MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ROBERT MARTY

Sous-groupes fonctoriels et relativisations

Mémoires de la S. M. F., tome 26 (1971)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__26__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 26, 1971, 44 p.
(Thèse Sc. math. Montpellier, 1969)

SOUS-GROUPES FONCTORIELS ET RELATIVISATIONS

par

Robert MARTY

-:-:-:-

- SOMMAIRE -

- CHAPITRE O -

Introduction

L'algèbre homologique et plus particulièrement l'algèbre homologique relative ont joué un rôle très important dans la théorie des groupes abéliens depuis les travaux de J. Kaplansky [11] et la découverte par D.K. Harrisson [8] des groupes de cotorsion. L'utilisation des méthodes homologiques n'a cessé de se développer et l'on peut affirmer qu'elles sont entrées définitivement dans le "folklore" de l'étude des groupes abéliens. Non seulement elles constituent un excellent moyen pour définir des classes de groupes auxquelles on s'efforce d'étendre les résultats de théories classiques (par exemple la théorie d'Ulm-Zippin pour les groupes totalement projectifs), mais encore ces méthodes constituent un instrument de recherche très productif et leur utilisation pose des problèmes spécifiques auxquels de nombreux chercheurs ont prêté attention.

Le présent travail se place précisément dans ce cadre ; il est une contribution à l'étude des relativisations dans la catégorie des groupes abéliens et met en évidence que le choix dans chaque groupe de la catégorie d'un certain sous-groupe joue un rôle très important comme procédé permettant de définir certaines relativisations de la catégorie.

Nous allons tout d'abord rappeler les définitions et axiomes nécessaires pour mieux définir le cadre de ce travail.

Une catégorie abélienne relative est un couple $(\mathcal{C},\Omega)$ formé d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ et d'une classe Ω de morphismes de $\mathcal{C}$ qu'on appelle les morphismes permis (ou propres). Si on désigne par Ω_m la classe des monismes de Ω et par Ω_e la classe des épismes on imposera que Ω vérifie tout ou partie des axiomes suivants :

I - 1) Si $\chi \in \ker \sigma$ et $\sigma \in \operatorname{Coker} \chi$ il y a équivalence entre

$$\chi \in \Omega_m \quad \text{et} \quad \sigma \in \Omega_e \ .$$

2) $\alpha \in \Omega$ si et seulement si $\operatorname{Im} \alpha \subseteq \Omega_m$ et $\operatorname{Coim} \alpha \subseteq \Omega_e$.

II - (Rel. 1) α inversible à gauche $\Longrightarrow \alpha \in \Omega_m$

(Rel. 1') α' inversible à droite $\Longrightarrow \alpha' \in \Omega_e$

(Rel. 2) α monisme, β monisme, $\beta\alpha \in \Omega_m \Longrightarrow \alpha \in \Omega_m$

(Rel. 2') α' épisme, β' épisme, $\alpha'\beta' \in \Omega_e \Longrightarrow \alpha' \in \Omega_e$

III - (Rel. 3) $\alpha \in \Omega_m$, $\beta \in \Omega_m$, $\beta\alpha$ défini $\Longrightarrow \beta\alpha \in \Omega_m$

(Rel. 3') $\alpha' \in \Omega_e$, $\beta' \in \Omega_e$, $\alpha'\beta'$ défini $\Longrightarrow \alpha'\beta' \in \Omega_e$.

IV - (Rel. 4) Une somme directe finie de monismes permis est permise.

(Rel. 4') Une somme directe finie d'épismes permis est permise.

V - Si $\mathcal{C}$ possède des sommes et produits directs quelconques

(Rel. 5) Une somme directe de monismes permis est permise.

(Rel. 5') Un produit direct d'épismes permis est permis.

Notons tout de suite que si les groupes d'axiomes I et V sont vérifiés, alors une somme directe d'épismes permis est un épisme permis et un produit direct de monismes permis est un monisme permis.

Si l'on désigne par $\mathrm{Ext}_\Omega(C,A)$ l'ensemble des extensions permises d'un objet A par un objet C, il paraît justifié d'exiger que Ext_Ω soit un foncteur additif de deux variables de la même variance que le foncteur Ext. Identifiant $\mathrm{Ext}_\Omega(C,A)$ à un sous-groupe de $\mathrm{Ext}(C,A)$, il revient au même d'exiger que Ext_Ω soit un E-foncteur au sens de Butler-Horrocks [2] . Tout système d'axiomes de relativisation devra donc comporter les axiomes I, II et IV qui sont nécessaires et suffisants pour que Ext_Ω soit un E-foncteur (voir [15] par exemple).

L'adjonction des axiomes III, appelés axiomes de transitivité, permet d'obtenir les deux suites exactes des Ext_Ω, c'est-à-dire que si la suite

$$A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$$

est exacte permise, alors une condition nécessaire et suffisante pour que la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Omega(C,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Omega(B,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Omega(A,X)$$

soit exacte pour tout objet X de $\mathcal{C}$ est que Rel. 3 soit vérifié, sinon il peut y avoir défaut d'exactitude en $\mathrm{Ext}^1_\Omega(B,X)$.

De même la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Omega(X,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Omega(X,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Omega(X,C)$$

est exacte si et seulement si Rel. 3' est vérifié, sinon il peut y avoir défaut d'exactitude en $\mathrm{Ext}^1_\Omega(X,B)$ (voir théorème 1-1 de [2]).

Ainsi les axiomes I, II, III, IV ou I, II, III, V dans le cas où $\mathcal{B}$ possède des sommes et produits directs quelconques apparaissent comme nécessaires si l'on veut sauvegarder les propriétés fondamentales du foncteur Ext. En outre, comme ils forment un système autodual, ils présentent aussi l'avantage de préserver la dualité. Il y a lieu enfin de remarquer que (I, II, III) implique IV.

Le présent travail concerne la catégorie Ab des groupes abéliens ; cependant beaucoup de concepts et de résultats qui y sont associés sont valables dans une catégorie abélienne quelconque. Nous avons choisi d'énoncer toutes les définitions, théorèmes et propositions et de rédiger toutes les démonstrations en utilisant le vocabulaire et les notations de la catégorie Ab, ceci non seulement dans un souci de simplifier la rédaction, mais aussi dans le souci d'appliquer immédiatement les résultats obtenus à la catégorie Ab. C'est pourquoi nous avons toujours clairement indiqué les parties qui concernent exclusivement cette dernière catégorie.

Conformément à cette option d'ensemble nous allons écrire à nouveau, dans un langage plus proche de celui de Ab, les axiomes de relativisation. Au lieu de les exprimer en termes de morphismes, nous les transcrivons en termes de suites exactes courtes ([1]). Le terme groupe désignera dorénavant un groupe abélien.

Une relativisation dans la catégorie Ab de groupes abéliens est une classe E de suites exactes courtes qui satisfont aux six conditions suivantes où $A \subset B \subset C$.

(i) Si la suite $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B/A$ est dans E, alors toute suite équivalente est aussi dans E.

(ii) Si A est facteur direct de B, alors $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B/A$ est dans E.

(iii) Si $A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow C/A$ est dans E, alors $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B/A$ est dans E.

(iv) Si $B \rightarrowtail C \twoheadrightarrow C/B$ est dans E, alors $B/A \rightarrowtail C/A \twoheadrightarrow C/B$ est dans E.

(v) Si $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B/A$ et $B \rightarrowtail C \twoheadrightarrow C/B$ sont dans E, alors $A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow C/A$ est dans E.

(vi) Si $A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow C/A$ et $B/A \rightarrowtail C/A \twoheadrightarrow C/B$ sont dans E, alors $B \rightarrowtail C \twoheadrightarrow C/B$ est dans E.

Ces axiomes définissent E comme classe propre [2] ou h.f.-classe [1] . Il est clair qu'ils sont équivalents aux axiomes précités.

Il convient en outre de rappeler qu'un groupe P est E-projectif si, pour toute suite $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ de E, la suite $\mathrm{Hom}(P,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,C) \longrightarrow 0$ est exacte et qu'un groupe I est E-injectif si, pour toute suite $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ dans E, la suite $\mathrm{Hom}(B,I) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,I) \longrightarrow 0$ est exacte.

Le point de départ de notre travail est l'idée exprimée dans la thèse de D.Cook [4] qui recherche un concept unifiant rendant compte des plus "importantes" relativisations actuellement connues. Le lecteur pourra se reporter à l'introduction de sa thèse dans laquelle il fait un inventaire très détaillé, d'une part, des relativisations de Ab les mieux connues, d'autre part, de tous les procédés qui ont été utilisés dans la littérature pour relativiser cette catégorie. On y trouve aussi onze conditions équivalentes à la pureté ordinaire ; l'une de ces conditions est que pour tout groupe X la suite $t\,\mathrm{Hom}(X,B) \longrightarrow t\,\mathrm{Hom}(X,C) \longrightarrow 0$ soit exacte où $t\,\mathrm{Hom}(A,B)$ représente le sous-groupe maximal de torsion de $\mathrm{Hom}(A,B)$. C'est cette condition que D. Cook a choisi de généraliser ; il a montré que toute relativisation "importante" peut-être décrite comme une classe E de suites exactes courtes $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ pour lesquelles la suite $S(X,B) \longrightarrow S(X,C) \longrightarrow 0$ est exacte quel que soit le groupe X, ou pour lesquelles la suite $S(B,X) \longrightarrow S(A,X) \longrightarrow 0$ est exacte quel que soit le groupe X, $S(-,-)$ étant un bi-sous-foncteur du bi-foncteur Hom.

Notre but est de rattacher ce point de vue, chaque fois que cela est possible, et quitte à perdre de la généralité, au concept plus accessible de sous-groupe fonctoriel ([3] , [14] ou préradical dans [13]). Précisément dans le chapitre II nous montrons qu'à tout bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom on peut faire correspondre un sous-groupe fonctoriel et qu'à tout sous-groupe fonctoriel on peut faire correspondre un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom. Ces correspondances ne sont pas inverses l'une de l'autre.

Elles se dualisent d'ailleurs en un sens particulier qui combine la dualité de la catégorie avec la dualité de la théorie des treillis. Le résultat le plus important de ce chapitre est le théorème 1-12 qui exprime une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-groupe fonctoriel S vérifie $S(A) = A \cap S(B)$ chaque fois que $A \subset B$, en relation avec une propriété du bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom associé à S par l'une des correspondances précitées.

Dans le chapitre III nous examinons les relations entre sous-groupes fonctoriels et classes de groupes. D. Cook a montré qu'à toute classe de groupes fermées pour somme directe et pour sous-groupes on peut associer un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom ; compte tenu des résultats du chapitre II, nous faisons intervenir le concept de sous-groupe fonctoriel ce qui nous conduit à considérer une suite de correspondances entre classes de groupes fermées pour somme directe finie et sous-groupes, bi-sous-foncteurs additifs du bi-foncteur Hom co-exacts à gauche, et sous-groupes fonctoriels vérifiant $S(A) = A \cap S(B)$ chaque fois que $A \subset B$.

L'intérêt que peut présenter le chapitre III apparaît dans le chapitre IV dans lequel on étudie les diverses notions de pureté que l'on peut naturellement associer à chacun des termes de la suite de correspondances dont il a été question ci-dessus. Nous comparons ces notions en montrant les inclusions qui ont lieu entre les diverses classes propres associées. De plus nous démontrons l'existence d'une classe propre intrinsèquement liée à tout sous-groupe fonctoriel vérifiant $S(A) = A \cap S(B)$ chaque fois que $A \subset B$ (que nous appelons pur fonctoriel) ou vérifiant $\sigma[S(B)] = S(C)$ pour tout épisme $\sigma : B \twoheadrightarrow C$ (copur fonctoriel). Une extension de cette notion a des familles de sous-groupes purs (copurs) fonctoriels permet de retrouver des classes propres bien connues comme les n-Ext, les p^n-Ext et les p^ω-Ext (ω premier ordinal limite).

Dans le chapitre IV, nous montrons que les relativisations définies intrinsèquement par sous-groupes purs ou copurs fonctoriels peuvent s'interprêter comme cas particuliers de catégories (Ab,I) et (Ab,D) étudiées par L. Fuchs dans [7] . Ces catégories ne sont pas en général additives, mais dans les cas que nous considérons ce sont des catégories abéliennes. En leur appliquant les résultats explicités dans cet article, nous obtenons plusieurs suites exactes qui font intervenir certains sous-groupes de Hom et Ext.

Enfin dans le dernier chapître, la généralisation d'un théorème du chapitre III nous permet d'énoncer un théorème de transfert des relativisations aux multiples applications. Ce théorème permet en particulier de rendre compte de la plupart des relativisations connues dans la catégorie des groupes abéliens et de construire des relativisations nouvelles.

Les questions concernant l'injectivité ou la projectivité n'ont pas été abordées dans ce travail ; dans un article [14] nous avons montré comment on pouvait utiliser certains sous-groupes fonctoriels (radicaux ou socles) définis par des classes de groupes pour étudier les fermetures injective ou projective d'une classe de groupes donnée.

