MÉMOIRES DE LA S. M. F.

N. DEUTSCH

Interpolation dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes

Mémoires de la S. M. F., tome 13 (1968)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1968__13__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 13, 1968, 187 p.

INTERPOLATION DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONVEXES

par

Mme Nimet DEUTSCH (*)

-:-:-:-

TABLE DES MATIÈRES

Pages

(*) Thèse Sc. math. Paris, 1967.

Chapitre III

Chapitre IV

-:-:-:-:-

INTRODUCTION

La théorie des espaces d'interpolation dans les espaces de Banach a donné lieu à de multiples développements depuis son introduction. Certaines méthodes d'interpolation sont maintenant utilisées de façon classique (citons par exemple [4], [13], [15], [23], [24], [25], [33]). Si une méthode telle que la méthode dite holomorphe se généralise sans difficulté au cas des espaces vectoriels topologiques quelconques, les autres se révèlent inadaptables ou inefficaces. Il nous est apparu alors nécessaire de poser en termes généraux le problème de l'interpolation dans les espaces localement convexes et de définir à partir de là des méthodes plus adaptées à des problèmes tels que ceux de l'interpolation d'espaces de fonctions holomorphes que nous nous proposions de résoudre.

Nous nous sommes donc attachée, dans un premier chapitre, à développer une théorie générale de l'interpolation. On munit pour cela la classe des couples d'interpolation d'une structure de catégorie, ce qui permet de définir les "méthodes d'interpolation" comme une certaine famille de foncteurs de cette catégorie dans la catégorie des espaces localement convexes. Une méthode très générale de construction de tels foncteurs se dégage de cette étude. Parmi les foncteurs mis ainsi en évidence, les plus naturels sont ceux qui dépendent d'une certaine classe d'endomorphismes. Ceci nous a conduite à introduire les espaces $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ étudiés dans le paragraphe 5. Quelques propriétés générales des espaces d'interpolation sont ainsi mises en évidence : en particulier les espaces $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ permettent d'atteindre algébriquement tous les espaces d'interpolation pour un couple donné. Pour comparer les topologies d'espaces intermédiaires, on introduit la notion d'espace $\mathfrak{S}$-intermédiaire (cf. § 6).

Le problème d'existence d'espaces intermédiaires pour un couple d'interpolation donné $\mathcal{E}$ est donc théoriquement résolu par la connaissance des espaces $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$. Ces derniers, étant en général difficiles à caractériser, on aborde le problème en étudiant leurs espaces duaux. Ceci nous porte à définir des méthodes duales d'interpolation (chapitre II, § 1) qui, sous certaines hypothèses d'approximation, sont mises en dualité avec les méthodes définies dans le chapitre précédent. C'est ainsi qu'on définit les espaces $N_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ et on établit des théorèmes de dualité entre les espaces $N_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ et $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ quand des conditions d'équiapproximation sont vérifiées (cf. § 7) (cette notion généralise la notion d'approximation pour des espaces localement convexes).

Lorsque l'on fait des hypothèses d'équiapproximation, on montre dans le paragraphe 9, de quelle manière la connaissance des espaces ${}^{c}N_{c}(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ permet de conclure à l'existence ou à la non existence d'espaces intermédiaires algébriquement ou topologiquement non triviaux pour le couple d'interpolation $\mathcal{E}$.

La détermination des espaces $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ dépend de celle d'espaces d'endomorphismes qui sous des hypothèses d'approximation s'expriment comme produits tensoriels ε, ou π, si on y ajoute des conditions de nucléarité. Les espaces $N_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ se caractérisent alors à partir d'espaces d'applications bilinéaires ou continues dont la connaissance, dans les cas particuliers d'espaces de Köthe, d'espaces de fonctions holomorphes ou de certains espaces de distributions, nous a conduite aux applications exposées dans les chapitres III et IV.

Dans le troisième chapitre, nous démontrons qu'il existe une infinité d'espaces d'interpolation pour le couple $((s),(s'))$, où (s) désigne l'espace des suites à décroissance rapide, (s') celui des suites à croissance lente. On caractérise complètement ces espaces et on en déduit qu'il existe une infinité d'espaces intermédiaires pour des couples d'espaces de distributions $(\mathcal{S},\mathcal{S}')$, $(\mathcal{E},\mathcal{E}')$, $(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ [1]. Il apparaît alors que les seuls espaces intermédiaires usuels de l'analyse fonctionnelle pour le couple $(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ sont $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}+\mathcal{E}'$.

On montre dans le paragraphe 4, à l'aide d'inégalités élémentaires dans des espaces de suites bornées, que, sous des hypothèses convenables de croissance, les espaces de Köthe définis par les suites $(\alpha^{(m)})^{\mu}$. $(\alpha^{(n)})^{1-\mu}$, $0 < \mu < 1$, sont des espaces intermédiaires pour les couples d'espaces de Köthe définis par les suites $\alpha^{(n)}$ et $\alpha'^{(n)}$.

Dans le dernier et quatrième chapitre, sont abordés les problèmes de l'interpolation pour des couples d'espaces de fonctions holomorphes et pour des couples d'espaces de fonctionnelles analytiques définies sur une variété analytique complexe V. On établit qu'une solution du premier problème dépend de la détermination d'une certaine enveloppe d'holomorphie. On transpose ces résultats à l'aide du théorème de dualité, ce qui apporte une solution au second problème. Lorsque l'on suppose que la variété V est de Stein, une étude directe à l'aide de méthodes développées dans [29] permet d'obtenir des espaces de fonctionnelles analytiques définies sur des ouverts de V comme espaces intermédiaires pour ces mêmes couples d'espaces de fonctionnelles analytiques. Ces différents résultats sont explicités dans les cas particuliers de polydisques de tubes, de domaines de Reinhardt de C^n.

Le dernier paragraphe applique ces résultats à des espaces de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles.

Les idées essentielles de ce travail ont été annoncées en [7], [8], [9], [10], [11], [12].

---

[1] $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ désignent les espaces de distribution de M. L.Schwartz [36].

Signalons que pour lire le chapitre IV et le paragraphe du chapitre III il suffit de lire:

1) la définition des espaces $L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ (ch.I, § 3 et 5)
2) la définition des espaces $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ (ch. II, § 2 et 6)
3) la définition de la propriété d'équiapproximation (ch.II, § 7)
4) le théorème de dualité (ch. II, théorème 2.1, p.52) ; les propositions 2.30 et 2.32 du paragraphe 10, chapitre II, sont à joindre en ce qui concerne le chapitre IV.

Nous avons constamment bénéficié des conseils de M. L.Schwartz, tant dans notre formation générale que dans nos recherches. Il nous a fait l'honneur d'accepter la présidence de notre jury. M. J.L.Lions a guidé nos premières recherches vers des problèmes d'interpolation et nous a orientée vers le sujet. Nous tenons à leur exprimer notre vive gratitude.

Nos remerciements vont à M. B.Malgrange qui a bien voulu s'intéresser à notre travail, se joindre au jury de cette thèse et nous proposer le second sujet.

Notre reconnaissance va tout particulièrement à M. A.Martineau pour la stimulation constante que nous avons trouvée auprès de lui. Ses encouragements, ses critiques et l'aide qu'il nous a apportée tout au long de l'élaboration de ce travail nous ont été d'un grand prix.

Nous avons beaucoup appris auprès de M. M.Zerner, dans ses groupes de travail comme dans tous les entretiens que nous avons eus avec lui. Ses conseils et ses directives ont grandement contribué au succès de certaines applications de notre théorie. Nous lui exprimons tous nos remerciements.

Madame Maynard et Madame Goyvaerts ont bien voulu se charger du travail de reproduction de cette thèse, qu'elles en soient remerciées.

-:-:-:-:-

CHAPITRE I

§ 1. Notations générales.

Nous utiliserons dans ce travail les notations et résultats de la théorie des espaces vectoriels topologiques localement convexes, en suivant [3] et [18]. Nous nous réfèrerons en ce qui concerne la théorie des produits tensoriels topologiques à [19], [40] et [37]. Signalons cependant que, comme en [3] et non [19] ou [20], nous appellerons espace réflexif un espace E qui est isomorphe au dual fort de son dual fort. Un espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ sera pour nous un espace localement convexe limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet. Nous désignerons par espace du type $(\mathcal{D}\mathcal{F})$, le dual d'un espace du type $(\mathcal{F})$, réservant l'appellation (DF) aux espaces définis dans [18], par $(\mathcal{F}\mathcal{S})$ un espace de Fréchet du type $(\mathcal{S})$ et enfin par $(\mathcal{D}\mathcal{S})$ le dual fort d'un tel espace.

Soit (E,E') un couple d'espaces localement convexes, mis en dualité par une forme bilinéaire ; si A est une partie de E, nous noterons $A^{\circ}_{(E,E')}$, ou A°, le polaire de A pour cette dualité.

Si E et F sont deux espaces localement convexes, $\mathcal{L}(E,F)$ désignera l'espace des applications linéaires continues de E dans F et, $\mathfrak{S}$ étant un ensemble de parties bornées de E, on notera $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. Par $\mathfrak{S} = c$ on représentera les parties compactes équilibrées de E, par b les bornés de E, par s les points de E. Par ν on entendra l'une quelconque de ces trois classes d'ensembles de E. Nous noterons E' le dual fort de E, $E'_{\mathfrak{S}}$ l'espace $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,\mathbb{C})$; $\mathcal{L}_{\varepsilon}(E',F)$ sera alors l'espace des applications linéaires continues de E' dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'.

On notera $\mathcal{B}(E,F)$ l'espace des formes bilinéaires séparément continues sur $E \times F$ muni de la topologie de dual fort de $E \overline{\otimes}_i F$, le produit tensoriel inductif de E et de F, $B(E,F)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les produits de parties bornées de $E \times F$.

Tous les espaces localement convexes intervenant comme données dans la suite seront supposés séparés, sauf mention expresse du contraire.

§ 2. Couples d'interpolation.

On peut noter en utilisant les propriétés classiques des espaces localement convexes, qu'un espace localement convexe E peut être décrit de la façon suivante : On considère un espace localement convexe X, a un vecteur de X, $a \neq 0$, l'image de l'application $L : u \mapsto u(a)$ de $\mathcal{L}(X,E)$ dans E n'est autre que l'espace E, et si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de X recouvrant X, on obtient une topologie isomorphe à celle de E, en munissant cette image de la topologie quotient de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(X,E)$ par le noyau de L.

On obtiendra de même E en considérant l'image de sous-classes de $\mathcal{L}(X,E)$ par l'application L, par exemple en prenant les applications de rang fini, ou nucléaires, ou compactes.

Dans la suite nous nous intéresserons à l'étude de certains couples d'espaces localement convexes, auxquels nous attacherons un objet semblable aux applications linéaires continues, et nous examinerons le résultat d'une construction analogue à celle décrite ci-dessus.

Donnons tout d'abord quelques définitions :

DÉFINITION 1.1.- Un couple d'interpolation $\mathcal{E}$ sera la donnée d'un couple de deux espaces localement convexes (E_1,E_2) et de deux injections j_1 et j_2 respectivement de E_1 et E_2 dans un espace localement convexe E. Par "plongement" de (E_1,E_2) dans E, nous entendrons le couple des injections (j_1,j_2), nous le noterons parfois $(E_1,E_2;E)$.

On peut alors définir "la somme" et "l'intersection" de E_1 et E_2 relativement au plongement (j_1,j_2) de la façon suivante :

L'espace localement convexe intersection, noté $E^{\cap}$, ou parfois $E_1 \underset{E}{\cap} E_2$, ou $E_1 \cap E_2$, désignera le noyau de l'application $j_1 - j_2$ de $E_1 \times E_2$ dans E, muni de la topologie induite par celle de E.

