MÉMOIRES DE LA S. M. F.

R. SPECTOR

Sur la structure locale des groupes abéliens localement compacts

Mémoires de la S. M. F., tome 24 (1970)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1970__24__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 24, 1970, 94 p.

SUR LA STRUCTURE LOCALE DES GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS.

par

René SPECTOR(*)

-:-:-:-

TABLE DES MATIÈRES

(*) Thèse Sc. math. Orsay, 1970.

-:-:-:-

INTRODUCTION

Le titre de ce travail indique assez clairement la direction générale de nos recherches. Il s'agit de définir et d'étudier des objets attachés aux groupes abéliens localement compacts et qui permettent d'obtenir des renseignements sur la structure locale des groupes étudiés. Il est naturel de mettre en évidence des invariants de cette structure locale, c'est-à-dire des objets qui soient isomorphes pour des groupes localement isomorphes. Une étape ultérieure consiste à étudier dans quelle mesure ces invariants sont caractéristiques.

Plus précisément, nous considérons la catégorie dont les objets sont les groupes abéliens localement compacts (dans un cas, les groupes peuvent être non abéliens) et dont les morphismes sont les germes d'homomorphismes continus de groupes ; nous définissons ensuite divers foncteurs de cette catégorie dans certaines autres, ce qui nous permet d'obtenir les invariants cherchés.

Le chapitre I est un chapitre de référence où sont rassemblés divers résultats, en général bien connus, qui seront constamment utilisés par la suite.

Au chapitre II, est introduit un premier type d'invariant : un groupe compact G^* attaché à tout groupe abélien localement compact. Trois caractérisations équivalentes de G^* sont données, et on étudie comment les germes d'homomorphismes locaux d'un groupe G vers un groupe H se représentent à l'aide d'homomorphismes globaux de G^* vers H^*. Un exemple montre que l'extension de ceci au cas non abélien est impossible.

Les chapitres III et IV sont consacrés à l'étude d'invariants d'un autre type, constitués par certaines algèbres de germes de fonctions. Au chapitre III, on étudie les algèbres de transformées de Fourier relatives à un poids sur le groupe dual. On commence par montrer, après une étude générale des algèbres A_ω , comment tout germe d'homomorphisme de G vers H induit une application bien déterminée de l'ensemble des classes de poids définis sur le dual de G dans l'ensemble des classes de poids définis sur le dual de H . En utilisant cette correspondance, on définit ensuite un homomorphisme de toute algèbre de germes de $A_{\omega'}(H)$ dans l'algèbre des germes de $A_\omega(G)$, où ω' est le poids associé à ω .

Au chapitre IV, on étudie les algèbres A_p , et on démontre que les algèbres de germes de A_p sont des invariants de la structure locale, même dans le cas non abélien. Nous utilisons, pour ce faire, une propriété de représentation intégrale d'un produit qui nous donne certains autres résultats intéressants. Ce chapitre se termine par un théorème concernant les multiplicateurs, conséquence d'un résultat obtenu pour les A_p .

Notons que, dans le cas abélien, les algèbres du type A_ω et celles du type A_p ont un cas particulier commun : l'algèbre A . Nous retrouvons donc, de deux manières totalement différentes, le fait que l'algèbre des germes des transformées de Fourier de fonctions sommables est un invariant de la structure locale des groupes abéliens localement compacts.

Au chapitre V, on définit une notion de fonction radiale sur les groupes totalement discontinus. On caractérise les fonctions radiales qui sont transformées de Fourier de fonctions de puissance α-ième sommable sur le dual, celles qui sont des multiplicateurs de $\mathcal{F}L^{\alpha}$, et celles qui appartiennent à A_p. On obtient de nouvelles classes de multiplicateurs sur les groupes totalement discontinus, en particulier sur les groupes discrets, $\mathbb{Z}$ par exemple.

Le chapitre VI est une approche de la réciproque : dans quelle mesure les invariants introduits sont-ils caractéristiques ? On montre que c'est le cas des groupes G^*, lorsque les groupes G appartiennent à une classe assez vaste de groupes totalement discontinus. Pour les algèbres de germes d'éléments de A_p ou de A_ω, elles permettent de distinguer les groupes totalement discontinus ; elles permettent aussi, mais les résultats sont à cet égard fragmentaires, de caractériser la dimension topologique.

Une partie importante des résultats présentés ici a été publiée antérieurement ([Sp. 1, 2, 3, 4, 5, 6] et [PS]) ; ils sont, de toute manière, présentés ici d'une manière totalement refondue, grandement améliorée par rapport à [Sp. 1] et [Sp. 2] , et complétés.

Ce travail n'aurait pas été possible sans les encouragements que m'a constamment prodigués Monsieur J.-P. Kahane ; qu'il en soit ici remercié. Ma reconnaissance est également acquise à Monsieur P. Eymard avec qui j'ai eu plusieurs entretiens fructueux et qui s'est chargé de la tâche ingrate de relire le manuscrit. Je remercie vivement Monsieur P. Lelong qui m'a proposé un intéressant sujet de thèse complémentaire et je suis très heureux que Monsieur J. Deny ait bien voulu accepter la présidence de mon jury de thèse.

Je tiens, de plus, à exprimer mes remerciements à Messieurs les Professeurs Herz, Jerison, Malliavin et Rudin, ainsi qu'à tous mes amis et collègues du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences d'Orsay qui ont, à des titres divers, leur part à ce travail, en particulier à Messieurs M. Gatesoupe, N. Lohoué et J. Peyrière.

Enfin, je désire exprimer à Madame Maynard et à Madame Gérard ma gratitude pour le dévouement et le soin avec lesquels elles ont assuré la réalisation matérielle de ce texte.

-:-:-:-

CHAPITRE I

NOTIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES.

L'objet de ce chapitre est de fournir une base de référence commode pour des résultats qui seront fréquemment utilisés par la suite, souvent même sans être explicitement rappelés.

Bien des théorèmes donnés ici sont d'usage courant, et se trouvent par exemple dans [R] ou dans [HR] . Nous donnons aussi, avec démonstration, quelques résultats moins familiers.

Tous les groupes que nous considérons sont des groupes localement compacts (g.l.c.) notés multiplicativement, dont l'élément neutre est désigné par e . Lorsque nous traiterons explicitement de groupes abéliens localement compacts (g.a.l.c.), ils seront - sauf exception - notés additivement et l'élément neutre sera désigné par 0 .

I - 1. Rappels sur la dualité et la compactification de Bohr.

THÉORÈME I.1.1. Soit G un g.l.c. Il existe un groupe compact G_b , unique à un isomorphisme près, et un morphisme (c.à.d. un homomorphisme algébrique continu) h de G dans G_b , tels que pour tout morphisme Φ de G dans un groupe compact H il existe un morphisme unique Φ_b de G_b dans H tel que $\Phi = \Phi_b \circ h$.

Si le groupe G est abélien, h est une injection dans G_b , et G_b a pour dual le dual de G , rendu discret ; dans tous les cas, l'image de G par h est dense dans G_b . Bien qu'il ne s'agisse pas réellement d'une compactification (sauf lorsque h est une injection, en particulier lorsque G est abélien), on appellera G_b le "compactifié presque-périodique" de G , et, dans le cas abélien, le "compactifié de Bohr" de G . (Voir [W] , pp.125-126).

Pour un g.l.c. G , nous noterons G_d le groupe G rendu discret, G_b le compactifié presque-périodique de G , et nous aurons à considérer G_{db} et G_{bd} dont la définition est claire. Soient G et H deux g.l.c., h_G (resp. h_H) le morphisme canonique $G \to G_b$ (resp. $H \to H_b$). Si nous désignons par Φ un morphisme de G dans H , Φ_b sera le morphisme de G_b dans H_b , dont l'existence est assurée par le théorème I.1.1., tel que $h_H \circ \Phi = \Phi_b \circ h_G$. Nous désignerons par Φ_d le morphisme Φ considéré en topologies discrètes, et par Φ_{db} le morphisme de G_{db} dans H_{db} déduit de Φ_d comme Φ_b se déduit de Φ . De même, Φ_{bd} sera Φ_b en topologies discrètes.

Soit maintenant G un g.a.l.c. Nous désignerons son dual par $\hat{G}$ ou par $(G)\hat{}$. Soit H un sous-groupe fermé de G , $H^\perp$ l'orthogonal de H dans $\hat{G}$. On sait (voir par exemple [R] , th. II.1.2., p. 35) que $(G/H)\hat{}$ est isomorphe à $H^\perp$ et que $\hat{H}$ est isomorphe à $\hat{G}/H^\perp$. Ceci entraîne en particulier que tout caractère continu sur H se prolonge en un caractère continu sur G .

THÉORÈME I.1.2. *Soient* G *et* H *deux* g.a.l.c. *et* Φ *un morphisme de* G *dans* H. *Notons* $\hat{\Phi}$ *(ou* $(\Phi)^\wedge$ *) l'application de* $\hat{H}$ *dans* $\hat{G}$ *qui à tout caractère* χ *sur* H *associe le caractère* $\chi \circ \Phi$ *sur* G. *Alors*

i) $\hat{\Phi}$ *est un morphisme de* $\hat{H}$ *dans* $\hat{G}$.

ii) $(\hat{\hat{\Phi}})^\wedge = \Phi$.

iii) *Si* K *est un troisième* g.a.l.c. *et* Ψ *un morphisme de* H *dans* K, *on a* $(\Psi \circ \Phi)^\wedge = \hat{\Phi} \circ \hat{\Psi}$.

iv) *Les conditions*

a) Φ *injectif*

b) $\hat{\Phi}$ *d'image dense*

sont équivalentes.

(Voir par exemple [G]).

DÉFINITION I.1.3. *Avec les hypothèses du Théorème* I.1.2., *nous dirons que* $\hat{\Phi}$ *est le morphisme transposé (ou dual) de* Φ.

DÉFINITION I.1.4. *Nous dirons que*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

est une suite exacte si B *est un* g.l.c., A *un sous-groupe distingué fermé de* B, i *l'injection canonique de* A *dans* B, C *le quotient de* B *par* A *et* p *la surjection canonique de* B *sur* C.

THÉORÈME I.1.5. *Soit* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* g.a.l.c. *Alors les suites*

a) $0 \longrightarrow \hat{C} \xrightarrow{\hat{p}} \hat{B} \xrightarrow{\hat{i}} \hat{A} \longrightarrow 0$

b) $0 \longrightarrow A_d \xrightarrow{i_d} B_d \xrightarrow{p_d} C_d \longrightarrow 0$

c) $0 \longrightarrow A_b \xrightarrow{i_b} B_b \xrightarrow{p_b} C_b \longrightarrow 0$

d) $0 \longrightarrow A_{db} \xrightarrow{i_{db}} B_{db} \xrightarrow{p_{db}} C_{db} \longrightarrow 0$

e) $0 \longrightarrow A_{bd} \xrightarrow{i_{bd}} B_{bd} \xrightarrow{p_{bd}} C_{bd} \longrightarrow 0$

sont exactes.

L'exactitude de a) exprime les relations de dualité des sous-groupes et des groupes-quotients ; pour b), il n'y a rien à démontrer ; c) est, par dualité, conséquence de a) et b) ; d) se déduit de b) et c), et e) se déduit de c).

En général, nous n'écrirons pas les noms des morphismes figurant dans une suite exacte ; il sera alors entendu que pour les suites exactes associées, selon le Théorème I.1.5., à une suite exacte donnée, les morphismes seront bien ceux qui se déduisent des morphismes donnés.

I - 2. Morphismes locaux et germes de morphismes.

DÉFINITION I.2.1. Soient G et H deux g.l.c. Nous appellerons morphisme local de G vers H la donnée (U, Φ) d'un voisinage ouvert U de l'élément neutre de G et d'une application continue Φ de U dans H, telle que les conditions $x \in U$, $y \in U$ et $xy \in U$ entraînent

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \Phi(y) .$$

DÉFINITION I.2.2. Un morphisme local (U, Φ) de G vers H est dit isomorphisme local si Φ est un homéomorphisme de U sur un voisinage de l'élément neutre de H.

DÉFINITION I.2.3. Deux isomorphismes locaux (U, Φ) de G vers H et (V, Ψ) de H vers G sont réciproques l'un de l'autre si $\Psi \circ \Phi$ (resp. $\Phi \circ \Psi$) coïncide avec l'identité au voisinage de l'élément neutre de G (resp. de H) (On considère $\Psi \circ \Phi$ comme défini sur $U \cap \Psi^{-1}(V)$, et $\Phi \circ \Psi$ sur $V \cap \Phi^{-1}(U)$).

DÉFINITION I.2.4. On appelle germe de morphisme de G vers H toute classe d'équivalence de morphismes locaux de G vers H, pour la relation "coïncider sur un voisinage de l'élément neutre".

DÉFINITION I.2.5. On appelle caractère continu local de G (resp. germe de caractère continu de G) tout morphisme local (resp. germe de morphisme) de G vers le groupe $\mathbb{T}$ des nombres complexes de module 1 muni de la topologie usuelle.

Remarque I.2.6. Il est faux que tout germe de caractère continu soit le germe de fonction associé à un caractère (global) de G. C'est le cas cependant pour les g.a.l.c. totalement discontinus et les groupes de la forme $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$: groupe additif des réels, n entier positif). Encore le cas des g.a.l.c. totalement discontinus est-il à cet égard inintéressant puisque tout caractère local continu est constant (égal à 1) au voisinage de 0. A ce sujet, notons que le théorème I.2.7. entraîne que tout germe de caractère continu provient d'un caractère global sur un groupe localement isomorphe au groupe donné.

Nous allons maintenant donner une décomposition des morphismes locaux qui généralise un résultat classique (voir [P], th. 18) et qui nous sera utile dans la suite.

THÉORÈME I.2.7. Soient G et H deux g.l.c., (U, Φ) un morphisme local de G vers H. Il existe un g.l.c. G_o, un isomorphisme local (U, Ψ) de G vers G_o et un morphisme global Φ_o de G_o dans H tels que $\Phi = \Phi_o \circ \Psi$. De plus Ψ se décompose lui-même en $\Psi = \Psi_1 \circ \Psi_2$, où Ψ_2 est un isomorphisme local de G vers un g.l.c. G_1, où G_1 est un sous-groupe ouvert de G et Ψ_2 un isomorphisme local réciproque de l'injection canonique de G_1 dans G, et où G_1 est également le quotient de G_o par un sous-groupe distingué discret, et Ψ_1 un isomorphisme local réciproque de la surjection canonique de G_o sur G_1.

Appelons en effet G_1 le sous-groupe ouvert de G engendré par U : Ψ_2 sera alors l'application identique de U, partie de G, sur U, partie de G_1. Considérons maintenant la partie $V = \{(x, \Phi(x)) \mid x \in U\}$ de $G_1 \times H$; $x \to (x, \Phi(x))$ est une bijection de U sur V et nous appellerons G_0 le sous-groupe de $G_1 \times H$ engendré par V, muni de la topologie localement compacte pour laquelle V est un voisinage de l'élément neutre homéomorphe à U. Appelons (U, Ψ_1) l'isomorphisme local de G_1 vers G_0 défini par $x \to (x, \Phi(x))$. Il est clair que, sur V, l'isomorphisme local réciproque coïncide avec la restriction de la projection $G_1 \times H \to G_0$ restreinte à V ; d'ailleurs, cette projection restreinte à G_0 est continue et surjective, biunivoque au voisinage de l'élément neutre : c'est donc le passage au quotient par un sous-groupe discret de G_0. Quant au morphisme global Φ_0 de G_0 vers H, c'est la restriction à G_0 de la projection $G_1 \times H \to H$, manifestement continue pour la topologie envisagée sur G_0.

I - 3. Structure des groupes abéliens localement compacts.

Nous rappellerons, dans ce paragraphe, quelques résultats classiques sur la structure des g.a.l.c. et sur les relations qui peuvent exister entre la structure d'un g.a.l.c. et celle du groupe dual. (Voir en particulier [HR] , [F] et [R]). Nous établissons également quelques résultats nouveaux à notre connaissance, ou pour lesquels nous ne connaissons pas de référence commode.

THÉORÈME I.3.1. Tout g.a.l.c. possède un sous-groupe ouvert isomorphe au produit cartésien d'un groupe de la forme $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et d'un groupe compact.

THÉORÈME I.3.2. Soit $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille de g.a.l.c., parmi lesquels il n'y a qu'un nombre fini de groupes non compacts. Alors le produit $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ a pour dual la somme directe $\oplus (G_\alpha)^\wedge$ des duals des G_α.

Notation : Si ω est un cardinal quelconque et G un groupe compact, G^ω désigne le produit direct de ω exemplaires de G. Si G est un groupe discret, $G^{\oplus\omega}$ désigne la somme directe de ω exemplaires de G.

THÉORÈME I.3.3. Soit G un groupe compact abélien.

i) Les trois conditions

a) G est connexe

b) G est divisible

c) $\hat{G}$ est sans torsion

sont équivalentes.

ii) Les trois conditions

a) G est totalement discontinu

b) G admet une base de voisinages de 0 formée de sous-groupes ouverts

c) $\hat{G}$ est de torsion

sont équivalentes.

THÉORÈME I.3.4. Tout groupe abélien discret d'ordre borné est isomorphe à $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}(p_i^{r_i})$, où $\mathbb{Z}(a)$ est le groupe cyclique d'ordre a, et où les p_i sont des nombres premiers, dont un nombre fini seulement sont distincts, et les r_i des entiers positifs, dont un nombre fini seulement sont distincts.

THÉORÈME I.3.5. Tout groupe abélien compact de torsion est d'ordre borné, et isomorphe à $\prod_{i\in I} \mathbb{Z}(p_i^{r_i})$, où un nombre fini seulement des nombres premiers p_i et des exposants r_i sont distincts.

THÉORÈME I.3.6. Tout groupe discret divisible sans torsion (c'est-à-dire tel que, pour tout entier $n \neq 0$, $x \longrightarrow nx$ soit une bijection) est isomorphe à $\mathbb{Q}^{\oplus\omega}$ où $\mathbb{Q}$ est le groupe des rationnels et ω un nombre cardinal.

THÉORÈME I.3.7. Soit un g.a.l.c. G. La réunion des images des morphismes de $\mathbb{R}$ dans G a pour adhérence la composante connexe de 0 dans G.

COROLLAIRE I.3.8. Pour tout g.a.l.c. G non totalement discontinu, il existe un morphisme non nul de $\mathbb{R}$ dans G.

THÉORÈME I.3.9. Soit G un groupe abélien compact.
Alors il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{T}^{\omega} \longrightarrow 0$$

où H est un groupe compact totalement discontinu et $\mathbb{T}^{\omega}$ le tore de dimension ω (ω peut être un cardinal quelconque).

Par dualité, montrons que pour tout groupe abélien discret, A, il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{\oplus\omega} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

où B est un groupe de torsion. Pour cela, il suffit de considérer un système libre maximal dans A : le quotient B du groupe A par le sous-groupe libre $\mathbb{Z}^{\oplus\omega}$ engendré par ce système est alors de torsion, et le théorème est démontré.

Remarque I.3.10. La suite exacte du théorème 1.3.8. peut être choisie de multiples façons. Mais le cardinal ω est bien déterminé : c'est le cardinal d'une famille libre maximale dans le dual de G.

DÉFINITION I.3.11. Pour un groupe abélien localement compact G, nous appellerons dimension de G la dimension de l'espace vectoriel réel des germes de morphismes de G dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que la dimension d'un groupe ne dépend que de sa structure locale.

THÉORÈME I.3.12. i) <u>Pour un groupe abélien compact, la dimension est égale au cardinal d'une famille libre maximale dans le dual.</u>

ii) <u>Si la dimension d'un groupe est finie, elle coïncide avec sa dimension topologique.</u>

La dimension, telle que nous l'avons définie, est manifestement invariante par les isomorphismes locaux. Il en va de même de la dimension topologique, de quelque manière qu'elle soit définie, les diverses définitions classiques étant équivalentes pour les groupes localement compacts. Il en résulte que la partie ii) du théorème 1.3.12. est à démontrer seulement en supposant le groupe compact. Or il est connu que, dans ce cas, la dimension topologique est égale au cardinal d'une famille libre maximale dans le dual (voir, par exemple, [HR] , th. 24.28). Il reste donc à démontrer en fait la partie i) du théorème. Soit alors un groupe compact G , ω le cardinal d'une famille libre maximale dans le dual de G , ω' la dimension de G . D'après le théorème 1.3.9., il existe une suite exacte, où H est totalement discontinu,

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{T}^{\omega} \longrightarrow 0 .$$

Montrons d'abord que G et $\mathbb{T}^{\omega}$ ont même dimension. Par relèvement de $\mathbb{T}^{\omega}$ dans G, tout germe de morphisme de $\mathbb{T}^{\omega}$ dans $\mathbb{R}$ donne un germe de morphisme de G dans $\mathbb{R}$, et la correspondance est linéaire et injective. Elle est également surjective, car tout germe de morphisme de G dans $\mathbb{R}$ s'obtient de cette manière : soit (U,α) un morphisme local de G dans $\mathbb{R}$; il existe alors un sous-groupe ouvert H_0 de H sur lequel α est nul ; $H_0 = H \cap V$, où V est un ouvert de G , voisinage de 0 ; soit W un voisinage de 0 dans G , tel que $W \subset U$ et $W-W \subset V$; alors $(W,\alpha|_W)$ est un morphisme local qui définit le même germe que (U,α) et qui définit, par passage au quotient, un morphisme local - donc un germe de morphisme - de $\mathbb{T}^{\omega}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $x = (e^{ix_\alpha})_{\alpha \in A, |A| = \omega}$ le point générique de $\mathbb{T}^{\omega}$. Définissons Φ_α , germe de morphisme de $\mathbb{T}^{\omega}$ dans $\mathbb{R}$, par $\Phi_\alpha(x) = x_\alpha \in \mathbb{R}$ pour x assez voisin de 0 , et montrons que les Φ_α forment une base de l'espace vectoriel des germes de morphismes de $\mathbb{T}^{\omega}$ dans $\mathbb{R}$. Les Φ_α sont indépendants, car lorsque x parcourt un voisinage quelconque de 0 , il n'y a aucune relation entre les coordonnées. Les Φ_α engendrent l'espace des germes de morphisme : soit Φ un germe de morphisme, représenté par un morphisme local Ψ défini sur un ouvert V de $\mathbb{T}^{\omega}$: V peut être pris de la forme $I_1 \times \dots \times I_n \times G'$, où $I_j = \{e^{ix_j} , |x_j| < \varepsilon_j < \pi\}$, et où G' est un tore entier (isomorphe à $\mathbb{T}^{\omega}$ si ω est infini) ; comme G' est compact, Ψ s'y annule, de sorte que Ψ ne dépend que des j coordonnées x_j :

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \; x_j ,$$

ce qui s'exprime, en passant aux germes, sous la forme

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{\Phi}_j .$$

Ceci achève la démonstration du théorème I.3.12.

-:-:-:-

CHAPITRE II

LE GROUPE COMPACT ATTACHÉ À UN GROUPE ABÉLIEN LOCALEMENT COMPACT.

Ce chapitre est consacré à la définition et à l'étude d'un invariant de la structure locale des groupes abéliens localement compacts. Nous montrons par un exemple que cette théorie n'admet pas de généralisation au cas non abélien.

II - 1. Définition du groupe compact G^* attaché au g.a.l.c. G .

DÉFINITION II.1.1. Soit G un g.a.l.c., et i l'injection continue $G_d \longrightarrow G$. Nous appellerons "groupe compact attaché à G ", et le noterons G^* , le noyau du morphisme $i_b : G_{db} \longrightarrow G_b$ défini en I - 1.

Il est clair que i_b est une surjection.

Dorénavant, nous ne donnerons pas de nom aux applications $G_d \longrightarrow G$, $G_{db} \longrightarrow G_b$ etc ...

THÉORÈME II.1.2. Soient G et H deux g.a.l.c. et α un morphisme de G vers H ; on peut alors associer à α , de manière canonique, un morphisme α^* de G^* dans H^* . Si K est un troisième g.a.l.c. et β un morphisme de H dans K , on a

$$(\beta \circ \alpha)^* = \beta^* \circ \alpha^* .$$

Si α est l'application identique de G dans G , α^* est l'application identique de G^* dans G^* .

A tout morphisme $\alpha : G \longrightarrow H$, nous associons le morphisme α^* défini par le diagramme ci-dessous, où les lignes extrêmes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G^* \arrow[r] \arrow[ddd, "\alpha^*"'] & G_{db} \arrow[rrr] \arrow[ddd, "\alpha_{db}"'] & & & G_b \arrow[r] \arrow[ddd, "\alpha_b"] & 0 \\
& & & G_d \arrow[ul] \arrow[d, "\alpha_d"] & G \arrow[ur] \arrow[d, "\alpha"'] & & \\
& & & H_d \arrow[dl] & H \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & H^* \arrow[r] & H_{db} \arrow[rrr] & & & H_b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La seule propriété à démontrer, c'est que α^* , restriction de α_{db} à G^* , applique G^* dans H^* . Or, soit $x \in G_{db}$: l'image dans H_b de $\alpha_{db}(x)$ coïncide avec l'image par α_b de l'image de x dans G_b ; si celle-ci est nulle, c'est-à-dire en particulier si $x \in G^*$, il est clair que $\alpha_{db}(x)$ appartient à H^* . Quant au caractère "fonctoriel" de α^* , il se déduit immédiatement des propriétés analogues évidentes concernant les morphismes α_d , α_b et α_{db} .

Nous allons démontrer maintenant que G^* est un invariant de la structure locale de G .

THÉORÈME II.1.3. <u>Si</u> G <u>et</u> H <u>sont localement isomorphes,</u> G^* <u>et</u> H^* <u>sont isomorphes</u>.

D'après le théorème I.2.7., il suffit de montrer que G^* et H^* sont isomorphes dans les deux cas :

i) G est un sous-groupe ouvert de H ;

ii) H est le quotient de G par un sous-groupe discret.

(Remarquons à cet effet que tout morphisme global qui définit, par restriction à un voisinage de 0, un isomorphisme local, est le produit de composition du passage au quotient par un sous-groupe discret et de l'injection d'un sous-groupe ouvert).

Comme le dual de G^* coïncide avec le quotient $\hat{G}_{bd}/\hat{G}_d$, il suffit de montrer que les groupes $\hat{G}_{bd}/\hat{G}_d$ et $\hat{H}_{bd}/\hat{H}_d$ sont isomorphes.

LEMME II.1.4. <u>Soit une suite exacte</u>

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 .$$

<u>Alors, dans le diagramme commutatif</u>

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_d & \longrightarrow & B_d & \longrightarrow & C_d & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{bd} & \longrightarrow & B_{bd} & \longrightarrow & C_{bd} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{bd}/A_d & \longrightarrow & B_{bd}/B_d & \longrightarrow & C_{bd}/C_d & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

<u>les lignes et les colonnes sont exactes</u>.

En effet, les colonnes sont exactes par construction, et les deux premières lignes en vertu du théorème I.1.5. C'est un résultat classique (voir par exemple [CE], exercice 1, page 16) que l'exactitude de la troisième ligne découle de l'égalité $A_d = A_{bd} \cap B_d$; or il suffit de vérifier que $A_{bd} \cap B_d \subset A_d$, c'est-à-dire que tout caractère de $\hat{A}$ qui donne, par composition avec la surjection $\hat{B} \longrightarrow \hat{A}$, un caractère continu de $\hat{B}$, est en fait un caractère continu de $\hat{A}$.

Appliquons maintenant le lemme dans la situation i) : G est un sous-groupe ouvert de H, donc H/G est un groupe discret. Si on pose $A = (H/_G)^\wedge$, $B = \hat{H}$ et $C = \hat{G}$, A est compact, donc $A_d = A_{bd}$, et $A_{bd}/A_d = \{0\}$, d'où $B_{bd}/B_d = C_{bd}/C_d$, qui équivaut à $G^* = H^*$. Pour la situation ii), $H = G/_D$ avec D sous-groupe discret de G. Posons alors $A = \hat{H}$, $B = \hat{G}$, $C = \hat{D}$. On a ici C compact, donc $C_{bd} = C_d$, d'où $C_{bd}/C_d = \{0\}$, soit $A_{bd}/A_d = B_{bd}/B_d$, ce qui équivaut à $G^* = H^*$.

Le théorème II.1.3. est donc ainsi démontré.

Le résultat ci-dessous montre que l'invariant de la structure locale que nous avons construit n'est pas illusoire :

THÉORÈME II.1.5. <u>Le groupe</u> G^* <u>est réduit à</u> $\{0\}$ <u>si et seulement si</u> G <u>est discret.</u>

D'après le théorème I.3.1., tout g.a.l.c. est localement isomorphe à un groupe compact. Il suffit donc, en vertu du théorème II.1.3., de démontrer le résultat cherché en supposant G compact. Si G est discret (c'est-à-dire fini), $G^* = \{0\}$. Soit alors G compact infini.

LEMME II.1.6. <u>Soit</u> X <u>un groupe abélien discret infini. Si on désigne par</u> $|E|$ <u>le cardinal de l'ensemble</u> E , <u>on a</u> $|\hat{X}| = 2^{|X|}$.

Ce résultat se trouve établi en [K] , théorème 1.

Appliquons le lemme aux groupes G_d et $\hat{G}_{bd}$:

$$|\hat{G}_{bd}| = |\hat{G}_b| = |(G_d)^\wedge| = 2^{|G_d|} = 2^{|G|}$$

et

$$|G_{db}| = |(\hat{G}_{bd})^\wedge| = 2^{|\hat{G}_{bd}|} = 2^{2^{|G|}} ,$$

ce qui montre que le morphisme $G_{db} \longrightarrow G_b = G$ ne saurait être injectif, donc que G^* ne se réduit pas à $\{0\}$.

De cette démonstration, nous pouvons dégager le

COROLLAIRE II.1.7. <u>Soit</u> G <u>un groupe compact infini. Alors</u> $|G^*| = 2^{2^{|G|}}$.

Cela résulte immédiatement de l'égalité $|G_{db}| = 2^{2^{|G|}}$ établie plus haut et de l'égalité $|G_{db}| = |G| \times |G^*|$.

II - 2. <u>Nouvelle définition du groupe</u> G^* .

Nous donnons dans ce paragraphe une seconde définition du groupe compact G^* attaché à un g.a.l.c. G . Cette définition nous permettra d'associer à tout germe de morphisme α de G vers un g.a.l.c. H un morphisme $\alpha^* : G^* \longrightarrow H^*$, coïncidant avec la définition introduite en II.1.2. dans le cas où α est un morphisme global.

Si nous considérons une partie X de G comme plongée dans G_{db} par l'injection (non continue sauf si G est discret) $G \longrightarrow G_{db}$, nous désignerons par $\overline{X}^b$ son adhérence dans G_{db} .

THÉORÈME II.2.1. <u>Soit</u> G <u>un</u> g.a.l.c. <u>Alors</u> $G^* = \cap \overline{U}^b$, U <u>parcourant le filtre des voisinages de</u> 0 <u>dans le groupe localement compact</u> G .

Il est facile de voir a priori que l'intersection ci-dessus est un sous-groupe fermé de G_{db} . Mais cela découle de toute manière du théorème II.2.1.

Nous aurons besoin du lemme suivant qui généralise le théorème d'approximation de

Hewitt et Zuckermann (voir [R] , th. I.8.3. ou [HZ]).

LEMME II.2.2. <u>Soit</u> G <u>un</u> g.a.l.c., H <u>un sous-groupe de</u> G <u>muni d'une topologie localement compacte plus fine que celle induite par</u> G (<u>de sorte que l'injection de</u> H <u>dans</u> G <u>est continue</u>). <u>Soit</u> χ <u>un caractère de</u> G <u>dont la restriction à</u> H <u>est continue pour la topologie de</u> H . <u>Alors, pour tout choix d'un nombre positif</u> ε , <u>d'un compact</u> K <u>de</u> H <u>et d'une suite finie</u> $\{x_1 ,\ldots, x_n\}$ <u>de points de</u> G , <u>il existe un caractère</u> Ψ <u>continu sur</u> G <u>tel que</u> $|\chi - \Psi| < \varepsilon$ <u>sur</u> $K \cup \{x_1 ,\ldots, x_n\}$.

Appelons G_o le groupe G muni de la topologie localement compacte pour laquelle H , avec sa topologie, est un sous-groupe ouvert. Alors l'injection identique i de G_o dans G est continue. Les caractères χ satisfaisant aux hypothèses du lemme ne sont autres que les caractères continus de G_o . D'après le théorème I.1.2., iv), le morphisme dual de i est une injection d'image dense de $\hat{G}$ dans $(G_o)^\wedge$, ce qui équivaut au type d'approximation indiqué dans l'énoncé du lemme.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème II.2.1. Remarquons d'abord que $\cap \bar{U}^b = \cap (U+V)$, U parcourant le filtre des voisinages de 0 dans G , et V celui des voisinages de 0 dans G_{db} .