- CHAPITRE I -

Sous-groupes fonctoriels et bi-sous-foncteurs additifs de Hom

DEFINITION 1-1 [3] - On a défini un sous-groupe fonctoriel S dans la catégorie des groupes abéliens si, à chaque groupe G on associe un sous-groupe $S(G)$, la condition suivante étant vérifiée

$$(1) \qquad u : G \longrightarrow G' \quad \text{implique} \quad uS(G) \subseteq S(G')$$

DEFINITION 1-2 [4] - $S(-,-)$ est un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom si pour chaque paire de groupes A et B, $S(A,B)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Hom}(A,B)$, $S(X,-)$ est un sous-foncteur du foncteur $\mathrm{Hom}(X,-)$, $S(-,X)$ est un sous-foncteur du foncteur $\mathrm{Hom}(-,X)$.

PROPOSITION 1-3 - Soit S un sous-groupe fonctoriel ; pour chaque paire de groupes A et B on considère le sous-ensemble $S(A,B)$ de $\mathrm{Hom}(A,B)$ défini par

$$S(A,B) = \{f \in \mathrm{Hom}(A,B) \text{ tels que } f(A) \subseteq S(B)\}$$

alors $S(-,-)$ est un bi-sous-foncteur additif du foncteur Hom et l'on notera $\phi_1(S) = S(-,-)$.

Preuve : Il est clair que $S(A,B)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Hom}(A,B)$.
En outre si $\alpha : B \longrightarrow B'$ et $\beta : A' \longrightarrow A$ la restriction de $H(\beta,\alpha) = \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A',B')$ à $S(A,B)$ est telle que $H(\beta,\alpha)\,[S(A,B)] \subseteq S(A',B')$.
Cela revient en effet à montrer que si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha} B'$ avec $f(A) \subseteq S(B)$ alors $\alpha\, f(A) \subseteq S(B')$ ce qui résulte de (1) et que si $A' \xrightarrow{\beta} A \xrightarrow{f} B$ avec $f(A) \subseteq S(B)$ alors $f\,\beta(A') \subseteq S(B)$ ce qui est évident.

La correspondance ainsi obtenue qui à tout sous-groupe fonctoriel associe un bi-sous-foncteur du foncteur Hom sera notée ϕ_1.

PROPOSITION 1-4 - Soit $S(-,-)$ un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom. Pour tout groupe A on définit un sous-groupe $S(A)$ par

$$(2) \qquad S(A) = \sum_{\substack{H \in Ab \\ f \in S(H,A)}} f(H)$$

alors S est un sous-groupe fonctoriel et l'on notera

$$S = \phi_2\,[S(-,-)]\ .$$

De plus si G est un générateur de la catégorie et si pour tout groupe A on pose

$$(3) \qquad S_G(A) = \sum_{g \in S(G,A)} g(G) \qquad \text{on a}$$

$$S(A) = S_G(A).$$

Preuve : Montrons d'abord que S est un sous-groupe fonctoriel. Soit $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme du groupe A dans un groupe quelconque B. Remarquant que si $f \in S(H,A)$ et $u \in Hom(A,B)$ on a $u\,f \in S(H,B)$, puisque $S(H,-)$ est un sous-foncteur du foncteur $Hom(H,-)$, on peut alors écrire : (les sommations portant en fait, sur des ensembles car les $f(H)$ distincts forment un sous-ensemble des parties de A).

$$u\,S(A) = u\left[\sum_{\substack{H \in Ab \\ f \in S(H,A)}} f(H)\right] = \sum_{\substack{H \in Ab \\ uf | f \in S(H,A)}} u\,f(H) \qquad \text{d'où}$$

$$u\,S(A) \subseteq \sum_{\substack{H \in Ab \\ g \in S(H,B)}} g(H) = S(B).$$

Soit maintenant un générateur G de la catégorie et pour chaque groupe A le sous-groupe $S_G(A) = \sum_{g \in S(G,A)} g(G)$.

Il est évident que $S_G(A) \subseteq S(A)$.

Puisque G est un générateur de la catégorie on a pour tout groupe H

$$H = \sum_{u \in Hom(G,H)} u(G)$$

d'où

$$S(A) = \sum_{\substack{H \in Ab \\ f \in S(H,A)}} f\Big(\sum_{u \in Hom(G,H)} u(G)\Big) = \sum_{\substack{H \in Ab \\ f \in S(H,A) \\ u \in Hom(G,H)}} f\,u(G)$$

Mais quel que soit H, $u \in Hom(G,H)$ et $f \in S(H,A)$ entraîne $f\,u \in S(G,A)$ puisque $S(-,-)$ est un bi-sous-foncteur du bi-foncteur Hom d'où :

$$S(A) = \sum_{fu | f \in S(H,A)} f\,u(G) \subseteq S_G(A)$$

On a donc $S(A) = S_G(A)$ ce qui montre, de plus, que le sous-groupe $S_G(A)$ est un sous-groupe fonctoriel indépendant du générateur choisi.

Remarque : Soit S un sous-groupe fonctoriel et $\phi_1(S) = S(-,-)$ le bi-sous-foncteur additif du foncteur Hom qu'on lui associe par la proposition 1-3. Pour tout couple de groupes A et B on a :

$$S(A,B) \simeq \mathrm{Hom}(A,S(B))$$

Considérons en effet la suite exacte

$$S(B) \overset{\chi}{\rightarrowtail} B \twoheadrightarrow B/S(B)$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,S(B)) \xrightarrow{\chi^*} \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B/S(B))$$

Puisque χ^* est un monisme, $\mathrm{Hom}(A,S(B))$ peut donc être identifié au sous-groupe de $\mathrm{Hom}(A,B)$ constitué par les homomorphismes f tels que $f(A) \subseteq S(B)$ ce qui est précisément la définition de $S(A,B)$.

PROPOSITION 1-5 - <u>On a les relations suivantes</u> :

(i) <u>pour un sous-groupe fonctoriel</u> S : $\phi_2\phi_1(S) = S$

(ii) <u>pour un bi-sous-foncteur additif</u> $S(-,-)$ <u>du foncteur Hom</u> :

$$S(-,-) \subseteq \phi_1\phi_2\,[S(-,-)]$$

<u>cette dernière inclusion ayant le sens suivant</u> : <u>si on pose</u> $\phi_1\,\phi_2[S(-,-)] = \overline{S}(-,-)$, <u>pour tout couple</u> A,B <u>de groupes on a</u> : $S(A,B) \subseteq \overline{S}(A,B)$.

(i) si S est un sous-groupe fonctoriel, posant $\phi_1(S) = S(-,-)$ et $\overline{S} = \phi_2\,\phi_1(S)$ on sait que pour tout groupe A et par définition

$$\overline{S}(A) = \sum_{\substack{H \in Ab \\ f \in S(H,A)}} f(H)$$

Puisque $f \in S(H,A)$ et par définition de $S(-,-)$, on a pour tout $H \in Ab$, $f(H) \subseteq S(A)$ d'où pour tout groupe A, $\overline{S}(A) \subseteq S(A)$.
En particulier si on prend $H = S(A)$ et $f : S(A) \rightarrowtail A$ l'injection canonique de $S(A)$ dans A on a bien $f \in S(S(A),A)$ d'où $\overline{S}(A) = S(A)$ quel que soit le groupe A. Donc $\phi_2\phi_1(S) = S$.

(ii) Soit maintenant $S(-,-)$ un bi-sous-foncteur additif du foncteur Hom. Posons:

$$\phi_2\,[S(-,-)] = S \quad \text{et} \quad \phi_1\phi_2\,[S(-,-)] = \phi_1(S) = \overline{S}(-,-).$$

Soit A,B un couple de groupes et soit $f \in S(A,B)$. Par définition

$$S(B) = \sum_{\substack{H \in Ab \\ f \in S(H,B)}} f(H)$$

De $f \in S(A,B)$ on déduit $f(A) \subseteq S(B)$ donc on a $f \in \overline{S}(A,B)$ et $S(A,B) \subseteq \overline{S}(A,B)$.

Remarque : Il n'y a pas en général égalité, comme le montre l'exemple suivant dans la catégorie des groupes abéliens : Pour tout couple de groupes A,B prenons $S(A,B) = d\ \mathrm{Hom}(A,B)$, sous-groupe maximal divisible de $\mathrm{Hom}(A,B)$. Il est immédiat de vérifier que $d\ \mathrm{Hom}(-,-)$ est un bi-sous-foncteur additif du foncteur Hom. De plus, puisque Z est un générateur de la catégorie, on peut montrer facilement que $\phi_2\ [S(-,-)] = d$, et $\phi_1(d) = \overline{S}(-,-)$ est tel que $\overline{S}(A,B) \cong \mathrm{Hom}(A, dB)$ d'après la remarque précédente. Si nous prenons $A = B = C(p^\infty)$, alors $d\ \mathrm{Hom}(A,B) = 0$, car A étant de torsion $\mathrm{Hom}(A,B)$ est réduit et $\overline{S}(A,B) \cong \mathrm{Hom}(C(p^\infty), C(p^\infty)) \cong P$ groupe additif des entiers P-adiques.

- DUALITE -

Les propositions précédentes se dualisent dans un sens qui est précisé dans [14] p. 297. Rappelons que la dualité considérée consiste à combiner la dualité dans la catégorie avec la dualité qui consiste à passer d'un objet quotient B/A d'un objet B au sous objet A du même objet B.

PROPOSITION 1-6 - <u>Soit</u> S <u>un sous-groupe fonctoriel</u> ; <u>pour chaque paire de groupes</u> A <u>et</u> B <u>on considère le sous-ensemble</u> $S^*(A,B)$ <u>de</u> $\mathrm{Hom}(A,B)$ <u>défini par</u>

$$S^*(A,B) = \{f \in \mathrm{Hom}(A,B) \text{ tels que } f[S(A)] = 0\}$$

<u>alors</u> $S^*(-,-)$ <u>est un bi-sous-foncteur additif du foncteur</u> Hom <u>et l'on notera</u> $\psi_1(S) = S^*(-,-)$.

PROPOSITION 1-7 - <u>Soit</u> $S(-,-)$ <u>un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur</u> Hom. <u>Pour tout groupe</u> A <u>on définit un sous-groupe</u> $S^*(A)$ <u>par</u>

$$(4) \qquad S^*(A) = \bigcap_{\substack{H \in Ab \\ f \in S(A,H)}} \ker f$$

<u>alors</u> S^* <u>est un sous-groupe fonctoriel et l'on notera</u> $S^* = \psi_2\ [S(-,-)]$.

<u>De plus si</u> K <u>est un cogénérateur de la catégorie et si pour tout groupe</u> A <u>on pose</u> :

$$(5) \qquad S_K^*(A) = \bigcap_{g\in S(A,K)} \ker g \qquad \text{on a}$$

$$S^*(A) = S_K^*(A).$$

La remarque qui suit la proposition 1-5 se dualise aussi de la manière suivante :

Soit S un sous-groupe fonctoriel et $\psi_1(S) = S^*(-,-)$ le bi-sous-foncteur additif du foncteur Hom qu'on lui associe par la proposition 1-6.
Pour tout couple de groupes A et B on a :

$$S^*(A,B) \cong \mathrm{Hom}(A/S(A),B)$$

PROPOSITION 1-8 - <u>On a les relations suivantes</u> :
(i) <u>pour un sous-groupe fonctoriel</u> S : $\psi_2\ \psi_1(S) = S$.
(ii) <u>pour un bi-sous-foncteur additif</u> $S(-,-)$ <u>du foncteur</u> Hom :

$$S(-,-) \subseteq \psi_1\ \psi_2[S(-,-)]$$

Nous pouvons donc retenir de ce qui précède qu'à tout sous-groupe fonctoriel, on peut associer de deux manières, "duales" l'une de l'autre, deux bi-sous-foncteurs additifs du foncteur Hom et qu'inversement, à tout bi-sous-foncteur additif du foncteur Hom, on peut associer de deux manières "duales" aussi l'une de l'autre deux sous-groupes fonctoriels. De plus les propositions 1-5 et 1-8 nous montrent que la composition des correspondances ainsi définies conservent le sous-groupe fonctoriel initial, mais il n'en est pas de même en ce qui concerne le bi-sous-foncteur additif du foncteur Hom qui se trouve dans chacun des deux cas inclus dans les bi-sous-foncteurs additifs du foncteur Hom obtenus par la composition des correspondances ϕ_1 et ϕ_2 d'une part ψ_1 et ψ_2 d'autre part. La constatation de ce fait peut conduire à la définition de deux notions "duales" de fermeture pour le bi-sous-foncteur additif du foncteur Hom initial.
Les définitions qui suivent nous permettront d'énoncer les théorèmes principaux de cette première partie.

PROPOSITION 1-9 - <u>Un bi-sous-foncteur additif</u> $S(-,-)$ <u>du bi-foncteur Hom est co-exact à gauche si pour tout groupe</u> X <u>et pour toute suite exacte courte</u>

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad \underline{\text{la suite induite}}$$

$$0 \longrightarrow S(X,A) \longrightarrow S(X,B) \longrightarrow S(X,C) \quad \underline{\text{est exacte}}.$$

DEFINITION 1-10 - <u>Un bi-sous-foncteur additif</u> $S(-,-)$ <u>du bi-foncteur</u> Hom <u>est contra-exact à gauche si pour tout groupe</u> X <u>et pour toute suite exacte</u>

$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ <u>la suite induite</u>

$0 \longrightarrow S(C,X) \longrightarrow S(B,X) \longrightarrow S(A,X)$ <u>est exacte</u>.