L'espace localement convexe somme, noté $E^{\cup}$, ou encore $E_1 \underset{E}{+} E_2$, ou $E_1 + E_2$ désignera le sous-espace de E image de $E_1 \oplus E_2$ par l'application $j_1 + j_2$ de $E_1 \oplus E_2$ dans E, muni de la topologie quotient de $E_1 \oplus E_2$ par le noyau de $j_1 + j_2$.

Les espaces $E^{\cap}$ et $E^{\cup}$ sont séparés si E_1 et E_2 le sont. On a alors deux injections naturelles i_1 et i_2 de $E^{\cap}$ dans E_1 et E_2 respectivement, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
E^{\cap} \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & E^{\cup} \\
 & E_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Nous identifierons l'espace $E^{\cap}$ à un sous-espace vectoriel de E_1 et de E_2, E_1 et E_2 étant eux-mêmes considérés comme des sous-espaces de $E^{\cup}$. Nous pourrons alors parler de la restriction à $E^{\cap}$ d'une application définie sur E_i $(i = 1,2)$, et éventuellement de son prolongement à $E^{\cup}$.

On identifie alors un espace localement convexe au couple d'interpolation $(E,E;E)$, les injections étant alors égales à l'identité i_E de E. Nous allons maintenant définir les "applications linéaires continues" d'un couple d'interpolation $\mathcal{E}$ dans un couple d'interpolation $\mathcal{F}$. Cette notion généralisera la notion classique quand $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ seront des espaces localement convexes.

DÉFINITION 1.2.- <u>Si</u> $\mathcal{E}$ <u>et</u> $\mathcal{F}$ <u>sont deux couples d'interpolation, on désigne par</u> $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ <u>le sous-espace de</u> $\mathcal{L}(E_1,F_1) \times \mathcal{L}(E_2,F_2)$ <u>formé des couples d'applications linéaires</u> $u = (u_1,u_2)$ <u>dont les restrictions à</u> $E^{\cap}$ <u>considérées comme applications à valeurs dans</u> $F^{\cup}$ <u>coïncident</u>(2) $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ <u>est dite application linéaire continue de</u> $\mathcal{E}$ <u>dans</u> $\mathcal{F}$.

Il est clair qu'une telle restriction envoie $E^{\cap}$ dans $F^{\cap}$ et définit un élément de $\mathcal{L}(E^{\cap},F^{\cap})$. Il existe donc une application naturelle, dite de restriction à $E^{\cap}$, de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ dans $\mathcal{L}(E^{\cap},F^{\cap})$.

Soit u un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Si a est un vecteur de $E^{\cup}$, $a = a_1 + a_2$ $(i = 2)$, $a_i \in E_i$ $(i = 1,2)$, le vecteur $u(a) = u_1(a_1) + u_2(a_2)$ ne dépend pas de la décomposition du vecteur a. L'application $a \mapsto u(a)$ ainsi définie est continue de $E^{\cup}$ dans $F^{\cup}$ et sa restriction à E_i coïncide avec u_i. On peut donc définir une application naturelle de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ dans $\mathcal{L}(E^{\cup},F^{\cup})$ dite de prolongement à $E^{\cup}$.

Lorsque nous munirons $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ de la topologie induite par $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1}(E_1,F_1) \times \mathcal{L}_{\mathfrak{S}_2}(E_2,F_2)$, où $\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2)$ désigne un couple d'ensembles de parties bornées respectivement de E_1 et de E_2, nous noterons $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'espace localement convexe correspondant. Il est alors clair que l'application de prolongement définie ci-dessus est continue

(2) Nous noterons parfois $\mathcal{L}(E_1,F_1) \cap \mathcal{L}(E_2,F_2)$ pour $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ dans $\mathcal{L}_s(E^{\cup},F^{\cup})$.

DEFINITION 1.3.- $\mathcal{E}'\otimes\mathcal{F}$ <u>désigne le sous-espace de</u> $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ <u>formé des applications</u> (u_1,u_2) <u>telles que</u> u_i <u>soit de rang fini</u> $(i = 1,2)$; <u>muni de la topologie induite par</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, <u>nous le noterons</u> $\mathcal{E}'\overset{\mathfrak{S}}{\otimes}\mathcal{F}$, <u>muni de la topologie induite par</u> $(E_1'\otimes_i F_1)\times(E_2'\otimes_i F_2)$ [resp. $(E_1'\otimes_\pi F_1)\times(E_2'\otimes_\pi F_2)$], <u>nous le noterons</u> $\mathcal{E}'\otimes_i\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{E}'\otimes_\pi\mathcal{F}$) .

REMARQUE 1.1.- L'espace $\mathcal{L}(E^{\cup},F^{\cap})$ s'identifie de façon naturelle à un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$. On pourra alors parler de l'espace $(E^{\cup})'\otimes F^{\cap}$ comme du sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ des applications de rang fini de E_i dans $F^{\cap}$ $(i = 1,2)$.

D'après une remarque de Schapira ([34]), on voit facilement que si $E^{\cap}$ est dense dans E_i $(i = 1,2)$, $\mathcal{E}'\otimes\mathcal{F}$ s'identifie à l'espace $(E^{\cup})'\otimes F^{\cap}$(3) .

On notera par $E'_{\cap}$ l'espace $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},C)$ et par $E'_{\cup}$ le sous-espace de $(E_{\cap})'$ des applications qui sont la somme d'un élément de E_1' et d'un élément de E_2' muni de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les applications naturelles de E_1' et de E_2' dans $E'_{\cup}$. On définit de façon analogue les espaces $E'_{\mathfrak{S},\cap} = \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},C)$ et $E'_{\mathfrak{S},\cup} = (E_1)'_{\mathfrak{S}_1} + (E_2)'_{\mathfrak{S}_2}$ que nous noterons encore $(E'_{\mathfrak{S}})^{\cap}$ et $(E'_{\mathfrak{S}})^{\cup}$.

<u>Exemples de couples d'interpolation</u>.-

1) <u>Couple d'espaces de distributions</u>. Conformément aux notations de [40] et [36] nous appellerons espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$, un espace vectoriel topologique A tel que $A\subset\mathcal{D}'$, l'injection étant continue : nous supposerons dans la suite que les espaces de distributions considérés sont localement convexes séparés.

Soient E_1 et E_2 deux espaces de distributions sur $\mathbb{R}^n$, si nous plongeons (E_1,E_2) dans $\mathcal{D}'$, nous obtenons un couple d'interpolation dit "<u>couple</u> (E_1,E_2) <u>d'espaces de distributions sur</u> $\mathbb{R}^n$".

2) Si on considère deux espaces vectoriels E_1, E_2 de suites multiples d'ordre p de nombres complexes munis de topologies localement convexes plus fines que celle de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^p}$ (c'est-à-dire que chaque composante d'un élément de E_j dépend continuellement de cet élément), nous parlerons <u>du couple d'espaces de suites multiples d'ordre</u> p, (E_1,E_2), en plongeant (E_1,E_2) de façon naturelle dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^p}$.

3) Etant donnés deux espaces localement convexes E_1 et E_2 et une injection

---

(3) En effet une application de rang fini de E_i dans F_i $(i = 1,2)$ est de rang fini de $E^{\cap}$ dans $F^{\cap}$, elle est continue de E_i dans F_i , son image est de rang fini donc fermée dans F_i , elle envoie donc continuement E_i dans $F^{\cap}$ $(i = 1,2)$.

continue i de E_1 dans E_2, on leur associe le couple d'interpolation formé du couple d'espaces (E_1, E_2) plongé dans E_2. Les espaces $E^{\cup}$ et $E^{\cap}$ sont alors identifiés par $j_1 = i$, j_2 = Identité de E_2, respectivement à E_2 et E_1.

4) Couple dual. Soit $\mathcal{E}$ un couple d'interpolation tel que $E^{\cap}$ soit dense dans E_1 et E_2. Les applications naturelles de E_1' et E_2' dans $(E^{\cap})'$ sont alors injectives. On pourra parler du couple d'interpolation $\mathcal{E}'$ en plongeant (E_1', E_2') dans $(E^{\cap})'_s$, ce couple sera dit couple dual de $\mathcal{E}$. On définira de façon analogue les couples $\mathcal{E}'_{\mathfrak{S}}$ en plongeant $((E_1)'_{\mathfrak{S}_1}, (E_2)'_{\mathfrak{S}_2})$ dans $(E^{\cap})'_s$, $\mathfrak{S}_i$ désignant un ensemble de parties bornées de E_i recouvrant E_i $(i=1,2)$.

Remarquons qu'alors les espaces $(E')^{\cap}$ et $(E')^{\cup}$ coïncident avec les espaces $E'_{\cap}$ et $E'_{\cup}$ définis plus haut.

Supposons maintenant $E^{\cap}$ dense dans E_i $(i=1,2)$, alors $(E'_c)^{\cap}$ est dense dans $(E_i)'_c$ $(i=1,2)$. En effet nous verrons plus loin (cf. proposition 1.1.) que $(E'_c)^{\cap}$ s'identifie algébriquement à $(E^{\cup})'_c$. Les espaces $(E_i)'_c$ et $(E^{\cup})'_c$ sont semi-réflexifs, l'application naturelle de $(E^{\cup})'_c$ dans $(E_i)'_c$ a donc pour transposée l'application d'injection de E_i dans $E^{\cup}$, son image est donc dense dans $(E_i)'_c$ $(i=1,2)$. C.Q.F.D.

Propriétés des espaces $E^{\cap}$ et $E^{\cup}$.-

Notons quelques propriétés essentielles :

1) L'espace $E^{\cap}$ est complet, si E_1 et E_2 le sont comme sous-espace fermé de $E_1 \times E_2$, du type $(\mathcal{F})$ si E_1 et E_2 le sont. Si E_1 et E_2 sont du type $(\mathcal{S})$, tout produit et tout sous-espace d'un espace du type $(\mathcal{S})$ étant du même type, $E^{\cap}$ est encore un espace de Schwartz. Si E_1 et E_2 sont du type $(\mathcal{D}\mathcal{S})$, nous verrons plus loin que $E^{\cap}$ est encore un espace $(\mathcal{D}\mathcal{S})$. Par contre E_1 et E_2 étant du type (DF), $E^{\cap}$ peut ne pas être du type DF. Si E_1 et E_2 sont nucléaires $E^{\cap}$ est nucléaire comme sous-espace du produit de deux espaces nucléaires ([4]; ch.2 ; § 2 n° 2 ; th.9).

Si E_1 et E_2 sont deux espaces de Banach, nous munirons $E^{\cap}$ de la norme :

$$\|x\|_{E^{\cap}} = \operatorname{Sup}\left(\|x\|_{E_1}, \|x\|_{E_2}\right),$$

c'est alors un espace de Banach.

2) L'espace $E^{\cup}$ est nucléaire si E_1 et E_2 le sont comme quotient séparé d'un espace nucléaire ([19] ; ch.2 ; § 2 n°2 ; th.9), du type $(\mathcal{F})$ si E_1 et E_2 le sont, du type (DF) si les E_i $(i=1,2)$ le sont comme isomorphe au quotient d'un produit de deux espaces du type (DF) par un sous-espace fermé, du type $(\mathcal{S})$ si les E_i le sont comme quotient séparé d'un produit d'espaces du type $(\mathcal{S})$ [18] ;

Si E_1 et E_2 sont des espaces de Banach, nous munirons $E^{\cup}$ de la norme:

$$\|x\|_E = \inf_{\substack{x=x_1+x_2 \\ x_i \in E_i}} (\|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2}) .$$

C'est alors un espace de Banach.

Nous allons maintenant relier les espaces $(E^{\cap})'$ et $E'_{\cup}$ d'une part, $E'_{\cap}$ et $(E^{\cup})'$ d'autre part. On a la

PROPOSITION 1.1.-

<u>Si $\mathcal{E}$ est un couple d'interpolation,</u> $(E^{\cup})'_s$ <u>s'identifie algébriquement et topologiquement à</u> $(E'_s)^{\cap}$, <u>et</u> $(E^{\cap})'_s$ <u>à</u> $(E'_s)^{\cup}$. <u>Dans le cas où</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>sont du type</u> $(\mathcal{F}\mathcal{S})$ (resp $\mathcal{D}\mathcal{S}$), <u>ou encore si ce sont des espaces normés</u> $(E^{\cup})'_b$ <u>est isomorphe à</u> $E'_b)^{\cap}$ <u>et</u> $(E^{\cap})'_b$ <u>à</u> $(E'_b)^{\cup}$.

