème 10)

$$\| D_\ell(e^{iuf})\|_{L^2(\mathbb{T}^k)} \sim |u|^{p_{\ell_1}+\dots+p_{\ell_j}} \left\| \left|\frac{\partial f}{\partial t_{\ell_1}}\right|^{p_{\ell_1}} \dots \left|\frac{\partial f}{\partial t_{\ell_j}}\right|^{p_{\ell_j}} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^k)}$$

lorsque $|u|$ tend vers l'infini.

Il reste à évaluer

$$I_1(j) = 2^{1-k}\frac{\sigma(j)}{p_j} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq k \quad \text{avec } \sigma(j) = \sum_{\substack{0\leq r\leq k\\ \lambda\in\mathscr{C}(r)}} (p_{\lambda_1}+\dots+p_{\lambda_r})\varepsilon(\lambda,j)$$

et $I_2(\ell) = \sum_{\substack{0\leq r\leq k\\ \lambda\in\mathscr{C}(r)}} (p_{\lambda_1}+\dots+p_{\lambda_r})a(\lambda,\ell)$ pour ℓ dans $\mathscr{C}(j)$, $0 \leq j \leq k$.

1. Cherchons les coefficients $\alpha(q,j)$ de p_q dans $\sigma(j)$:

$$\sigma(j) = \sum_{1\leqslant q\leqslant k} \alpha(q,j)p_q \;.$$

En comptant le nombre de termes où p_j figure, on a :

$$\alpha(j,j) = 1 + \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2}+\ldots + \binom{k-1}{k-1} = 2^{k-1} \;.$$

q étant fixé, différent de j, on considère les termes où p_q figure en affectant du signe + ceux où p_j ne figure pas, et du signe - ceux où p_j ne figure pas, on a:

$$\alpha(q,j) = 1 + \left[\binom{k-2}{1} - 1\right] + \left[\binom{k-2}{2} - \binom{k-2}{1}\right] + \ldots + \left[\binom{k-2}{k-2} - \binom{k-2}{k-3}\right] - 1 = 0 \;.$$

Donc $\sigma(j) = 2^{k-1}p_j$ et $I_1(j) = 1$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$.

2. On met $a(\lambda,\ell)$ sous la forme :

$$a(\lambda,\ell) = 2^k \sum_{1\leqslant q\leqslant k} \frac{\varepsilon(\lambda,q)}{p_q} + b(\lambda,\ell) \;, \text{ avec}$$

$$b(\lambda,\ell) = -2^{1-k} \sum_{1\leqslant q\leqslant j} \varepsilon(\lambda,\ell_q) \text{ si } \lambda \neq \ell \quad \text{et} \quad b(\ell,\ell) = 1 - 2^{1-k}j \;.$$

Posons $I_2'(\ell) = \sum_{\substack{0\leqslant r\leqslant k\\ \lambda\in\mathscr{C}(r)}} (p_{\lambda_1} + \ldots + p_{\lambda_r})b(\lambda,\ell)$,

on a $I_2'(\ell) = (p_{\ell_1} + \ldots + p_{\ell_j}) - 2^{1-k} \sum_{\substack{0\leqslant r\leqslant k\\ \lambda\in\mathscr{C}(r)}} (p_{\lambda_1} + \ldots + p_{\lambda_r}) \sum_{1\leqslant q\leqslant j} \varepsilon(\lambda,\ell_q) = 0$

car $\sum_{\substack{0\leqslant r\leqslant k\\ \lambda\in\mathscr{C}(r)}} (p_{\lambda_1} + \ldots + p_{\lambda_r})\varepsilon(\lambda,\ell_q) = 2^{k-1}p_{\ell_q}$ d'après 1.

Donc $I_2(\ell) = I_2(\ell) - I_2'(\ell) = 2^{-k} \sum_{1\leqslant q\leqslant k} \frac{1}{p_q} \sum_{\substack{0\leqslant r\leqslant k\\ \lambda\in\mathscr{C}(r)}} (p_{\lambda_1} + \ldots + p_{\lambda_r})\varepsilon(\lambda,q)$

d'où $I_2(\ell) = k/2$, ce qui achève la démonstration du théorème 11.

Les hypothèses à faire sur ω pour obtenir l'analogue du théorème 9' sont plus délicates, elles expriment que les ω_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, ont des croissances "uniformément proches" de celles de k puissances entières de x :

Théorème 11' : Soit $k \geqslant 2$ entier, et pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant k$, des entiers $\ell_j \geqslant 1$, $p_j \geqslant 1$ avec $\ell_j \geqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant k} p_r$, une application ω_j continue paire de R dans $[1, +\infty[$ telle que $x^{-\ell_j}\omega_j(x)$ soit croissant et, pour un $\varepsilon_j > 0$, $x^{-p_j-\ell_j+(1/2)+\varepsilon_j}\omega_j(x)$ décroissant lorsque $x > 0$ est assez grand. Alors pour toute fonction f appartenant à $A(\mathbf{T}^k;\omega)$ à valeurs réelles, avec $\omega(n) = \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \omega_j(n_j)$, et pour tout nombre réel u, on a :

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \leqslant C(1 + |u|^{k/2} \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \omega_j(u))$$

où C ne dépend pas de u.

Posons $\varpi(n) = \omega(n) \prod_{1\leq j\leq k} \frac{1}{1+|n_j|^{\ell_j}}$ et montrons d'abord que

(1) $$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \leq C_1(1+|u|^{\ell_1+\ldots+\ell_k})\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\varpi)} .$$

Soit $\ell = \inf_{1\leq j\leq k} \ell_j$ et $\ell_j = q_j\ell + r_j$, q_j et r_j entiers $q_j \geq 1$, $0 \leq r_j \leq \ell-1$.

Toute fonction φ de $A(\mathbf{T}^k;\omega)$ est de classe C^ℓ et chaque dérivée partielle d'ordre $\lambda \leq \ell$, $(\partial/\partial t_j)^\lambda(\varphi)$, appartient à $A(\mathbf{T}^k ; \omega/(1+|n_j|^\lambda))$ et

$$\|\varphi\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \leq C_2\left[\|\varphi\|_{L^2} + \left\|\frac{\partial^\lambda\varphi}{\partial t_j^\lambda}\right\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega/(1+|n_j|^\lambda))}\right]$$

où C_2 ne dépend pas de φ . Utilisons ceci avec $\varphi = e^{iuf}$ et la dérivation $(\frac{\partial}{\partial t_1})^\ell$, on a :

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \leq C_3(1+|u|^\ell)\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega/(1+|n_1|^\ell))}$$

où C_3 ne dépend pas de u. Par itération, on obtient:

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \leq C_4(1+|u|^{q_1\ell})\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\,\omega/(1+|n_1|^{q_1\ell}))}$$

et en utilisant la dérivation $(\frac{\partial}{\partial t_1})^{r_1}$:

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \leq C_5(1+|u|^{\ell_1})\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega/(1+|n_1|^{\ell_1}))} .$$

On obtient (1) en réitérant ce procédé pour $\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega/(1+|n_1|^{\ell_1})}$ relativement à la variable t_2 etc...

ϖ vérifie les hypothèses du théorème 11 relatives à $(p_1, \ldots, p_k)$ et puisque f est classe $C^{p_1+\ldots+p_k}$ on a :

(2) $$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\varpi)} \leq C_6(1+|u|^{k/2} \prod_{1\leq j\leq k} \frac{\omega_j u}{1+|u|^{\ell_j}})$$

(1) et (2) donnent le résultat.

<u>Remarque</u> : Dans le cas particulier où $\omega_j(x) = 1+|x|^{\alpha_j}$, $1 \leq j \leq k$, soit $\alpha_j = \ell_j + \beta_j$ où ℓ_j est la partie entière de α_j et $0 \leq \beta_j < 1$. Soit q, $0 \leq q \leq k$, le nombre de termes tels que $0 \leq \beta_j < 1/2$. Pour un tel terme, on choisit $p_j = 1$, pour les autres $p_j = 2$. En définitive le théorème 11' s'applique pour $\alpha_j \geq 2k - q$, $1 \leq j \leq k$. En particulier, si q = k, le théorème s'applique pour $\alpha_j \geq k$. Or, on peut montrer directement que le même résultat a lieu si les α_j ont

la même partie fractionnaire β , $0 \leqslant \beta < 1$ avec $\alpha_j \geqslant k$.

En effet, d'après la démonstration du théorème 11'

(1) $$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \leqslant C_1\ (1 + |u|^{\ell_1+\dots+\ell_k})\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k,\varpi)} .$$

D'après le lemme cité à propos du théorème 9', on a :

(2) $$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\varpi)} \leqslant \|e^{iuf}\|^{1-\beta}_{A(\mathbf{T}^k)}\ \|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;\ 1+|n_1\ \dots\ n_k|)} .$$

Si $\alpha_j \geqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant k$, f est de classe C^k, donc :

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k)} \leqslant C_2(1 + |u|^{k/2}) \text{ et } \|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k;1+|n_1\dots n_k|)} \leqslant C_2(1+|u|^k)\|e^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}_k)}$$

d'où le résultat grâce à (2) et (1).

Cette démonstration vaut encore si certaines parties fractionnaires des α_j sont nulles, les autres étant égales à un même nombre β .

Un corollaire des théorèmes 7', 9" et 11' est qu'il existe des fonctions définies sur $\mathbf{R}$, non analytiques qui opèrent dans $A(\mathbf{T}^k;\ \omega(|n|))$ (pour les théorèmes 7' et 9") ou dans $A(\mathbf{T}^k;\omega)$ (pour le théorème 11') sous les hypothèses faites sur ω. N. Leblanc a démontré ce résultat [26] , avec des hypothèses beaucoup plus faibles sur ω (en particulier ω peut avoir une croissance arbitrairement lente pourvu que $\limsup_{|n|\to+\infty} \omega(n) = +\infty$) :

<u>Théorème</u> (N. Leblanc) : <u>Si</u> ω <u>est un poids tel que</u>

$$\lim_{|n|\to+\infty} \frac{\operatorname{Log}\omega(n)}{n} = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \lim_{N\to+\infty}\ \sup_{|n|,|p|\geqslant N} \frac{\omega(n+p)}{\omega(n)\omega(p)} = 0$$

<u>il existe un poids</u> Ω <u>tel que</u> $A(\mathbf{T};\Omega)$ <u>contient des fonctions non analytiques et opère dans</u> $A(\mathbf{T};\ \omega)$.

La méthode s'adapte pour $A(\mathbf{T}^k;\omega)$, ω étant un poids très général sur $\mathbf{Z}^k$ (communication verbale).

Lorsque $k = 1$ et $\omega(x) = 1 + |x|^\alpha$, avec $\alpha < 1$, N. Leblanc montre que $\Omega(x) = 1+|x|^\beta$ avec $\beta > 1 + 1/2\alpha$, convient et c'est le meilleur résultat possible d'après un théorème de J.-P. Kahane [21]. On a déjà signalé que le meilleur résultat possible pour $\alpha \geqslant 1$ est $\beta = \alpha + 1/2$.

4.1. Nous allons montrer que les croissances de $\|e^{iuf}\|$ données par les théorèmes 9' et 11 sont les meilleurs possibles lorsque f est assez régulière et de Hessien (déterminant de la matrice ($\partial^2 f/\partial t_j \partial t_\ell$)) non identiquement nul. Pour le théorème 7 c'est la conséquence du théorème de Katznelson cité en 2.3. Nous en établirons l'analogue en plusieurs dimensions.

Lorsque $\omega = 1$, c'est une conséquence de résultats de W. Littman [28] complétant ceux de C. Herz [17] et E. Hlawka [19] relatifs à la transformée de Fourier d'une mesure portée par le bord d'un compact de $\mathbb{R}^{k+1}$ (supposé convexe par C. Herz) le résultat utilisé ici est

Théorème (W. Littman - C. Herz) : Soit C un compact de $\mathbb{R}^{k+1}$ dont le bord ∂C est une sous-variété de classe C^m, où m est la partie entière de $k/2 + 2$, de courbure gausienne strictement positive. Alors la transformée de Fourier $\hat{\sigma}(t)$ de la mesure σ de masse finie uniformément répartie sur ∂C est $O(|t|^{-k/2})$ lorsque $|t| \to +\infty$.

La conséquence -implicite- est :

Théorème 12 : Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^k$ à valeurs réelles, 2π-périodique en chaque variable. Supposons qu'il existe un ouvert de $\mathbb{R}^k$ sur lequel f soit de classe C^m, m partie entière de $k/2 + 2$, et supposons que le Hessien de f ne soit pas identiquement nul dans l'ouvert. Alors pour tout nombre réel u, on a

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbb{T}^k)} \geq C|u|^{k/2}$$

où $C > 0$ ne dépend pas de u.

On peut supposer qu'il existe un ouvert I de $[-\pi + a, \pi - a]^k$, avec $0 < a < \pi$, sur lequel le Hessien $H(f)$ vérifie $H(f) \geq \rho > 0$. Soit S la surface de $\mathbb{R}^{k+1}$ définie pour tout point $(t_1, \ldots, t_k)$ de I par l'équation

$$t_{k+1} = f(t_1, \ldots, t_k) .$$

C'est une propriété connue de géométrie différentielle qui résulte des définitions que la courbure gaussienne de S est égale au Hessien de f, à un coefficient positif près (voir par exemple Hicks [18]). On peut alors prolonger S en une sous-variété ∂C de classe C^m, à courbure gaussienne strictement positive, frontière d'un compact C de $\mathbb{R}^{k+1}$.

Soit $s = (s_1, \ldots, s_k, s_{k+1})$, $t = (t_1, \ldots, t_k, t_{k+1})$ deux points courants de $\mathbb{R}^{k+1}$, et $\sigma(t)$ la mesure de masse 1, uniformément répartie sur ∂C, on a

$$\hat{\sigma}(s) = \int_{\partial C} e^{-is.t}\, \sigma(t) = O(|s|^{-k/2}) \text{ lorsque } |s| \longrightarrow +\infty .$$

Soit Φ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^{k+1}$ à valeurs positives ou nulles, à support compact contenu dans un cylindre $I \times J$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, tel que l'intersection de $I \times J$ avec ∂C se réduise à un ouvert non vide de S, sur lequel Φ n'est pas identiquement nul.

Considérons la mesure $\mu = \Phi\sigma$ portée par S. $\hat{\mu}$ et $\hat{\Phi}$ désignant les transformées de Fourier de μ et Φ, $\hat{\Phi}$ étant une fonction C^∞ à décroissance rapide à l'infini, il est clair que

$$(1) \qquad \hat{\mu}(s) = (\hat{\Phi} * \hat{\sigma})(s) = O(|s|^{-k/2}) \text{ lorsque } |s| \to +\infty .$$

En utilisant le paramétrage naturel de S , $\hat{\mu}$ s'exprime comme une intégrale sur I.

Soit
$$\cos \varphi = \vec{N} \cdot \vec{\ell}_{k+1} = \pm \left[1 + \sum_{1 \leq j \leq k} \left| \frac{\partial f}{\partial t_j} \right|^2 \right]^{1/2} .$$

où $\vec{N}$ est le vecteur unitaire normal à la surface S dirigé vers l'extérieur de C, et $\vec{\ell}_{k+1}$ le vecteur unitaire relatif à la dernière coordonnée du repère canonique de $\mathbb{R}^{k+1}$. On a :

$$(2) \quad \hat{\mu}(s_1,\ldots,s_k,s_{k+1}) = \int_I e^{-i(s_1t_1+\ldots+s_kt_k)} e^{-is_{k+1}f(t_1,\ldots,t_k)} \Psi(t_1,\ldots,t_k)dt$$

où $\Psi(t_1,\ldots,t_k)$ est la lecture de la restriction à S de $\frac{\Phi}{\cos \varphi}$, dans le paramétrage $(t_1,\ldots,t_k)$. Ψ est une fonction de classe C^{m-1} de signe constant, non identiquement nulle, à support compact contenu dans I.

Considérons $e^{-iuf}\ \Psi$ comme une pseudomesure élément du dual $PM(\mathbb{T}^k)$ de $A(\mathbb{T}^k)$. D'après (1) et (2) avec $s_{k+1} = u$, on a :

$$\| e^{-iuf} \|_{PM(\mathbb{T}^k)} \leq C_1 \, |u|^{-k/2}$$

où C_1 ne dépend pas de u. Appliquons cette pseudomesure à e^{iuf}

$$|< e^{iuf}\ \Psi,\ e^{iuf} >| = \left| \int_I \Psi(t)dt \right| \leq C_1 \, |u|^{-k/2} \, \| e^{iuf} \|_{A(\mathbb{T}^k)}$$

d'où le résultat.

Remarque : Par une méthode directe toute différente, N. Leblanc démontre le théorème 12 avec des hypothèses plus faibles sur f (communication verbale). Toutefois la méthode ici présentée a un intérêt en elle-même.

A partir du théorème 12, on peut obtenir une minoration de $\| e^{iuf} \|_{A(\mathbb{T}^k;\omega)}$ pour un poids ω sur $\mathbb{Z}^k$ assez général. Pour simplifier on se limitera aux cas où le poids est soit radial croissant, soit produit tensoriel de k poids paires croissant sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 13 : Soit ω une application continue paire de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ et telle que pour tout $r > 0$ fixé, $\omega(rx) = O(\omega(x))$ lorsque $x \to +\infty$. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^k$ 2π-périodique en chaque variable, à valeurs réelles, de classe C^m, m partie entière de $k/2 + 2$, sur un ouvert de $\mathbb{R}^k$ où le Hessien de f n'est pas identiquement nul. Alors pour tout nombre réel u, on a :

$$\| e^{iuf} \|_{A(\mathbb{T}^k;\omega(|n|))} \geq C|u|^{k/2} \, \omega(u)$$

où $C > 0$ ne dépend pas de u.

Soit $e^{iuf(t)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_m(u) e^{imt}$. D'après le théorème 12

$$(1) \qquad \sum_{m \in \mathbb{Z}^k} |c_m(u)| \geq C_1 |u|^{k/2} \quad \text{où } C_1 \text{ ne dépend pas de u.}$$

Pour $r > 0$, appliquons l'inégalité de Schwarz avec $\sum_{m\in\mathbb{Z}^k} |c_m|^2 = 1$:

(2) $\sum_{|m|\leq r|u|} |c_m| \leq C_2(1 + |ru|^{k/2})$ où C_2 est une constante numérique.

En choisissant r assez petit, par exemple $r \leq \left|\frac{C_1}{2C_2}\right|^{2/k}$, on voit d'après (1) et (2) que : $\sum_{|m|>r|u|} |c_m| \geq C_3|u|^{k/2}$ où $C_3 > 0$ ne dépend pas de u .

En utilisant les hypothèses sur ω on voit que

$$\sum_{|m|>ru} |c_m(u)|\,\omega(|m|) \geq \omega(r|u|) \sum_{|m|>ru} |c_m(u)| \geq C|u|^{k/2}\omega(u) .$$

d'où le résultat.

Dans le cas où le poids est un produit tensoriel, la démonstration est plus délicate :

Théorème 14 : Soit $k \geq 2$ entier, et pour tout entier $1 \leq j \leq k$, une application ω_j continue paire de R dans $[1, +\infty[$, croissante sur $\mathbb{R}^+$ et telle que pour tout $r > 0$ fixé, $\omega_j(rx) = O(\omega(x))$ lorsque $x \to +\infty$. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^k$, à valeurs réelles, 2π-périodique en chaque variable, de classe C^{k-1}. On suppose de plus que f est de classe C^m, m partie entière de $k/2 + 2$, sur un ouvert de $\mathbb{R}^k$ où le Hessien de f n'est pas identiquement nul. Alors ω étant le poids sur $\mathbb{Z}^k$, $\omega(n) = \prod_{1\leq j\leq k} \omega_j(n_j)$ on a pour tout nombre réel u :

$$\|e^{iuf}\|_{A(\mathbb{T}^k;\omega)} \geq C|u|^{k/2} \prod_{1\leq j\leq k} \omega_j(u)$$

où $C > 0$ ne dépend pas de u.

Soit $e^{iuf(t)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^k} c_m(u)\, e^{imt}$. Pour $r > 0$ soit $X(r)$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^k$ défini par $|m_j| \geq r|u|$ pour $1\leq j\leq k$, et $Y(r,j)$ le sous-ensemble défini par $|m_j| \geq r|u|$. Les sous-ensembles $X(r)$ et $Y(r,j)$ constituent un recouvrement (non disjoint) de $\mathbb{Z}^k$ donc

(1) $$\sum_{m\in X(r)} |c_m| \geq \sum_{m\in\mathbb{Z}^k} |c_m| - \sum_{1\leq j\leq k} \Big(\sum_{m\in Y(r,j)} |c_m|\Big) .$$

Pour tout entier $1 \leq q \leq k-1$, soit $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_q)$ un élément de l'ensemble $\mathcal{C}(q)$ des combinaisons de q termes extraits de $(1, \ldots, k-1)$. Soit E_ℓ le sous-ensemble des points $m' = (m_1, \ldots, m_{k-1})$ de $\mathbb{Z}^{k-1}$ défini par : $|m_h| > |u|$ lorsque h appartient à $(\ell_1, \ldots, \ell_q)$, $|m_h| \leq |u|$ sinon. On a d'après l'inégalité de Schwartz

$$S_\ell = \sum_{\substack{m'\in E \\ |m_k|\leq r|u|}} |c_m| \leq \Big[\sum_{m\in\mathbb{Z}^k} |m_{\ell_1} \cdots m_{\ell_q} c_m|^2\Big]^{1/2} \Big[\sum_{|p|>|u|} \frac{1}{p^2}\Big]^{q/2} \big[1 + 2r|u|\big]^{1/2}$$

or, $$\Big[\sum_{m\in\mathbb{Z}^k} |m_{\ell_1} \cdots m_{\ell_q} c_m|^2\Big]^{1/2} = \Big\| \frac{\partial^q}{\partial t_{\ell_1} \cdots \partial t_{\ell_q}} (e^{iuf})\Big\|_{L^2} \leq C_1(1+|u|^q)$$

où C_1 ne dépend pas de u. Donc,

$$\sum_{m\in Y(r,k)} |c_m| = \sum_{\substack{0\leqslant q\leqslant k-1 \\ \ell\in \mathscr{C}(q)}} S_\ell \leqslant C_2\,(1 + r^{1/2}|u|^{k/2})$$

où C_2 ne dépend pas de u (on fait la convention habituelle pour q = 0). Par une démonstration analoque pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, on a :

$$\text{(2)} \qquad \sum_{m\in Y(r,j)} |c_m| \leqslant C_2(1 + r^{1/2}|u|^{k/2}) \; .$$

D'après le théorème 12, on a :

$$\text{(3)} \qquad \sum_{m\in \mathbf{Z}^k} |c_m| \geqslant C_3|u|^{k/2}$$

où $C_3 > 0$ ne dépend pas de u. En choisissant r assez petit, par exemple $r \leqslant \left|\frac{C_3}{2kC_2}\right|^2$ on tire de (1), (2), (3) :

$$\sum_{m\in X(r)} |c_m| \geqslant C_4|u|^{k/2} \quad \text{où } C_4 > 0 \text{ ne dépend pas de u.}$$

Utilisant les hypothèses sur ω on a :

$$\sum_{m\in X(r)} |c_m|\omega(m) \geqslant C_5\left[\prod_{1\leqslant j\leqslant k} \omega_j(ru)\right] \sum_{m\in X(r)} |c_m| \quad ,$$

d'où le résultat.

4.2 . Une application immédiate du théorème de Katznelson est de caratériser les homomorphismes de classe C^2 de $A(\mathbf{T};\,\omega)$ dans lui-même : ce sont des applications $x \longmapsto Nx + x_0$ où N est entier (si $\mathbf{T} \simeq \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$). Il est facile de caractériser à l'aide du théorème 13, les homomorphismes de classe C^2 de $A(\mathbf{T}^k;\,\omega(|n|))$ dans lui-même : on ne trouve que les applications affines évidentes.

<u>Théorème 15</u> : <u>Soit</u> ω <u>une application continue paire de</u> R <u>dans</u> $[1, +\infty[$ <u>croissante sur</u> $\mathbf{R}^+$ <u>et telle que pour tout</u> $r > 0$ <u>fixé</u>, $\omega(rx) = O(\omega(x))$ <u>lorsque</u> $x \to +\infty$. <u>Soit</u> $f = (f_1, \ldots, f_k)$ <u>une application de</u> $\mathbf{R}^k$ <u>dans lui-même de classe</u> C^2, <u>telle que</u> $F \longmapsto F(f)$ <u>soit une application linéaire de</u> $A(\mathbf{T}^k;\,\omega(|n|))$ <u>dans lui-même</u>.

<u>Alors f est une application affine dont la partie linéaire a une matrice à coefficients entiers</u> (<u>si</u> $\mathbf{T}^k \simeq \mathbf{R}^k/(2\pi\mathbf{Z})^k$).

D'après l'hypothèse et le théorème du graphe fermé, l'application linéaire $F \longmapsto F(f)$ est continue, donc pour $1 \leqslant j \leqslant k$ et tout m de $\mathbf{Z}$ on a :

$$\text{(1)} \qquad \|e^{imf_j}\|_{A(\mathbf{T}^k;\,\omega(|n|))} \leqslant C\;\omega(m)$$

où C ne dépend pas de m.

q étant un entier égal à 1 ou 2, fixons un groupe de k-q coordonnées parmi $(t_1, \ldots, t_k)$, la restriction de f_j est une fonction g_j sur $\mathbb{R}^q$ et

$$\|e^{imf_j}\|_{A(\mathbb{T}^k;\omega(|n|))} \geqslant \|e^{img_j}\|_{A(\mathbb{T}^q;\omega(|n|))} .$$

Pour q = 1, d'après le théorème de Katznelson, si la dérivée seconde de g_j n'est pas identiquement nulle, on a :

$$\|e^{img_j}\|_{A(\mathbb{T};\omega)} \geqslant C_1 |m|^{1/2}\omega(m)$$

où C_1 ne dépend pas de m.