Soit alors $x \in \cap (U+V)$: quels que soient le voisinage U de 0 dans G ,et le voisinage V de 0 dans G_{db} , on peut écrire $x = y+z$ avec $y \in U$ et $z \in V$. Appelons h l'application canonique de G dans G_b , h_d l'application canonique de G_d dans G_{db} , i l'injection de G_d dans G , i_b l'application de G_{db} dans G_b déduite de i . (En fait, on identifie ici les points de G_d avec leurs images par h_d) . Soit W un voisinage de 0 dans G_b , W_1 un voisinage de 0 dans G_b tel que $W_1 + W_1 \subset W$. Comme h et i_b sont continues, on peut choisir U et V tels que $h(U) \subset W_1$ et $i_b(V) \subset W_1$. Comme $i_b(x) = i_b\, h_d(y) + i_b(z)$, ou encore $i_b(x) = h(y) + i_b(z)$, on a $i_b(x) \in W$. Ceci a lieu quel que soit W , voisinage de 0 dans G , d'où $i_b(x) = 0$ ce qui signifie que $x \in G^*$. Réciproquement, supposons $x \in G^*$: x est un caractère sur $\hat{G}_{bd}$ constant sur $\hat{G}_d$; considérons en fait x comme un caractère sur $\hat{G}_b$, constant -donc continu- sur le sous-groupe $\hat{G}$ muni de sa propre topologie. Il s'agit de montrer que, si ε est un nombre positif, K un compact de $\hat{G}$, $\{\gamma_1 ,\ldots, \gamma_n\}$ une suite finie de $\hat{G}_b$, alors $x = yz$, (nous utilisons la notation multiplicative pour les caractères considérés comme fonctions) avec y caractère continu sur $\hat{G}$ tel que $|y-1| < \varepsilon$ sur K , et z caractère sur $\hat{G}_b$ tel que $|z-1| < \varepsilon$ sur $\{\gamma_1 ,\ldots, \gamma_n\}$. Or, pour tout $\eta > 0$, le lemme II.2.2. entraîne l'existence d'un caractère continu sur $\hat{G}_b$, x_o , tel que $|x-x_o| < \eta$ sur $K \cup \{\gamma_1 ,\ldots, \gamma_n\}$. Alors, en prenant η assez petit, on aura le résultat cherché avec $y = x_o$ et $z = x\, x_o^{-1}$.

La caractérisation de G^* donnée par le théorème II.2.1. permet d'associer à tout morphisme local de G vers H, et même à tout germe de morphisme, un morphisme global α^* de G^* dans H^*. Pour le voir, établissons d'abord le

LEMME II.2.3. <u>Soit</u> (U,α) <u>un morphisme local d'un</u> g.a.l.c. G <u>vers un</u> g.a.l.c. H. <u>Si</u> U <u>est un voisinage ouvert de</u> 0 <u>dans</u> G <u>assez petit</u>, α <u>considéré comme application de</u> U, <u>partie de</u> G_{db}, <u>dans</u> H_{db}, <u>se prolonge en une application continue de</u> $\bar{U}^b$ <u>dans</u> H_{db}.

En vertu du théorème I.2.7., il suffit de prouver le lemme dans trois cas particuliers :

i) α est un morphisme global de G vers H. Alors le morphisme α_{db} de G_{db} dans H_{db}, restreint à $\bar{U}^b$, fournit le prolongement cherché.

ii) H est un sous-groupe ouvert de G, U un ouvert de H, α l'application identique de U, ouvert de G, sur U, ouvert de H. Appelons V l'ensemble U considéré comme un ouvert de H, et i l'injection canonique de H dans G. Il résulte du théorème I.1.5. que i_{db} est une injection de H_{db} dans G_{db}, donc i_{db} applique bijectivement $\bar{V}^b$ sur un compact de G_{db} qui contient $\bar{U}^b$ (et, en fait, coïncide avec $\bar{U}^b$). L'application réciproque définie sur $\bar{U}^b$ fournit le prolongement cherché de α.

iii) G est le quotient de H par un sous-groupe discret D, et la surjection canonique p de H sur G est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans H, V, sur le voisinage ouvert de 0, U, dans G. De manière semblable à ce que nous avons vu en ii), il suffira de montrer que p_{db}, restreinte à $\bar{V}^b$, est bijective, c'est-à-dire, puisque p_{db} admet pour noyau $D_{db} = D_b$, que $(\bar{V}^b - \bar{V}^b) \cap D_b = \{0\}$. Or, puisque p restreinte à V est bijective, on a $(V-V) \cap D = \{0\}$. Comme de plus $\bar{V}^b - \bar{V}^b = (\overline{V-V})^b$ (cela se vérifie aisément), il suffit de vérifier que, pour un ouvert W de H contenant 0, la condition $W \cap D = \{0\}$ entraîne que $\bar{W}^b \cap D_b = \{0\}$. Soit donc δ un élément de D_b appartenant à $\bar{W}^b$, c'est-à-dire tel que, pour tout voisinage de 0, Ω, dans H_{db}, on ait $\delta = x + \omega$, $x \in W$ et $\omega \in \Omega$. Désignons par $D^\perp$ l'orthogonal de D dans $\hat{H}$; D est le groupe dual du groupe $\hat{H}/_{D^\perp}$ (compact puisque D est discret) et δ est un caractère, continu ou non, sur $\hat{H}/_{D^\perp} = \hat{H}_b/_{(D^\perp)_b}$. L'hypothèse entraîne alors que, quels que soient le nombre positif ε et la suite finie $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ de points de $\hat{H}_b$, il existe $x \in W$ tel que $|\delta - x| < \varepsilon$ sur $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. Or, puisque $\hat{H}/_{D^\perp}$ est compact, il existe un compact L de $\hat{H}$ tel que $\hat{H} = L + D^\perp$, d'où $\hat{H}_b = L + (D^\perp)_b$. Quitte à restreindre W (donc aussi V et U), on peut supposer que, pour tout x appartenant à W, on a $|x-1| < 1$ sur L. Soit alors γ un point de $\hat{H}_b$, qui s'écrit $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$, avec $\gamma_0 \in L$ et $\gamma_1 \in (D^\perp)_b$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in W$ tel que $|\delta(\gamma_0) - x(\gamma_0)| < \varepsilon$, d'où $|\delta(\gamma_0) - 1| < 1 + \varepsilon$; comme δ est constant sur $(D^\perp)_b$, il en résulte que, quel que soit γ élément de $\hat{H}$, $|\delta(\gamma) - 1| \leq 1$. L'ensemble des valeurs prises par δ sur $\hat{H}$ est un sous-groupe de $\mathbb{T}$, groupe multiplicatif des complexes de module 1, et le seul sous-groupe de $\mathbb{T}$ dont tous les éléments sont à une distance de 1 inférieure ou égale à 1, est $\{1\}$. D'où il résulte que δ est constant sur $\hat{H}_b$, ou encore, en notation additive, $\delta = 0$.

DÉFINITION II.2.4. <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>deux</u> g.a.l.c., <u>et</u> α <u>un germe de morphisme de</u> G <u>vers</u> H. <u>Nous appellerons morphisme associé à</u> α, <u>le morphisme</u> α^* <u>de</u> G^* <u>dans</u> H^* <u>obtenu en restreignant à</u> G^* <u>le prolongement à</u> $\bar{\bar{U}}^b$ <u>d'un morphisme local</u> (U, α_o) <u>de</u> G <u>vers</u> H <u>dont le germe est</u> α.

Pour être assuré de la validité de cette définition, il faut montrer d'une part que la restriction à G^* du prolongement à $\bar{\bar{U}}^b$ de α_o est à valeurs dans H^* (ceci découle de la continuité de α et du théorème II.2.1.), d'autre part que le morphisme α^* obtenu ne dépend pas du choix du représentant (U, α_o) du germe α : il suffit de voir que l'on peut restreindre l'ouvert U sur lequel est défini α_o sans modifier α^*.

<u>Remarque</u> II.2.5. Lorsque le germe de morphisme α provient d'un morphisme global de G vers H, la définition II.2.4. redonne le morphisme α^* mentionné au théorème II.1.2.

II - 3. <u>Troisième définition du groupe</u> G^*.

La définition de G^* donnée en II.1.1. ne permet pas d'associer à tout germe de morphisme de G vers H un morphisme de G^* dans H^*. La caractérisation de G^* vue au théorème II.2.1. nous donne cette possibilité. Mais aucune des deux caractérisations de G^* que nous avons vues ne montre immédiatement que G^* est un invariant de la structure locale de G, car elles font appel à des propriétés du groupe G tout entier.

L'objet de ce paragraphe est de caractériser le groupe G^* en s'appuyant uniquement sur les propriétés locales de G ; nous retrouverons au passage une manière naturelle d'associer à tout germe de morphisme α un morphisme α^*.

Pour un groupe G (dont le dual est noté $\hat{G}$, $\hat{G}_b$ coïncidant alors avec $(G_d)^\wedge$, groupe de tous les caractères sur G), nous désignerons par $\tilde{G}$ l'ensemble des germes de caractères continus sur G et par $\tilde{G}_b$ l'ensemble de tous les germes de caractères (on appelle ici germe de caractère, non forcément continu, toute classe d'équivalence - pour la relation "coïncider au voisinage de 0 " - de caractères locaux, c'est-à-dire d'applications, continues ou non, définies au voisinage de 0 dans G, à valeurs dans $\mathbb{T}$, respectant les relations algébriques) ; $\tilde{G}$ et $\tilde{G}_b$ sont munis des structures de groupes naturelles et de la topologie discrète.

Soit (U, Φ) un morphisme local de G vers un g.a.l.c. H ; si χ est un caractère local de H défini sur un voisinage V de 0, $\chi_o \Phi$ est alors un caractère local de G défini sur $U \cap \Phi^{-1}(V)$. Il est immédiat de vérifier que si les morphismes locaux (U, Φ) et (U', Φ') coïncident au voisinage de 0 dans G, et que si les caractères locaux χ et χ' coïncident au voisinage de 0 dans H, les caractères locaux $\chi_o \Phi$ et $\chi'_o \Phi'$ coïncident au voisinage de 0 dans G. De là résulte que tout germe de morphisme, α, de G vers H, définit une application - en fait un homomorphisme de groupes - de $\tilde{H}_b$ dans $\tilde{G}_b$; il est clair que cet homomorphisme applique $\tilde{H}$ dans $\tilde{G}$, ce qui permet de définir un homomorphisme (morphisme de groupes discrets) $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{H}_b/\tilde{H}$ dans $\tilde{G}_b/\tilde{G}$.

THÉORÈME II.3.1. Soient G et H deux g.a.l.c., α un germe de morphisme de G vers H.

i) Le groupe discret $\tilde{G}_b/\tilde{G}$ a pour dual G^*.

ii) Le morphisme $\tilde{\alpha}$ a pour dual α^*.

Remarquons que ce théorème nous montre de façon naturelle que G^* est un invariant de la structure locale de G.

Utilisons la remarque déjà faite que G^* est le dual de $\hat{G}_{bd}/\hat{G}_d$. L'application qui à tout caractère sur G associe son germe est un morphisme de $\hat{G}_{bd}$ dans $\tilde{G}_b$, qui applique $\hat{G}_d$ dans $\tilde{G}$; on peut donc définir, par passage au quotient, un morphisme de $\hat{G}_{bd}/\hat{G}_d$ dans $\tilde{G}_b/\tilde{G}$.

La partie i) du théorème II.3.1. est donc équivalente au

THÉORÈME II.3.2. L'application naturelle de $\hat{G}_{bd}/\hat{G}_d$ dans $\tilde{G}_b/\tilde{G}$ est un isomorphisme.

Désignons par u cette application. Si deux caractères sur G définissent deux germes dont le quotient est un germe de caractère continu, leur quotient est un caractère continu. Ceci établit que u est une injection. Le fait que u soit une surjection s'exprime par la relation

$$\tilde{G}_b = \tilde{G} + (\hat{G}_{bd})_o$$

où $(\hat{G}_{bd})_o$ désigne le sous-groupe de $\tilde{G}_b$ formé des germes des caractères globaux sur G. C'est ce qu'exprime le

LEMME II.3.3. Soit un g.a.l.c. G. Tout caractère local sur G coïncide, au voisinage de 0, avec le produit d'un caractère local continu et d'un caractère global.

Remarquons que si ce lemme est vrai pour un sous-groupe ouvert de G, il est vrai pour G aussi, car le caractère global sur le sous-groupe se prolonge en un caractère sur G. D'autre part, si le lemme est vrai pour deux groupes, il l'est encore pour leur produit cartésien. Enfin, le lemme est vrai pour $\mathbb{R}^n$ car tout germe de caractère provient d'un caractère global. Compte tenu de ces remarques et du théorème I.3.1., il suffit de démontrer le lemme en supposant que G est compact.

Pour un groupe G compact, il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{T}^{\omega} \longrightarrow 0 ,$$

où H est un groupe abélien compact totalement discontinu (théorème I.3.9.).

Soit U un voisinage ouvert de 0 dans G, Φ un caractère local de G défini sur U. U contient un sous-groupe ouvert H_o de H ; la restriction de Φ à H_o est un caractère sur H_o, et se prolonge en un caractère global Φ_1 sur G. Ecrivons $\Phi = \Phi_1 \; \Phi_2$, où Φ_2 est un caractère local défini sur U, constant sur H_o. Si nous désignons par K le quotient $G/_{H_o}$, par V l'image de U dans K, (V, Φ_2) définit un caractère local sur K. D'autre part, on déduit du morphisme $G \longrightarrow G/_H = \mathbb{T}^{\omega}$ un morphisme $K \longrightarrow \mathbb{T}^{\omega}$ dont le noyau est le sous-groupe fini $H/_{H_o}$ de H, ce qui permet (au besoin en restreignant le domaine de Φ_2) de transporter Φ_2 en un caractère local défini sur $\mathbb{T}^{\omega}$. Si nous établissons le lemme II.3.3. pour les groupes de la forme $\mathbb{T}^{\omega}$, nous pouvons alors l'étendre au cas général en relevant dans G les caractères, locaux ou globaux, de $\mathbb{T}^{\omega}$. Or un caractère local sur $\mathbb{T}^{\omega}$ est défini sur le produit cartésien d'un ouvert d'un tore de dimension finie et du produit des autres tores coordonnés, sur lequel ce caractère local induit un caractère global. Il suffit donc de démontrer le lemme pour un tore de dimension finie, et on se ramène immédiatement au cas de $\mathbb{T}$. On voit alors qu'il suffit de démontrer le résultat suivant, en identifiant $\mathbb{T}$ à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: tout caractère local sur $\mathbb{R}$ est le produit d'un caractère local continu et d'un caractère global de période 1.

Or, on voit immédiatement que tout caractère local sur $\mathbb{R}$ provient d'un caractère global. Il s'agit donc de montrer que tout caractère sur $\mathbb{R}$ est le produit d'un caractère continu et d'un caractère de période 1. Soit χ un caractère sur $\mathbb{R}$; posons $\chi(1) = e^{ia}$; on peut alors écrire $\chi = \chi_1 \; \chi_2$, avec $\chi_1(t) = e^{ita}$, $\chi_2 = \chi . \chi_1^{-1}$; χ_1 est un caractère continu et χ_2 est périodique de période 1.

Ceci démontre le théorème II.3.2., donc la partie i) du théorème II.3.1. Pour la partie ii) de ce théorème, il suffit, d'après le théorème I.2.7., de l'établir :

1) dans le cas où α est un morphisme global : alors la composition avec $\hat{\alpha}$ définit un morphisme, dual de α^*, de $\hat{H}_{bd}/\hat{H}_d$ dans $\hat{G}_{bd}/\hat{G}_d$, morphisme qui coïncide avec $\tilde{\alpha}$ d'après le théorème II.3.2. ;

2) dans le cas où α est réciproque soit du morphisme β d'injection d'un sous-groupe ouvert, soit du morphisme β de passage au quotient par un sous-groupe discret, $\tilde{\beta}$ a pour dual β^*, et $\tilde{\alpha}$, morphisme réciproque de l'isomorphisme $\tilde{\beta}$, a pour dual le morphisme réciproque de β^*, c'est-à-dire α^*.

II - 4. Propriétés des groupes G^* et des morphismes α^*.

Nous avons donné, dans les paragraphes précédents, diverses définitions des groupes G^* et des morphismes α^*.

Alors que les caractérisations vues en II.3. sont évidemment invariantes par les isomorphismes locaux, et que celles introduites en II.1. ne le sont pas à première vue, qu'au surplus nous n'avons défini, en II.1., le morphisme α^* que pour un morphisme global α, c'est cependant sur les notions du paragraphe II.1. que nous nous appuierons principalement.

THÉORÈME II.4.1. Soient G, H, K trois g.a.l.c., α un germe de morphisme de G vers H, β un germe de morphisme de H vers K. Alors $(\beta \circ \alpha)^* = \beta^* \circ \alpha^*$.

Cela résulte immédiatement du théorème II.3.1. et de la remarque que $(\beta \circ \alpha)^\sim = \tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}$.

THÉORÈME II.4.2. A la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

correspond la suite exacte

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\alpha^*} B^* \xrightarrow{\beta^*} C^* \longrightarrow 0 .$$

C'est une conséquence directe du lemme II.1.4. et du théorème I.1.5.

THÉORÈME II.4.3. Soient G et H deux g.a.l.c.
Alors $(G \times H)^*$ est isomorphe à $G^* \times H^*$. Plus précisément, si α désigne la projection $G \times H \to G$, la projection $(G \times H)^* \to G^*$ est α^*.

Le produit cartésien commute avec le passage au groupe dual (les projections devenant par dualité les injections des groupes facteurs); ce théorème est une conséquence immédiate de l'isomorphisme entre $(A \times B)_b$ et $A_b \times B_b$, lui-même conséquence, par dualité, de l'isomorphisme entre $(A \times B)_d$ et $A_d \times B_d$, pour deux g.a.l.c quelconques A et B. Passant au quotient, on obtient, à partir des isomorphismes

$$(\hat{G} \times \hat{H})_{bd} \simeq \hat{G}_{bd} \times \hat{H}_{bd}$$

et

$$(\hat{G} \times \hat{H})_d \simeq \hat{G}_d \times \hat{H}_d ,$$

l'isomorphisme

$$(\hat{G} \times \hat{H})_{bd} \big/ (\hat{G} \times \hat{H})_d \simeq \hat{G}_{bd}/\hat{G}_d \times \hat{H}_{bd}/\hat{H}_d$$

d'où le résultat cherché, si l'on remarque encore que les morphismes de projection se comportent convenablement, ce qui est immédiat.

Remarque II.4.4. Le théorème précédent s'étend sans difficulté au cas d'un produit cartésien fini. Mais il est en défaut pour un produit infini de groupes compacts. Considérons le groupe $G = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$, où $G_i = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$. Alors G est totalement discontinu non discret, de sorte que $G^* \neq \{0\}$. Mais $\prod_{i \in \mathbb{N}} G_i^* = \{0\}$, car $G_i^* = \{0\}$, G_i étant discret.

Considérons maintenant deux g.a.l.c. A et B , et un morphisme $v : A \to B$ qui est une injection d'image dense.

Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^* \arrow[r] \arrow[ddd, "v^*"'] & A_{db} \arrow[rrr] \arrow[ddd, "v_{db}"'] & & & A_b \arrow[r] \arrow[ddd, "v_b"] & 0 \\
& & & A_d \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[d, "v_d"'] & A \arrow[ur] \arrow[d, "v"] & & \\
& & & B_d \arrow[r] \arrow[dl] & B \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & B^* \arrow[r] & B_{db} \arrow[rrr] & & & B_b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

il est clair que v_d et v_{db} sont des injections, que v_b est surjectif et que v^* est injectif. Si de plus v^* est un isomorphisme, l'image d'un élément de A_{db} par v_{db} ne peut appartenir à B^* que si cet élément appartient à A^* , ce qui entraîne que v_b est un isomorphisme.

Soit alors α un morphisme d'un groupe G dans un groupe H . Appelons A le quotient de G par le noyau N de α , B le sous-groupe fermé de H adhérence de l'image du morphisme α . On peut alors décomposer α de la manière suivante :

$$G \xrightarrow{u} G/_N = A \xrightarrow{v} B \xrightarrow{w} H ,$$

où u est la surjection canonique $G \to G/_N$ et w l'injection canonique du sous-groupe B dans H . De plus A, B et le morphisme v ont les propriétés décrites à l'alinéa précédent.

Nous allons maintenant considérer le morphisme $\alpha^* = (wvu)^* = w^* v^* u^*$:

on peut décomposer α^* sous la forme

$$G^* \xrightarrow{u^*} G^*/_{N^*} = A^* \xrightarrow{v^*} B^* \xrightarrow{w^*} H^*$$

où, d'après le théorème II.4.1., u^* est la surjection canonique $G^* \to (G/_N)^* = G^*/_{N^*}$, et w^* l'injection canonique du sous-groupe B^* dans H^* .

THÉORÈME II.4.5. <u>Soit α un germe de morphisme de G vers H tel que $\alpha^* = 0$. Alors</u> $\alpha = 0$.

En vertu des théorèmes I.2.7. et II.1.3., on peut supposer que α est défini par un morphisme global, que nous notons encore α . Il s'agit alors de montrer, avec les notations introduites plus haut, que N est un sous-groupe ouvert de G , c'est-à-dire que $A^* = \{0\}$. Or v^* et w^* sont des injections, de sorte que $\alpha^* = w^* v^* u^*$ ne peut être égal à 0 que si $u^* = 0$, donc $A^* = \{0\}$.

THÉORÈME II.4.6. <u>Soit α un germe de morphisme de G vers H tel que α^* soit un isomorphisme de G^* sur H^* . Alors α est un germe d'isomorphisme local.</u>

Comme plus haut, on peut considérer que α est un morphisme global. Considérons la décomposition de α

$$G \xrightarrow{u} G/_N = A \xrightarrow{u_o} B_o \xrightarrow{v_o} B \xrightarrow{w} H$$

où, comme précédemment, N est le noyau du morphisme α , B l'adhérence dans H de l'image de G par α , mais où le morphisme $v : A \longrightarrow B$ a été factorisé en passant par B_o qui est le groupe B muni de la topologie de g.a.l.c. pour laquelle l'image de A est un sous-groupe ouvert : u_o est l'injection de A dans B_o , v_o la bijection identique de B_o dans B . On a alors une décomposition de α^* :

$$G^* \xrightarrow{u^*} A^* \xrightarrow{u_o^*} B_o^* \xrightarrow{v_o^*} B^* \xrightarrow{w^*} H^* .$$

Si $w^* v_o^* u_o^* u^*$ est un isomorphisme, w^* est surjectif, donc B est un sous-groupe ouvert de H et u^* est injectif, donc N est un sous-groupe discret de G . Donc $v_o^* u_o^*$ est un isomorphisme et, comme A et B_o sont localement isomorphes, u_o^* est un isomorphisme. Par conséquent v_o^* est un isomorphisme, donc (d'après les remarques faites plus haut) $(v_o)_b$ est un isomorphisme, ce qui montre que $(\hat{v}_o)_d$ est un isomorphisme de $\hat{B}_d$ sur $(\hat{B}_o)_d$. Autrement dit, les caractères continus sur B_o et sur B sont les mêmes. Or, un théorème dû à Hewitt ([H]) affirme que si un groupe est muni de deux topologies de groupe localement compact $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, et que $\mathcal{C}_1$ soit strictement plus fine que $\mathcal{C}_2$, il existe des caractères continus pour $\mathcal{C}_1$, non continus pour $\mathcal{C}_2$. Comme ce n'est pas le cas, on en déduit que la bijection continue v_o de B_o dans B est un isomorphisme, ce qui entraîne que α est un isomorphisme local.

<u>Remarque</u> II.4.7. Il n'est pas vrai que tout morphisme de G^* vers H^* soit de la forme α^* , où α est un germe de morphisme de G vers H . Bien pis, les groupes G^* et H^* peuvent être isomorphes sans qu'il existe d'isomorphisme local entre G et H .

THÉORÈME II.4.8. <u>Pour tout entier positif</u> n , <u>les groupes</u> $(\mathbb{R}^n)^*$ <u>sont isomorphes</u>.

Le groupe $\mathbb{R}^*$ est le dual de $\mathbb{R}_{bd}/_{\mathbb{R}_d}$. Or le groupe $\mathbb{R}_d$, groupe divisible sans torsion, est, d'après le théorème I.3.6., de la forme $\mathbb{Q}^{\oplus c}$ (où c désigne la puissance du continu). $\mathbb{R}_b$, groupe dual de $\mathbb{R}_d$, est également sans torsion et divisible car, pour tout entier positif n, l'application h_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = nx$ est un isomorphisme, et détermine une application $(h_n)_b$ de $\mathbb{R}_b$ dans $\mathbb{R}_b$ qui est aussi un isomorphisme, et évidemment telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_b$, $(h_n)_b(x) = x + x + \ldots + x$ (n termes). De sorte que $\mathbb{R}_{bd}$ est de la forme $\mathbb{Q}^{\oplus\omega}$ où ω est le cardinal de $\mathbb{R}_b$, égal à 2^c d'après le lemme II.1.6. De là résulte que $\mathbb{R}_{bd}/\mathbb{R}_d$ est aussi de la forme $\mathbb{Q}^{\oplus\omega}$, et que, pour tout entier positif n, $(\mathbb{R}_{bd}/\mathbb{R}_d)^n \simeq (\mathbb{Q}^{\oplus\omega})^n$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^{\oplus\omega}$.

Remarque II.4.9. Le théorème II.4.8. nous fournit un contre-exemple à la conjecture selon laquelle l'isomorphisme de G^* et H^* correspondrait à l'isomorphisme local de G et H. Mais on peut malgré tout obtenir à partir de G^* des renseignements sur la structure locale de G, pour une vaste classe de groupes totalement discontinus. (Voir chapitre VI).

II - 5. Remarques sur le cas non abélien.

Soit G un groupe localement compact. Considérons les compactifiés presque-périodiques G_b de G et G_{db} de G_d. L'injection continue de G_d dans G, composée avec l'application d'image dense de G dans G_b, permet de définir, en vertu du théorème I.1.1., un morphisme surjectif de G_{db} sur G_b, dont on peut, par analogie avec le cas abélien, appeler G^* le noyau.

On peut donc, à tout groupe localement compact G, attacher un groupe compact G^*. De plus, un diagramme, semblable à celui construit pour démontrer le théorème II.1.2., permet d'attacher à tout morphisme (global) α de G dans un autre groupe H, un morphisme α^* de G^* dans H^*.

Si, d'autre part, nous appelons h l'application canonique de G_d dans G_{db}, nous pouvons considérer l'intersection $\bigcap \overline{h(U)}^b$ des adhérences dans G_{db} des images $h(U)$ des voisinages de 0 dans G. Cette intersection est un sous-groupe G^{**} de G_{db}.

Dans le cas abélien, l'égalité de G^* et G^{**} est exprimée par le théorème II.2.1.

On peut donc chercher à édifier, dans le cas général, une théorie analogue à celle du cas abélien, à partir des groupes G^* et G^{**}. Nous allons voir qu'une telle tentative est vouée à l'échec.

Exactement comme dans le cas abélien, on démontre l'inclusion $G^{**} \subset G^*$. Mais la démonstration de l'inclusion réciproque ne s'étend pas du cas abélien au cas non abélien (la question est ouverte).

Nous pouvons voir aisément que, si G est un groupe discret, $G^* = \{0\}$. Mais nous montrons ci-dessous que ni G^* (ni a fortiori G^{**}) n'ont les propriétés satisfaisantes que nous avons vues pour les groupes abéliens.

THÉORÈME II.5.1. <u>Il existe un groupe</u> G <u>non discret tel que</u> $G^* = G^{**} = \{0\}$.

THÉORÈME II.5.2. <u>Il existe deux groupes localement isomorphes</u> G <u>et</u> H <u>tels que</u> G^* <u>et</u> H^* <u>ne soient pas isomorphes, non plus que</u> G^{**} <u>et</u> H^{**} .

Nous nous appuierons sur la remarque (voir [VN]) que le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ muni de la topologie discrète ne possède aucune représentation unitaire non triviale de dimension finie, d'où il résulte que son compactifié presque-périodique se réduit à $\{0\}$. On en déduit donc le théorème II.5.1. en prenant pour G le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ muni de sa topologie usuelle : G n'est pas discret, mais $G^* = G^{**} = \{0\}$.

Pour le théorème II.5.2., considérons le sous-groupe G_o de $GL(2,\mathbb{R})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $y \in \mathbb{R}$) et le sous-groupe distingué H_o de G_o formé des matrices $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On sait (voir [VN-W] ou [H.R] , p. 350) que toute représentation unitaire de dimension finie de G_o , continue ou non, est constante sur les classes de H_o . Or H_o est isomorphe à $\mathbb{R}$; soit H le groupe H_o muni de la topologie qui le rend isomorphe et homéomorphe à $\mathbb{R}$; il existe une topologie de groupe localement compact sur G_o , pour laquelle H soit ouvert ; appelons G le groupe G_o muni de cette topologie. Toutes les représentations unitaires de dimension finie de G sont alors continues, de sorte que $G^* = \{0\}$; mais H^* , isomorphe à $\mathbb{R}^*$, n'est pas réduit à $\{0\}$. Comme G et H sont localement isomorphes, ceci prouve le théorème II.5.2. Remarquons encore que le groupe G considéré ici permet d'obtenir à nouveau le théorème II.5.1.

-:-:-:-

CHAPITRE III

POIDS ET TRANSFORMÉES DE FOURIER.

Nous étudions ici certaines sous-algèbres de $A(G)$ pour un groupe G , abélien localement compact, formées des transformées de Fourier des fonctions sommables par rapport à certains poids sur le dual de G . Ceci nous permettra de construire certains invariants de la structure locale des groupes abéliens localement compacts.

III - 1. Poids et algèbres de transformées de Fourier associés.

Soient un groupe abélien localement compact G , et $\hat{G}$ le groupe dual de G .

DÉFINITION III.1.1. Une fonction à valeurs réelles ω définie sur $\hat{G}$ est appelée poids si elle est mesurable, bornée sur tout compact, bornée inférieurement par un nombre strictement positif, et s'il existe une constante k telle que $\omega(a+b) \leq k\,\omega(a)\,\omega(b)$ quels que soient les éléments a et b de $\hat{G}$.

DÉFINITION III.1.2. Deux poids, définis sur le même groupe, sont équivalents si leur quotient est borné supérieurement, et inférieurement par un nombre strictement positif.

PROPOSITION III.1.3. Tout poids est équivalent à un poids continu.

Le procédé de démonstration utilise une idée classique de régularisation : il suffit de voir que, si α désigne la fonction caractéristique d'un voisinage compact de 0 , ω et $\omega * \alpha$ sont des poids équivalents et que le second est continu.

Il est facile de vérifier que si f et f' sont des fonctions sur $\hat{G}$ dont les produits avec ω sont sommables, il en est de même de $f * f'$. De sorte que l'ensemble des transformées de Fourier de telles fonctions forme une algèbre (pour la multiplication ponctuelle) de fonctions définies sur G . Nous noterons $A_\omega(G)$ cette algèbre qui, munie de la norme $\|g\|_\omega = \int_{\hat{G}} |f|\omega$, avec $g = \hat{f}$, est une algèbre de Banach semi-simple.

Si K est un compact de G , l'ensemble des éléments de $A_\omega(G)$ à support dans K est une sous-algèbre fermée que nous désignons par $S_\omega(K)$; elle peut se réduire à $\{0\}$ même si l'intérieur de K n'est pas vide.

Pour un compact K de G , nous noterons $A_\omega(K)$ l'algèbre des restrictions à K des éléments de $A_\omega(G)$: c'est l'algèbre quotient de $A_\omega(G)$ par l'idéal fermé des éléments nuls sur K . $A_\omega(K)$ sera munie de la norme quotient $\|f\|_{\omega,K} = \inf\limits_{\substack{g \in A_\omega(G) \\ g|_K = f}} \|g\|_\omega$.

$M_\omega(G)$ est l'espace vectoriel des mesures de Radon sur G muni de la norme $\|\mu\|_{\frac{1}{\omega}} = \left\| \frac{\hat{\mu}}{\omega} \right\|_\infty$, $M_\omega(K)$ est le sous-espace des mesures à support dans le compact K , muni de la norme induite.

Enfin, nous désignerons par $B_\omega(G)$ l'algèbre de Banach des transformées de Fourier-Stieltjes des mesures μ sur $\hat{G}$ telles que $\omega\mu$ soit une mesure bornée, munie de la norme $\|\hat{\mu}\|_\omega = \int_{\hat{G}} \omega \, d|\mu|$. Il est clair que $A_\omega(G) = A(G) \cap B_\omega(G)$ et que c'est un idéal fermé de $B_\omega(G)$. Si K est un compact de G , la sous-algèbre des éléments de $B_\omega(G)$ à support dans K coïncide avec $S_\omega(K)$. Quant à l'algèbre $B_\omega(K)$ des restrictions à K des éléments de $B_\omega(G)$, munie de la norme d'algèbre quotient, elle coïncide avec $A_\omega(K)$ lorsque le poids ω est tel que $A_\omega(G)$ soit une algèbre régulière.

Il est évident que si ω_1 et ω_2 sont deux poids équivalents sur $\hat{G}$, $A_{\omega_1}(G)$ (resp. $B_{\omega_1}(G)$, $S_{\omega_1}(K)$, $A_{\omega_1}(K)$, $B_{\omega_1}(K)$) et $A_{\omega_2}(G)$ (resp. $B_{\omega_2}(G)$, $S_{\omega_2}(K)$, $A_{\omega_2}(K)$, $B_{\omega_2}(K)$) coïncident et possèdent des normes équivalentes.

Nos premiers résultats donnent en quelque sorte une réciproque de cette remarque.

THÉORÈME III.1.4. <u>Soient</u> ω_1 <u>et</u> ω_2 <u>deux poids sur le dual d'un</u> g.a.l.c. G . <u>Les conditions ci-dessous sont équivalentes</u> :

i) ω_1 <u>et</u> ω_2 <u>sont des poids équivalents</u> ;

ii) $B_{\omega_1}(G) = B_{\omega_2}(G)$;

iii) $A_{\omega_1}(G) = A_{\omega_2}(G)$.

Il est clair que i) $\Longrightarrow$ ii) et que ii) $\Longrightarrow$ iii). Pour montrer que iii) $\Longrightarrow$ i), remarquons d'abord que l'égalité des ensembles $A_{\omega_1}(G)$ et $A_{\omega_2}(G)$ implique l'équivalence des normes, car il s'agit d'algèbres de Banach semi-simples. De sorte que le théorème résultera du lemme ci-dessous.

LEMME III.1.5. <u>Soit</u> ω <u>un poids sur le dual d'un</u> g.a.l.c. G . <u>A tout caractère continu</u> χ <u>sur</u> G , <u>associons l'application</u> $p_\chi : f \longrightarrow \bar{\chi} f$, <u>automorphisme de l'espace vectoriel</u> $A_\omega(G)$. <u>Alors la fonction</u> (<u>définie sur</u> $\hat{G}$) $\| p_\chi \|$ <u>est un poids équivalent à</u> ω .