<u>Démonstration</u> :

L'espace $E^{\cup}$ est défini comme le quotient de l'espace $E_1 \oplus E_2$ par le sous-espace Δ des (e_1, e_2) tels que $j_1(e_1) + j_2(e_2) = 0$, avec les notations du § 2. Le dual faible de $E^{\cup}$ s'identifie au polaire de Δ, pour la dualité $(E_1 \oplus E_2, E'_1 \times E'_2)$ muni de la topologie induite par $(E_1 \oplus E_2)'_s = (E_1)'_s \times (E_2)'_s$. Dans le cas où E_1 et E_2 sont du type $(\mathcal{F}\mathcal{S})$ (resp $(\mathcal{D}\mathcal{S})$) ou encore dans le cas des espaces normés, si on munit ce polaire de la topologie induite par $(E_1)'_b \times E_2)'_b$ et $(E^{\cup})'$ de la topologie de dual fort, cette identification respecte les topologies. L'ensemble Δ est formé des $e = e_1 \oplus e_2$ tels que $(e_1, -e_2)$ soit dans $E^{\cap}$, son polaire pour la dualité considérée est donc formé des couples (e'_1, e'_2) de $E'_1 \times E'_2$ tels que e'_1 et e'_2 coïncident sur $E^{\cap}$, c'est-à-dire de $(E')^{\cap}$ par définition, ce qu'il fallait démontrer.

On voit de même que l'espace $(E^{\cap})'_s$ s'identifie au quotient de

$$(E_1)'_s \oplus (E_2)'_s = (E_1 \times E_2)'_s$$

par le polaire de $E^{\cap}$ pour la dualité $(E_1 \times E_2, E'_1 \oplus E'_2)$, l'identification respectant les topologies fortes dans le cas d'espaces $(\mathcal{F}\mathcal{S})$, $(\mathcal{D}\mathcal{S})$ ou dans celui d'espaces normés. Il suffit alors pour achever la démonstration de remarquer que $(E^{\cap})^{\circ}$ est défini comme l'ensemble des e' de $E'_1 \oplus E'_2$ tels que pour tout (e_1, e_2) de $E^{\cap}$ on ait :

$$< e'_1, e_1 >_{(E'_1, E_1)} + < e'_2, e_2 >_{(E'_2, E_2)} = 0 ,$$

et que ceci n'est autre que le noyau de l'application $e'_1 \oplus e'_2 \mapsto e'_1 + e'_2$ de $E'_1 \oplus E'_2$ dans $(E^{\cap})'$. Le quotient de $E'_1 \oplus E'_2$ par ce noyau définissant $(E')^{\cup}$, on a le résultat cherché.

COROLLAIRE 1.- <u>Soit</u> $\mathcal{E}\in\underline{\mathcal{E}}$. <u>Si</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>sont du type</u> $(\mathcal{F})$, <u>alors</u>

$$(E_{\cup})'_c = E'_{c,\cap}$$

<u>Démonstration</u> :

D'après la proposition, on a $(E_{\cup})'_c \underset{alg}{=} E'_{c,\cap}$. La topologie de $(E_{\cup})'_c$ est manifestement plus fine que celle de la convergence uniforme sur les sommes de compacts équilibrés convexes de E_1 et E_2 qui est celle de $E'_{c,\cap}$. Elle est aussi moins fine. En effet, l'espace $E_1 \times E_2$ est du type $(\mathcal{F})$. Il est bien connu que toute partie compacte convexe équilibrée dans un espace quotient d'un espace E du type $(\mathcal{F})$ est contenue dans l'image canonique d'une partie compacte de E qu'on peut supposer convexe équilibrée. C'est-à-dire que tout compact convexe équilibré de $E^{\cup}$ est contenu dans la somme de deux parties convexes équilibrées compactes de E_1 et de E_2 respectivement, c'est-à-dire la topologie de $E'_{c,\cap}$ est plus fine que celle de $(E_{\cup})'_c$. C.Q.F.D.

REMARQUE 2.-

Supposons que $E^{\cap}$ soit dense dans E_1 et E_2. La topologie de $(E^{\cup})'$ est la topologie de la convergence uniforme sur tout borné de $E^{\cup}$, celle de $E'_{\cap}$, l'espace $E'_{\cap}$ étant identifié algébriquement à $(E^{\cup})'$, est la topologie de la convergence uniforme sur toute somme d'un borné de E_1 et d'un borné de E_2. On a donc

$$(E^{\cup})' \leqq E'_{\cap} \qquad (4)$$

on a de même :

$$E'_{\cup} \leqq (E^{\cap})'$$

Mais $E^{\cap}$, étant dense dans E_i $(i=1,2)$, est manifestement dense dans $E^{\cup}$. On a donc le

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> $\mathcal{E}$ <u>un couple d'interpolation. Si</u> $E^{\cap}$ <u>est dense dans</u> E_1 <u>et</u> E_2, <u>on a</u> :

$$(E^{\cup})' \leqq E'_{\cap} \leqq E'_i \leqq E'_{\cup} \leqq (E^{\cap})', \qquad (i=1,2).$$

<u>Propriétés des espaces</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux couples d'interpolation, quand $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont des parties totales de E_1 et E_2 respectivement, $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est séparé.

Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des couples d'espaces de Banach, on peut munir $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{F})$ de la structure d'espace de Banach définie par la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{F})} = \operatorname{Sup}\,[\|u_1\|_{\mathcal{L}_b(E_1,F_1)}, \|u_2\|_{\mathcal{L}_b(E_2,F_2)}] .$$

(4) On note $A \leqq B$, A et B étant deux espaces topologiques si $A \subseteq B$ et si l'application d'injection est continue.

Si E_1 et E_2 sont du type (DF), F_1 et F_2 du type $(\mathcal{F})$, $\mathcal{L}_b(E_1,F_1)$ est du type $(\mathcal{F})$, donc aussi $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Si E_1 et E_2 sont des espaces de Banach, si F_i (i=1,2) est réunion d'une suite croissante de sous-espaces vectoriels F_i^j (j=1,2,...), les F_i^j étant du type $(\mathcal{F})$, la topologie de F_i étant moins fine que celle de limite inductive des espaces F_i^j, alors ([20], ch.1, p.16, th.A)

$$\mathcal{L}(E_i,F_i) = \bigcup_j \mathcal{L}(E_i,F_i^j) .$$

L'application naturelle de

$$\mathcal{L}_b(E_1,F_1^j) \cap \mathcal{L}_b(E_2,F_2^{j'})$$

dans $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est continue pour tout j et tout j', on en déduit que $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{F})$ a une topologie moins fine qu'une topologie d'espace $(\mathcal{LF})$. Nous utiliserons cette propriété à plusieurs reprises pour appliquer le théorème du graphe fermé de Grothendieck ([19], ch.1, p.17, th.B).

Supposons que $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ recouvrent respectivement E_1 et E_2, que E_1 et E_2 ont la topologie de Mackey, alors si $(E_i)'_{\mathfrak{S}}$ et F_i (i=1,2) sont complets, $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_i}(E_i,F_i)$ est complet ([40], Intr.III) et il en est de même en conséquence de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

Si $\mathcal{E}$ vérifie la propriété que $E^\cap$ est dense dans E_1 et E_2, on peut alors considérer l'espace $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{E}'_c,\mathcal{F})$. Il est séparé si les E_i et F_i le sont (i=1,2), complet si les E_i et F_i sont complets ([40]). Supposons maintenant E_i et F_i complets (i=1,2), si E_1 et E_2 possèdent la propriété d'approximation ([19],ch.1 §5,n°1), en particulier s'ils sont nucléaires, $\mathcal{L}_\varepsilon((E_i)'_c,F_i)$ s'identifie à l'espace $E_i \hat{\otimes}_\varepsilon F_i$ (cf. [37]) ; on en déduit que si E_i et F_i sont du type $(\mathcal{F})$, E_j nucléaires (i=1,2), $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{E}'_c,\mathcal{F})$ est du type $(\mathcal{F})$. Si E_i et F_i sont des espaces nucléaires, $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{E}'_c,\mathcal{F})$ est nucléaire.

Si E_i et F_i (i=1,2) sont des espaces de Banach, E_1 et E_2 réflexifs, (i=1,2), $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{E}'_c,\mathcal{F})$ est l'espace des applications de $\mathcal{E}'_c$ dans $\mathcal{F}$ formé des couples (u_1,u_2) tels que u_i soit compacte de E'_i dans F_i. Il est alors muni de la norme induite par celle de $\mathcal{L}_b(\mathcal{E}',\mathcal{F})$. Nous le désignerons par : <u>espace des applications compactes de</u> $\mathcal{E}'$ <u>dans</u> $\mathcal{F}$, <u>noté</u> $\Gamma(\mathcal{E}',\mathcal{F})$.

Supposons maintenant E_i nucléaire, tonnelé, complet, E'_i du type $(\mathcal{S})$ et complet (i=1,2). On a alors

$$E_i = ((E_i)'_c)'_c \quad \text{et} \quad E'_i = (E_i)'_c .$$

On a par suite

$$\mathcal{L}_c(E_i,E_i) = \mathcal{L}_\varepsilon(((E_i)'_c)'_c,E_i) .$$

Si E_i possède la propriété d'approximation de Grothendieck (cf.[19], ch.1, §5,n°1),

$(E_i)'_c$ possède cette même propriété. En effet supposons i_{E_i} adhérent à $E'_i \otimes E_i$ dans $\mathcal{L}_c(E_i,E_i)$. La transposition $u \mapsto {}^t u$ définit un isomorphisme algébrique et topologique de $\mathcal{L}_c(E_i,E_i)$ sur $\mathcal{L}_c((E_i)'_c,(E_i)'_c)$, puisque E_i possède la topologie γ (5). Cette application $u \mapsto {}^t u$ applique $E'_i \otimes E_i$ sur $E_i \otimes E'_i$ et i_{E_i} sur $i_{E'_i}$. L'espace $(E_i)'_c$ possède donc la propriété d'approximation. On en déduit que

$$\mathcal{L}_c(E_i,E_i) = (E_i)'_c \,\hat{\otimes}_\varepsilon\, E_i = E'_i \,\hat{\otimes}_\pi\, E_i .$$

Puisque E_i est supposé nucléaire et E'_i du type $(\mathcal{S})$, $E'_i \hat{\otimes} E_i$ est du type $(\mathcal{S})$ ([19], ch.2, § 3, n°2), et par suite $(E'_1 \hat{\otimes}_\pi E_1) \times (E'_2 \hat{\otimes}_\pi E_2)$ est du même type, donc aussi son sous-espace $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

<u>Catégorie des couples d'interpolation.</u>

En ce qui concerne l'utilisation des catégories, nous nous limiterons à quelques définitions élémentaires de cette théorie dans le seul but de simplifier la formulation des propriétés dites "d'interpolation" que nous étudierons (cf. [16]).

Nous utiliserons la <u>catégorie $\underline{\mathcal{G}}$ des espaces localement convexes</u> dont les morphismes sont définis par les applications linéaires continues, la <u>sous-catégorie $\mathcal{H}^\circ$ des espaces convexes normables complets</u>, dits Banachisables. Par catégorie des espaces de Banach, nous entendrons celle dont les objets sont les espaces de Banach et les morphismes les applications de norme inférieure à 1.