(1) impose donc que toutes les dérivées partielles secondes de la forme $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial t_h^2}$, $1 \leqslant h \leqslant k$, sont identiquement nuelles. Il est facile d'en déduire, en utilisant les dérivations au sens des distributions, que f_j a nécessairement la forme :

$$a_o + \sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant k \\ \ell \in \mathscr{C}(q)}} a_\ell \, x_{\ell_1} \ldots x_{\ell_q}$$ où $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_q)$ est une combinaison de q termes extraits de $(1, \ldots, k)$, et a_o, a_ℓ des constantes. Puisqu'en fait f est de classe C^∞ on peut appliquer le théorème 13 à g_j avec q = 2 : si le Hessien de g_j n'est pas identiquement nul, on a :

$$\|e^{img_j}\|_{A(\mathbb{T}^2;\omega(|n|))} \geqslant C_2 |m|^{1/2}\omega(m)$$

où C_2 ne dépend pas de m – (1) impose donc que le Hessien de g_j soit identiquement nul ce qui entraîne que toutes les dérivées partielles $\partial^2 f_j/\partial t_{\ell_1}\,\partial t_{\ell_2}$ sont identiquement nulles –. f_j est linéaire pour $1 \leqslant j \leqslant k$, d'où le résultat.

Remarquons qu'on serait conduit à supposer f de classe C^3 si au lieu d'utiliser le théorème de Katznelson pour q = 1, on utilisait le théorème 13 pour q = 1 et 2.

L'hypothèse de régularité sur f est superflue lorsque $\omega(x) \geqslant 1 + |x|^2$.

La caractérisation à l'aide du théorème 14 des homomorphismes assez réguliers de $A(\mathbb{T}^k;\omega)$ lorsque $\omega(n) = \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \omega_j(n_j)$ est plus délicate. Il faudra supposer l'homomorphisme de classe C^3. Un homomorphisme naturel est l'application affine $f_j(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{1\leqslant \ell\leqslant k} a(j,\ell)t + b_j$ où $a(j,\ell)$ est entier et nul si ℓ est différent de j et $\limsup_{x\to+\infty} \omega_\ell(x) = +\infty$, la vérification est immédiate et fait intervenir la matrice transposée de $(a(j,\ell))$. Le résultat est qu'il n'y a pas d'autre homomorphisme de classe C^3.

<u>Théorème 16</u> : <u>Soit</u> $k \geqslant 2$ <u>entier</u>, <u>et pour tout entier</u> $1 \leqslant j \leqslant k$, <u>une application</u> ω_j <u>continue, paire de</u> $\mathbb{R}$ <u>dans</u> $[1, +\infty[$, <u>croissante sur</u> $\mathbb{R}^+$ <u>et telle que pour tout</u> $r > 0$ <u>fixé</u> $\omega(rx) = O(\omega(x))$ <u>lorsque</u> $x \to +\infty$. <u>Soit</u> $f = (f_1, \ldots, f_k)$ <u>une application de</u>

<u>classe</u> C^3 <u>de</u> $\mathbf{R}^k$ <u>dans lui-même telle que</u> $F \longmapsto F(f)$ <u>soit une application linéaire de</u> $A(\mathbf{T}^k;\omega)$ <u>dans lui-même avec</u> $\omega(n) = \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \omega_j(n_j)$. <u>Alors</u> f <u>est une application affine</u>

$$f_j(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{1\leqslant \ell\leqslant k} a(j,\ell)t_\ell + b_j \quad , 1 \leqslant j \leqslant k$$

<u>où</u> $a(j,\ell)$ <u>est entier</u> (<u>si</u> $\mathbf{T}^k \simeq \mathbf{R}^k/(2\pi\mathbf{Z})^k$) <u>nul lorsque</u> ℓ <u>est différent de</u> j <u>et</u> $\lim_{x\to+\infty} \omega_\ell(x) = +\infty$.

<u>En particulier, si aucun</u> ω_j <u>n'est borné,</u> $f_j(t) = N_j t_j + b_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$ <u>où</u> N_j <u>est entier,</u> b_j <u>un nombre réel quelconque</u>.

D'après l'hypothèse et le théorème du graphe fermé, l'application $F \longmapsto F(f)$ est continue et pour tout j et tout m de $\mathbf{Z}$, on a :

$$(1) \qquad \|e^{imf_j}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \leqslant C\omega_j(m)$$

q étant un entier $1 \leqslant q \leqslant k$, fixons un groupe de k-q coordonnées parmi $(t_1,\ldots, t_k)$, la restriction de f_j est une fonction g_j sur $\mathbf{R}^q$ dépendant des q coordonnées restantes $(t_{\ell_1}, \ldots, t_{\ell_q})$. Considérons le poids sur $\mathbf{Z}^q$ $\varpi(n) = \omega_{\ell_1}(n_1)\ldots \omega_{\ell_q}(n_q)$, on a :

$$\|e^{imf_j}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \geqslant \|e^{img_j}\|_{A(\mathbf{T}^q;\varpi)} .$$

On se limite à q = 1 ou 2. D'après le théorème 14, si le Hessien de g_j n'est pas identiquement nul, on a :

$$(2) \qquad \|e^{img_j}\|_{A(\mathbf{T}^q;\varpi)} \geqslant C_1|m|^{q/2} \omega_{\ell_1}(m) \ldots \omega_{\ell_q}(m)$$

où $C_1 > 0$ ne dépend pas de u. Alors, d'après (1), le Hessien de g_j est identiquement nul. Prenons ($q=1$, $\ell_1=j$), ceci montre que $\partial^2 f_j/\partial t_j^2$ est identiquement nul, puis en prenant ($q=2$, $\ell_1=j$, $\ell_2=h\neq j$) on voit que $\partial^2 f_j/\partial t_j\, \partial t_q$ est immédiatement nul, donc f_j est de la forme

$$f_j(t_1, \ldots, t_k) = a_j\, t_j + \varphi_j$$

où φ_j ne dépend pas de t_j et est de classe C^3 sur $\mathbf{R}^{k-1}$, et a_j est entier.

Ainsi : $\|e^{imf_j}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} = \omega_j(m\, a_j)\|e^{im\varphi_j}\|_{A(\mathbf{T}^{k-1};\varpi_j)}$ où ϖ_j est le poids sur $\mathbf{Z}^{k-1}$ $\varpi_j(n) = \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant k\\ h\neq j}} \omega_h(n_h)$, on a donc :

$$(3) \qquad \|e^{imf_j}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \geqslant C_2\, \omega_j(m)\, \|e^{im\varphi_j}\|_{A(\mathbf{T}^k;\varpi_j)}$$

où $C_2 > 0$ ne dépend que de (a_j, ω_j).

Pour tout entier q, $1 \leqslant q \leqslant k-1$, fixons un groupe de k-q-1 coordonnées parmi les (k-1) coordonnées autres que t_j, la restriction de φ_j est une fonction ψ_j sur $\mathbb{R}^q$ (dépendant des coordonnées ($t_{\ell_1}, \ldots, t_{\ell_q}$)) et on a :

$$(4) \qquad \| e^{im\varphi_j} \|_{A(\mathbb{T}^k;\varpi_j)} \geq \| e^{im\psi_j} \|_{A(\mathbb{T}^q;\varpi'_j)}$$

où ϖ'_j est le poids sur $\mathbb{Z}^q$: $\varpi'_j(n) = \varpi_{\ell_1}(n_1) \ldots \varpi_{\ell_q}(n_q)$.

Pour q = 1 ou 2, le théorème 14 s'applique. Si le Hessien de ψ_j n'est pas identiquement nul, on a :

$$(5) \qquad \| e^{im\psi_j} \|_{A(\mathbb{T}^q;\varpi'_j)} \geq C_3 |m|^{q/2} \, \omega_{\ell_1}(m) \ldots \omega_{\ell_q}(m) .$$

D'après (1), (3), (4), (5) le Hessien de ψ_j est donc identiquement nul. En choisissant q = 1, on voit que $\partial^2 \varphi_j / \partial t_\ell^2$ est identiquement nul pour $1 \leq \ell \leq k$, puis choisissant q = 2, on voit qu'il en est de même pour $\partial^2 \varphi_j / \partial t_\ell \partial t_h$. C'est donc que φ_j est linéaire. En définitive

$$f_j(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{1 \leq \ell \leq k} a(j,\ell) t_\ell + b_j \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq k$$

où $a(j,\ell)$ est entier et b_j réel quelconque. (1) entraîne que $a(j,\ell)$ est nul si ℓ est différent de j et $\lim\limits_{x \to +\infty} \omega_\ell(x) = +\infty$. Remarquons que l'hypothèse de régularité sur f est superflue lorsque $\omega_j(x) \geq 1 + |x|^3$ pour $1 \leq j \leq k$.

Lorsque le poids sur $\mathbb{Z}^k$ est identique à 1, le théorème de Beurling et Helson [2] assure le résultat sans hypothèses sur la régularité de l'homomorphisme. Par une methode différente de celle de Beurling et Helson, N. Leblanc a démontré dans [26], qu'il en est de même en dimension k = 1 lorsque le poids a la forme $\omega(x) = 1 + |x|^\alpha$, $\alpha > 0$.

Pour étudier les homomorphismes de $A(\mathbb{R}^k; \omega(|t|))$ (resp. $A(\mathbb{R}^k;\omega)$) dans lui-même, où ω est un poids vérifiant les hypothèses du théorème 15 (resp. 16), nous utiliserons une version renforcée des théorèmes 15 et 16, exprimant le fait qu'il n'y a pas d'homomorphismes locaux autre que les homomorphismes naturels :

<u>Théorème 15'</u>: <u>(resp. 16') : avec les hypothèses du théorème 15 (resp. 16) sur le poids</u> ω , <u>soit</u> M <u>une fonction</u> C^∞ <u>sur</u> $\mathbb{T}^k$ <u>non identiquement nulle, soit</u> $f = (f_1, \ldots, f_k)$ <u>une application de classe</u> C^2 <u>(resp.</u> C^3<u>) de</u> $\mathbb{R}^k$ <u>dans lui-même, telle que</u> $F \longmapsto MF(f)$ <u>soit une application linéaire de</u> $A(\mathbb{T}^k; \omega(|n|))$ <u>(resp.</u> $A(\mathbb{T}^k;\omega)$<u>) dans lui-même.</u>

<u>Alors prenant</u> $\mathbb{T}^k \simeq \mathbb{R}^k/(2\pi\mathbb{Z})^k$ <u>et considérant</u> M <u>comme fonction sur</u> $\mathbb{R}^k$, 2π<u>-périodique en chaque variable,</u> f <u>a la forme indiquée par le théorème</u> 15 <u>(resp. 16) sur un voisinage du support de</u> M. <u>Chaque coefficient</u> $a(j,\ell)$ <u>non nul, peut être un nombre réel quelconque si la portion du support de</u> M <u>contenue dans le pavé</u> $[-\pi, +\pi]^k$ <u>est contenue dans une bande</u> $-a_\ell \leq t_\ell \leq a_\ell$ <u>avec</u> $0 < a_\ell < \pi$.
<u>Sinon</u> $a(j,\ell)$ <u>doit être entier.</u>

Nous ferons d'abord **deux** remarques

1. Soit M une fonction continue sur $\mathbf{T}^k$, non identiquement nulle. Les hypothèses sur f étant celles du théorème 12, on a la minoration :

$$\|Me^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k)} \geqslant C|u|^{k/2}$$

où u est réel et C > 0 ne dépend pas de u.

Il suffit pour le voir d'appliquer la pseudomesure $e^{-iuf}\psi$ (notations de la démonstration du théorème 12) à la fonction PMe^{iuf}, où P est une fonction de $A(\mathbf{T}^k)$ choisi de façon que

$$\int_{\mathbf{R}^k} \psi(t)P(t)M(t)dt \neq 0 .$$

On a :

$$|<e^{-iuf}\psi, PMe^{iuf}>| = \left|\int_{\mathbf{R}^k} \psi(t)P(t)M(t)dt\right| \leqslant C_1|u|^{k/2}\|PMe^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k)}$$

d'où le résultat puisque $\|PMe^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k)} \leqslant \|P\|_{A(\mathbf{T}^k)}\|Me^{iuf}\|_{A(\mathbf{T}^k)}$.

2. Il résulte de la remarque 1 que les minorations des théorèmes 13 et 14 sont encore valables pour $\|Me^{iuf}\|$. où M satisfait à l'hypothèse de la remarque 1 et est de plus de classe C^{k-1} pour la minoration correspondant à celle du théorème 14. Les démonstrations sont analogues à celles des théorèmes 13 et 14 en utilisant la série de Fourier de Me^{iuf} au lieu de celle de e^{iuf}.

L'hypothèse du théorème 15' (resp. 16') entraîne d'après le théorème du graphe fermé que pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, on a

$$\|Me^{imf_j}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega(|n|))} \leqslant C\omega(m) \quad \text{pour le théorème 15'}$$

(1) $$\|Me^{imf_j}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \leqslant C\,\omega_j(m) \quad \text{pour le théorème 16'}$$

où C ne dépend pas de m.

La démonstration du théorème 15' se poursuit de façon analogue à celle du théorème 15 en utilisant la remarque 2.

Pour le théorème 16' c'est un peu plus délicat. On montre comme au théorème 16 que sur un voisinage du support de M, f_j a la forme

$$f_j(t_1, \ldots, t_k) = a_j t_j + \varphi_j$$

où a_j est une constante et φ_j ne dépend pas de t_j et est de classe C^3 sur $\mathbf{R}^{k-1}$.

Pour q entier, $1 \leqslant q \leqslant k$, fixons parmi les coordonnées autres que t_j, un groupe de k-q-1 coordonnées. Il reste q+1 coordonnées libres $(t_j, t_{\ell_1}, \ldots, t_{\ell_q})$. Soit P (resp. ψ_j) la restriction ainsi définie de M (resp. φ_j) à $\mathbf{T}^{q+1}$ (resp. $\mathbf{T}^q$).

En changeant les notations des points courants, soit :

$$e^{im\psi_j(y_1,\dots,y_q)}\, P(x,y_1,\dots,y_q) = \sum_{\substack{p\in\mathbf{Z}\\ n\in\mathbf{Z}^q}} c_{p,n}\, e^{ipx}\, e^{iny}$$

Posons $Q(y_1, \dots, y_q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x, y_1, \dots, y_q)\, dx$, on a

$$\|e^{im\psi_j} Q\|_{A(\mathbf{T}^q)} = \sum_{n\in\mathbf{Z}^q} |c_{o,n}|$$

D'après les hypothèses et la remarque 1, lorsque q = 1 ou 2, si le Hessien de ψ_j n'est pas identiquement nul, on a donc :

$$(2) \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}^q} |c_{o,n}| \geq C_1 |m|^{q/2} \quad .$$

où $C_1 > 0$ ne dépend pas de m. On a :

$$e^{ima_j x}\, e^{im\psi_j(y)}\, P(x,y) = \sum_{\substack{p\in\mathbf{Z}\\ n\in\mathbf{Z}^q}} c_{p,n}\, e^{i(p+ma_j)x}\, e^{iny}$$

donc en supposant ma_j entier,

$$\|e^{ima_j x}\, e^{im\psi_j(y)}\, P(x,y)\|_{A(\mathbf{T}^{q+1};\omega_j(p))} = \sum_{\substack{p\in\mathbf{Z}\\ n\in\mathbf{Z}^q}} |c_{p,n}|\, \omega_j(p+ma_j) \ .$$

Cette quantité est supérieure à :

$$(3) \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}^q} |c_{o,n}|\, \omega_j(ma_j) \geq C_2\, m^{q/2} \omega_j(m)$$

d'après (2), où $C_2 > 0$ ne dépend pas de m. Cette majoration vaut encore si ma_j n'est pas entier (on décompose ma_j en sa partie entière N et le reste α , on prolonge $e^{i\alpha x}$ en dehors du support de M en une fonction de $A(\mathbf{T};\omega_j)$ partout différent de zéro. On conclut facilement sous l'hypothèse supplémentaire que $A(\mathbf{T}^{q+1};\omega_j(p))$ est une algèbre de Banach, c'est-à-dire $\omega_j(p_1+p_2) \leq C\, \omega_j(p_1)\, \omega_j(p_2)$ pour tout couple (p_1, p_2) de $\mathbf{Z}^2$.

Puisque $\|Me^{imf_j}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} \geq \|e^{ima_j x}\, e^{im\psi_j(y)}\, P(x,y)\|_{A(\mathbf{T}^{q+1};\omega_j(p))}$

(1) entraîne compte-tenu de la minoration (3) que le Hessien de ψ_j est identiquement nul. Prenant $(q = 1, \ell_1 = \ell)$ on voit que les k dérivées partielles secondes $\partial^2\varphi_j/ \partial^2 t_\ell$, $1 \leq \ell \leq k$, sont identiquemen nulles. Puis prenant $q = 2$, $\ell_1 = \ell$, $\ell_2 = h$, on voit que toutes les dérivées partielles secondes $\partial^2\varphi_j/\partial t_\ell \partial t_h$ sont identiquement nulles. Donc φ_j est linéaire, ainsi que f_j :

$$f_j(t_1, \dots, t_k) = \sum_{1\leq\ell\leq k} a(j,\ell)t_\ell + b_j \quad .$$

Soit $M(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^k} c_n e^{int}$, on a $Me^{imf_j} = \sum_{n\in\mathbf{Z}^k} c_n\, e^{i\sum_{1\leq\ell\leq k}[n_\ell+ma(j,\ell)]t}$

et lorsque chaque quantité $ma(j,\ell)$ est un entier

$$\|Me^{imf_j}\|_{A(\mathbf{T}^k;\omega)} = \sum_{n\in\mathbf{Z}^k} |c_n| \prod_{1\leq\ell\leq k} \omega_\ell(n_\ell + ma(j,\ell))$$

$$\geqslant |c_o| \prod_{1\leq\ell\leq k} \omega_\ell(ma(j,\ell)) .$$

Comme plus haut cette minoration vaut encore à une constante multiplicative près indépendante de m, lorsque $ma(j,\ell)$ est quelconque. Ceci entraîne d'après (1) que $a(j,\ell) = 0$ si ℓ est différent de j et $\lim_{x\to+\infty}\omega_\ell(x) = +\infty$. La discussion du caractère entier ou non de $a(j,\ell)$ repose sur des considérations évidentes de prolongement 2π-périodique en chaque variable de f_j , $1 \leqslant j \leqslant k$.

Il est alors facile d'obtenir la version adaptée aux homomrophismes de $A(\mathbf{R}^k;\omega)$:

Théorème 15" : (resp. 16") : Soit M une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^k$ à support compact non identiquement nulle. Avec les hypothèses du théorème 15 (resp. 16) sur le poids ω , soit $f = (f_1, \ldots, f_k)$ une application de $\mathbf{R}^k$ dans lui-même de classe C^2 (resp. C^3) telle que $F \longmapsto MF(f)$ soit une application linéaire de $A(\mathbf{R}^k; \omega(|t|))$ (resp. $A(\mathbf{R}^k;\omega)$) dans lui-même.

Alors dans un voisinage du support de M, f a la forme indiquée par le théorème 15 (resp. 16) où les coefficients $a(j,\ell)$ non nuls sont réels quelconques.

Choisissons une constante $r > 0$ pour que le support de $M(rt)$ soit contenu dans $\left]-\pi, +\pi\right[^k$. Soit G une fonction quelconque de $A(\mathbf{T}^k; \omega(|n|))$ (resp. $A(\mathbf{T}^k;\omega)$) avec $\mathbf{T}^k \simeq \mathbf{R}^k/(2\pi\mathbf{Z})^k$. f étant bornée sur un voisinage du support de M, choisissons une constante $\lambda > 0$ telle que sur ce voisinage on ait

$$\lambda|f| \leqslant a < \pi \quad .$$

Soit P (resp. φ) la fonction sur $\mathbf{T}^k$ définie par prolongement périodique à partir de la fonction définie sur $\mathbf{R}^k$ $M(rt)$ (resp. $M(rt)G(\lambda f(rt))$. En remarquant qu'il existe une fonction F de $A(\mathbf{R}^k;\omega(|t|))$ (resp. $A(\mathbf{R}^k;\omega)$) qui coïncide avec G sur l'intervalle $[-a, +a]$, on a :

$$M(rt)G(\lambda f(rt)) = M(rt)F(\lambda f(rt))$$

et d'après l'hypothèse, cette dernière fonction appartient à $A(\mathbf{R}^k; \omega(|t|))$ (resp. $A(\mathbf{R}^k;\omega)$), donc,

$$\varphi(t) = P(t)G(\lambda f(rt))$$

appartient à $A(\mathbf{T}^k;\omega(|n|))$ (resp. $A(\mathbf{T}^k;\omega)$) et d'après le théorème 15' (resp. 16'), sur un voisinage su support de P, $\lambda f(rt)$ a la forme indiquée par les théorèmes 15 (resp. 16) où les coefficients sont des nombres réels quelconques. D'où la conclusion.

Un corollaire immédiat est que les homomorphismes de classe C^2 (resp. C^3) de

$A(\mathbb{R}^k;\omega(|t|))$ (resp. $A(\mathbb{R}^k;\omega)$) sont les seuls homomorphismes naturels.

L'hypothèse de régularité de l'homomorphisme est superflue si $\omega(|t|) \geq 1 + |t|^2$ (resp. $\omega_j(|t_j|) \geq 1 + |t_j|^3$ pour $1 \leq j \leq k$).

5.1. Nous pouvons appliquer les résultats des paragraphes 3 et 4 aux espaces de transformées de Hankel $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; 1 ; \omega)$ noté simplement $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$ (voir chap. 1.4.) et plus particulièrement aux espaces de fonctions multiradiales $\mathcal{R}(k_1, \ldots, k_q ; \omega)$ de $A(\mathbb{R}^k;\omega)$ (voir chap. III. 1.2). Nous ferons au préalable quelques remarques :

1. Soit M une fonction définie sur $\mathbb{T}^k$. Pour chaque théorème du paragraphe 3 donnant une majoration de $\|e^{iuf}\|$ il est immédiat de donner une condition de régularité sur M suffisante pour que la même majoration soit valable pour $\|Me^{iuf}\|$. Ces conditions sont remplies à fortiori lorsque M est de classe C^∞.

2. Soit ω un poids de $\Omega(q)$ (notations du paragraphe 1). Si F opère dans $A(\mathbb{T}^q;\omega)$, elle opère localement dans $A(\mathbb{R}^q;\omega)$ dans le sens suivant ; Pour tout fonction M C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^q$, pour toute fonction f appartenant à $A(\mathbb{R}^q;\omega)$ à valeurs réelles, MF(f) appartient à $A(\mathbb{R}^q;\omega)$.

En effet, choisissant une constante $r > 0$ pour que le support de M(rt) soit contenu dans $\left[\,]-\pi, +\pi[\,\right]^q$. Soit Q une fonction C^∞ à support compact contenu dans $\left[\,]-\pi, +\pi[\,\right]^q$ et égale à 1 sur un voisinage du support de M(rt). Soit P (resp. φ) la fonction sur $\mathbb{T}^q$ définie par prolongement périodique à partir de la fonction M(rt) (resp. M(rt)F(Q(t)f(rt))). D'après l'hypothèse et la remarque 1, φ appartie à $A(\mathbb{T}^q;\omega)$. Donc la fonction sur $\mathbb{R}^k$ M(rt)F(f(rt)) appartient à $A(\mathbb{R}^q;\omega)$, il en est donc de même pour M(t)F(f(t)).

3. Le résultat global est en général faux :

<u>Si</u> F <u>opère dans</u> $A(\mathbb{T}^q;\omega)$, F <u>n'opère pas en général dans</u> $A(\mathbb{R}^q;\omega)$.

Ceci résulte, d'après une remarque de N. Leblanc ([26] p. 12), des travaux de Y. Katznelson, [24], par exemple il existe des fonctions F C^∞, telles que F(0)=0, qui n'opèrent pas dans $A(\mathbb{R}; 1 + |x|)$. Toutefois, si F opère dans $A(\mathbb{T}^q;\omega)$ et est identiquement nulle dans un voisinage de 0, il est clair que F opère dans $A(\mathbb{R}^q;\omega)$ car alors seule intervient la restriction de f à un compact de $\mathbb{R}^q$.

Nous allons démontrer en application de ces remarques et du théorème 11' :

<u>Théorème</u> 17 : <u>Soit</u> $q \geq 1$ <u>un entier, et pour tout entier</u> $1 \leq j \leq q$, <u>un nombre réel</u> $\nu_j \geq -1/2$, <u>une application</u> ω_j <u>continue paire de</u> R <u>dans</u> $[1, +\infty[$ <u>croissante sur</u> $\mathbb{R}^+$, <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

1. $\omega_j(x + y) \leq C\,\omega_j(x)\omega_j(y)$ <u>pour tout couple</u> (x,y) de $\mathbb{R}^2$
2. <u>Il existe des entiers</u> $\ell_j \geq 1$, $p_j \geq 1$ <u>avec</u> $\ell_j \geq \sum_{1\leq n\leq q} p_n$ <u>tels que</u>

$x^{-\ell_j+\nu_j+1/2}\omega_j(x)$ soit croissant, et pour un $\varepsilon_j > 0$ $x^{-p_j-\ell_j+\nu_j+1+\varepsilon_j}\omega_j(x)$ décroissant, lorsque $x > 0$ est assez grand. Soit ω le poids sur $\mathbf{R}^q$ $\omega(t) = \prod_{1\leq j\leq q}\omega_j(t_j)$, et Ω le poids sur $\mathbf{R}$

$$\Omega(x) = (1+|x|)^{q/2}\prod_{1\leq j\leq q}(1+|x|)^{\nu_j+1/2}\omega_j(x).$$

$A(\mathbf{R};\Omega)$ opère localement dans $\mathcal{H}(\nu_1,\ldots,\nu_q;\omega)$ dans le sens suivant : pour toute fonction M de $\mathcal{D}(\,]0,+\infty[^q)$, F de $A(\mathbf{R};\Omega)$, f à valeurs réelles de $\mathcal{H}(\nu_1,\ldots,\nu_q;\omega)$ MF(f) appartient à $\mathcal{H}(\nu_1,\ldots,\nu_q;\omega)$.