Si un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom est à la fois co-exact à gauche et contra-exact à gauche nous dirons qu'il est bi-exact à gauche.

<u>THEOREME</u> 1-11 -

(i) <u>Soit</u> S <u>un sous-groupe fonctoriel</u>, $\phi_1(S) = S(-,-)$ <u>le bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur</u> Hom <u>associé à</u> S <u>par la correspondance</u> ϕ_1. <u>Si on a</u> $S(A) = A \cap S(B)$ <u>chaque fois que</u> $A \subset B$ <u>alors</u> $\phi_1(S)$ <u>est co-exact à gauche</u>.

(ii) <u>Soit</u> $S(-,-)$ <u>un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur</u> Hom, $\phi_2[S(-,-)] = S$ <u>le sous-groupe fonctoriel associé à</u> $S(-,-)$ <u>par la correspondance</u> ϕ_2. <u>Si</u> $S(-,-)$ <u>est co-exact à gauche et si l'injection canonique</u> $A \cap S(B) \rightarrowtail B$ <u>appartient à</u> $S(A \cap S(B),B)$ <u>chaque fois que</u> $A \subset B$ <u>alors</u> $S(A) = A \cap S(B)$.

Preuve : (i) Supposons que $A \subset B$ et considérons la suite exacte courte

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} B/A \longrightarrow 0$$

Par hypothèse nous avons $S(A) = A \cap S(B)$.
Soit la suite induite

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow S(X,A) \xrightarrow{\chi^*} S(X,B) \xrightarrow{\sigma^*} S(X,B/A)$$

dans laquelle $S(-,-) = \phi_1(S)$ et X est un groupe quelconque.
Soit $f \in \ker \sigma^*$; il est équivalent d'écrire que $\sigma f = 0$ et que $f(X) \subseteq S(B)$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,B/A)$$

on déduit l'existence de $g \in \mathrm{Hom}(X,A)$, g unique tel que $\chi g = f$.
On a $g(X) = f(X) \subseteq S(B)$

de $g(X) \subseteq A$ et $\chi g(X) \subseteq S(B)$ on déduit, moyennant l'identification entre A et $\chi(A)$:

$g(X) \subseteq A \cap S(B) = S(A)$ donc $g \in S(X,A)$ et la suite (2) est exacte; autrement dit $\phi_1(S) = S(-,-)$ est co-exact à gauche.

(ii) D'après les hypothèses, pour toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} B/A \longrightarrow 0$$

et pour tout groupe X on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow S(X,A) \longrightarrow S(X,B) \longrightarrow S(X,B/A)$$

En particulier pour $X = A \cap S(B)$ avec $S = \phi_2\,[S(-,-)]$ on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow S(A \cap S(B),\, A) \xrightarrow{\chi^*} S(A \cap S(B),\, B) \xrightarrow{\sigma^*} S(A \cap S(B),\, B/A)$$

Puisque par hypothèse l'injection canonique $f : A \cap S(B) \rightarrowtail B$ appartient à $S(A \cap S(B),\, B)$ et puisque $A \cap S(B) \subseteq A$ entraîne que $\sigma f = 0$ on a $f \in \ker \sigma^*$. Donc il existe $g \in S(A \cap S(B), A)$, g unique tel que $f = \chi\, g$; f et χ étant des monismes il s'ensuit que g est aussi un monisme et est donc le prolongement naturel de $A \cap S(B)$ dans A. On a donc $A \cap S(B) \subseteq S(A)$ par définition de $S(A)$. Comme on a toujours $S(A) \subseteq A \cap S(B)$ on a $S(A) = A \cap S(B)$.

THEOREME 1-12 - <u>Soit</u> S <u>un sous-groupe fonctoriel ; une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $S(A) = A \cap S(B)$ <u>chaque fois que</u> $A \subset B$ <u>est que</u> $\phi_1(S) = S(-,-)$ <u>soit co-exact à gauche</u>.

Il suffit en effet d'utiliser le théorème précédent compte tenu du fait que si un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom est de la forme $\phi_1(S) = S(-,-)$ alors l'injection canonique $A \cap S(B) \rightarrowtail S(B)$ appartient à $S(A \cap S(B), B)$ puisque $\phi_2[\phi_1(S)] = S$ et par définition de $\phi_1(S)$.

DEFINITION 1-13 - <u>On appelle sous-groupe pur fonctoriel un sous-groupe fonctoriel</u> S <u>tel que</u> $S(A) = A \cap S(B)$ <u>chaque fois que</u> $A \subset B$.

Remarques : 1) Un sous-groupe pur fonctoriel est un socle c'est-à-dire vérifie $S^2 = S$ (voir [3] ou [14]).

En effet $S(A) \subseteq A$ entraîne que $S[S(A)] = S(A) \cap S(A) = S(A)$.

2) Les correspondances ϕ_1 et ϕ_2 ne sont pas inverses l'une de l'autre lorsqu'on se limite aux sous-groupes purs fonctoriels d'une part et aux bi-sous-foncteurs additifs du bi-foncteur Hom co-exacts à gauche d'autre part. En effet, considérons l'exemple suivant :

Pour tout couple de groupes A,B prenons $S(A,B) = t\,\mathrm{Hom}(A,B)$, sous-groupe maximal de torsion de Hom(A,B). Il est clair que $\phi_2[S(-,-)] = t$ et que $\phi_1(t) = \overline{S}(-,-)$ est tel que $\overline{S}(A,B) \cong \mathrm{Hom}(A,tB)$. Si nous prenons à nouveau $A = B = C(p^\infty)$ nous avons $t\,\mathrm{Hom}(A,B) = 0$ car A étant divisible Hom(A,B) est sans torsion et $\mathrm{Hom}(A,tB) = \mathrm{Hom}(C(p^\infty),\, C(p^\infty)) \cong P$ groupe additif des entiers p-adiques. Or le bi-sous-foncteur additif $t\,\mathrm{Hom}(-,-)$ est co-exact à gauche et on a bien $t\,A = A \cap t\,B$ chaque fois que $A \subset B$.

En utilisant la "dualité" dont il a été question précédemment nous obtenons :

THEOREME 1-14

(i) Soit S un sous-groupe fonctoriel, $\psi_1(S) = S^*(-,-)$ le bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom associé à S par la correspondance ψ_1. Si pour tout épisme $\sigma : B \twoheadrightarrow C$ on a $\sigma[S(B)] = S(C)$ alors $\psi_1(S)$ est contra-exact à gauche.

(ii) Soit $S(-,-)$ un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom, $\psi_2[S(-,-)] = S^*$ le sous-groupe fonctoriel associé à $S(-,-)$ par la correspondance ψ_2. Si $S(-,-)$ est contra-exact à gauche et si l'épisme $B \twoheadrightarrow B/A+S(B)$ appartient à $S(B,B/A+S(B))$ pour tout épisme $\sigma : B \twoheadrightarrow C$ de noyau A alors $\sigma[S(B)] = S(C)$.

THEOREME 1-15 - Soit S un sous-groupe fonctoriel ; une condition nécessaire et suffisante pour que pour tout épisme $\sigma : B \twoheadrightarrow C$ on ait $\sigma[S(B)] = S(C)$ est que $\psi_1(S) = S^*(-,-)$ soit contra-exact à gauche.

DEFINITION 1-16 - On appelle sous-groupe copur fonctoriel un sous-groupe fonctoriel S tel que pour tout épisme $\sigma : B \twoheadrightarrow C$ on ait $\sigma[S(B)] = S(C)$.

Remarque : Un sous-groupe copur fonctoriel R est un radical, c'est-à-dire que pour tout groupe G on a $R(G/R(G)) = 0$ (voir [3] ou [14]).

Applications à la catégorie des groupes abéliens

D. Cook a montré dans [4] p. 25 que, si $S(-,-)$ est un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom co-exact à gauche, alors on peut associer à tout groupe A un sous-groupe $S(A)$ qu'il définit de la manière suivante :
Etant donné l'isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}(Z,A) \cong A$ qui a tout homomorphisme $f \in \mathrm{Hom}(Z,A)$ fait correspondre l'élément $a \in A$ tel que $f(1) = a$ on associe à tout groupe A le sous-groupe $S(A)$ constitué par les $a \in A$ si et seulement si $f \in S(Z,A)$ et $f(1) = a$.

Il est clair que cette définition du sous-groupe $S(A)$ coïncide avec celui que nous avons défini au moyen de la correspondance ϕ_2 dans la proposition 1-4, puisque Z est un générateur de la catégorie des groupes abéliens. Donc dans cette catégorie la condition restrictive du théorème 1-11 (ii) n'intervient pas, d'où : si $S(-,-)$ est un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom, $\phi_2[S(-,-)] = S$ est un sous-groupe pur fonctoriel.

D'autre part D. Cook montre aussi que $S(A,B) \cong S(A,S(B))$ (théorème 1 p. 25) et nous avons vu que, si on pose $\phi_1 \phi_2 [S(-,-)] = \overline{S}(A,B)$, nous avions $\overline{S}(A,B) \cong \mathrm{Hom}(A,S(B))$. $\overline{S}(-,-)$ est co-exact à gauche puisque $\phi_2[S(-,-)] = S$ est un sous-groupe pur fonctoriel. On a donc le théorème :

THEOREME 1-17 - Dans la catégorie des groupes abéliens soit $S(-,-)$ un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom co-exact à gauche. On a les propositions suivantes :

(i) $\phi_2[S(-,-)] = S$ est un sous-groupe pur fonctoriel.

(ii) pour tout couple de groupes A et B on a $S(A,B) \cong S(A,S(B))$.

(iii) $\phi_1\ \phi_2\ [S(-,-)] = \overline{S}(-,-)$ est un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom co-exact à gauche et pour tout couple de groupes A et B on a $\overline{S}(A,B) \cong Hom(A,S(B))$.

L'intérêt de ce théorème réside dans le fait que D. Cook a montré dans [4], que tout bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom co-exact à gauche ou contra-exact à gauche permet de définir une notion de pureté qui conduit à une relativisation. Il s'ensuit :

1° - qu'à tout sous-groupe pur (resp. copur) fonctoriel, on peut faire correspondre une relativisation par l'intermédiaire du bi-sous-foncteur additif associé co-exact à gauche (resp. contra-exact à gauche) par la correspondance ϕ_1(resp. ψ_1).

2° - que toute relativisation définie dans la catégorie des groupes abéliens par un bi-sous-foncteur additif $S(-,-)$ du bi-foncteur Hom co-exact à gauche permet de définir une nouvelle relativisation par l'intermédiaire du nouveau bi-sous-foncteur additif $\overline{S}(-,-) = \phi_1\ \phi_2[S(-,-)]$ du bi-foncteur Hom co-exact à gauche.

En outre, nous verrons dans le chapitre III qu'on peut définir d'une manière directe, à partir d'un sous-groupe pur (resp. copur) fonctoriel une nouvelle notion de pureté qui conduit aussi à une relativisation et nous comparerons ces différentes notions.

- CHAPITRE II -

Sous-groupes fonctoriels et classes de groupes

D. Cook [4] a montré, en particulier, qu'à toute classe $\mathcal{S}$ de groupes fermée pour somme directe finie et pour sous-groupes, on peut associer un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom de la manière suivante :

DEFINITION 2-1 - <u>Soit $\mathcal{S}$ une classe de groupes fermée pour somme directe finie et pour sous-groupe. Pour chaque paire de groupes</u> A <u>et</u> B <u>on définit</u> :

$S_{\mathcal{S}}(A,B) = \{f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ <u>tels qu'il existe</u> $T \in \mathcal{S}$ <u>tel que</u> f <u>se factorise par</u> $T\}$.

Il est montré dans la proposition 3 p. 14 que $S_{\mathcal{S}}(-,-)$ est un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur Hom co-exact à gauche. En outre si $\mathcal{S}'$ est une classe de groupes fermée pour somme directe finie et pour quotients, $S_{\mathcal{S}'}(-,-)$ est un bi-foncteur additif du bi-foncteur Hom contra-exact à gauche.

D'autre part, étant donné un sous-groupe pur S (resp. copur R) fonctoriel, on peut lui associer la classe $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}^*$) de groupes G tels que $S(G) = G$ (resp. $R(G) = 0$).

Nous appellerons classe additive fortement complète une classe de groupes fermée pour sous-groupes, quotients et sommes directes quelconques. Ces classes de groupes sont notées S C A C (strongly complète additive class) dans [4] et nous utiliserons la même notation.

PROPOSITION 2-2 - <u>Soient</u> S <u>un sous-groupe pur fonctoriel,</u> $\mathcal{S}$ <u>la classe des groupes</u> G <u>tels que</u> $S(G) = G$, R <u>un sous-groupe copur fonctoriel,</u> $\mathcal{S}^*$ <u>la classe des groupes</u> H <u>tels que</u> $R(H) = 0$; <u>les classes</u> $\mathcal{S}$ <u>et</u> $\mathcal{S}^*$ <u>sont des S C A C</u>.