Nous dirons qu'un espace localement convexe E_1 majore un espace localement convexe E_2, si $E_2 \leq E_1$, c'est-à-dire selon des conventions déjà introduites si $E_2 \subseteq E_1$ et si l'application d'injection est continue. On définit alors de façon évidente la notion de stricte majoration. On notera $E_1 = E_2$, s'il existe un isomorphisme vectoriel topologique de E_1 sur E_2, et on précisera $E_1 \underset{\text{alg}}{=} E_2$ lorsqu'il s'agira d'un isomorphisme d'espaces vectoriels non nécessairement continu.

Etant donnés deux foncteurs

$$T : A \mapsto T'(A) \quad \text{et} \quad T' : A \mapsto T'(A) ,$$

définis sur une catégorie $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\underline{\mathcal{G}}$, nous dirons que T majore T' et nous écrirons $T' \leq T$, si pour tout A de $\mathcal{A}$, $T'(A) \leq T(A)$ et si l'application $\alpha_{A'}$ de $T'(A)$ dans $T(A)$, définit une transformation naturelle du foncteur T dans T', c'est-à-dire si pour tout u dans $\mathrm{Hom}(A,B)$, A et $B \in \mathcal{A}$,

---

(5) Suivant la notation de L. Schwartz, la topologie γ sur E_i est celle de $((E_i)'_c)'_c$ (cf. [40], ch.1)

le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T'(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & T(A) \\ T'(u)\downarrow & & \downarrow T(u) \\ T'(B) & \xrightarrow[\alpha_B]{} & T(B) \end{array} \qquad (6)$$

Nous écrirons $T=T'$, s'il existe une transformation naturelle α de T dans T', telle que pour tout A de $\mathcal{A}$, α_A définisse un isomorphisme de $T'(A)$ sur $T(A)$.

Si on considère $\mathcal{G}$ comme sous-catégorie de celle des espaces vectoriels, et s'il existe une transformation naturelle α dans cette dernière catégorie, α_A définissant pour tout A un isomorphisme (algébrique) de $T'(A)$ sur $T(A)$, nous préciserons $T' \underset{alg}{=} T$.

Nous allons maintenant définir la catégorie $\underline{\mathcal{C}}$ des couples d'interpolation. Les objets de cette catégorie seront les couples eux-mêmes. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux objets de cette catégorie, nous posons $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est donc un morphisme. La composition de deux morphismes u et v sera le morphisme $v \circ u = (v_1 \circ u_1, v_2 \circ u_2)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{G})$. Nous noterons $i_{\mathcal{E}}$ le morphisme identité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont on vérifie qu'il est égal à (i_{E_1}, i_{E_2}).

Nous aurons à considérer diverses autres catégories :

1) <u>La sous-catégorie</u> $\underline{\mathcal{C}}^o$ de $\underline{\mathcal{C}}$ des couples $\mathcal{E}$ tels que $E^\cap$ est dense dans E_i $(i=1,2)$.

2) <u>La sous-catégorie</u> $\underline{\mathcal{B}}^o$ de $\underline{\mathcal{C}}$ dont les objets sont les couples de $\mathcal{E}$ tels que E_1 et E_2 soient Banachisables, avec $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux objets de $\underline{\mathcal{B}}^o$.

3) <u>La catégorie</u> $\underline{\mathcal{B}}$ des couples d'interpolation $\mathcal{E}$ tels que E_1 et E_2 soient des espaces de Banach, où $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est l'ensemble des applications bornées de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ dont la norme dans $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est inférieure à 1.

Notons deux propositions relatives à la composition des morphismes de la catégorie $\underline{\mathcal{C}}$, on a la :

PROPOSITION 1.2.- <u>Soient</u> $\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}$ <u>trois couples de</u> $\underline{\mathcal{C}}$, <u>si</u> $u\in\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{G})$ <u>et</u> $v\in\mathcal{L}(\mathcal{G},\mathcal{F})$, <u>l'application</u> $u \mapsto v \circ u$ <u>est continue de</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{G})$ <u>dans</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ <u>quel que soit</u> $\mathfrak{S}$. <u>Si</u> $u(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}_1$, <u>l'application</u> $v \mapsto v \circ u$ <u>est continue de</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}_1}(\mathcal{G},\mathcal{F})$ <u>dans</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

---

(6) On notera $T(u)$ ou $T.u$, l'image de u par le foncteur T.

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> $\mathcal{E}$ <u>et</u> $\mathcal{F}$ <u>deux couples de</u> $\underline{\mathcal{C}}^{\circ}$, $\mathcal{G}$ <u>un couple de</u> $\underline{\mathcal{C}}$. <u>Si toute partie convexe équilibrée compacte de</u> $(F_i)'_c$ $(i=1,2)$ <u>est équicontinue</u> (en particulier si les E_i sont tonnelés), <u>l'application</u> $v \mapsto v \circ u$ <u>est continue de</u> $\mathcal{L}_{\varepsilon}(\mathcal{F}'_c, \mathcal{G})$ <u>dans</u> $\mathcal{L}_{\varepsilon}(\mathcal{E}'_c, \mathcal{G})$.

La proposition est évidente. Pour démontrer le corollaire, il suffit de se rappeler que l'espace $\mathcal{L}_{\varepsilon}((E_i)'_c , (F_i)'_c)$ peut être considéré comme l'espace des applications linéaires faiblement continues de E'_i dans $(F_i)'_c$ qui transforment toute partie équicontinue de $(E_i)'$ en une partie relativement compacte de $(F_i)'_c$, donc en une partie équicontinue de F'_i, d'après l'hypothèse. On applique alors la proposition et on obtient le corollaire.

<u>Foncteur d'interpolation.</u>

Notons si $u \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ par ${}_{\cap}u$ sa restriction élément de $\mathcal{L}(X^{\cap}, E^{\cap})$ et ${}_{\cup}u$ son prolongement élément de $\mathcal{L}(X^{\cup}, E^{\cup})$. On a deux foncteurs naturellement définis, le foncteur

$$\cap : \mathcal{E} \mapsto E^{\cap} ,$$

avec, $\cap . u = {}_{\cap}u$, si $u \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$, et le foncteur

$$\cup : \mathcal{E} \mapsto E^{\cup} ,$$

avec, $\cup u = {}_{\cup}u$, si $u \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$

le foncteur $\cup$ majore le foncteur $\cap$ de façon naturelle. On donne alors la définition suivante :

DÉFINITION 1.4.- <u>Un foncteur covariant</u> $T : \mathcal{E} \mapsto T(\mathcal{E})$ <u>de</u> $\underline{\mathcal{C}}$ <u>dans</u> $\underline{\mathcal{G}}$ <u>sera dit d'interpolation si</u> $\cap \leq T \leq \cup$.

Si nous nous reportons à nos définitions, ceci signifie qu'à tout couple $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{C}}$, on associe un espace localement convexe $T(\mathcal{E})$ tel que

1°) $E^{\cap} \leq T(\mathcal{E}) \leq E^{\cup}$

2°) Identifiant $T(\mathcal{E})$ à un sous-espace de $E^{\cup}$ et $E^{\cap}$ à un sous-espace de $T(\mathcal{E})$, la restriction de ${}_{\cup}u$ à $T(\mathcal{E})$ est l'application $T(u)$ de $T(\mathcal{E})$ dans $T(\mathcal{G})$ et celle de $T(u)$ à $E^{\cap}$ coïncide avec ${}_{\cap}u$.

Précisons encore quelques notions. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux couples de $\underline{\mathcal{C}}$, A et B deux espaces localement convexes, $\mathfrak{S}$ un couple d'ensembles de parties bornées de E_1 et E_2,

DÉFINITION 1.5.- <u>On dira que</u> (A,B) <u>possède la propriété d'interpolation par rapport à</u> $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ <u>si</u> :

1°) 1) $E^{\cap} \leq A \leq E^{\cup}$

2) $F^{\cap} \leq B \leq F^{\cup}$

2°) <u>Le prolongement à</u> $E^{\cup}$ <u>d'une application</u> u de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ <u>définit par restriction à</u> A <u>un élément de</u> $\mathcal{L}(A,B)$.

REMARQUE 1.3.-

Si, à tout couple $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{C}}$, on associe un espace localement convexe $T(\mathcal{E})$ tel que $E^{\cap} \leqq T(\mathcal{E}) \leqq E^{\cup}$, pour vérifier qu'on a ainsi défini un foncteur d'interpolation il suffira de vérifier que si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{C}}$, le couple $(T(\mathcal{E}),T(\mathcal{F}))$ possède la propriété d'interpolation par rapport à $(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

DÉFINITION 1.6.- <u>On dira que</u> A <u>est un espace intermédiaire pour</u> $\mathcal{E}$ <u>si</u> (A,A) <u>possède la propriété d'interpolation par rapport à</u> $(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

DÉFINITION 1.7.- (A,B) <u>possède la propriété de $\mathfrak{S}$-interpolation par rapport à</u> $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ <u>s'il possède la propriété d'interpolation et si l'application naturelle</u> de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ <u>dans</u> $\mathcal{L}_s(A,B)$ <u>est continue</u>.

DÉFINITION 1.8.- A <u>est un $\mathfrak{S}$-espace intermédiaire pour</u> $\mathcal{E}$, <u>si c'est un espace intermédiaire tel que l'application naturelle de</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ <u>dans</u> $\mathcal{L}_s(A,A)$ <u>est continue</u>.

On définit de façon analogue un foncteur d'interpolation de la catégorie des couples d'espaces de Banach à valeurs dans la catégorie des espaces de Banach, c'est-à-dire un foncteur T de $\underline{\mathcal{B}}$ dans $\underline{\mathcal{K}}$ tel que :

$$\cap \leqq T \leqq \cup \; .$$

On peut encore, avec des définitions évidentes, introduire des foncteurs d'interpolation de la catégorie $\underline{\mathcal{B}}^{\circ}$ des couples d'espaces Banachisables dans celle des espaces Banachisables $\underline{\mathcal{K}}^{\circ}$.

On distingue alors les foncteurs d'interpolation de $\underline{\mathcal{B}}^{\circ}$ dans $\underline{\mathcal{K}}^{\circ}$ qui se prolongent en des foncteurs d'interpolation de $\underline{\mathcal{C}}$ dans $\underline{\mathcal{L}}$. Citons par exemple la "méthode d'interpolation holomorphe qui définit un tel foncteur.

REMARQUE.-

Si on construit un foncteur d'interpolation T de $\underline{\mathcal{B}}^{\circ}$ dans $\underline{\mathcal{K}}^{\circ}$ et si, en outre, à tout couple $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{B}}$ on fait correspondre une norme sur $T(\mathcal{E})$ définissant la topologie de $T(\mathcal{E})$, on aura défini ce qu'on appelle maintenant de façon classique une "méthode d'interpolation" pour les espaces de Banach. (cf. A.P. Calderon [4] ; J. Lions [24], [25] ; S.G. Krein [23] ; G. Foias [13] ; J. Peetre [33] ; Gagliardo [15]).

Nous allons donner maintenant quelques constructions très générales de foncteurs d'interpolation.

§ 3. Définition d'un foncteur d'interpolation.

Considérons deux couples d'interpolation $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ et un foncteur T de la catégorie $\underline{\mathcal{C}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$. et supposons que les conditions suivantes soient réalisées :

(1) $$X^{\cup} \leqq Y^{\cup}$$

(2) $$\mathcal{Y}' \otimes \leqq T \leqq \mathcal{L}^{\mathcal{X}} ,$$

où $\mathcal{Y}' \otimes$ et $\mathcal{L}^{\mathcal{X}}$ désignent respectivement les foncteurs $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{Y}' \otimes_i \mathcal{E}$ et $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_s(\mathcal{X},\mathcal{E})$, avec

$$(\mathcal{Y}' \otimes)(u) = i_{y'} \otimes u$$

$$(\mathcal{L}^{\mathcal{X}})(u) = (v \mapsto v \circ {}_{\cup}u) \quad \text{si} \quad u \in \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F}), \quad \mathcal{F} \in \mathcal{C} .$$

Alors à tout vecteur a de $X^{\cup}$, nous allons associer un foncteur d'interpolation, noté T_a, de la façon suivante :

Soit $\mathcal{E} \in \underline{\mathcal{C}}$, notons $j_{\mathcal{E}}$ l'application naturelle de $T(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{X},\mathcal{E})$. L'espace $T(\mathcal{E})$ s'identifie par l'application $j_{\mathcal{E}}$ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X^{\cup},E^{\cup})$; c'est-à-dire que si u est un élément de $T(\mathcal{E})$ il définit de façon unique une application ${}_{\cup}u$ de $\mathcal{L}(X^{\cup},E^{\cup})$.