Les hypothèses sur ω entraînent que les théorèmes I' et II' (chap. I.4.) s'appliquent. Le support de M étant compact, choisissons une constante $r > 0$ pour que le support de M(rt) soit contenu dans $]0,\pi[^q$. Soit Q une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^q$, à support compact contenu dans $]0,\pi[^q$, à valeurs réelles inférieures ou égales à 1 et égale à 1 sur un voisinage du support de M(rt). On peut prolonger par périodicité M(rt) et, pour toute fonction f de $\mathcal{H}(\nu_1,\ldots,\nu_q;\omega)$, Q(t)f(rt) en fonctions P, φ; définies sur $\mathbf{T}^q \simeq \mathbf{R}^q/(2\pi\mathbf{Z})^q$.

Le théorème I' entraîne que Q(t)f(rt) appartient à $A(\mathbf{R}^q;\varpi)$ avec $\varpi(t_1,\ldots,t_q) = \prod_{1\leq j\leq q}(1+|t_j|)^{\nu_j+1/2}\omega_j(t_j)$ donc φ appartient à $A(\mathbf{T}^q;\varpi)$. On applique alors le théorème 14, compte tenu de la remarque 1: pour toute fonction F de $A(\mathbf{R};\Omega)$ PF(φ) appartient à $A(\mathbf{T}^q;\varpi)$ si la fonction f est à valeurs réelles. Donc la fonction M(rt)F(f(rt)) définie sur $\mathbf{R}^q$ appartient à $A(\mathbf{R}^q;\varpi)$ et d'après le théorème II', à $\mathcal{H}(\nu_1,\ldots,\nu_q;\omega)$.

En particulier, lorsque $\nu_j = (k_j-2)/2$, $k_j \geqslant 1$ entier pour $1\leqslant j\leqslant q$, on a avec les notations du paragraphe 1 :

Corollaire : Soit $k = k_1+\ldots+k_q$ une somme de q entiers $k_j \geqslant 1$. Soit ω un poids appartenant à $\Omega_0(k_1,\ldots,k_q)$. Supposons que pour $1\leqslant j\leqslant q$ ω_j^* soit tel qu'il existe des entiers $\ell_j \geqslant 1$, $p_j \geqslant 1$, avec $\ell_j \geqslant \sum_{1\leq r\leq q} p_r$, $x^{-\ell_j+(k_j-1)/2}\omega_j^*(x)$ croissant, et pour un $\varepsilon_j > 0$, $x^{-p_j-\ell_j+(k_j/2)+\varepsilon_j}\omega_j^*(x)$ décroissant lorsque $x > 0$ est assez grand.

Posons $\Omega(x) = (1+|x|)^{k/2}\prod_{1\leq j\leq k}\omega_j^*(x)$. $A(\mathbf{R};\Omega)$ opère localement (au sens du théorème 17) dans $\mathcal{R}(k_1,\ldots,k_q;\omega)$ espace des fonctions multiradiales de type $(k_1,\ldots,k_q)$ de $A(\mathbf{R}^k;\omega)$.

Lorsque ω est identique à 1, on a un résultat plus fort en utilisant les remarques faites en complément au théorème 11' :

Théorème 18 : Soit $k = k_1+\ldots+k_q$ une somme de q entiers $k_j \geqslant 1$. Si pour tout

$1 \leqslant j \leqslant q$, $k_j \geqslant 2q+1$, alors $A(\mathbb{R};\ 1 + |x|^{k/2})$ opère localement dans $\mathcal{A}(k_1, \ldots, k_q)$ espace des fonctions multiradiales de type $(k_1, \ldots, k_q)$ de $A(\mathbb{R}^k)$ dans le sens que pour toute fonction M de $\mathcal{D}(\left]0, +\infty\right[^q)$ F de $A(\mathbb{R};\ 1 + |x|^{k/2})$, f à valeurs réelles de $\mathcal{A}(k_1, \ldots, k_q)$; $M(|t^{(1)}|, \ldots, |t^{(q)}|)F(f(t))$ appartient à $\mathcal{A}(k_1, \ldots, k_q)$.

Ce résultat est à rapprocher de l'estimation $\|e^{iuf}\|_{A(T^k)} \leqslant C(1 + |u|^{k/2})$ valable lorsque f est à valeurs réelles, de classe C^p où p est pair et $p > k/2$. Une fonction f de $\mathcal{A}(k_1, \ldots, k_q)$ est en général seulement de classe C^ℓ avec $\ell = \operatorname{Inf}_{1 \leqslant j \leqslant q} (k_j-1)/2$, le théorème 18 est donc plus fort. En particulier, lorsque $q = 1$:

Corollaire : $A(R\ ;\ 1 + |x|^{k/2})$ opère localement dans $\mathcal{A}(k)$ espace des fonctions radiales de $A(\mathbb{R}^k)$, pour $k \geqslant 3$.

Les résultats de N. Leblanc, [26], signalés en complément au théorème 11' entraînent à l'aide des théorèmes I' et II' :

1. Le résultat général suivant : il existe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, non analytiques, qui opèrent localement dans $\mathcal{H}(\nu\ ;\ \omega)$ si ω appartient à $\Omega_0(1)$ et $\lim_{x \to +\infty} x^{\nu+(1/2)}\omega(x) = +\infty$. Sous des conditions analogues pour chaque ω_j, le résultat s'étend à $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q;\ \omega)$.

2. La meilleure condition sur Ω pour que $A(\mathbb{R};\ \Omega\ )$ opère localement dans $\mathcal{H}(\nu;\ 1)$ (voir [26] page 5). En particulier les fonctions de $A(\mathbb{R};\ 1 + |x|^a)$ avec $a > 2$, opèrent localement dans $\mathcal{H}(0;1) = \mathcal{A}(2)$ algèbre des fonctions radiales de $A(\mathbb{R}^2)$, ce qui complète le corollaire du théorème 18.

3. N. Leblanc donne aussi, [26] page 6, une méthode pour obtenir des résultats globaux : il existe des fonctions différentiables qui opèrent (globalement) dans $\mathcal{H}(\nu;1)$. Par exemple, les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$, de classe C^4, telles que $F(0) = 0$, opèrent dans $\mathcal{H}(1/2\ ;\ 1) = \mathcal{A}(3)$.

5.2. Alors que l'algèbre $\mathcal{A}(k)$ des fonctions radiales de $A(\mathbb{R}^k)$ a des propriétés de calcul symbolique très différentes de celles de $A(\mathbb{R}^k)$, nous allons voir la parenté des réponses au problème des homomorphismes.

Le résultat suivant, conséquence facile des théorèmes I', II' (chapitre 1.4) et 16" (paragraphe 4) donne la structure des "homomorphismes locaux" de classe C^3 (C^2 si $q = 1$) de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q\ ;\ \omega)$ dans lui-même:

Théorème 19 : Soit $q \geqslant 1$ entier et pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant q$, un nombre réel $\nu_j \geqslant -1/2$, une application ω_j continue paire de R dans $[1, +\infty[$ possédant les propriétés suivantes :

1. ω_j est croissante à croissance lente sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $r > 0$ fixé, $\omega_j(rx) = O(\omega(x))$ lorsque $x \to +\infty$.

2. $\omega_j(x+y) \leq C\,\omega_j(x)\omega_j(y)$ pour tout couple (x,y) de $[R^+]^2$. Soit M une fonction C^∞ à support compact dans $]0, +\infty[^q$, non identiquement nulle. Soit f une application de classe C^3 (ou C^2 si $q = 1$) de $[R^+]^q$ dans $\mathbb{R}^q$, telle que l'image par f du support de M, soit contenue dans $]0, +\infty[^q$, et telle que $F \longmapsto MF(f)$ soit une application linéaire de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$ dans lui-même.

Alors sur un voisinage du support de M, f est une application affine : pour $1 \leq j \leq q$, $f_j(t_1, \ldots, t_q) = \sum_{1\leq \ell \leq q} a(j,\ell)t_\ell + b_j$ où $a(j;\ )$ est nul lorsque $\ell \neq j$, sauf si $\nu_\ell = -1/2$ et $\lim_{x\to+\infty} \omega_\ell(x) < +\infty$.

Posons $\varpi(t) = \prod_{1\leq j\leq q} (1+|t_j|)^{\nu_j + 1/2} \omega_j(t_j)$, pour toute fonction G de $A(\mathbb{R}^q; \omega)$ il existe, d'après le théorème II', une fonction F de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$ qui coïncide avec G sur un voisinage de l'image par f du support de M. Donc $MG(f) = MF(f)$ appartient, d'après l'hypothèse, à $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q; \omega)$ donc, d'après le théorème I', à $A(\mathbb{R}^q; \varpi)$. Le résultat est alors conséquence du théorème 16" (ou 15" si $q = 1$).

L'hypothèse de régularité de f est superflue si pour $1 \leq j \leq k$ $(1+|t_j|)^{\nu_j + 1/2} \omega_j(t_j) \geq C(1+|t_j|^3)$, ou pour $q = 1$ si $(1+|t|)^{\nu + 1/2}\omega(t) \geq C(1+|t|^2)$.

Un cas particulier du théorème 19 est la structure des homomorphismes locaux de classe C^3 (C^2 si $q = 1$) de $\mathcal{R}(k_1, \ldots, k_q ; \omega)$ algèbre des fonctions multiradiales de type $(k_1, \ldots, k_q)$ de $A(\mathbb{R}^k)$.

En corollaire immédiat du théorème 19 on obtient les isomorphismes de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$ sur lui-même correspondant à un homéomorphisme f de $[\mathbb{R}^+]^q$ sur lui-même de classe C^3 (C^2 si $q = 1$).

Corollaire : Un isomorphisme $F \longmapsto F(f)$ de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$ sur lui-même, correspondant à une application f de $[R^+]^q$ dans lui-même de classe C^3 (C^2 si $q=1$) est tel que pour $1 \leq j \leq q$ $f_j(t_1, \ldots, t_q) = a_j t_j$ avec $a_j > 0$.

En particulier, ce corollaire montre que tout isomorphisme de classe C^3 (C^2 si $q=1$) de $\mathcal{R}(k_1, \ldots k_q; \omega)$ sur lui-même (espace des fonctions multiradiales de type $(k_1, \ldots, k_q)$ de $A(\mathbb{R}^k;\omega)$), se prolonge en un isomorphisme de $A(\mathbb{R}^k; \omega)$ sur lui-même.

Notons, par exemple, que l'hypothèse de régularité est superflue pour les isomorphismes de $\mathcal{R}(k)$, lorsque $k \geq 5$.

Pour $k = 1, 2, 3, 4$ les isomorphismes de $\mathcal{R}(k)$ sont aussi les seules applications $F \longmapsto F(f)$ avec $f(x) = ax$, $a > 0$. Pour $k = 1$ c'est la théorème de Beurling et Helson (pour les fonctions paires de $A(\mathbb{R})$). Pour $k = 2,3,4$, c'est un cas particulier du résultat obtenu en remplaçant, dans la démonstration du théorème 19 (pour $q = 1$) le théorème 15" par le résultat de N. Leblanc sur les homomorphismes de $A(\mathbb{T} ; 1+|n|^\alpha)$, $\alpha > 0$ dans lui-même.

Théorème 20 (N. Leblanc, plus les théo. I et II) : les isomorphismes de $\mathcal{H}(\nu;1+|x|^{\alpha})$ $\nu \geqslant -1/2$, $\alpha > 0$ sont les applications $F \longmapsto F(f)$ avec $f(x) = ax$, $a > 0$.

La détermination des isomorphismes globaux de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$ sur lui-même, ne fait pas intervenir la structure globale de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q;\omega)$ mais seulement la structure locale sur $\left]0, +\infty\right[^q$. Il en est autrement pour la détermination des homomorphismes globaux de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q;\omega)$ dans lui-même. On peut conjecturer qu'il n'y a pas d'autres homomorphismes globaux en dehors de l'homomorphisme trivial $F \longmapsto 0$, que les isomorphismes globaux. Nous ne savons malheureusement le démontrer qu'avec de fortes restrictions sur le poids ω, et comme précédemment l'hypothèse que f est de classe C^3 (ou C^2 si $q = 1$).

Il résulte du théorème 19 qu'un tel homomorphisme global correspond à des coefficients $(a(j,\ell), b_j)$ positifs ou nuls. Nous ferons l'hypothèse supplémentaire

(*) Si $q \geqslant 2$, on a pour tout $1 \leqslant j \leqslant q$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu_j + 1/2}\, \omega_j(x) = +\infty$.

L'application f est alors de la forme

$$f_j(t_1, \ldots, t_q) = a_j t_j + b_j , \quad a_j \geqslant 0,\ b_j \geqslant 0 \quad \text{pour tout } 1 \leqslant j \leqslant q.$$

Puisque toute fonction F de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots,\nu_q ; \omega)$ tend vers zéro lorsque $|t|$ tend vers l'infini, on a nécessairement $a_j > 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant q$. Nous allons voir, qu'avec une forte restriction sur le poids ω, les translations n'opèrent pas dans $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$ c'est-à-dire que la fonction $F(t+b)$ n'appartient à $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$ pour toute fonction F de cet espace que si $b_1 = \ldots = b_q = 0$.

Il suffit de le démontrer pour $q = 1$,car on peut choisir la fonction F de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$, $q \geqslant 2$, sous la forme :

$$F(t) = \prod_{1\leqslant j\leqslant q} F_j(t_j)$$

où F_j appartient à $\mathcal{H}(\nu_j; \omega_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant q$.

D'après le théorème I, ceci reviendrait à démontrer :

Conjecture 21 : Il existe une fonction de $A(\mathbf{T}; \varpi)$, $\varpi(x) = (1 + |x|)^{\nu+1/2}\,\omega(x)$, qui sur un voisinage de zéro dans $\mathbf{R}^+$, ne coïncide pas avec une fonction de $\mathcal{H}(\nu;\omega)$.

On a montré dans l'appendice du chapitre I, que dans le cas $\nu = p + 1/2$ ($p \geqslant -1$ entier) toute fonction paire de $A(\mathbf{T}; \varpi)$ coïncide sur un voisinage de zéro dans $\mathbf{R}^+$, avec une fonction de $\mathcal{H}(\nu ; \omega)$, et on peut conjecturer ce résultat dans le cas général. On peut donc préciser la conjecture 21 en se limitant aux fonctions impaires de $A(\mathbf{T}; \varpi)$.

Lorsque $\liminf\limits_{x\to+\infty} x^{-2}\omega(x) > 0$ il est facile de vérifier que toute fonction F de $\mathcal{H}(\nu; \omega)$ est de classe C^1 sur $\left[0, +\infty\right[$ et que $F'(0) = 0$. En effet, on a :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} (xy)^{-\nu} J_\nu(xy)\, y^{2\nu+1} \varphi(y)\, dy$$

avec $\qquad \|F\|_{\mathcal{H}(\nu,\omega)} = \int_0^{+\infty} y^{2\nu+1}\omega(y)\,|\varphi(y)|\,dy < +\infty$

or $\frac{\partial}{\partial x}((xy)^{-\nu}J_\nu(xy)) = y(xy)^{-\nu}J_{\nu+1}(xy)$, donc l'hypothèse sur ω entraîne que F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, sa dérivée étant

$$F'(x) = x\int_0^{+\infty} (xy)^{-\nu-1}\, J_{\nu+1}(xy)y^{2\nu+3}\varphi(y)dy.$$

Ce qui prouve dans ce cas la conjecture :

<u>Proposition</u> 22 : <u>Soit</u> ω <u>une application continues de</u> $\mathbb{R}^+$ <u>dans</u> $[1, +\infty[$ <u>, telle que</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}\omega(x) > 0$, <u>alors les translations n'opèrent pas dans</u> $\mathcal{H}(\nu\ ;\ \omega)$.

D'où :

<u>Théorème</u> 23 : <u>Sous les hypothèses du théorème</u> 19, <u>et de plus</u> $\liminf\limits_{x\to+\infty} x^{-2}\omega_j(x) > 0$ <u>pour tout</u> $1 \leqslant j \leqslant q$, <u>tout homomorphisme de</u> $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$ <u>dans lui-même de la forme</u> $F \longmapsto F(f)$ <u>où f est de classe</u> C^3 <u>si</u> $q \geqslant 2$, <u>sans hypothèse sur f si</u> $q = 1$, <u>correspond à une application</u>

$$f_j(t_1, \ldots, t_q) = a_j t_j \qquad a_j > 0, \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant q .$$

En particulier :

<u>Corollaire</u> : <u>Avec les hypothèses du théorème</u> 19 <u>sur le poids</u> ω <u>et de plus</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}\omega(x) > 0$, <u>les homomorphismes de</u> $\mathcal{H}(\nu\ ;\ \omega)$ <u>sont les seuls isomorphismes</u>
$F(x) \longmapsto F(ax)\ ;\ a > 0$.

La conjecture 21 peut être démontré dans un autre cas particulier intéressant, celui où $\nu = -1/2$.

$\mathcal{H}(\nu;\omega)$ s'identifie alors au sous-espace des fonctions paires de $A(\mathbb{R}\ ;\ \omega)$ la conjecture revient à démontrer :

<u>Théorème</u> 24 : <u>Soit</u> ω <u>une application continue paire croissante sur</u> $\mathbb{R}^+$, <u>de</u> $\mathbb{R}$ <u>dans</u> $[1, +\infty[$, <u>il existe une fonction</u> F <u>de</u> $A(\mathbf{T};\omega)$ <u>telle que la fonction</u> G, 2π-<u>périodique, paire, égale à</u> F <u>sur l'intervalle</u> $[0,\pi]$ <u>n'appartient pas à</u> $A(\mathbf{T};\omega)$ $(\mathbf{T} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Pour $\omega = 1$, c'est un résultat classique de J.P. Kahane [20] dont nous suivons la méthode : Soit θ la fonction 2π-périodique égale à $|x|$ sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$. Si la conclusion du théorème 24 est fausse pour toute fonction f de $A(\mathbf{T};\ \omega)$ la fonction $f\circ\theta$ doit appartenir à $A(\mathbf{T};\ \omega)$, et d'après le théorème du graphe fermé, pour tout entier n on devrait avoir

$$\|e^{in\theta}\|_{A(\mathbf{T};\omega)} \leqslant C\omega(n) \quad ,$$

ce qui contredit un calcul direct :

<u>Lemme 25</u> : <u>Avec les hypothèses du théorème</u> 24 <u>sur</u> ω , <u>la fonction</u> 2π-<u>périodique égale à</u> $|x|$ <u>sur l'intervalle</u> $[-\pi, +\pi]$ <u>est telle que :</u>

$$\|e^{in\theta}\|_{A(\mathbf{T};\omega)} \geqslant C\ \omega(n)\log|n|$$

<u>pour tout entier</u> n, $|n| \geqslant 4$, <u>où</u> $C > 0$ <u>est une constante</u>. <u>De plus s'il existe un nombre réel</u> α, $0 \leqslant \alpha < 1$, <u>tel que</u> $x^{-\alpha}\omega(x)$ <u>décroit lorsque</u> $x > 0$ <u>est assez grand on a</u>

$$C_1\omega(n)\mathrm{Log}|n| \leqslant \|e^{in\theta}\|_{A(\mathbf{T};\omega)} \leqslant C_2\ \omega(n)\log|n|$$

<u>pour tout entier</u> n, $|n| \geqslant 4$, C_1 <u>et</u> C_2 <u>étant des constantes strictement positives</u>.

(La seconde partie du lemme servira utlérieurement). On a : $e^{in\theta(x)} = \sum_{p\in\mathbf{Z}} c_p e^{ipx}$ avec $c_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta(x)}\, e^{-ipx}\,dx$, donc pour $p \neq \pm n$

$$c_p = \frac{(-1)^{n-p}-1}{2i}\left[\frac{1}{n-p} + \frac{1}{n+p}\right] \quad \text{et} \quad c_n = c_{-n} = 1/2\ .$$

Supposons $n > 0$, on a donc :

$$\|e^{in\theta(x)}\|_{A(\mathbf{T};\omega)} = \sum_{p\in\mathbf{Z}} |c_p|\omega(p) \geqslant \frac{\omega(n)}{\pi}\sum_{q=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2q+1} - \frac{1}{2n+2q+1}\right]$$

d'où la première partie du lemme.

Pour la seconde partie, on a $(n > 0)$:

$$\|e^{in\theta(x)}\| \leqslant \omega(n) + \frac{\omega(n)}{\pi}\sum_{|p|<n}\frac{1}{n-p} + \frac{1}{n+p} + \frac{2}{\pi}\frac{\omega(n)}{n^\alpha}\sum_{p>n} p^\alpha\left[\frac{1}{p-n} - \frac{1}{p+n}\right]\ .$$

Un calcul élémentaire (développement en série entière en $\frac{1}{x}$ et intégration terme à terme) montre que, pour $\alpha < 1$ (et n assez grand)

$$\int_{n+1}^{+\infty} x^\alpha\left[\frac{1}{x-n} - \frac{1}{x+n}\right] dx \leqslant C\ n^\alpha \log n$$

d'où la seconde partie du lemme.

6. Soit k une somme de q entiers $k_j \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant q$, et $t = (t^{(1)}, \ldots, t^{(q)})$ la décomposition canonique d'un vecteur t de $\mathbf{R}^k = \mathbf{R}^{k_1} \times \ldots \times \mathbf{R}^{k_q}$. Nous allons étudier le <u>problème de la synthèse</u> pour la sous-variété $S(k_1, \ldots, k_q)$ définie par les q. équations

$$|t^{(j)}| = a_j > 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant q,$$

relativement à l'algèbre $A(\mathbf{R}^k; \prod\omega_j(|t^{(j)}|)$ où chaque poids ω_j appartient à $\Omega_o(1)$ (notation du paragraphe 1.) : la fermeture de l'idéal des fonctions nulles au voisinage de $S(k_1, \ldots, k_q)$ est-elle l'idéal des fonctions nulles sur $S(k_1,\ldots,k_q)$?

Il nous faut d'abord étudier le problème de la synthèse pour un point de $]0, +\infty[^q$ relativement à l'agèbre $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q\ ;\ \omega)$.

<u>Théorème</u> 26 : <u>Soit pour tout</u> $1 \leqslant j \leqslant q$, $\nu_j \geqslant -1/2$ <u>et</u> ω_j <u>un poids appartenant à</u>

$\Omega_o(1)$.

S'il existe j tel que $\liminf_{x\to+\infty} x^{\nu_j - 1/2} \omega_j(x) > 0$, alors tout point de $\left]0, +\infty\right[^q$ est de non synthèse pour $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$.

Si pour tout j, il existe $\alpha_j > 1$ et un entier $p_j \geqslant 1$ tel que

$$\limsup_{x\to+\infty} x^{\nu_j - 1/2} (\log x)(\log)_2(x) \ldots (\log)_{p_{j-1}}(x) \left[(\log)_{p_j}(x)\right]^{\alpha_j} \omega_j(x) < +\infty$$

(où $(\log)_p$ désigne log itéré p fois), alors tout point de $\left]0, +\infty\right[^q$ est de synthèse pour $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$.

D'après les théorèmes I' et II' le problème est celui de la synthèse d'un point dans $A(\mathbf{T}^q; \varpi)$ avec $\omega(x) = \prod_{1\leqslant j\leqslant q} (1 + |x_j|)^{\nu_j + 1/2} \omega_j(x_j)$.

La première partie résulte de ce que pour toute fonction $f(x_1, \ldots, x_q)$ de $A(\mathbf{T}^q; \varpi)$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est une fonction continue.

Pour la seconde partie, soit X l'espace des pseudo-mesures, dual de $A(\mathbf{T}^q;\varpi)$. Une pseudomesure portée par un point ne peut être qu'une combinaison linéaire finie de dérivées d'ordre quelconque de masses ponctuelles portées par ce point. Or, $A(\mathbf{T}^q; \varpi)$ contient, sous l'hypothèse faite, une fonction qui en ce point, n'est dérivable dans aucune direction : par exemple une fonction linéaire par morceaux ayant ce point pour point anguleux. On choisit cette fonction sous la forme $f_1(x_1) \ldots f_q(x_q)$, chaque f_j étant linéaire par morceaux en une variable. Le coefficient de Fourier c_n d'ordre n d'une fonction linéaire par morceaux en une variable, est $O(|n|^{-2})$ lorsque $|n| \to +\infty$, en conséquence f_j appartient à $A(\mathbf{T} ; (1 + |x|)^{\nu_j + 1/2} \omega_j(x))$ pour $1 \leqslant j \leqslant q$. Ainsi toute pseudomesure $\mathbf{T}$ portée par un point, est une masse ponctuelle en ce point et pour toute fonction f de $A(\mathbf{T}^q;\varpi)$ nulle en ce point le produit scalaire $\langle \mathbf{T}, f\rangle$ est nul. Par dualité ceci entraîne que f est limite dans $A(\mathbf{T}^q; \varpi)$ d'une suite de fonctions f_n nulles dans un voisinage du point.

On pourrait étudier le problème de la synthèse pour un point de la frontière de $[\mathbf{R}^+]^q$ les résultats sont malheureusement incomplets. On a, par exemple :

Théorème 27 : Soit pour tout $1 \leqslant j \leqslant q$, $\nu_j \geqslant -1/2$ et ω_j un poids appartenant à $\Omega_o(1)$.

S'il existe j tel que $\liminf_{x\to+\infty} x^{-4}\omega_j(x) > 0$, alors tout point de $[\mathbf{R}^+]^q$ est de non synthèse pour $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$.

Si pour tout j, $\liminf_{x\to+\infty} x^{-1} \omega_j(x) = 0$, l'origine est un ensemble de synthèse pour $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$.