Rappelons qu'un sous-groupe fonctoriel quelconque commute avec les produits directs ([3] corollaire 1-4) ; donc si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$ est une famille de groupes telle que $G_\alpha \in \mathcal{S}$ (resp. $G_\alpha \in \mathcal{S}^*$) pour tout $\alpha \in I$ on a :

$$S(\bigoplus_{\alpha \in I} G_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in J} S(G_\alpha) \quad [\text{resp. } R(\bigoplus_{\alpha \in I} G_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in J} R(G_\alpha)]$$

d'où

$$S(\bigoplus_{\alpha \in I} G_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in J} G_\alpha \quad [\text{resp. } R(\bigoplus_{\alpha \in I} G_\alpha) = 0]$$

donc les classes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^*$ sont fermées pour sommes directes quelconques.

Maintenant si S est un sous-groupe pur fonctoriel, soit $G \in \mathcal{S}$ et H un sous-groupe de G. On a $S(H) = H \cap S(G) = H \cap G = H$ donc $H \in \mathcal{S}$.

Si R est un sous-groupe copur fonctoriel, soit $G^* \in \mathcal{S}^*$ et H^* un sous-groupe de G^*. Il est évident que $R(G^*) = 0$ entraîne $R(H^*) = 0$.

Donc les classes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^*$ sont fermées pour sous-groupe. Enfin soit $G \in \mathcal{S}$ et un épisme $\sigma : G \twoheadrightarrow G'$; on a :

$$G' = \sigma(G) = \sigma(S(G)) \subseteq S(G') \subseteq G' \text{ d'où } G' = S(G') \text{ et } G' \in \mathcal{S}.$$

Soit $G^* \in \mathcal{S}^*$ et un épisme $\sigma : G^* \twoheadrightarrow G'$; on a :

$$\sigma(R(G^*)) = R(G') = 0 \text{ donc } G' \in \mathcal{S}^*.$$

Donc les classes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^*$ sont fermées pour quotient.

Considérons maintenant la suite de correspondances suivante :

$$(5) \quad \mathcal{S} \longrightarrow S_{\mathcal{S}}(-,-) \xrightarrow{\phi_2} S_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow S_{\mathcal{S}'}(-,-) \xrightarrow{\phi_2} S_{\mathcal{S}'} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

dans laquelle $\mathcal{S}$ est une classe de groupes fermée pour somme directe finie et sous-groupe, $S_{\mathcal{S}}(-,-)$ le bi-sous-foncteur additif co-exact à gauche du bi-foncteur Hom que l'on peut associer à $\mathcal{S}$ par la définition 2-1, $S_{\mathcal{S}}$ le sous-groupe pur fonctoriel que l'on associe à $S_{\mathcal{S}}(-,-)$ par la correspondance ϕ_2, $\mathcal{S}'$ la S C A C associée à $S_{\mathcal{S}}$ (proposition 2-2), $S_{\mathcal{S}'}(-,-)$ le bi-sous-foncteur additif bi-exact à gauche que l'on peut associer à $\mathcal{S}'$ de la même manière que l'on a associé $S_{\mathcal{S}}(-,-)$ à $\mathcal{S}$, $S_{\mathcal{S}'}$ le sous-groupe pur fonctoriel associé à $S_{\mathcal{S}'}(-,-)$ par la correspondance ϕ_2, etc...

On peut grouper par trois les éléments de cette suite, chaque groupe de trois débutant par une S C A C, sauf le premier. Nous allons montrer que cette suite est stationnaire à partir d'un certain rang et nous allons étudier les rapports qui existent entre ses éléments comparables : classes de groupes, bi-sous-foncteurs additifs du bi-foncteur Hom co-exacts à gauche ou bi-exacts, sous-groupes purs fonctoriels.

Nous démontrerons tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 2-3 - <u>Soient</u> S <u>un sous-groupe pur fonctoriel</u>, $\phi_1(S) = S(-,-)$, $\mathcal{S}$ <u>la S C A C associée à</u> S <u>et</u> $S_{\mathcal{S}}(-,-)$ <u>le bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur</u> Hom <u>bi-exact à gauche associé à</u> $\mathcal{S}$ <u>par la définition 2-1</u> ; <u>pour tout couple de groupes</u> A <u>et</u> B <u>on a</u> $S(A,B) = S_{\mathcal{S}}(A,B)$.

Soit $f \in S(A,B)$; celà équivaut par définition à $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ et $f(A) \subseteq S(B)$. Remarquons que $S(B) \in \mathcal{S}$ puisque S est en particulier un socle. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} S(B) \arrow[r, tail, "\chi"] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & B/S(B) \\ & A \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "\alpha"] & \end{tikzcd}$$

Puisque $f(A) \subseteq S(B)$ on a $\sigma f = 0$ d'où l'on déduit l'existence de $\alpha : A \longrightarrow S(B)$, α unique tel que $f = \chi\alpha$. Donc f se factorise par $S(B) \in \mathcal{S}$ d'où $f \in S_{\mathcal{S}}(A,B)$.

Réciproquement soit $f \in S_{\mathcal{S}}(A,B)$; par définition il existe $T \in \mathcal{S}$ tel que $f = \alpha\ \beta$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dr, "\alpha"] & \\ A \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr] & & B \end{tikzcd}$$

On a $f(A) = \alpha\beta(A) \subseteq \alpha(T) = \alpha[S(T)] \subseteq S(B)$ donc $f \in S(A,B)$ et on a bien $S(A,B) = S_{\mathcal{S}}(A,B)$ pour tout couple A et B de groupes.

COROLLAIRE 2-4 - <u>Un bi-sous-foncteur additif du bi-foncteur</u> Hom <u>de la forme</u> $\phi_1(S)$ <u>est bi-exact à gauche</u>.

PROPOSITION 2-5 - <u>Dans la suite (5) on a les relations suivantes</u> :

(i) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$

(ii) $S_{\mathcal{S}}(A,B) \subseteq S_{\mathcal{S}'}(A,B)$ <u>pour tout couple de groupes</u> A <u>et</u> B.

(iii) $S_{\mathcal{S}'}(-,-) = \phi_1(S_{\mathcal{S}})$ <u>et est bi-exact à gauche</u>.

(iv) $S_{\mathcal{S}}(G) = S_{\mathcal{S}'}(G)$ <u>pour tout groupe</u> G.

Preuves : (i) Soit $T \in \mathcal{S}$. On a $S_{\mathcal{S}}(T) \cong S_{\mathcal{S}}(Z,T) = \mathrm{Hom}(Z,T)$ car tout $f \in \mathrm{Hom}(Z,T)$ se factorise par T. puisque $f = 1_T.f$. Comme $\mathrm{Hom}(Z,T) \cong T$ on a bien $S_{\mathcal{S}}(T) = T$ et $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$.

(ii) On déduit immédiatement de (i) que $S\ (A,B) \subseteq S_{\mathcal{S}'}(A,B)$ pour tout couple de groupes A et B.

(iii) D'après le lemme précédent et puisque $\mathcal{S}'$ est une S C A C on a $S_{\mathcal{S}'}(-,-) = \phi_1(S_{\mathcal{S}}) = \phi_1\phi_2[S_{\mathcal{S}}(-,-)]$ et $\phi_1(S_{\mathcal{S}})$ est bi-exact à gauche.

(iv) $S_{\mathcal{S}'} = \phi_2[S\ (-,-)] = \phi_2\phi_1\phi_2\ [S_{\mathcal{S}}(-,-)] = \phi_2\phi_1(S_{\mathcal{S}}) = S_{\mathcal{S}}$ d'après la proposition 1-5.

La suite (5) est donc stationnaire à partir de son cinquième terme. Elle peut donc être représentée ainsi :

$$(6)\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r] & S_{\mathcal{S}}(-,-) \arrow[r, "\phi_2"] & S_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr] & S_{\mathcal{S}'}(-,-) \arrow[r, "\phi_2"] & S_{\mathcal{S}} \\ & & & \mathcal{S}' \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Nous étudierons dans le chapitre suivant les diverses notions de pureté qui peuvent être associées à chacun de ses termes.

- CHAPITRE III -

Puretés

Relativisation associée à un sous-groupe pur fonctoriel

DEFINITION 3-1 - Soit S un sous-groupe pur fonctoriel ; on dit que la suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\chi} C \xrightarrow{\sigma} 0$ est S_2-pure si $\sigma[S(B)] = S(C)$.

Comme on le verra au chapitre V, si l'on considère un sous-groupe fonctoriel comme un foncteur de Ab dans Ab, un sous-groupe pur fonctoriel est alors un foncteur de Ab dans Ab qui est exact à gauche.

LEMME 3-2 - Pour un sous-groupe fonctoriel R et une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\sigma} C \longrightarrow 0$$

les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $0 \longrightarrow R(A) \longrightarrow R(B) \longrightarrow R(C) \longrightarrow 0$ est une suite exacte.

(ii) $A \cap R(B) = R(A)$ et $\sigma[R(B)] = R(C)$.

(iii) $0 \longrightarrow A/R(A) \longrightarrow B/R(B) \longrightarrow C/R(C) \longrightarrow 0$ est une suite exacte

La preuve cyclique est élémentaire. Ce lemme constitue d'ailleurs un cas particulier du lemme 2p. 34 de [4]. On en déduit immédiatement que si une suite est S_2-pure alors les suites $0 \longrightarrow S(A) \longrightarrow S(B) \longrightarrow S(C) \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow A/S(A) \longrightarrow B/S(B) \longrightarrow C/S(C) \longrightarrow 0$ sont exactes.
Réciproquement si S est un sous-groupe pur fonctoriel et si nous considérons les suites $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\sigma} C \longrightarrow 0$ telles que la suite induite $0 \longrightarrow S(A) \longrightarrow S(B) \longrightarrow S(C) \longrightarrow 0$ soit exacte alors les suites considérées sont S_2-pures. D'où la définition suivante équivalente à la définition 3-1.

DEFINITION 3-3 - Soit S un sous-groupe pur fonctoriel ; la suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\sigma} C \longrightarrow 0$ est S_2-pure si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

(i) $\sigma[S(B)] = S(C)$.

(ii) la suite $0 \longrightarrow S(A) \longrightarrow S(B) \longrightarrow S(C) \longrightarrow 0$ est exacte.

(iii) la suite $0 \longrightarrow A/S(A) \longrightarrow B/S(B) \longrightarrow C/S(C) \longrightarrow 0$ est exacte.

THEOREME 3-4 - La classe des suites exactes S_2-pures est une classe propre.

Appelons E la classe des suites exactes S_2-pures. Il faut vérifier pour E les six axiomes des classes propres rappelés dans l'introduction. Dans tout ce qui suit, nous supposons que nous avons les inclusions $A \subset B \subset C$.

(i) résulte du fait évident que si $\alpha : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme alors $S(\alpha) : S(A) \longrightarrow S(B)$ est encore un isomorphisme, $S(\alpha)$ désignant la restriction de α à $S(A)$.

(ii) est une conséquence de la propriété de commutation de S aux sommes directes finies ; la suite exacte $A \rightarrowtail A \oplus C \twoheadrightarrow C$ induit la suite exacte $S(A) \rightarrowtail S(A) \oplus S(C) \twoheadrightarrow S(C)$.

(iii) Supposons que la suite exacte $A \overset{\chi_1}{\rightarrowtail} C \overset{\sigma_1}{\twoheadrightarrow} C/A$ soit dans E; il faut montrer que la suite exacte $A \overset{\chi}{\rightarrowtail} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} B/A$ est dans E. Considérons le diagramme commutatif suivant, dans lequel la première ligne est exacte

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r, tail, "S(\chi_1)"] & S(C) \arrow[r, two heads, "S(\sigma_1)"] & S(C/A) \\
S(A) \arrow[u, equal] \arrow[r, tail, "S(\chi)"] & S(B) \arrow[u, hook] \arrow[r, "S(\sigma)"] & S(B/A) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Soit $b + A \in S(B/A)$; on peut écrire $b + A = c + A$ avec $c \in S(C)$ en vertu de l'exactitude de la première ligne. On peut donc supposer que $b \in S(C)$ d'où $b \in B \cap S(C) = S(B)$ et la deuxième ligne est donc exacte.

(iv) Supposons que la suite exacte $B \overset{\chi_2}{\rightarrowtail} C \overset{\sigma_2}{\twoheadrightarrow} C/B$ soit dans E ; il faut montrer que la suite exacte $B/A \overset{\lambda}{\rightarrowtail} C/A \overset{\mu}{\twoheadrightarrow} C/B$ est dans E. Considérons le diagramme commutatif suivant dans lequel la première ligne est exacte

$$\begin{tikzcd}
S(B) \arrow[r, tail, "S(\chi_2)"] \arrow[d, "S(\sigma)"] & S(C) \arrow[r, two heads, "S(\sigma_2)"] \arrow[d, "S(\sigma_1)"] & S(C/B) \arrow[d, equal] \\
S(B/A) \arrow[r, dash, "S(\lambda)"] & S(C/A) \arrow[r, dash, "S(\mu)"] & S(C/B)
\end{tikzcd}$$

On a : $S(\sigma_2) = S(\mu)\, S(\sigma_1)$ et, puisque $S(\sigma_2)$ est un épisme, $S(\mu)$ aussi et la deuxième ligne est exacte.