On désigne alors par $T(a;\mathcal{E})$ *l'espace image de* $T(\mathcal{E})$ *par l'application* $J_{a,\mathcal{E}} : u \mapsto {}_{\cup}u(a)$ *de* $T(\mathcal{E})$ *dans* $E^{\cup}$, *espace que l'on munit de la topologie quotient de* $T(\mathcal{E})$ *par le noyau de l'application* $J_{a,\mathcal{E}}$. Si $J \in \underline{\mathcal{C}}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, on désigne par $T_a.u$ la restriction de ${}_{\cup}u$ à $T(a;\mathcal{E})$. On a alors la :

PROPOSITION 1.3.- $\mathcal{E} \mapsto T(a;\mathcal{E})$ *définit un foncteur d'interpolation.*

Démonstration :

Soit $\mathcal{E} \in \underline{\mathcal{C}}$.

1) $T(a;\mathcal{E}) \leqq E^{\cup}$, puisque l'application $J_{a,\mathcal{E}}$ est continue comme composée des applications $j_{\mathcal{E}}$ et $u \mapsto u(a)$ de $\mathcal{L}_s(X^{\cup},E^{\cup})$ dans $E^{\cup}$.

2) $E^{\cap} \leqq T(a;\mathcal{E})$, car en effet, soit e un vecteur de $E^{\cap}$, a' un vecteur de $(Y^{\cup})' \underset{\text{alg}}{=} Y'_{\cap}$, tel que $a'(a) = 1$ (un tel choix est possible, puisque $Y^{\cup}$ est séparé). Posons

$$u = \left(\frac{a'}{2} \otimes e, \ \frac{a'}{2} \otimes e\right)$$

l'application u définit un élément de $\bar{u}$ de $T(\mathcal{E})$ et d'après l'hypothèse (2), ${}_{\cup}\bar{u}(a) = e$. L'application $e \mapsto u$ est continue de $E^{\cap}$ dans $\mathcal{Y}' \otimes_i \mathcal{E}$, $e \mapsto \bar{u}$ est continue de $E^{\cap}$ dans $T(\mathcal{E})$, $e \mapsto {}_{\cup}\bar{u}(a)$ est alors continue de $E^{\cap}$ dans $T(a;\mathcal{E})$.

3) Soit $\mathcal{F}$ un deuxième couple de $\underline{\mathcal{C}}$, nous devons montrer que $(T(a;\mathcal{E}), T(a;\mathcal{F}))$ possède la propriété d'interpolation pour $(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Soit donc v un élément de

$\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, $T.v$ applique continuement $T(\mathcal{E})$ dans $T(\mathcal{F})$ et on vérifie aisément qu'elle envoie le noyau de l'application $J_{a,\mathcal{F}}$ dans le noyau de $J_{a,\mathcal{F}}$, c'est-à dire que l'application

$$J_{a,\mathcal{E}}(u) \mapsto J_{a,\mathcal{F}}[(T.v)(u)]$$

est continue de $T(a;\mathcal{E})$ dans $T(a;\mathcal{F})$. Cette application n'est autre que la restriction à $T(a;\mathcal{E})$ de l'application $x \mapsto v(x)$ de $E^{\cup}$ dans $F^{\cup}$, ce qui signifie que $(T(a;\mathcal{E}),T(a;\mathcal{F}))$ possède la propriété d'interpolation par rapport à $(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

REMARQUE 1.4.-

Dans le cas particulier où $\mathfrak{X}$ est un couple de $\underline{\mathcal{C}}^{\circ}$, nous avons vu que $\mathfrak{X}' \otimes \mathcal{E}$ s'identifiait algébriquement à $X'_{\cap} \otimes E^{\cap}$. L'application $e \mapsto a' \otimes e$, pour tout $a' \in X'_{\cap}$, est continue de $E^{\cap}$ dans $X'_{\cap} \otimes_i E^{\cap}$ qui a manifestement une topologie plus fine que celle de $\mathfrak{X}' \otimes_i \mathcal{E}$. Il suffit pour effectuer la construction précédente de supposer que :

$$(\mathcal{E} \mapsto X'_{\cap} \otimes_i \mathcal{E}) \leq T .$$

REMARQUE 1.5.-

Si $\mathfrak{X}$ est un couple d'interpolation de $\underline{\mathcal{B}}$ (resp. de $\underline{\mathcal{B}}^{\circ}$) nous pouvons limiter la construction précédente à des couples $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{B}}$ (resp. $\underline{\mathcal{B}}^{\circ}$). Alors pour $\mathfrak{S} = b$, si le foncteur T opère de $\underline{\mathcal{B}}$ dans $\underline{\mathcal{H}}$ (resp. de $\underline{\mathcal{B}}^{\circ}$ dans $\underline{\mathcal{H}}^{\circ}$), l'espace $T(a;\mathcal{E})$ est un espace de Banach (resp. Banachisable) lorsqu'on le munit de la norme quotient de $T(\mathcal{E})$ par le noyau de $J_{a,\mathcal{E}}$. C'est-à-dire qu'on définit une méthode d'interpolation pour les couples d'interpolation d'espaces de Banach (resp. Banachisables) en construisant un foncteur de la catégorie $\underline{\mathcal{B}}$ dans $\underline{\mathcal{H}}$ (resp. de $\underline{\mathcal{B}}^{\circ}$ dans $\underline{\mathcal{H}}^{\circ}$) tel que :

$$(\mathcal{E} \mapsto \mathfrak{X}' \otimes_i \mathcal{E}) \leq T \leq (\mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_s(X^{\cup},E^{\cup})) .$$

REMARQUE I.5'.-

Nous avons imposé ici la condition que l'application naturelle $j_{\mathcal{E}}$ de $T(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_s(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ était injective pour tout $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{C}}$. On se convaincra aisément qu'elle n'est nullement nécessaire (nous en verrons plus loin un exemple) mais permet de simplifier le schéma que nous avons décrit.

Nous allons maintenant voir rapidement que la plupart des méthodes d'interpolation utilisées en analyse sont du type que nous venons d'analyser. On peut citer en exemple les théories suivantes :

I) <u>Méthode des moyennes</u> (cf. [24])

Soient p_1 et p_2 deux nombres finis, supérieurs à 1, un couple (ξ_1,ξ_2) de nombres réels tels que $\xi_1\,\xi_2 < 0$. On désigne par ℓ^{p_i} (i=1,2) l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de puissance $p_i^{\text{ème}}$ sommable.

Soit X_i (i=1,2) l'espace des suites (u_n) telles que

$$(u_n e^{-(n.\xi i)}) \in \ell^{p_i'}, \text{ où } \frac{1}{p_i'} + \frac{1}{p_i} = 1, \quad i=1,2,$$

muni de la norme naturelle. On note $\mathfrak{X}$ le couple d'espaces de suites (X_1, X_2).

Pour tout couple d'interpolation $\mathcal{E}$ d'espaces de Banach, on définit $T(\mathcal{E})$ comme l'ensemble des suites à valeurs dans $E^{\cup}$ telles que

$$u_n e^{n.\xi_1} \in \ell^{p_1}(E_1), \quad u_n e^{n.\xi_2} \in \ell^{p_2}(E_2).$$

muni de la norme évidente.

Si on pose $\mathcal{Y} = (T(\mathbb{C}))_c'$, on a :

$$\mathcal{Y}' \otimes_i \mathcal{E} \leqq T(\mathcal{E}) < \mathcal{L}_b(\mathfrak{X}, \mathcal{E}) \leqq \mathcal{L}_s(X^{\cup}, E^{\cup}) \quad (^7).$$

La suite (u_n) définie par $u_n=1$, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ définit un élément de $X^{\cup}$. En posant $a=(u_n)$, il vient, avec les notations de J.L. Lions :

$$T(a;\mathcal{E}) = s(\xi_1, p_1, E_1; \xi_2, p_2, E_2) = S(\xi_1, p_1, E_1; \xi_2, p_2, E_2).$$

II) <u>Méthode holomorphe</u> (cf. [4], [23], [24])

Notons Ω l'ouvert du plan complexe des z défini par $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, par $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de Ω.

Posons $\mathfrak{X} = (H(\Omega))$ et $\mathcal{Y} = (H_\Gamma(\Omega))_c'$.

Notons $H_\Gamma(\Omega)$ l'espace des fonctions de $H(\Omega)$, continues et bornées sur la frontière Γ de Ω.

Si $\mathcal{E}\in\underline{\mathcal{B}}$, on désigne par $T(\mathcal{E})$ l'espace des fonctions de $H(\Omega;E^{\cup})$ continues bornées à valeurs dans E_1 sur la droite $\{\mathrm{Re}\ z = 0\}$, continues bornées à valeurs dans E_2 sur la droite $\{\mathrm{Re}\ z = 1\}$, muni de la norme

$$\|f\|_{T(\mathcal{E})} = \mathrm{Sup}\,(\|f(it)\|_{L^\infty(\mathbb{R};E_1)}; \|f(1+it)\|_{L^\infty(\mathbb{R};E_2)}).$$

---

(7) On a en effet $T(\mathbb{C}) \otimes_i E^{\cap} \leqq T(\mathcal{E})$, et $((T(\mathbb{C}))_c')' \leqq T(\mathbb{C})$.

qui en fait un espace de Banach.

On pose alors :

$$H_{\Gamma}(\Omega) = T(\mathbb{C}) ,$$

et on a :

$$T(\mathbb{C}) \otimes_{i} E^{\cap} \leqq T(\mathcal{E}) \leqq T(E^{\cup}) \leqq H(\Omega;E^{\cup}) = \mathcal{L}_b(H'(\Omega),E^{\cup}) ,$$

les propriétés fonctorielles étant respectées ; car en effet si A est un espace de Banach

$$T(A) \leqq H(\Omega;A)$$

en vertu du théorème des trois droites.

On désigne alors par a la fonctionnelle analytique représentée par la masse de Dirac au point $z = \theta$, $0 < \theta < 1$, et on a alors

$$T(a;\mathcal{E}) = [\theta;E_1,E_2] .$$

III) On peut construire une méthode analogue en considérant comme ouvert Ω la couronne du plan complexe des z définie par :

$$0 < \lambda < |z| < 1 ,$$

λ nombre réel positif donné, et en prenant des conditions au bord dans L^2 au lieu de les prendre dans un espace des fonctions continues et bornées.

En désignant par $H_{L^2}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes dans Ω ayant des valeurs dans L^2 à la frontière, on pose $\mathcal{Y}' = H_{L^2}(\Omega)$. On désigne par $T(\mathcal{E})$ l'espace des fonctions holomorphes dans Ω à valeurs dans $E^{\cup}$, qui pour $|z| = 1$ sont dans $L^2(E_1)$ et pour $|z| = \lambda$ dans $L^2(E_2)$, muni de la norme projective de $L^2(E_1)$ et $L^2(E_2)$. Si A est un espace de Banach, on a :

$$T(A) \leqq H(\Omega;A) ,$$

en vertu d'un théorème analogue au théorème des trois cercles. Posons $\mathfrak{X} = H'(\Omega)$, il vient alors

$$T(\mathbb{C}) \otimes_{i} E^{\cap} \leqq T(\xi) \leqq T(E^{\cup}) \leqq H(\Omega;E^{\cup}) = \mathcal{L}_b(H'(\Omega),E^{\cup}) ,$$

les propriétés fonctorielles étant respectées.

On peut encore choisir $a = \delta_{z_0}$, où z_0 est un point de Ω .