En remplaçant au besoin ω par un poids équivalent, on peut supposer que l'on a un poids continu et tel que $\omega(\gamma + \chi) \leq \omega(\gamma)\omega(\chi)$ quels que soient γ et χ dans $\hat{G}$.

Soit alors $f \in A_\omega(G)$, $f = \hat{g}$. Alors $\bar{\chi} f$ est la transformée de Fourier de la fonction g_χ définie sur $\hat{G}$ par $g_\chi(\gamma) = g(\gamma - \chi)$, et

$$\| \bar{\chi} f \|_\omega = \int_{\hat{G}} |g(\gamma - \chi)| \omega(\gamma) d\gamma = \int_{\hat{G}} |g(\gamma)| \omega(\gamma + \chi) d\gamma$$

$$\leq \int_{\hat{G}} |g(\gamma)| \omega(\gamma) \omega(\chi) d\gamma ,$$

d'où

$$\|p_\chi\| \leq \omega(\chi) ,$$

ce qui établit, entre autres, que p_χ est linéaire continue de $A_\omega(G)$ dans $A_\omega(G)$. Le lemme résultera de l'inégalité

$$\omega(\chi) \leq \omega(0) \|p_\chi\|$$

que nous établissons maintenant : soient ε un réel positif et U un voisinage compact de 0 tels que, quel que soit γ dans U, on ait :

$$|\omega(\gamma) - \omega(0)| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |\omega(\gamma + \chi) - \omega(\chi)| < \varepsilon \quad ;$$

prenons pour g la fonction caractéristique de U, et soit $f = \hat{g}$. Alors

$$\|f\|_\omega = \int_{\hat{G}} |g(\gamma)|\, \omega(\gamma) d\gamma \leq [\omega(0) + \varepsilon] \int |g(\gamma)|\, d\gamma ,$$

$$\|\bar{\chi} f\|_\omega = \int_{\hat{G}} |g(\gamma - \chi)|\, \omega(\gamma) d\gamma = \int_U |g(\gamma)|\, \omega(\gamma + \chi) d\gamma$$

$$\geq [\omega(\chi) - \varepsilon] \int |g(\gamma)|\, d\gamma ,$$

d'où

$$\|p_\chi\| \geq \frac{\|\bar{\chi} f\|_\omega}{\|f\|_\omega} \geq \frac{\omega(\chi) - \varepsilon}{\omega(0) + \varepsilon} ,$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Cela démontre l'inégalité ci-dessus, donc le lemme III.1.5.

Les deux théorèmes ci-dessous sont analogues au précédent.

THÉORÈME III.1.6. <u>Soient</u> G <u>un</u> g.a.l.c., ω_1 <u>et</u> ω_2 <u>deux poids sur le dual de</u> G, K <u>un compact de</u> G. <u>Si les algèbres</u> $S_{\omega_1}(K)$ <u>et</u> $S_{\omega_2}(K)$ <u>sont identiques et non réduites à</u> $\{0\}$, <u>les poids</u> ω_1 <u>et</u> ω_2 <u>sont équivalents</u>.

THÉORÈME III.1.7. <u>Soient</u> G <u>un</u> g.a.l.c., ω_1 <u>et</u> ω_2 <u>deux poids sur le dual de</u> G, K <u>un compact de</u> G <u>tel que</u>

i) <u>il existe un compact</u> K_0 <u>contenu dans l'intérieur de</u> K <u>tel que</u> $S_{\omega_1}(K_0)$ <u>et</u> $S_{\omega_2}(K_0)$ <u>ne soient pas réduites à</u> $\{0\}$;

ii) <u>il existe des éléments</u> α_1 <u>et</u> α_2 <u>de</u> $A_{\omega_1}(G)$ <u>et</u> $A_{\omega_2}(G)$ <u>respectivement, à supports dans</u> K, <u>valant</u> 1 <u>sur</u> K_0.

<u>Si les algèbres</u> $A_{\omega_1}(K)$ <u>et</u> $A_{\omega_2}(K)$ <u>sont identiques, les poids</u> ω_1 <u>et</u> ω_2 <u>sont équivalents</u>.

De même qu'au théorème III.1.4., il s'agit d'algèbres de Banach semi-simples, et l'identité implique l'équivalence des normes. Les théorèmes III.1.6. et III.1.7. découlent donc respectivement de deux lemmes ci-dessous :

LEMME III.1.8. <u>Soit un</u> g.a.l.c. G , ω <u>un poids sur le dual de</u> G , K <u>un compact de</u> G <u>tel que</u> $S_\omega(K)$ <u>ne soit pas réduit à</u> $\{0\}$. <u>Alors, pour tout</u> $\chi \in \hat{G}$, $f \longrightarrow \bar{\chi} f$ <u>est un endomorphisme continu de l'espace de Banach</u> $S_\omega(K)$, <u>dont la norme est un poids sur</u> $\hat{G}$ <u>équivalent à</u> ω .

LEMME III.1.9. <u>Soit un</u> g.a.l.c. G , ω <u>un poids sur le dual,</u> K <u>un compact de</u> G . <u>On suppose que</u>

i) <u>il existe un compact</u> K_0 <u>contenu dans l'intérieur de</u> K , <u>tel que</u> $S_\omega(K_0)$ <u>ne soit pas réduite à</u> $\{0\}$;

ii) <u>il existe un élément</u> α <u>de</u> $A_\omega(G)$, <u>à support dans</u> K , <u>égal à</u> 1 <u>sur</u> K_0 .

<u>Alors, pour tout caractère continu</u> χ <u>de</u> G , $f \longrightarrow \bar{\chi} f$ <u>est un endomorphisme continu de l'espace de Banach</u> $A_\omega(K)$, <u>dont la norme est un poids sur</u> $\hat{G}$ <u>équivalent à</u> ω .

Remarquons d'abord qu'il faut bien imposer des conditions au compact K du théorème III.1.7. ou du lemme III.1.9. Si on prend K réduit à un point de G , $K = \{x\}$, $A_\omega(\{x\})$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, l'endomorphisme considéré est la multiplication par $\overline{\langle \chi, x \rangle}$, dont la norme, égale à 1 , n'est équivalente à ω que si ω est borné sur $\hat{G}$; d'ailleurs $A_\omega(\{x\})$ ne dépend pas du poids ω .

Appelons q_χ l'endomorphisme considéré au lemme III.1.8., r_χ celui du lemme III.1.9.

Comme au lemme III.1.5., on démontre que q_χ et r_χ sont des endomorphismes continus de normes majorées par $\omega(\chi)$; cela résulte aussi du fait que l'on a dans un cas un sous-espace, dans l'autre un espace quotient de $A_\omega(G)$.

Dans le cas du lemme III.1.8., considérons un élément f de $S_\omega(K)$ de norme 1.

On a, avec $f = \hat{g}$,

$$\| q_\chi \| \geq \| \bar{\chi} f \|_\omega = \int_{\hat{G}} |g(\gamma - \chi)|\, \omega(\gamma)\, d\gamma = \int_{\hat{G}} |g(\gamma)|\, \omega(\gamma + \chi)\, d\gamma \ ;$$

comme $\omega(\gamma + \chi)$ est supérieur ou égal à $\dfrac{\omega(\chi)}{\omega(-\gamma)}$, on a

$$\| q_\chi \| \geq \omega(\chi) \int_{\hat{G}} \frac{|g(\gamma)|}{\omega(-\gamma)}\, d\gamma \ ,$$

ce qui établit le lemme III.1.8. puisque la fonction g est choisie indépendamment de χ .

Pour le lemme III.1.9., soit $g \in S_\omega(K_0)$ telle que $\|g_\omega\| = 1$, et soit $\alpha \in A_\omega(G)$, α à support dans K , égale à 1 sur K_0 . Appelons f l'élément de $A_\omega(K)$ défini comme la restriction à K de la fonction g . Soit $\varepsilon > 0$, $h \in A_\omega(G)$ tel que $h|_K = f$ et que $\| \bar{\chi} f \|_{\omega, K} \geq (1 - \varepsilon) \| \bar{\chi} h \|_\omega$. On a $\bar{\chi} g = \alpha \bar{\chi} h$, d'où

$\|\bar{\chi}h\|_\omega \geq \dfrac{\|\bar{\chi}g\|_\omega}{\|\alpha\|_\omega}$, ce qui entraîne que

$$\|r_\chi\| \geq \frac{\|\bar{\chi}f\|_{\omega,K}}{\|f\|_{\omega,K}} \geq \frac{1-\varepsilon}{\|\alpha\|_\omega} \frac{\|\bar{\chi}g\|_\omega}{\|g\|_\omega} ,$$

d'où en fait

$$\|r_\chi\| \geq \frac{1}{\|\alpha\|_\omega} \frac{\|\bar{\chi}g\|_\omega}{\|g\|_\omega} ,$$

et, la fonction g étant choisie indépendamment de χ , on achève comme pour le lemme III.1.8.

III - 2. Caractérisation des éléments de $B_\omega(G)$.

Nous allons donner des propriétés caractéristiques des fonctions appartenant à $B_\omega(G)$ ou $B_\omega(K)$.

On considère dans ce paragraphe, un poids ω continu et tel que $\omega(\gamma+\chi) \leq \omega(\gamma)\omega(\chi)$.

THÉORÈME III.2.1. Soit G un g.a.l.c., ω un poids sur le dual $\hat{G}$ de G . Pour une fonction f continue sur G , les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $f \in B_\omega(G)$;

ii) l'application linéaire f^* : $\mu \longrightarrow f\mu$ est un endomorphisme continu de $M_\omega(G)$;

iii) la restriction f_1^* de f^* au sous-espace de $M_\omega(G)$ formé des mesures définies par les fonctions sommables sur G est un endomorphisme continu.

Si ces conditions sont remplies, on a de plus

$$\|f_1^*\| \leq \|f^*\| \leq \|f\|_\omega \leq \omega(0)\, \|f_1^*\| .$$

i) entraîne ii) : soit α une mesure bornée sur $\hat{G}$, telle que $f = \hat{\alpha}$, $\int \omega \, d|\alpha| < \infty$. On a, pour $\mu \in M_\omega(G)$, et $\chi \in \hat{G}$,

$$\widehat{f\mu}(\chi) = \int_{\hat{G}} \hat{\mu}(\chi+\gamma)\, d\alpha(\gamma) ,$$

d'où, tenant compte de l'inégalité

$$\frac{1}{\omega(\chi)} \leq \frac{\omega(\gamma)}{\omega(\gamma+\chi)} ,$$

$$\left|\frac{\widehat{f\mu}(\chi)}{\omega(\chi)}\right| \leq \|f\|_\omega \, \|\mu\|_{\frac{1}{\omega}} ,$$

ce qui établit ii).

ii) implique iii) trivialement.

Il reste à montrer que iii) entraîne i) et que

$$\|f\|_\omega \leq \omega(0)\, \|f_1^*\| \ .$$

La condition iii) implique que $g \longrightarrow \dfrac{\hat{fg}(0)}{\omega(0)}$ est une forme linéaire continue de norme $\leq \|f_1^*\|$ sur $L^1(G)$ muni de la norme $\|g\|_{\frac{1}{\omega}} = \|\frac{\hat{g}}{\omega}\|_\infty$. L'ensemble des fonctions de la forme $\frac{\hat{g}}{\omega}$, avec $g \in L^1(G)$, est un sous-espace vectoriel de $C_0(\hat{G})$, espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini sur $\hat{G}$, muni de la norme de la convergence uniforme. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe sur $\hat{G}$ une mesure bornée σ de masse totale inférieure ou égale à $\|f_1^*\|$, telle que, pour toute $g \in L^1(G)$, on ait

$$\hat{fg}(0) = \omega(0) \int_{\hat{G}} \frac{\hat{g}}{\omega}\, d\sigma = \omega(0) \int_{\hat{G}} \hat{g}\, d\nu \ ,$$

en appelant ν la mesure produit de σ par $\frac{1}{\omega}$.

Comme

$$\int_{\hat{G}} \hat{g}\, d\nu = \int_G g\hat{\nu}\, dx \ ,$$

on a

$$\hat{fg}(0) = \omega(0) \int_G g\hat{\nu}\, dx \ ,$$

ou encore

$$\int_G f(x)\, g(x)\, dx = \omega(0) \int_G g(x)\hat{\nu}(x)\, dx \ .$$

Comme f et $\hat{\nu}$ sont continues, on en déduit

$$f = \omega(0)\hat{\nu} \ ,$$

d'où $f \in B_\omega(G)$ et $\|f\|_\omega \leq \omega(0)\, \|f_1^*\|$,
puisque

$$\int_{\hat{G}} \omega\, d|\nu| = \int_{\hat{G}} d|\sigma| \leq \|f_1^*\| \ .$$

THÉORÈME III.2.2. <u>Soit</u> K <u>un compact d'un</u> g.a.l.c. G , V <u>un voisinage compact de</u> K , f <u>une fonction continue à support dans</u> K . <u>Les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes</u> :

i) $f_{|K} \in B_\omega(K)$;

ii) <u>l'application linéaire</u> $f_V^* : \mu \longrightarrow f\mu$ <u>est un endomorphisme continu de</u> $M_\omega(V)$.

iii) <u>la restriction</u> $f_{V,1}^*$ <u>de</u> f_V^* <u>aux mesures à support dans</u> V <u>définies par des fonctions sommables est un endomorphisme continu</u>.

<u>De plus, si ces conditions sont remplies,</u> $\|f\|_{\omega,K}$, $\|f_V^*\|$ <u>et</u> $\|f_{V,1}^*\|$ <u>sont des normes équivalentes sur</u> $B_\omega(K)$.

Les implications i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) se démontrent comme précédemment. Supposons donc que iii) soit vérifiée : nous pouvons faire un raisonnement analogue à celui du théorème III.2.1. : la forme linéaire $g \longrightarrow \frac{\widehat{fg}(0)}{\omega(0)}$ est continue sur l'espace des fonctions sommables à support dans V, muni de la norme $\|g\|_{\frac{1}{\omega}} = \|\frac{\hat{g}}{\omega}\|_\infty$. Il existe donc, comme précédemment, une mesure σ sur $\hat{G}$ telle que $\int d\,|\sigma| \leq \|f^*_{V,1}\|$ et que

$$\widehat{fg}(0) = \int_G f(x)\, g(x)\, dx = \omega(0) \int_{\hat{G}} \frac{\hat{g}}{\omega}\, d\sigma \ ,$$

soit, en posant $\nu = \frac{1}{\omega}\sigma$,

$$\int_G f(x)\, g(x)\, dx = \omega(0) \int_{\hat{G}} \hat{g}\, d\nu = \omega(0) \int_G g\, \hat{\nu}\, dx$$

ce qui montre que l'on a, au voisinage de K, $f = \omega(0)\hat{\nu}$ où ν est une mesure sur $\hat{G}$ telle que $\int \omega\, |d\nu| < \infty$. Donc $f \in B_\omega(K)$.

De plus, on a évidemment

$$\|f^*_{V,1}\| \leq \|f^*_V\| \leq \|f\|_{\omega,K}$$

et la fin du raisonnement montre que

$$\|f\|_{\omega,K} \leq \omega(0)\ \|f^*_{V,1}\| \ .$$

Remarquons qu'il n'a pas été démontré que f, fonction définie sur G, à support dans K, appartient à $B_\omega(G)$, mais simplement que f coïncide, sur un voisinage de K, avec une fonction appartenant à $B_\omega(G)$. Cette distinction disparaît si l'algèbre $B_\omega(G)$ est régulière, situation que nous serons amenés à considérer ultérieurement.

D'autre part, la caractérisation ci-dessus fait intervenir des mesures dont le support est contenu dans un voisinage (arbitraire) de K, mais ne permet pas de raisonner uniquement à partir du compact K.

Le théorème suivant répond à cette objection. Il faut le faire précéder d'une définition.

DÉFINITION III.2.3. <u>Un compact</u> K <u>d'un</u> g.a.l.c. <u>est dit de type</u> ω-M (ω <u>étant un poids sur le dual de</u> G) <u>si, pour tout point</u> x <u>de</u> K <u>et tout voisinage</u> V <u>de</u> x, <u>il existe une mesure bornée positive</u> μ <u>portée par</u> $V \cap K$, <u>telle que</u> $\frac{\hat{\mu}}{\omega}$ <u>tende vers</u> 0 <u>à l'infini</u>.

<u>Exemples</u> : a) Si le poids ω tend vers l'infini à l'infini, tout compact est de type ω-M.

b) Tout compact égal à l'adhérence de son intérieur est de type ω-M pour tout poids ω. Plus généralement, il en est ainsi de tout compact qui est de multiplicité stricte au voisinage de chacun de ses points (au sens de ce terme dans la théorie classique de la transformation de Fourier qui correspond à un poids constant égal à 1).

Nous désignerons par $M^0_\omega(K)$ le sous-espace vectoriel de $M_\omega(K)$, muni de la norme induite $\|\mu\|_{\frac{1}{\omega}}$, formé des mesures bornées à support dans K, telles que $\frac{\hat{\mu}}{\omega}$ tende vers 0 à l'infini sur $\hat{G}$.

THÉORÈME III.2.4. <u>Soit</u> G <u>un</u> g.a.l.c., ω <u>un poids sur le groupe dual de</u> G, K <u>un compact de</u> G <u>de type</u> ω-M. <u>Pour une fonction</u> f <u>continue sur</u> K, <u>les propriétés ci-dessous sont équivalentes</u> :

i) $f \in B_\omega(K)$;

ii) <u>l'application linéaire</u> $f_* : \mu \longrightarrow f\mu$ <u>est un endomorphisme continu de</u> $M_\omega(K)$;

iii) <u>la restriction</u> f^0_* <u>de</u> f_* <u>à</u> $M^0_\omega(K)$ <u>est un endomorphisme continu de</u> $M^0_\omega(K)$.

Il est facile de vérifier que i) $\Longrightarrow$ ii) et ii) $\Longrightarrow$ iii). Pour démontrer que iii) $\Longrightarrow$ i), nous faisons encore un raisonnement analogue aux précédents.

La propriété iii) entraîne que $\mu \longrightarrow \frac{\widehat{f\mu}(0)}{\omega(0)}$ est une forme linéaire continue sur $M^0_\omega(K)$. Le théorème de Hahn-Banach entraîne alors l'existence d'une mesure bornée sur $\hat{G}$, σ, telle que

$$\widehat{f\mu}(0) = \omega(0)\int_{\hat{G}} \frac{\hat{\mu}}{\omega}\, d\sigma = \omega(0)\int_{\hat{G}} \hat{\mu}\, d\nu \quad ,$$

en posant $\nu = \frac{1}{\omega}\sigma$; d'où il résulte que

$$\widehat{f\mu}(0) = \int_G f\, d\mu = \omega(0)\int_{\hat{G}} \hat{\mu}\, d\nu = \omega(0)\int_G \hat{\nu}\, d\mu \quad ;$$

comme f et $\hat{\nu}$ sont continues et que l'on peut choisir, pour tout point de K et tout voisinage de ce point, une mesure μ positive et portée par ce voisinage, on en déduit que $f = \omega(0)\,\hat{\nu}|_K$, d'où $f \in B_\omega(K)$.

III - 3. <u>Action des morphismes locaux sur les poids</u>.

Pour un groupe abélien localement compact G, considérons la famille des poids sur $\hat{G}$. La notion d'équivalence de poids introduit une relation d'équivalence.

Nous désignerons par $\mathcal{T}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de poids sur le dual $\hat{G}$ de G.

Soient H un autre groupe, Φ un morphisme de G dans H. Si ω est un poids sur $\hat{G}$, $\omega \circ \hat{\Phi}$ est un poids sur $\hat{H}$, et il est clair que si ω et ω' sont deux poids équivalents sur $\hat{G}$, $\omega \circ \hat{\Phi}$ et $\omega' \circ \hat{\Phi}$ sont deux poids équivalents sur $\hat{H}$.

Ceci nous permet de définir sans ambiguïté $\Omega \circ \hat{\Phi}$, pour un élément Ω de $\mathcal{T}(G)$: on associe donc à Φ une application de $\mathcal{T}(G)$ dans $\mathcal{T}(H)$. Nous allons voir que l'on peut étendre ceci lorsque Φ est un germe de morphisme, pas nécessairement défini par un morphisme global.

THÉORÈME III.3.1. a) A tout germe de morphisme α d'un g.a.l.c. G dans un g.a.l.c. H , on peut associer de manière unique une application $\dot{\alpha}$ de $\mathcal{T}(G)$ dans $\mathcal{T}(H)$ de telle sorte que

i) si α est un germe de morphisme de G dans H et β un germe de morphisme de H dans K ,

$$(\beta \circ \alpha)^{\cdot} = \dot{\beta} \circ \dot{\alpha} \ ;$$

ii) si α provient d'un morphisme global Φ de G dans H , on ait, pour tout $\Omega \in \mathcal{T}(G)$,

$$\dot{\alpha}(\Omega) = \Omega \circ \hat{\hat{\Phi}} \ .$$

b) Dans ces conditions, si α est un germe d'isomorphisme local, $\dot{\alpha}$ est une application bijective.

La partie b) est immédiate si a) est réalisée : soit α un germe d'isomorphisme local de G vers H , β le germe d'isomorphisme local réciproque de H vers G , e_G (resp. e_H) le germe du morphisme identique I_G (resp. I_H) de G (resp. de H). Alors

$$\beta \circ \alpha = e_G \ ,$$

d'où $\dot{\beta} \circ \dot{\alpha} = \dot{e}_G$, soit, pour $\Omega \in \mathcal{T}(G)$,

$$(\dot{\beta} \circ \dot{\alpha})(\Omega) = \dot{e}_G(\Omega) = \Omega \circ \hat{I}_G = \Omega \circ I_{\hat{G}} = \Omega \ ,$$

de sorte que $\dot{\beta} \circ \dot{\alpha}$ est l'application identique de $\mathcal{T}(G)$ dans $\mathcal{T}(G)$. De même, $\dot{\alpha} \circ \dot{\beta}$ est l'application identique de $\mathcal{T}(H)$ dans $\mathcal{T}(H)$. Ceci montre que $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ sont bijectives (et réciproques l'une de l'autre).

Pour la partie a), nous procéderons par étapes.

LEMME III.3.2. Soient G et H deux g.a.l.c., Φ un morphisme de G dans H qui est un isomorphisme local. Alors l'application $\dot{\Phi}$ de $\mathcal{T}(G)$ dans $\mathcal{T}(H)$ définie par $\dot{\Phi}(\Omega) = \Omega \circ \hat{\hat{\Phi}}$ est bijective.

Il s'agit de montrer que, pour tout poids ω_1 sur $\hat{H}$, il existe un poids ω sur $\hat{G}$ tel que ω_1 soit équivalent à $\omega \circ \hat{\Phi}$, et que ce poids ω est unique à une équivalence près.

L'image de G par Φ est un sous-groupe ouvert de H , isomorphe au quotient de G par le noyau de Φ qui est un sous-groupe discret. Il suffit donc de démontrer le lemme III.3.2. dans les deux cas particuliers suivants :

$H = G/_N$, N sous-groupe discret de G , Φ étant la surjection canonique ;
G sous-groupe ouvert de H , Φ étant l'injection canonique.

Dans le premier cas, $\hat{H}$ est un sous-groupe fermé de $\hat{G}$ tel que le quotient $\hat{G}/_{\hat{H}}$

soit compact, et $\hat{\Phi}$ est l'injection canonique de $\hat{H}$ dans $\hat{G}$. Il existe un ouvert relativement compact P de $\hat{G}$ tel que $\hat{G} = P + \hat{H}$. Soit alors ω_1 un poids sur $\hat{H}$, que nous supposerons continu. Pour $x \in \hat{G}$, posons

$$\omega(x) = \sup_{y \in (x-P) \cap \hat{H}} \omega_1(y) .$$

On voit facilement que la fonction ω est mesurable (car semi-continue inférieurement), bornée supérieurement sur tout compact de $\hat{G}$, bornée inférieurement par un nombre strictement positif. Si x et x' appartiennent à $\hat{G}$, il existe a, a' et b dans $\bar{P}$, y, y' et z dans $\hat{H}$ tels que

$$\begin{aligned} x &= a+y , & \omega(x) &= \omega_1(y) , \\ x' &= a'+y' , & \omega(x') &= \omega_1(y') , \\ x+x' &= b+z , & \omega(x+x') &= \omega_1(z) , \end{aligned}$$

d'où

$$\omega(x+x') \leqslant K\ \omega(x)\omega(x') ,$$

en posant

$$K = \sup_{(P+P-P) \cap \hat{H}} \omega_1 :$$

en effet,

$$\begin{aligned} \omega(x+x') = \omega_1(z) &= \omega_1(y+y' + a+a' - b) \\ &\leqslant \omega(x)\omega(x')\ \omega_1(a+a'-b) \leqslant K\omega(x)\omega(x') . \end{aligned}$$

On a donc bien défini un poids ω. Reste à montrer que ω_1 et $\omega_{|\hat{H}}$ sont équivalents ; pour cela, appelons P_1 l'ouvert relativement compact de $\hat{H}$, trace de P sur $\hat{H}$. Alors, pour $z \in \hat{H}$, il existe $y \in \hat{H}$ et u dans $\bar{P}_1$ tels que $\omega(z) = \omega_1(y)$, et $z = y+u$; d'où

$$\frac{1}{\omega_1(u)}\omega_1(z) \leqslant \omega(z) \leqslant \omega_1(-u)\omega_1(z) ,$$

ce qui établit l'équivalence cherchée puisque ω_1 est borné sur le compact $\bar{P}_1$ de $\hat{H}$.

Si maintenant ω' est un autre poids sur $\hat{G}$ dont la restriction à $\hat{H}$ soit équivalente au poids ω_1, il est facile de voir que ce poids ω' est équivalent au poids ω défini plus haut : cela résulte encore du fait que $\hat{G} = \hat{H} + P$, où P est une partie relativement compacte de $\hat{G}$.

Dans le second cas, $\hat{G}$ est le quotient de $\hat{H}$ par un sous-groupe compact K, $\hat{\Phi}$ la surjection canonique $\hat{H} \longrightarrow \hat{H}/_K = \hat{G}$.

Soit ω_1 un poids sur $\hat{H}$. La fonction définie sur $\hat{H}$ par

$$\omega_2(y) = \int_K \omega_1(y+k)\ dk$$

est (cela se vérifie immédiatement) un poids sur $\hat{H}$ équivalent à ω_1, et on a

$\omega_2 = \omega \circ \hat{\Phi}$, où ω est un poids sur $\hat{G}$. Si de plus ω' est un autre poids sur $\hat{G}$ tel que $\omega' \circ \hat{\Phi}$ soit équivalent à ω_1 , il est facile de voir que ω et ω' sont équivalents.

Ceci achève la démonstration du lemme III.3.2.

Nous pouvons maintenant, grâce au théorème I.2.7. définir les applications $\dot{\alpha}$. Soient α un germe de morphisme d'un g.a.l.c. G vers un g.a.l.c. H , et a un morphisme local représentant α .

Introduisons d'abord les notations suivantes : soit (U,a) un morphisme local d'un g.a.l.c. G dans un g.a.l.c. H , U étant un voisinage ouvert de 0 . Appelons $G_{a,U}$ le groupe considéré au théorème I.2.7., sous-groupe de $G \times H$ engendré par $U_a = \{(x,a(x)) \mid x \in U\}$, muni de la topologie de groupe pour laquelle $x \to (x,a(x))$ est un homéomorphisme de U sur U_a . Appelons $P_{a,U}$ la restriction à $G_{a,U}$ de la projection $G \times H \to G$ et a' la restriction à $G_{a,U}$ de la projection $G \times H \to H$. Rappelons que $P_{a,U}$ définit un isomorphisme local dont l'isomorphisme local réciproque, composé avec a' , redonne sur U le morphisme local a .

LEMME III.3.3. <u>Soient</u> α <u>un germe de morphisme d'un</u> g.a.l.c. G <u>vers un</u> g.a.l.c. H , (U,a) <u>et</u> (V,b) <u>deux morphismes locaux qui représentent</u> α . <u>Alors les applications</u>

$$\dot{a}' \circ (\dot{P}_{a,U})^{-1} \qquad \text{et} \qquad \dot{b}' \circ (\dot{P}_{b,V})^{-1}$$

<u>de</u> $\mathcal{T}(G)$ <u>dans</u> $\mathcal{T}(H)$ <u>sont égales</u>.

(Pour un morphisme global Φ , nous appelons $\dot{\Phi}$ l'application définie par $\dot{\Phi}(\Omega) = \Omega \circ \hat{\Phi}$).

Appelons W un voisinage ouvert de 0 dans G sur lequel a et b coïncident : soit Φ le morphisme local obtenu en restreignant a ou b à W . Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & G_{a,U} \arrow[dl, "P_{a,U}"'] \arrow[dr, "a'"] & \\
G & G_{\Phi,W} \arrow[u, "i_U"] \arrow[d, "i_V"'] & H \\
 & G_{b,V} \arrow[ul, "P_{b,V}"] \arrow[ur, "b'"'] &
\end{tikzcd}$$

i_U (resp. i_V) est l'inclusion naturelle de $G_{\Phi,W}$ dans $G_{a,U}$ (resp. $G_{b,V}$) engendrée par l'inclusion de W_Φ dans U_a (resp. V_b). S'agissant de sous-groupes ouverts, i_U et i_V sont des isomorphismes locaux.

On a évidemment :

$$a' \circ i_u = b' \circ i_v \quad \text{et} \quad P_{a,U} \circ i_U = P_{b,V} \circ i_V ,$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\dot{a}' \circ (\dot{P}_{a,U})^{-1} &= \dot{a}' \circ \left[\dot{P}_{b,V} \circ \dot{i}_V \circ (\dot{i}_u)^{-1} \right]^{-1} \\
&= \dot{a}' \circ \dot{i}_u \circ (\dot{i}_V)^{-1} \circ (\dot{p}_{b,V})^{-1} \\
&= \dot{b}' \circ \dot{i}_V \circ (\dot{i}_V)^{-1} \circ (\dot{p}_{b,V})^{-1} \\
&= \dot{b}' \circ (\dot{p}_{b,V})^{-1} \quad ,
\end{aligned}
$$

ce qui établit le lemme.

Les conditions du théorème III.3.1. entraînent l'unicité de $\dot{\alpha}$ dont la seule définition possible est $\dot{\alpha} = \dot{a}' \circ (\dot{P}_{a,U})^{-1}$, pour un morphisme local (U,a) qui représente α . Le lemme III.3.3. montre que cette définition de $\dot{\alpha}$ est cohérente, puisqu'elle ne dépend pas du morphisme local choisi pour représenter α .

Il reste à montrer que les applications ainsi définies satisfont bien à la condition i) du théorème III.3.1. C'est l'objet du lemme ci-dessous.

LEMME III.3.4. <u>Soient trois</u> g.a.l.c., G , H <u>et</u> K , α <u>un germe de morphisme de</u> G <u>dans</u> H , β <u>un germe de morphisme de</u> H <u>dans</u> K , γ <u>le germe de morphisme de</u> G <u>dans</u> K , <u>composé de</u> α <u>et de</u> β . <u>Si</u> $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ <u>et</u> $\dot{\gamma}$ <u>sont définis comme ci-dessus, on a</u>

$$\dot{\gamma} = \dot{\beta} \circ \dot{\alpha} \ .$$

Soient (U,a) , (V,b) et (W,c) des morphismes locaux qui représentent respectivement α , β et $\gamma = \beta \circ \alpha$. On peut supposer que $V \supset a(U)$, que $W = U$, et que $c = b \circ a$. Dans ces conditions, considérons le g.a.l.c. G_o ainsi défini : G_o est le sous-groupe de $G \times H \times K$ engendré par $U_o = \{(x \ , \ a(x) \ , \ c(x)) \mid x \in U\}$, muni de la topologie de groupe pour laquelle $x \longrightarrow (x \ , \ a(x) \ , \ c(x))$ est un homéomorphisme de U sur U_o . Appelons a_o la restriction à G_o de la projection de $G \times H \times K$ sur $G \times H$: a_o applique G_o dans $G_{a,U}$; b_o la restriction à G_o de la projection de $G \times H \times K$ sur $H \times K$: b_o applique G_o dans $H_{b,V}$; c_o la restriction à G_o de la projection de $G \times H \times K$ sur $G \times K$: c_o applique G_o dans $G_{c,U}$.

$$
\begin{tikzcd}
G & G_{a,U} \arrow[l, "P_{a,U}"'] \arrow[r, "a'"] & H & H_{b,V} \arrow[l, "P_{b,V}"'] \arrow[r, "b'"] & K \\
& & G_o \arrow[ul, "a_o"] \arrow[ur, "b_o"'] \arrow[d, "c_o"'] & & \\
& & G_{c,U} \arrow[uull, "P_{c,U}"] \arrow[uurr, "c'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Il est immédiat de vérifier que ce diagramme est commutatif, c'est-à-dire que

$$P_{a,U} \circ a_o = P_{c,U} \circ c_o ,$$
$$P_{b,V} \circ b_o = a' \circ a_o ,$$
$$c' \circ c_o = b' \circ b_o ,$$

et que, de plus, a_o et c_o sont des isomorphismes locaux.

On a donc

$$\dot{\beta} \circ \dot{\alpha} = \dot{b}' \circ (\dot{P}_{b,V})^{-1} \circ \dot{a}' \circ (\dot{P}_{a,U})^{-1}$$

et

$$\dot{\gamma} = \dot{c}'_o(\dot{P}_{c,U})^{-1} .$$

Comme on a les relations

$$(\dot{P}_{c,U})^{-1} = \dot{c}_o(\dot{a}_o)^{-1} (\dot{P}_{a,U})^{-1}$$

et

$$\dot{b}_o = (\dot{P}_{b,V})^{-1} \circ \dot{a}' \circ \dot{a}_o ,$$

on obtient

$$\dot{\gamma} = \dot{c}'(\dot{P}_{c,U})^{-1} = \dot{c}' \dot{c}_o(\dot{a}_o)^{-1}(\dot{P}_{a,U})^{-1} = \dot{b}' \dot{b}_o(\dot{a}_o)^{-1}(\dot{P}_{a,U})^{-1}$$
$$= \dot{b}'(\dot{P}_{b,V})^{-1} \dot{a}'(\dot{P}_{a,U})^{-1} = \dot{\beta}\dot{\alpha} ,$$

et le lemme est démontré.