(v) Supposons que les suites exactes $A \overset{\chi}{\rightarrowtail} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} B/A$ et $B \overset{\chi_2}{\rightarrowtail} C \overset{\sigma_2}{\twoheadrightarrow} C/B$ soient dans E. Il faut montrer que la suite exacte $A \overset{\chi_1}{\rightarrowtail} C \overset{\sigma_1}{\twoheadrightarrow} C/A$ est dans E.

Considérons le diagramme commutatif suivant dans lequel la première ligne et la deuxième colonne sont exactes

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r, tail, "S(\chi)"] \arrow[d, equal] & S(B) \arrow[r, two heads, "S(\sigma)"] \arrow[d, tail, "S(\chi_2)"] & S(B/A) \arrow[d, tail, "S(\lambda)"] \\
S(A) \arrow[r, tail, "S(\chi_1)"] \arrow[d] & S(C) \arrow[r, "S(\sigma_1)"] \arrow[d, "S(\sigma_2)"] & S(C/A) \arrow[d, "S(\mu)"] \\
0 \arrow[r, tail] & S(C/B) \arrow[r, equal] & S(C/B)
\end{tikzcd}$$

Remarquons que $S(\mu)$ est un épisme pour la même raison que dans le (iv) ; la troisième colonne est donc exacte.

Soit $c + A \in S(C/A)$; $S(\mu)(c+A) \in S(C/B)$ donc il existe $c' \in S(C)$ tel que $S(\sigma_2)(c') = S(\mu)(c+A)$ d'où $S(\mu)\, S(\sigma_1)(c') = S(\mu)(c+A)$ et $S(\mu)[S(\sigma_1)(c')-c+A] = 0$ donc $S(\sigma_1)(c') - c + A \in S(\lambda)[S(B/A)]$. Il existe donc $b \in S(B)$ tel que $S(\lambda)S(\sigma)(b) = S(\sigma_1)(c') - c + A$. Posons $\alpha = c' - S(\chi_2)(b)$; on a $\alpha \in S(C)$ et

$$S(\sigma_1)(\alpha) = S(\sigma_1)(c') - S(\sigma_1)\, S(\chi_2)(b) = S(\sigma_1)(c') - S(\lambda)\, S(\sigma)(b) = c + A$$

Donc la deuxième ligne est exacte.

(vi) Supposons que les suites exactes $A \overset{\chi_1}{\rightarrowtail} C \overset{\sigma_1}{\twoheadrightarrow} C/A$ et $B/A \rightarrowtail C/A \twoheadrightarrow C/B$ soient dans E ; il faut montrer que la suite exacte $B \overset{\chi_2}{\rightarrowtail} C \overset{\sigma_2}{\twoheadrightarrow} C/B$ est dans E. Considérons le diagramme commutatif suivant dans lequel la deuxième ligne et la troisième colonne sont exactes

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & S(B) \arrow[r] \arrow[d, tail] & S(B/A) \arrow[d, tail] \\
S(A) \arrow[r, tail] \arrow[d] & S(C) \arrow[r, two heads, "S(\sigma_1)"] \arrow[d, "S(\sigma_2)"] & S(C/A) \arrow[d, two heads, "S(\mu)"] \\
0 \arrow[r, tail] & S(C/B) \arrow[r, equal] & S(C/B)
\end{tikzcd}$$

$S(\sigma_2) = S(\mu)\, S(\sigma_1)$ est alors un épisme et la deuxième colonne est exacte.

- DUALITE -

DEFINITION 3-5 - <u>Soit</u> S^* <u>un sous-groupe copur fonctoriel ; on dit que la suite exacte</u> $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ <u>est</u> S_2^*<u>-pure si</u> $S^*(A) = A \cap S^*(B)$.

Remarquons que le lemme qui suit la définition 3-1 est autodual relativement à la dualité dont il a été question. D'où :

DEFINITION 3-6 - Soit S^* un sous-groupe copur fonctoriel ; on dit que la suite $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ est S_2^*-pure si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

(i) $S^*(A) = A \cap S^*(B)$

(ii) la suite $0 \longrightarrow S^*(A) \longrightarrow S^*(B) \longrightarrow S^*(C) \longrightarrow 0$ est exacte.

(iii) la suite $0 \longrightarrow A/S^*(A) \longrightarrow B/S^*(B) \longrightarrow C/S^*(C) \longrightarrow 0$ est exacte.

On démontrerait de même que :

THEOREME 3-7 - La classe des suites exactes S_2^*-pures est une classe propre.

- EXEMPLES -

1° - n-pureté : Rappelons qu'une suite exacte $A \rightarrowtail B \xrightarrow{\sigma} C$ est n-pure si $n A = A \cap n B$ où n est un entier fixe.
Posons pour tout groupe G, $S^*(G) = n G$. Il est facile de vérifier que S^* est un sous-groupe copur fonctoriel. Donc la n-pureté est un cas particulier de la S_1^*-pureté.

2° - La n-pureté est aussi un cas particulier de la S_2-pureté. En effet il est bien connu qu'une suite $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ est n-pure si et seulement si on a la suite exacte $A[n] \rightarrowtail B[n] \twoheadrightarrow C[n]$.
Posons pour tout groupe G, $S(G) = G[n]$. Il est facile de vérifier que S est un sous-groupe pur fonctoriel.

3° - On pose $S(G) = tG$ sous-groupe maximal de torsion de G. Le sous-groupe fonctoriel ainsi défini est un sous-groupe pur fonctoriel car $tA = A \cap tB$ si $A \subset B$.
Donc la classe des suites exactes $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ telle que la suite $tA \rightarrowtail tB \twoheadrightarrow tC$ soit exacte est une classe propre. Cette classe contient en particulier la classe des suites exactes $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ telles que la suite $tA \rightarrowtail tB \twoheadrightarrow tC$ soit exacte et scindée qui est une classe propre. Les injectifs et les projectifs de cette relativisation sont bien connus et l'on sait que $\mathrm{Pext}_E(C,A) = d\,\mathrm{Ext}(C,A)$, le sous-groupe divisible de $\mathrm{Ext}(C,A)$.

Relativisation associée à une famille de sous-groupes purs fonctoriels

DEFINITION 3-8 - Soit $(S_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes purs fonctoriels.
On dit qu'une suite exacte $A \overset{\chi}{\rightarrowtail} B \xrightarrow{\sigma} C$ est S_2-pure par rapport à la famille $(S_i)_{i\in I}$ si, pour tout $i \in I$, l'une des conditions suivantes est réalisée :

(i) $\sigma[S_i(B)] = S_i(C)$.
(ii) la suite $S_i(A) \rightarrowtail S_i(B) \twoheadrightarrow S_i(C)$ est exacte.
(iii) la suite $A/S_i(A) \rightarrowtail B/S_i(B) \twoheadrightarrow C/S_i(C)$ est exacte.

Il est clair que les axiomes de classes propres sont vérifiés pour la classe des suites S_2-pures par rapport à la famille $(S_i)_{i\in I}$.

Exemple : La pureté ordinaire peut s'interpréter comme S_2-pureté par rapport à la famille $(S_n)_{n\in N}$ où S_n est défini par : $S_n(G) = G[n]$ pour tout $n \geq 0$ et pour tout groupe G.

En effet, il est bien connu que, pour que la suite $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ soit pure exacte il faut et il suffit que pour tout $n \geqslant 0$ on ait la suite exacte

$$A[n] \rightarrowtail B[n] \twoheadrightarrow C[n]$$

Relativisation associée à une famille de sous-groupes copurs fonctoriels

DEFINITION 3-9 - Soit $(S_i^*)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes copurs fonctoriels. On dit qu'une suite exacte $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ est S_2^*-pure par rapport à la famille $(S_i^*)_{i\in I}$ si, pour tout $i \in I$, l'une des conditions suivantes est réalisée :
(i) $S_i^*(A) = A \cap S_i^*(B)$.
(ii) la suite $S_i^*(A) \rightarrowtail S_i^*(B) \twoheadrightarrow S_i^*(C)$ est exacte.
(iii) la suite $A/S_i^*(A) \rightarrowtail B/S_i^*(B) \twoheadrightarrow C/S_i^*(C)$ est exacte.

Exemples : 1° - La pureté ordinaire peut encore s'interpréter comme S_2^*-pureté par rapport à la famille $(S_n^*)_{n\in N}$ où S_n est défini par $S_n^*(G) = n\,G$ pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout G.

En effet, il est bien connu que pour que la suite $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ soit pure exacte il faut et il suffit que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait la suite exacte $nA \rightarrowtail nB \twoheadrightarrow nC$.

2° - p^n Ext. D'après le théorème 1 p. 72 de [17] une suite exacte $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ représente un élément de $p^n\,\mathrm{Ext}(C,A)$ si et seulement si $A \cap p^mB = p^mA$ pour $m \leqslant n$. Il s'agit donc dans ce cas d'une S_2^*-pureté par rapport à la famille $(S_m^*)_{m\leqslant n}$ où S_m^* est défini par $S_m^*(G) = p^m\,G$ pour tout m tel que $1 \leqslant m \leqslant n$ et pour tout groupe G.

3° - p^ω Ext. On en déduit aisément que les suites exactes de $p^\omega \operatorname{Ext}(C,A)$ sont les suites S_2^*-pures par rapport à la famille $(S_n^*)_{n>0}$ avec $S_n^*(G) = p^n G$, pour tout n et pour tout G.

Comparaison des puretés dans la catégorie des groupes abéliens

Il est bien connu que, si $\mathcal{S}$ est une classe de groupes quelconques, la classe E des suites exactes $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ pour lesquelles la suite $\operatorname{Hom}(T,B) \longrightarrow \operatorname{Hom}(T,C) \longrightarrow 0$ est exacte quel que soit $T \in \mathcal{S}$, est une classe propre ([2]) et que tout élément de $\mathcal{S}$ est E-projectif. Nous dirons que les suites de E sont S_o-pures et nous appellerons S_o-pureté la notion de pureté associée.

D'autre part, étant donné un bi-sous-foncteur $S(-,-)$ du bi-foncteur Hom, non nécessairement additif ni co-exact à gauche, une autre notion de pureté que nous désignerons par S_1-pureté et donnée par la définition suivante :

DEFINITION 3-10 [4] - *Soit $S(-,-)$ un bi-sous-foncteur du bi-foncteur* Hom *et $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ une suite exacte. Alors* E *est S_1-pureté si la suite induite $S(X,B) \longrightarrow S(X,C) \longrightarrow 0$ est exacte pour tout groupe* X.

Il est démontré dans [4] que si $S(-,-)$ est un bi-sous-foncteur additif co-exact à gauche alors la classe des suites S_1-pures est une classe propre.

Considérons maintenant la suite (6) de correspondances de la fin du chapitre II:

$$
(6) \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r] & S_{\mathcal{S}}(-,-) \arrow[r, "\phi_2"] & S_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr] & S_{\mathcal{S}'}(-,-) \arrow[r] & S_{\mathcal{S}} \\
& & & \mathcal{S}' \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Il est démontré dans [4] (théorème 2 p. 22) que la classe des suites S_1-pures est précisément la classe des suites pour lesquelles la classe $\mathcal{S}$ est projective. Ceci montre donc que la S_o-pureté associée à la classe $\mathcal{S}$ et la S_1-pureté associée au bi-sous-foncteur additif co-exact à gauche $S_{\mathcal{S}}(-,-)$ définissent la même classe propre. On peut donc dire que la S_o-pureté et la S_1-pureté sont équivalentes ; ce sont les notions de pureté associées aux deux premiers termes de la suite (6).

Examinons maintenant les rapports entre la S_2-pureté définie par le sous-groupe pur fonctoriel $S_{\mathcal{S}}$ et la S_1-pureté par exemple.

Soit $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ est une suite exacte S_1-pure ; on a donc pour tout groupe X la suite exacte

$$S_{\mathcal{S}}(X,B) \longrightarrow S_{\mathcal{S}}(X,C) \longrightarrow 0.$$

En particulier pour $X = Z$ et compte tenu de la remarque de la fin du chapitre I, on a donc la suite exacte $S_{\mathcal{S}'}(B) \longrightarrow S_{\mathcal{S}}(C) \longrightarrow 0$ Comme $S_{\mathcal{S}}$ est un sous-groupe pur fonctoriel on a $S_{\mathcal{S}}(A) = S_{\mathcal{S}}(B) \cap A$, et la suite $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ est donc aussi S_2-pure.

Mais la réciproque n'est pas vraie en général ; en effet il est montré dans [4] (corollaire 1 p. 26) que la S_1-pureté de la suite $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ est équivalente à "la suite induite $0 \longrightarrow S_{\mathcal{S}}(A) \longrightarrow S_{\mathcal{S}}(B) \longrightarrow S_{\mathcal{S}}(C) \longrightarrow 0$ est exacte et S_1-pure" tandis que la S_2-pureté exige seulement que cette suite soit exacte.

Si maintenant on appelle S_3-pureté la notion de pureté associée à la classe $\mathcal{S}'$ déclarée projective, et S_4-pureté la notion de pureté associée au bi-sous-foncteur additif co-exact à gauche $S_{\mathcal{S}'}(-,-)$ grâce à la définition 3-10, il est clair que ces deux notions sont équivalentes pour les mêmes raisons que S_o-pureté et S_1-pureté sont équivalentes.