IV) <u>Méthode des traces</u> (cf. [24])

Si p_1 et p_2 sont deux nombres $\geqq 1$, α_1 et α_2 deux nombres tels que $0 < \frac{1}{p_1} + \alpha_1 < 1$ et $0 < \frac{1}{p_2} + \alpha_2 < 1$. On désigne par $T(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}\in\underline{\mathcal{B}}$, l'espace, noté par J.L. Lions $W(p_1,\alpha_1,E_1;p_2,\alpha_2,E_2)$, des classes de fonctions $t \mapsto u(t)$ telles que :

$$t^{\alpha_1}u_1 \in L^{p_1}(0,\infty;E_1)$$

$$t^{\alpha_2}\frac{du}{dt}\in L^{p_2}(0,\infty;E_2)$$

muni de la norme projective des espaces $L^{p_1}(0,\infty;E_1)$ et $L^{p_2}(0,\infty;E_2)$.

On montre alors que

$$T(\mathbb{C}) \otimes E^{\cap} \subseteq W(p_1,\alpha_1,E^{\cup};p_2,\alpha_2,E^{\cup}) = T(E^{\cup}) \subseteq \mathscr{C}([0,\infty[;E^{\cup}) \ (^8) .$$

les propriétés fonctionnelles étant respectées. Il existe donc une transformation naturelle $j_{\mathcal{E}}$ (définie par l'application trace $u \mapsto u(0)$ de $T(\mathcal{E})$ dans $\mathscr{C}([0,1];E^{\cup}))$, transformation non injective (cf. remarque 1.5').

Mais, $E^{\cup}$ étant complet, on a

$$\mathscr{C}([0,1];E^{\cup}) = \mathscr{C}([0,1]\ \hat{\otimes}_{\varepsilon} E^{\cup} = \mathcal{L}_{\varepsilon}((\mathscr{C}[0,1])'_c,E^{\cup}) .$$

En posant $\mathfrak{X} = (\mathscr{C}[0,1])'_c$

$\mathcal{Y}' = T(\mathbb{C})$.

et en choisissant pour a la distribution de Dirac à l'origine, on a alors avec les notations de J.L. Lions :

$$T(a;\mathcal{E}) = T(p_1,\alpha_1,E_1;p_2,\alpha_2,E_2) .$$

REMARQUE.-

Dans tous les cas que nous venons d'énumérer en nous restreignant à des couples d'espaces de Banach, on peut étendre la méthode à des espaces du type $(\mathcal{F})$, mais les propriétés des espaces $T(\mathcal{E})$ si on maintient ces définitions d'espaces de fonctions à valeurs dans $E^{\cup}$ deviennent mauvaises dès qu'on sort de ce cadre, surtout si on ne considère pas des espaces complets.

Regardons par exemple comment, en modifiant la définition III et en s'inspirant de la méthode de définition des distributions à valeurs vectorielles donnée par L. Schwartz, [40], on peut donner une définition valable pour tous les couples de $\underline{\mathscr{C}}$.

Soient H_{Γ_1} et H_{Γ_2} les espaces de fonctions définies respectivement sur les ensembles du plan complexe des z, $\lambda < |z| \leq 1$ et $\lambda \leq |z| < 1$, holomorphes dans l'ouvert $\Omega = \{z;\lambda < |z| < 1\}$, et respectivement dans

(8) $\mathscr{C}([0,\infty[;E^{\cup})$ espace des fonctions continues sur $[0,\infty[$, à valeurs dans $E^{\cup}$. muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

$$L^2(|z|=1) \qquad \text{et} \qquad L^2(|z|=\lambda)$$

et munis des topologies limites projectives respectivement de $H(\Omega)$ et $L^2(|z|=1)$ et de $H(\Omega)$ et $L^2(|z|=\lambda)$.

On pose alors pour tout couple $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathfrak{C}}$:

$$T(\mathcal{E}) = H_{\Gamma_1} \varepsilon\, E_1) \cap (H_{\Gamma_2} \varepsilon\, E_2) = \mathcal{L}_\varepsilon((H_{\Gamma_1})'_c, E_1) \cap \mathcal{L}_\varepsilon((H_{\Gamma_2})'_c, E_2) \ .$$

On a alors :

$$T(\mathcal{E}) \leqq \mathcal{L}_\varepsilon(H'(\Omega), E_1) \cap \mathcal{L}_\varepsilon(H'(\Omega), E_2) \leqq \mathcal{L}_\varepsilon(H'(\Omega), E^{\cup}) \ .$$

On vérifie aussitôt que :

$$H(\mathbf{C}) \otimes_i E \leqq H(\mathbf{C}) \otimes_\varepsilon E^{\cap} \leqq \mathcal{L}_\varepsilon(H'(\mathbf{C}), E^{\cap}) \leqq T(\mathcal{E}) \ .$$

Les propriétés fonctorielles sont toutes respectées, et on peut encore définir $T(a;\mathcal{E})$ en choisissant pour a la distribution de Dirac en un point z_o de Ω .

Si nous posons $\mathfrak{X} = (H_{\Gamma_1}, H_{\Gamma_2} ; H(\Omega))$, $\mathfrak{X} \in \underline{\mathfrak{C}}^o$, on est ramené à l'étude du cas général où le foncteur T est de la forme

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c, \mathcal{E}) \ ,$$

ce qui justifie déjà l'étude que nous allons entreprendre des foncteurs d'interpolation construits à partir de tels foncteurs.

§ 4. Généralisation de la précédente définition.

Reprenons la construction décrite au précédent paragraphe. Au lieu de considérer l'image par les applications de $T(\mathcal{E})$ d'un vecteur de $X^{\cup}$, on peut considérer le sous-espace vectoriel de $E^{\cup}$ engendré par l'image d'une partie ou ce qui revient au même ici, d'un sous-espace vectoriel de $X^{\cup}$. Nous allons voir que, pour une topologie convenable, on obtient encore un foncteur d'interpolation.

Montrons d'abord qu'à partir d'une famille de foncteurs d'interpolation, on peut définir un foncteur "limite inductive" de cette famille qui est encore d'interpolation. Soient donc un ensemble I et une famille T_i, $i \in I$, de foncteurs d'interpolation. A tout couple $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathfrak{C}}$, associons le sous-espace de $E^{\cup}$ formé des sommes finies d'éléments de $T_i(\mathcal{E})$, $i \in I$. Nous le noterons $T^+(\mathcal{E})$ ou encore $\sum_{i \in I} T_i(\mathcal{E})$, et nous le munirons de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les applications canoniques de $T_i(\mathcal{E})$ dans $T^+(\mathcal{E})$, topologie séparée, car pour chaque i l'application naturelle de $T_i(\mathcal{E})$ dans $E^{\cup}$ est continue. Alors on a le

LEMME.- $\mathcal{E} \mapsto T^+(\mathcal{E})$ <u>définit un foncteur d'interpolation.</u>

<u>Démonstration</u> :

Chaque foncteur T_i étant un foncteur d'interpolation, on a pour tout $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{C}}$:

$$E^\cap \leqq T_i(\mathcal{E}) \leqq E^\cup ,$$

donc encore en passant à la limite inductive des injections écrites ci-dessus

$$E^\cap \leqq T^+(\mathcal{E}) \leqq E^\cup .$$

Soit $\mathcal{F}$ un autre couple de $\underline{\mathcal{C}}$, $(T^+(\mathcal{E}),T^+(\mathcal{F}))$ possède la propriété d'interpolation par rapport à $(\mathcal{E},\mathcal{F})$. En effet prenons u dans $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, son prolongement à $E^\cup$ applique continuement $T_i(\mathcal{E})$ dans $T_i(\mathcal{F})$ pour tout i de I, donc aussi la limite inductive des espaces $T_i(\mathcal{E})$ dans la limite inductive des espaces $T_i(\mathcal{F})$ ce que nous voulions démontrer.

Soit T un foncteur du type décrit dans le paragraphe 3, <u>nous nous limiterons ici au cas où</u> $\mathfrak{X} = \mathcal{Y}$. Si A est un sous-espace vectoriel de $X^\cup$, nous pouvons appliquer le procédé décrit ci-dessus, en prenant A comme ensemble d'indices, et les foncteurs T_i devenant les foncteurs $T_a : \mathcal{E} \mapsto T(a,\mathcal{E})$. Notons $T(A;\mathcal{E})$ le sous-espace vectoriel de $E^\cup$ engendré par les vecteurs $u(a)$, où $u \in T(\mathcal{E})$ et $a \in A$, le lemme précédent conduit alors à la :

PROPOSITION 1.4.-

$\mathcal{E} \mapsto T(A;\mathcal{E})$ <u>définit un foncteur d'interpolation.</u>

§ 5. <u>Définition et propriétés générales des espaces</u> $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$.

Soit $\mathfrak{X}$ un couple d'interpolation de $\underline{\mathcal{C}}$. Nous nous proposons d'étudier la construction du paragraphe 3 quand on choisit pour foncteur T , le foncteur

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E}) ,$$

$\mathfrak{S}$ étant fixé. Ce choix est naturel dans la mesure où on désire obtenir une étude générale du problème d'interpolation <u>à partir de la donnée de</u> $\mathfrak{X}$. Soit $a \in X^\cup$, nous noterons $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ l'espace $T(a;\mathcal{E})$ correspondant à ce foncteur. <u>C'est l'espace des vecteurs</u> b <u>de</u> $E^\cup$ <u>qui peuvent s'écrire sous la forme</u> $b = {}_\cup u(a)$, <u>où</u> $u \in \mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, <u>muni de la topologie quotient de celle de</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>par le noyau de l'application</u> $u \mapsto {}_\cup u(a)$ Nous noterons $L_{\mathfrak{X},\mathfrak{S},a}$ le foncteur $\mathcal{E} \mapsto L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$.

Des propriétés générales des espaces $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ (cf. § 2), on déduit les propriétés suivantes des espaces $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$, quand on fait varier à la fois $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{S}$ et $\mathcal{E}$:

1) Nous avons déjà vu que l'espace $L_b(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ peut être muni d'une structure d'es-

pace de Banach (définie par la norme quotient de $\mathcal{L}_b(\mathfrak{X},\mathcal{E})$) quand $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ sont dans $\underline{\mathcal{B}}$ (cf. § 2). L'espace $L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$, si on suppose que $\mathfrak{X}$ est dans $\underline{\mathcal{C}}^\circ$ et dans $\underline{\mathcal{B}}$, peut être muni de la norme quotient de celle de $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$. C'est encore un espace de Banach. Si on suppose X_1 et X_2 réflexifs, l'espace $L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est l'image de l'application $u \mapsto u(a)$ quand u décrit l'espace des applications compactes de X'_i dans E_i $(i=1,2)$. Ces espaces ont été utilisés dans [12],(9).

2) Si $\mathfrak{X}$ est dans $\underline{\mathcal{C}}^\circ$, $L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est séparé puisque X_i et E_i le sont $(i=1,2)$. Si X_i et E_i sont du type $(\mathcal{F})$, E_i nucléaires $(i=1,2)$, $L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est du type $(\mathcal{F})$. Si X_i et E_i sont complets nucléaires, $L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est nucléaire.

3) Soit $\mathfrak{X}\in\underline{\mathcal{C}}^\circ$. Notons encore que si X_1 et X_2 sont du type $(\mathcal{S})$ quasi-complets, tonnelés, $(X_i)'_c$ est isomorphe à $(X_i)'_b$ $(i=1,2)$. Les espaces $L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ et $L_b(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ sont alors isomorphes.

4) Supposons E_1 et E_2 nucléaires tonnelés complets, E'_1 et E'_2 du type $(\mathcal{S})$ et complets, alors $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ est du type $(\mathcal{S})$.

<u>Variation des espaces</u> $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>avec</u> a .

Soient $\mathfrak{X}$ un couple de $\underline{\mathcal{C}}$, a un vecteur de $X^\cup$. Nous allons tout d'abord faire varier le vecteur a, nous étudierons plus loin la variation de $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ avec $\mathfrak{X}$ et a.