Ceci achève également la démonstration du théorème III.3.1.

Nous allons maintenant introduire une nouvelle notion, celle de poids régulier. Rappelons qu'une algèbre de Banach semi-simple est dite régulière si, pour tout point a de son spectre Δ et pour tout fermé F de Δ ne contenant pas a, il existe un élément dont la transformée de Gelfand s'annule sur F et non en a. Cette propriété est équivalente à la suivante : pour tout fermé F de Δ et tout compact K de Δ, disjoint de F, il existe un élément de l'algèbre dont la transformée de Gelfand vaut 1 sur K et 0 sur F.

DÉFINITION III.3.5. <u>Un poids</u> ω <u>sur le dual d'un</u> g.a.l.c. G <u>est dit régulier si l'algèbre de Banach semi-simple</u> $A_\omega(G)$ <u>est régulière</u>.

Il est clair que tout poids équivalent à un poids régulier est régulier.

Les poids réguliers ont été caractérisés par Y. DOMAR ([D]) :

THÉORÈME III.3.6. (DOMAR). <u>Pour qu'un poids</u> ω <u>sur le dual d'un</u> g.a.l.c. <u>soit régulier, il faut et il suffit que, quel que soit l'élément</u> γ <u>de</u> $\hat{G}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\log \omega(n\gamma)}{n^2} < \infty .$$

<u>Notation</u> : Nous désignerons par $\mathcal{P}_r(G)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(G)$ formé des classes d'équivalence de poids réguliers sur $\hat{G}$.

THÉORÈME III.3.7. <u>Soit</u> α <u>un germe de morphisme d'un</u> g.a.l.c. G <u>vers un</u> g.a.l.c. H . <u>Alors</u> $\dot{\alpha}$ <u>applique</u> $\mathcal{P}_r(G)$ <u>dans</u> $\mathcal{P}_r(H)$. <u>En particulier, si</u> α <u>est un germe d'isomorphisme local,</u> $\dot{\alpha}(\Omega)$ <u>est une classe de poids réguliers sur</u> $\hat{H}$ <u>si et seulement si</u> Ω <u>est une classe de poids réguliers sur</u> $\hat{G}$.

Le cas particulier de l'isomorphisme local est une conséquence immédiate de la première partie du théorème.

D'après la définition de $\dot{\alpha}$, il suffit de démontrer

1°) que si α est un morphisme global de G vers H , et que si ω est un poids régulier sur $\hat{G}$, $\omega \circ \dot{\alpha}$ est un poids régulier sur $\hat{H}$.

C'est immédiat : soit γ un élément quelconque de $\hat{H}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\log(\omega \circ \hat{\alpha})(n\gamma)}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\log \omega(n\hat{\alpha}(\gamma))}{n^2} ,$$

et la deuxième expression est finie puisque ω est régulier ;

2°) que si α est un morphisme global de G vers H qui définit un isomorphisme local, et si ω est un poids sur $\hat{G}$, ω est régulier si et seulement si $\omega \circ \hat{\alpha}$ est régulier.

Que la condition soit nécessaire, cela résulte du premier cas étudié.

Pour voir que la condition est suffisante, il suffit, en vertu de la correspondance entre les poids sur les duals de groupes localement isomorphes, de vérifier les deux cas particuliers suivants :

i) $\hat{H}$ est un sous-groupe fermé de $\hat{G}$ tel que $\hat{G}/_{\hat{H}}$ soit compact, ω un poids sur $\hat{G}$ dont la restriction à $\hat{H}$ est un poids régulier sur $\hat{H}$. Alors ω est régulier sur $\hat{G}$;

ii) $\hat{G}$ est le quotient $\hat{H}/_K$ de $\hat{H}$ par un sous-groupe compact K , ω un poids sur $\hat{G}$ tel que $\omega \circ \hat{\alpha}$ (où $\hat{\alpha}$ désigne la surjection canonique de $\hat{H}$ sur $\hat{G}$) soit un poids régulier sur $\hat{H}$. Alors ω est régulier sur $\hat{G}$.

Le cas ii) est presque évident : soit $\gamma \in \hat{G}$, et $\lambda \in \hat{H}$ tel que $\hat{\alpha}(\lambda) = \gamma$. Alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\log \omega(n\gamma)}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\log(\omega \circ \hat{\alpha})(n\lambda)}{n^2}$$

et le deuxième terme est fini puisque $\omega \circ \hat{\alpha}$ est régulier.

Pour le cas i), il nous faut appliquer le théorème de structure I.3.1., en le transformant par dualité : on obtient ainsi que le groupe $\hat{G}$ possède un sous-groupe compact A tel que $G/_A$ soit isomorphe à $\mathbb{R}^n \times D$, où n est un entier positif ou nul et D un groupe discret. On peut supposer que le poids ω est constant sur les classes de A, et considérer le poids ainsi défini sur $\hat{G}/_A$, qui, d'après ce que nous venons de voir, est régulier si et seulement si ω est régulier ; de même, ω restreint à $\hat{H}$ est constant sur les classes de $A \cap \hat{H}$ et définit un poids sur $\hat{H}/_{A\cap\hat{H}}$, régulier dans les mêmes conditions que $\omega|_{\hat{H}}$. De plus, $\hat{H}/_{A\cap\hat{H}}$ est un sous-groupe fermé de $\hat{G}/_A$ tel que le groupe quotient $(\hat{G}/_A)/(\hat{H}/_{A\cap\hat{H}})$ soit compact. On se ramène donc à la démonstration du

LEMME III.3.8. Soit D un groupe abélien discret, $n \in \mathbb{N}$, Γ un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^n \times D$ tel que le quotient $(\mathbb{R}^n \times D)/_\Gamma$ soit compact, ω un poids sur $\mathbb{R}^n \times D$ dont la restriction à Γ soit un poids régulier sur Γ. Alors ω est un poids régulier sur $\mathbb{R}^n \times D$.

Désignons, pour abréger, par $\mathbb{R}^n$ et D respectivement les sous-groupes $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ et $\{0\} \times D$ de $\mathbb{R}^n \times D$, et posons $\Gamma_1 = \Gamma \cap \mathbb{R}^n$; d'autre part, nous appellerons Φ la surjection canonique de $\mathbb{R}^n \times D$ sur $(\mathbb{R}^n \times D)/_\Gamma$.

Le groupe $\mathbb{R}^n/_{\Gamma_1}$ est compact : il est en effet en bijection naturelle avec $\Phi(\mathbb{R}^n)$ et la bijection de $\mathbb{R}^n/_{\Gamma_1}$ sur $\varphi(\mathbb{R}^n)$, qui se déduit par passage au quotient de l'application continue Φ restreinte à $\mathbb{R}^n$, est elle-même continue. Or, $\mathbb{R}^n$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n \times D$, donc $\Phi(\mathbb{R}^n)$ est un sous-groupe ouvert du groupe compact $(\mathbb{R}^n \times D)/_\Gamma$; par conséquent, $\Phi(\mathbb{R}^n)$ est compact. Il suffit donc de montrer que la bijection continue de $\mathbb{R}^n/_{\Gamma_1}$ sur $\Phi(\mathbb{R}^n)$ est un homéomorphisme, ou encore qu'elle est ouverte ; soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n/_{\Gamma_1}$, V son image réciproque dans $\mathbb{R}^n$; alors l'image de U dans $\Phi(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec l'image de V, ouvert de $\mathbb{R}^n \times D$, par Φ, et est donc un ouvert de $(\mathbb{R}^n \times D)/_\Gamma$, et également de $\Phi(\mathbb{R}^n)$.

De plus, $\Phi(\mathbb{R}^n)$ étant un sous-groupe ouvert du groupe compact $(\mathbb{R}^n \times D)/_\Gamma$, le nombre des classes de $\Phi(\mathbb{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}^n \times D)/_\Gamma$ est fini.

Comme ces classes sont en correspondance biunivoque avec celles de $\mathbb{R}^n + \Gamma$ dans $\mathbb{R}^n \times D$, il en résulte que le nombre des classes de $\mathbb{R}^n + \Gamma$ dans $\mathbb{R}^n \times D$ est fini.

Posons $\Gamma_2 = (\mathbb{R}^n + \Gamma) \cap D$: c'est la projection de Γ sur le facteur D de $\mathbb{R}^n \times \Gamma$. Ce qui précède entraîne que Γ_2 est un sous-groupe d'indice fini de D.

Soient ω_1 et ω_2 les restrictions du poids ω au groupe $\mathbb{R}^n$ et au groupe D respectivement, ω_1' la restriction de ω_1 (et aussi de ω) à Γ_1, ω_2' la restriction de ω_2 à Γ_2.

ω_1' , restriction du poids ω à un sous-groupe de Γ , est régulier. Si nous savons que ω_1 est régulier, il en résultera que la restriction de ω à $(\mathbb{R}^n + \Gamma)$ est un poids régulier, donc que ω_2' , restriction de ω à un sous-groupe de $\mathbb{R}^n + \Gamma$, est régulier. Nous sommes donc ramenés à démontrer les deux propriétés suivantes :

α) Γ_1 est un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $\mathbb{R}^n/\Gamma_1$ soit compact, ω_1 est un poids sur $\mathbb{R}^n$ dont la restriction à Γ_1 est un poids régulier ω_1' . Alors ω_1 est régulier.

β) Γ_2 est un sous-groupe d'indice fini d'un groupe discret D , ω_2 un poids sur D dont la restriction à Γ_2 est un poids ω_2' régulier. Alors ω_2 est régulier.

En effet, si ω_1 et ω_2 sont réguliers, le poids ω est régulier, car $\omega(x,d) \leq \omega_1(x).\omega_2(d)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $d \in D$.

Remarquons d'autre part que si $n=0$, la démonstration du lemme III.3.8. se ramène uniquement à la propriété β) ci-dessus.

Prouvons α). On sait que tout sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$, $p+q \leq n$, et que si le quotient est compact, $p+q = n$. Un changement de variables permet de supposer que le facteur $\mathbb{R}^p$ est le produit des p premiers facteurs $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, et que $\mathbb{Z}^q$ est plongé dans le produit $\mathbb{R}^q$ des autres facteurs de la manière usuelle. Autrement dit, $\mathbb{R}_1, \dots, \mathbb{R}_p, \dots, \mathbb{R}_n$ sont n modèles de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_{p+1}, \dots, \mathbb{Z}_n$ sont des modèles de $\mathbb{Z}$ plongés dans $\mathbb{R}_{p+1}, \dots, \mathbb{R}_n$ de la manière usuelle, et on identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_p \times \mathbb{R}_{p+1} \times \mathbb{R}_n$, et Γ_1 à $\mathbb{R}_1 \times \dots \; \mathbb{R}_p \times \mathbb{Z}_{p+1} \dots \times \mathbb{Z}_n$. Appelons σ la restriction de ω_1 à $\mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_p$; σ est un poids régulier car c'est aussi la restriction de ω_1' ; appelons τ_j $(p+1 \leq j \leq n)$ la restriction de ω_1 à $\mathbb{R}_j$, τ_j' celle de ω_1' à $\mathbb{Z}_j$.

Pour montrer que ω_1 est régulier, il suffit de montrer que τ_j est régulier pour tout j compris entre $p+1$ et n ; or τ_j' est régulier comme restriction de ω_1' . On est donc ramené à montrer que si τ est un poids sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{Z}$ est un poids régulier, alors τ est régulier. Pour cela, soit $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que

$$\sum \frac{\log \tau(nx)}{n^2} < \infty .$$

Comme τ restreint à $\mathbb{Z}$ est régulier, on a

$$\sum \frac{\log \tau(k)}{k^2} < \infty ,$$

et on peut supposer $0 < x < 1$. Il existe alors un entier s tel que $\frac{1}{s} \leq x < \frac{1}{s-1}$. En désignant par $[a]$ le plus grand entier inférieur ou égal au nombre réel a , on a, pour tout entier n ,

$$\left[\frac{n}{s}\right] \leq nx = m_n + x_n < n ,$$

avec $m_n = [nx]$ et $0 \leq x_n < 1$. Puisque τ est borné sur $[0,1]$, il suffit de montrer que

$$\sum \frac{\log \tau(m_n)}{n^2} < \infty .$$

Or $m_n < n$, donc

$$\sum \frac{\log \tau(m_n)}{n^2} < \sum \frac{\log \tau(m_n)}{m_n^2}$$

et, dans la suite $\{m_n\}$, aucun entier n'est répété plus de s fois. On a donc

$$\sum \frac{\log \tau(m_n)}{n^2} < s \sum \frac{\log \tau(k)}{k^2} < \infty .$$

Prouvons maintenant β). Soit p l'indice de Γ_2 dans D , x un élément de D ; alors $y = px$ appartient à D . Pour un entier positif n , posons $n = pq+r$, q et r entiers, $0 \leq r \leq p-1$. Alors $\omega(nx) \leq \omega(qy).\omega(rx)$ et

$$\sum_{n \geq p} \frac{\log \omega_2(nx)}{n^2} \leq \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}^* \\ 0 \leq r \leq p-1}} \left[\frac{\log \omega_2(qy)}{(pq+r)^2} + \frac{\log \omega_2(r_x)}{(pq+r)^2}\right]$$

$$\leq \frac{1}{p} \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{\log \omega_2(qy)}{q^2} + a ,$$

avec $a = \frac{\pi^2}{6} \sup\limits_{0 \leq r \leq p-1} (\log \omega_2(rx))$. Ceci montre que ω_2 est régulier, puisque $y \in D$ et que ω_2' , restriction de ω_2 à D , est régulier.

Ceci achève la démonstration du lemme III.3.8., donc aussi celle du théorème III.3.7.

Dans la suite, si α désigne un morphisme global ou un morphisme local d'un g.a.l.c. G vers un g.a.l.c. H , nous appellerons $\dot{\alpha}$ l'application de $\pi(G)$ dans $\pi(H)$ associée au germe de morphisme défini par α .

III - 4. Action des morphismes locaux sur les algèbres régulières à poids.

Nous considérons dans ce paragraphe deux g.a.l.c. G et H , un morphisme local α de G vers H , défini sur un ouvert U , voisinage de 0 dans G , un poids ω sur le dual de G . Nous désignerons par ω_α le poids (défini à une équivalence près) sur $\hat{H}$ dont la classe d'équivalence est $\dot{\alpha}(\Omega)$, Ω étant la classe d'équivalence de ω . Nous pouvons toujours supposer que $\omega_\alpha = \omega \circ \hat{\alpha}$ si α est un morphisme global, et que $\omega = (\omega_\alpha)_\beta$ si α est un isomorphisme local dont l'inverse β peut être défini globalement.

THÉORÈME III.4.1. <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>deux</u> g.a.l.c., α <u>un morphisme global de</u> G <u>dans</u> H , ω <u>un poids sur le dual</u> $\hat{G}$ <u>de</u> G . <u>Alors si</u> $f \in B_{\omega_\alpha}(H)$, $f \circ \alpha \in B_\omega(G)$.

Soit, en effet, une mesure μ sur $\hat{H}$ telle que $f = \hat{\mu}$, et $\int_{\hat{H}} (\omega \circ \alpha)\, d|\mu| < \infty$. Si ν est la mesure sur $\hat{G}$, image de μ par α , il est clair que $\hat{\nu} = f \circ \alpha$, et $f \in B_\omega(G)$ car $\int_{\hat{G}} \omega\, d|\alpha(\mu)| \leq \int_{\hat{H}} (\omega \circ \alpha)\, d|\mu| < \infty$.

Si nous voulons un résultat valable pour des morphismes locaux, il faut supposer que le poids est régulier.

THÉORÈME III.4.2. <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>deux</u> g.a.l.c., α <u>un morphisme local de</u> G <u>vers</u> H <u>défini sur un voisinage ouvert</u> U <u>de</u> 0 <u>dans</u> G , ω <u>un poids régulier sur le dual de</u> G , K <u>un compact contenu dans</u> U , $K_\alpha = \alpha(K)$. <u>Alors</u>

a) <u>si</u> $f \in A_{\omega_\alpha}(K_\alpha)$, $f \circ \alpha|_K \in A_\omega(K)$,

b) <u>si le morphisme local</u> (U, α) <u>est ouvert</u> (<u>c'est-à-dire si</u> α <u>est une application ouverte de</u> U <u>dans</u> H) <u>et si</u> K <u>est de type</u> ω-M , K_α <u>est de type</u> ω_α-M .

Si α est un isomorphisme local, on peut légèrement améliorer ce résultat.

THÉORÈME III.4.3. <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>deux</u> g.a.l.c., α <u>un isomorphisme local de</u> G <u>vers</u> H <u>défini sur un voisinage ouvert</u> U <u>de</u> 0 <u>dans</u> G , ω <u>un poids régulier sur</u> $\hat{G}$, K <u>un compact de</u> G , $K_\alpha = \alpha(K)$. <u>Alors, en désignant par</u> u <u>la fonction caractéristique de</u> U , <u>définie sur</u> G ,

a) $f \in S_{\omega_\alpha}(K_\alpha)$ <u>si et seulement si</u> $u.(f \circ \alpha) \in S_\omega(K)$;

b) $f \in A_{\omega_\alpha}(K_\alpha)$ <u>si et seulement si</u> $f \circ \alpha|_K \in A_\omega(K)$;

c) K_α <u>est de type</u> ω_α-M <u>si et seulement si</u> K <u>est de type</u> ω-M .

La décomposition déjà utilisée des morphismes locaux permet de se ramener, pour le théorème III.4.2., au cas où α est un morphisme global, et pour le théorème III.4.3., au cas où α est un morphisme global dont la restriction à un ouvert U est un isomorphisme local : la démonstration de ces deux cas particuliers donne immédiatement celle des théorèmes III.4.2. et III.4.3.

Soit donc α un morphisme global de G dans H , K un compact de G , $K_\alpha = \alpha(K)$. Soit $f \in A_{\omega_\alpha}(K_\alpha)$: il existe $g \in B_{\omega_\alpha}(H)$ telle que $f = g|_{K_\alpha}$. Alors, d'après le théorème III.4.1., $g \circ \alpha \in B_\omega(G)$, donc $f \circ \alpha|_K$ qui en est la restriction à K , appartient à $A_\omega(K)$. Ceci établit la partie a) du théorème III.4.2. dans le cas particulier que nous envisageons.

Pour la partie b), nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME III.4.4. <u>Pour un morphisme</u> α <u>d'un</u> g.a.l.c. G <u>dans un</u> g.a.l.c. H , <u>les conditions</u>

a) α <u>est une application ouverte de</u> G <u>dans</u> H ,

b) $\hat{\alpha}$ <u>est une application propre de</u> $\hat{H}$ <u>dans</u> $\hat{G}$,

<u>sont équivalentes</u>.

La décomposition d'un morphisme en le produit de composition de l'injection d'un sous-groupe et du passage au quotient par un sous-groupe fermé, applications qui doivent être ouvertes (resp. propres) si le morphisme considéré est ouvert (resp. propre) permet de se ramener à ces deux cas particuliers, pour lesquels la vérification du lemme III.4.4. est immédiate.

Soient alors $y \in K_\alpha$, et un voisinage V de y dans H ; soient $x \in K$ tel que $\alpha(x) = y$, W un voisinage de x dans G tel que $\alpha(W) \subset V$. Alors $\alpha(W \cap K)$ est contenu dans $V \cap K_\alpha$. Si μ est une mesure positive à support dans $W \cap K$, la mesure μ_α , image de μ par α , est positive et à support dans $V \cap K_\alpha$. Par hypothèse, K est de type ω-M donc on peut choisir μ telle que $\frac{\hat{\mu}}{\omega} \in C_0(\hat{G})$; comme $\frac{\hat{\mu}_\alpha}{\omega_\alpha}$ est égale à $(\frac{\hat{\mu}}{\omega}) \circ \hat{\alpha}$, il suffit de vérifier que la condition $\Phi \in C_0(\hat{G})$ implique $\Phi \circ \hat{\alpha} \in C_0(\hat{H})$; or, ceci résulte du fait que l'application $\hat{\alpha}$ est propre si on suppose α ouverte.

Passons maintenant à la démonstration du théorème III.4.3. où l'on peut supposer que α est un morphisme global qui définit sur U un isomorphisme local. Nous nous appuierons sur le lemme fondamental ci-dessous :

LEMME III.4.5. <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>deux</u> g.a.l.c., α <u>un morphisme de</u> G <u>dans</u> H , U <u>un voisinage de</u> 0 <u>dans</u> G <u>sur lequel</u> α <u>définit un isomorphisme local</u>, K <u>un compact contenu dans</u> G , $K_\alpha = \alpha(K)$, ω <u>un poids régulier sur</u> $\hat{G}$. <u>Si, pour une mesure bornée</u> μ <u>portée par</u> U , <u>nous appelons</u> μ_α <u>l'image de</u> μ <u>par</u> α , <u>l'application</u> $\mu \to \mu_\alpha$ <u>définit un isomorphisme bicontinu des espaces vectoriels normés</u> $M_\omega(K)$ <u>et</u> $M_{\omega_\alpha}(K_\alpha)$.

Appelons T l'application $\mu \to \mu_\alpha$. Comme la restriction de α à K est un homéomorphisme sur K_α , T est un isomorphisme algébrique. De plus, $\hat{\mu}_\alpha = \hat{\mu} \circ \hat{\alpha}$, de sorte que

$$\|\mu_\alpha\|_{\frac{1}{\omega_\alpha}} = \left\|\frac{\hat{\mu}_\alpha}{\omega_\alpha}\right\|_\infty = \left\|\left(\frac{\hat{\mu}}{\omega}\right) \circ \hat{\alpha}\right\|_\infty \leq \left\|\frac{\hat{\mu}}{\omega}\right\|_\infty = \|\mu\|_{\frac{1}{\omega}} ,$$

ce qui montre que T est continue. Il suffit de vérifier que T^{-1} est continue dans deux cas particuliers familiers :

i) G est un sous-groupe ouvert de H , α l'injection canonique ; $\hat{\alpha}$ est alors surjective, de sorte que $\left\|\left(\frac{\hat{\mu}}{\omega}\right) \circ \hat{\alpha}\right\|_\infty = \left\|\frac{\hat{\mu}}{\omega}\right\|_\infty$, ce qui prouve que, dans ce cas, T est une isométrie.

ii) H est le quotient de G par un sous-groupe discret, α la surjection canonique ; $\hat{\alpha}$ est alors l'injection dans $\hat{G}$ du sous-groupe fermé $\hat{H}$ tel que $\hat{G}/\hat{H}$ soit compact. Il s'agit de prouver l'existence d'une constante M telle que, pour toute mesure bornée μ portée par l'ouvert U de G sur lequel α définit un isomorphisme local, on ait

$$\sup_{\gamma \in \hat{G}} \left| \frac{\hat{\mu}(\gamma)}{\omega(\gamma)} \right| \leq M \sup_{\gamma \in \hat{H}} \left| \frac{\hat{\mu}(\gamma)}{\omega(\gamma)} \right|$$

Il existe un compact P de $\hat{G}$ tel que $\hat{H}-P = \hat{G}$. Soit $\chi_0 \in \hat{G}$ un point où $\left|\frac{\hat{\mu}}{\omega}\right|$ est, par exemple, supérieur à la moitié de son maximum : on peut écrire $\chi_0 = \Psi_0 - \lambda$, $\Psi_0 \in \hat{H}$ et $\lambda \in P$. Appelons a_λ la restriction à K du caractère sur G défini par λ , et ν la mesure $a_\lambda \mu$. Alors $\hat{\nu}(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma - \lambda)$ et

$$\|\mu\|_{\frac{1}{\omega}} \leq 2 \left| \frac{\hat{\mu}(\chi_0)}{\omega(\chi_0)} \right| = 2 \left| \frac{\hat{\nu}(\chi_0 + \lambda)}{\omega(\chi_0 + \lambda)} \right| \frac{\omega(\chi_0 + \lambda)}{\omega(\chi_0)}$$

$$\leq 2A \left| \frac{\hat{\nu}(\Psi_0)}{\omega(\Psi_0)} \right| \leq 2A \, \|\nu_\alpha\|_{\frac{1}{\omega_\alpha}} ,$$

en posant $A = \sup_{\lambda \in P} \omega(\lambda)$. Il reste à montrer maintenant l'existence d'une constante B telle que

$$\|\nu_\alpha\|_{\frac{1}{\omega_\alpha}} = \|(a_\lambda \circ \alpha^{-1}) \, \mu_\alpha\|_{\frac{1}{\omega_\alpha}} \leq B \|\mu_\alpha\|_{\frac{1}{\omega_\alpha}} ,$$

B ne dépendant pas, en particulier, de λ . Pour cela, il suffit de trouver, pour tout $\lambda \in P$, une fonction h_λ appartenant à $A_{\omega_\alpha}(H)$, telle que, pour $x \in K$, $h_\lambda \circ \alpha(x) = \langle \lambda, x \rangle$, et de telle sorte que les normes $\|h_\lambda\|_{\omega_\alpha}$ soient bornées.

Soit V un voisinage relativement compact de 0 dans G tel que V et $K-V$ soient contenus dans U et que, pour tout $\lambda \in P$ et tout $x \in V$, on ait

$$\mathcal{R}e(\langle \lambda , x \rangle) > \frac{1}{2} .$$

Posons $\alpha(V) = V_\alpha$; on a $\alpha(K-V) = K_\alpha - V_\alpha$. Il existe, puisque ω_α est régulier, une fonction non nulle φ dans $A_{\omega_\alpha}(H)$ dont la partie réelle est ≥ 0 , à support dans V_α . Appelons Φ la fonction définie sur G , à support dans V , égale à $\varphi \circ \alpha$ sur U : il est clair que $\Phi \in A_\omega(G)$. Définissons la fonction Ψ_λ par $\Psi_\lambda(y) = \langle \lambda, x \rangle$ si $x \in K-V$ et $y = \alpha(x)$, $\Psi_\lambda(y) = 0$ si $y \notin K_\alpha - V_\alpha$, et posons, pour $\lambda \in P$,

$$h_\lambda = \frac{\varphi * \Psi_\lambda}{\hat{\Phi}(\lambda)} ,$$

expression qui a bien un sens car, par construction $\hat{\Phi}(\lambda) \neq 0$ si $\lambda \in P$.

Si $y = \alpha(x)$, $x \in K$, on a

$$h_\lambda(y) = \frac{1}{\hat{\Phi}(\lambda)} \int_{V_\alpha} \varphi(z) \, \Psi_\lambda(y-z) \, dz ,$$

d'où, puisque la mesure de Haar se transporte par les isomorphismes locaux (à une constante multiplicative près, que l'on peut ajuster),

$$h_\lambda(y) = \frac{1}{\hat{\Phi}(\lambda)} \int_V \bar{\Phi}(z) \langle\lambda,x\rangle \; , \overline{\langle\lambda,z\rangle} \; dz = \langle\lambda,x\rangle \quad .$$

Il reste donc à montrer que les fonctions h_λ appartiennent à $A_{\omega_\alpha}(H)$, et que leurs normes sont bornées. Or

$$\begin{aligned}\int_{\hat{H}} |\hat{h}_\lambda(-\gamma)| \;\; \omega_\alpha(\gamma)\, d\gamma &= \frac{1}{|\hat{\Phi}(\lambda)|} \int_H |\hat{\varphi}(-\gamma)\; \hat{\Psi}_\lambda(-\gamma)|\, \omega_\alpha(\gamma)\, d\gamma \\ &\leqslant \frac{m(K_\alpha - V_\alpha)}{|\hat{\Phi}(\lambda)|} \int_{\hat{H}} |\hat{\varphi}(-\gamma)|\; \omega_\alpha(\gamma)\, d\gamma \\ &\leqslant \frac{m(K_\alpha - V_\alpha)\|\varphi\|_{\omega_\alpha}}{\inf\limits_{\lambda\in P} |\hat{\Phi}(\lambda)|} = B \; ,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $h_\lambda \in A_{\omega_\alpha}(H)$, et que l'on a

$$\|h_\lambda\|_{\omega_\alpha} \leqslant B \; .$$

Ceci achève la démonstration du lemme III.4.5.

Passons maintenant à la démonstration du théorème III.4.3. K, compact contenu dans U , étant donné, on pose $K_\alpha = \alpha(K)$; soient L un voisinage compact de K contenu dans U , et $L_\alpha = \alpha(L)$. Supposons que L soit égal à l'adhérence de son intérieur : il en est de même pour L_α , et L est de type ω-M , de même que L_α est de type ω_α-M . Alors le lemme III.4.5. et le théorème III.2.4. montrent que les conditions $f \in A_{\omega_\alpha}(L_\alpha)$ et $f \circ \alpha \in A_\omega(L)$ sont équivalentes. La propriété b) se déduit immédiatement, par restriction, de ce qui précède (sans hypothèse sur K), de même que la propriété a) pour laquelle on utilise la régularité des algèbres $A_\omega(G)$ et $A_{\omega_\alpha}(H)$: si $f \in S_{\omega_\alpha}(K_\alpha)$, la restriction de f à L_α appartient à $A_{\omega_\alpha}(L_\alpha)$ donc $(f \circ \alpha)|_L \in A_\omega(L)$: il existe donc $g \in A_\omega(G)$ telle que $g = f \circ \alpha$ sur L ; il suffit de voir que l'on peut supposer que g est à support dans K , et pour cela, il suffit, au besoin, de multiplier g par un élément de $A_\omega(G)$ valant 1 sur K et 0 hors de L .

Reste à montrer la propriété c). On sait (démonstration déjà faite dans le cas plus général où α est une application ouverte) que si K est de type ω-M , K_α est de type ω_α-M . Réciproquement, supposons K_α de type ω_α-M . Soit $x \in K$, W un voisinage de x contenu dans U ; il existe une mesure positive μ portée par $W \cap K$ telle que, si μ_α désigne la mesure image de μ par l'application α , $\frac{\hat{\mu}_\alpha}{\omega_\alpha} \in C_0(\hat{H})$. Montrons que $\frac{\hat{\mu}}{\omega} \in C_0(\hat{G})$. Il suffit de faire la démonstration dans les deux cas particuliers fondamentaux. Si $\hat{\alpha}$ est la surjection de $\hat{H}$ sur $\hat{G}$, quotient de $\hat{H}$ par un sous-groupe compact, l'équivalence des propriétés $\frac{\hat{\mu}}{\omega} \in C_0(\hat{G})$ et $\frac{\hat{\mu}_\alpha}{\omega_\alpha} = (\frac{\hat{\mu}}{\omega}) \circ \hat{\alpha} \in C_0(\hat{H})$

est une conséquence immédiate du fait que $\hat{\alpha}$ est un morphisme propre surjectif. Si $\hat{\alpha}$ est l'injection de $\hat{H}$, sous-groupe fermé de $\hat{G}$ tel que $\hat{G}/_{\hat{H}}$ soit compact, posons $\Phi = \frac{\hat{\mu}}{\omega}$, $\Phi_\alpha = \frac{\hat{\mu}_\alpha}{\omega_\alpha}$; Φ_α est la restriction de Φ au sous-groupe fermé $\hat{H}$ de $\hat{G}$. Il suffit de montrer que, pour tout $\gamma \in \hat{G}$, $\Phi(\gamma+\lambda)$ tend vers 0 à l'infini lorsque λ parcourt $\hat{H}$. En effet, si c'est le cas, appelons, pour tout $\gamma \in \hat{G}$, $K_\varepsilon(\gamma)$ l'en- l'ensemble des points λ de $\hat{H}$ tels que $|\Phi(\gamma+\lambda)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, ε étant un nombre positif donné. Remarquons que Φ est uniformément continue sur $\hat{G}$, à condition de choisir le poids ω continu, de sorte qu'il existe un voisinage compact $\Omega(\gamma)$ de γ tel que l'on ait, quel que soit λ , $|\Phi(\gamma'+\lambda) - \Phi(\gamma+\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $\gamma' \in \Omega(\gamma)$. Il résulte de là que l'ensemble des points de $\Omega(\gamma)+\hat{H}$ où $|\Phi|$ est $\geq \varepsilon$ est un compact (contenu dans $\Omega(\gamma)+K_\varepsilon(\gamma)$). Or $\hat{G}/_{\hat{H}}$ est compact, donc $\hat{G}$ est recouvert par un nombre fini d'ensembles de la forme $\Omega(\gamma)+\hat{H}$. On en déduit que l'ensemble des points de $\hat{G}$ où $|\Phi|$ est supérieur ou égal à ε est compact, donc que $\Phi \in C_0(\hat{G})$.

Nous sommes donc ramenés au problème suivant : μ étant définie comme ci-dessus, de telle sorte que $\Phi_\alpha \in C_0(\hat{H})$, montrer que, pour tout $\gamma \in \hat{G}$, $\Phi_\alpha^\gamma \in C_0(\hat{H})$, en posant $\Phi_\alpha^\gamma(\lambda) = \Phi(\gamma+\hat{\alpha}(\lambda))$ pour $\lambda \in \hat{H}$, ou encore $\Phi_\alpha^\gamma = \Phi^\gamma \circ \hat{\alpha}$, avec $\Phi^\gamma(\chi) = \Phi(\gamma+\chi)$, $\chi \in \hat{G}$. Si nous appelons, pour γ fixé dans $\hat{G}$, ν la mesure produit de μ par le caractère $\bar{\gamma}$ sur G , nous avons

$$\Phi_\alpha^\gamma(\lambda) = \frac{\hat{\nu}(\lambda)}{\omega(\gamma+\lambda)} ,$$

d'où (ν_α étant la mesure image de ν par α)

$$|\Phi_\alpha^\gamma(\lambda) \leq \omega(-\gamma)\left|\frac{\hat{\nu}(\lambda)}{\omega(\lambda)}\right| = \omega(-\gamma)\left|\frac{\hat{\nu}_\alpha(\lambda)}{\omega_\alpha(\lambda)}\right|$$

et il suffit de montrer que $\frac{\hat{\nu}_\alpha}{\omega_\alpha} \in C_0(\hat{H})$. Or, la fonction $\bar{\gamma}$ appartient à $B_\omega(G)$, de sorte que, d'après la partie déjà démontrée du théorème, on peut écrire $\nu_\alpha = h\mu_\alpha$, avec $h \in A_{\omega_\alpha}(K_\alpha)$. Or, il résulte de la partie du théorème III.2.4. que l'on peut démontrer sans hypothèse particulière sur le compact K , que $h \in A_{\omega_\alpha}(K_\alpha)$ et $\frac{\hat{\mu}_\alpha}{\omega_\alpha} \in C_0(\hat{H})$ entraînent que $\frac{\hat{\nu}_\alpha}{\omega_\alpha} \in C_0(\hat{H})$, et ceci achève la démonstration du théorème III.4.3.