La première partie résulte de ce que sous l'hypothèse indiquée toute fonction F de $\mathcal{H}(\nu_1, \ldots, \nu_q ; \omega)$ est telle que $\partial^2F/\partial x_j$ est continue dans $[\mathbf{R}^+]^q$ (il ne suffit pas de savoir que $\partial F/\partial x_j$ est continue car $\partial F/\partial x_j$ est nul pour $x_j = 0$).

La seconde partie résulte de ce qu'un élément T du dual de $\mathcal{H}(\nu_1, \dots, \nu_q ; \omega)$, porté par l'origine, est nécessairement une masse ponctuelle: en effet, d'après le théorème 1 de l'appendice du chapitre I, il existe une fonction F de $\mathcal{H}(\nu_1,\dots,\nu_q;\omega)$ qui n'est dérivable à l'origine dans aucune direction : on prend $F(x_1,\dots,x_q) = f(x_1) \dots f(x_q)$ où f est la fonction construite dans le théorème cité telle que $\limsup_{x\to 0} \frac{|f(x)-f(0)|}{x} = +\infty$.

En application du théorème 26, nous pouvons donner le :

<u>Théorème</u> 28 : <u>Soit pour tout</u> $1 \leq j \leq q$, <u>un entier</u> $k_j \geq 1$, ω_j <u>un poids appartenant à</u> $\Omega_o(1)$. <u>Soit</u> $S(k_1, \dots, k_q)$ <u>la sous-variété de</u> $\mathbb{R}^k$, $k = k_1 + \dots + k_q$, <u>définie par les équations</u> $|t^{(j)}| = a_j > 0$, $1 \leq j \leq k$, <u>où</u> $t = (t^{(1)}, \dots, t^{(q)})$ <u>est la décomposition canonique d'un vecteur de</u> $\mathbb{R}^{k_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{k_q}$.

<u>S'il existe</u> j <u>tel que</u> $\liminf_{x\to+\infty} x^{(k_j-3)/2}\omega_j(x)>0$, <u>alors</u> $S(k_1, \dots, k_q)$ <u>est un ensemble de non synthèse pour</u> $A(\mathbb{R}^k ; \prod_{1\leq j\leq q} \omega_j(|t^{(j)}|))$.

<u>Si pour tout</u> j, <u>il existe</u> $\alpha_j > 1$ <u>et un entier</u> $p_j \geq 1$ <u>tel que</u>

$$\limsup_{x\to+\infty} x^{(k_j-3)/2} (\log x)(\log)_2(x)\dots(\log)_{p_{j-1}}(x)\left[(\log)_{p_j}(x)\right]^{\alpha_j}\omega_j(x) < +\infty$$

($(\log)_p$ <u>est itéré</u> p <u>fois</u>), <u>alors</u> $S(k_1, \dots, k_q)$ <u>est un ensemble de synthèse pour</u> $A(\mathbb{R}^k; \prod_{1\leq j\leq q} \omega_j(|t^{(j)}|))$.

La première partie qui généralise le contre exemple de L.Schwartz [33] correspondant à $q = 1$, $k = 3$, $\omega = 1$, résulte immédiatement de la partie correspondante du théorème 26 car si on peut approcher une fonction f de $\mathcal{R}(k_1, \dots, k_q ; \omega)$ nulle sur $S(k_1, \dots, k_q)$ par une suite de fonctions f_n de $A(\mathbb{R}^k; \prod_{1\leq j\leq q} \omega_j(|t^{(j)}|))$ nulles au voisinage de $S(k_1, \dots, k_q)$ on peut aussi approcher f par la suite de fonctions de $\mathcal{R}(k_1, \dots, k_q ; \omega)$ nulles au voisinage de $S(k_1, \dots, k_q)$:

$$g_n(x) = \int_{SO(k_1)\times\dots\times SO(k_q)} f_n(\sigma(x))\,d\sigma .$$

La seconde partie généralise le théorème de C. Herz [16], correspondant à q=1, k=2, ω=1. La démonstration est une adaptation facile de celle que N. Varopoulos donne dans [39], du théorème de C. Herz : on montre (en remplaçant SO(k) par $SO(k_1) \times \dots \times SO(k_q)$ que l'idéal des fonctions nulles sur $S(k_1, \dots, k_q)$ est engendré par l'idéal des fonctions multiradiales nulles sur $S(k_1, \dots, k_q)$.

On a en particulier le :

<u>Corollaire</u> : <u>Un cercle dans</u> $\mathbb{R}^2$ <u>est un ensemble de synthèse pour l'algèbre</u> $A(\mathbb{R}^2 ; 1 + |x|^\alpha)$ <u>si et seulement si</u> $\alpha < 1/2$.

-=-

CHAPITRE IV

Fonctions de $A(\mathbb{R}^k)$ constantes sur des surfaces polyédrales homothétiques

1. Sous-algèbre définie par une relation d'équivalence à classes homothétiques.

Soit E un fermé du groupe $G = \mathbb{R}^k$ ou $\mathbb{T}^k$, A(E) l'algèbre de Banach des restrictions à E des fonctions de A(G) la norme d'un élément f de A(E) étant la borne inférieure des normes des prolongements de f en éléments de A(G).

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E dont les classes sont des fermés, et $A_{\mathcal{R}}(E)$ la sous-algèbre fermée de A(E) des fonctions qui prennent une valeur constante sur chaque classe de $\mathcal{R}$ (on dira "qui respectent $\mathcal{R}$").

Soit S une sous-variété de classe C^0 de dimension k-1, de l'espace euclidien de dimension k. Nous supposerons que S est étoilé par rapport à un point Ω du complémentaire dans le sens que toute demi-droite issue de Ω coupe S en un point et un seul à distance finie. A un tel couple (S, Ω) on associe une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont les homothétiques de S dans les homothéties de centre Ω de rapport positif. Prenons Ω pour origine O des coordonnées dans l'espace euclidien identifié à $\mathbb{R}^k$, à $\mathcal{R}$ est associée l'application $r : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^+$, positivement homogène de degré un, qui à tout vecteur t de $\mathbb{R}^k$ fait correspondre le rapport d'homothétie r(t) qui transforme S en l'homothétique de S passant par l'extrêmité M du vecteur $\overrightarrow{OM} = t$: pour $t \neq 0$, P étant l'unique intersection de la demi-droite OM avec S, on a

$$r(t) = \frac{\|\overrightarrow{OM}\|}{\|\overrightarrow{OP}\|} \quad , \text{ et pour } t = 0 \ , \ r(o) = 0 \ .$$

La fonction $z = r(t)$ a pour graphe dans $\mathbb{R}^{k+1}$ un cône ayant pour sommet O et dont les génératrices s'appuient sur la variété translatée de S par la translation +1 parallèle à l'axe Oz. (Ici et dans la suite, "cône" est pris dans le sens "cône positif" c'est-à-dire globalement stable par les homothéties ayant pour centre le sommet du cône et un rapport positif).

Soit E une "couronne" définie par les inégalités

(1) $\qquad 0 \leqslant a \leqslant r(t) \leqslant b \leqslant +\infty$.

A toute fonction f de $A_{\mathcal{R}}(E)$ correspond une fonction F continue sur $[a, b]$ telle que $f(t) = F(x)$ lorsque $r(t) = x$. Donc $A_{\mathcal{R}}(E)$ s'identifie à l'algèbre des fonctions F continues sur $[a, b]$ telles que $F \circ r$ appartienne à A(E). On dira que F est le "profil" de la fonction $f = F \circ r$, et on notera $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ - où Λ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté - l'algèbre des profils muni par transport de structure, de la structure d'algèbre de Banach de $A_{\mathcal{R}}(E)$.

La restriction d'une fonction de $A(\mathbb{R}^k)$ à un sous-espace vectoriel de dimension un appartenant à $A(\mathbb{R})$, on a donc l'inclusion

$$A_{\mathcal{R}}([a, b]) \subsetneq A([a, b])$$

où le second espace est l'algèbre des restrictions à $[a, b]$ de $A(\mathbb{R})$. Le spectre de $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ n'est pas nécessairement l'intervalle $[a, b]$: on peut donner, [8], des exemples simples en dimension $k \geq 4$, de surface S pour laquelle $A_{\mathcal{R}}(E)$ est réduite aux constantes. Il est raisonnable de conjecturer qu'il en est ainsi lorsque la fonction r n'appartient pas localement à $A(\mathbb{R}^k)$ dans le complémentaire de l'origine, c'est-à-dire lorsque S n'est pas assez régulière.

Dans le cas contraire, il est facile de montrer :

<u>Proposition</u> : <u>Lorsque</u> r <u>appartient à</u> A(E), E <u>étant une couronne compacte, l'algèbre</u> $A_{\mathcal{R}}(E)$ <u>a pour spectre l'intervalle</u> $[a, b]$.

En effet, l'algèbre $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ est autoadjointe, la fonction $x \longmapsto x$ appartient à l'algèbre et sépare les points de $[a, b]$, enfin si F appartient à Λ et ne prend pas la valeur λ sur $[a, b]$, alors $F/(\lambda-F)$ appartient aussi à Λ (car $For/(\lambda-For)$ appartient à A(E)).

Le spectre de Λ est alors l'intervalle $[a, b]$ d'après une propriété classique des algèbres de Banach de fonctions continues sur un compact. (Voir par exemple L. Loomis [29] , pages 54-55).

L'appartenance de f = For à A(E) est une propriété locale, dans le sens que si une fonction continue sur E, coïncide au voisinage de chaque point de E (y compris éventuellement le point à l'infini) avec une fonction de A(E), alors elle appartient elle-même à A(E) (propriété classique de Wiener). En conséquence l'appartenance de F à l'algèbre des profils $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ est une propriété locale, dans le sens que si une fonction continue sur $[a, b]$ coïncide au voisinage de chaque point de $[a,b]$ avec une fonction de $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$, elle appartient elle-même à cet espace.

L'étude du comportement au voisinage de zéro et de l'infini des fonctions de $\Lambda_{\mathcal{R}}([0, +\infty[)$ présente des difficultés supplémentaires (cf. le cas où S est une sphère, appendice du chapitre I). Aussi nous limiterons, sauf précision explicite, au cas où $0 < a < b < +\infty$.

Nous supposerons désormais que r appartient localement à $A(\mathbb{R}^k)$ dans le complémentaire de l'origine, ce qui se traduit en termes de régularité de la sous-variété S.

L'intervalle compact $[a, b]$ peut être supposé par homothétie, contenu dans $]0, \pi[$ et en prenant pour modèle du tore $\mathbb{T}$ l'intervalle $[-\pi, +\pi]$, on peut considérer Λ comme une algèbre de Banach formée des restrictions à $[a, b]$ d'une classe de séries de Fourier absolument convergentes :

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$$

munie d'une topologie plus fine que celle de A ($[a,b]$).

Soit ω une application de $\mathbb{Z}$ dans $[1, +\infty[$, on a d'après le théorème du graphe fermé la proposition :

<u>Proposition</u> : <u>$A([a, b]; \omega)$ est topologiquement inclus dans Λ si et seulement si</u> $\limsup_{n\to+\infty} [\omega(n)]^{-1} \|e^{inr}\|_{A(E)} < +\infty$.

<u>Corollaire</u> : <u>Si S est assez régulière pour que $\|e^{inr}\|_{A(E)}$ soit à croissance lente, l'algèbre $A_{\mathcal{R}}(E)$ est régulière</u> .

<u>Remarque</u> : Lorsque $\|e^{inr}\|_{A(E)}$ est à croissance lente, il est facile de montrer que le spectre de l'algèbre $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{R}}([a', +\infty[)$ est $[a', +\infty[$ (pour $a' = 0$ on suppose de plus que r appartient à $A(\mathbb{R}^k)$ au voisinage de l'origine). On considère l'algèbre $\tilde{\Lambda}$ des fonctions continues sur $[a', +\infty[\cup \{+\infty\}$ de la forme $\lambda + F$ où λ est une constante quelconque et F une fonction quelconque de Λ (on a $F(+\infty) = 0$). Par hypothèse Λ contient les fonctions indéfiniment différentiables à support compact ce qui permet de montrer que Λ sépare les points de $[a', +\infty[\cup \{+\infty\}$. Le spectre de $\tilde{\Lambda}$ est donc $[a', +\infty[\cup \{+\infty\}$et on en déduit aisément que le spectre de Λ est $[a', +\infty[$.

Il est facile de donner des conditions de régularité suffisantes sur S pour assurer la croissance lente de $\|e^{inr}\|_{A(E)}$ en particulier d'après le th. 9', chap. III.3. (appliqué avec un poids $\omega = 1$).

<u>Proposition</u> : <u>Si S est une sous-variété de classe C^m</u> , m <u>pair</u> > k/2 , <u>$\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ est une algèbre régulière de spectre $[a, b]$ avec les inclusions</u> :

$$A([a, b] ; 1 + |n|^{k/2}) \xrightarrow{\subset} \Lambda_{\mathcal{R}}([a, b]) \xrightarrow{\subset} A([a, b]) .$$

La majoration

$$\|e^{inr}\|_{A(E)} \leq C(1 + |n|^{k/2})$$

(où C ne dépend pas de n) qui entraîne ce résultat n'est pas la meilleure possible comme le montre le cas où S est la sphère, en effet, $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ est alors isomorphe à $A([a, b] ; 1 + |n|^{(k-1)/2})$ ce qui entraîne en particulier l'existence de constantes C_1, $C_2 > 0$ indépendantes de n telles que :

$$C_1(1 + |n|^{(k-1)/2}) \leq \|e^{inr}\|_{A(E)} \leq C_2(1 + |n|^{(k-1)/2})$$

(ce que l'on note $\|e^{inr}\|_{A(E)} \sim |n|^{(k-1)/2}$).

Lorsqu'il existe un ouvert de S de classe suffisante (C^m où m est la partie entière de k/2 + 2) le théorème 12 chap. III.4.1. (avec la remarque 1 qui suit l'énoncé des th. 15' et 16') ne s'applique pas à la minoration de $\|e^{inr}\|_{A(E)}$ car le Hessien de r est identiquement nul (sur l'ouvert).

Mais il est facile de montrer que : .

Proposition : *S'il existe un ouvert de S de classe C^m, m partie entière de $(k-1)/2 + 2$, alors $\|e^{inr}\|_{A(E)} \geqslant C|n|^{(k-1)/2}$ où $C > 0$ ne dépend pas de n.*

Corollaire : *Soit ω une application de $\mathbb{Z}$ dans $[1, +\infty[$, si $A([a, b]); \omega)$ est topologiquement inclus dans $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ on a nécessairement $\liminf_{n\to\infty} |n|^{-(k-1)/2}\omega(n) > 0$.*

Soit Ω l'intérieur d'un cône de $\mathbb{R}^k$ de sommet 0 dans lequel la fonction r est de classe C^m. Considérons un hyperplan H de $\mathbb{R}^k$ ne contenant pas l'origine et dont l'intersection avec Ω est non vide, supposons H défini par exemple par l'équation $t_1 = 1$.

Soit $\varphi(u_1, \ldots, u_{k-1})$ la lecture de la restriction de r à H, dans un paramétrage linéaire de H, identifiant H à $\mathbb{R}^{k-1}$. On a évidemment :

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(E\cap H)} \leqslant \|e^{inr}\|_{A(E)}$$

Par ailleurs, il est clair que le Hessien de φ n'est pas identiquement nul dans $\Omega \cap H$, le théorème 12 (avec le remarque citée) s'applique alors à la fonction φ donc $\|e^{in\varphi}\|_{A(E\cap H)} \geqslant C|n|^{(k-1)/2}$ où $C > 0$ ne dépend pas de n.

Y. Domar [7], a récemment élucidé la structure de l'algèbre $A_{\mathcal{R}}(E)$ lorsque la sous-variété S appartient à la classe (Σ) des surfaces suffisamment régulières dont la courbure gaussienne est finie et différente de zéro en tout point.

Le résultat, remarquable, est que la situation est la même quel que soit la forme particulière de S dans la classe (Σ) :

Théorème (Y. Domar) : *Pour toute relation $\mathcal{R}$ associée à une surface S de la classe (Σ), l'algèbre $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ des profils de $A_{\mathcal{R}}(E)$, coïncide localement sur $]a, b[$ avec l'algèbre $A(\mathbb{T}; 1 + |n|^{(k-1)/2})$.*

En particulier, ceci entraîne $\|e^{inr}\|_{A(E)} \sim |n|^{(k-1)/2}$.

Remarque : Le résultat global, égalité de $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ avec l'algèbre de restrictions $A([a, b] ; 1 + |n|^{(k-1)/2})$, reste, semble-t-il, une conjecture.

Plus généralement, soit f une application continue de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ telle que chaque sous-variété de $\mathbb{R}^k$ d'équation $f(t) = cte$ soit compacte. Soit E la couronne définie par $-\infty < a < f(t) < b < +\infty$ et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dont les classes sont les sous-variétés précédentes. L'algèbre $A_{\mathcal{R}}(E)$ est isomorphe à l'algèbre Λ des fonctions F continues sur $[a, b]$ telles que $F \circ f$ appartienne à A(E). Si f appartient à A(E) le spectre de Λ est $[a, b]$. Lorsque f est de classe suffisante au voisinage de E avec un Hessien non identiquement nul sur E, $\|e^{inf}\|_{A(E)} \sim |n|^{k/2}$ mais cette évaluation ne suffit pas pour décrire Λ : par exemple pour $f(t) = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} t_j^2$, il existe des fonctions de F appartenant à Λ sans appartenir à

$A([a, b]; 1 + |n|^{k/2})$ qui est la meilleure algèbre à poids inclue dans Λ . Supposons qu'il existe une application Φ de $\mathbb{R}$ dans lui-même assez régulière, et telle que $g = \Phi \circ f$ ait un Hessien identiquement nul sur E - ceci revient à supposer que les classes de $\mathcal{R}$ sont les sections par les hyperplans parallèles à $\mathbb{R}^k$ d'une surface développable de $\mathbb{R}^{k+1}$ -. C'est par exemple le cas lorsque f est une fonction positivement homogène de degré $\alpha \neq 0$. La structure de l'algèbre Λ précédente, ou de $A_{\mathcal{R}}(E)$ s'obtient en étudiant l'algèbre isomorphe Λ' des fonctions G continues sur un intervalle $[a', b']$ telles que $G \circ g$ appartienne à A(E).

Y. Domar démontre que si f est une application assez régulière de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$, de Hessien identiquement nul, telle que chaque sous-variété d'équation $f(t) = c^{te}$ soit compacte avec une courbure gaussienne partout finie et différente de zéro, alors pour $-\infty < a < b < +\infty$, Λ coïncide localement sur $]a, b[$ avec $A(\mathbb{R} ; 1 + |x|^{(k-1)/2})$ et en particulier $\|e^{inf}\|_{A(E)} \sim |n|^{(k-1)/2}$. Ce résultat complète le th. 12 du chap. III.4. et montre que la majoration de $\|e^{inf}\|_{A(E)}$ donnée par le th. 9' n'est pas précise lorsque le Hessien de f est identiquement nul.

Les résultats de Y. Domar permettent d'étendre au cas où S appartient à la classe (Σ) les résultats locaux concernant le calcul symbolique et les endomorphismes de $A_{\mathcal{R}}(\mathbb{R}^k)$ obtenus au chap. III.5.En particulier, les seuls automorphismes de $A_{\mathcal{R}}(\mathbb{R}^k)$ correspondent aux homothéties de centre 0 de $\mathbb{R}^k$.

2. En opposition au cas régulier, nous prenons maintenant pour surface S une sous-variété de dimension k-1 de classe C^0, linéaire par morceaux. L'hypothèse qu'elle est étoilée par rapport à un point du complémentaire équivaut à supposer que S est le bord d'un ouvert connexe dont la fermeture est un polyèdre compact P(S). En dimension $k \geq 3$ il pourrait y avoir un nombre fini arbitraire d'arêtes (sous-variété linéaire de S de dimension 1) partant d'un sommet de S (composante réduite à un point du bord d'une arête). Nous excluons ce cas, en limitant l'étude au cas où de chaque somme partent des arêtes en nombre égal à la dimension k de l'espace ambiant : on dira que S est de "type minimal" et on désignera pas $(\mathcal{T})$ la classe ainsi définie de surfaces polyèdrales . La fonction r associée à une surface polyèdrale S a pour graphe, dans l'espace $\mathbb{R}^{k+1}$, un cône de sommet 0 formé d'un nombre fini arbitraire de "facettes" sous-variétés linéaires de dimension k.

Soit E une "couronne polyédrale " définie par :

(1) $\qquad 0 < a < r(t) < b < +\infty$.

Il n'est pas évident, à priori, que $A_{\mathcal{R}}(E)$ contient des fonctions non constantes, ni que r appartient localement à $A(\mathbb{R}^k)$: cette propriété sera démontrée plus loin (th. 5).

Nous montrerons la propriété analogue à celle démontrée par Y. Domar pour la classe (Σ): les profils des fonctions de $A_{\mathcal{R}}(E)$ sont localement les mêmes sur $]a, b[$

lorsque S varie dans la classe ($\mathcal{S}$). Ce sont les fonctions qui appartiennent localement sur $]a, b[$ à $A(T; (\log |n|)^{k-1})$ (ceci par abus de notations, le poids convenable étant n'importe quelle application paire de $\mathbb{Z}$ dans $[1, +\infty[$ telle que, à l'infini $\omega(n) \sim (\log|n|)^{k-1}$). Mais nous verrons que l'inclusion de l'algèbre de restrictions $A([a, b]; (\log |n|)^{k-1})$ dans l'algèbre des profils $A_{\mathcal{R}}([a, b])$ est stricte , ce qui signifie qu'il existe des fonctions de A(E) qui respectent $\mathcal{R}$ sur E et dont aucun prolongement en fonction de $A(\mathbb{R}^k)$ ne respecte $\mathcal{R}$ dans l'espace entier.

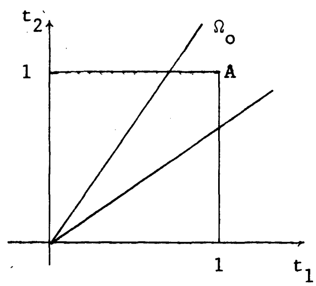
Soit Ω un cône fermé de sommet O, dans $\mathbb{R}^k$, contenant en son intérieur un seul des sommets de S.

Proposition 1 : Lorsqu'on fait varier S, le sommet de S choisi, le cône Ω autour du sommet choisi, il n'y a que deux espaces de profils, isomorphes entre eux, pour les algèbres $A_{\mathcal{R}}(E \cap \Omega)$, correspondant respectivement aux cas où $P(S) \cap \Omega$ est convexe ou non.

Soit S_o la surface polyédrale bord d'un cube de $\mathbb{R}^k$ définie par l'équation :

$$\sup_{1 \leq j \leq k} |t_j| = 1 \ .$$

Montrons par récurrence sur la dimension k que l'algèbre $A_{\mathcal{R}_o}(E_o \cap \Omega_o)$ ne dépend pas du cône Ω_o contenant en son intérieur un seul sommet A de S_o :



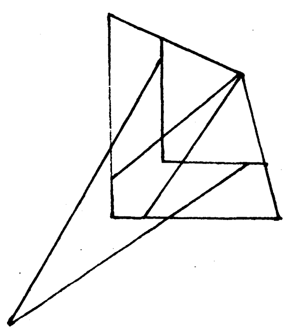
Lorsque k = 2, une fonction f de $A_{\mathcal{R}_o}(E_o \cap \Omega_o)$ ne dépend que d'une coordonnée dans le complémentaire de la droite OA, et donc il existe un prolongement de f dans $A(\mathbb{R}^2)$ respectant la relation $\mathcal{R}_o$ dans tout cône Ω'_o contenant Ω_o, et ne contenant que le sommet A de S. Les algèbres de Banach $A_{\mathcal{R}_o}(E_o \cap \Omega_o)$ et $A_{\mathcal{R}_o}(E_o \cap \Omega'_o)$ ont donc même espace de profils.

Pour $k \geq 3$, une fonction f de $A_{\mathcal{R}_o}(E_o \cap \Omega_o)$ au voisinage d'un point M de $S_o \cap E_o$ différent de A, dépend au plus de k-1 coordonnées en lesquelles c'est une fonction appartenant localement à $A(\mathbb{R}^{k-1})$ respectant une relation $\mathcal{R}_o(k-1)$ associée à un cube $S_o(k-1)$ dans un cône $\Omega_o(k-1)$. Par hypothèse de récurrence la fonction en (k-1) coordonnées se prolonge dans un voisinage de $E_o \cap \Omega_o(k-1)$ en respectant la relation $\mathcal{R}_o(k-1)$. Donc la fonction f se prolonge dans tout cône Ω'_o contenant Ω_o et ne contenant que le sommet A de S, en une fonction de $A(\mathbb{R}^k)$ respectant la relation $\mathcal{R}_o$ dans $E_o \cap \Omega'_o$. Les algèbres de Banach $A_{\mathcal{R}_o}(E_o \cap \Omega'_o)$ et $A_{\mathcal{R}_o}(E_o \cap \Omega_o)$ ont donc même espace de profils $\Lambda([a, b])$.

Pour démontrer la proposition 1, distinguons deux cas :

<u>1er cas</u> : L'intersection du polyèdre $P(S)$ et du cône Ω est convexe. Il existe un isomorphisme linéaire ℓ de $\mathbb{R}^k$ sur lui-même laissant fixe l'origine et appliquant $E \cap \Omega$ sur $E_o \cap \Omega_o$ où E_o est une couronne cubique et Ω_o un cône fermé de sommet 0 contenant en son intérieur un seul des sommets du cube S_o. L'automorphisme $f \longmapsto f \circ \ell$ de $A(\mathbb{R}^k)$ induit un isomorphisme des algèbres de Banach $A_{\mathcal{R}_o}(E_o \cap \Omega_o)$ et $A_{\mathcal{R}}(E \cap \Omega)$ préservant l'espace des profils.