Nous supposerons dans ce paragraphe que $\mathfrak{S}$ est stable par les applications de $\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$. On a alors la

PROPOSITION 1.5.-

<u>Si</u> $a'\in L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ <u>pour tout couple</u> $\mathcal{E}$ <u>de</u> $\underline{\mathcal{C}}$

$$L_{\mathfrak{S}}(a';\mathfrak{X},\mathcal{E}) \subseteq L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) .$$

La démonstration est évidente. Il suffit d'écrire a' sous la forme $a' = u(a)$, où $u\in\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ et de noter que l'application $v \to v \circ u$ est continue de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ (cf. proposition 1.2). On en déduit les :

---

(9) Si on veut retrouver les espaces utilisés dans [12] en supprimant l'hypothèse de réflexivité de X_1 et de X_2, il faut supposer que $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$ sont dans $\underline{\mathcal{C}}^\circ$, $(\mathfrak{X}\in\mathcal{B})$, et considérer l'espace $L_\varepsilon(a;\mathcal{Y}'_c,\mathcal{E})$ ou $\mathcal{Y} = \mathfrak{X}'$.

On sait en effet que $\mathcal{L}_\varepsilon((X_i)''_c,E_i) = \Gamma(X_i,E_i)$ (espace des applications compactes de X_i dans E_i). On a de même $\mathcal{L}_\varepsilon((X^\cap)''_c,E^\cup) = \Gamma(X^\cap,E^\cup)$. On voit facilement en utilisant le corollaire 1 de la proposition 1.1 que $(X^\cap)''_c = Y'_{\cap,c}$. Il en résulte que $\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}''_c,\mathcal{E})$.

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> $a' \in L_\nu(a;\mathfrak{X},\mathfrak{X})$:

$$L_\nu(a';\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leq L_\nu(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \text{ , } {}^{(10)}$$

<u>pour tout</u> $\mathcal{E}$ <u>de</u> $\mathscr{C}$.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> $\mathfrak{X}$ <u>un couple de</u> $\mathscr{C}^\circ$, X_1 <u>et</u> X_2 <u>étant supposés tonnelés, alors si</u> $a' \in L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathfrak{X}'_c)$:

$$L_\varepsilon(a';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) \leq L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) \text{ ,}$$

<u>pour tout couple</u> $\mathcal{E}$ <u>de</u> $\mathscr{C}$.

En écrivant a sous la forme $i_{\mathfrak{X}}(a)$, on obtient le

COROLLAIRE 3.- <u>Pour qu'un vecteur</u> b <u>de</u> $X^\cup$ <u>soit dans</u> $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ <u>il faut et il suffit que pour tout couple de</u> $\mathcal{E}$:

$$L_{\mathfrak{S}}(b;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leq L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \text{ .}$$

On a encore les

COROLLAIRE 4.- <u>Pour que</u> $L_{\mathfrak{S}}(b;\mathfrak{X},\mathfrak{X}) \subseteq L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathfrak{X})$, <u>il faut et il suffit que l'équation</u> $b = u(a)$ <u>admette au moins une solution</u> u <u>dans</u> $\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$.

COROLLAIRE 5.- <u>Soit</u> A <u>un espace intermédiaire pour un couple d'interpolation</u> $\mathcal{E}$. <u>Pour qu'il n'existe pas de sous-espace de</u> A <u>distinct de</u> A <u>et de</u> $E^\cap$, <u>qui soit un espace intermédiaire pour</u> $\mathcal{E}$, <u>il faut et il suffit que pour tout couple</u>

$$(a,b) \in A \times A,\ (a,b) \notin E^\cap \times E^\cap \text{ ,}$$

<u>on ait l'égalité</u>

$$L_s(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} L_s(b;\mathcal{E},\mathcal{E}) \text{ .}$$

REMARQUE 1.6.-

Si e est dans $X^\cap$, on a : $L_{\mathfrak{S}}(e;\mathfrak{X},\mathfrak{X}) = X^\cap$. En effet nous savons déjà que $X^\cap \leq L_{\mathfrak{S}}(e;\mathfrak{X},\mathfrak{X})$, mais si u est dans $\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$, par définition $u(a)$ est dans $X^\cap$ pour tout a de $X^\cap$, donc $L(e;\mathfrak{X},\mathfrak{X}) \subset X^\cap$. L'isomorphisme vectoriel topologique de $L_{\mathfrak{S}}(e;\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ et de $X^\cap$ résultera alors de considérations générales qui seront établies dans le prochain paragraphe.

On retrouve là le fait que lorsque $\mathfrak{X}$ est un espace localement convexe la topologie de $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ est indépendante des ensembles $\mathfrak{S}_i$ $(i=1,2)$. Nous verrons dans le prochain chapitre qu'en général, si $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ est distinct de $X^\cap$ et de $X^\cup$, sa topologie varie avec $\mathfrak{S}$.

---

(10) D'après nos définitions $\nu = b$, c ou s (cf. § 1)

§ 6. Espaces intermédiaires.

Nous allons voir que tout espace intermédiaire (cf. définition 1.6) pour un couple $\mathcal{E}$ peut être obtenu au moins algébriquement à l'aide d'un foncteur d'interpolation, et topologiquement quand $\mathcal{E}$ est un couple d'espaces de Banach et que l'espace intermédiaire est Banachisable.

Soit donc $\mathcal{E}$ un couple d'interpolation, A un sous-espace vectoriel de $E^{\cup}$. Nous allons appliquer le procédé décrit au § 4, en prenant A pour ensemble d'indices et pour foncteurs T_a les foncteurs

$$L_{\mathcal{E},\mathfrak{S},a} : \mathcal{F} \mapsto L_{\mathfrak{S}}(a;\mathcal{E},\mathcal{F}) .$$

Nous noterons $L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{F})$ l'espace $\sum_{a\in A} L_{\mathfrak{S}}(a;\mathcal{E},\mathcal{F})$. De la proposition 1.4 on déduit alors la

PROPOSITION 1.6.-

$\mathcal{F} \mapsto L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{F})$ définit un foncteur d'interpolation.

Nous nous proposons de démontrer le

THÉORÈME 1.1.- Soit A un espace intermédiaire pour le couple d'interpolation $\mathcal{E}$, alors $L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{alg}{=} A$. La topologie de $L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$ est la plus fine parmi les topologies d'espaces vectoriels localement convexes pour lesquelles A est un $\mathfrak{S}$-espace intermédiaire.

Démonstration :

Démontrons tout d'abord l'égalité algébrique des espaces A et $L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$. Pour tout a dans $E^{\cup}$, a est un vecteur de $L_{\mathfrak{S}}a;\mathcal{E},\mathcal{E})$, c'est-à-dire que A est un sous-espace vectoriel de $L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit d'établir le

LEMME.- Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ deux couples de $\mathfrak{L}$, (Y,A) un couple de deux espaces localement convexes possédant la propriété de $\mathfrak{S}$-interpolation (resp. d'interpolation) par rapport à $(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, alors :

$$L_{\mathfrak{S}}(Y;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leq A \quad (\text{resp. } L_{\mathfrak{S}}(Y;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \subseteq A) .$$

Démonstration :

L'espace $L_{\mathfrak{S}}(Y,\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ est défini comme limite inductive des espaces $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ quand a parcourt Y. Il suffit de montrer que pour tout a de Y on a :

$$L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leq Y \quad (\text{resp. } L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \subseteq A) .$$

Par hypothèse (Y,A) possède la propriété de $\mathfrak{S}$-interpolation (resp. d'interpolation) par rapport à $(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ s'envoie canoniquement dans

$\mathcal{L}_s(Y,A)$ et continuement dans le premier cas. Cette application de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_s(Y,A)$ envoie l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ qui s'annulent au point a dans l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(Y,A)$ qui s'annulent en ce même point, ou encore, par passage au quotient, envoie (continuement dans le premier cas) $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ dans A , ce qu'il fallait démontrer.

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de montrer que $L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$ est un $\mathfrak{S}$-espace intermédiaire, c'est-à-dire que l'application de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_s(L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E}), L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E}))$ est continue.

Il suffit donc de montrer que pour tout $a \in L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$, l'application $u \mapsto u(a)$ est continue de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$. Cette application est continue de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ par définition même, mais

$$L_{\mathfrak{S}}(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \leqq L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E}) ,$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 1.7.-

Cette condition de continuité de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_s(A,A)$ lorsque A est un espace intermédiaire pour $\mathcal{E}$ paraît a priori peu forte. Elle n'est cependant pas toujours réalisée, nous en donnerons des exemples pour les couples d'espaces de distributions. On peut cependant conclure dans d'autres cas usuels. Par exemple on a :

COROLLAIRE 1.- <u>Soit</u> $\mathcal{E}$ <u>un couple d'interpolation de</u> $\mathcal{C}$ <u>tel que</u> $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ <u>soit ultrabornologique</u> ([20]). <u>Si</u> A <u>est un espace intermédiaire pour</u> $\mathcal{E}$ <u>tel que</u> A <u>ou</u> $\mathcal{L}_s(A,A)$ <u>aient une topologie moins fine qu'une topologie d'espace</u> $(\mathcal{LF})$, <u>alors la topologie de</u> A <u>est moins fine que celle de</u> $L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$ <u>, et</u> A <u>est un espace</u> <u>$\mathfrak{S}$-intermédiaire pour</u> $\mathcal{E}$.(11)

<u>Démonstration</u> :

1) Supposons que $\mathcal{L}_s(A,A)$ ait une topologie moins fine qu'une topologie d'espace $(\mathcal{LF})$. Pour aboutir aux conclusions du théorème il suffit d'après le théorème de montrer que l'application canonique de $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_s(A,A)$ est continue.

---

(11) D'après une note récente de M. L.Schwartz et A.Martineau (cf. comptes rendus Ac. Sc. Paris, t. 263, 1966, p. 602 et 870), on peut remplacer l'hypothèse sur A (ou $\mathcal{L}_s(A,A)$) par : A (ou $\mathcal{L}_s(A,A)$) est K- analytique pour sa topologie faible, ou encore : A (ou $\mathcal{L}_s(A,A)$) est muni d'une topologie moins fine qu'une topologie accessible par une infinité transfinie dénombrable d'opérations de limites projectives dénombrables, limites inductives dénombrables à partir d'espaces du type $(\mathcal{F})$.

$\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ est supposé ultrabornologique, $\mathcal{L}_s(A,A)$ a une topologie moins fine qu'une topologie d'espace $(\mathcal{LF})$, on peut appliquer le théorème déjà cité du graphe fermé de A.Grothendieck. L'injection sera continue si elle l'est pour une topologie séparée sur $\mathcal{L}(A,A)$ moins fine que celle de $\mathcal{L}_s(A,A)$. Notons $\tilde{A}$ l'espace A muni de la topologie induite par celle de $E_1 + E_2$. La topologie de $\mathcal{L}_s(A,\tilde{A})$ est séparée moins fine que celle de $\mathcal{L}_s(A,A)$, l'application canonique de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_s(A,\tilde{A})$ est trivialement continue donc aussi celle de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_s(A,A)$.

2) Supposons que A ait une topologie moins fine qu'une topologie d'espace $(\mathcal{LF})$. Le théorème du graphe fermé montre que la topologie de A est moins fine que celle de $L_{\mathfrak{S}}(A,\mathcal{E},\mathcal{E})$. Alors A est un espace $\mathfrak{S}$-intermédiaire pour le couple $\mathcal{E}$. Il suffit en effet de remarquer que l'application naturelle de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}(A,A)$ est continue quand on munit $\mathcal{L}(A,A)$ de la topologie induite par celle de

$$\mathcal{L}_s(L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E}),A) ,$$

c'est-à-dire pour celle de $\mathcal{L}_s(A,A)$, c.q.f.d.