Examinons maintenant les rapports entre la S_2-pureté et la S_4-pureté par exemple. La classe $\mathcal{S}'$ étant une S C A C, il est démontré dans [4] (théorème 2 p. 26) qu'une suite $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ est S_4-pure si et seulement si la suite induite $0 \longrightarrow S_{\mathcal{S}'}(A) \longrightarrow S_{\mathcal{S}'}(B) \longrightarrow S_{\mathcal{S}'}(C) \longrightarrow 0$ est exacte et scindée. Comme $S_{\mathcal{S}} = S_{\mathcal{S}'}$ (proposition 2-5) on voit que si une suite est S_4-pure elle est nécessairement S_2-pure.

On peut donc en conclure que la suite (6) de correspondances conduit à trois notions à priori différentes de pureté que l'on peut caractériser de la manière suivante :

PROPOSITION 3-11 - <u>Soit</u> $(\mathcal{E})$ $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ <u>une suite exacte</u>, $\mathcal{S}$ <u>une classe de groupes fermée pour somme directe et sous-groupes</u>, $S_{\mathcal{S}}$ <u>le sous-groupe fonctoriel associée à</u> $\mathcal{S}$ <u>par l'intermédiaire du bi-sous-foncteur additif co-exact à gauche</u> $S_{\mathcal{S}}(-,-)$, $0 \longrightarrow S_{\mathcal{S}}(A) \longrightarrow S_{\mathcal{S}}(B) \longrightarrow S_{\mathcal{S}}(C) \longrightarrow 0$ <u>la suite induite notée</u> $\partial_{S_{\mathcal{S}}} \mathcal{E}$
<u>On a</u> :

(i) <u>la suite</u> $(\mathcal{E})$ <u>est</u> S_2<u>-pure si et seulement si la suite</u> $\partial_{S_{\mathcal{S}}}(\mathcal{E})$ <u>est exacte (définition)</u>.

(ii) <u>la suite</u> $(\mathcal{E})$ <u>est</u> S_1<u>-pure (ou</u> S_o<u>-pure) si et seulement si la suite</u> $\partial_{S_{\mathcal{S}}}(\mathcal{E})$ <u>est exacte et</u> S_1<u>-pure (ou</u> S_o<u>-pure)</u>.

(iii) <u>la suite</u> $(\mathcal{E})$ <u>est</u> S_4<u>-pure (ou</u> S_3<u>-pure) si et seulement si la suite</u> $\partial_{S_{\mathcal{S}}}(\mathcal{E})$ <u>est exacte et scindée</u>.

Autrement dit si on appelle $E_1(\mathfrak{S})$ la classe des suites S_1-pures ou S_o-pures, $E_2(\mathfrak{S})$ la classe des suites S_2-pures, $E_3(\mathfrak{S})$ la classe des suites S_4-pures ou S_3-pures on a les inclusions : $E_3(\mathfrak{S}) \subseteq E_1(\mathfrak{S}) \subseteq E_2(\mathfrak{S})$ et ces trois classes sont des classes propres.

Dans le chapitre V nous verrons grâce au théorème 5-1 comment on peut mieux rendre compte de ces diverses notions, ainsi que de leur origine commune.

- CHAPITRE IV -

Les catégories (Ab,S) et (Ab,S^*)

Dans [7] , L. Fuchs considère les catégories (Ab,I) et (Ab,D) définies de la façon suivante :

Pour tout groupe $A \in Ab$, on choisit un idéal I_A dans le treillis des sous-groupes de A. Les objets de la catégorie (Ab,I) sont les couples (A,I_A) pour $A \in Ab$. Les morphismes

$$f : (A,I_A) \longrightarrow (B,I_B)$$

sont les homomorphismes de A dans B tels que $\varphi(I_A) \subseteq I_B$. Les monismes de cette catégorie sont les monismes de Ab tels que si $\chi : (A,I_A) \longrightarrow (B,I_B)$ on ait :

$$\{\chi(A') \mid A' \in I_A\} = \{B' \cap \chi(A) \mid B' \in I_B\}$$

Les épismes $\sigma : (A,I_A) \longrightarrow (B,I_B)$ sont les épismes de Ab tels que l'on ait $\sigma(I_A) = I_B$.

Les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow (A,I_A) \xrightarrow{\chi} (B,I_B) \xrightarrow{\sigma} (C,I_C) \longrightarrow 0$$

sont les suites exactes courtes de Ab

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \longrightarrow 0$$

telles que χ soit un monisme de (Ab,I) et σ un épisme de (Ab,I).
On dit qu'une telle suite est I-exacte.

De la même façon, étant donné un co-idéal D_A dans le treillis de sous-groupes de tout groupe A on définit la catégorie (Ab,D) dont les objets sont les couples (A,D_A) et les morphismes

$$g : (A,D_A) \longrightarrow (B,D_B)$$

tels que pour tout $B^* \in D_B$, il existe $A^* \in D_A$ tel que $g(A^*) \subseteq B^*$.

Les monismes et les épismes se définissent comme dans la catégorie (Ab,I) en remplaçant I_A par D_A. Il en est de même des suites exactes courtes de (Ab,D) ou suites D-exactes. On désigne par $Hom_I(A,B)$ l'ensemble de tous les morphismes $(A,I_A) \longrightarrow (B,I_B)$ dans la catégorie (Ab,I) l'addition étant celle de Ab. $Hom_I(A,B)$ est un groupe abélien que l'on peut identifier à un sous-groupe de $Hom(A,B)$. On définit d'une manière analogue le sous-groupe $Hom_D(A,B)$ de $Hom(A,B)$ dans la catégorie (Ab,D).

Soit maintenant S un sous-groupe fonctoriel ; nous définissons la catégorie (Ab,S) qui est un type particulier de catégorie (Ab,I) en prenant comme idéal dans le treillis de sous-groupe de A l'ensemble S_A de tous les sous-groupes de $S(A)$.

De même si S^* est un sous-groupe fonctoriel nous définissons la catégorie (Ab,S^*) qui est un type particulier de catégorie (Ab,D) en prenant comme co-idéal dans le treillis de sous-groupes de A l'ensemble S_A^* de tous les sous-groupes de A qui contiennent $S^*(A)$.

Il est clair que dans la catégorie (Ab,S) on a $Hom_I(A,B) = Hom(A,B)$ car S est un sous-groupe fonctoriel donc pour tout $f \in Hom(A,B)$ on a $f[S(A)] \subseteq S(B)$ d'où pour tout $A' \in S_A$, $f(A') \in S_B$. De même dans la catégorie (Ab,S^*) on a $Hom_D(A,B) = Hom(A,B)$ car pour tout $B^* \in S_B^*$ et pour tout $f \in Hom(A,B)$ il existe $A^* \in S_A^*$ tel que $f(A^*) \subseteq B^*$; il suffit en effet de prendre $A^* = f(B^*)$ et il est clair que $S^*(A) \subseteq \bar{f}^1(B^*)$.

PROPOSITION 4-1 - <u>Pour que</u> $\chi : (A,S_A) \longrightarrow (B,S_B)$ <u>soit un monisme de la catégorie</u> (Ab,S) <u>il faut et il suffit que</u> χ <u>soit un monisme de la catégorie</u> Ab <u>et que</u> $S(A) = A \cap S(B)$.

Supposons tout d'abord que $S(A) = A \cap S(B)$, les identifications sous-entendues étant justifiées par le fait que χ est par hypothèse un monisme dans la catégorie Ab.

Soit $A' \in S_A$; alors $A' \subseteq A \cap S(B)$ d'où $A' \in S_B$.

Soit $B' \in S_B$; alors $B' \cap A \subset S(B) \cap A = S(A)$ donc $B' \cap A \in S_A$.

Réciproquement, supposons que χ soit un monisme de la catégorie (Ab,S) ; alors χ est un monisme de la catégorie Ab et on a

$$\{A' \in S_A\} = \{B' \cap A \mid B' \in S_B\}$$

En particulier, prenant $A' = S(A)$ on a $S(A) = B' \cap A$ avec $B' \in S_B$.

De même, prenant $B' = S(B)$ on a $S(B) \cap A = A'$ avec $A' \in S_A$.

On a les inclusions : $A \cap S(B) = A' \subseteq S(A) = B' \cap A \subseteq S(B) \cap A$ d'où l'on tire $S(A) = A \cap S(B)$.

PROPOSITION 4-2 - <u>Pour que</u> $\sigma : (B,S_B) \longrightarrow (C,S_C)$ <u>soit un épisme de la catégorie</u> (Ab,S) <u>il faut et il suffit que</u> σ <u>soit un épisme de la catégorie</u> Ab <u>et que</u> $\sigma[S(B)] = S(C)$.

Supposons tout d'abord que σ soit un épisme de Ab tel que $\sigma[S(B)] = S(C)$.

Soit $C' \in S_C$; alors $B' = \sigma^{-1}(C') \in S_B$ et $\sigma(B') = C'$ d'où $\sigma(S_B) = S_C$.

Réciproquement, supposons que σ soit un épisme de (Ab,S) ; alors σ est un épisme de Ab et $\sigma(S_B) = S_C$.

Puisque $S(C) \in S_C$ il existe $B' \in S_B$ tel que $\sigma(B') = S(C)$ or $B' \subseteq S(B)$ d'où $S(C) = \sigma(B') \subseteq \sigma[S(B)] \subseteq S(C)$ puisque S est un sous-groupe fonctoriel. Il s'ensuit que $\sigma[S(B)] = S(C)$. On démontrerait que dans la catégorie (Ab,S^*) on a les propositions suivantes :

PROPOSITION 4-3 - <u>Pour que</u> $\chi : (A,S^*_A) \longrightarrow (B,S^*_B)$ <u>soit un monisme de la catégorie</u> $(Ab\,,S^*)$, <u>il faut et il suffit que</u> χ <u>soit un monisme de la catégorie</u> Ab <u>et que</u> $S^*(A) = A \cap S^*(B)$.

PROPOSITION 4-4 - <u>Pour que</u> $\sigma : (B,S^*_B) \longrightarrow (C,S^*_C)$ <u>soit un épisme de la catégorie</u> (Ab,S^*), <u>il faut et il suffit que</u> σ <u>soit un épisme de la catégorie</u> Ab <u>et que</u> $\sigma[S^*(B)] = S^*(C)$.

Si on appelle suites S-exactes les suites courtes de la catégorie (Ab,S) et suites S^*-exactes les suites exactes de la catégorie (Ab,S^*) on a :

THEOREME 4-5 - <u>Soit</u> S <u>un sous-groupe pur fonctoriel</u> ; <u>alors pour une suite exacte</u> (E) $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ <u>les propositions suivantes sont équivalentes</u>

(i) (E) <u>est S-exacte</u>.

(ii) (E) <u>est</u> S_2-<u>pure</u>.

THEOREME 4-6 - <u>Soit</u> S^* <u>un sous-groupe copur fonctoriel</u> ; <u>alors pour une suite exacte</u> (E) $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ <u>les propositions suivantes sont équivalentes</u>

(i) (E) <u>est</u> S^*-<u>exacte</u>.

(ii) (E) <u>est</u> S^*_2-<u>pure</u>.

Les démonstrations de ces théorèmes sont les conséquences directes des propositions 4-1, 4-2, 4-3, 4-4 et des définitions des suites S-exactes et S_2-pures d'une part, S^*-exactes et S^*_2-pures d'autre part. On en déduit :

COROLLAIRE 4-7 -

(i) <u>Si</u> S <u>est un sous-groupe pur fonctoriel alors la catégorie</u> (Ab,S) <u>est une catégorie abélienne</u>.

(ii) <u>Si</u> S^* <u>est un sous-groupe copur fonctoriel alors la catégorie</u> (Ab,S^*) <u>est une catégorie abélienne</u>.

Cela résulte du chapitre III dans lequel nous avons démontré que les classes de suites exactes S_2-pures et S_2^*-pures étaient des classes propres.

Nous allons maintenant transposer les résultats que L. Fuchs a obtenu dans [7] pour les suites exactes dans les catégories (Ab,S) et (Ab,S^*) à ces catégories abéliennes relatives (ou relativisations) définies par les classes propres des suites S_2-pures et S_2^*-pures, respectivement.

En ce qui concerne la première partie de l'article de L. Fuchs précité, les théorèmes 1 à 4 deviennent triviaux et redonnent les suites exactes bien connues des Hom et des Ext, compte tenu des remarques précédentes suivant lesquelles $Hom_I(A,B) = Hom(A,B)$ et $Hom_D(A,B) = Hom(A,B)$. Il suffit de remarquer que, de plus, tout homomorphisme de A dans B est une I-fonction ou une D-fonction suivant la catégorie considérée, donc que $Trans_I(A,B) = Trans(A,B)$ et $Trans_D(A,B)=Trans(A,B)$

Dans la 2e partie, L. Fuchs définit certains sous-groupes de Hom de la manière suivante :

Soit $A \in Ab$ et soit (B,I_B) un objet de la catégorie (Ab,I). On désigne par $Hom(A,B|I)$ l'ensemble de tous les homomorphismes $f : A \longrightarrow B$ (dans la catégorie Ab) pour lesquels $Im\ f \in I_B$.