<u>Remarque</u> III.4.6. Dans la partie b) du théorème III.4.2., l'hypothèse que le morphisme local soit ouvert est bien nécessaire. Voici un contre-exemple : soit $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{R}^2$, α l'injection (non ouverte) $x \longrightarrow (x,0)$. Alors $\hat{\alpha}$ est la surjection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ définie par $(\xi,\eta) \longrightarrow \xi$. Prenons $K = \{0\} \subset \mathbb{R}$, d'où $K_\alpha = \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, $\omega(\xi) = 1+|\xi|$ sur $\mathbb{R}$, d'où $\omega_\alpha(\xi,\eta) = 1+|\xi|$. Alors K est de type ω-M mais K_α n'est pas de type ω_α-M .

Pour un poids régulier, l'algèbre $A_\omega(G)$ est régulière, de même que $A_{\omega_\alpha}(H)$ si α est un germe de morphisme de G vers H . On peut donc considérer l'algèbre des germes en 0 de $A_\omega(G)$, quotient de $A_\omega(G)$ par l'idéal des éléments nuls au voisinage de 0. Notons $A^o_\omega(G)$ cette algèbre de germes.

Si (U,α) et (V,β) sont deux morphismes locaux de G vers H qui coïncident sur W, voisinage de 0 dans G, on a, pour K compact contenu dans W et $K' = \alpha(K) = \beta(K)$, ω étant un poids régulier sur $\hat{G}$,

$$f \in A_{\omega_\alpha}(K') \iff f \in A_\omega \ (K'),$$

car $\omega_\alpha = \omega_\beta$, et ceci entraîne

$$f \circ \alpha|_K = f \circ \beta|_K \in A_\omega(K).$$

D'autre part, si f et g appartiennent à $A_{\omega_\alpha}(K_\alpha)$ et coïncident au voisinage de 0, alors $f \circ \alpha$ et $g \circ \alpha$ coïncident au voisinage de 0. De sorte que nous pouvons, en remarquant que l'algèbre $A^o_\omega(G)$ coïncide avec l'algèbre des germes en 0 des éléments de $A_\omega(K)$ où K est un voisinage compact de 0 dans G, énoncer le théorème ci-dessous, qui traduit les théorèmes III.4.2. et III.4.3. sous forme locale :

THÉORÈME III.4.7. <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>deux</u> g.a.l.c., α <u>un germe de morphisme de</u> G <u>vers</u> H, ω <u>un poids régulier sur</u> $\hat{G}$. <u>Alors</u> $\Phi \in A^o_{\omega_\alpha}(H)$ <u>entraîne</u> $\Phi \circ \alpha \in A^o_\omega(G)$, <u>et ces deux conditions sont équivalentes lorsque</u> α <u>est un isomorphisme local</u>.

-:-:-:-

CHAPITRE IV

SUR LES ALGÈBRES A_p .

Nous étudions dans ce chapitre quelques propriétés des algèbres A_p , et montrons, en particulier, que l'algèbre des germes en un point des fonctions de A_p est un invariant de la structure locale d'un groupe localement compact. Contrairement aux invariants étudiés aux chapitres II et III, ceux que nous introduisons ici concernent tous les groupes localement compacts, abéliens ou non.

La théorie, récente, des algèbres A_p est due, en particulier, à P. EYMARD, A. FIGA-TALAMANCA, C. HERZ, etc... Les principaux résultats actuels sont rassemblés dans [E1] et [E2] .

Le premier paragraphe de ce chapitre est consacré au rappel des principaux faits de la théorie des algèbres A_p que nous aurons à utiliser.

IV - 1. Les algèbres $A_p(G)$.

DÉFINITION IV.1.1. Pour un groupe localement compact G , muni d'une mesure de Haar à gauche, on appelle $A_p(G)$ l'ensemble des fonctions f qui s'écrivent

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n * \check{h}_n$$

avec $g_n \in L^p(G)$, $h_n \in L^q(G)$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ($\check{h}_n$ étant la fonction définie par $\check{h}_n(x) = h_n(x^{-1})$) et $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \|h_n\|_q < \infty$.

THÉORÈME IV.1.2. Muni de la norme

$$\|f\|_{A_p} = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \|h_n\|_q$$

(où la borne inférieure est prise sur toutes les représentations de f de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} g_n * \check{h}_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \|h_n\|_q < \infty$) l'ensemble $A_p(G)$ est une algèbre de Banach régulière semi-simple pour la multiplication ordinaire, formée de fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

Remarque IV.1.3. Pour $p=2$, $A_2(G)$ coïncide avec l'algèbre $A(G)$ étudiée en [E3] qui, dans le cas abélien, n'est autre que l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions intégrables sur le groupe dual.

DÉFINITION IV.1.4. Un groupe localement compact est appelé aménable s'il possède la propriété suivante : pour tout compact K de G et tout nombre positif ε , il existe un compact V de mesure positive tel que $m(KV) \leq (1+\varepsilon)m(V)$.

Il existe de nombreuses propriétés équivalentes à l'aménabilité. Celle que nous avons prise comme définition est la plus commode pour l'usage que nous ferons de cette notion.

Tout groupe abélien est, en particulier, aménable, de même que tout groupe compact.

Appelons, pour $1 < q < \infty$, $CV_q(G)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $L^q(G)$ dans $L^q(G)$ qui commutent avec les translations à droite (ce sont les convoluteurs de $L^q(G)$). $CV_q(G)$ est un espace de Banach.

THÉORÈME IV.1.5. Soit G un groupe localement compact aménable, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Le dual de l'espace de Banach $A_p(G)$ s'identifie isométriquement à $CV_q(G)$ par la dualité

$$\langle T,f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_G g_n(x)\, Th_n(x)\, dx$$

où $T \in CV_q(G)$ et $f \in A_p(G)$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n * \check{h}_n$, $g_n \in L^p(G)$, $h_n \in L^q(G)$.

DÉFINITION IV.1.6. Avec les notations et hypothèses du théorème IV.1.4., nous appellerons topologie ultrafaible de $CV_q(G)$ la topologie faible de dualité avec $A_p(G)$, $\sigma(CV_q(G)\, ,\, A_p(G))$.

THÉORÈME IV.1.7. Soient G un groupe abélien, p et r deux réels tels que $1 < r < p < 2$ ou $2 < p < r < \infty$. Alors $A_2(G) \subset A_p(G) \subset A_r(G)$ et les inclusions abaissent les normes et sont d'images denses.

(Ceci résulte du théorème IV.1.5. et du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin).

Donnons enfin, dans le cas abélien, une version précisée de l'existence d'une unité approchée dans $A_p(G)$ qui est, en fait, une propriété équivalente à l'aménabilité.

THÉORÈME IV.1.8. Soient G un g.a.l.c., p un réel > 1 . Considérons une base $B = \{V_i\}_{i \in I}$ de voisinages de 0 dans $\hat{G}$, et, pour tout $i \in I$, une fonction a_i intégrable, à support contenu dans V_i , non négative et d'intégrale 1 ; appelons α_i la transformée de Fourier de a_i . Alors les α_i constituent (lorsque I est muni de l'ordre filtrant associé à l'inclusion des V_i) une unité approchée de norme ≤ 1 dans $A_p(G)$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \forall\, i \in I\, , \quad \alpha_i \in A_p(G) \quad \text{et} \quad \|\alpha_i\|_{A_p(G)} \leq 1\, , \\ \forall\, f \in A_p(G)\, , \ \lim\limits_{i \in I} \|\alpha_i f - f\|_{A_p(G)} = 0\, . \end{cases}$$

Pour tout $i \in I$, $\alpha_i \in A(G) = A_2(G) \subset A_p(G)$ et $\|\alpha_i\|_{A_p(G)} \leq \|\alpha_i\|_{A_2(G)} = 1$.

Soient maintenant $f \in A_p(G)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\Phi \in A_2(G)$ telle que

$\|f-\Phi\|_{A_p} < \frac{\varepsilon}{3}$, et telle que $\Phi = \hat{g}$ où g est intégrable sur $\hat{G}$. Alors $\alpha_i\Phi - \Phi$ tend vers 0 dans $A_2(G)$ (donc dans A_p) car c'est la transformée de Fourier de $(a_i * g) - g$ qui tend vers 0 dans $L^1(\hat{G})$. Il existe donc $j \in I$ tel que, pour tout $i \in I$ tel que $V_i \subset V_j$, on ait $\|\alpha_i\Phi - \Phi\|_{A_p(G)} < \frac{\varepsilon}{3}$, d'où $\|\alpha_i f - f\|_{A_p(G)} < \varepsilon$, ce qui signifie que $\lim\limits_{i\in I} \|\alpha_i f-f\|_{A_p(G)} = 0$.

IV - 2. Représentation intégrale d'un produit.

Considérons deux groupes localement compacts G et H , un morphisme θ de G vers H , une fonction $f = \alpha * \check{\beta}$ sur G , une fonction $\Phi = u * \check{v}$ sur H , où α et β sont continues à supports compacts sur G , u et v continues à supports compacts sur H . Alors $f \in A_p(G)$ et $\Phi \in A_p(H)$ pour tout réel $p > 1$ et on a, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\|f\|_{A_p(G)} \leq \|\alpha\|_p \ \|\beta\|_q \quad , \quad \|\Phi\|_{A_p(H)} \leq \|u\|_p \ \|v\|_q \ .$$

Comme

$$f(x) = \int_G \alpha(xy) \ \beta(y) \ dy \ ,$$

et

$$\Phi(\theta(x)) = \int_H u(\theta(x)z) \ v(z) \ dz \ ,$$

on a

$$\begin{aligned}[f.(\Phi \circ \theta)](x) &= \int_G \alpha(xy)\,\beta(y)\,dy \int_H u(\theta(x)z)\,v(z)\,dz \\ &= \int_G \alpha(xy)\,\beta(y)\,dy \int_H u(\theta(xy)z)\,v(\theta(y)z)\,dz \\ &= \int_H A_z(x)\,dz \ ,\end{aligned}$$

où l'on a posé, pour $z \in H$,

$$A_z = a_z * \check{b}_z \ ,$$

a_z et b_z étant les fonctions continues à support compact définies sur G par

$$a_z(x) = \alpha(x) \ u(\theta(x)z) \ ,$$

$$b_z(x) = \beta(x) \ v(\theta(x)z) \ .$$

LEMME IV.2.1. Soient deux g.l.c. G et H , θ un morphisme de G dans H , α et β deux fonctions continues à supports compacts sur G , u et v deux fonctions continues à supports compacts sur H , $f = \alpha * \check{\beta}$, $\Phi = u * \check{v}$. Alors, pour tout réel $p > 1$, la fonction $f.(\Phi \circ \theta)$ appartient à $A_p(G)$ et on a

$$f.(\Phi \circ \theta) = \int_H A_z \, dz$$

<u>où l'intégrale est à valeurs dans</u> $A_p(G)$ <u>et</u> $A_z = a_z * \check{b}_z$, a_z <u>et</u> b_z <u>étant les fonctions continues à supports compacts définies par</u>

$$a_z(x) = \alpha(x)\, u(\theta(x)z) \ , \ b_z(x) = \beta(x)\, v(\theta(x)z) \ .$$

<u>De plus, si</u> $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\| f.(\Phi \circ \theta)\|_{A_p(G)} \leq \|\alpha\|_{L^p(G)} \|\beta\|_{L^q(G)} \|u\|_{L^p(H)} \|v\|_{L^q(H)} \ .$$

Compte tenu de ce qui précède et du fait que l'application $z \longrightarrow A_z$ est continue de H dans $A_p(G)$, il suffit de montrer que

$$\int_H \|A_z\|_{A_p} dz \leq \|\alpha\|_{L^p(G)} \|\beta\|_{L^q(G)} \|u\|_{L^p(H)} \|v\|_{L^q(H)} \ .$$

Or

$$\int_H \|A_z\|_{A_p} dz \leq \int_H \|a_z\|_p \|b_z\|_q dz \leq \left(\int_H \|a_z\|_p^p dz\right)^{1/p} \left(\int_H \|b_z\|_q^q dz\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_H dz \int_G |\alpha(x)|^p |u(\theta(x)z|^p dx\right)^{1/p} . \left(\int_H dz \int_G |\beta(x)|^q |v(\theta(x)z)|^q dx\right)^{1/q} ,$$

soit

$$\int_H \|A_z\|_{A_p} dz \leq \left(\int_G |\alpha(x)|^p dx \int_H |u(\theta(x)z)|^p dz\right)^{1/p} . \left(\int_G |\beta(x)|^q dx \int_H |v(\theta(x)z)|^q dz\right)^{1/q}$$

$$= \|\alpha\|_{L^p(G)} \|u\|_{L^p(H)} \|\beta\|_{L^q(G)} \|v\|_{L^q(H)} ,$$

ce qui établit le lemme.

Ce lemme a plusieurs conséquences intéressantes.

Indiquons, ici, l'une d'entre elles, qui est, en fait, un cas particulier d'un théorème annoncé -sans démonstration- par Carl HERZ. Il nous faut d'abord une définition.

DÉFINITION IV.2.2. <u>Soient</u> G <u>un groupe localement compact,</u> p <u>un réel</u> > 1 . <u>On appellera</u> $B_p(G)$ <u>l'algèbre de Banach des multiplicateurs de</u> $A_p(G)$. <u>Autrement dit, une fonction</u> f <u>définie sur</u> G <u>appartient à</u> $B_p(G)$ <u>si et seulement si</u> $fu \in A_p(G)$ <u>quelle que soit la fonction</u> u <u>de</u> $A_p(G)$, <u>et la norme de</u> f <u>est</u>

$$\| f\|_{B_p} = \sup_{\|u\|_{A_p} \leq 1} \| fu\|_{A_p} \ .$$

A_p est évidemment un idéal de B_p , fermé et plongé dans B_p isométriquement lorsque G est aménable.

THÉORÈME IV.2.3. Soient G et H deux g.l.c., θ un morphisme de G dans H, p un réel > 1. L'application $\Phi \longrightarrow \Phi \circ \theta$ est un homomorphisme abaissant la norme de $A_p(H)$ dans $B_p(G)$.

Remarque IV.2.4. Si $G = H$ et si θ est l'application identique, ceci donne une démonstration du fait que $A_p(G)$ est une algèbre. Il peut être intéressant de remarquer que cette démonstration -contrairement à celle, antérieure, de C.S. HERZ- ne fait pas appel à la notion de produit tensoriel. Les deux démonstrations sont cependant très proches dans leur principe.

D'autre part, on déduit aisément du théorème IV.2.3. que $\Phi \longrightarrow \Phi \circ \theta$ applique $B_p(H)$ dans $B_p(G)$ si G est aménable et $A_p(H)$ dans $A_p(G)$ si θ est propre.

Démontrons maintenant le théorème IV.2.3.

Soient $f \in A_p(G)$, $\Phi \in A_p(H)$: Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des suites de fonctions $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ continues à supports compacts dans G, et $\{u_k\}$ et $\{v_k\}$ continues à supports compacts dans H, telles que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n * \check{\beta}_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n\|_p \, \|\beta_n\|_q \leq \|f\|_{A_p(G)} + \varepsilon \quad ,$$

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} u_k * \check{v}_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p \, \|v_k\|_q \leq \|\Phi\|_{A_p(H)} + \varepsilon \quad .$$

Alors la fonction $f.(\Phi \circ \theta)$ s'écrit

$$f.(\Phi \circ \theta) = \sum_{n,k=1}^{\infty} F_{n,k} \quad ,$$

avec $F_{n,k} = (\alpha_n * \check{\beta}_n).\left[(u_k * \check{v}_k) \circ \theta\right]$, et le lemme IV.2.1. montre que $f.(\Phi \circ \theta)$, somme d'une série normalement convergente dans $A_p(G)$, appartient à $A_p(G)$, et que sa norme est majorée par $(\|f\|_{A_p(G)} + \varepsilon).(\|\Phi\|_{A_p(H)} + \varepsilon)$. Comme $\varepsilon > 0$ et $f \in A_p(G)$ sont quelconques, cela signifie que $\Phi \circ \theta$ appartient à $B_p(G)$ et que $\|\Phi \circ \theta\|_{B_p(G)} \leq \|\Phi\|_{A_p(H)}$.

IV - 3. Le théorème de localisation pour les A_p.

Si K est une partie compacte d'un g.l.c. G, appelons $A_p(K)$ l'algèbre des restrictions à K des éléments de $A_p(G)$. On peut remarquer que l'algèbre $A_p(K)$ est aussi l'algèbre des restrictions à K des éléments de $B_p(G)$.

Nous désignerons par $A_{p,o}(G)$ l'algèbre des germes en 0 des éléments de $A_p(G)$, c'est-à-dire le quotient de $A_p(G)$ par l'idéal (non fermé si G n'est pas discret) des éléments nuls au voisinage de l'élément neutre e de G.

THÉORÈME IV.3.1. Soient G et H deux g.l.c., (U, θ) un morphisme local de G vers H, K un compact de G contenu dans U, $K' = \theta(K)$, p un réel supérieur à 1. Alors l'application $\Phi \longrightarrow \Phi \circ \theta_{|K}$ est un homomorphisme de $A_p(K')$ dans $A_p(K)$. C'est un isomorphisme si (U, θ) est un isomorphisme local.

En vertu du théorème I.2.7., il suffit d'envisager deux cas particuliers : celui d'un morphisme global -le résultat est alors une conséquence du théorème IV.2.3.- et celui d'un isomorphisme local.

Commençons par dégager le lemme suivant :

LEMME IV.3.2. Soit G un g.l.c., K un compact de G, W un voisinage compact de l'élément neutre. Il existe une constante C (dépendant de K et de W) telle que toute fonction Φ de $A_p(G)$ à support dans K s'écrive

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n ,$$

avec $\Phi_n = \int_G \Phi_{n,z}\, dz$ (intégrale à valeurs dans $A_p(G)$) et

$$\Phi_{n,z} = a_{n,z} * \check{b}_{n,z} ,$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in G$, $a_{n,z}$ et $b_{n,z}$ sont des fonctions continues à supports dans KW et W respectivement, telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_G \|a_{n,z}\|_p \|b_{n,z}\|_q \, dz \right] \leq C \|\Phi\|_{A_p} .$$

Il existe, en effet, des fonctions α et β, continues et à supports dans KW et W respectivement, telles que la fonction $f = \alpha * \check{\beta}$ prenne sur K la valeur 1.

Soit alors Φ un élément de $A_p(G)$ à support dans K ; Φ s'écrit

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} u_n * \check{v}_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(u_n * \check{v}_n) ,$$

u_n et v_n continues à supports compacts, telles que (par exemple)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_p \|v_n\|_q \leq 2 \|\Phi\|_{A_p} .$$

D'après le lemme IV.2.1., on a, en posant $\Phi_n = f(u_n * \check{v}_n)$,

$$\Phi_n = \int_G a_{n,z} * \check{b}_{n,z}\, dz$$

avec

$$a_{n,z}(x) = \alpha(x)\, u_n(xz)$$
$$b_{n,z}(x) = \beta(x)\, v_n(xz) ,$$

ce qui entraîne le résultat avec

$$C = 2\|\alpha\|_p \|\beta\|_q \ .$$

Du lemme IV.3.2., on déduit immédiatement le théorème IV.3.1. dans le cas particulier d'un isomorphisme local (U, θ) : si K est un compact contenu dans U, choisissons le voisinage W de l'élément neutre de G de telle sorte que $KWWW^{-1}$ soit contenu dans U. Si on pose $K' = \theta(K)$, $W' = \theta(W)$, le lemme permet d'écrire toute fonction Ψ de $A_p(H)$, à support dans $K'W'$, comme somme d'intégrales d'éléments de $A_p(H)$ de la forme $a_{n,z} * \check{b}_{n,z}$ $(n \in \mathbb{N}^*,\ z \in H)$, $a_{n,z}$ continue à support compact dans $K'W'W'$, $b_{n,z}$ continue à support compact dans W', avec

$$\sum_n \left[\int_H \|a_{n,z}\|_p \|b_{n,z}\|_q \, dz \right] < \infty \ .$$

La fonction Ψ_1, qui vaut $\Psi \circ \theta$ sur U, 0 hors de U, s'écrit alors

$$\Psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_H (c_{n,z} * \check{d}_{n,z}) \, dz \right]$$

où $c_{n,z} = a_{n,z} \circ \theta$ sur U, 0 ailleurs et $d_{n,z} = b_{n,z} \circ \theta$ sur U, 0 ailleurs, et Ψ_1 appartient à $A_p(G)$ car

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_H \|c_{n,z}\|_p \|d_{n,z}\|_q \, dz \right] < \infty \ .$$

Tout ceci résulte du fait (voir [B], corollaire de la proposition 9, chap. VII, § 1) qu'un isomorphisme local transforme la restriction à un ouvert d'une mesure de Haar en la restriction à un ouvert d'une mesure de Haar, donc respecte, en particulier (à une constante près), les normes dans L^p et L^q et les convolutions de fonctions à supports assez petits.

Le théorème IV.3.1. est donc ainsi établi, car $A(K)$ est aussi l'algèbre des restrictions à K des éléments de $A_p(G)$ à supports dans KW.

Ce résultat se traduit également en termes de germes de morphismes et de germes d'éléments des algèbres A_p :

THÉORÈME IV.3.3. <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>deux</u> g.l.c., α <u>un germe de morphisme de</u> G <u>vers</u> H, p <u>un réel</u> > 1. <u>Alors, l'application</u> $\Phi \longrightarrow \Phi \circ \alpha$ <u>est un homomorphisme de</u> $A_{p,o}(H)$ <u>dans</u> $A_{p,o}(G)$. <u>C'est un isomorphisme lorsque</u> α <u>est un germe d'isomorphisme local</u>.

Ceci se déduit immédiatement du théorème IV.3.1.

IV - 4. Un théorème sur les multiplicateurs.

Dans le cas des groupes aménables, le théorème IV.1.5., qui exprime la dualité entre A_p et l'espace des convoluteurs de L^p, conduit à penser que la théorie des algèbres A_p doit donner des résultats sur les convoluteurs, donc sur les multiplicateurs de $\mathcal{F} L^p$ dans le cas abélien.

Nous allons précisément donner ici des résultats sur les multiplicateurs. Il s'agit d'une généralisation de certains résultats dûs à K. de LEEUW (DL). Notons que Noël LOHOUE a obtenu, indépendamment et simultanément, des résultats voisins de ceux qui sont présentés ici.

Soit G un g.a.l.c. Nous désignerons par $M_p(G)$ l'algèbre de Banach des multiplicateurs de $(\mathcal{F} L^p)(G)$, c'est-à-dire l'algèbre des transformées de Fourier des convoluteurs de $L^p(\hat{G})$. Autrement dit, Φ appartient à $M_p(G)$ si et seulement si pour toute fonction a dans $L^p(\hat{G})$, il existe $b \in L^p(\hat{G})$ telle que $\hat{b} = \Phi \hat{a}$. Remarquons que $M_p(G)$ est formé d'éléments de $L^{\infty}(G)$, donc en particulier de classes de fonctions définies localement presque partout, localement intégrables.

Si G et H sont deux g.a.l.c., α un morphisme de G dans H, Φ un élément de $M_p(H)$, on ne peut, en général, considérer la fonction composée $\Phi \circ \alpha$, car l'égalité localement presque partout de Φ et Ψ sur H n'entraîne l'égalité localement presque partout de $\Phi \circ \alpha$ et $\Psi \circ \alpha$ sur G que si l'image réciproque par α d'une partie localement négligeable de H est une partie localement négligeable de G. C'est le cas si et seulement si le morphisme α est ouvert.

Soient G et H deux g.a.l.c., α un morphisme de G dans H, $\{V_i, a_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des couples formés de voisinages de 0 dans H, V_i, constituant une base de voisinages de 0, et de fonctions non négatives intégrables a_i, d'intégrale 1, a_i étant à support dans V_i. L'ensemble des indices I est muni de l'ordre filtrant défini par $i \geq j$ si et seulement si $V_i \subset V_j$.

Ceci étant, l'application $f \longrightarrow \hat{a}_i(f \circ \hat{\alpha})$ est (théorème IV.2.3.) une application linéaire L_i de $A_q(\hat{G})$ dans $A_q(\hat{H})$ de norme inférieure ou égale à 1, pour tout réel $q > 1$. Soit $\Phi \in M_p(H)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: Φ est transformé de Fourier d'un convoluteur T de $CV_p(\hat{H})$. Appelons T_i l'image de T par ${}^tL_i$, application linéaire transposée de L_i : $T_i \in CV_p(\hat{G})$, $\|T_i\|_{CV_p(\hat{G})} \leq \|T\|_{CV_p(\hat{H})}$, et T_i est défini par $\langle T_i, f \rangle = \langle T, \hat{a}_i(f \circ \hat{\alpha}) \rangle$.

Prenons, pour f, élément de $A_q(\hat{G})$, la transformée de Fourier d'une fonction F intégrable sur G, et appelons Ψ_i l'élément de $M_p(G)$, transformé de Fourier de T_i. On a alors

$$\langle T_i, f \rangle = \int_G \Psi_i F .$$

Si nous désignons par μ_F la mesure bornée sur H, image par α de la mesure sur G de densité F, $\hat{a}_i(f \circ \hat{\alpha})$ est la transformée de Fourier de la fonction sommable sur H $a_i * \mu_F$, et on a

$$< T, \hat{a}_i(f \circ \hat{\alpha}) > = \int_H \bar{\Phi}(a_i * \mu_F) ,$$

d'où

$$\int_G \Psi_i F = \int_H \bar{\Phi}(a_i * \mu_F) .$$

La famille $\{T_i\}_{i \in I}$ est bornée dans $CV_p(\hat{G})$, donc admet une valeur d'adhérence U pour la topologie faible de dual de $A_q(\hat{G})$. Appelons Ψ l'élément de $M_p(G)$ tel que $\Psi = \hat{U}$. Pour toute fonction intégrable F sur G, il existe une base de voisinages $\{V_i\}_{i \in J(F)}$ extraite de $\{V_i\}_{i \in I}$ telle que

$$\int_G \Psi F = \lim_{i \in J(F)} \int_H \bar{\Phi}(a_i * \mu_F) .$$

THÉORÈME IV.4.1. <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>deux</u> g.a.l.c., α <u>un morphisme ouvert de</u> G <u>dans</u> H. <u>Alors</u> $\bar{\Phi} \longrightarrow \bar{\Phi} \circ \alpha$ <u>est, pour tout réel</u> $p > 1$, <u>une application de</u> $M_p(H)$ <u>dans</u> $M_p(G)$.

$\bar{\Phi} \longrightarrow \bar{\Phi} \circ \alpha$ est bien définie de $M_p(H)$ dans $L^\infty(G)$, car si E est une partie localement négligeable de H, $\alpha^{-1}(E)$ est localement négligeable dans G : il est aisé de vérifier que, pour un morphisme de groupes localement compacts, cette condition équivaut à dire que le morphisme est ouvert.

Dans ces conditions, si F est une fonction intégrable sur G, μ_F possède une densité F_o par rapport à la mesure de Haar de H (il suffit de le vérifier en supposant $F \geqslant 0$. Si ce n'était pas le cas, il existerait une partie borélienne A de H, négligeable, telle que $\mu_F(A) > 0$; alors $\int_{\alpha^{-1}(A)} F = \mu_F(A)$ serait positif, ce qui est impossible puisque $\alpha^{-1}(A)$ est localement négligeable). On a donc, en posant $F_i = a_i * F_o$,

$$\int_G \Psi_i F = \int_H \bar{\Phi} F_i .$$

Or, on sait que, lorsque V_i parcourt une base de voisinages de 0 dans H, F_i converge vers F_o dans $L^1(H)$. C'est vrai en particulier pour la base $\{V_i\}_{i \in J(F)}$ et on a

$$\int_G \Psi F = \lim_{i \in J(F)} \int_H \bar{\Phi} F_i = \int_H \bar{\Phi} F_o = \int_G (\bar{\Phi} \circ \alpha) F ,$$

ce qui montre que $\Psi = \bar{\Phi} \circ \alpha$ localement presque partout, puisque F est un élément arbitraire de $L^1(G)$.

Le théorème IV.4.1. est donc ainsi démontré.

Remarquons que ce théorème peut également s'établir à partir des deux faits suivants : α est ouvert si et seulement si $\hat{\alpha}$ est propre (lemme III.4.4.) et $f \longrightarrow f \circ \hat{\alpha}$ applique $A_p(\hat{G})$ dans $A_p(\hat{H})$ -et non seulement dans $B_p(\hat{H})$- lorsque $\hat{\alpha}$ est un morphisme propre de $\hat{H}$ dans $\hat{G}$ (remarque IV.2.4.), ce qui permet d'éviter le passage à la limite selon l'ensemble I .

Dans le cas d'un morphisme α non ouvert, on ne peut évidemment avoir le même résultat, puisque, de toute manière, $\Phi \circ \alpha$, pour $\Phi \in M_p(H)$, ne serait pas un élément bien défini de $L^\infty(G)$.

Pour une base de voisinages $\{V_i\}_{i \in I}$ de 0 dans H et des fonctions $a_i > 0$, intégrables et d'intégrale 1 à supports dans V_i , et pour une fonction localement intégrable Φ sur H , nous appellerons point de Lebesgue de Φ relativement à la famille $(V_i, a_i)_{i \in I}$ tout point x de H tel que $\int_H \Phi(x+y)\, a_i(y)\, dy$ ait une limite lorsque i parcourt l'ensemble ordonné filtrant I . Nous noterons $E(\Phi, (V_i, a_i)_{i \in I})$ l'ensemble de ces points, et Φ_1 la fonction définie sur cet ensemble par la limite précédente. Notons encore $E_c(\Phi)$ l'ensemble des points où Φ est continue, et remarquons que $E_c(\Phi)$ est contenu dans $E(\Phi, (V_i, a_i)_{i \in I})$ quels que soient les voisinages de 0 , V_i , et les fonctions a_i , et que $\Phi = \Phi_1$ sur $E_c(\Phi)$. D'ailleurs, $\Phi = \Phi_1$ localement presque partout sur $E(\Phi, (V_i, a_i)_{i \in I})$.

THÉORÈME IV.4.2. Soient H un g.a.l.c., p un réel > 1 , Φ un élément de $M_p(H)$, $\{V_i\}_{i \in I}$, $\{a_i\}_{i \in I}$, $E_c(\Phi)$, $E(\Phi, (V_i, a_i)_{i \in I})$, Φ_1 définis comme ci-dessus. Soient encore G un g.a.l.c. et α un morphisme de G dans H .

Alors la fonction $\Phi \circ \alpha$ coïncide sur $\alpha^{-1}[E_c(\Phi)]$ avec un élément de $M_p(G)$.

Si H est métrisable, $\Phi_1 \circ \alpha$ coïncide sur $\alpha^{-1}[E(\Phi, (V_i, a_i)_{i \in I})]$ avec un élément de $M_p(G)$.

Soient, en effet, $F \in L^1(G)$, et une base de voisinages $\{V_i\}_{i \in J(F)}$ extraite de $\{V_i\}_{i \in I}$, dénombrable si H est métrisable, telle que, Ψ désignant le multiplicateur transformé de Fourier du convoluteur $U \in CV_p(\hat{G})$, valeur d'adhérence ultrafaible de la famille $\{T_i\}_{i \in I}$,

$$\int_G \Psi F = \lim_{i \in J(F)} \int_H \Phi . (a_i * \mu_F) .$$

Or, on a

$$\int_H \Phi(x)(a_i * \mu_F)(x)\, dx = \int_H \Phi_i(x)\, d\mu_F(x) ,$$

en posant

$$\Phi_i(x) = \int_H \Phi(x+y)\, a_i(y)\, dy .$$

Si on choisit F à support compact dans $\alpha^{-1}[E(\Phi,(V_i,a_i)_{i\in I})]$, on peut conclure grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue dans le cas où on a une suite de fonctions Φ_i ; et si F est à support compact dans $\alpha^{-1}[E_c(\Phi)]$, on conclut en utilisant la convergence, uniforme sur le support de F , de Φ_i vers $\Phi_1 = \Phi$; dans un cas comme dans l'autre, on a

$$\int_G \Psi F = \lim_{i\in J(F)} \int_H \Phi_i \, d\mu_F = \int_H \Phi_1 \, d\mu_F = \int_G (\Phi_1 \circ \alpha) F ,$$

ce qui entraîne que $\Psi = \Phi_1 \circ \alpha$ sur l'un ou l'autre des ensembles indiqués dans l'énoncé du théorème.

Nous pouvons enfin indiquer, en vue d'applications du théorème IV.4.2., un résultat qui généralise la situation bien connue lorsque l'on prend sur $\mathbb{R}^n$ la base de voisinages de 0 formée de boules ouvertes de centre 0 .