<u>2ème cas</u> : L'intersection de $P(S)$ et de Ω n'est pas convexe. On peut trouver un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^k$ sur lui-même laissant fixe l'origine et appliquant $E \cap \Omega$ sur $\tilde{E}_o \cap \tilde{\Omega}_o$ où $\tilde{E}_o$ est le fermé de $\mathbb{R}^k$ défini par : $a \leq \inf_{1\leq j\leq k} |t_j| \leq b$, $\tilde{\Omega}_o$ un cône fermé de sommet 0 tel que $\tilde{\Omega}_o - \{0\}$ soit contenue dans l'intérieur de $[\mathbb{R}^+]^k$ et contienne dans son intérieur le point de coordonnées $t_1 = t_2 = \ldots = t_k = 1$. L'espace des profils de $A_{\mathcal{R}}(E \cap \Omega)$ est ainsi identique à l'espace $\tilde{\Lambda}([a, b])$ des fonctions G continues sur $[a, b]$ telles que $G(\inf_{1\leq j\leq k} |t_j|)$ appartienne à $A(\tilde{E}_o \cap \tilde{\Omega}_o)$.
On voit, comme pour l'espace des profils de $A_{\mathcal{R}_o}(E_o \cap \Omega_o)$ que l'espace $\tilde{\Lambda}$ ne dépend pas du cône particulier $\tilde{\Omega}_o$.
Par ailleurs il est clair que $\tilde{\Lambda}([a, b])$ est isomorphe à $A_{\mathcal{R}_o}(E_o \cap \Omega_o)$, car une fonction qui ne dépend que de $\inf_{1\leq j\leq k} t_j$ dans $\tilde{E}_o \cap \tilde{\Omega}_o$ est aussi une fonction qui ne dépend que de $\sup_{1\leq j\leq k} (\alpha - t_j)$ où α est choisi assez grand.



<u>Remarque</u>: Les espaces $\Lambda([a, b])$ et $\tilde{\Lambda}([a, b])$ sont isomorphes, mais à priori <u>différents</u> : $\tilde{\Lambda}$ se déduit de Λ par le changement de variable $x \longmapsto (a+b-x)$.

Nous verrons plus loin (th. 15) que localement sur $]a, b[$, Λ est formé des fonctions appartenant à $A(\mathbf{T}; [\log |n|]^{k-1})$, espace invariant par le changement de

variable précédent. Il en résulte que Λ et $\tilde{\Lambda}$ coïncident localement sur $]a, b[$.
Le résultat global reste un problème ouvert.
Il est facile de montrer ensuite :

<u>Proposition</u> 2 : <u>Lorsque le polyèdre</u> P(S) <u>est convexe, les algèbres</u> $A_{\mathcal{R}}(E \cap \Omega)$ <u>et</u> $A_{\mathcal{R}}(E)$ <u>ont le même espace de profils</u>.

A toute fonction f de $A_{\mathcal{R}}(E \cap \Omega)$ correspond une fonction F continue sur $[a, b]$ telle que $f(t) = F(r(t))$ dans $E \cap \Omega$. Montrons que $F \circ r$ appartient à A(E). Pour cela considérons un recouvrement de $R^k - \{0\}$ par n cônes ouverts Ω_j, $j=1,\dots,n$ de centre 0 tel que chaque cône fermé $\overline{\Omega}_j$ contienne un seul des sommets de S, et soit α_j, $j = 1, \dots, n$, une partition C^∞ de l'unité sur un voisinage E^* de E, subordonnée au recouvrement de E^* par les ouverts $E^* \cap \Omega_j$. D'après la proposition 1 et l'hypothèse $F \circ r$ appartient à $A_{\mathcal{R}}(E \cap \overline{\Omega}_j)$ et donc la fonction $\alpha_j \cdot F \circ r$ qui a son support dans Ω_j appartient à A(E). En conséquence il en est de même pour la fonction For qui est égale sur E à $\sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_j . For$.

Soit $(\mathcal{S}_c)$ (resp. $(\mathcal{S}_{nc})$) la classe des surfaces S pour lesquelles le polyèdre P(S) est convexe (resp. non convexe). Les propositions 1 et 2 entraînent donc :

<u>Théorème</u> 3 : <u>Les algèbres</u> $A_{\mathcal{R}}(E)$ <u>ont le même espace de profils, lorsque</u> $\mathcal{R}$ <u>est une relation associée à une surface quelconque de la classe</u> $(\mathcal{S}_c)$ <u>(resp.</u> $(\mathcal{S}_{nc})$), E <u>étant une couronne compacte dans</u> $\mathbf{R}^k - \{0\}$, <u>d'épaisseur</u> $[a, b]$, <u>associée à</u> $\mathcal{R}$.

<u>L'espace des profils correspondant à la classe</u> $(\mathcal{S}_{nc})$ <u>est formé du sous-espace des profils correspondant à la classe</u> $(\mathcal{S}_c)$, <u>globalement stable par le changement de variable</u> $x \longmapsto (a+b-x)$.

Pour obtenir la seconde partie du théorème il suffit de remarquer que, avec les notations de la proposition 1, l'espace des profils correspondant à la classe $(\mathcal{S}_c)$ est $\Lambda([a, b])$ et celui correspondant à la classe $(\mathcal{S}_{nc})$ est l'intersection $\Lambda([a, b]) \cap \tilde{\Lambda}([a, b])$.
Remarquons que, à posteriori, cette intersection est non vide et contient $A([a, b]; (\log|n|)^{k-1})$.

3. Prenons pour modèle de $\mathbf{T}^k$, le cube $[-\pi, +\pi]^k$ de $\mathbf{R}^k$, une fonction définie sur $\mathbf{T}^k$ s'identifie à une fonction sur $\mathbf{R}^k$, 2π-périodique en chaque variable. Soit $\mathcal{R}_o$ la relation d'équivalence sur $\mathbf{T}^k$ dont les classes modulo $[2\pi Z]^k$ sont les surfaces des cubes homothétiques du cube $[-\pi, +\pi]^k$ dans les homothéties de centre 0 et de rapport r, $0 \leq r \leq \pi$. Nous nous proposons d'étudier la sous-algèbre fermée $A_{\mathcal{R}_o}(\mathbf{T}^k)$ de $A(\mathbf{T}^k)$ des fonctions constantes sur chaque classe de $\mathcal{R}_o$. Sa connaissance entrainera en particulier celle des algèbres $A_{\mathcal{R}}(E)$ définies en 2.

$A_{\mathcal{R}_o}(\mathbf{T}^k)$ est isomorphe à l'algèbre des "profils", Λ, des fonctions continues F définies sur $[0, \pi]$ telles que For appartienne à $A(\mathbf{T}^k)$ avec

$$r(t) = \sup_{1\leqslant j\leqslant k} |t_j| \text{ pour } |t_j| \leqslant \pi\ ,\ j = 1, \ldots, n\ .$$

Λ est évidemment contenue dans l'algèbre $A^c(\mathbf{T})$ des fonctions paires 2π-périodiques à séries de Fourier absolument convergentes qu'on peut considérer comme des séries de cosinus :

$$F(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \cos nx\ , \qquad \sum_{n\geqslant 0} |a_n| < +\infty\ .$$

Nous allons préciser dans la suite cette inclusion.

3.1. Calcul des coefficients de Fourier c_p, $p = (p_1, \ldots, p_k)$ point de $\mathbf{Z}^k$, d'une fonction f = For de $A_{\mathcal{R}_o}(\mathbf{T}^k)$.

Soit pour $q = 1, \ldots, k$, A_q (resp. A'_q) le sous- ensemble de $\mathbf{T}^k$ défini par $r(t) = t_q$ (resp. $r(t) = -t_q$). $\mathbf{T}^k$ est la réunion des fermés contigus $\bigcup_{1\leqslant q\leqslant k} (A_q \cup A'_q)$. Au coefficient $(2\pi)^{-k}$ près on a :

$$c_p = \int_{\mathbf{T}^k} f(t)e^{-ipt}dt = \sum_{1\leqslant q\leqslant k} I_q + I'_q \quad \text{avec}$$

$$I_q = \int_{A_q} f(t)e^{-ipt}dt = \int_0^\pi F(x)e^{-ip_qx}\left[\prod_{j\neq q}\int_{-x}^{x} e^{-ip_jy}dy\right]dx$$

et

$$I'_q = \int_{A'_q} f(t)e^{-ipt}dt = \int_0^\pi F(x)e^{ip_qx}\left[\prod_{j\neq q}\int_{-x}^{x} e^{-ip_jy}dy\right]dx\ .$$

Soit J un sous-ensemble non vide de $\{1, \ldots, k\}$, on dira que p est de "type J" si $p_j \neq 0$ lorsque j appartient à J et $p_j = 0$ sinon.

Posons $\varpi_p = \prod_{j\in J} p_j$ et $h = k - \text{card } J$ (donc $0 \leqslant h \leqslant k-1$).

Soit D l'ensemble à deux éléments $\{+1\ ,\ +1\}$ et D^n l'ensemble des 2^n éléments formés d'une suite de n nombres dont chacun est égal à ± 1. Lorsque q appartient à J, soit $J_q = J - \{q\}$, un calcul facile montre que :

$$I_q = (-i)^{-(k-h-1)}p_q\varpi^{-1} \sum_{D^{k-h-1}} \left(\prod_{j\in J_q} \varepsilon_j\right)\int_0^\pi (2x)^hF(x)e^{-i(p_q+\sum_{j\in J_q}\varepsilon_jp_j)x}dx$$

où $(\varepsilon_j)_{j\in J_q}$ est un élément quelconque de D^{k-h-1}, et

$$I'_q = (-i)^{-(k-h-1)}p_q\varpi^{-1}\sum_{D^{k-h-1}}\left(\prod_{j\in J_q} \varepsilon_j\right)\int_0^\pi (-1)^{k-h-1}(2x)^hF(x)e^{-i(p_q+\sum_{j\in J_q}\varepsilon_jp_j)x}dx$$

Soit G la fonction définie sur $]-\pi, +\pi[- \{0\}$ par :

$$G(x) = F(x) \text{ pour } 0 < x \leqslant \pi, \quad G(x) = (-1)^{k-1}F(-x) \text{ pour } -\pi\leqslant x<0$$

G est le prolongement de F par imparité (resp. parité) lorsque la dimension k est paire (resp. impaire). Lorsque k est impair, G se prolonge en une fonction de $A(\mathbf{T}^k)$ sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$. Lorsque k est impair l'origine O est un point de discontinuité de première espèce pour la fonction G sauf si $F(0) = 0$ ce que l'on peut supposer quite à retrancher de f une constante, mais G n'est pas, à priori, une fonction de $A(\mathbf{T})$.

L'expression de $I_q + I'_q$ est à l'aide de G :

$$I_q+I'_q = (-i)^{-(k-h-1)} p_q \varpi^{-1} \sum_{D^{k-h-1}} \Big(\prod_{j\in J_q} \varepsilon_j\Big) \int_{-\pi}^{\pi} (2x)^h G(x) e^{-i(p_q+\sum_{j\in J_q} \varepsilon_j p_j)x} dx$$

donc

$$\sum_{q\in J} I_q+I'_q = (-i)^{-(k-h-1)} (2\varpi)^{-1} \sum_{D^{k-h}} \Big(\prod_{j\in J}\varepsilon_j\Big) \int_{-\pi}^{\pi} (2x)^h G(x) e^{-i(\sum_{j\in J} \varepsilon_j p_j)x} dx .$$

Lorsque q n'appartient pas à J, un calcul analogue montre que

$$I_q+I'_q = (-i)^{k-h} \varpi^{-1} \sum_{D^{k-h}} \Big(\prod_{j\in J}\varepsilon_j\Big) \int_{-\pi}^{\pi} (2x)^{h-1} G(x) e^{-i(\sum_{j\in J} \varepsilon_j p_j)x} dx$$

donc,

$$(1) \quad c_p = (-i)^{-(k-h)} 2^{h-1} \varpi^{-1} \sum_{D^{k-h}} \Big(\prod_{j\in J}\varepsilon_j\Big) \int_{-\pi}^{\pi} G(x) \Big[hx^{h-1} - ix^h \sum_{j\in J} \varepsilon_j p_j\Big] e^{-i(\sum_{j\in J} \varepsilon_j p_j)x} dx.$$

Dans le cas particulier où la fonction G est à <u>variation bornée</u>, soit $dG(x)$ la mesure de Stieltjes associée, l'intégrale du second membre devient après intégration par parties, en posant $\lambda = \sum_{j\in J} \varepsilon_j p_j$:

$$(-1)^{\lambda} \pi^h F(\pi) \big[1 + (-1)^{k-h}\big] - \int_{-\pi}^{\pi} x^h e^{-i\lambda x} dG(x) .$$

Mais la quantité $\Delta = \sum_{D^{k-h}} \Big(\prod_{j\in J}\varepsilon_j\Big)(-1)^{\lambda} \pi^h F(\pi) \big[1 + (-1)^{k-h}\big]$ est nulle .

En effet, toutes les combinaisons $\sum_{j\in J} \varepsilon_j p_j$ ont la parité de $\sum_{j\in J} p_j$, donc

$$\Delta = (-1)^{\lambda} \pi^h F(\pi) \big[1 + (-1)^{k-h}\big] \sum_{D^{k-h}} \Big(\prod_{j\in J}\varepsilon_j\Big) = 0$$

(car le dernier facteur est nul).

Donc, lorsque G est à variation bornée :

$$(2) \quad c_p = -(-i)^{-(k-h)} 2^{h-1} \varpi^{-1} \sum_{D^{k-h}} \Big(\prod_{j\in J}\varepsilon_j\Big) \int_{-\pi}^{\pi} x^h e^{-i(\sum_{j\in J} \varepsilon_j p_j)x} dG(x) .$$

Lorsque $J = \{1, \dots, k\}$, $h = 0$, la formule (1) devient

$$(3) \quad c_p = \frac{(-i)^{-(k-1)}}{2\, p_1 \cdots p_k} \sum_{D^k} \Big(\prod_{1\leq j\leq k} \varepsilon_j\Big) \Big(\sum_{1\leq j\leq k} \varepsilon_j p_j\Big) \hat{G}\Big(\sum_{1\leq j\leq k} \varepsilon_j p_j\Big)$$

où $\hat{G}(n)$, $n \in \mathbf{Z}$ sont les coefficients de Fourier de la fonction G.

3.2 <u>Lemme</u> 4. <u>Pour</u> $k \geqslant 1$, <u>entier</u>, <u>et</u> n <u>entier</u> <u>quelconque</u>

$$S(n;k) = \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_k=n \\ p_1\ldots p_k\neq 0}} \frac{1}{|p_1\ldots p_k|}$$ est équivalent à $\frac{1}{|n|}(\log|n|)^{k-1}$ lorsque $|n| \longrightarrow +\infty$.

Soit $f(x)$ la fonction 2π-périodique égale à $2\log\left(\frac{1}{2\sin x/2}\right)$ pour $0 < x < 2\pi$ elle est sommable et sa série de Fourier est

$$f(x) \sim 2 \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p} \cos p x = \sum_{p\in\mathbf{Z}-\{0\}} \frac{1}{|p|} e^{ipx} .$$

La série de Fourier de $[f(x)]^k$ est donc:

$$[f(x)]^k \sim S(0;k) + 2 \sum_{n\geq 1} S(n;k) \cos nx .$$

Ainsi pour $n \neq 0$,

$$S(n;k) = \frac{2^k}{\pi} \int_0^\pi \left[\log\left(\frac{1}{2\sin x/2}\right)\right]^k \cos nx\, dx .$$

Soit $a_{n,k} = \pi 2^{-k} S(n,k)$, une intégration par parties donne

$$a_{n,k} = \frac{k}{2n} \int_0^\pi \left[\log\left(\frac{1}{2\sin x/2}\right)\right]^{k-1} \operatorname{cotg}\frac{x}{2} \sin nx\, dx .$$

La dérivée de la fonction $\varphi(x) = \left[\log\left(\frac{1}{2\sin x/2}\right)\right]^{k-1}$ sur l'intervalle $0 < x \leq \pi$ est :

$$\varphi'(x) = -\frac{(k-1)}{2} \left[\log\left(\frac{1}{2\sin x/2}\right)\right]^{k-2} \operatorname{cotg}^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{1}{2\sin x/2}\right)\right]^{k-1} \frac{1}{\sin^2 x/2}$$

φ est positive et décroissante sur l'intervalle $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$.

Posons $a_{n,k} = u_{n,k} + v_{n,k}$ avec

$$u_{n,k} = \frac{k}{2n} \int_0^{\pi/n} \varphi(x) \sin nx\, dx \qquad \text{et} \qquad v_{n,k} = \frac{k}{2n} \int_{\pi/n}^{\pi} \varphi(x) \sin nx\, dx .$$

Il existe (d'après le seconde formule de la moyenne) un nombre ξ, $\frac{\pi}{n} < \xi < \frac{\pi}{3}$ tel que :

$$\int_{\pi/n}^{\pi/3} \varphi(x) \cos nx\, dx = \varphi\left(\frac{\pi}{n}\right) \int_{\pi/n}^{\xi} \sin nx\, dx = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[-1 - \cos n\xi\right] .$$

D'autre part,

$$\int_{\pi/3}^{\pi} \varphi(x) \cos nx\, dx = -\frac{1}{n} \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{n} \int_{\pi/3}^{\pi} \varphi'(x) \cos nx\, dx .$$

Or, $\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left[\log\left(\frac{1}{2\sin \pi/2n}\right)\right]^{k-1} \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}$ est équivalent (au sens strict) à $\frac{2n}{\pi}\left[\log n\right]^{k-1}$ lorsque $|n| \to +\infty$. Donc $v_{n,k} = O\left(\frac{1}{|n|}\left[\log|n|\right]^{k-1}\right)$ lorsque $|n| \to +\infty$.

Par ailleurs, pour $0 \leq x \leq \pi/n$, on a $\operatorname{cotg}(x/2) \sin nx \leq (\pi/2)n$, donc

$$u_{n,k} \leq \frac{k\pi}{4} \int_0^{\pi/n} \left[\log\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right]^{k-1} dx.$$

Or,

$$\int_0^{\pi/n}\left[\mathrm{Log}\,\frac{\pi}{2x}\right]^{k-1}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{2/n}\left[\log\frac{1}{u}\right]^{k-1}du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{n}\left[\left[\log\frac{n}{2}\right]^{k-1} - (k-1)\left[\log\frac{n}{2}\right]^{k-2} + \dots + (-1)^{k-1}(k-1)!\right]$$

donc, $u_{n,k} \leq \frac{k\pi^2}{4n}\left[\log\frac{n}{2}\right]^{k-1} + O(\frac{1}{|n|}\left[\log n\right]^{k-2})$.

Ainsi $S(n;k) = O(\frac{1}{|n|}\left[\log|n|\right]^{k-1})$ lorsque $|n| \to +\infty$.

Pour la minoration, décomposons l'intervalle $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ en intervalles de la forme $\left[(q-1)\frac{\pi}{n}\right.$, $\left.q\,\frac{\pi}{n}\right]$ jusqu'à la plus grande valeur possible q_o de q. On sait déjà que $\frac{k}{2n}\int_{q_o\frac{\pi}{n}}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx = O(\frac{1}{|n|^2})$ lorsque $|n| \to +\infty$. On a

$$\int_0^{q_o\frac{\pi}{n}}\varphi(x)\cos nx\,dx = \sum\int_{2q\frac{\pi}{n}}^{(2q+1)\frac{\pi}{n}}\left[\varphi(x) - \varphi(x+\frac{\pi}{n})\right]\sin nx\,dx$$

où la somme du second membre s'obtient en regroupant les intégrales sur deux intervalles consécutifs. Chaque terme du second membre est positif car la fonction $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(x+\frac{\pi}{n})$ est décroissante sur l'intervalle $0 < x < q_o\frac{\pi}{n}$ puisque φ' est croissante dans l'intervalle $0 < x < \frac{\pi}{3}$. Donc on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left[\varphi(x) - \varphi(x+\frac{\pi}{n})\right]\sin nx\,dx \geq \frac{2}{n}\left[\varphi(\frac{\pi}{n}) - \varphi(\frac{2\pi}{n})\right] ,$$

or, $\varphi(\frac{\pi}{n}) - \varphi(\frac{2\pi}{n}) = \left[\log(\frac{1}{2\sin\pi/2n})\right]^{k-1}\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{2n} - \left[\log(\frac{1}{2\sin\pi/n})\right]^{k-1}\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{n}$ est équivalent à $\frac{|n|}{\pi}\left[\log|n|\right]^{k-1}$ lorsque $|n| \to +\infty$, ce qui achève la démonstration.

3.3. Nous pouvons maintenant démontrer

<u>Théorème</u> 5 : <u>La fonction</u> $r(t) = \sup_{1\leq j\leq k}|t_j|$ <u>pour</u> $|t_j| \leq \pi$, $1 \leq j \leq k$, <u>appartient à</u> $A(\mathbf{T}^k)$ <u>et</u> $\|\sin nr\|_{A(\mathbf{T}^k)}$ (<u>resp</u>. $\|\cos nr\|_{A(\mathbf{T}^k)}$) <u>est équivalent à</u> $(\log|n|)^{k-1}$ <u>pour</u> $|n| \to +\infty$, <u>lorsque</u> k <u>est pair</u> (<u>resp</u>. <u>impair</u>).

Soit F la fonction sin nx (resp. cos nx) lorsque k est pair (resp. impair) la fonction G associée (notations de 3.1.) a la même expression que F, et ses coefficients de Fourier $\hat{G}(q)$ sont nuls sauf pour $q = \pm n$ et alors $\hat{G}(\pm n) = \pm 1/2$.

Soit P_J l'ensemble des points de $\mathbf{Z}^k$ de type J, montrons que pour tout J $\sum_{p\in P_J}|c_p| = O((\log|n|)^{k-1})$ lorsque $|n| \to +\infty$ où les c_p sont les coefficients de For.

Utilisons l'expression de c_p valable lorsque G est à variation bornée ((2).3.1.) ce qui est le cas :

$$(1)\quad c_p = -(-i)^{-(k-h)}2^{h-1}\varpi^{-1}\sum_{D^{k-h}}(\prod_{j\in J}\varepsilon_j)\int_{-\pi}^{\pi}x^h e^{-i(\sum_{j\in J}\varepsilon_j p_j)x}\,dG(x).$$

Remarquons que étant donné un choix (ε_j) dans D^{k-h}, la somme $\sum|c_p|$ étendue aux points p de P_J pour lesquels $\sum_{j\in J} \varepsilon_j p_j = n$, est majoré d'après (1), à un facteur indépendant de n près par:

$$n \sum_{\sum_{j\in J} \varepsilon_j p_j = n} \frac{1}{|\varpi|}$$

et d'après le lemme 4, cette expression est $O([\log|n|]^{k-h-1})$ lorsque $|n| \to +\infty$.

La fonction de λ , $\int_{-\pi}^{\pi} x^h e^{-i\lambda x} dG(x)$, est à un coefficient constant près la dérivée d'ordre h de la fonction

$$\theta(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda x} dG(x).$$

Lorsque k est pair

$$\theta(\lambda) = n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda x} \cos nx\, dx = (-1)^n n \sin\lambda\pi \left[\frac{1}{n+\lambda} - \frac{1}{n-\lambda}\right] \text{ pour } \lambda \neq \pm n$$

et $\theta(\pm n) = n\pi$.

Lorsque k est impair

$$\theta(\lambda) = -n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda x} \sin nx\, dx = -i(-1)^n n \sin \lambda\pi \left[\frac{1}{n+\lambda} - \frac{1}{n-\lambda}\right] \quad \text{pour } \lambda \neq \pm n$$

et $\theta(n) = -ni\pi$, $\theta(-n) = ni\pi$.

Il est clair que lorsque λ est un entier différent de $\pm n$, $|n+\lambda| \leqslant |n+\lambda^q|$ et $|n-\lambda| \leqslant |n-\lambda^q|$ pour tout $q \geqslant 1$ et toute dérivée d'ordre $h \geqslant 0$ de θ est telle que

$$(2) \qquad |\theta^{(h)}(\lambda)| \leqslant C|n| \left(\frac{1}{|n+\lambda|} + \frac{1}{|n-\lambda|}\right)$$

où C ne dépend que de h.