De même pour $B \in Ab$ et (A,D_A) un objet de la catégorie (Ab,D) on désigne par $Hom(A|D,B)$ l'ensemble de tous les homomorphismes $g : A \longrightarrow B$ tels que $Ker\ g \in D_A$.

Enfin on désigne par $Hom(A|D, B|I)$ l'ensemble de tous les homomorphismes de $Hom(A,B)$ qui vérifient l'une et l'autre condition.

Les trois sous-ensembles de $Hom(A,B)$ ainsi définis sont des sous-groupes et satisfont à :

$$Hom(A,B|I) \cap Hom(A|D,B) = Hom(A|D,B|I)$$

Revenons aux catégories (Ab,S) et (Ab,S^*). Si nous considérons, suivant les notations du chapitre II, $S(-,-) = \phi_1(S)$ et $S^*(-,-) = \psi_1(S^*)$ il est clair que $Hom(A,B|I) = S(A,B)$ et $Hom(A|D,B) = S^*(A,B)$ pour tout couple de groupes A et B. Compte tenu des remarques du chapitre II on a :

$$\begin{aligned}
&Hom(A,B|I) \cong Hom(A,S(B))\\
&Hom(A|D,B) \cong Hom(A/S^*(A),B)\\
&Hom(A|D,B|I) \cong Hom(A/S^*(A), S(B))
\end{aligned}$$

Ces isomorphismes subsistent si S et S^* sont seulement des sous-groupes fonctoriels. Les théorèmes 6, 7, 8 et 9 deviennent triviaux lorsqu'on les exprime dans les catégories (Ab,S) et (Ab,S^*).

Enfin dans la 3e partie L. Fuchs définit certains sous-groupes de Ext de la manière suivante :

Soit (E) $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ une suite exacte ; étant donné un monisme $\chi' = C' \rightarrowtail C$ et un épisme $\sigma^* : A \twoheadrightarrow A/A^*$ on considère les suites exactes $E\chi'$ et $\sigma^* E$ [12]. On considère alors :

(a) $Ext(C|I,A)$ ensemble de toutes les extensions de A par C telles que $E\chi' \equiv 0$ pour tout monisme $\chi' : C' \rightarrowtail C$ avec $C' \in I_C$.

(b) $Ext(C,A|I)$ ensemble de toutes les extensions de A par C telles que $\sigma' E \equiv 0$ pour au moins un épisme $\sigma' : A \twoheadrightarrow A/A'$ avec $A' \in I_A$.

(c) $Ext(A|D,A)$ l'ensemble de toutes les extensions de A par C telles que $E\chi^* \equiv 0$ pour au moins un monisme $\chi^* : C' \rightarrowtail C$ avec $C' \in D_C$.

(d) $Ext(C,A|D)$ l'ensemble de toutes les extensions de A par C telles que $\sigma^* E \equiv 0$ pour tout épisme $\sigma^* : A \twoheadrightarrow A/A^*$ avec $A^* \in D_A$.

Ces quatre sous-ensembles sont des sous-groupes de $Ext(C,A)$. Considérons à nouveau les catégories (Ab,S) et (Ab,S^*) ; nous ne nous intéresserons qu'aux sous-groupes $Ext(C|I,A)$ que nous noterons $Ext(C|S,A)$ et $Ext(C,A|D)$ que nous noterons $Ext(C,A|S^*)$.

PROPOSITION 4-8 - <u>Pour que</u> $E \in Ext(C|S,A)$ <u>il faut et il suffit que</u> $E\chi \equiv 0$ <u>où</u> χ <u>est le monisme</u> $S(C) \rightarrowtail C$.

La condition est évidemment nécessaire puisque $S(C) \in S_C$.

Supposons que $E\chi \equiv 0$ et soit $\chi' : C' \rightarrowtail C$; puisque $C' \subseteq S(C)$ il existe un monisme $\lambda : C' \rightarrowtail S(C)$ tel que $\chi' = \chi\lambda$ d'où $E\chi' \equiv E(\chi\lambda) \equiv (E\chi)\lambda \equiv 0$.
On démontrerait de même :

PROPOSITION 4-9 - <u>Pour que</u> $E \in Ext(C,A|S^*)$ <u>il faut et il suffit que</u> $\sigma E \equiv 0$ <u>où</u> σ <u>est l'épisme</u> $A \twoheadrightarrow A/S(A)$.

Soit maintenant une suite exacte (E) $A \overset{\chi}{\rightarrowtail} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} C$ et considérons les suites exactes des Ext :

(1) $0 \longrightarrow Hom(X,A) \longrightarrow Hom(X,B) \longrightarrow Hom(X,C) \xrightarrow{\gamma} Ext(X,A) \longrightarrow Ext(X,B) \longrightarrow Ext(X,C) \longrightarrow 0$

(2) $0 \longrightarrow Hom(C,X) \longrightarrow Hom(B,X) \longrightarrow Hom(A,X) \xrightarrow{\delta} Ext(C,X) \longrightarrow Ext(B,X) \longrightarrow Ext(A,X) \longrightarrow 0$

dans lesquelles γ et δ sont les homomorphismes de connexion.

THEOREME 4-10 -

(i)- Si $E \in \mathrm{Ext}(C|S,A)$ alors $\mathrm{Im}\,\delta \subseteq \mathrm{Ext}(C|S,X)$.

(ii) Si $E \in \mathrm{Ext}(C,A|S^*)$ alors $\mathrm{Im}\,\gamma \subseteq \mathrm{Ext}(X,A|S^*)$.

(iii) Si $E \in \mathrm{Ext}(C|S,A)$ alors $\delta[\mathrm{Hom}(X,S(C))] = 0$.

(iv) Si $E \in \mathrm{Ext}(C,A|S^*)$ alors $\gamma[\mathrm{Hom}(A|S(A),X)] = 0$.

Pour prouver (i) il suffit de remarquer que si $E' = fE$ avec $f \in \mathrm{Hom}(A,X)$ alors si $\chi : S(C) \rightarrowtail C$ on a

$$E'\chi \equiv (fE)\chi \equiv f(E\chi) \equiv 0.$$

La proposition 4-8 permet d'achever.

Pour (ii) il suffit de remarquer que si $E' = Eg$ avec $g \in \mathrm{Hom}(X,C)$ alors si $\sigma : A \twoheadrightarrow A|S(A)$ on a $\sigma E' \equiv \sigma(Eg) \equiv (\sigma E)g \equiv 0$ et la proposition 4-9 permet d'achever.

Les démonstrations de (iii) et (iv) se déduisent des démonstrations des propositions 4-8 et 4-9.

Du théorème 4-10 on déduit (comparer au théorème 14 de [7]):

THEOREME 4-11 -

(i) Soit $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ une suite exacte telle que la suite $S(A) \rightarrowtail S(B) \twoheadrightarrow S(C)$ soit exacte et qui représente un élément de $\mathrm{Ext}(C|S,A)$; alors la suite

$$0 \rightarrowtail \mathrm{Hom}(X,S(A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,S(B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,S(C)) \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout groupe X.

(ii) Soit $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ une suite exacte telle que la suite $A/S^*(A) \rightarrowtail B/S^*(B) \longrightarrow C/S^*(C)$ soit exacte et qui représente un élément de $\mathrm{Ext}(C,A|S^*)$ alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C/S^*(C),X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B/S^*(B),X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A/S^*(A),X) \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout groupe X.

Du théorème 15 de [7] on déduit.

THEOREME 4-12

(i) si l'extension $E \in \mathrm{Ext}(C|S,A)$ alors

$$\gamma[\mathrm{Hom}(X,C)] \subseteq \mathrm{Ext}(X|S,A)$$

(ii) si l'extension $E \in \mathrm{Ext}(C,A|S^*)$ alors

$$\delta[\mathrm{Hom}(A,X)] \subseteq \mathrm{Ext}(C,X|S^*)$$

En effet nous avons vu que $\mathrm{Hom}_I(X,C) = \mathrm{Hom}(X,C)$ et $\mathrm{Hom}_D(A,X) = \mathrm{Hom}(A,X)$ dans les catégories (Ab,S) et (Ab,S^*).
Enfin les théorèmes 17 et 16 se transcrivent de la manière suivante :

THEOREME 4-13 - Soit $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ une suite exacte telle que la suite $S(A) \rightarrowtail S(B) \longrightarrow S(C)$ soit exacte et qui représente un élément de $\mathrm{Ext}(C|S,A)$, alors la suite induite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,X) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}(C|S,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}(B|S,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}(A|S,X) \longrightarrow 0$$

est exacte.

THEOREME 4-14 - Soit $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ une suite exacte telle que la suite $A/S^*(A) \rightarrowtail B/S^*(A) \twoheadrightarrow C/S^*G$ soit exacte et qui représente un élément de $\mathrm{Ext}(C,A|S^*)$ alors la suite induite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,C) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}(X,A|S^*) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X,B|S^*) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X,C|S^*) \longrightarrow 0$$

est exacte.

On pourrait généraliser la notion de sous-groupe pur fonctoriel dans l'esprit qui est celui de ce chapitre en faisant appel à la notion d'idéal fonctoriel.

DEFINITION 4-15 - On a défini un idéal fonctoriel $\mathfrak{J}$ dans la catégorie des groupes abéliens si à chaque groupe G on a associé un idéal I_G du treillis des sous-groupes de G, la condition suivante étant vérifiée :

$$u : G \longrightarrow G' \quad \text{implique} \quad u(I_G) \subseteq I_{G'}$$

On remarque que, comme dans le cas des sous-groupes fonctoriels on a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}}(A,B) = \mathrm{Hom}(A,B)$ pour tout couple de groupes A et B et pour tout idéal fonctoriel $\mathfrak{J}$.

DEFINITION 5-15 - Un idéal fonctoriel $\mathfrak{J}$ défini dans la catégorie des groupes abéliens est un idéal pur fonctoriel si pour tout monisme $\chi : A \rightarrowtail B$ on a $\chi(I_A) = \chi(A) \cap I_B$.

Il apparait alors naturel de définir une notion de suite $\mathfrak{J}$-pure de la manière suivante :

DEFINITION 5-16 - <u>Soit $\mathcal{J}$ un idéal pur fonctoriel ; une suite exacte courte</u> $A \overset{\chi}{\rightarrowtail} B \twoheadrightarrow C$ <u>est</u> $\mathcal{J}$ <u>-pure si on a</u> $\sigma(I_B) = I_C$.

Il semble que ces hypothèses ne soient pas suffisantes pour faire de la classe des suites $\mathcal{J}$ -pures une classe propre.

- CHAPITRE V -

Transfert des relativisations

Dans ce chapitre nous généralisons en la formalisant, la démonstration du théorème 3-4. Le résultat obtenu, outre qu'il permet de rendre compte de la plupart des relativisations étudiées, constitue un moyen très commode pour construire de nouvelles relativisations à partir de relativisations déjà connues et d'un foncteur exact covariant additif relativement exact à gauche ou relativement exact à droite. Ce résultat constitue aussi une généralisation de la proposition 2-1 de [16] que l'auteur énonce sans démonstration et dont la formulation est par ailleurs inexacte car la classe des suites exactes $\mathfrak{J}$ considérées doit-être, de toute évidence, une classe propre.

Préalablement nous transcrirons sous une autre forme la définition des classes propres en faisant appel, pour la clarté de l'exposé, à la méthode de Baer pour la description d'une extension d'un objet par un autre [12].

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne ; une relativisation de $\mathcal{C}$ (ou une classe propre) est une classe Ω de suites exactes courtes telles que :

(i) $E \in \Omega\ ,\ E_1 \equiv E \Longrightarrow E_1 \in \Omega$

(ii) $E \equiv 0 \Longrightarrow E \in \Omega$

Pour tout diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes, ci-contre, on a :

(iii) $E' \in \Omega \Longrightarrow E'\lambda \in \Omega$

(iv) $E \in \Omega \Longrightarrow \sigma E \in \Omega$

(v) $E \in \Omega,\ E'\lambda \in \Omega \Longrightarrow E' \in \Omega$

(vi) $E' \in \Omega,\ \sigma E \in \Omega \Longrightarrow E \in \Omega$

$$\begin{tikzcd}
 & (E'\lambda) & (E') & \\
 & A \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "\chi"] & A \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\chi_1"] & 0 \arrow[d] \\
(E) & B \arrow[r, tail, "\chi_2"] \arrow[d, "\sigma"] & C \arrow[r, two heads, "\sigma_2"] \arrow[d, "\sigma_1"] & C/B \arrow[d, equal] \\
(\sigma E) & B/A \arrow[r, tail, "\lambda"] & C/A \arrow[r, two heads, "\mu"] & C/B
\end{tikzcd}$$

Rappelons que si $(\mathcal{C},\Omega)$ est une catégorie abélienne relative, $\mathcal{D}$ une catégorie abélienne et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur additif covariant , on dit que F est relativement exact à gauche (resp. à droite) si la suite $F(E)$ est exacte à gauche (resp. à droite) quelle que soit la suite exacte permise E de $(\mathcal{C},\Omega)$.