THÉORÈME IV.4.3. <u>Soit</u> G <u>un</u> g.a.l.c., $\{V_i\}_{i\in I}$ <u>une base de voisinages compacts de</u> 0 <u>telle que</u>

i) <u>il existe une constante</u> $k > 0$ <u>telle que, pour tout</u> $i \in I$, $m(V_i + V_i + V_i - V_i - V_i) \leq k\, m(V_i)$;

ii) <u>pour toute partie</u> J <u>de</u> I , <u>il existe</u> $i_o \in J$ <u>tel que, pour tout</u> $i \in J$, <u>on ait</u> $V_i \subset V_{i_o} + V_{i_o}$.

<u>Alors, pour toute fonction</u> Φ <u>localement intégrable, les fonctions</u> Ψ_i <u>définies par</u> $\Psi_i(x) = \frac{1}{m(V_i)} \int_{V_i} \Phi(x+y)\, dy$ <u>convergent localement presque partout vers</u> Φ <u>lorsque</u> V_i <u>tend vers</u> 0 .

Pour établir ce théorème -dont nous ne donnons pas ici la démonstration complète-, il suffit d'adapter la démonstration du cas classique de $\mathbb{R}^n$ (telle qu'elle est donnée, par exemple, dans [S]) en introduisant un lemme du type de Vitali et une notion de fonction maximale associée aux $\{V_i\}_{i\in I}$.

-:-:-:-

CHAPITRE V

FONCTIONS RADIALES SUR LES GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS TOTALEMENT DISCONTINUS.

Nous étudions ici une notion de fonction radiale sur les g.a.l.c. totalement discontinus. Nous caractérisons les fonctions radiales qui appartiennent à divers ensembles (algèbres A_p , espaces $\mathcal{F}L^p$ et M_p) ce qui nous permettra, au chapitre VI, de distinguer par les algèbres de germes $A_{p,o}$ (étudiées au chapitre IV) les groupes totalement discontinus parmi tous les g.a.l.c.

V - 1. Définitions et notations.

Parmi les groupes abéliens localement compacts, nous considérons ceux qui possèdent l'une ou l'autre des propriétés (P_1) et (P_2) ci-dessous :

(P_1) il existe une suite strictement décroissante $\{G_n\}_{n\in I}$ ($I = \mathbb{N}$, $-\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$) de sous-groupes ouverts, tels que G_{n+1} soit d'indice fini dans G_n pour tout n ($n \neq 0$ si $I = -\mathbb{N}$) ;

(P_2) même condition que (P_1) , les sous-groupes G_n étant de plus compacts et tels que leur intersection soit $\{0\}$ et leur réunion G .

Pour un groupe G satisfaisant à (P_1) ou à (P_2) , nous considérerons toujours -sans le préciser chaque fois- des suites de sous-groupes ayant les propriétés exigées en (P_1) et (P_2) . Nous appellerons encore de telles suites des suites adaptées.

Les groupes qui vérifient (P_2) sont les groupes abéliens infinis localement compacts totalement discontinus métrisables et dénombrables à l'infini qui ont un sous-groupe ouvert compact tel que le quotient soit (discret) de torsion. Ce sont

i) les groupes discrets dénombrables de torsion si $I = -\mathbb{N}$;

ii) les groupes compacts métrisables infinis totalement discontinus si $I = \mathbb{N}$;

iii) des groupes localement compacts, ni discrets ni compacts, totalement discontinus si $I = \mathbb{Z}$. Par exemple, les groupes additifs de nombres p-adiques sont de ce type.

Parmi les groupes qui vérifient (P_1) , figurent ceux qui vérifient (P_2) . On peut remarquer que tout groupe discret infini vérifie (P_1) . De plus, tout groupe dont un sous-groupe ouvert ou un groupe-quotient vérifie (P_1) ,vérifie lui-même cette propriété.

DÉFINITION V.1.1. <u>Soient G un g.a.l.c. vérifiant (P_2) et $\{G_n\}$ une suite adaptée de sous-groupes. On appelle couronne toute partie de G de la forme $G_n \setminus G_{n+1}$</u> .

DÉFINITION V.1.2. <u>Une fonction f définie sur un groupe vérifiant (P_2) est dite radiale si elle est constante sur chaque couronne</u>.

DÉFINITION V.1.3. <u>Une fonction f définie sur un groupe vérifiant (P_2) est dite quasi-radiale si, pour tout $n \in I$ ($n \neq 0$ si $I = -\mathbb{N}$), elle est constante sur toute classe de G_{n+1} dans $G_n \setminus G_{n+1}$</u> .

Nous considérerons désormais, jusqu'au paragraphe V.4. inclus, un groupe G vérifiant (P_2), et une suite adaptée $\{G_n\}_{n\in I}$ de sous-groupes. Le dual de G sera désigné par Γ, Γ_n étant le sous-groupe de Γ orthogonal de G_n. Nous munissons G et Γ des mesures de Haar pour lesquelles G_o et Γ_o ont pour mesure 1 ; la mesure de Γ_n sera désignée par i_n et celle de G_n sera alors $\frac{1}{i_n}$. Notons que i_n est, si n est positif, l'indice de G_n dans G_o et celui de Γ_o dans Γ_n et que $\frac{1}{i_n}$ est, si n est négatif, l'indice de G_o dans G_n et celui de Γ_n dans Γ_o.

Nous appellerons k_n l'indice de G_{n+1} dans G_n, qui est aussi celui de Γ_n dans Γ_{n+1} : c'est un entier $\geqslant 2$ et on a $i_{n+1} = k_n\, i_n$.

Remarquons que Γ vérifie la propriété (P_2), à ceci près que la suite adaptée $\{\Gamma_n\}$ est croissante au lieu d'être décroissante. Nous appellerons encore fonction radiale (resp. quasi-radiale) sur Γ une fonction constante sur tout ensemble de la forme $\Gamma_{n+1}\setminus\Gamma_n$ (resp. sur toute classe de Γ_n dans $\Gamma_{n+1}\setminus\Gamma_n$).

V - 2. Transformées de Fourier radiales.

Soient A et B deux groupes vérifiant (P_2), avec des suites adaptées respectives $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (A est compact) et $\{B_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ (B est discret de torsion). Alors $G = A\times B$ vérifie (P_2) avec la suite adaptée $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$G_n = A_n\times B_o = A_n\times\{0_B\} \qquad \text{si } n\geqslant 0$$

$$G_n = A_o\times B_n = A\times B_n \qquad \text{si } n\leqslant 0\,.$$

Soient maintenant F_1 et F_2 des fonctions définies sur $\hat{A}$ et $\hat{B}$ respectivement. Définissons F_1' et F_2' sur $\hat{A}\times\hat{B}$ par

$$F_1'(\gamma,\lambda) = F_1(\gamma)$$

et

$$F_2'(\gamma,\lambda) = F_2(\lambda) \qquad \text{si } \gamma = 0$$
$$= 0 \qquad \text{si } \gamma\neq 0\,.$$

Soit α un réel tel que $1<\alpha<2$. Les conditions $F_1\in L^\alpha(\hat{A})$ et $F_1'\in L^\alpha(\hat{A}\times\hat{B})$ sont équivalentes, de même que les conditions $F_2\in L^\alpha(\hat{B})$ et $F_2'\in L^\alpha(\hat{A}\times\hat{B})$. Supposons réalisées ces conditions, et soient $f_1 = \hat{F}_1$ et $f_2\in\hat{F}_2$. Si on définit, sur $A\times B$, f_1' et f_2' par

$$f_1'(x,y) = f_1(x) \qquad \text{si } y = 0$$
$$= 0 \qquad \text{si } y\neq 0$$

et

$$f_2'(x,y) = f_2(y)\,,$$

on voit que $f_1' = \hat{F}_1'$ et $f_2' = \hat{F}_2'$.

Si on désigne par $\mathcal{F}L^{\alpha}(G)$ l'espace des fonctions sur G qui sont transformées de Fourier d'éléments de $L^{\alpha}(\hat{G})$, on obtient le résultat suivant :

Soient f_1 une fonction radiale sur A , valant u_n sur $A_n \setminus A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, f_2 une fonction radiale sur B valant v_n sur $B_n \setminus B_{n+1}$ $(n \in -\mathbb{N}^*)$. Définissons sur $A \times B$ les fonctions radiales f_1' et f_2' : qui valent respectivement a_n et b_n sur $G_n \setminus G_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ avec

$$\begin{aligned} a_n &= u_n && \text{si} \quad n \geqslant 0 \\ &= 0 && \text{si} \quad n < 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= f_2(0) && \text{si} \quad n \geqslant 0 \\ &= v_n && \text{si} \quad n < 0 . \end{aligned}$$

Alors $f_1 \in \mathcal{F}L^{\alpha}(A)$ si et seulement si $f_1' \in \mathcal{F}L^{\alpha}(A \times B)$ et $f_2 \in \mathcal{F}L^{\alpha}(B)$ si et seulement si $f_2' \in \mathcal{F}L^{\alpha}(A \times B)$.

Cette remarque nous permettra, pour l'étude des éléments de $\mathcal{F}L^{\alpha}(G)$, et, en particulier, des éléments radiaux, de ne considérer que des groupes G ayant une suite adaptée de sous-groupes indexée par $\mathbb{Z}$.

Appelons opérateur de radialisation sur un groupe G qui vérifie (P_2) (ou dont le dual vérifie (P_2)) l'application $\mathcal{R}_G$ qui, à toute fonction f localement sommable, associe la fonction radiale dont la valeur sur toute couronne est égale à la moyenne de f sur cette couronne.

Soit G un groupe vérifiant (P_2) , Γ son dual. Appelons α_n la fonction caractéristique de G_n , β_n celle de Γ_n $(n \in \mathbb{Z})$. On a $\hat{\beta}_n = i_n \alpha_n$.

Soit F une fonction localement intégrable sur Γ . Appelons b_n la moyenne de F sur $\Gamma_{n+1} \setminus \Gamma_n$: $\{b_n\}$ est la suite des valeurs de $\mathcal{R}_{\Gamma} F$.

THÉORÈME V.2.1. 1°) Soit $\alpha \geqslant 1$. Alors $\mathcal{R}_{\Gamma}$ applique $L^{\alpha}(\Gamma)$ dans $L^{\alpha}(\Gamma)$ en abaissant la norme.

2°) Si $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, on a, pour $F \in L^{\alpha}(\Gamma)$,

$$(\mathcal{R}_{\Gamma} F)^{\wedge} = \mathcal{R}_G \hat{F} .$$

On a, si $F \in L^{\alpha}(\Gamma)$,

$$\| \mathcal{R}_{\Gamma} F \|_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (i_{n+1} - i_n) | b_n |^{\alpha} .$$

Or, en posant $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ si $\alpha > 1$,

$$|b_n| = \frac{1}{i_{n+1}-i_n}\left|\int_{\Gamma_{n+1}\setminus\Gamma_n} F\right| \leq \frac{1}{i_{n+1}-i_n}\left(\int_{\Gamma_{n+1}\setminus\Gamma_n} |F|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} (i_{n+1}-i_n)^{\frac{1}{\beta}},$$

d'où

$$(i_{n+1}-i_n)|b_n|^\alpha \leq \int_{\Gamma_{n+1}\setminus\Gamma_n} |F|^\alpha$$

(ce qui se vérifie également, directement, lorsque $\alpha = 1$), et on a bien

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (i_{n+1}-i_n)|b_n|^\alpha = \|\mathcal{R}_\Gamma F\|_\alpha^\alpha \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\Gamma_{n+1}\setminus\Gamma_n} |F|^\alpha = \|F\|_\alpha^\alpha .$$

La première partie du théorème est donc démontrée. Pour la deuxième partie, appelons f la transformée de Fourier de F, a_n la moyenne de f sur $G_n\setminus G_{n+1}$, m_n la moyenne de f sur G_n. On vérifie directement (c'est un cas particulier de la formule sommatoire de Poisson) que

$$m_n = \int_{\Gamma_n} F ,$$

d'où

$$a_n = \left(\frac{1}{i_n} - \frac{1}{i_{n+1}}\right)^{-1} \int_{G_n\setminus G_{n+1}} f = \frac{i_n\, i_{n+1}}{i_{n+1}-i_n}\left(\frac{1}{i_n}\int_{\Gamma_n} F - \frac{1}{i_{n+1}}\int_{\Gamma_{n+1}} F\right).$$

Si, de même, a'_n est la moyenne de $(\mathcal{R}_\Gamma F)^\wedge$ sur $G_n\setminus G_{n+1}$, on a

$$a'_n = \frac{i_n\, i_{n+1}}{i_{n+1}-i_n}\left(\frac{1}{i_n}\int_{\Gamma_n} \mathcal{R}_\Gamma F - \frac{1}{i_{n+1}}\int_{\Gamma_{n+1}} \mathcal{R}_\Gamma F\right),$$

d'où $a'_n = a_n$ puisque $\int_{\Gamma_n} F = \int_{\Gamma_n} \mathcal{R}_\Gamma F$, $n \in \mathbb{Z}$.

Le théorème est donc entièrement démontré si on remarque que la transformée de Fourier d'une fonction radiale est radiale : c'est évident pour les fonctions radiales ne prenant qu'un nombre fini de valeurs non nulles (combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques de sous-groupes ouverts compacts), et c'est vrai pour toute fonction radiale de $L^\alpha(\Gamma)$ $(1\leq\alpha\leq 2)$ qui s'approche par des fonctions du type ci-dessus.

Soit maintenant $F \in L^\alpha(\Gamma)$, $1\leq\alpha\leq 2$, une fonction radiale prenant les valeurs b_n sur $\Gamma_{n+1}\setminus\Gamma_n$. Sa transformée de Fourier f est radiale sur G, et nous appelons a_n sa valeur sur $G_n\setminus G_{n+1}$. Comme $f \in L^\beta(G)$, $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha} = 1$ si $\alpha > 1$, et tend vers 0 à l'infini si $\alpha = 1$, on voit aisément que

$$\lim_{n\to-\infty} a_n = 0 ,$$

de même que

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 0 .$$

On a

$$F = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n(\beta_{n+1} - \beta_n) \quad , \quad f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\alpha_n - \alpha_{n+1}) .$$

Comme $\hat{\beta}_n = i_n \alpha_n$, on a

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n'(i_{n+1}\alpha_{n+1} - i_n \alpha_n) \quad , \quad F = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \left(\frac{\beta_n}{i_n} - \frac{\beta_{n+1}}{i_{n+1}} \right) ,$$

ce qui donne, en calculant les valeurs sur les diverses couronnes,

$$a_n = - i_n b_n + \sum_{p<n} (i_{p+1} - i_p)\, b_p ,$$

$$b_n = - \frac{a_n}{i_{n+1}} + \sum_{p>n} \left(\frac{1}{i_p} - \frac{1}{i_{p+1}} \right) a_p ,$$

les séries étant absolument convergentes puisque f et F sont localement intégrables, propriété qui permet encore d'écrire

$$a_n = - \sum_{p \leq n} (b_p - b_{p-1})\, i_p \quad , \quad b_n = \sum_{p>n} \frac{a_p - a_{p-1}}{i_p} .$$

Or, les relations ci-dessus entre deux suites $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont équivalentes si on suppose que $\lim\limits_{n \to -\infty} a_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$ et que les séries sont convergentes : supposons, en effet, par exemple, la réciproque étant exactement semblable, que a_n soit donné par la relation

$$a_n = - \sum_{p \leq n} (b_p - b_{p-1})\, i_p .$$

On en déduit

$$a_n - a_{n-1} = (b_{n-1} - b_n)\, i_n ,$$

d'où, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$,

$$b_n = \sum_{p>n} \frac{a_p - a_{p-1}}{i_p} .$$

De là, résulte que, pour une fonction radiale f localement intégrable sur G , prenant sur $G_n \setminus G_{n+1}$ la valeur a_n , les conditions

$$f \in \mathcal{F}L^{\alpha'}(G) \qquad\qquad (1 \leq \alpha \leq 2)$$

et

$$\begin{cases} (1) \quad \lim\limits_{n \to -\infty} a_n = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ (2) \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} i_n \left| \sum_{p\geq n} \frac{a_p - a_{p-1}}{i_p} \right|^{\alpha} < \infty \right.$$

sont équivalentes.

En effet, si on pose

$$b_n = \sum_{p>n} \frac{a_p - a_{p-1}}{i_p} ,$$

(2) exprime que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} i_n |b_{n-1}|^{\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i_{n+1} |b_n|^{\alpha}$ est fini, ce qui signifie que la fonction radiale F sur Γ définie par les valeurs b_n appartient à $L^{\alpha}(\Gamma^{\bullet})$. Or, la condition (1) entraîne, d'après ce que nous venons de voir, que F a pour transformée de Fourier f.

THÉORÈME V.2.2. <u>Soit</u> G <u>un</u> g.a.l.c. <u>vérifiant</u> (P_2), <u>une suite adaptée de sous-groupes</u> $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, <u>une fonction radiale</u> f <u>sur</u> G, <u>valant</u> a_n <u>sur</u> $G_n \setminus G_{n+1}$,

1°) <u>pour</u> $1 \leq \alpha \leq 2$, f <u>appartient à</u> $\mathcal{F}L^{\alpha}(G)$ <u>si et seulement si</u>

$$(1) \quad \lim_{n\to -\infty} a_n = 0$$

et

$$(3) \quad \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{|a_p - a_{p-1}|^{\alpha}}{i_p^{\alpha-1}} < \infty ;$$

2°) <u>pour</u> $1 < \alpha \leq 2$, f <u>appartient à</u> $\mathcal{F}L^{\alpha}(G)$ <u>si et seulement si</u>

$$(4) \quad \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{|a_p|^{\alpha}}{i_p^{\alpha-1}} < \infty .$$

Remarquons que, pour $\alpha = 1$, la condition (3) signifie que la suite $\{a_n\}$ est à variation bornée, et que, pour $\alpha = 2$, (4) exprime que f appartient à $L^2(G)$.

Montrons d'abord la première partie du théorème, c'est-à-dire que

$$(1) \text{ et } (2) \Longleftrightarrow (1) \text{ et } (3) .$$

Posons, pour tout n,

$$b_n = \sum_{p\geq n} \frac{a_p - a_{p-1}}{i_p} = \frac{1}{i_n} \sum_{p\geq n} \frac{a_p - a_{p-1}}{\prod_{n\leq j<p} k_j} = i_n^{-\frac{1}{\alpha}} c_n ,$$

ce qui permet d'écrire la relation (2) sous la forme

$$(5) \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^{\alpha} < \infty ,$$

avec

$$c_n = \left(\sum_{p\geq n} \frac{a_p - a_{p-1}}{\prod_{n\leq j<p} k_j} \right) i_n^{\frac{1}{\alpha} - 1}$$

ou encore

$$(6)\quad c_n = \sum_{p\geq n} \frac{d_p}{\left(\prod_{n\leq j<p} k_j\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

où on a posé

$$d_n = i_n^{\frac{1}{\alpha}-1}(a_n-a_{n-1})$$

ce qui permet d'écrire (3) sous la forme équivalente

$$(7)\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^\alpha < \infty \ .$$

Il s'agit de démontrer maintenant que

$$(1) \text{ et } (5) \iff (1) \text{ et } (7)\ ,$$

les c_n et d_n étant liés par la relation (6).

Or, (6) entraîne que

$$c_n = d_n + \frac{c_{n+1}}{k_n^{\frac{1}{\alpha}}}\ ,$$

donc (5) implique (7) d'après l'inégalité de Minkowski.

Réciproquement, supposons (7) : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^\alpha < \infty$. Pour prouver (5), il suffit de prouver que $\sum c_n'^\alpha < \infty$, où on a

$$|c_n| \leq \sum_{p\geq n} \frac{|d_p|}{\left(\prod_{n\leq j<p} k_j\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \sum_{p\geq n} \frac{|d_p|}{2^{\frac{1}{\alpha}(p-n)}} = c_n'\ ;$$

or, la suite $\{c_n'\}$ s'obtient en convolant la suite de puissance α-ième sommable $\{|d_n|\}$ avec la suite sommable qui vaut $2^{\frac{n}{\alpha}}$ pour $n \leq 0$ et 0 pour $n > 0$, donc on a $\sum c_n'^\alpha < \infty$.

La première partie du théorème est donc établie.

Pour prouver la deuxième partie, posons

$$a_n = i_n^{1-\frac{1}{\alpha}} e_n\ .$$

La condition (4) est alors équivalente à

$$(8)\quad \sum |e_n|^\alpha < \infty\ ,$$

et il s'agit de prouver que

$$(1) \text{ et } (7) \iff (8)\ .$$

Supposons (8) : $\lim\limits_{n \to -\infty} e_n = 0$, ce qui entraîne (1) car $\lim\limits_{n \to -\infty} i_n = 0$.
D'autre part, on a

$$d_n = e_n - k_{n-1}^{\frac{1}{\alpha} - 1} e_{n-1} ,$$

ce qui montre que (8) implique (7).

Réciproquement, montrons que (1) et (7) impliquent (8).

La relation (1) permet d'écrire

$$a_n = \sum_{p \leq n} (a_p - a_{p-1}) ,$$

d'où

$$e_n = \sum_{p \leq n} \frac{d_p}{\left(\prod\limits_{p \leq j < n} k_j\right)^{1 - \frac{1}{\alpha}}}$$

et il suffit de montrer que (7) implique

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |e'_n|^\alpha < \infty ,$$

où l'on a

$$|e_n| \leq \sum_{n \leq p} \frac{|d_p|}{\left(\prod\limits_{p \leq j < n} k_j\right)^{1 - \frac{1}{\alpha}}} \leq \sum_{p \leq n} \frac{|d_p|}{2^{(1 - \frac{1}{\alpha})(n-p)}} = e'_n .$$

Or, la suite $\{e'_n\}$ s'obtient en convolant la suite de puissance α-ième sommable $\{|d_n|\}$ avec la suite sommable qui vaut $\left(\frac{1}{2^{1 - \frac{1}{\alpha}}}\right)^n$ pour $n \geq 0$, et 0 pour $n < 0$. On a donc bien

$$\sum |e_n|^\alpha \leq \sum e'^{\alpha}_n < \infty .$$

Ceci démontre bien le théorème V.2.2.

Remarque V.2.3. L'hypothèse $\alpha \leq 2$ n'intervient pas explicitement dans la démonstration précédente. Sa seule utilité est d'assurer, pour $F \in L^\alpha(\Gamma)$, l'existence d'une fonction sur G qui en soit la transformée de Fourier. Or, elle n'est pas nécessaire. On peut montrer facilement que, même pour $\alpha > 2$, une fonction radiale F qui appartient à $L^\alpha(\Gamma)$ possède une transformée de Fourier f , et qu'une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs a_n d'une fonction radiale f sur G pour que $f = \hat{F}$, $F \in L^\alpha(\Gamma)$ est la condition (4) : $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|a_n|^\alpha}{i_n^{\alpha - 1}} < \infty$. Ceci peut d'ailleurs se déduire du résultat connu pour $\alpha < 2$ en utilisant la dualité.

Dans le même ordre d'idées, un argument de dualité permet, à partir de la caractérisation des éléments radiaux de $A(G)$, de caractériser les pseudo-mesures radiales sur G (une pseudo-mesure radiale sur G est une pseudo-mesure qui s'annule sur toute $\Phi \in A(G)$ telle que $\mathcal{R}_G \Phi = 0$). On voit aisément que ce sont des fonctions radiales et qu'une fonction radiale sur G , valant a_n sur $G_n \setminus G_{n+1}$, est une pseudo-mesure si et seulement si les sommes $\sum_{A \leq n \leq B} \frac{a_n}{i_n}$ sont bornées lorsque A et B parcourent $\mathbb{Z}$.

V - 3. Multiplicateurs radiaux sur les groupes de type (P_2) .

Soit G un g.a.l.c. vérifiant (P_2) . Nous désignons, comme au chapitre précédent, par $M_\alpha(G)$ l'espace des multiplicateurs de $\mathcal{F} L^\alpha(G)$, pour $1 < \alpha \leq 2$.

Il résulte du théorème V.2.2. que l'espace des multiplicateurs des éléments radiaux de $\mathcal{F} L^\alpha(G)$ se compose des fonctions radiales bornées. Cet espace contient évidemment le sous-espace des éléments radiaux de $M_\alpha(G)$. Il est remarquable qu'il ne contienne rien d'autre.

THÉORÈME V.3.1. Pour qu'une fonction radiale f sur un g.a.l.c. G vérifiant (P_2) appartienne à $M_\alpha(G)$, $1 < \alpha \leq 2$, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et il existe alors une constante K telle que $\|f\|_{M_\alpha} \leq K \|f\|_\infty$.

Comme on a $M_\alpha(G) \subset M_2(G) = L^\infty(G)$, la condition est bien nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, nous allons adapter à la situation présente une idée classique dans le cas des groupes $\mathbb{R}^n$ (voir [CZ] ou [S] , chap. II). Le fait de travailler dans un groupe totalement discontinu simplifie la technique.

Ici encore, il suffit de raisonner sur des groupes G qui possèdent une suite adaptée $\{G_n\}_{n \in I}$, avec $I = \mathbb{Z}$. Si on considère, en effet, que tout groupe vérifiant (P_2) qui est soit compact, soit discret, est un facteur direct d'un groupe vérifiant (P_2) avec $I = \mathbb{Z}$, il suffit, pour établir le théorème V.3.1. dans le cas général, de l'établir pour $I = \mathbb{Z}$ puis d'en déduire le cas général par application des théorèmes IV.4.1. et IV.4.2.

L'idée de Calderon et Zygmund est d'étudier une fonction sur des cubes de $\mathbb{R}^n$ de plus en plus petits, se déduisant les uns des autres par dichotomie. Ici, les cubes qui constituent le pavage de $\mathbb{R}^n$ seront remplacés par des classes dans Γ selon les divers sous-groupes Γ_n , ou des réunions de telles classes.

Soit donc G un g.a.l.c. vérifiant (P_2) , une suite adaptée $\{G_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de sous-groupes ouverts et compacts, Γ le dual de G , Γ_n l'orthogonal dans Γ de G_n . Rappelons que les Γ_n sont ouverts et compacts et que $\bigcup \Gamma_n = \Gamma$, $\bigcap \Gamma_n = \{0\}$.

Nous définissons une famille $\mathcal{Q}$ de parties ouvertes et compactes de Γ : $\mathcal{Q}$ contient d'abord toutes les classes dans Γ des sous-groupes Γ_n . Si l'indice k_n de

Γ_n dans Γ_{n+1} est ≥ 3 , on partage Γ_{n+1} en deux réunions de classes dans Γ_{n+1} de Γ_n , comportant à une unité près le même nombre de classes de Γ_n ; puis chacune des parties obtenues est partagée de la même manière, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne toutes les classes de Γ_n dans Γ_{n+1} . On transfère par translation cette famille de parties de Γ_{n+1} à toutes les classes de Γ_{n+1} dans Γ . La famille $\mathcal{Q}$ est constituée des parties de Γ_{n+1} et de leurs translatées, obtenues à chaque stade du découpage de Γ_{n+1} , et ceci pour toutes les valeurs de n .

Si Q appartient à $\mathcal{Q}$, soit Q' l'un des deux ensembles de $\mathcal{Q}$ provenant du partage de Q : il se peut que ces deux ensembles n'aient pas la même mesure, mais on a, dans tous les cas,

$$\frac{1}{3}\, m(Q) \leq m(Q') \leq \frac{2}{3}\, m(Q) .$$

LEMME V.3.2. <u>Soient</u> Q <u>un ensemble de la famille</u> $\mathcal{Q}$, y <u>et</u> z <u>deux points de</u> Q , x <u>un point de</u> Γ <u>n'appartenant pas à</u> Q . <u>Alors</u> $x-y$ <u>et</u> $x-z$ <u>appartiennent à la même couronne de</u> Γ .

Il existe un indice n bien déterminé tel que Q soit une réunion de classes de Γ_n contenue dans une classe de Γ_{n+1} . Appelons r le plus petit indice tel que Q et x soient contenus dans la même classe de Γ_{r+1} . Si $r > n$, $x-y$ et $x-z$ appartiennent à $\Gamma_{r+1} \setminus \Gamma_r$. Si $r = n$, $x-y$ et $x-z$ appartiennent à Γ_{n+1} , et il s'agit de voir qu'ils n'appartiennent pas à Γ_n : cela résulte du fait que Q , réunion de classes de Γ_n , est tel que $Q + \Gamma_n = Q$, et que l'on a pris x extérieur à Q .

Pour prouver le théorème V.3.1., considérons, pour commencer, une fonction radiale bornée M , appartenant à $L^2(G)$ et appelons K sa transformée de Fourier qui appartient à $L^2(\Gamma)$. Il s'agit de montrer que, pour $1 < \alpha \leq 2$, la convolution par K applique $L^\alpha(\Gamma)$ dans $L^\alpha(\Gamma)$.

D'après le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (voir, par exemple, [Z] , chap. 12), il suffit de voir que la convolution par K applique L^2 dans L^2 , et applique faiblement L^1 dans L^1 . Plus précisément, s'il existe deux constantes A_1 et A_2 telles que l'on ait, pour toute $f \in L^1(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$,

$$\|K * f\|_2 \leq A_2 \|f\|_2$$

et

$$m(E_{K * f, a}) \leq \frac{A_1}{a} \|f_1\| \quad \text{pour tout } a > 0$$

(où $E_{K * f,a}$ désigne l'ensemble des points où $|K * f|$ est $\geq a$), alors pour tout α tel que $1 < \alpha \leq 2$ et toute $f \in L^\alpha(\Gamma)$, $K * f$ sera définie et telle que

$$\|K * f\|_\alpha \leq A_\alpha \|f\|_\alpha$$

où A_α est une constante dépendant uniquement de A_1 , A_2 et α et dont il nous suffit de savoir qu'elle reste bornée lorsque A_1 et A_2 restent bornés.

L'hypothèse que M est bornée entraîne que, pour $f \in L^2(\Gamma)$, $\|K * f\|_2 \leq A_2\|f\|_2$, avec $A_2 = \|M\|_\infty$. Pour montrer la propriété de type L^1-faible, nous suivons, en l'adaptant, la méthode de Calderon et Zygmund.

LEMME V.3.3. <u>Soient</u> F <u>une fonction sommable sur</u> Γ , a <u>un nombre positif</u>. <u>Il existe deux parties</u> P <u>et</u> R <u>de</u> Γ <u>telles que</u>

i) $\Gamma = P \cup R$, $P \cap R = \emptyset$;

ii) $|F| \leq a$ <u>presque partout sur</u> P ;

iii) $R = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$, <u>les</u> Q_k <u>étant des ensembles deux à deux disjoints appartenant à la famille</u> $\mathbb{Q}$, <u>tels que l'on ait pour tout</u> k

$$a < \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} |F| \leq 3a$$

<u>d'où, en particulier,</u> $m(R) \leq \frac{\|F\|_1}{a}$.

Il existe, en effet, un indice n_o tel que, si Q désigne l'une quelconque des classes de Γ_{n_o} dans Γ ,

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |F| \leq a .$$

Considérons l'une, Q , des classes de Γ_{n_o} dans Γ : partageons Q en deux parties selon le processus de construction de $\mathbb{Q}$, et désignons par Q' l'une des parties obtenues. Si

$$\frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} |F| \leq a ,$$

on répète sur Q' l'opération de partage, et on continue, pour chaque partie obtenue, tant que c'est possible. On s'arrête lorsque l'on obtient une partie Q'' pour laquelle l'inégalité ci-dessus soit en défaut, c'est-à-dire sur laquelle la moyenne de $|F|$ soit $> a$. Une telle partie Q'' provient par un partage d'une partie Q_o bien déterminée appartenant à $\mathbb{Q}$, et on a

$$a < \frac{1}{m(Q'')} \int_{Q''} |F| \leq \frac{m(Q_o)}{m(Q'')} \frac{1}{m(Q'')} \int_{Q_o} |F| \leq 3a .$$

Appelons R la réunion de toutes les parties Q'' du type ci-dessus, numérotées arbitrairement, et soit P le complémentaire de R .

Soit x un point de P ; considérons les éléments de $\mathbb{Q}$ qui contiennent x , en particulier les classes $x + \Gamma_n$: on a, pour tout n ,

$$\frac{1}{m(\Gamma_n)} \int_{x+\Gamma_n} |F| \leq a \ .$$

Or, la suite des fonctions $F_n = \frac{1}{m(\Gamma_n)} \chi_{\Gamma_n} * F$ converge vers F dans $L^1(\Gamma)$ lorsque n tend vers l'infini, donc une suite extraite de la suite $\{F_n\}$ converge vers F presque partout. Comme on a sur P l'inégalité $|F_n| \leq a$, il en résulte que $|F| \leq a$ presque partout sur P .

Pour étudier le produit de convolution $K * F$, on décompose F en une somme de deux fonctions :

$$F = \Phi + \Psi \ ,$$

$$\Phi(x) = F(x) \quad \text{si} \quad x \in P \ ,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} F \quad \text{si} \quad x \in Q_k \ .$$

On a donc

$$\Psi = 0 \quad \text{sur } P$$

$$\int_{Q_k} \Psi = 0 \quad \text{pour tout } Q_k \text{ figurant dans } R \ .$$

Nous cherchons à évaluer la mesure de l'ensemble des points où $K * F$ dépasse une valeur donnée. Remarquons que

$$m(E_{K * F, 2a}) \leq m(E_{K * \Phi, a}) + m(E_{K * \Psi, a}) \ .$$

Or $\Phi \in L^2(\Gamma)$, car

$$\int_\Gamma |\Phi|^2 = \int_P |\Phi|^2 + \int_R |\Phi|^2 \ ,$$

et

$$\int_P |\Phi|^2 < a \int_P |\Phi| \leq a \|F\|_1 \ ,$$

$$\int_R |\Phi|^2 = \sum_k m(Q_k) \left| \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} F \right|^2 \leq 9\, a^2\, m(R) \leq 9\, a \|F\|_1 \ ,$$

d'où

$$\|\Phi\|_2^2 \leq 10\, a \|F\|_1$$

et

$$\|K * \Phi\|_2 \leq (10 a \|F\|_1)^{1/2} \, \|M\|_\infty \ ,$$

d'où l'on déduit aisément que

$$m(E_{K * \Phi, a}) \leq \frac{10 \|M\|_\infty^2}{a} \|F\|_1 \ .$$

Etudions maintenant $K * \Psi$.