Soit p un point de P_J tel que chaque combinaison $\sum_{j\in J} \varepsilon_j p_j$ soit différente de $\pm n$, d'après (1) et (2), $|c_p|$ est majoré, à un facteur indépendant de n et p près, par

$$\frac{|n|}{|\varpi|} \sum_{D^{k-h}} \frac{1}{|n - \sum \varepsilon_j p_j|} .$$

Le calcul de la somme $\sum |c_p|$ étendu aux points analogues de P_J peut se faire en intervertissant l'ordre des sommations :

$$\sum |c_p| = 2^{k-h} |n| \sum_{\lambda \in Z - \{\pm n\}} \frac{1}{|n-\lambda|} \Big(\sum_{\sum_{j\in J} p_j = \lambda} \frac{1}{|\varpi|} \Big) = 2^{k-h} |n| S(n;k-h+1)$$

en remarquant que pour $h = 0$, c_p est nul si chaque combinaison $\sum_{1\leqslant j\leqslant k} \varepsilon_j p_j$ est différente de $\pm n$, ceci achève de démontrer que $\|For\|_{A(\mathbf{T}^k)} = O([\log|n|]^{k-1})$ lorsque $|n| \to +\infty$. Pour la minoration, considérons l'hyperplan H de $\mathbb{R}^k$ d'équation $\sum_{1\leqslant j\leqslant k} x_j = n$, P désignant les points de $\mathbf{Z}^k$ tels que $p_1 \cdots p_k \neq 0$, considérons le sous-ensemble E de $H \cap P$ des points n'appartenant à aucun autre hyperplan d'équation $\sum_{1\leqslant j\leqslant k} \varepsilon_j p_j = \pm n$, et F le complémentaire de E dans $H \cap P$. Lorsque p appartient à F, il existe un entier q, $1 \leqslant q \leqslant k-1$, et une partition $\{ j_1, \ldots, j_q \}$,

$\{ j_{q+1}, \ldots, j_k\}$ de $\{1, \ldots, k\}$ tels que

$$\begin{cases} p_{j_1} + \ldots + p_{j_q} - (p_{j_{q+1}} + \ldots + p_{j_q}) = n \\ p_{j_1} + \ldots + p_{j_q} + (p_{j_{q+1}} + \ldots + p_{j_q}) = n \end{cases}$$

donc $p_{j_1} + \ldots + p_{j_q} = n$ et $p_{j_{q+1}} + \ldots + p_{j_k} = 0$

Soit C la somme $\sum \left|\frac{1}{p_{j_{q+1}} \cdots p_{j_q}}\right|$ étendue aux points de $\mathbb{R}^{k-q}$ tels que $p_{j_{q+1}} + \ldots + p_{j_k} = 0$ et $p_{j_{q+1}} \ldots p_{j_k} \neq 0$, on a clairement

(3) $$\sum_{p \in F} \left|\frac{1}{p_1 \cdots p_k}\right| \leq C\, S(n;q) .$$

D'autre part, lorsque p appartient à E, $|c_p| = \frac{|n|}{|p_1 \cdots p_k|}$ donc $\sum_{p \in E} |c_p| = |n| \sum_{p \in E} \left|\frac{1}{p_1 \cdots p_k}\right|$ et,

$$\sum_{p \in E} |c_p| = |n| \left[\sum_{p \in H \cap P} \left|\frac{1}{p_1 \cdots p_k}\right| - \sum_{p \in F} \left|\frac{1}{p_1 \cdots p_k}\right|\right]$$

donc d'après (3)

$$\sum_{p \in E} |c_p| \geqslant |n| \left[S(n;k) - C\, S(n;q)\right]$$

ce qui achève la démonstration d'après le lemme 4 (car $q \leqslant k-1$).

Une conséquence facile du théorème 5 est :

<u>Proposition</u> 6 : <u>Lorsque</u> $|n| \to +\infty$,
<u>si</u> k <u>est pair</u> : $\|\cos nr\|_{A(\mathbb{T}^k)} = O([\log|n|]^k)$
<u>si</u> k <u>est impair</u> : $\|\sin nr\|_{A(\mathbb{T}^k)} = O([\log|n|]^k)$.

On considère $\mathbb{T}^k$ comme le sous-espace de $\mathbb{T}^{k+1}$ obtenu en annulant la dernière coordonnée. On a $r_k(t_1,\ldots,t_k) = r_{k+1}(t_1,\ldots,t_{k+1},0)$ où r_k désigne la fonction $\sup_{1 \leqslant j \leqslant k} |t_j|$. On a :

$$\|\mathrm{For}_k\|_{A(\mathbb{T}^k)} \leqslant \|\mathrm{For}_{k+1}\|_{A(\mathbb{T}^{k+1})}$$

et on applique le théorème 5 en dimension k+1.

La comparaison de $\|\sin nr\|_{A(\mathbb{T}^k)}$ et $\|\cos nr\|_{A(\mathbb{T}^k)}$ peut être précisée, le résultat est malheureusement incomplet :

<u>Théorème</u> 7 : $(\log|n|)^{k-1} = O(\|e^{inr}\|_{A(\mathbb{T}^k)})$ <u>lorsque</u> $|n| \to +\infty$. <u>Pour</u> k = 2, $\|e^{inr}\|_{A(\mathbb{T}^2)}$ <u>et</u> $\|\cos nr\|_{A(\mathbb{T}^2)}$ <u>sont équivalents à</u> $(\log|n|)^2$.

Reprenons les notations du théorème 5, avec $F(x) = e^{inx}$. La fonction associée G est définie par

$$G(x) = e^{inx} \text{ pour } 0 < x \leqslant \pi \quad \text{et} \quad G(x) = (-1)^{k-1} e^{-inx} \text{ pour } -\pi \leqslant x < 0.$$

Soit $\theta(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda x} dG(x)$, $\theta(n) = i\pi n$, $\theta(-n) = (-1)^k i\pi n$ et pour $\lambda \neq \pm n$

$$\theta(\lambda) = n \left[\frac{e^{i(n-\lambda)\pi} - 1}{n - \lambda} + (-1)^k \frac{e^{i(n+\lambda)\pi} - 1}{n + \lambda} \right]$$

Si p est un point de E (voir fin de la démonstration du th. 5), pour les combinaisons autres que $\pm \sum_{1\leq j\leq k} p_j$, on a $\theta(\sum_{1\leq j\leq k} \varepsilon_j p_j) = 0$, donc $|c_p| = \frac{|n|}{|p_1 \cdots p_k|}$ et on a vu que $\sum_{p\in E} |c_p| = |n| \sum_{p\in E} \frac{1}{|p_1 \cdots p_k|} \sim (\log|n|)^{k-1}$ lorsque $|n| \to +\infty$.

Soit p un point du sous-ensemble P_o de P pour lesquels aucune combinaison $\sum_{1\leq j\leq k} \varepsilon_j p_j$ n'est égale à $\pm n$, on a (comme toujours à un facteur indépendant de n et p près)

$$c_p = \frac{n}{p_1 \cdots p_k} \sum_{D^k} \left(\prod_{1\leq j\leq k} \varepsilon_j \right) \frac{1}{n - \sum_{1\leq j\leq k} \varepsilon_j p_j} .$$

Lorsque k = 2, un calcul facile **montre** que

$$\sum_{p\in P_o} |c_p| \geq C(\log|n|)^2 \quad \text{lorsque} \quad |n| \to +\infty .$$

3.4. ω étant une application paire de $\mathbf{Z}$ dans $[1, +\infty[$, désignons par $A^c(\mathbf{T};\omega)$ (resp. $A^s(\mathbf{T};\omega)$) le sous-espace de $A(\mathbf{T};\omega)$ des séries de cosinus (resp. de sinus):

$$f(x) = \sum_{n\geq o} a_n \cos nx \qquad \text{avec} \qquad \sum_{n\geq o} |a_n|\, \omega(n) < +\infty$$

(resp. $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ avec $\sum_{n\geq 1} |a_n|\, \omega(n) < +\infty$).

(Lorsque $\omega = 1$ on note simplement $A^c(\mathbf{T})$, $A^s(\mathbf{T})$) E étant un fermé de $\mathbf{T}$ l'espace des restrictions à E des fonctions de $A^c(\mathbf{T};\omega)$ (resp. $A^s(\mathbf{T};\omega)$) est noté $A^c(E;\omega)$ (resp. $A^s(E;\omega)$).

En application immédiate des théorèmes 5, 6, 7, à l'aide du théorème du graphe fermé, on a :

<u>Proposition</u> 8 : a) <u>Lorsque</u> k <u>est pair</u> (<u>resp</u>. <u>impair</u>) $A^s([0,\pi] ; \omega)$ (<u>resp</u>. $A^c([0,\pi]; \omega)$) <u>est inclus dans l'algèbre des profils</u> $\Lambda([0,\pi])$ <u>de</u> $A_{\mathcal{R}_o}(\mathbf{T}^k)$ <u>si et seulement si</u> $\liminf_{n\to+\infty} \frac{\omega(n)}{(\log n)^{k-1}} > 0$.

b) $A([0,\pi]; \omega)$ <u>est inclus dans</u> $\Lambda([0,\pi])$ <u>si</u> $\liminf_{n\to+\infty} \frac{\omega(n)}{(\log n)^k} > 0$ <u>et ne l'est pas si</u> $\liminf_{n\to+\infty} \frac{\omega(n)}{(\log n)^{k-1}} = 0$.

La partie b) n'est malheureusement pas précise sauf pour k = 2 :

<u>Proposition</u> 8' : $A^s([0,\pi] ; \omega)$ (<u>resp</u>. $A^c([0,\pi] ; \omega)$) <u>est inclus dans l'algèbre des profils de</u> $A_{\mathcal{R}_o}(\mathbf{T}^2)$ <u>si et seulement si</u> $\liminf_{n\to+\infty} \frac{\omega(n)}{\log n} > 0$ (<u>resp</u>. $\liminf_{n\to+\infty} \frac{\omega(n)}{(\log n)^2} > 0$).

Pour préciser la portée des propositions 8 et 8', remarquons que, en désignant par $A_0^c([0,\pi];\omega)$ le sous-espace des fonctions nulles à l'origine de $A^c([0,\pi]);\omega)$, on a , avec l'abus de notation habituel concernant le poids :

(1) $A^s([0,\pi]\ ;\ (\log|n|)^k \subsetneq A^c([0,\pi]\ ;(\log|n|)^{k-1})$

(2) $A_0^c([0,\pi]\ ;\ (\log|n|)^k) \subsetneq A^s([0,\pi]\ ;\ \log|n|)^{k-1})$.

(1) est une conséquence directe du lemme 25, chapitre III; (2) en utilise une forme plus générale, extension facile d'un résultat classique dû à J.-P. Kahane [20]:

<u>Lemme 9 : Soit</u> ω <u>une application paire de</u> $\mathbb{Z}$ <u>dans</u> $[1,+\infty]$ <u>telle que pour</u> $n > 0$ <u>assez grand</u>, $\omega(n)$ <u>soit croissant et</u> $n^{-\alpha}\omega(n)$ <u>décroissant, pour un nombre réel</u> α, $0 \leq \alpha < 1$.

<u>Alors toute fonction</u> f, <u>réelle linéaire par morceaux continue sur</u> $\mathbb{T}$, <u>appartient à</u> $A(\mathbb{T};\omega)$ <u>et</u> $\|e^{inf}\|_{A(\mathbb{T};\omega)} = O(\omega(n)\log|n|)$ <u>lorsque</u> $|n| \to +\infty$.

Dans le cas particulier où f est la fonction $f(x) = ax$ pour $-\pi \leq x \leq 0$, $f(x)=bx$ pour $0 \leq x \leq \pi$, b+a étant un entier pair différent de zéro, les coefficients de Fourier de la fonction e^{inf} sont, lorsque l'entier p est différent de na et nb

$$c_{n,p} = \left[\frac{1}{nb-p} - \frac{1}{na-p}\right]\left[(-1)^{p+1}\sin na\pi + i(1+(-1)^{p+1}\cos na\,\pi)\right]$$

(et si p = na ou nb $c_{n,p} = \pi - \frac{i}{n(b-a)}\left[(-1)^p e^{-ina\pi} - 1\right]$)

on démontre alors comme dans le cas particulier du lemme 25, chapitre III, que

$$\|e^{inf}\|_{A(\mathbb{T};\omega)} \sim \omega(n)\log|n| \quad \text{lorsque } |n| \to +\infty .$$

Il n'est pas possible d'obtenir comme dans le cas $\omega = 1$, la <u>minoration</u> pour toute fonction linéaire par morceaux (car si g est une fonction <u>linéaire</u> sur un intervalle I, $\|e^{ing}\|_{A(I)} \sim \omega(n)$). Mais la majoration générale s'obtient sans difficulté : Si f a un seul point anguleux à l'origine sur un intervalle fermé I voisinage de l'origine, on considère $A(I;\omega)$ comme algèbre des restrictions de $A(\mathbb{R};\omega)$. Ainsi pour $\lambda \neq 0$, réel fixé, $\|e^{inf(x)}\|_{A(I;\omega)}$ est équivalent à $\|e^{inf(\lambda x)}\|_{A(I;\omega)}$ et on choisit λ de sorte que le prolongement par linéarité de $f(\lambda x)$ en dehors de I soit une fonction f^* continue sur $\mathbb{T}$, et d'après le début de la démonstration $\|e^{inf^*}\|_{A(\mathbb{T};\omega)} \sim \omega(n)\log|n|$ donc $\|e^{inf}\|_{A(I;\omega)} = O(\omega(n)\log|n|)$ lorsque $|n| \to +\infty$. Par étude locale d'une fonction f, linéaire par morceaux continue sur $\mathbb{T}$, au voisinage de chaque point anguleux, et par récollement on a donc $\|e^{inf}\|_{A(\mathbb{T};\omega)} = O(\omega(n)\log|n|)$.

La proposition 8 se simplifie évidemment lorsque au lieu de considérer l'algèbre $A_{\mathcal{R}_0}(\mathbb{T}^k)$ on considère l'algèbre de restrictions à une couronne E définie par $0 < a \leq r(t) \leq b < \pi$ car il est immédiat de voir que (si ω est à croissance lente) les espaces $A^c([a,b]\ ;\ \omega)$, $A^s([a,b]\ ;\ \omega)$, $A([a,b]\ ;\ \omega)$ coïncident lorsque

$0 < a < b < \pi$.

D'après les résultats du paragraphe 2, et comte tenu de ce que l'espace $A([a, b] ; \omega)$ est globalement invariant par l'application $x \longmapsto (a+b-x)$, nous pouvons énoncer le résultat valable pour toute algèbre $A_{\mathcal{R}}(E)$ où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence associée à une surface polyèdrale S quelconque de $(\mathcal{J})$ et E la couronne $0 < a \leqslant r(t) \leqslant b < +\infty$ dans $\mathbb{R}^k$:

<u>Théorème 10 : Soit ω une application paire de $\mathbb{Z}$ dans $[1, +\infty[$, la condition nécéssaire et suffisante pour que $A([a, b] ; \omega)$ soit inclus dans l'algèbre des profils de $A_{\mathcal{R}}(E)$ est que :</u>

$$\liminf_{|n| \to +\infty} \frac{\omega(n)}{(\log|n|)^{k-1}}$$

4. Un problème délicat est de savoir si l'inclusion est stricte ou si l'algèbre $A_{\mathcal{R}}(E)$ est isomorphe à l'algèbre de restrictions $A([a,b] ;(\log|n|)^{k-1})$. Nous allons en voir dans la suite, quelques aspects.

Cônsidérons l'application ω de $\mathbb{Z}^2$ dans $[1, +\infty[$ définie par $\omega(n_1 n_2)=1+[\log_+|n_1|]^{\alpha}$ où $\alpha \geqslant 0$ est un entier. Soit $A_{\mathcal{R}_0}(T^2;\omega)$ l'algèbre des fonctions de $A(T^2;\omega)$ respectant la relation d'équivalence $\mathcal{R}_0$. Nous allons montrer :

<u>Lemme 11 : Soit φ une application continue impaire de $\mathbb{R}$ dans lui-même, sommable par rapport à la mesure $[\log_+|x|]^{\alpha}dx$ telle que pour $x > 0$ assez grand :</u>

i) $x\varphi(x)$ <u>décroît et tend vers zéro à l'infini,</u>

ii) $x\varphi(x) \;|\log|x||^{\alpha+1}$ <u>tend vers zéro à l'infini,</u>

iii) <u>il existe un nombre β, $1 < \beta < 2$, tel que $x^{\beta}\varphi(x)$ est croissant, et soit</u>
$F(x) = \sum_{n \geqslant 1} \varphi(n) \sin nx.$

<u>Alors la fonction $F(\sup(|t_1|,|t_2|))$ appartient à $A(T^2;\omega)$.</u>

Par exemple, une fonction égale à $\frac{1}{x[\log x]^{\gamma}}$, $\gamma > \alpha+1$, lorsque $x > 0$ est assez grand, convient.

Pour la démonstration du lemme nous reprenons dans le cas particulier $k = 2$, les notations et les résultats du paragraphe 3.1.

1. Lorsque $p = (p_1, p_2)$ appartient au sous-ensemble P de $\mathbb{Z}^2$, tel que $p_1 p_2 \neq 0$, le coefficient de Fourier c_p de la fonction For est à un facteur indépendant de p près :

$$c_p = \frac{1}{p_1 p_2} \Big[(p_1+p_2)\varphi(p_1+p_2) - (p_1-p_2)\varphi(p_1-p_2) \Big].$$

Posons $p_1+p_2 = x$, $p_1-p_2 = y$, on a $c_p = \frac{1}{x^2-y^2} \Big| x\varphi(x) - y\varphi(y) \Big|$. Pour montrer que la somme $\sum_{p \in P} |c_p| [\log_+|p_1|]^{\alpha}$ est finie il est équivalent de montrer que l'intégrale

$$\iint_D \left| \frac{x\varphi(x) - y\varphi(y)}{x^2 - y^2} \right| [\log(x+y)]^\alpha \, dx\, dy \quad \text{est finie.}$$

D étant le domaine de $\mathbb{R}^2$ définie par $0 \leqslant y \leqslant x-1$.

Choisissons un nombre réel λ , $0 < \lambda < 1$, et soit D_λ le domaine défini par $0 \leqslant y \leqslant \lambda(x-1)$. On a (en supposant φ positif sur $\mathbb{R}^+$) :

$$I_1 = \iint_{D_\lambda} \frac{2x\varphi(x)}{x^2 - y^2} [\log(x+y)]^\alpha \, dx\, dy \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi(x) [\log 2x]^\alpha \left(\int_0^{\lambda(x-1)} \frac{2x\, dy}{x^2 - y^2} \right) dx$$

qui est fini car $\displaystyle\int_0^{\lambda(x-1)} \frac{2x\, dy}{x^2-y^2} = \log \frac{x(1+\lambda)+\lambda}{x(1-\lambda)+\lambda}$ est borné.

Soit $I_2 = \displaystyle\iint_{D_\lambda} \frac{2y\varphi(y)}{x^2-y^2} [\log(x+y)]^\alpha dx\, dy$, choisissons un nombre γ réel $0 < \gamma < 1$, $x^{-\gamma}[\log x]^\alpha$ est décroissant pour $x \geqslant 1$, donc il existe une constante C telle que dans D on ait

$$[\log(x+y)]^\alpha \leqslant C \frac{|1 + \log_+ y|^\alpha}{(1+y)^\gamma} x^\gamma \text{ , donc}$$

$$I_2 \leqslant C \int_0^{+\infty} \varphi(y)(1+\log_+ y) \frac{1}{(1+y)^\gamma} \left(\int_{(y/\lambda)+1}^{+\infty} x^\gamma \left[\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right] dx \right) dy \text{ .}$$

Un développement en série entière en y/x de $\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right)$ et une intégration terme à terme (possible car $0 < \lambda < 1$) montre que :

$$\int_{(y/\lambda)+1}^{+\infty} x^\gamma \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right) dx \leqslant C_1 \left(1 + \frac{y}{\lambda}\right)^\gamma, \text{ donc } I_2 \text{ est finie.}$$

Il reste à montrer que :

$$I = \iint_{D-D_\lambda} \left| \frac{y\varphi(y) - x\varphi(x)}{x^2 - y^2} \right| [\log(x+y)]^\alpha \, dx\, dy \quad \text{est finie.}$$

Dans $D-D_\lambda$ on a pour $x \geqslant 2$

(1) $\qquad \log x\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \log (x+y) \leqslant \log y\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)$

et puisque $x\varphi(x)$ décroit pour $x > 0$ assez grand ,

$$|y\varphi(y) - x\varphi(x)| = y\varphi(y) - x\varphi(x).$$

Pour tout $T > 0$, soit Δ_T la portion de $D-D_\lambda$ définie par $x \leqslant T$, on va montrer que $I_T = \displaystyle\iint_{\Delta_T}$ est bornée lorsque $T \to +\infty$.

D'après (1), on a :

$$I_T \leqslant \iint_{\Delta_T} \left[\frac{2y\varphi(y)}{x^2-y^2} \left[\log_+ y + \log\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)\right]^\alpha - \frac{2x\varphi(x)}{x^2-y^2} \left[\log x + \log\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)\right]^\alpha \right] dx\, dy.$$

Considérons, pour $\alpha \geqslant 1$, les termes

$$A = \iint_D \frac{2x\varphi(x)}{x^2-y^2} [\log x]^{\alpha-1} dx\, dy \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi(x) [\log 2x]^{\alpha-1} \log(2x-1)\, dx$$

et $B = \iint_D \frac{2y\varphi(y)}{x^2-y^2}\left[\log_+ y\right]^{\alpha-1} dx\, dy = \int_0^{+\infty} \varphi(y)\left[\log_+ y\right]^{\alpha-1}\log(2y-1)dy$

qui sont finis, pour montrer que I_T est bornée il suffit de montrer que

$$J_T = \iint_{\Delta_T} \frac{2}{x^2-y^2}\left[y\varphi(y)\left[\log_+ y\right]^{\alpha} - x\varphi(x)\left[\log x\right]^{\alpha}\right]dx\, dy \quad \text{est borné.}$$

Posons $\psi(x) = \varphi(x)\left[\log x\right]^{\alpha}$, $J_T = K_T - L_T$ avec

$$K_T = \iint_{\Delta_T} \frac{2y\psi(y)}{x^2-y^2}\, dx\, dy \;, \quad L_T = \iint_{\Delta_T} \frac{2x\psi(x)}{x^2-y^2}\, dx\, dy \;. \quad \text{On a :}$$

$$K_T = \int_0^{\lambda(T-1)} \psi(y)\log\left(\frac{y(1-\lambda)+\lambda}{y(1+\lambda)+\lambda}(2y+1)\right)dy + \int_{\lambda(T-1)}^{T-1} \psi(y)\; \log\left(\frac{T-y}{T+y}\;(2y+1)\right)dy$$

$$L_T = \int_1^T \psi(x)\; \log\;\left(\frac{x(1-\lambda)+\lambda}{x(1+\lambda)-\lambda}(2x-1)\right)dx.$$

Posons $J_T = P + Q + R + S$ avec

$$P = \int_0^1 \psi(y)\log\left(\frac{y(1-\lambda)+\lambda}{y(1+\lambda)+\lambda}\;(2y+1)dy\right.\;, \quad Q = \int_1^{\lambda(T-1)} \psi(y)\frac{\log\, 2y+1}{2y-1}\, dy$$

$$R = \int_{\lambda(T-1)}^{T-1} \psi(y)\log\left(\frac{T-y}{T+y}\,\frac{2y+1}{2y-1}\,\frac{y(1+\lambda)-\lambda}{y(1-\lambda)+\lambda}\right)dy \qquad S = \int_{T-1}^{T} \varphi(y)\log\left(\frac{y(1-\lambda)+\lambda}{y(1+\lambda)-\lambda}(2y-1)\right)dy \;.$$

Q converge vers une limite finie lorsque $T \to +\infty$. Pour tout $\gamma > 0$ $\varphi(x)\left[\log x\right]^{\gamma}$ décroit et tend vers zéro lorsque $x > 0$ est assez grand donc
$|S| \leqslant C\; \psi(T-1)\left[1+\log(2T-1)\right]$ tend vers zéro lorsque $T \to +\infty$. Il reste à vérifier que

$$R' = \int_{\lambda(T-1)}^{T-1} \psi(y)\log\left(\frac{T-y}{T+y}\right)dy \quad \text{est borné lorsque } T \to +\infty \;,$$

or $\frac{1}{2T-1} \leqslant \frac{T-y}{T+y} < 1$ donc $\left|\log \frac{T-y}{T+y}\right| \leqslant \log(2T-1)$ et $|R'| \leqslant CT\psi(\lambda(T-1))\log(2T-1)$ tend vers zéro d'après l'hypothèse.

2\. Il reste à montrer que $\quad \sum_{p_1\in \mathbb{Z}-\{0\}} |c_{p_1,0}|\left[\log_+|p_1|\right]^{\alpha} < +\infty$.

Appliquons la formule générale (1) de 3.1., à un coefficient indépendant de p près, on a :

$$c_{p_1,0} = \frac{1}{p_1}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\left[e^{-ip_1x} - e^{ip_1x} - ip_1x(e^{-ip_1x} + e^{ip_1x})\right]dx$$

d'où (en posant $p_1 = q$) :

$$c_{q,0} \simeq \frac{2\pi}{q}\varphi(q) - 2\pi\sum_{n\neq\pm q}(-1)^{n+q}\left[\frac{1}{n-q} + \frac{1}{n+q}\right]\varphi(n) \;, \qquad \text{ou}$$

$$c_{q,0} = \frac{2\pi}{q}\varphi(q) - 4\pi(-1)^q\sum_{n\neq\pm q}(-1)^n\,\frac{\varphi(n)}{n-q} \;.$$

On doit montrer que $\quad \sum_{q\in\mathbb{Z}-\{0\}}\left[\log_+|q|\right]^{\alpha}\left|\sum_{n\neq q}(-1)^n\,\frac{\varphi(n)}{n-q}\right| < +\infty$.