THEOREME 5-1 - <u>Soient</u> $(\mathcal{C},\Omega)$ <u>et</u> $(\mathcal{C}',\Omega')$ <u>deux catégories abéliennes relatives,</u> $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ <u>un foncteur covariant additif relativement exact à gauche ou relativement exact à droite ; alors la classe</u> $\overline{\Omega}$ <u>des suites exactes courtes permises</u> E <u>de</u> $(\mathcal{C},\Omega)$ <u>telles que</u> $S(E) \in \Omega'$ <u>est une relativisation de</u> $\mathcal{C}$.

Nous allons vérifier les axiomes précités pour un foncteur covariant additif S relativement exact à gauche.

(i) Soit $E \in \overline{\Omega}$ et $E_1 \equiv E$; on a bien $E_1 \in \Omega$ et $S(E_1) \in \Omega'$ puisque si α est un isomorphisme, $S(\alpha)$ aussi.

(ii) de $E \equiv 0$ on déduit $S(E) \equiv 0$ car S commute aux sommes directes finies.

(iii) Supposons que $E' \in \overline{\Omega}$ donc que $E' \in \Omega$ et que $S(E') \in \Omega'$; il faut montrer que $E'\lambda \in \overline{\Omega}$ donc que $E'\lambda \in \Omega$, ce qui est une hypothèse, et que $S(E'\lambda) \in \Omega'$. Pour cela, considérons le diagramme commutatif ci-dessous dans lequel (λ_1,γ_1) est universel pour $(S(\lambda),\gamma)$ (somme fibrée).

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "S(\chi)"'] & S(A) \arrow[d, tail, "S(\chi_1)"] & \\
{} \arrow[r, "S(\chi_2)"] \arrow[d, "S(\sigma)"'] & {} \arrow[r, "S(\sigma_2)"] \arrow[d, "S(\sigma_1)"'] & S(C/B) \arrow[d, equal] \\
S(B/A) \arrow[r, "S(\lambda)"] \arrow[d, "\gamma"'] & S(C/A) \arrow[r, "S(\mu)"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & S(C/B) \arrow[d, "\gamma_3"'] \\
\cdot \arrow[r, "\lambda_1"] & \cdot \arrow[r, "\gamma_2"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

On a $S(\chi_1) = S(\chi_2) = S(\chi_2)\ S(\chi)$ donc $S(\chi)$ est un monisme permis (rel. 2). Il reste donc à montrer que $S(\sigma)$ est un épisme autrement dit que $\gamma S(\sigma) = 0$ implique $\gamma = 0$.

Remarquons que $S(\lambda)$ monisme entraîne λ_1 monisme ; on a

$0 = \lambda_1\ \gamma S(\sigma) = \gamma_1\ S(\lambda)\ S(\sigma) = \gamma_1\ S(\sigma_1)\ S(\chi_2)$ donc il existe γ_2 monisme et γ_3 tels que $\gamma_2\ \gamma_1\ S(\sigma_1) = \gamma_3\ S(\sigma_2) = \gamma_3\ S(\mu)\ S(\sigma_1)$ d'où l'on tire $\gamma_2\ \gamma_1 = \gamma_3\ S(\mu)$.

On a alors $\gamma_2\ \lambda_1\ \gamma = \gamma_2\ \gamma_1\ S(\lambda) = \gamma_3\ S(\mu)\ S(\lambda) = 0$ d'où $\gamma = 0$.

(iv) Supposons que $E \in \overline{\Omega}$ donc que $E \in \Omega$ et $S(E) \in \Omega'$; il faut montrer que $E \in \overline{\Omega}$ donc que $\sigma E \in \Omega$, ce qui est une hypothèse, et que $S(\sigma E) \in \Omega'$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
S(B) \arrow[r, tail, "S(\chi_2)"] \arrow[d, "S(\sigma)"] & S(C) \arrow[r, two heads, "S(\sigma_2)"] \arrow[d, "S(\sigma_1)"] & S(C/B) \arrow[d, equal] \\
S(B/A) \arrow[r, "S(\lambda)"] & S(C/A) \arrow[r, "S(\mu)"] & S(C/B)
\end{tikzcd}$$

Supposons que $\gamma\, S(\mu) = 0$; d'où $\gamma\, S(\mu)\, S(\sigma_1) = 0$, $\gamma\, S(\sigma_2) = 0$ donc $\gamma = 0$ et $S(\mu)$ est un épisme ; donc la ligne du bas est exacte et l'on a $S(\sigma E) = S(\sigma)\, S(E)$ et comme $S(E) \in \Omega'$ on a $S(\sigma E) \in \Omega'$.

(v) Supposons que $E \in \overline{\Omega}$ et $E'\lambda \in \overline{\Omega}$ autrement dit que $E \in \Omega$, $E'\lambda \in \Omega$, $S(E) \in \Omega'$ et $S(E'\lambda) \in \Omega'$. Il faut montrer que $E' \in \overline{\Omega}$ c'est-à-dire que $E' \in \Omega$ (hypothèse) et que $S(E') \in \Omega'$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "S(\chi)"] & S(A) \arrow[d, tail, "S(\chi_1)"] & \\
S(B) \arrow[r, tail, "S(\chi_2)"] \arrow[d, "S(\sigma)"] & S(C) \arrow[r, two heads, "S(\sigma_2)"] \arrow[d, "S(\sigma_1)"] & S(C/B) \arrow[d, equal] \\
S(B/A) \arrow[r, tail, "S(\lambda)"] & S(C/A) \arrow[r, "S(\mu)"] & S(C/B)
\end{tikzcd}$$

Remarquons que $S(\chi_1) = S(\chi_2)\, S(\chi)$ donc que $S(\chi_1)$ est permis puisque $S(\chi_2)$ et $S(\chi)$ le sont. Il reste à vérifier que $S(\sigma_1)$ est un épisme.

Supposons que $\gamma\, S(\sigma_1) = 0$ d'où $\gamma\, S(\sigma_1)\, S(\chi_2) = \gamma\, S(\lambda)\, S(\sigma) = 0$, d'où $\gamma\, S(\lambda) = 0$ donc il existe β tel que $\gamma = \beta\, S(\mu)$ et $\gamma\, S(\sigma_1) = \beta\, S(\mu)\, S(\sigma_1) = \beta\, S(\sigma_2) = 0$ d'où $\beta = 0$ d'où $\gamma = 0$.

(vi) Supposons que $E' \in \overline{\Omega}$ et $\sigma E \in \overline{\Omega}$ c'est-à-dire que $E' \in \Omega$, $\sigma E \in \Omega$, $S(E') \in \Omega'$ et $S(\sigma E) \in \Omega'$. Il faut montrer que $E \in \overline{\Omega}$ donc que $E \in \Omega$ (hypothèse) et que $S(E) \in \Omega'$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & S(A) \arrow[d] & \\
S(B) \arrow[r, tail] \arrow[d] & S(C) \arrow[r, "S(\sigma_2)"] \arrow[d, "S(\sigma_1)"] & S(C/B) \arrow[d, equal] \\
S(B/A) \arrow[r, tail] & S(C/A) \arrow[r, two heads, "S(\mu)"] & S(C/B)
\end{tikzcd}$$

et il est immédiat que $S(\sigma_2)$ est un épisme permis puisque $S(\sigma_2) = S(\mu)\, S(\sigma_1)$.

Usant de la dualité pour la catégorie $(\mathcal{C}',\Omega')$ seulement on vérifierait ces axiomes pour un foncteur covariant additif relativement exact à droite. Par contre en utilisant la dualité pour la catégorie $(\mathcal{C},\Omega)$ seulement on obtient le même théorème pour un foncteur additif contravariant relativement exact à gauche ou relativement exact à droite.

Applications à la catégorie des groupes abéliens

Sauf indications contraires, dans tout ce qui suit, on prend $\mathcal{C} = \mathcal{C}' = ab$ et l'on munit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ des relativisations triviales pour lesquelles la classe propre est la classe de toutes les suites exactes.

1° - Soit le foncteur d'une variable covariant additif exact à gauche Hom(G,-) où G est fixe ; la relativisation $\overline{\Omega}$ que l'on obtient par le théorème 5-1, n'est autre que celle que l'on peut définir en déclarant le groupe G projectif.

2° - Soit $\mathcal{S}$ une classe de groupes ; pour tout $G \in \mathcal{S}$, soit la relativisation définie au 1°, et considérons l'intersection de ces relativisations lorsque G parcourt ab. La relativisation ainsi obtenue est celle que l'on définit en déclarant la classe $\mathcal{S}$ projective.

3° - Dualement si nous considérons le foncteur d'une variable exact à gauche Hom(-,G), on retrouve la relativisation que l'on obtient en déclarant le groupe G injectif. Si nous considérons l'intersection de ces relativisations lorsque G parcourt une classe $\mathcal{S}$ de groupes, nous obtenons la relativisation définie en déclarant la classe $\mathcal{S}$ injective.

4° - Soit S(-,-) un bi-sous-foncteur du bi-foncteur Hom additif, co-exact à gauche ; pour tout groupe G fixé, S(G,-) est un foncteur additif covariant de Ab dans Ab exact à gauche. Pour tout groupe G, on considère la relativisation obtenue par l'application du théorème 5-1 puis on prend l'intersection de toutes ces relativisations. Il est clair que les relativisations obtenues de la sorte, sont les relativisations étudiées par D. Cook dans [4] sous le nom de S-pureté.

5° - Le théorème 3-4 apparaît maintenant comme un cas particulier du théorème 5-1, compte tenu que la notion de sous-groupe pur fonctoriel est équivalente à celle de sous-foncteur de l'identité exact à gauche.

6° - Considérons maintenant G et la relativisation correspondante, puis l'intersection lorsque G parcourt une classe $\mathcal{S}$ de toutes les relativisations obtenues pour chaque groupe G. On obtient une nouvelle relativisation et, en particulier, si G parcourt Ab on retrouve la pureté ordinaire.

7° - On obtient le même résultat avec le foncteur tor(G,-). En particulier pour G = Q/Z, on retrouve la relativisation dont il a été question dans le troisième exemple de la fin du chapitre III puisque pour tout groupe A, tor(Q/Z,A) = tA.

8° - Si nous examinons le contenu de la proposition 3-11 à la lumière du théorème 5-1 nous voyons que, un sous-groupe pur fonctoriel étant fixé, la S_2-pureté consiste à prendre pour Ω' la relativisation triviale comme ci-dessus ; la S_4-pureté consiste à prendre pour Ω' la relativisation triviale dont la classe propre est la classe de toutes les suites exactes scindées. Quant au (ii) de cette proposition il traduit simplement le fait que, si on prend pour Ω' la relativisation définie par la S_1-pureté, alors $\overline{\Omega} = \Omega'$.

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] BUCHSBAUM D., A note on homology in categories, Ann. of Math. (2) vol. 69, (1959), p. 66-74.

[2] BUTLER M.C.R. - HORROCKS G., Classes of extensions an resolutions. Philos. Trans. Roy. Soc. London, vol. 254, (1961), p. 155-222.

[3] CHARLES B., Sous-groupes fonctoriels et topologies, Etudes sur les groupes abéliens, p. 75-92, Dunod, Paris (1968).

[4] COOK D., Relative homological algebra in the category of abelian groups, Thèse New-Mexico State University (1968).

[5] EILENBERG S. - MOORE J.C. Foundations of relative homological algebra. Memoirs of the Amer. Math. Soc. n° 55 (1965).

[6] FUCHS L., Abelian groups, Publ. House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest (1958).

[7] FUCHS L., Some generalizations of the exact sequences concerning Hom and Ext, Proc. of the Colloquium on Abelian groups Publ. House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest (1964).

[8] HARRISSON D.K. Infinite Abelian Groups and Homological Methods. Ann. of Math. vol. 69, p. 366-391, (1959).

[9] HELLER A. Homological algebra in abelian categories. Ann. of Math. (2) vol.68, p. 484-525 (1958).

[10] HOCHSCHILD G. Relative homological algebra. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 82, p. 246-269 (1956).

[11] KAPLANSKY I. Infinite Abelian Groups, University of Michigan Press. Ann. Arbor (1954).

[12] MAC LANE S. Homology. Springer-Verlag Berlin (1963).

[13] MARANDA J.M. Injective structures, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 110 p. 98-135 (1964).

[14] MARTY R. Radical, socle et relativisation, Etudes sur les groupes abéliens, p. 287-300 Dunod, Paris (1968).

[15] NUNKE R.J. Purity and subsfunctors of the identity. Topics in abelian groups. Scott Foresman Chicago p. 121-172 (1963).

[16] STENSTROM BO. T. "Pure submodules" Àrkiv för Mat., 7, 159-171 (1967).

[17] WALKER C.P. Relative homological algebra and abelian groups. Ill. Journal of Math. vol. 10 n° 2, p. 186-209 (1966).

[18] WALKER C.P., WALKER E.A., IRWIN J.M. On p^{α}-pure sequences of abelian groups. Topics in abelian groups, Scott Foresman Chicago p. 69-119 (1963).

(Texte définitif reçu le 3 mars 1971)

Robert MARTY
Maître de Conférences
U. E. R. Mathématiques
C. S. U., Chemin de Villeneuve
66 - PERPIGNAN

Joseph FLOCH, Maître-Imprimeur à Mayenne - 8-9-1971 - n° 4169