Pour $x \in P$, on a

$$K * \Psi(x) = \sum_k \int_{Q_k} K(x-y)\, \Psi(y)\, dy$$

et, d'après le lemme V.3.2., $x-y$ reste dans une couronne fixe lorsque y parcourt Q_k. Comme $\int_{Q_k} \Psi = 0$ et que K est radiale, on voit ainsi que $K * \Psi$ s'annule sur P.

Par conséquent,

$$m(E_{K * \Psi, a}) \leq m(R) \leq \frac{1}{a} \|F\|_1 .$$

On obtient donc finalement que

$$m(E_{K * F, 2a}) \leq \frac{10\|M\|_\infty^2 + 1}{a} \|F\|_1 ,$$

ce qui montre que $F \longrightarrow K * F$ est un opérateur de type L^1-L^1 faible, avec une constante A_1 majorée par $20 \|M\|_\infty^2 + 2$.

Le théorème de Marcinkiewicz montre alors que $F \longrightarrow K * F$ est un opérateur continu de $L^\alpha(\Gamma)$ $(1 \leq \alpha \leq 2)$, dont la norme est bornée lorsque $\|M\|_\infty$ est borné (rappelons que $K = \hat{M}$).

Pour achever la démonstration du théorème V.3.1., il faut s'affranchir de la condition $M \in L^2(G)$. Soit donc M une fonction radiale bornée. Considérons, pour tout entier positif N, la fonction M_N qui coïncide avec M sur $G_{-N} \setminus G_N$, qui est nulle ailleurs. Les normes $\|M_N\|_\infty$ sont bornées, donc les opérateurs $T_N : F \longrightarrow \hat{M}_N * F$, continus dans $L^\alpha(\Gamma)$, ont des normes bornées. Pour toute F appartenant à $L^\alpha(\Gamma)$, la suite $\hat{M}_N * F$ est bornée dans $L^\alpha(\Gamma)$, donc une suite extraite $\hat{M}_{N_q} * F$ converge vers $F_0 \in L^\alpha(\Gamma)$ pour la topologie faible $\sigma(L^\alpha(\Gamma), L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\Gamma))$. Or, la convergence faible dans $L^\alpha(\Gamma)$ d'une suite de fonctions implique, pour $1 < \alpha \leq 2$, la convergence faible dans $L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(G)$ de la suite des transformées de Fourier, de sorte que la suite $M_{N_q} \hat{F}$ converge d'une part faiblement (dans $L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(G)$) vers $\hat{F}_0$, d'autre part ponctuellement presque partout vers MF, ce qui montre que $MF = F_0$, donc que M est bien un multiplicateur de $\mathcal{F} L^\alpha(G)$.

Mentionnons ici un résultat, dû à Jacques PEYRIERE, qui est à la fois un cas particulier et une généralisation du théorème V.3.1.

THÉORÈME V.3.4. <u>Soit</u> G <u>un</u> g.a.l.c. <u>vérifiant</u> (P_2), $\{G_n\}_{n \in I}$ <u>une suite adaptée de sous-groupes tels que l'ensemble</u> $\{k_n\}_{n \in I}$ <u>des indices de deux sous-groupes successifs l'un par rapport à l'autre soit majoré</u>. <u>Alors</u>, <u>pour tout</u> α <u>réel tel que</u> $1 < \alpha \leq 2$, <u>une fonction quasi-radiale appartient à</u> $M_\alpha(G)$ <u>si et seulement si elle est</u>

bornée.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème V.3.1., mais ici on peut prendre pour $\mathcal{Q}$ la famille des classes de tous les sous-groupes Γ_n sans qu'il soit nécessaire d'introduire des ensembles intermédiaires ; une classe de Γ_n sera partagée en k_n classes de Γ_{n+1}, et deux ensembles, dont l'un provient de l'autre par un partage, auront leurs mesures dans un rapport borné.

V - 4. Eléments radiaux de $A_p(G)$.

Dans $\mathbb{R}^n$, la notion de fonction radiale permet, en considérant les fonctions radiales qui appartiennent à A_p, de se poser le problème suivant : soit $f \in A_p(\mathbb{R}^n)$, radiale. Peut-on représenter f sous la forme $f = \sum g_n * \check{h}_n$, où g_n et h_n sont assujetties aux conditions usuelles :

$$g_n \in L^p(\mathbb{R}^n) \ , \ h_n \in L^q(\mathbb{R}^n) \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \ , \ \sum \|g_n\|_p \|h_n\|_q < \infty \ ,$$

et où, de plus, les g_n et h_n sont radiales ? La réponse n'est pas connue.

En revanche, pour la notion de fonction radiale que nous avons sur les g.a.l.c. qui vérifient (P_2), nous avons une réponse affirmative très simple.

THÉORÈME V.4.1. <u>Soit</u> G <u>un</u> g.a.l.c. <u>vérifiant</u> (P_2), $\{G_n\}_{n\in I}$ <u>une suite adaptée de sous-groupes ouverts</u>, f <u>une fonction appartenant à</u> $A_p(G)$ <u>pour</u> $p > 1$. <u>Si</u> f <u>est radiale</u>, <u>elle appartient à</u> $A_2(G) = A(G)$ <u>et s'écrit</u> $f = g * \check{h}$, <u>avec</u> $g \in L^p(G)$, $h \in L^q(G)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, <u>où</u> g <u>et</u> h <u>sont radiales</u>. <u>Plus précisément</u>, <u>l'opérateur de radialisation</u> $\mathcal{R}_G$ <u>applique</u> $A_p(G)$ <u>dans</u> $A_2(G)$.

Appelons T_k l'élément de $CV_q(G)$ défini comme opérateur de convolution par la fonction $i_{k+1}\alpha_{k+1} - i_k\alpha_k$ (α_k : fonction caractéristique de G_k). Le multiplicateur transformé de Fourier de T_k est $M_k = \beta_{k+1} - \beta_k$ (β_k : fonction caractéristique de Γ_k, orthogonal de G_k dans le dual Γ de G). Pour toute partie finie E de l'ensemble d'indices I, $\sum_{k\in E} T_k$ est un élément de $CV_q(G)$, et les normes de ces convoluteurs sont bornées supérieurement, en vertu du théorème V.3.1., par un nombre K, puisque leurs transformées de Fourier sont bornées en norme $L^\infty(\Gamma)$.

Posons $A_k = (i_{k+1} - i_k)^{-1} \langle T_k , f \rangle$, et appelons Φ la fonction radiale sur Γ, valant A_k sur la couronne $\Gamma_{k+1} \setminus \Gamma_k$. La fonction Φ appartient à $L^1(\Gamma)$: il suffit de montrer que la série $\sum_{k\in I} |\langle T_k , f \rangle|$ converge, ce qui résulte du fait que, pour toute partie finie E de I, $\left|\sum_{k\in I} \langle T_k , f \rangle\right|$ est majorée par $K\|f\|_{A_p(G)}$. On a même $\|\Phi\|_1 \leq K\|f\|_{A_p(G)}$. Posons $\Psi = \hat{\Phi}$: $\Psi \in A_2(G)$, $\|\Psi\|_{A_2(G)} \leq K\|f\|_{A_p(G)}$. Si on écrit $\Phi = uv$, avec u et v radiales, dont les valeurs respectives sur $\Gamma_{k+1} \setminus \Gamma_k$

ont pour modules $i_{k+1}^{\frac{2-p}{p}} |A_k|^{\frac{1}{p}}$ et $i_{k+1}^{\frac{2-q}{q}} |A_k|^{\frac{1}{q}}$, le théorème V.2.2. (transcrit pour Γ , où i_k représente la mesure de Γ_k et non son inverse) et la remarque V.2.3. entraînent que $\hat{u} \in L^p(G)$ et que $\hat{v} \in L^q(G)$, donc que $\Psi = g * \check{h}$, $g \in L^p(G)$ et $h \in L^q(G)$, g et h radiales. Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de prouver que $\Psi = \mathcal{R}_G f$.

Appelons a_n la valeur de Ψ sur $G_n \setminus G_{n+1}$. On a (en faisant le calcul dans le cas $I = \mathbb{Z}$, les autres cas étant tout à fait analogues),

$$a_n = \sum_{k<n} (i_{k+1} - i_k)A_k - i_n A_n$$

$$= \sum_{k<n} < T_k , f > - \frac{i_n}{i_{n+1}-i_n} < T_n , f >$$

soit

$$a_n = - \sum_{k<n} \int (i_k \alpha_k - i_{k+1} \alpha_{k+1}) f + \frac{i_n}{i_{n+1}-i_n} \int (i_n \alpha_n - i_{n+1} \alpha_{n+1}) f$$

$$= \frac{i_n i_{n+1}}{i_{n+1}-i_n} \int f(\alpha_n - \alpha_{n+1})$$

car $\lim\limits_{k \to -\infty} \int i_k \alpha_k f = 0$, puisque c'est la limite de la moyenne sur G_k de f , qui est nulle puisque f tend vers 0 à l'infini.

Or $\frac{i_n i_{n+1}}{i_{n+1}-i_n} \int f(\alpha_n - \alpha_{n+1})$ est précisément la moyenne de f sur $G_n \setminus G_{n+1}$. Ceci prouve donc complètement le théorème.

V - 5. Multiplicateurs radiaux sur les groupes de type (P_1) .

Soit G un g.a.l.c. vérifiant (P_1) avec une suite adaptée de sous-groupes $\{G_n\}_{n \in I}$.

L'inclusion de G_{n+1} dans G_n donne une inclusion de $(G_{n+1})_b$ dans $(G_n)_b$ et, d'après le théorème I.1.5. c), l'indice de $(G_{n+1})_b$ dans $(G_n)_b$ est encore k_n , indice de G_{n+1} dans G_n . Considérons le sous-groupe de G_b , réunion des $(G_n)_b$: nous appellerons G' ce sous-groupe muni de la topologie de groupe pour laquelle les $(G_n)_b$ en sont des sous-groupes ouverts. Appelons G'' le sous-groupe fermé de G' , intersection des $(G_n)_b$. Soit H le quotient G'/G'' , et appelons H_n le sous-groupe ouvert de H , quotient de $(G_n)_b$ par G'' . Posons encore $G_r = \cup G_n$.

H est alors un g.a.l.c. qui vérifie (P_2) , la suite $\{H_n\}_{n \in I}$ étant une suite adaptée de sous-groupes.

Nous appellerons Φ le morphisme continu de G_r (sous-groupe ouvert de G) dans H qui coïncide sur tout sous-groupe G_n , avec le composé de l'injection $G_n \longrightarrow (G_n)_b$

et de la surjection $(G_n)_b \longrightarrow H_n$. On a évidemment $\Phi^{-1}(H_n) = G_n$.

THÉORÈME V.5.1. Soit G un g.a.l.c. vérifiant (P_1) , $\{G_n\}_{n\in I}$ une suite adaptée de sous-groupes, α un réel > 1 . Soit f une fonction sur G , constante sur $\cap G_n$, hors de $\cup G_n$, et sur tout ensemble de la forme $G_n \setminus G_{n+1}$. Alors, pour que f appartienne à $M_\alpha(G)$, il faut et il suffit qu'elle soit bornée.

Si $\cap G_n$ n'est pas un sous-groupe ouvert de G , il est localement négligeable, et la valeur de f peut y être quelconque. Si $\cap G_n$ est ouvert, sa fonction caractéristique appartient à $M_\alpha(G)$, de même que celle de $G_r = \cup G_n$. Il suffit donc de prouver le théorème en supposant que $\cap G_n = \{0\}$ et $\cup G_n = G$ (si un convoluteur est porté par un sous-groupe ouvert, c'est un convoluteur pour ce sous-groupe et réciproquement). Mais, dans ce cas, c'est une conséquence immédiate du théorème V.3.1. et du théorème IV.4.2.

Exemple : Si nous prenons $G = \mathbb{Z}$, et une suite décroissante de sous-groupes, nous obtenons des multiplicateurs de $\mathcal{F}L^\alpha(\mathbb{Z})$ d'un type bien différent de ceux, étudiés par Marcinkiewicz ([M]), qui sont constants sur des blocs dyadiques.

Comme corollaire de ce résultat, indiquons le théorème ci-dessous, analogue à un théorème de Paley ([Pa]) et dont la démonstration est tout à fait semblable (dans le cas de $\mathbb{Z}$, c'est un résultat apparemment nouveau) :

THÉORÈME V.5.2. Soit G un g.a.l.c. vérifiant (P_1) , $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite adaptée de sous-groupes ouverts. Soit α un réel tel que $1 < \alpha \leq 2$, Γ le dual de G . Pour $F \in L^\alpha(\Gamma)$, appelons

F_n $(n \in I)$ la fonction telle que $\hat{F}_n = \hat{F}\chi_{G_n \setminus G_{n+1}}$,

$F_{+\infty}$ (si $\cap G_n$ est ouvert) la fonction telle que $\hat{F}_\infty = F\chi_{\cap G_n}$,

$F_{-\infty}$ (si $G \neq \cup G_n$) la fonction telle que $\hat{F}_{-\infty} = \hat{F}\chi_{G \setminus \cup G_n}$;

alors

$$\|F\|_\alpha \quad \text{et} \quad \Big\| \Big(\sum_{\substack{n\in I \\ n = \pm\infty}} |F_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_\alpha$$

sont des normes équivalentes sur $L^\alpha(\Gamma)$.

-:-:-:-

CHAPITRE VI

CARACTÉRISATION DE CERTAINES PROPRIÉTÉS LOCALES DES GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS.

Nous avons, aux chapitres II, III et IV, associé à tout g.a.l.c. G divers objets : un groupe compact G^*, des algèbres de germes de fonctions $A_{\omega,o}(G)$ et $A_{p,o}(G)$; ces objets sont des invariants de la structure locale de G, en ce sens qu'ils sont les mêmes pour des groupes localement isomorphes.

Il est naturel de chercher dans quelle mesure ces divers invariants sont caractéristiques de la structure locale des g.a.l.c. Nous avons déjà vu (remarque II.4.7.) que ce n'est pas le cas pour G^* ; en ce qui concerne les algèbres de germes $A_{\omega,o}$ et $A_{p,o}$, la réponse n'est pas connue.

L'objet de ce chapitre est de présenter les résultats positifs obtenus dans cette voie. Ces résultats sont malheureusement encore partiels et les méthodes qui permettraient de les étendre nous échappent.

VI - 1. Propriétés caractérisées par le groupe G^*.

Nous avons vu, au chapitre II, que le groupe G^* ne caractérise pas la structure locale de G : les groupes $(\mathbb{R}^n)^*$, $n > 0$, sont isomorphes entre eux. Il ne permet pas non plus de distinguer les groupes totalement discontinus des groupes localement connexes. Cependant, pour une vaste classe de groupes totalement discontinus, il caractérise complètement la structure locale.

Commençons par un résultat négatif.

THÉORÈME VI.1.1. *Soit le groupe* $G = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\wedge$, *où* $\mathbb{Q}$ *désigne le groupe additif des nombres rationnels. Alors* G^* *et* $\mathbb{R}^*$ *sont isomorphes, alors que* G *est totalement discontinu et* $\mathbb{R}$ *localement connexe.*

G est compact, et, d'après le lemme II.1.6., possède la puissance du continu. Le corollaire II.1.7. entraîne que, pour montrer que G^* et $\mathbb{R}^*$ sont isomorphes, il suffit d'établir que le dual de G^* est divisible et sans torsion, en vertu du théorème I.3.6.

Posons $\Gamma = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \hat{G}$. Γ est discret, et $(G^*)^\wedge$ est isomorphe à Γ_{bd}/Γ_d. Pour tout entier positif n, l'application $\alpha_n : \gamma \longrightarrow n\gamma$ de Γ dans Γ est surjective, et son noyau est un sous-groupe de Γ qui possède n éléments. L'application $(\alpha_n)_b$ de Γ_b dans Γ_b est aussi de la forme $\gamma \longrightarrow n\gamma$ (ce qui se voit par passage à la limite ou par dualité), coïncide avec α_n sur le sous-groupe Γ de Γ_b, est surjective et a un noyau comportant n éléments. Le noyau de $(\alpha_n)_{bd}$ est donc le noyau de α, restriction de $(\alpha_n)_{bd}$ à Γ, ce qui prouve, en passant au quotient $\Gamma_{bd/\Gamma} = (G^*)^\wedge$, que l'application $\gamma \longrightarrow n\gamma$ est un automorphisme de $\Gamma_{bd/\Gamma}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème VI.1.1. est démontré.

Passons maintenant aux renseignements positifs que fournit le groupe G^* .

THÉORÈME VI.1.2. Pour un g.a.l.c. G , les conditions suivantes sont équivalentes :

i) G^* est totalement discontinu ;

ii) G^* est de torsion, donc d'ordre borné ;

iii) G est totalement discontinu, localement isomorphe à un groupe compact de torsion, donc d'ordre borné.

ii) implique i) : cela résulte du théorème I.3.5.

i) implique iii) : appelons Γ le dual de G , et supposons G^* totalement discontinu, c'est-à-dire Γ_{bd}/Γ_d de torsion. Nous pouvons, en vertu du théorème I.3.1., supposer G compact, donc Γ discret. Si Γ n'était pas de torsion, il possèderait un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, donc G aurait un quotient isomorphe à $\mathbb{T}$ et, d'après le théorème II.4.2., G^* aurait un quotient isomorphe au groupe connexe $\mathbb{T}^*$, ce qui est impossible puisque G^* est totalement discontinu. Par conséquent, Γ est de torsion, donc aussi Γ_{bd} et Γ_b . Donc Γ_b est totalement discontinu (théorème I.3.5.), et par suite G_d , donc G , est de torsion. Le théorème I.3.5. entraîne à nouveau que G est totalement discontinu d'ordre borné.

Montrons enfin que iii) implique ii). Si G est localement isomorphe à un groupe compact de torsion, nous pouvons supposer que G est lui-même compact de torsion, donc d'ordre borné (théorème I.3.5.). Il existe donc un entier x tel que, pour tout x de G , $nx = 0$. On a donc aussi $nx = 0$ pour tout x de G_{db} , donc aussi pour tout x appartenant à G^* . Donc G^* est de torsion.

THÉORÈME VI.1.3. Soient G et H deux g.a.l.c. Moyennant l'hypothèse du continu généralisée, les conditions

i) G^* et H^* sont isomorphes et totalement discontinus ;

ii) G et H sont localement isomorphes entre eux, et localement isomorphes à un groupe compact de torsion ;

sont équivalentes.

Autrement dit -et c'est le principal résultat de ce paragraphe- l'hypothèse du continu généralisée entraîne que les groupes G^* caractérisent la structure locale des g.a.l.c. dont la classe d'isomorphie locale possède un représentant compact de torsion.

Comme au chapitre I, nous désignons par $\mathbb{Z}(a)$, pour un entier positif a , le groupe cyclique d'ordre a .

LEMME VI.1.4. Soit a un entier positif de la forme $a = p^r$, p premier, $r \geq 1$. Soit ω un cardinal infini. Si G est localement isomorphe à $\mathbb{Z}(a)^{\omega}$, G^* est isomorphe à $\mathbb{Z}(a)^{\omega'}$. Moyennant l'hypothèse du continu généralisée, on peut affirmer, de plus, que $\omega' = 2^{2^{\omega}}$.

Supposons donc G localement isomorphe à $\mathbb{Z}(p^r)^{\omega}$. Comme il s'agit d'étudier G^*, on peut supposer que G est effectivement le groupe $\mathbb{Z}(p^r)^{\omega}$. Pour tout x de G, $p^r x = 0$, donc $\Gamma = \hat{G}$ possède la même propriété, de même que Γ_b, $\Gamma_{bd/\Gamma}$ et G^*. Le théorème I.3.5. montre alors que G^* est isomorphe à

$$\prod_{j=1}^{r} \mathbb{Z}(p^j)^{\omega_j} .$$

Pour achever la démonstration du lemme VI.1.4., il faut établir deux résultats préalables.

LEMME VI.1.5. <u>Soit</u> H <u>un groupe de la forme</u> $\prod_{j=1}^{r} \mathbb{Z}(p^j)^{\omega_j}$. <u>Posons</u> $N_j(H) = \{ x \in H \mid p^j x = 0 \}$ <u>et</u> $I_j(H) = \{ p^j x \mid x \in H \}$, <u>pour</u> $1 \leq j \leq r-1$. <u>Pour que</u> H <u>se réduise à</u> $\mathbb{Z}(p^r)^{\omega_r}$, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u> $N_{r-1}(H) = I_1(H)$.

La condition est nécessaire, car si $x \in \mathbb{Z}(p^r)^{\omega_r}$ est tel que $p^{r-1}x = 0$, on a $x = py$ avec $y \in \mathbb{Z}(p^r)^{\omega_r}$. La condition est également suffisante : si H ne se réduit pas à une puissance de $\mathbb{Z}(p^r)$, H s'écrit $\mathbb{Z}(p^j) \times H_1$ avec $j < r$; si x_0 est un générateur de $\mathbb{Z}(p^j)$, le point $x = (x_0, 0)$ de $\mathbb{Z}(p^j) \times H_1$ appartient à $N_{r-1}(H)$ et non à $I_1(H)$.

LEMME VI.1.6. <u>Soient</u> G <u>un groupe abélien compact,</u> n <u>un entier</u> > 0, Φ_n <u>l'application de</u> G <u>dans</u> G <u>définie par</u> $\Phi_n(x) = nx$. <u>Si, pour tout morphisme</u> α, <u>on note respectivement</u> $N(\alpha)$ <u>et</u> $I(\alpha)$ <u>le noyau et l'image, on a</u>

$$N(\Phi_n^*) = G^* \cap \overline{N(\Phi_n)}^b ,$$

$$I(\Phi_n^*) = G^* \cap \overline{I(\Phi_n)}^b .$$

(De même qu'au chapitre II, $\bar{X}^b$ désigne l'adhérence dans G_{db} d'une partie X de G considérée comme plongée dans G_d).

On a évidemment : $N(\Phi_n^*) = G^* \cap N((\Phi_n)_{db})$. Or $N((\Phi_n)_{db})$ admet pour orthogonal dans Γ_{bd}, $I((\hat{\Phi}_n)_{bd})$; $N((\Phi_n)_d)$ admet pour orthogonal dans Γ_b, $I((\hat{\Phi}_n)_b)$ Si on considère $N((\Phi_n)_d)$ comme une partie de G_{db}, elle a même orthogonal que le sous-groupe fermé $N((\Phi_n)_{db})$ qui est donc son adhérence. Ceci prouve la partie du lemme relative aux noyaux.

Pour les images, on a de même : $I((\Phi_n)_{db}) = \overline{I((\Phi_n)_d)}^b$: cela se voit encore en remarquant que les orthogonaux dans Γ_{bd} de ces deux sous-groupes fermés de G_{db} coïncident. Reste à montrer que $I((\Phi_n)_{db}) \cap G^* = I(\Phi_n^*)$. On voit facilement que $(\Phi_n)_{db}(x) = nx$ $(x \in G_{db})$ et que $\Phi_n^*(x) = nx$ $(x \in G^*)$, de sorte qu'il s'agit de prouver que si, pour $x \in G_{db}$, nx appartient à G^*, il existe y dans G^* tel que $nx = ny$. Soit donc $x \in G_{db}$. Appelons x_1 son image par la surjection $G_{db} \longrightarrow G$, et x_2 le point de G_{db}, élément du sous-groupe G_d qui coïncide avec x_1 ; l'image de x_2 par la surjection $G_{db} \longrightarrow G$ est encore x_1, de sorte que $y = x - x_2$ appartient à G^*. Or, cette manière de représenter tout élément x de G_{db} comme somme de x_2 appartenant à G_d et de y appartenant à G^* est unique (x_2 coïncide avec l'image de x dans G), ce qui montre que G_{db} est, algébriquement, somme directe de G et de G^*. Si un élément x de G_{db} est tel que $nx \in G^*$, sa composante y dans G^* est bien telle que $ny = nx$. Ceci prouve bien le lemme VI.1.6.

Revenons au lemme VI.1.4. Le lemme VI.1.5. montre que $N_{r-1}(G) = I_1(G)$, ce qui entraîne, par le lemme VI.1.6., que $N_{r-1}(G^*) = I_1(G^*)$, donc que G^* est isomorphe à $\mathbb{Z}(a)^{\omega'}$. Le corollaire II.1.7. montre que

$$|G^*| = 2^{\omega'} = 2^{2^{|G|}} = 2^{2^{2^{\omega}}} ,$$

d'où, compte tenu de l'hypothèse du continu généralisée, $\omega' = 2^{2^{\omega}}$.

On peut maintenant établir le théorème VI.1.3.

i) implique ii) : si G^* et H^* sont totalement discontinus, G et H sont localement isomorphes à des groupes compacts d'ordre borné (théorème VI.1.2.) ; on peut donc supposer que

$$G = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{Z}(p_j^{\,r_j})^{\omega_j}$$

$$H = \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{Z}(q_j^{\,s_j})^{\tau_j}$$

où les p_j, q_j sont des nombres premiers, r_j, s_j des entiers, ω_j, τ_j des cardinaux infinis. Le lemme VI.1.4. montre alors, avec la remarque II.4.4., que

$$G^* = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{Z}(p_j^{\,r_j})^{\omega'_j}$$

et

$$H^* = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{Z}(q_j^{\,s_j})^{\tau'_j} .$$

L'isomorphisme de G^* et H^* et le fait que, dans la décomposition d'un groupe d'ordre borné en produit de groupes cycliques, les ordres des facteurs cycliques et la puissance à laquelle ils interviennent sont déterminés de manière unique, entraînent que $k = \ell$, et que l'on peut numéroter les facteurs de telle sorte que, pour $j \leq k$, $p_j = q_j$, $r_j = s_j$, $\omega'_j = \tau'_j$. Une double application de l'hypothèse du continu généralisée montre d'abord (lemme VI.1.4.) que $2^{2^{\omega_j}} = 2^{2^{\tau_j}}$, puis, que $\omega_j = \tau_j$, ce qui établit bien la propriété ii).

L'implication ii) $\longrightarrow$ i) résulte immédiatement des théorèmes VI.1.2. et II.1.3.

Remarque VI.1.7. Si on n'introduit pas l'hypothèse du continu généralisée, la connaissance du groupe G^* , lorsqu'il est totalement discontinu, entraîne celle des ordres des facteurs cycliques $\mathbb{Z}(p^r)$ d'un groupe compact de torsion localement isomorphe à G , mais non celle des exposants infinis qui les affectent.

L'introduction de l'hypothèse du continu généralisée est rendue nécessaire par le corollaire II.1.7. qui montre que le passage de G (compact) à G^* augmente de beaucoup la cardinalité.

Il serait évidemment souhaitable de disposer d'un invariant de la structure locale des g.a.l.c. qui ait suffisamment de propriétés intéressantes mais ne présente pas l'inconvénient ci-dessus.

VI - 2. Deux résultats auxiliaires.

Nous présentons ici deux résultats que nous utiliserons au paragraphe suivant pour obtenir des renseignements sur la structure locale des g.a.l.c. Ces résultats ne sont pas dépourvus d'intérêt en eux-mêmes ; c'est pourquoi nous leur consacrons un paragraphe spécial.

Voici d'abord une propriété des algèbres $A_p(\mathbb{R})$ (p : réel supérieur à 1) et $A_\omega(\mathbb{R})$ (ω : poids sur $\mathbb{R}$).

THÉORÈME VI.2.1. *$\mathfrak{A}$ désigne soit l'algèbre $A_p(\mathbb{R})$, où p est un réel supérieur à 1 , soit l'algèbre $A_\omega(\mathbb{R})$, où ω est un poids sur $\mathbb{R}$. Il existe une fonction f appartenant à $\mathfrak{A}$, telle que $f(0) = 0$, et que la fonction g définie par $g(x) = f(x)$ si $x \geq 0$, $g(x) = 0$ si $x < 0$ n'appartienne pas à $\mathfrak{A}$, et que de plus 0 soit pour f un zéro isolé.*

Si $p = 2$ et $\omega = 1$, $A_p(\mathbb{R}) = A(\mathbb{R}) = A_\omega(\mathbb{R})$, et, dans ce cas, c'est un résultat classique. On a, quels que soient p et ω ,

$$A_\omega(\mathbb{R}) \subset A(\mathbb{R}) \subset A_p(\mathbb{R}) ,$$

de sorte que $\mathfrak{A} \subset A$ ou $A \subset \mathfrak{A}$; mais, de ces inclusions, on ne peut évidemment déduire le résultat annoncé.

Supposons que nous ayons une fonction $f_1 \geq 0$, appartenant à $\mathfrak{A}$, telle que $f_1(0) = 0$ et que $f_1 \chi_{[0,+\infty[}$ n'appartienne pas à $\mathfrak{A}$. Si 0 est pour f_1 un zéro isolé, f_1 répond aux conditions posées. Si ce n'est pas le cas, on obtient une fonction qui convient en ajoutant à f_1 une fonction $f_2 \geq 0$, admettant en 0 un zéro isolé, telle que f_2 et $f_2 \chi_{[0,+\infty[}$ appartiennent à $\mathfrak{A}$.

Il suffit donc de construire une fonction $f \geq 0$ (il suffit même qu'elle soit ≥ 0 sur un voisinage de 0) telle que $f(0) = 0$, que $f \in \mathfrak{A}$ et que $f \chi_{[0,+\infty[} \notin \mathfrak{A}$.

Appelons T l'application qui, à toute fonction f nulle en 0, associe la fonction $T(f) = f\chi_{[0,+\infty[}$. Le théorème du graphe fermé montre que si on a une suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathfrak{A}$ nuls en 0 tels que $T(f_n) \in \mathfrak{A}$ pour tout n et que $\dfrac{\|T(f_n)\|_{\mathfrak{A}}}{\|f_n\|_{\mathfrak{A}}}$ ne soit pas borné, il existe dans le sous-espace de Banach de $\mathfrak{A}$ engendré par $\{f_n\}$ une fonction f telle que $T(f) \notin \mathfrak{A}$; d'ailleurs, on peut même choisir f approchable par des combinaisons linéaires à coefficients positifs des f_n.

Il suffit donc, finalement, de trouver une suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathfrak{A}$, nuls en 0, ≥ 0 sur un même intervalle ouvert contenant 0, tels que la suite $\dfrac{\|T(f_n)\|_{\mathfrak{A}}}{\|f_n\|_{\mathfrak{A}}}$ ne soit pas bornée.

Il est équivalent de résoudre ce problème ou le problème obtenu en remplaçant l'opérateur $T = f \longrightarrow f\chi_{[0,+\infty[}$ par l'opérateur T' qui à f associe $f\chi_{[0,+\infty[} - f\chi_{]-\infty,0]}$.

Appelons $\check{\Phi}_a$ la fonction qui vaut 1 sur $[a,a+1] \cup [-a-1,-a]$, -2 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 0 ailleurs, a étant un paramètre $> \frac{1}{2}$. La fonction $\hat{\Phi}_a$ appartient à $\mathfrak{A}(\mathbb{R})$, quel que soit le choix de $\mathfrak{A}$, et est égale à $4\,\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\sin^2 \pi at$, donc ≥ 0 sur $[-1,+1]$ et nulle en 0.

Soit Ψ_a la fonction $\check{\Phi}_a * \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$: Ψ_a est égale à $\log\left|\dfrac{(x-a)(x+a+1)(2x-1)^2}{(x+a)(x-a-1)(2x+1)^2}\right|$, et $\hat{\Psi}_a$ est, à un facteur numérique près, égale à $\hat{\Phi}_a$ sur $[0,+\infty]$, à $-\hat{\Phi}_a$ sur $[-\infty,0]$. Un calcul direct montre que Ψ_a est intégrable et que, pour a assez grand,

$$\log a \leq \int_{a+1}^{\infty} |\Psi_a| \leq \int_{\mathbb{R}} |\Psi_a| .$$

Traitons d'abord le cas où $\mathfrak{A}$ est une algèbre à poids $A_\omega(\mathbb{R})$. Si, pour une valeur de a, $\Psi_a\omega$ n'est pas intégrable, il n'y a rien à démontrer. Si $\Psi_a\omega$ est intégrable pour toute valeur de a, on peut remarquer, puisque $|\check{\Phi}_a|$ et $|\Psi_a|$ sont paires, que les normes de $\hat{\Phi}_a$ et $\hat{\Psi}_a$ dans $A_\omega(\mathbb{R})$ sont les mêmes que dans $A_{\omega_1}(\mathbb{R})$, où ω_1 est le poids défini par $\omega_1(x) = \frac{1}{2}\left[\omega(x) + \omega(-x)\right]$, ce qui permet de supposer que la fonction ω est paire.

Il existe une suite $\{a_n\}_{n\geq 0}$, tendant vers l'infini, telle que, pour tout n, on ait

$$\frac{1}{2}\,\omega(a_n+1) \leq \inf_{x\geq a_n+1} \omega(x) .$$

Alors $\displaystyle\int |\check{\Phi}_{a_n}|\omega \leq 2C\left[\omega(a_n+1)+1\right]$, avec $C = \displaystyle\sup_{0\leq x\leq 1} \omega(x)$, et on a, pour n

assez grand,

$$\int |\Psi_{a_n}|\omega \geq \frac{1}{2}\,\omega(a_{n+1}) \int_{a_n+1}^{\infty} |\Psi_{a_n}|\omega \geq \frac{1}{2} \log a_n . \,\omega(a_n+1) ,$$

ce qui montre que la suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$, où $f_n = \hat{\Phi}_{a_n}$, est telle que $\dfrac{\|T'(f_n)\|_{A_\omega(\mathbb{R})}}{\|f_n\|_{A_\omega(\mathbb{R})}}$ tende vers l'infini.