On décompose, par exemple, pour $q > 0$:

$$\sum_{n \neq q} (-1)^n \frac{\varphi(n)}{n-q} = \sum_{n\leqslant -q-1} + \sum_{-q+1\leqslant n\leqslant q-1} + \sum_{n\geqslant q+1} .$$

Puisque $\varphi(x)$ décroit pour $x > 0$ assez grand, on a :

$$S_1(q) = \left| \sum_{n\leqslant q-1} (-1)^n \frac{\varphi(n)}{n-q} \right| \leqslant \varphi(q+1) \quad \text{et} \quad S_2(q) = \left| \sum_{n\geqslant q+1} (-1)^n \frac{\varphi(n)}{n-q} \right| \leqslant \varphi(q+1) .$$

Soit $S_3(q) = \left| \sum_{-q+1\leqslant n\leqslant q-1} (-1)^n \frac{\varphi(n)}{n-q} \right| = \left| \sum_{1\leqslant n\leqslant q-1} (-1)^n \varphi(n) \left(\frac{1}{q-n} - \frac{1}{q+n}\right) \right| .$

On a

$$S_3(q) \leqslant C\varphi(q-1) + \sum_{1\leqslant n\leqslant \frac{q-1}{2}} \left| \frac{(2n-1)\varphi(2n-1)}{q^2-(2n-1)^2} - \frac{2n\,\varphi(2n)}{q^2 - 4n^2} \right| , \text{ donc}$$

$$S_3(q) \leqslant C\varphi(q-1) + S_4(q) + S_5(q) \quad \text{avec}$$

$$S_4(q) = \sum_{1\leqslant n\leqslant \frac{q-1}{2}} (2n-1)\varphi(2n-1) \left(\frac{1}{q^2-4n^2} - \frac{1}{q^2-(2n-1)^2} \right)$$

$$S_5(q) = \sum_{1\leqslant n\leqslant \frac{q-1}{2}} \frac{(2n-1)\varphi(2n-1)-2n\varphi(2n)}{q^2 - 4n^2} .$$

$S_5(q)$ est majoré par l'intégrale

$$\int_1^{q-1} \frac{d(-x\varphi)}{q^2-x^2} = \frac{\varphi(1)}{q^2-1} - \frac{q-1}{2q-1}\varphi(q-1) + \int_1^{q-1} \frac{2x^2\varphi(x)}{(q^2-x^2)^2} .$$

La croissance de $x^\beta\varphi(x)$ entraîne que

$$\int_1^{q-1} \frac{2x^2\varphi(x)}{(q^2-x^2)^2} \leqslant (q-1)^\beta\varphi(q-1)\int_1^{q-1} \frac{2x^{2-\beta}}{(q^2-x^2)^2}\,dx \leqslant \frac{2(q-1)^2}{(2q-1)^2}\varphi(q-1) .$$

$S_4(q)$ est majoré par l'intégrale :

$$S_4(q) \leqslant C\int_1^{q-2} x\varphi(x) \left(\frac{1}{q^2-(x+1)^2} - \frac{1}{q^2 - x^2}\right) dx , \text{ donc}$$

$$S_4(q) \leqslant C(q-2)^\beta \varphi(q-2) \int_1^{q-2} \frac{1}{x^{\beta-1}} \left(\frac{1}{q^2-(x+1)^2} - \frac{1}{q^2-x^2}\right) dx .$$

On voit facilement par développement en série entière et intégration terme à terme que cette dernière intégrale est $O(\frac{1}{q^\beta})$ lorsque $q \to +\infty$.

Le cas $q < 0$ se traite de façon analogue et la sommabilité de $\varphi(x)$ par rapport à la mesure $(\log_+|x|^\alpha)\,dx$ achève la démonstration du lemme .

Un corollaire immédiat est :

<u>Corollaire</u> : <u>Il existe une fonction</u> F <u>continue sur</u> $[0, \pi]$ <u>nulle à l'origine telle que</u> $F(\sup(|t_1|;|t_2|))$ <u>appartient à</u> $A(\mathbb{T}^2)$ <u>sans que</u> F <u>appartienne à</u> $A^s([0,\pi];\log|n|)$.

Il suffit de choisir la fonction $F(x) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{\sin nx}{n[\log n]^\gamma}$ avec $1 < \gamma \leqslant 2$, $F(\sup(|t_1|, |t_2|))$ appartient à $A(\mathbb{T}^2)$ sans que F appartienne à $A^s([0,\pi];\log |n|)$.

<u>Remarque</u> : Toutefois, sur tout intervalle compact $[a, b]$ de $]0, \pi[$, cette fonction F est de classe C^1 car la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos nx}{(\log n)^\gamma}$ converge uniformément sur $[a, b]$. Donc F appartient sur $[a, b]$ à $A([a, b] ; 1 + |n|^{(1/2)-\varepsilon})$ pour tout ε, tel que $0 < \varepsilon < 1/2$ (voir th. 8, ch. III) et à fortiori à $A([a,b]; \log |n|)$. C'est au voisinage de 0 et de π que F n'appartient pas à $A(\mathbb{T} ; \log |n|)$. On pourrait penser que la situation est analogue à celle des fonctions radiales de $A(\mathbb{R}^k)$ qui dans le complémentaire de l'origine ont un profil régulier, appartenant localement à $A(\mathbb{T} ; 1 + |n|^{(k-1)/2})$ alors que ce n'est pas en général le cas au voisinage de l'origine (voir appendice du ch. I). Nous allons voir qu'il n'en est rien.

<u>Théorème</u> 12 : <u>L'algèbre $A_{\mathcal{R}_0}(E)$ où E est la couronne de $\mathbb{T}^k$ définie par $0 < a \leq \sup_{1\leq j\leq k}|t_j| \leq b < \pi$, n'est pas isomorphe à $A([a, b] ; (\log n)^{k-1})$.</u>

Soit E_N la couronne de $\mathbb{T}^N$ définie par $0 < a \leq \sup_{1\leq j\leq N} |t_j| \leq b < \pi$. Considérons l'injection continue

$$A([a, b] ; (\log|n|)^{k-2}) \longrightarrow A(E_{k-1}) \qquad (k \geq 2)$$

qui à la fonction F(x) fait correspondre la fonction $F(\sup_{1\leq j\leq k-1} |t_j|)$, elle se prolonge en une injection continue (voir A. Grothendieck [10]),

$$X = A([a, b]; (\log|n|)^{k-2}) \hat{\otimes} A([a, b]) \to A(E_{k-1}) \hat{\otimes} A([a, b]) = A(E_{k-1} \times [a, b])$$

qui à f(x,y) fait correspondre la fonction $f(\sup_{1\leq j\leq k-1} |t_j| , t_k)$.

A une fonction qui respecte $\mathcal{R}_0$ sur $[a, b] \times [a, b]$, correspond une fonction de $A(E_{k-1} \times [a, b])$ qui respecte $\mathcal{R}_0$ sur $E_{k-1} \times [a, b]$. Soit $\Phi(\sup(|x| , |y|))$ la fonction de X, son image est la fonction g définie dans $E_{k-1}\times[a,b]$: $g(t)=\Phi(\sup_{1\leq j\leq k}|t_j|)$.

Considérons la fonction $F(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{\sin nx}{n(\log n)^\gamma}$ avec $k-1 < \gamma \leq k$, d'après le lemme 11, $F(\sup(|x|,|y|))$ appartient à $A(\mathbb{T} ; (\log |n|)^{k-2}) \hat{\otimes} A(\mathbb{T})$.

Considérons la fonction $\Phi(x)$ définie sur l'intervalle $a \leq x \leq b$ par $\Phi(x) = F(x + \pi - b)$. Sur le sous-ensemble $[a, b] \times [a, b]$ de $\mathbb{T}^2$ la fonction $\Phi(\sup(|x|,|y|)) = F(\sup(x+\pi-b , y+\pi-b))$ appartient donc à $A([a, b] ;(\log |n|)^{k-2}) \hat{\otimes} A([a, b])$ et donc $\Phi(\sup_{1\leq j\leq k} |t_j|)$ appartient à $A(E_{k-1} \times [a, b])$. Mais d'après la remarque qui précède l'énoncé du théorème, F est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$, donc Φ est de classe C^1 au voisinage du point a, il en résulte à fortiori, que au voisinage de ce point Φ est un profil de fonctions de $A_{\mathcal{R}}(\mathbb{T}^N)$ pour tout N. Donc $\Phi(\sup_{1\leq j\leq k} |t_j|)$ se prolonge en une fonction de $A_{\mathcal{R}}(E_k)$.

Mais puique F n'appartient pas à $A(\mathbb{T}; (\log |n|)^{k-1})$ au voisinage de $x = \pi$, Φ n'appartient pas à cet espace au voisinage de $x = b$, c'est dire que Φ n'appartient pas à $A([a, b] ; (\log |n|)^{k-1})$.

On peut donc compléter le théorème 10, on a en regroupant les résultats :

Théorème 13 : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}^k$ associée à une surface polyèdrale de $(\mathcal{G})$, E une couronne compacte disjointe de l'origine associée. Soit ω une application paire de $\mathbb{Z}$ dans $[1, +\infty[$ la condition nécéssaire et suffisante pour que l'algèbre des profils de $A_{\mathcal{R}}(E)$ contienne une algèbre de restriction de $A(\mathbb{T};\omega)$ est que $\liminf_{|n|\to+\infty} \frac{\omega(n)}{[\log|n|]^{k-1}} > 0$ et l'inclusion de l'algèbre de restrictions de $A(\mathbb{T} ; (\log |n|)^{k-1})$ est stricte lorsque la surface est le bord d'un polyèdre convexe.

Remarques : 1. Le problème de l'inclusion reste ouvert pour une surface bord d'un polyèdrale non convexe (classe $(\mathcal{G}_{nc})$)(on pourrait chercher si la fonction

$$\Psi(x) = \Phi(a+b-x) = \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{\sin n(a-x)}{n(\log n)^\gamma}$$ est encore un profil de $A_{\mathcal{R}_0}(E_k)$).

2. Pour la classe $(\mathcal{G}_c)$, l'inclusion est mise en défaut au voisinage de la composante connexe "extérieure" du bord de la couronne E. Le problème de la mettre en défaut au voisinage de la composante connexe "intérieure" du bord de E reste ouvert. On voit facilement, par la méthode du théorème 12, que la fonction

$$\theta(x) = F(x-a) = \sum_{n\geq 2} \frac{\sin (x-a)}{n(\log n)^\gamma}$$ est un profil de $A_{\mathcal{R}_0}([a, b]^k)$. On est conduit à un problème plus fort : prolonger une fonction de $A([a, b]^k)$ respectant $\mathcal{R}_0$ dans le "coin" $[a, b]^k$, en une fonction de $A(E_k)$ respectant $\mathcal{R}_0$ dans toute la couronne E_k. C'est justement au bord "intérieur" qu'est la difficulté.

Ce résultat suggère le problème suivant : reprenons le cas général du paragraphe 1, $\mathcal{R}$ étant une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^k$ associée à une surface S convenable, E étant une couronne associée définie par $0 < a \leq r(t) \leq b < +\infty$, existe-t-il un prolongement de chaque fonction f de $A_{\mathcal{R}}(E)$ dans une algèbre $A_{\mathcal{R}}(E')$ où E' est une couronne plus grande correspondant à un intervalle $[a', b']$ avec $0<a'<a<b<b'<+\infty$?

Soit $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ l'algèbre des profils de $A_{\mathcal{R}}(E)$, ce problème équivaut à savoir si $\Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ est isomorphe à l'algèbre quotient de $\Lambda_{\mathcal{R}}([a',b'])$ par l'idéal des fonctions nulles sur $[a, b]$.

Lorsqu'il existe un poids ω pour lequel $A_{\mathcal{R}}(E)$ est isomorphe à une algèbre de restrictions de $A(\mathbb{T};\omega)$ la réponse est évidemment positive. C'est la cas lorsque $\mathcal{R}$ est associée à la sphère, le problème semble ouvert pour une surface de la classe régulière (Σ). Nous allons voir que la réponse est négative lorsque $\mathcal{R}$ est associée au bord d'un polyèdre convexe (classe $(\mathcal{G}_c)$).

5. Il est intéressant de comparer les résultats des paragraphes précédents à ceux que l'on obtient pour des relations d'équivalence d'un type différent de celles définies en 1, et qui sont, en quelque sorte, le cas limite où le centre d'homothétie des classes est rejeté à l'infini.

Pour $k \geqslant 2$ entier, soit B un compact de $\mathbb{R}^{k-1}$. Considérons le cylindre $B \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^k$ et S l'intersection de ce cylindre avec une surface (sous-variété de dimension $k-1$) de $\mathbb{R}^k$ d'équation

$$t_k = f(t_1, \ldots, t_{k-1})$$

f étant de classe C^0 dans un voisinage de B.

On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans $B \times \mathbb{R}$ dont les classes sont les translatées S_λ, $-\infty < \lambda < +\infty$ définies par

$$t_k = f(t_1, \ldots, t_{k-1}) + \lambda .$$

Soit E la "tranche d'épaisseur $[a, b]$" du cylindre $B \times \mathbb{R}$ définie par

$$a \leqslant t_k - f(t_1, \ldots, t_{k-1}) \leqslant b .$$

On se limite au cas où a et b sont finis. $A_{\mathcal{R}}(E)$ désigne la sous-algèbre fermée de l'algèbre de restrictions $A(E)$ des fonctions qui respectent $\mathcal{R}$ sur E. $A_{\mathcal{R}}(E)$ est isomorphe à l'algèbre des "profils" $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{R}}([a, b])$ des fonctions F continues sur $[a, b]$ telles que $F(t_k - f(t_1, \ldots, t_{k-1}))$ appartienne à $A(E)$. La restriction d'une telle fonction au segment de droite obtenu en fixant $(t_1, \ldots, t_{k-1})$ doit appartenir à l'algèbre de restrictions de $A(\mathbb{R})$; donc Λ est inclus dans $A([a, b])$. L'étude locale sur $]a, b[$ de Λ est très simple.

<u>Proposition</u> 14 : <u>Les fonctions de Λ à support compact dans $]a, b[$ sont celles de l'algèbre de restrictions</u> $A([a, b]; \omega)$ <u>avec</u> $\omega(n) = \|e^{inf}\|_{A(B)}$.

Soit F le profil, à support dans $]a, b[$, d'une fonction g de $A(E)$. Soit φ la transformée de Fourier réciproque de F, on a :

$$(1) \qquad F(t_k - f(t_1, \ldots, t_{k-1})) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt_k}\, e^{ixf(t_1,\ldots,t_{k-1})}\, \varphi(x)\, dx .$$

D'autre part, soit γ la transformée de Fourier réciproque d'un prolongement de g :

$$(2) \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt_k}\Big(\int_{R^{k-1}} e^{-i(u_1t_1+\ldots+u_{k-1}t_{k-1})}\,\gamma(u_1,\ldots,u_{k-1},x)\,du_1\ldots du_{k-1}\Big)dx.$$

D'après (1) et (2) on a pour tous les points x de $\mathbb{R}$ et $(t_1, \ldots, t_{k-1})$ de B :

$$(13) \qquad e^{ixf(t_1,\ldots,t_{k-1})}\varphi(x) = \int_{R^{k-1}} e^{-i(u_1t_1+\ldots+u_{k-1}t_{k-1})}\,\gamma(u_1,\ldots,u_{k-1}, x)\,du_1\ldots du_{k-1} .$$

Le second membre est pour x fixé, une fonction de $A(\mathbb{R}^{k-1})$ donc le premier membre appartient pour tout x à $A(B)$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|e^{ixf(t_1,\ldots,t_{k-1})}\|_{A(B)}\, |\varphi(x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^k} |\gamma(u_1,\ldots,u_{k-1},x)|\, du_1\ldots du_{k-1}\, dx < +\infty$$

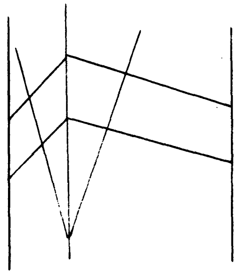
ainsi F appartient à $A([a, b]; \omega)$. Inversement cette algèbre est contenue dans Λ car d'après (1) on a :

$$\|F(t_k - f(t_1,\ldots,t_{k-1}))\|_{A(E)} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|e^{ixf(t_1,\ldots,t_{k-1})}\|_{A(B)}\, |\varphi(x)|\, dx .$$

Prenons pour B un pavé de $\mathbb{R}^{k-1}$ et pour f une fonction linéaire par morceaux sur B qui n'est linéaire en aucune variable. On suppose en outre que f est de "type minimal" dans le sens que de chaque sommet de 1 surface polyédrale S partent k arêtes.

Supposons que S contienne un seul sommet se projetant dans l'intérieur de B, l'origine des coordonnées étant sur la verticale de ce sommet et strictement au-dessous de l'intersection de E avec cette verticale (i.e. $0 < f(0,\dots,0)+a < f(0,\dots,0) + b$).

Soit Ω un cône fermé de sommet 0 contenant dans son interieur la demi-droite ouverte d'équation $t_k > 0$, et tel que $E \cap \Omega$ soit contenu dans l'intérieur du cylindre $B \times \mathbb{R}$.



Soit $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence associée d'après le paragraphe 2, à la surface $S \cap \Omega$. Il est clair que les algèbres $A_{\mathcal{R}}(E \cap \Omega)$ et $A_{\mathcal{R}'}(E \cap \Omega)$ sont identiques. On vérifie de façon élémentaire, en supposant par exemple que la k-ième coordonnée du sommet S est égale à 1, que les profils de $A_{\mathcal{R}}(E \cap \Omega)$ (resp. $A_{\mathcal{R}'}(E \cap \Omega)$) sont des fonctions continues sur $[a, b]$ (resp. $[1+a , 1 + b]$) qui se correspondent pa les translations ± 1 . La proposition 15 entraîne alors clairement que l'algèbre des profils $\Lambda([0,\pi])$ de $A_{\mathcal{R}_0}(\mathbf{T}^k)$ est formée localement sur $]0,\pi[$ des fonctions d'une algèbre à poids $A(\mathbf{T};\omega)$ où ω est une application paire de $\mathbf{Z}$ dans $[1,+\infty$ et que pour $0 < a < b < \pi$, $\Lambda([a, b])$ contient $A([a, b]; \omega)$. Alors d'après le théorème 10 on a nécessairement

$$\omega(n) \sim (\log |n|)^{k-1}$$

Ainsi la structure locale des profils est précisée. En regroupant ce résultat avec ceux du théorème 13 on a :

Théorème 15 : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}^k$ associée à une surface polyédrale de $(\mathcal{G})$, E une couronne compacte associée, d'épaisseur $[a, b]$ disjointe de l'origine.

1. L'algèbre de restrictions $A([a,b] ;(\log|n|)^{k-1})$ est contenue dans l'algèbre des profils des fonctions de $A_{\mathcal{R}}(E)$ et réciproquement tout profil appartient localement sur $]a, b[$ à $A(\mathbf{T} ;(\log| n|)^{k-1})$.

2. Lorsque la surface associée est le bord d'un polyèdre convexe, il existe des fonctions de $A_{\mathcal{R}}(E)$ dont aucun prolongement dans $A(\mathbb{R}^k)$ ne respecte $\mathcal{R}$.

La seconde partie, qui est conséquence de la première et du théorème 12 montre une propriété toute différente de ce qui a lieu lorsque la relation $\mathcal{R}$ est associée à une sphère S. Nous en noterons deux corollaires :

Corollaire 1 : Lorsque la relation $\mathcal{R}$ est associée au bord d'un polyèdre convexe soit E' une couronne compacte disjointe de l'origine, et voisinage d'une couronne E (E et E' étant associées à $\mathcal{R}$). L'algèbre $A_{\mathcal{R}}(E)$ n'est pas le quotient de l'algèbre $A_{\mathcal{R}}(E')$ par l'idéal de $A_{\mathcal{R}}(E')$ formé des fonctions nulles sur E.

Corollaire 2 : Soit σ une mesure de Radon de masse totale 1, portée par une surface S appartenant à la classe $(\mathcal{S}_c)$. Considérons l'application linéaire qui à une fonction f continue sur $\mathbb{R}^k$ fait correspondre la fonction f_σ respectant $\mathcal{R}$, dont le profil est pour $0 \leqslant r < +\infty$

$$F(r) = \int_S f(ru_1, \dots, ru_k)\, d\sigma$$

où le point $(u_1,\dots,u_k)$ décrit S.

L'application $f \longmapsto f_\sigma$ n'est pas un endomorphisme linéaire de $A(\mathbb{R}^k)$

Remarques : 1. On a déjà signalé en remarque au théorème 13, les problèmes ouverts de l'analogue de la seconde partie lorsque le polyèdre P(S) n'est pas convexe, et du rôle particulier joué par la composante connexe "extérieure" du bord de E, lorsque P(S) est convexe. Ces problèmes sont liés : si la propriété de la seconde partie avait lieu pour toute surface de la classe $(\mathcal{S})$, alors les deux composantes connexes du bord de E joueraient le même rôle : l'appartenance locale des profils à $A(\mathbb{T}\,;(\log|n|)^{k-1})$ à l'intérieur de E, pourrait être mise en défaut simultanément au voisinage des deux composantes connexes du bord de E.
Inversement, si lorsque P(S) est convexe, tout profil avait la régularité de $A(\mathbb{T};\ (\log|n|)^{k-1})$ au voisinage de la composante connexe "intérieure" du bord de E, alors pour toute surface bord d'un polyèdre non convexe (classe $(\mathcal{S}_{nc})$) l'espace des profils de l'algèbre $A_{\mathcal{R}}(E)$ serait l'algèbre des restrictions $A([a,b]\,;(\log|n|)^{k-1})$ (E étant une couronne compacte disjointe de l'origine, d'épaisseur $[a,\ b]$). On aurait alors la propriété contraire à celle du corollaire 1.

2. En dimension k=2, la première partie ne nécessite pas l'étude faite en 3 ; il suffit de la proposition 14, l'évaluation $\|e^{inf}\|_{A(I)} \sim \log|n|$ lorsque f est linéaire par morceaux sur un intervalle compact I de $\mathbb{R}$, est en effet un résultat classique de J.-P. Kahane [18]. La méthode du paragraphe 3 semble en revanche naturelle pour obtenir la conséquence du théorème 13 et de la proposition 14 :

Théorème 16 : Soit f une fonction linéaire par morceaux sur un pavé E de $\mathbb{T}^k$, qui n'est linéaire en aucune variable et de "type minimal" alors $\|e^{inf}\|_{A(E)} \sim (\log|n|)^k$ lorsque $|n| \to +\infty$.

L'hypothèse de minimalité semble artificielle, mais sa suppression reste une conjecture.

6. Nous terminerons par une application de la première partie du théorème 15.

Soit h un homéomorphisme de $\mathbb{R}^k$ sur lui-même, positivement homogène de degré 1 (c'est-à-dire que $h(\lambda t) = \lambda h(t)$ pour tout λ de $\mathbb{R}^+$ et tout t de $\mathbb{R}^k$).

L'automorphisme $H : f \longmapsto f\circ h$ de l'algèbre uniforme des fonctions continues sur $\mathbb{R}^k$ se restreint en un automorphisme de $A(\mathbb{R}^k)$ si et seulement si h est linéaire mais le théorème 15 et le théorème de Y. Domar signalé au paragraphe 1 montre que dans certains cas H se restreint en isomorphismes locaux entre certaines sous-algèbres fermées de $A(\mathbb{R}^k)$:

Théorème 17 : Soit h un homéomorphisme linéaire par morceaux de $\mathbb{R}^k$ sur lui-même (préservant l'origine). Pour toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ associée à une surface polyédrale S de $(\mathcal{S})$ telle que l'image réciproque $h^{-1}(S)$ appartienne aussi à $(\mathcal{S})$, si f appartient à $A_{\mathcal{R}}(\mathbb{R}^k)$, $f\circ h$ appartient localement à $A(\mathbb{R}^k)$ dans le complémentaire de l'origine.

En effet, soit r la fonction positivement homogène de degré 1 associée à $\mathcal{R}$ et E la couronne définie par $0 < a < r(t) < b < +\infty$. Le profil F d'une fonction f de $A_{\mathcal{R}}(\mathbb{R}^k)$ a une régularité locale sur $]0, +\infty[$ qui ne dépend pas de la relation particulière $\mathcal{R}$. La fonction positivement homogène de degré 1 associée à $h^{-1}(S)$ est $\rho = r \circ h$. Donc $F \circ \rho = f \circ h$ appartient localement dans le complémentaire de l'origine à l'algèbre $A_{h^{-1}(\mathcal{R})}(\mathbb{R}^k)$, où $h^{-1}(\mathcal{R})$ est la relation d'équivalence associée à $h^{-1}(S)$.

Remarque : Il est clair qu'en dimension 2, tout homéomorphisme linéaire par morceaux de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, conserve globalement la classe $(\mathcal{S})$ et la restriction du théorème est alors superflue.

Un cas très différent d'application h possédant une propriété analogue est fourni par le résultat de Y. Domar :

Théorème 17' : (Domar) : Soit h un homéomosphisme de $\mathbb{R}^k$ sur lui-même, de classe suffisante dans $\mathbb{R}^k-\{0\}$, positivement homogène de degré 1, ayant son jacobien partout différent de zéro dans $\mathbb{R}^k - \{0\}$. Pour toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ associée à une surface de la classe (Σ), si f appartient à $A_{\mathcal{R}}(\mathbb{R}^k)$, $f\circ h$ appartient à $A(\mathbb{R}^k)$ localement dans le complémentaire de l'origine.

La démonstration est analogue à celle du théorème 17.

-=-

Appendice

Sur quelques différences de calcul symbolique par fonctions paires et impaires dans $A(\mathbf{T}^k)$

Soit G un groupe abélien compact, A(G) l'algèbre de groupe correspondante. Pour toute fonction f de A(G), à valeurs réelles, notons α, β, γ les applications de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{R}^+$ définies par :

$$\alpha(n) = \|\sin nf\|_{A(G)} \quad , \quad \beta(n) = \|\cos nf\|_{A(G)} \quad , \quad \gamma(n) = \|e^{inf}\|_{A(G)} \quad .$$

(Lorsque $|n|$ est supérieur à un entier $|n_0|$ dépendant de f, $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ sont supérieurs ou égaux à 1).

Pour toute application ω de $\mathbf{Z}$ dans $[1, +\infty[$, considérons les espaces $A^s(\mathbf{T};\omega)$, $A^c(\mathbf{T};\omega)$, $A(\mathbf{T};\omega)$ (paragraphe 3.4., chap. IV). On a évidemment :

<u>Proposition</u> : <u>Soit</u> f <u>une fonction de</u> A(G) <u>à valeurs réelles. Pour toute fonction</u> F <u>de</u> $A^s(\mathbf{T};\omega)$ (<u>resp</u>. $A^c(\mathbf{T};\omega)$, $A(\mathbf{T};\omega)$) $F\circ f$ <u>appartient à</u> A(G) <u>si et seulement si</u>

$$\liminf_{|n|\to+\infty} \frac{\omega(n)}{\alpha(n)} > 0 \ (\text{resp. } \liminf_{|n|\to+\infty} \frac{\omega(n)}{\beta(n)} > 0 \ , \ \liminf_{|n|\to+\infty} \frac{\omega(n)}{\gamma(n)} > 0 \ ).$$

Lorsque, pour $|n|$ assez grand, α/β reste compris entre deux constantes strictement positives, c'est-à-dire $\alpha(n) \sim \beta(n)$ (et alors $\alpha(n) \sim \beta(n) \sim \gamma(n)$), il n'y a pas de différence de calcul symbolique par fonctions paires ou impaires, dans le sens que $A^s(\mathbf{T};\gamma)$, $A^c(\mathbf{T};\gamma)$, $A(\mathbf{T};\gamma)$ sont les meilleurs espaces à poids qui opèrent sur f.

Si $\liminf_{|n|\to+\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta(n)} = 0$ ou bien $\limsup_{|n|\to+\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta(n)} = +\infty$ il en est autrement : les conditions de régularité nécessaires et suffisantes pour le calcul symbolique pair et le calcul symbolique impair de f ne sont pas les mêmes.

A priori cette situation peut se produire en particulier si l'une des applications (α,β) est bornée, l'autre ne l'étant pas.

Il n'est, en fait, pas possible que α soit borné sans que β le soit aussi :

<u>Proposition</u> 1 : <u>Soit</u> f <u>une fonction de</u> A(G) <u>à valeurs réelles</u>, $\|\sin nf\|_{A(G)}$ <u>est borné si et seulement si</u> $\|e^{inf}\|_{A(G)}$ <u>est borné ce qui entraîne donc que</u> $\|\cos nf\|_{A(G)}$ <u>est aussi borné et</u> f <u>est une application linéaire affine sur chaque composante connexe de</u> G.

La démonstration est immédiate : $\cos 2nf = 1 - 2\sin^2 nf$, donc $\|e^{2inf}\|_{A(G)} = O(1)$ et par suite $\|e^{(2n+1)if}\|_{A(G)} = O(1)$. (Ceci vaut pour toute algèbre de Banach à unité avec involution). La structure de f est alors conséquence du théorème de P.-J. Cohen sur les homomorphismes d'algèbre de groupe [6] (ici $F \mapsto F\circ f$ est un homomorphisme de $A(\mathbf{T})$ dans $A(G)$). La situation est toute différente si on fait l'hypothèse que β est borné. Limitons nous au cas où $G = \mathbf{T}^k$;

Théorème 2 : Soit f une fonction à valeurs réelles appartenant à $A(\mathbf{T}^k)$, $k \geqslant 1$, le modèle de $\mathbf{T}^k$ étant le cube $[-\pi, +\pi]^k$ de $\mathbf{R}^k$. $\|\cos nf\|_{A(\mathbf{T}^k)}$ est borné si et seulement si :

-lorsque $k = 1$: f est linéaire par morceaux, à pentes de valeur absolue entière constante, les points anguleux du graphe ($y = f(x)$) étant situés sur des niveaux $y = p\pi$, p entier.

-lorsque $k = 2$: f ne dépend que d'une coordonnée en laquelle c'est une fonction du type précédent.

1) Soit $\mathcal{C}$ la classe des fonctions f telles que $\|\cos nf\|_{A(\mathbf{T}^k)} = O(1)$. Pour toute f de $\mathcal{C}$ et $p \in \mathbf{Z}$, $f + p\pi$ appartient à $\mathcal{C}$. Considérons le fermé E_o de $[-\pi,+\pi]^k$ sur lequel f prend la valeur 0 modulo π. Soit Ω une composante connexe du complémentaire de E_o et $\mathcal{O}$ un ouvert connexe dont la fermeture $\overline{\mathcal{O}}$ est contenue dans Ω . $f(\overline{\mathcal{O}}) = K$ est un compact contenu dans un intervalle fermé J de $]0, \pi[$(modulo π). Par hypothèse pour toute fonction φ de $A^c(\mathbf{T})$, $\varphi \circ f$ appartient à $A(\mathbf{T}^k)$, mais puisque J est un intervalle fermé contenu dans $]0, \pi[$, pour toute fonction ψ de $A(\mathbf{T})$ il existe une fonction φ de $A^c(\mathbf{T})$ telle que les restrictions de ψ et φ à J coïncident, et ainsi $\psi \circ f$ appartient à $A(\mathcal{O})$ pour toute fonction ψ de $A(\mathbf{T})$. D'après une extension du théorème de P.J. Cohen [6], ceci entraîne que f est linéaire sur $\overline{\mathcal{O}}$ donc sur $\overline{\Omega}$. Par ailleurs la continuité de f sur $\mathbf{T}^k$ et la définition de E_o entraîne que si $k \geqslant 2$, $\overline{\Omega}$ est nécéssairement de la forme $[a, b] \times T^{k-1}$, où $[a, b]$ est contenu dans $[-\pi, +\pi]$, et que sur $[a, b] \times \mathbf{T}^{k-1}$, f ne dépend que de la coordonnée relative à $[a, b]$, est linéaire et $f(a) = f(b) = 0$ modulo π. En conséquence sur $\mathbf{T}^k$ tout entier, f ne dépend que d'une coordonnée (que l'on peut supposer être la première) $f(x_1, \ldots, x_k) = f^*(x_1)$. On est donc ramené au cas $k = 1$.

2) k est désormais égal à 1. D'après (1) on sait que f est linéaire sur chaque intervalle ouvert du complémentaire de E_o. La continuité de f et la définition de E_o entraîne alors que E_o ne peut contenir de suites ayant un point d'accumulation E_o est donc formé d'un nombre fini de points et d'intervalles. f est linéaire par morceaux, les points anguleux du graphe ($y = f(x)$) se trouvant sur des niveaux $y = p\pi$, $p \in \mathbf{Z}$.

3) Soit $M(x_o, p\pi)$ un point anguleux du graphe de f. Soit I un intervalle voisinage de x_o dans T, ne contenant aucun autre point anguleux, et soit f^* la fonction prolongée par linéarité sur $\mathbf{R}$, en dehors de I. Par translation sur la fonction et la variable on peut supposer que M est à l'origine, et sans restriction on peut supposer que f^* est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f^*(x) = -ax \quad \text{pour } x \leqslant 0, \quad f^*(x) = bx \quad \text{pour } x \geqslant 0$$

avec $0 \leqslant a \leqslant b < +\infty$.

Nous allons montrer que nécessairement $a = b$ et que la valeur commune est un entier.

Pour toute fonction φ de $A^c(\mathbf{T})$, $\varphi \circ f^*$ coïncide sur I avec une fonction de $A(\mathbf{T})$.

Supposons d'abord que $(b-a)$ soit un entier pair. Soit f^{**} la fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le graphe s'obtient par toutes les translations de vecteurs $(k\pi, k(b-a)\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$, à partir du graphe de f^* sur $[-\pi, \pi]$. Pour toute fonction φ de $A^c(\mathbf{T})$, $\varphi \circ f^{**}$ coïncide sur I avec une fonction de $A(\mathbf{T})$, mais il en est de même au voisinage des points $\pm\pi$ où f^{**} a la même forme qu'au voisinage de 0. En conséquence $\varphi \circ f^{**}$ est une fonction de $A(\mathbf{T})$ et donc $\|\cos nf^{**}\|_{A(\mathbf{T})} = O(1)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Calculons les coefficients de Fourier de $\cos nf^{**}$:

$$c_p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nf^{**}(x) e^{-ipx} dx \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{Z} .$$

On a lorsque p est différent de $\pm$ an , $\pm$ bn :

$$4\pi i c_p = \left[1 - (-1)^p e^{ian\pi}\right]\left(\frac{1}{bn-p} + \frac{1}{an+p}\right) - \left[1 - (-1)^p e^{-ian\pi}\right]\left(\frac{1}{an-p} + \frac{1}{bn+p}\right) .$$

Posons $A = A(n,p) = \frac{1}{an+p} + \frac{1}{bn-p}$, $B = B(n,p) = \frac{1}{an-p} + \frac{1}{bn+p}$, alors

$$4\pi i c_p = \left[1 - (-1)^p \cos an\pi\right](A - B) - i(-1)^p \sin an\pi (A + B) \quad , \text{ d'où}$$

$$16\pi^2 |c_p|^2 = 2\left[1 - (-1)^p \cos an\pi\right]\left[A^2 + B^2 + 2(-1)^p \cos an\pi AB\right] .$$

n étant fixé, considérons le sous-ensemble E de $\mathbb{Z}$ qui est l'ensemble des entiers pairs (resp. impairs) lorsque an est plus proche d'un entier impair (resp. pair) que d'un entier pair (resp. impair). Lorsque p appartient à E on a :

$$|c_p| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \big||A| - |B|\big| .$$

Supposons $a \neq b$ et choisissons $p > bn$, alors on a $0 < -B < -A$ et

$$(1) \qquad \sum_{\substack{p>bn \\ p\in E}} |c_p| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \left| \left(\sum_{\substack{p>bn \\ p\in E}} \frac{1}{p-bn} - \frac{1}{p+an} \right) - \left(\sum_{\substack{p>bn \\ p\in E}} \frac{1}{p-an} - \frac{1}{p+bn} \right) \right| .$$

Par comparaison avec une intégrale, on voit facilement que lorsque $n \to +\infty$.

$$(2) \qquad \sum_{\substack{p>bn \\ p\in E}} \frac{1}{p-bn} - \frac{1}{p+an} \sim \operatorname{Log} n$$

et que :

$$(3) \qquad \sum_{\substack{p>bn \\ p\in E}} \frac{1}{p-an} - \frac{1}{p+bn} = O(1)$$

D'autre part, $\|\cos nf^{**}\|_{A(\mathbf{T})} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p| = O(\log n)$ donc (1), (2),(3) entraînent que :

$$\|\cos nf^{**}\|_{A(\mathbf{T})} \sim \log n \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

ce qui est impossible, donc $a = b$. Mais alors, lorsque p est différent de $\pm$ an ; $\pm$ bn, A et B sont égaux, et

$$c_p = \frac{(-1)^p}{2\pi} A \sin an\pi.$$

Si a n'est pas entier, pour une suite infinie d'entiers n convenables, on a:

$$|c_p(n)| \geqslant \frac{1}{4\pi} \cdot |A|$$

et donc,

$$\limsup_{n\to+\infty} \|\cos nf^{**}\|_{A(\mathbf{T})} \frac{1}{\log n} > 0$$

puisque $\sum_{p\neq\pm an} \left|\frac{1}{an-p} + \frac{1}{an+p}\right| \sim \log n$.

Ceci est impossible. C'est donc que la valeur commune de a et b est un entier.

4) Reste le cas où (b-a) est différent de zéro et d'un entier pair. Pour toute fonction paire φ de $A(\mathbf{T})$ et aussi bien de $A(\mathbf{R})$ $\varphi\circ f^*$ coïncide sur I avec une fonction de $A(\mathbf{T})$ donc aussi avec une fonction de $A(\mathbf{R})$. Soit φ la fonction paire de $A(\mathbf{T})$:

$$\varphi(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \cos nt .$$

Pour toute constante λ réelle, la fonction paire

$$\varphi_\lambda(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \cos \lambda nt$$

coïncide sur tout compact de $\mathbf{R}$ avec une fonction paire de $A(\mathbf{R})$. En conséquence $\varphi_\lambda\circ f^*$ coïncide sur I avec une fonction de $A(\mathbf{T})$. Choisissons

$$\lambda = \frac{2}{b-a},$$

alors la fonction $g^* = \lambda f^*$, est telle que $\varphi\circ g^*$ coïncide sur I avec une fonction de $A(\mathbf{T})$, chaque fois que φ est une fonction paire de $A(\mathbf{T})$. La différence des pentes correspondant à g^* est $b_1-a_1 = 2$. D'après 3) ceci est impossible. Ceci achève la démonstration du théorème.

Nous allons voir que, en dehors de la classe $\mathcal{C}$, il n'est pas possible pour un fonction f linéaire par morceaux à valeurs réelles de $A(\mathbf{T})$ que l'une des deux quantités $\|\sin nf\|_{A(\mathbf{T})}$, $\|\cos nf\|_{A(\mathbf{T})}$ soit négligeable devant l'autre.

Au préalable remarquons que la propriété des fonctions linéaires par morceaux réelles $\|e^{inf}\|_{A(\mathbf{T})} \sim \log|n|$ lorsque $|n| \to +\infty$, n'entraîne pas que l'une des deux quantités soit équivalente à $\log|n|$. En effet, un corollaire facile du théorème 2, est :

Corollaire : Soit f une fonction de $A(\mathbf{T})$ à valeurs réelles, la condition nécessaire et suffisante pour que $\|\cos 2nf\|_{A(\mathbf{T})}$ et $\|\sin (2n+1)f\|_{A(\mathbf{T})}$ soient simultanément bornés est que $(f + \pi/2)'$ soit une fonction de la classe $\mathcal{C}$.

Dans ce cas, on a simultanément :

$$\liminf_{|n|\to+\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta(n)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \limsup_{|n|\to+\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta(n)} = +$$

Démontrons maintenant :

<u>Théorème</u> 3 : <u>Soit</u> f <u>une fonction linéaire par morceaux à valeurs réelles continue sur</u> T. <u>Si l'une des deux quantités</u> $\|\sin nf\|_{A(\mathbf{T})}$ <u>et</u> $\|\cos nf\|_{A(\mathbf{T})}$ <u>est négligeable devant l'autre lorsque</u> $|n| \to +\infty$, <u>c'est que</u> f <u>appartient à la classe</u> $\mathcal{C}$.

1. Supposons d'abord que $\beta(n) = \|\cos nf\|_{A(\mathbf{T})}$ soit négligeable devant $\alpha(n) = \|\sin nf\|_{A(\mathbf{T})}$. Puisque $\|e^{inf}\|_{A(\mathbf{T})} \sim \log|n|$ c'est donc que $\alpha(n) \sim \log|n|$ et $\beta(n) = o(\log |n|)$ lorsque $|n| \to +\infty$.

Soit M un point anguleux du graphe de f correspondant à une valeur $f(x_o) = c$ différent de zéro modulo π, s'il en existe. On peut par translation supposer $x_o=0$. Soit I un intervalle fermé voisinage de 0 dans T, ne contenant aucun point anguleux, et tel que $f(I) = J$ soit contenu dans $]0, \pi[$ (modulo une translation $f \longrightarrow f + q\pi$, $q \in \mathbf{Z}$). Par hypothèse pour toute fonction φ appartenant à $A^c(\mathbf{T};\beta)$, $\varphi \circ f$ est une fonction de $A(\mathbf{T})$. Mais pour toute fonction ψ appartenant à $A(\mathbf{T};\beta)$ il existe φ appartenant à $A^c(\mathbf{T};\beta)$ telle que les restrictions de φ et ψ à J coïncident. Donc $\psi \circ f$ coïncide sur I avec une fonction de $A(\mathbf{T})$.

Soit $g = f - c$, pour toute fonction ψ de $A(\mathbf{T};\beta)$, $\psi \circ g$ coïncide sur I avec une fonction de A(T).

Soit g^* la fonction égale à g sur I, et prolongée sur $\mathbf{R}$ par linéarité :

$$\begin{cases} g^*(x) = ax & \text{pour } x \leqslant 0 \\ g^*(x) = bx & \text{pour } x \geqslant 0 \text{ .} \end{cases}$$

Supposons (a+b) entier pair. Soit g^{**} la fonction continue dont le graphe s'obtient par toutes les translations de vecteurs $(k\pi , k(a+b)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, à partir du graphe de g^* sur $[-\pi, \pi]$. Par hypothèse $\psi \circ g^{**}$ coïncide sur I avec une fonction de $A(\mathbf{T})$ mais il en est encore évidemment de même au voisinage des points $\pm\,\pi$ d'après la construction de g^{**} au voisinage de ces points. En conséquence $\psi \circ g^{**}$ appartient à $A(\mathbf{T})$ pour toute fonction ψ de $A(\mathbf{T};\omega)$. Ceci entraîne que :

$$\|e^{ing^{**}}\|_{A(T)} = O(\beta(n)) \quad \text{lorsque} \quad |n| \to +\infty \text{ .} \tag{1}$$

Or, on sait puisque g^{**} est linéaire par morceaux que

$$\| e^{ing^{**}} \|_{A(T)} \sim \log |n| \qquad \text{lorsque} \quad |n| \to +\infty \text{ ,}$$

ce qui contredit (1).

Si (a+b) est différent de zéro et d'un entier pair, on procède de façon analogue à la partie 4) du théorème 2, en utilisant l'isomorphisme local des espaces $A(\mathbf{T};\beta)$ et $A(\mathbf{R};\tilde{\beta})$, où $\tilde{\beta}$ application de $\mathbf{R}$ dans $[1, +\infty[$ est un prolongement continu (par exemple linéaire) de la fonction β définie sur $\mathbf{Z}$.

En définitive un point anguleux de f est nécessairement tel que $f(x_o) = q\pi$. Soit $M(x_o, f(x_o) = q\pi)$ un point anguleux. Par la translation $f \longrightarrow f - q\pi$ qui ne change pas $\alpha(n)$ et $\beta(n)$, on peut supposer M placé en l'origine (0,0). On conclut comme dans les parties 3 et 4 du théorème 2, que M est nécessairement point de "réflexion" avec pentes entières.

2. Supposons maintenant $\alpha(n)$ négligeable devant $\beta(n)$, c'est-à-dire que $\alpha(n) = o(\log |n|)$ et $\beta(n) \sim \log |n|$ lorsque $|n| \to +\infty$. On démontre comme dans la première partie qu'il n'y a pas de points anguleux correspondant à des valeurs $f(x_o)$ différentes de zéro modulo π. Supposant que f admet l'origine (0,0) pour point anguleux, on construit f^* et f^{**} et on calcule directement $\|\sin nf^{**}\|_{A(\mathbf{T})}$ qui est équivalent à $\log |n|$ si f n'est pas linéaire (voir lemme 25, chap. III), ceci sous l'hypothèse que (a+b) est un entier pair. Lorsque (a+b) est différent d'un entier pair et de zéro, on procède comme en 4. en utilisant l'isomorphisme local de $A(\mathbf{T};\alpha)$ avec $A(\mathbf{R};\alpha)$. En définitive, il est donc impossible que la limite de $\alpha(n)/\beta(n)$ si elle existe, soit nulle. Si elle existe c'est que $\alpha(n) \sim \beta(n) \sim \log|n|$

Un problème ouvert difficile est de savoir s'il existe une fonction réelle f de $A(\mathbf{T})$ non linéaire par morceaux pour laquelle $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ ne soient pas équivalents. Par exemple est-il possible de trouver f telle que aucune des quantités $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ ne soient bornées, l'une restant négligeable devant l'autre ? Lorsque la croissance de $\|e^{inf}\|$ est plus lente que $|n|$, précisément s'il existe α, $0 \leqslant \alpha < 1$, tel que $n^{-\alpha}\|e^{inf}\|$ soit décroissant, il est facile de montrer que supposant $\beta(n) = O(\alpha(n))$ (resp. $\alpha(n) = O(\beta(n))$) on a la limitation $\frac{\alpha(n)}{\beta(n)} = O(\log|n|)$ (resp. $\frac{\beta(n)}{\alpha(n)} = O(\log|n|)$) pour la croissance du rapport. En effet, d'après le lemme 9 (3.4) toute fonction F de l'espace $A^s(\mathbf{T};\ \beta(n)\log|n|)$ (resp. $A^c_o(\mathbf{T};\alpha(n)\log|n|)$) coïncide sur $[0,\pi]$ avec une fonction de $A^c(\mathbf{T};\beta(n))$ (resp. $A^s(\mathbf{T};\alpha(n))$, donc opère sur f, ce qui entraîne que $\alpha(n) = O(\beta(n)\log|n|)$ (resp. $\beta(n) = O(\alpha(n)\log|n|)$). Par ailleurs, si f a une dérivée dans $L^2(\mathbf{T})$ et est de classe C^2 non linéaire sur un intervalle, on peut montrer comme pour $\|e^{inf}\|$ que $\alpha(n) \sim \beta(n) \sim |n|^{1/2}$.

En dimension $k \geqslant 2$, il est aisé de construire des fonctions réelles appartenant à $A(\mathbf{T}^k)$ telles que $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ aient des rapidités de croissance différentes. Il suffit de choisir f_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, d'une variable, dans la classe $\mathscr{C}$ et de prendre

$$f(t) = f_1(t_1) + \dots + f_k(t_k) .$$

Il est facile de vérifier que si k est pair

$$\|\sin nf\|_{A(T^k)} \sim (\log |n|)^{k-1} \quad \text{et} \quad \|\cos nf\|_{A(T^k)} \sim (\log |n|)^k$$

si k est impair on échange sinus et cosinus.

Ce ne sont pas les seules, comme on l'a vu au paragraphe 3, chap. IV. Le problème se pose de construire une fonction f non linéaire par morceaux et possédant cette propriété.

-=-

Bibliographie

[1] BANACH(S.) Théorie des opérateurs linéaires. Varsovie, 1932

[2] BEURLING (A.) and HELSON (H.) Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers Math. Scand. 1, 1953, pp. 120-126

[3] BOCHNER (S.) Summation of multiple Fourier series by spherical means. Trans. Amer. Math. Soc. 40, 1936, pp. 175-207

[4] BOCHNER (S.) Theta relations with spherical harmonics. Proc. N.A.S. USA 37, 1951, pp. 804-808

[5] BOCHNER (S.) Harmonic analysis and the theory of probability, chap. 2

[6] COHEN (P.J.) On homomorphisms of group algebras. Amer. J. Math. 82, 1960, pp. 213-226

[7] DOMAR (Y.) Local homomorphisms to $L^1(R^m)$ of weighted group algebras on R^n. Math. Publ. Uppsala University

[8] GATESOUPE (M.) Sur une relation d'équivalence correspondant à une sous-algèbre de restrictions de $A(R^n)$ réduite aux constantes. C.R. Acad. Sc. Paris, 268 1969, pp. 490-491

[9] GELFAND et CHILOV Théorie des distributions, t.1. Dunod.

[10] GROTHENDIECK (A.) Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoire Amer. Math. Soc. 16, chap. 1, §.2

[11] GUY (D.) Hankel multiplier transformations and weighted p-norms. Trans. Amer. Math. Soc. 97, 1960, pp. 137-189

[12] HANKEL (H.) Die Fourierschen Reihen und integralen für Cylinderfunktionen. Math. Ann. 8, 1875, pp. 471-494

[13] HARDY, LITTLEWOOD, POLYA Inequalities. Cambridge, 1934 (théorème 319)

[14] HERZ (C.) Transformation de Fourier en plusieurs variables. Publ. Math. Orsay 1965

[15] HERZ (C.) On the means inversion of Fourier and Hankel transforms. Proc. N.A.S. USA, 40, 1954, pp. 996-999

[16] HERZ (C.) Spectral synthesis for the circle. Ann. Math., 68, 1958, pp. 709-772

[17] HERZ (C.) Fourier transforms related to convex sets. Ann. Math., 75, 1962, pp. 82-92

[18] HICKS (N.) Notes on differential geometry. Princeton, Van Nostrand, 1965

[19] HLAWKA (E.) Integrale auf konvexen Körper. Monat. Math., 54, 1950, pp. 1-36

[20] KAHANE (J.P.) Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes. J. Math. pures et appl., 35, 1956, pp. 249-259

[21] KAHANE (J.P.) Sur un théorème de Beurling-Pollard. Math. Scand. 21, 1967, pp. 71-79

[22] KAHANE (J.P.) Séries de Fourier absolument convergentes. Springer Verlag 1970

[23] KAHANE (J.P.) et KATZNELSON (Y.) Ligne de niveaux et séries de Fourier absolument convergentes. Israël J. of Math. 6, 1968, pp. 346 - 353

[24] KATZNELSON (Y.) Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach. Ann. Sc. E.N.S. Paris, 76, 1959, pp. 83-123

[25] KOOSIS (P.) A theorem on the Hilbert transform. Symposium Anal. Harm. Univ. Warwick, 1968

[26] LEBLANC (N.) Calcul symbolique dans certaines algèbres de Banach. Thèse Sc.

Math. Paris, 1969

[27] LEVY (P.) Sur la convergence absolue des séries de Fourier. Compo. Math. 1, 1934, pp. 1-14

[28] LITTMAN (W.) Fourier transforms surface-carried measures and differentiability of surface averages. Bull. Amer. Math. Soc. 69, 1963, pp. 766-770

[29] LOOMIS (L.) An introduction to abstract harmonic analysis. Van Nostrand, New-York, 1953

[30] RIESZ (M.) Sur les fonctions conjuguées. Math. Z., 27, 1927, pp. 218-244

[31] RUDIN (W.) Fourier analysis on groups. Interscience, n° 12, 1962, Wiely, pp. 56-57

[32] SCHWARTZ (A. Lee) Local properties of Hankel transforms. Ph. D. 1968, Univ. of Wisconsin

[33] SCHWARTZ (L.) Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. C.R. Acad. Sci. Paris, 227, 1948, pp. 424-426

[34] SONINE (N.) Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries. Math. Ann. 16, 1880, pp. 1-80

[35] SPECTOR (R.) Groupes localement isomorphes et transformation de Fourier avec poids. Ann. Inst. Fourier, 19, 1969, pp. 195-217

[36] STEIN(E.) Interpolation of linear operators. Trans. Amer. Math. Soc. 83, 1956 pp. 482-492

[37] STEIN(E.) Intégrales singulières et fonctions différentiables de plusieurs variables. Chap. III. 5. Publ. Orsay, 1967

[38] TITCHMARSCH (E.) Hankel transforms. Proc. Londnn Math. Soc. 45, pp. 458-474

[39] VAROPOULOS (N. Th.) Spectral synthesis on spheres. Proc. Cambridge Philos Soc. 62, 1966, pp. 379-387

[40] WATSON (G.) Theory of Bessel functions. Réédition Cambridge, 1966

[41] WING (G.) On the L_p theory of Hankel transforms. Pacific J. Math., 1, 1951, pp. 313-319

[42] ZYGMUND (A.) Trigonometric series. Cambridge, 1959, 2 vol.

(Texte reçu le 7 mai 1971)

Michel GATESOUPE
U. E. R. de Mathématiques
Université de Nantes
105-A boulevard Michelet, B. P. 1044
44 - NANTES