Passons maintenant au cas des algèbres $A_p(\mathbb{R})$. Pour tout $a > 0$, $\hat{\Phi}_a$ et $\hat{\Psi}_\alpha$ appartiennent à $A_p(\mathbb{R})$, puisqu'elles appartiennent à $A(\mathbb{R})$. On a $\|\hat{\Phi}_a\|_{A_p} \leq \|\hat{\Phi}_a\|_A = 4$ et, pour tout $T \in CV_q(\mathbb{R}) = CV_p(\mathbb{R})$ (si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) , on a $\|\hat{\Psi}_a\|_{A_p} \geq \frac{1}{\|T\|_{CV_q}} |<T, \hat{\Psi}_a>|$.

Soit T_a l'élément de CV_q ayant pour transformée de Fourier la fonction caractéristique de $[a+1,+\infty[$. Tous les T_a ont même norme $\frac{1}{C}$, et

$$\|\hat{\Psi}_a\|_{A_p} \geq C\, |<T_a , \Psi_a>| = C \left| \int_{a+1}^{\infty} \Psi_a \right| .$$

Comme Ψ_a est de signe constant sur $[a+1,\infty[$, on déduit des évaluations précédentes que

$$\|\hat{\Psi}_a\|_{A_p} \geq C \log a \qquad \text{(pour } a \text{ assez grand)}$$

et il suffit, pour conclure, de prendre une suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$, où $f_n = \hat{\Psi}_{a_n}$, la suite a_n tendant vers l'infini.

Le deuxième résultat que nous avons en vue est une propriété caractéristique des g.a.l.c. totalement discontinus.

THÉORÈME VI.2.2. <u>Pour un</u> g.a.l.c. G , <u>les propriétés</u>

i) G <u>n'est pas totalement discontinu</u> ;

ii) G <u>est localement isomorphe à</u> $\mathbb{R} \times H$, <u>où</u> H <u>est un</u> g.a.l.c. ;

<u>sont équivalentes</u>.

Il est clair que ii) implique i).

Réciproquement, i) implique ii). Soit donc G un g.a.l.c. non totalement discontinu. A un isomorphisme local près, on peut supposer que G est compact. Le dual Γ de G est un groupe discret qui contient des éléments d'ordre infini.

D'après le corollaire I.3.8., il existe un morphisme non nul h de $\mathbb{R}$ dans G , dont le morphisme dual $\hat{h}$ de Γ dans $\mathbb{R}$ est défini par

$$e^{2i\pi \hat{h}(\gamma).x} = <\gamma , h(x)>$$

quels que soient γ dans Γ et x dans G . On peut choisir h de telle sorte que, pour un certain élément a (qui sera désormais fixé) de Γ , $\hat{h}(a) = 1$. Le sous-groupe de Γ engendré par a est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et nous le désignerons par $a\mathbb{Z}$.

Appelons H le sous-groupe fermé de G , orthogonal de a , donc aussi de $a\mathbb{Z}$. Le quotient G/H , dual de $a\mathbb{Z}$, est alors isomorphe à $\mathbb{T}$.

Considérons maintenant l'application Φ de $\mathbb{R} \times H$ dans G définie par

$$\Phi(x,t) = h(x)+t \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t \in H \, ;$$

Φ est un morphisme de g.a.l.c., et nous allons montrer qu'il définit en fait un isomorphisme local.

Remarquons d'abord que Φ est surjectif. Soient, en effet, $y \in G$, et θ réel tel que $e^{2i\pi\theta} = \langle a,y \rangle$; alors $\Phi(\theta,t) = y$, avec $t = y - h(\theta)$: il suffit de vérifier que ceci a un sens, c'est-à-dire que $y - h(\theta) \in H$, soit encore que $\langle a,y \rangle = \langle a,h(\theta) \rangle$, ce qui résulte du choix de θ .

Le noyau de Φ est le sous-groupe K de $\mathbb{R} \times H$ formé des éléments de la forme $(n,-h(n))$, $n \in \mathbb{Z}$. C'est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, donc discret, engendré par l'élément $(1,-h(1))$ de $\mathbb{R} \times H$. Comme K est discret, les groupes $\mathbb{R} \times H$ et $H_o = (\mathbb{R} \times H)/K$ sont localement isomorphes ; le morphisme Φ passe au quotient et permet de définir un morphisme continu bijectif Φ_o de H_o dans G . Il reste à montrer que Φ_o est un homéomorphisme, et, pour cela, il suffit d'établir que le groupe H_o est compact, ou encore que son dual est discret. Or, le dual de H_o est l'orthogonal Γ_o de K dans le dual $\mathbb{R} \times (\Gamma/a\mathbb{Z})$ de $\mathbb{R} \times H$. Soient $\gamma \in \Gamma$, et $\dot{\gamma}$ son image dans le quotient $\Gamma/a\mathbb{Z}$. Le couple $(t,\dot{\gamma})$ appartient à Γ_o si et seulement si $\langle (t,\dot{\gamma}),(1,-h(1)) \rangle = 1$, soit $e^{2i\pi t} \overline{\langle \gamma ,h(1) \rangle} = 1$, γ désignant un représentant quelconque de $\dot{\gamma}$. Donc, pour tout $\dot{\gamma}$ dans $\Gamma/a\mathbb{Z}$, les éléments de Γ_o qui appartiennent à $\mathbb{R} \times \{\dot{\gamma}\}$, partie ouverte de $\mathbb{R} \times (\Gamma/a\mathbb{Z})$ homéomorphe à $\mathbb{R}$, y constituent un ensemble discret puisque leurs composantes sur $\mathbb{R}$ forment une progression arithmétique.
Il en résulte que Γ_o est discret, et ceci achève la démonstration du théorème.

En itérant ce procédé, on démontre que tout g.a.l.c. de dimension finie n est localement isomorphe au produit de $\mathbb{T}^n$ par un groupe compact totalement discontinu. C'est là un cas particulier d'un théorème que Gluškov obtient par des méthodes bien différentes ([Gl.], th. B ; voir aussi [P] , th. 69).

VI - 3. Caractérisation de la dimension.

Soient G un g.a.l.c., $\mathcal{A}(G)$ l'une des algèbres $A_p(G)$, où p est un réel supérieur à 1 , ou $A_\omega(G)$, si ω est un poids régulier sur le dual Γ de G . Nous désignerons par $\mathcal{A}_o(G)$ l'algèbre des germes en 0 des éléments de $\mathcal{A}(G)$, ou encore le quotient de l'algèbre régulière $\mathcal{A}$ par l'idéal des éléments nuls au voisinage de 0 .

Nous savons (théorèmes III.4.7. et IV.3.3.) que $\mathfrak{A}_0(G)$ est un invariant de la structure locale de G . Nous allons examiner dans quelle mesure on peut extraire de l'algèbre de germes $\mathfrak{A}_0(G)$ des renseignements sur G .

Commençons par un résultat simple.

THÉORÈME VI.3.1. Pour un g.a.l.c. G , les conditions

i) $\mathfrak{A}_0(G)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes ;

et

ii) G est discret ;

sont équivalentes.

L'implication ii) $\Longrightarrow$ i) est évidente.

Réciproquement, supposons que G satisfasse à i) pour l'une quelconque des algèbres $\mathfrak{A}_0$ considérées. On peut supposer, en remplaçant au besoin G par un groupe qui lui soit localement isomorphe, que G est compact. Tout élément de $\mathfrak{A}(G)$ est constant au voisinage de 0 , donc de tout point, donc prend un nombre fini de valeurs. C'est le cas, en particulier, pour tout caractère continu sur G , ce qui montre déjà que G est totalement discontinu. Il résulte de i) que tout G_δ est ouvert puisque c'est le noyau d'un élément de l'algèbre régulière $\mathfrak{A}(G)$. En particulier, toute intersection dénombrable de sous-groupes ouverts est un sous-groupe ouvert. En passant aux orthogonaux dans le dual Γ de G , on voit que toute réunion dénombrable de sous-groupes finis de Γ est finie, d'où il résulte que Γ est fini, donc G également.

Lorsque $\mathfrak{A}$ est l'algèbre $A(G)$, et G un groupe métrisable localement connexe, un résultat dû à JERISON ([J]) montre que $\mathfrak{A}_0(G)$ caractérise la dimension de G , donc G à un isomorphisme local près (un groupe métrisable localement connexe est localement isomorphe à un tore $\mathbb{T}^\alpha$ où la dimension α est finie ou dénombrable).

Une simple lecture de la démonstration de Jerison permet d'étendre ce résultat à toutes les algèbres $\mathfrak{A}(G)$ que nous considérons. On a donc l'énoncé suivant :

THÉORÈME VI.3.2. Soit G un g.a.l.c. localement connexe métrisable. Il est localement isomorphe à un tore $\mathbb{T}^\alpha$ dont la dimension (finie ou dénombrable) α est parfaitement déterminée par toute algèbre de germes du type $\mathfrak{A}_0(G)$.

Remarquons que la démonstration de Jerison est de nature topologique, et ne fait intervenir à aucun moment la structure de groupe de G : elle consiste simplement à déterminer la dimension.

Il en est de même pour les résultats que nous donnons ci-dessous et qui permettent de distinguer, par certaines algèbres de germes, les g.a.l.c. totalement discontinus de ceux qui ne le sont pas : on caractérise, en fait, la dimension 0 , c'est-à-dire une propriété purement topologique. Nos méthodes, cependant, contrairement à celles de

Jerison, utilisent des idées de théorie des groupes.

Nous considérons quatre propriétés portant sur un groupe G ou une algèbre $\mathfrak{X}_0(G)$ du type A_p ou A_ω :

- $P(G)$: le groupe G est totalement discontinu ;
- $P'(\mathfrak{X}_0, G)$: tout élément non nul f de $\mathfrak{X}_0(G)$, nul en 0, peut s'écrire $f = g+h$, où g et h sont des éléments de $\mathfrak{X}_0(G)$, nuls en 0, non nuls, tels que $gh = 0$;
- $P''(\mathfrak{X}_0, G)$: tout élément de $\mathfrak{X}_0(G)$, nul en 0, est divisible dans $\mathfrak{X}_0(G)$ par un élément de $\mathfrak{X}_0(G)$ admettant, pour tout entier positif p, une infinité de racines p-ièmes ;
- $P'''(\mathfrak{X}_0, G)$: pour tout élément f de $\mathfrak{X}_0(G)$, nul en 0, il existe un entier positif p tel que f soit divisible par un élément de $\mathfrak{X}_0(G)$ admettant plus de p^2 racines p-ièmes.

Nous avons alors les résultats suivants :

THÉORÈME VI.3.3. Soient G un g.a.l.c. non discret, ω un poids régulier sur $\hat{G}$, $\mathfrak{X}(G) = A_\omega(G)$. Alors

$$P'(\mathfrak{X}_0, G) \implies P(G)$$

et

$$P'''(\mathfrak{X}_0, G) \implies P(G) .$$

THÉORÈME VI.3.4. Soient G un g.a.l.c. non discret, p un réel supérieur à 1, $\mathfrak{X}(G) = A_p(G)$. Alors les propriétés $P(G)$, $P'(\mathfrak{X}_0, G)$, $P''(\mathfrak{X}_0, G)$ et $P'''(\mathfrak{X}_0, G)$ sont équivalentes.

Soit d'abord G un g.a.l.c. non totalement discontinu : on peut supposer, d'après le théorème VI.2.2., et en remplaçant éventuellement G par un groupe localement isomorphe, que G est de la forme $\mathbb{R} \times H$, où H est un groupe abélien compact.

Si $\mathfrak{X}(G) = A_p(G)$, p réel > 1, prenons une fonction Φ appartenant à $A_p(\mathbb{R})$, telle que $\Phi(0) = 0$ et que $\Phi\chi_{[0,+\infty[}$ n'appartienne pas à $A_p(\mathbb{R})$; si $\mathfrak{X}(G) = A_\omega(G)$, où ω est un poids régulier sur $\mathbb{R} \times \hat{G}$, désignons par ω_1 le poids régulier sur $\mathbb{R}$ obtenu par restriction de ω, et prenons une fonction Φ appartenant à $A_{\omega_1}(\mathbb{R})$, telle que $\Phi(0) = 0$ et que $\Phi\chi_{[0,+\infty[}$ n'appartienne pas à $A_{\omega_1}(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, un tel choix est possible en vertu du théorème VI.2.1., et de telle sorte que, sur un voisinage V de 0, Φ ne s'annule qu'en 0.

Définissons f sur G par $f(t,x) = \Phi(t)$ ($t \in \mathbb{R}$ et $x \in H$). Il est aisé de vérifier que f appartient à $\mathfrak{X}(G)$. Supposons que f s'écrive, sur un voisinage de 0, sous la forme $g+h$, avec $gh = 0$ sur ce voisinage de 0, et g et h dans

$\mathcal{A}(G)$, non nuls. Alors g_1 et h_1 , restrictions de g et h à $\mathbb{R} \times \{0\}$, coïncident au voisinage de 0 avec des fonctions Φ_1 et Φ_2 appartenant, selon le cas, à $A_p(\mathbb{R})$ ou à $A_{\omega_1}(\mathbb{R})$ (théorèmes III.4.2. et IV.3.1.), et on a $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, $\Phi_1 \Phi_2 = 0$. Soit $h > 0$ tel que ceci ait lieu sur $[-h,+h]$, et que Φ ne s'annule pas sur $[-h,+h]$, sauf en 0 . Il est alors clair que Φ_1 s'annule, par exemple, sur $[0,h]$ et Φ_2 sur $[-h,0]$, donc que Φ_2 et $\Phi \chi_{[0,+\infty[}$ coïncident au voisinage de 0 , ce qui entraîne que $\Phi \chi_{[0,+\infty[} \in \mathcal{A}(G)$, contrairement au choix de Φ que nous avons fait.

Ceci prouve que, dans tous les cas, $P'(\mathcal{A}_0 , G)$ implique $P(G)$.

Prouvons, de même, que, dans tous les cas, $P'''(\mathcal{A}_0 , G)$ implique $P(G)$.

Soit encore $G = \mathbb{R} \times H$, H compact, et prenons $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, ne s'annulant qu'en 0 ; on pose encore $f(t,x) = \Phi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in H$. Soit f_0 le germe en 0 de f , g_0 un élément de $\mathcal{A}_0(G)$, nul en 0 , diviseur de f , α_0 et β_0 deux racines p-ièmes de g_0 dont on appelle α et β des représentants, de même que g est un représentant de g_0 . Sur un certain voisinage de 0 dans G , de la forme $]-h,+h[\times V$ (où V est un voisinage de 0 dans H), on a $\alpha^p = \beta^p = g$; et g ne s'annule ni sur $]0,h[\times V$ ni sur $]-h,0[\times V$. Alors, en multipliant au besoin β par l'une des p racines p-ièmes de l'unité, on a, pour un nombre x tel que $0 < x < h$, $\alpha(x,0) = \beta(x,0)$ ce qui entraîne l'existence d'un voisinage W de 0 dans H , tel que α et β coïncident sur $\{x\} \times W$. Montrons que α et β coïncident sur $[0,h[\times W$. Pour cela, il suffit de voir que si α et β coïncident au point (x,t) , $0 < x < h$ et $t \in W$, elles coïncident sur $[0,h[\times \{t\}$. Or, cela résulte immédiatement de la continuité de α et β , du fait que sur un tel ensemble, elles ne peuvent s'annuler qu'au point $(0,t)$, et du fait que leur quotient est une racine p-ième de l'unité. Ceci montre que, pour un certain voisinage W de 0 dans H , $\beta = e^{2i\pi \frac{k}{p}} \alpha$, $(1 \leq k \leq p$, k fixé) sur $[0,h[\times W$. Il en est de même sur un ensemble de la forme $]-h,0] \times W'$, W' voisinage de 0 dans H , de sorte qu'il ne peut y avoir plus de p^2 déterminations de β .

On a donc prouvé que $P'''(\mathcal{A}_0 , G)$ implique $P(G)$. Remarquons que cette démonstration s'applique à bien d'autres algèbres, comme celle des fonctions continues, ce qui n'est pas le cas pour la première implication démontrée.

Le théorème VI.3.3. est ainsi établi.

Comme $P''(\mathcal{A}_0 , G)$ implique trivialement $P'''(\mathcal{A}_0 , G)$, il suffit, pour établir le théorème VI.3.4., de prouver que $P(G)$ implique $P'(\mathcal{A}_0 , G)$ et $P''(\mathcal{A}_0 , G)$.

Remarquons d'abord que, pour tout groupe G , une fonction appartenant à $\mathcal{A}(G)$ est en particulier continue, donc constante sur les classes dans G d'un sous-groupe H

qui est un G_δ . Il suffit donc d'établir le résultat en supposant G métrisable, puis de passer au cas général en relevant de G/H dans G les germes d'éléments de $\mathcal{A}$, ce que permettent les théorèmes III.4.2. et IV.3.1.

Nous supposons donc G métrisable et compact. Soit $\{G_n\}_{n\geq 0}$ une suite strictement décroissante de sous-groupes ouverts de G qui forment une base de voisinages de 0 . Nous appellerons, pour $n \geq 0$, α_n la fonction caractéristique de G_n .

LEMME VI.3.5. <u>Soit</u> p <u>un réel</u> > 1 , $f \in A_p(G)$. <u>Si</u> $f(0) = 0$, <u>la suite</u> $f\alpha_n$ <u>tend vers</u> 0 <u>pour la norme de</u> $A_p(G)$.

Dans le cas $p = 2$, cela se voit directement et on peut en déduire le résultat pour $p \neq 2$. Mais cela résulte immédiatement du fait que les normes $\|\alpha_n\|_{A_p}$ sont bornées (en fait, égales à 1) et que tout point d'un g.a.l.c. est un ensemble de synthèse spectrale pour toute algèbre A_p ([E 1]).

On prend désormais $\mathcal{A}(G) = A_p(G)$, $p > 1$.

Prouvons maintenant $P'(\mathcal{A}_0 , G)$ lorsque G est totalement discontinu : on peut le supposer métrisable. Soit $f \in A_p$, nulle en 0 ; d'après le lemme VI.3.5., on peut trouver une suite n_k d'entiers positifs tels que, pour $n \geq n_k$, $\|f\alpha_n\|_{A_p} \leq 2^{-(k+1)}$. Posons $g = \sum_{k=1}^{\infty} f\alpha_{n_k} - f\alpha_{n_k+1}$: le choix de la suite $\{n_k\}$ entraîne que la série converge dans $A_p(G)$, donc définit bien un élément de $A_p(G)$. On a alors $f = g+h$, $gh = 0$, g et h non nulles au voisinage de 0 si f n'est pas nulle au voisinage de 0 et si on a choisi, ce qui est possible, la suite $\{n_k\}$ de telle sorte que, pour tout k , on ait $n_{k+1} > n_k+1$. Par passage aux germes, on déduit de ce résultat la propriété $P'(\mathcal{A}_0 , G)$.

Supposons toujours G compact, totalement discontinu, métrisable. Nous allons établir $P''(\mathcal{A}_0 , G)$.

Soit $f \in A_p(G)$, nulle en 0 . On associe à f la même suite $\{n_k\}$ que précédemment, et on définit une nouvelle suite décroissante $\{H_k\}_{k\geq 0}$ de sous-groupes ouverts : $H_0 = G$, $H_k = G_{n_{2k}}$ pour $k \geq 1$. Soit g la fonction radiale prenant sur $H_k \setminus H_{k+1}$ la valeur 2^{-k} ; elle appartient à $A_p(G)$ comme on le voit, soit directement, soit par application des théorèmes V.4.1. et V.2.2. La fonction h telle que $h(0) = 0$, $h = \frac{f}{g}$ hors de 0 appartient aussi à $A_p(G)$, car c'est la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k(f\alpha_{n_{2k}} - f\alpha_{n_{2k+2}}) + f - f\alpha_{n_2} ,$$

sommable dans $A_p(G)$ d'après le choix des n_k . Donc g est bien un diviseur de f dans $A_p(G)$, et il est clair qu'il admet, pour tout entier p , une infinité de racines p-ièmes, et que c'est encore vrai pour le germe de g dans $\mathcal{A}_o(G)$. On a donc bien $P''(\mathcal{A}_o , G)$.

Le théorème VI.3.4. est ainsi établi.

Remarque VI.3.6. Nous ne savons pas si le théorème VI.3.4. est vrai lorsque l'on prend pour $\mathcal{A}(G)$ une algèbre à poids. La démonstration faite pour $A_p(G)$ ne s'étend pas à tous les cas, car on peut trouver des groupes G et des poids ω tels que le lemme VI.3.5. soit faux lorsque l'on remplace $A_p(G)$ par $A_\omega(G)$.

VI - 4. Quelques résultats complémentaires.

Soient G un g.a.l.c. $\mathcal{A}$ l'une des algèbres $A_p(G)$ ou $A_\omega(G)$. Nous savons déjà distinguer par l'algèbre des germes $A_o(G)$ (au moins dans le cas des algèbres A_p) les groupes totalement discontinus, c'est-à-dire ceux de dimension 0 .

Nous allons voir que la considération de certains sous-ensembles de $\mathcal{A}_o$ permet de caractériser la dimension de G .

DÉFINITION VI.4.1. Nous appellerons polynôme trigonométrique local (resp. germe de polynôme trigonométrique) toute combinaison linéaire finie de caractères locaux (resp. de germes de caractères) sur G .

Soit P un polynôme trigonométrique local : il résulte du théorème I.2.7. que l'on peut remplacer G par un groupe G' localement isomorphe à G tel que P soit défini par un polynôme trigonométrique global sur G' ; pour un ensemble fini de polynômes trigonométriques locaux, on peut même trouver un groupe G' , localement isomorphe à G , sur lesquels ils soient définis globalement (il suffit de le faire pour un nombre fini de caractères ; pour cela, on applique le théorème I.2.7. au morphisme local de G dans $\mathbb{T}^N$ défini par la donnée de N caractères locaux).

Appelons $PT_o(G)$ l'algèbre des germes de polynômes trigonométriques sur G ; c'est un invariant de la structure locale de G , et on a l'inclusion $PT_o(G) \subset \mathcal{A}_o(G)$ quel que soit le choix de l'algèbre $\mathcal{A}(G)$.

LEMME VI.4.2. Soit P un germe de polynôme trigonométrique sur G , inversible dans $PT_o(G)$. Alors P est un germe de caractère.

En utilisant les remarques faites plus haut, on voit qu'il suffit de montrer que si P et Q sont deux polynômes trigonométriques globaux sur un g.a.l.c. G dont le produit soit 1 , ce sont des caractères, au moins sur un sous-groupe ouvert de G . Il suffit, en fait, de montrer que c'est vrai sur la composante connexe de $\{0\}$, G_o , dans G , car cela entraîne que P et Q sont définis en fait sur le quotient totalement discontinu G/G_o , où ils sont localement constants. Soit, donc, G , H l'intersection des noyaux des caractères qui interviennent dans P et Q : il suffit de démontrer le résultat sur G/H qui est un groupe de dimension finie, dont localement isomorphe à $\mathbb{R}^n \times K$, K étant un groupe totalement discontinu ; seule, la composante $\mathbb{R}^n$ est à considérer et pour $\mathbb{R}^n$ le résultat s'obtient facilement.

Considérons maintenant le groupe $\widetilde{G}$ des germes de caractères continus. C'est, en fait, un espace vectoriel réel si on le munit de la loi interne définie par le produit des germes de caractères, et de la loi externe définie par l'exponentiation : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\chi \in \widetilde{G}_b$, on a $(\lambda, \chi) \longrightarrow \chi^\lambda$. L'application $h \longrightarrow e^{i\pi h}$, définie sur les fonctions numériques, passe aux germes et induit un isomorphisme de l'espace vectoriel réel des germes de morphismes de G dans $\mathbb{R}$ sur l'espace vectoriel des germes de caractères continus.

La structure d'espace vectoriel des germes de morphismes de G dans $\mathbb{R}$ est connue dès que l'on connaît la structure d'algèbre de $\mathfrak{X}_0(G)$. Le résultat suivant montre -ce qui n'est pas évident a priori- qu'il en est de même pour l'espace vectoriel des caractères (bien que l'exponentiation ne soit pas liée directement à la structure de l'algèbre $\mathfrak{X}_0(G)$).

LEMME VI.4.3. La donnée de $\widetilde{G}$ et de l'application d'inclusion canonique de $\widetilde{G}$ dans $\mathfrak{X}_0(G)$ permettent de déterminer, pour tout réel λ et tout germe de caractère χ, le germe de caractère χ^λ.

En effet, si on désigne encore par χ un caractère local dont le germe est celui que nous considérons, χ^λ est, au voisinage de 0, somme d'une série entière de $\chi - 1$, dans une algèbre de restrictions de $\mathfrak{X}(G)$ à un compact. On a, en particulier, avec $f(0) = 0$,

$$\chi^\lambda = 1 + \lambda(\chi - 1) + (\chi - 1)f ,$$

et cette relation passe aux germes. Or, elle suffit à caractériser χ^λ, car il existe au plus un caractère local qui la satisfasse : supposons qu'il y en ait deux, γ_1 et γ_2. Si h est un morphisme de $\mathbb{R}$ dans G, on a, pour t réel assez petit,

$$\gamma_1(h(t)) = e^{2i\pi h_1 t} ,$$

$$\gamma_2(h(t)) = e^{2i\pi h_2 t} ,$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_1(h(t)) - \gamma_2(h(t)) &= e^{2i\pi h_1 t} - e^{2i\pi h_2 t} \\ &= (\chi(h(t)) - 1)\, \Phi(t) \end{aligned}$$

où $\Phi(t)$ est une fonction continue nulle en 0. En considérant les dérivées en 0, on voit que $h_1 = h_2$, donc que γ_1 et γ_2 coïncident sur chaque sous-groupe à un paramètre, donc sur la composante connexe de G, donc sur un sous-groupe ouvert de G (on peut supposer γ_1 et γ_2 définis globalement). Ceci démontre donc le lemme.

Comme la dimension de l'espace vectoriel $\widetilde{G}$ est, par définition, celle du groupe G lorsque cette dimension est infinie, et, d'après le théorème I.3.12, lorsqu'elle est finie, on arrive au théorème ci-dessous :

THÉORÈME VI.4.4. Soient G_1 et G_2 deux g.a.l.c., $\mathfrak{X}(G_1)$ une algèbre du type $A_p(G_1)$ ou $A_\omega(G_1)$, $\mathfrak{X}(G_2)$ une algèbre du type $A_p(G_2)$ ou $A_\omega(G_2)$, $\mathfrak{X}_o(G_1)$ et $\mathfrak{X}_o(G_2)$ leurs algèbres de germes respectives ; soient, d'autre part, E_1 et E_2 des parties de $\mathfrak{X}_o(G_1)$ et $\mathfrak{X}_o(G_2)$ respectivement, telles que

$$\widetilde{G}_1 \subset E_1 \subset PT_o(G_1) ,$$

$$\widetilde{G}_2 \subset E_2 \subset PT_o(G_2) .$$

S'il existe un homomorphisme de $\mathfrak{X}_o(G_1)$ dans $\mathfrak{X}_o(G_2)$ dont la restriction à E_1 soit une bijection de E_1 sur E_2, les groupes G_1 et G_2 ont même dimension.

Cela résulte du lemme VI.4.3. et du lemme VI.4.2. qui permet d'obtenir $\widetilde{G}_1$ (resp. $\widetilde{G}_2$) à partir de E_1 et E_2 en considérant les éléments dont l'inverse éventuel dans $\mathfrak{X}_o$ appartient à E_1 ou E_2.

Remarque VI.4.5. Remarquons que, lorsque G_1 et G_2 sont deux groupes dont la dimension est au moins égale à la puissance du continu, la donnée d'un isomorphisme entre les groupes multiplicatifs des germes de caractères (ou entre les algèbres de germes de polynômes trigonométriques) suffit à prouver l'égalité des dimensions de G_1 et G_2. En effet, la structure de groupe de $\widetilde{G}$ le caractérise en fait comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, et dans le cas que nous considérons, les dimensions sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$ coïncident.

-:-:-:-

CONCLUSION

Nous avons, au cours de cette étude, introduit divers invariants de la structure locale des groupes abéliens localement compacts, et obtenu, à partir de ces invariants, quelque information sur la structure locale que nous étudions. Ces résultats sont malheureusement bien incomplets.

Notons, cependant, que la considération simultanée de plusieurs de ces invariants améliore grandement la situation. Par exemple, la donnée simultanée soit de G^* et de $\tilde{G}$ (considéré avec sa structure d'espace vectoriel), soit de G^* et de $\mathcal{X}_o(G)$ caractérise la structure locale d'un bon nombre de g.a.l.c. de dimension finie, localement isomorphes à $\mathbb{R}^n \times H$, où H est compact de torsion. En effet, la dimension n est caractérisée par $\tilde{G}$ (ou $\mathcal{X}_o(G)$, dans le cas localement connexe) et le groupe H par H^* qui est défini intrinsèquement à partir de G^*, puisque G^* se décompose sous la forme du produit cartésien $(\mathbb{R}^n)^* \times H^*$ d'un groupe divisible sans torsion et d'un groupe d'ordre fini.

Pour les groupes G^*, il semble peu plausible qu'il soit possible d'obtenir des résultats beaucoup plus précis que ceux que nous avons présentés. Pour les algèbres de germes, il en va sans doute autrement, mais les méthodes d'investigation restent à élaborer.

L'obstacle actuel réside dans le fait que, mise à part l'étude du groupe G^* dans le cas totalement discontinu, les méthodes dont nous disposons permettent d'atteindre la dimension des groupes, c'est-à-dire un invariant de la structure topologique locale, mais ne fournissent pas d'information sur la structure de groupe proprement dite, lorsque celle-ci ne se déduit pas de la topologie.

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

[B] - BOURBAKI (N.).- Intégration, chap. 7, Hermann, Paris (1963).

[CE] - CARTAN-EILENBERG.- Homological Algebra, Princeton University Press (1956).

[CZ] - CALDERON-ZYGMUND.- On the existence of certain singular integrals, Acta Math. 88 (1952), p. 85-139.

[D] - DOMAR (Y.).- Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras, Acta Math. 96 (1956), p. 1-66.

[DL] - De LEEUW (K.).- On L^p-multipliers, Ann. of Math. 81 (1965), p. 364-379.

[E1] - EYMARD (P.).- Séminaire sur les convoluteurs de $L^p(G)$, Nancy (1968-1969).

[E2] - EYMARD (P.).- Séminaire Bourbaki, n° 367 (nov. 1969).

[E3] - EYMARD (P.).- L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. de France, 92 (1964), p. 181-236.

[F] - FUCHS (L.).- Abelian groups, Pergamon Press (1960).

[G] - GUICHARDET (A.).- Analyse harmonique commutative, Dunod, Paris (1968).

[Gl] - GLUŠKOV (V.M.).- The structure of locally compact groups and Hilbert's fifth problem. AMS Translations, Ser. 2, 15 (1960), p. 55-93, ou (en russe) Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 12 (1957), n° 2 (74), p. 3-41.

[H] - HEWITT (E.).- A remark on characters of locally compact abelian groups. Fundam. Math. 53 (1963), p. 55-64.

[HR] - HEWITT-ROSS.- Abstract harmonic analysis I, Springer (1963).

[HZ] - HEWITT-ZUCKERMAN.- A group-theoretic method in approximation theory, Ann. of Math. 52 (1950), p. 557-567.

[J] - JERISON (M.).- Algebras of germs of Fourier transforms, Proceedings of the 2nd Prague Topol. Symposium (1966), p. 200-204.

[K] - KAKUTANI (S.).- On cardinal numbers related with a compact abelian group, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943), p. 366-372.

[M] - MARCINKIEWICZ (J.).- Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Studia Math. 8 (1939), p. 78-91.

[P] - PONTRJAGIN (L.S.).- Topological groups, 2nd ed., Gordon and Breach (1966).

[Pa] - PALEY (R.).- A remarkable series of orthogonal functions (I), Proc. London Math. Soc. 2, 34 (1931), p. 241-264.

[PS] - PEYRIERE-SPECTOR.- Sur les multiplicateurs radiaux de $\mathcal{F}L^p(G)$, pour un groupe abélien localement compact totalement discontinu, C.R.Ac. Sc. Paris 269 (1969), p. 973-974.

[R] - RUDIN (W.).- Fourier analysis on groups, Interscience (1962).

[S] - STEIN (E.).- Intégrales singulières et fonctions différentiables de plusieurs variables, Orsay (1966-1967), multigraphié.

[Sp.1] - SPECTOR (R.).- Espaces de mesures et de fonctions invariants par les isomorphismes locaux de groupes abéliens localement compacts, Ann. Inst. Fourier, 15, n° 2 (1965), p. 325-343.

[Sp.2] - SPECTOR (R.).- Groupes localement isomorphes et transformation de Fourier avec poids. Ann. Inst. Fourier, 19, n° 1 (1969), p. 195-217.

[Sp.3] - SPECTOR (R.).- Sur un invariant de la structure locale des groupes abéliens localement compacts, C.R.Acad. Sc. Paris 267 (1968), p. 729-731.

[Sp.4] - SPECTOR (R.).- Sur les germes de morphismes des groupes abéliens localement compacts, C.R.Acad. Sc. Paris 267 (1968), p. 772-774.

[Sp.5] -SPECTOR (R.).- Transformées de Fourier radiales sur les groupes abéliens localement compacts totalement discontinus, C.R.Acad. Sc. Paris 269 (1969), p. 514-516.

[Sp.6] -SPECTOR (R.).- Caractérisation des groupes abéliens localement compacts totalement discontinus par certaines algèbres de germes de fonctions, C.R. Acad. Sc. Paris 269 (1969), p. 580-582.

[VN] -VON NEUMANN (J.).- Almost periodic functions in a group (I), Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), p. 445-492.

[VN-W] -VON NEUMANN-WIGNER.- Minimally almost periodic groups, Ann. of Math. 41 (1940), p. 746-750.

[W] -WEIL (A.).- L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris (1938).

[Z] -ZYGMUND (A.).- Trigonometric series I, II, Cambridge University Press (1968).

(Texte définitif reçu le 8 septembre 1970)

René SPECTOR
41, rue Lacépède
75 - PARIS (5e)

Joseph FLOCH, Maitre-Imprimeur à Mayenne - 8-12-1970 - n°3904