On peut, si $\mathcal{E}$ est un couple d'interpolation d'espaces de Banach et A du type Banachisable, reprendre le raisonnement en l'appliquant à l'espace Banachisable $\mathcal{L}_b(A,A)$ au lieu de $\mathcal{L}_s(A,A)$ on obtient alors que $L_b(A;\mathcal{E},\mathcal{E}) = A$ et on voit de plus que l'application canonique de $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_b(A,A)$ est continue, on a donc le

COROLLAIRE 2.- Soit $\mathcal{E}$ un couple d'interpolation d'espaces de Banach. Si A est un espace intermédiaire pour $\mathcal{E}$, du type Banachisable, $L_b(A;\mathcal{E},\mathcal{E}) = A$; l'application canonique de $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_b(A,A)$ est continue.

COROLLAIRE 3.- Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux couples d'interpolation, E_1 et E_2 du type (DF), F_1 et F_2 du type $(\mathcal{F})$, X un espace de Banach, Y un espace limite inductive d'une suite croissante de sous-espaces vectoriels Y_i du type $(\mathcal{F})$ Si le couple (X,Y) a la propriété d'interpolation par rapport à $(\mathcal{E},\mathcal{F})$, alors

$$L_b(X;\mathcal{E},\mathcal{F}) \leq Y ,$$

et l'application canonique de $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{F})$ dans $\mathcal{L}_b(X,Y)$ est continue.

Démonstration :

Notons tout d'abord que $\mathcal{L}_b(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est d'après les hypothèses, du type $(\mathcal{F})$ (cf. § 2). L'espace $\mathcal{L}_b(X,Y)$ d'après un théorème de A.Grothehdieck([19] ; th A, introduction) s'identifie algébriquement à l'espace $\bigcup_i \mathcal{L}(X,Y_i)$. Il est clair que la topologie limite inductive des espaces $\mathcal{L}_b(X,Y_i)$ définit sur $\mathcal{L}(X,Y)$ une topologie plus fine que celle de $\mathcal{L}(X,Y)$, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_b(X,Y)$ a une topologie moins fine qu'une topologie d'espace $(\mathcal{LF})$. On achève alors la démonstration comme on l'a fait pour le corollaire 1 en appliquant le théorème du graphe fermé.

Nous allons maintenant pouvoir préciser comment varient les espaces $L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ en fonction du couple $\mathfrak{X}$ et du vecteur a. Considérons un deuxième couple de $\mathcal{C}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathfrak{S}'_i$ $(i=1,2)$, un ensemble de parties bornées de Y_i recouvrant Y_i , on a alors la

PROPOSITION 1.7.-

<u>Supposons que pour tout élément</u> v <u>de</u> $\mathcal{L}(\mathcal{Y},\mathfrak{X})$, $v(\mathfrak{S}')\subset\mathfrak{S}$, <u>alors si</u> $b\in Y^{\cup}$, <u>pour tout</u> a <u>de</u> $L_{\mathfrak{S}'}(b;\mathcal{Y},\mathfrak{X})$ <u>on a</u> :

$$L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leqq L_{\mathfrak{S}'}(b;\mathcal{Y},\mathcal{E})$$

<u>quel que soit</u> $\mathcal{E}$ <u>dans</u> $\underline{\mathcal{C}}$.

<u>Démonstration</u> :

D'après le lemme du théorème 1.1, il suffit de montrer que

$$(L_{\mathfrak{S}'}(b;\mathcal{Y},\mathfrak{X}),L_{\mathfrak{S}'}(b;\mathcal{Y},\mathcal{E}))$$

possède la propriété de $\mathfrak{S}$-interpolation pour $(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. On doit donc voir que toute application de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ se prolonge canoniquement en une application de

$$\mathcal{L}_s(L_{\mathfrak{S}'}(b;\mathcal{Y},\mathfrak{X}),L_{\mathfrak{S}'}(b;\mathcal{Y},\mathcal{E}))$$

et que l'application ainsi définie est continue. Le premier point découle du fait que $\mathcal{F}\mapsto L_{\mathfrak{S}'}(b;\mathcal{Y},\mathcal{F})$ est un foncteur d'interpolation, le deuxième du fait que l'application $u\mapsto u\circ v$ est continue de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}'}(\mathcal{Y},\mathcal{E})$ (cf. proposition 1.2).

COROLLAIRE.- <u>La relation</u> $a\in L_{\mathfrak{S}'}(b;\mathcal{Y},\mathfrak{X})$ <u>et</u> $b\in L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ <u>entraîne</u> :

$$L_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) = L_{\mathfrak{S}'}(b;\mathcal{Y},\mathcal{E}) ,$$

pour tout couple $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{C}}$.

§ 7. N-uplets d'interpolation.

Tous les raisonnements que nous avons faits s'appliquent sans aucune modification à des "n-uplets d'interpolation" $\mathcal{E}$, c'est-à-dire à des ensembles de n-espaces localement convexes plongés dans un espace localement convexe. On définirait de façon semblable les espaces $E^{\cup}$, $E^{\cap}$, des n-foncteurs d'interpolation, des n-espaces intermédiaires, etc...

Problème :

On a vu que si A était un espace intermédiaire pour le couple $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{C}}$, la plus fine des topologies localement convexes faisant de A un $\mathfrak{S}$-espace intermédiaire était celle de $L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$, la moins fine est celle induite par la topologie de $E^{\cup}$. On peut se poser le problème de déterminer les topologies sur A moins fines que celle de $L_{\mathfrak{S}}(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$ et plus fines que celle induite par $E^{\cup}$, pour lesquelles A est un $\mathfrak{S}$-espace intermédiaire.

Rectificatif [9] (p.(1) lignes 8 à 1 à partir du bas) :
Signalons que, dans le second cas particulier figurant dans [9] (Cf. p (1), 2°) a. et b.), contrairement à notre affirmation, les hypothèses du théorème 1 ne sont pas toujours réalisées et que la conclusion est malheureusement inexacte. Nous en verrons plus loin un contre-exemple, en choisissant pour couple d'interpolation le couple d'espaces de distributions $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$, et pour espace intermédiaire l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur la droite réelle (Cf. p. 132 note (48))

-:-:-:-:-

CHAPITRE II

§ 1. Introduction.

Au chapitre précédent nous avons introduit la notion de foncteur d'interpolation. Dans ce chapitre nous allons étudier un nouveau type de foncteur de $\underline{\mathcal{C}}°$ dans $\underline{\mathcal{G}}$ qui sera, contrairement au cas précédent, contravariant. Nous serons amenés alors à introduire une méthode générale de construction de tels foncteurs en un certain sens duale des méthodes précédentes.

Les définitions qui suivent vont préciser notre propos :

DÉFINITION 2.1.- Nous désignerons par foncteur dual d'interpolation un foncteur contravariant de la catégorie $\underline{\mathcal{C}}°$ dans $\underline{\mathcal{G}}$ minoré par le foncteur $\mathcal{E} \mapsto E'_{\cap}$ et majoré par le foncteur $\mathcal{E} \mapsto E'_{\cup}$.

Ceci signifie qu'à tout couple d'interpolation $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{C}}°$, on associe un espace localement convexe $T'(\mathcal{E})$ tel que :

1) $(E_{\cup})' \leqq E'_{\cap} \leqq T'(\mathcal{E}) \leqq E'_{\cup} \leqq (E_{\cap})'$

2) Soit $\mathcal{F}$ un autre couple de $\underline{\mathcal{C}}°$, si u est dans $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, l'application ${}^tu = ({}^tu_1 , {}^tu_2)$ qui est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{F}',\mathcal{E}')$ se prolonge canoniquement en un élément de $\mathcal{L}(T'(\mathcal{F}),T'(\mathcal{E}))$.

DÉFINITION 2.2.- Un couple de deux espaces localement convexes (A,B) possède la propriété d'interpolation duale par rapport à $(\mathcal{E},\mathcal{F})$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ couples de $\underline{\mathcal{C}}°$ si:

1) $E'_{\cap} \leqq A \leqq E'_{\cup}$

$F'_{\cap} \leqq B \leqq F'_{\cup}$

2) Pour tout élément u de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, l'application ${}^tu$ définit par prolongement un élément de $\mathcal{L}(B,A)$.

On définit alors la propriété de $\mathfrak{S}$-interpolation duale, celle de $\mathfrak{S}$-espace intermédiaire dual, en analogie avec les définitions du chapitre I (§ 2).

Soit T un foncteur d'interpolation. On peut lui associer un foncteur contravariant T^* de la catégorie $\underline{\mathcal{C}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$ défini par

$$T^*(\mathcal{E}) = (T(\mathcal{E}))'$$

pour $\mathcal{E} \in \underline{\mathcal{C}}$, et :

$$T^*.u = {}^t(T.u) ,$$

si $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ appartenant à $\underline{\mathcal{C}}$.

Soit T' un foncteur dual d'interpolation, $\mathcal{K}$ une classe d'éléments de $\mathcal{C}^{\circ}$.

DÉFINITION 2.3.- <u>On dit que</u> T <u>et</u> T' <u>sont en dualité algébrique sur</u> $\mathcal{K}$, <u>ce</u> qu'on écrit $T'_{\mathcal{K}} \underset{\text{alg}}{=} T^{*}_{\mathcal{K}}$, si :

<u>Pour tout</u> $\mathcal{E}$ <u>appartenant à</u> $\mathcal{K}$, <u>il existe un isomorphisme d'espace vectoriel</u> $\alpha_{\mathcal{E}}$ <u>de</u> $T^{*}(\mathcal{E})$ <u>sur</u> $T'(\mathcal{E})$ <u>tel que pour tout</u> u <u>de</u> $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{C}}^{\circ}$, <u>le diagramme suivant commute</u> :

$$\begin{tikzcd}
(E^{\cup})' \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & T^{*}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{E}}"] & T'(\mathcal{E}) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & (E^{\cap})' \\
(F^{\cup})' \arrow[u, "{}^{t}u_{\cup}"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & T^{*}(\mathcal{F}) \arrow[u, "T^{*}u"'] \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{F}}"'] & T'(\mathcal{F}) \arrow[u, "T'u"'] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & (F^{\cap})' \arrow[u, "{}^{t}u_{\cap}"']
\end{tikzcd}$$

<u>Si en outre, pour tout</u> $\mathcal{E}$ <u>de</u> $\mathcal{K}$, $\alpha_{\mathcal{E}}$ <u>est un isomorphisme vectoriel topologique de</u> $(T(\mathcal{E}))'_{b}$ (resp. $(T(\mathcal{E}))'_{s}$) <u>sur</u> $T^{*}(\mathcal{E})$ (resp. $T^{*}(\mathcal{E})$ <u>muni de sa topologie affaiblie), on dira que</u> T <u>et</u> T^{*} <u>sont en dualité faible</u> (resp. forte) <u>ce qu'on écrira</u> $T'_{s,\mathcal{K}} = T^{*}_{\mathcal{K}}$) (resp. $T'_{\mathcal{K}} = T^{*}_{\mathcal{K}}$).

§ 2. Construction d'un foncteur dual.

Soit $\mathfrak{X}$ un élément de $\underline{\mathcal{C}}^{\circ}$, supposons qu'on ait construit un foncteur T du type décrit au paragraphe 3 chapitre 1 ([12]), vérifiant la condition que :

$$X'_{\cap} \otimes_{i} E^{\cap} \subseteq T(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E}) ,$$

pour tout $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathcal{C}}^{\circ}$.

Nous allons lui associer un foncteur dual d'interpolation qui sur une certaine classe d'éléments de $\underline{\mathcal{C}}^{\circ}$ sera en dualité avec T_{a} ([13]), $a \in X^{\cup}$.

Fixons un vecteur a de $X^{\cup}$. Soit b un vecteur de $E'_{\cup}$, le vecteur $a \otimes b$ définit de façon naturelle une forme linéaire sur $X'_{\cap} \otimes E^{\cap}$ continue pour la topologie de produit tensoriel inductif. Notons $\mathfrak{X}' \overset{T}{\otimes} \mathcal{E}$, l'espace $\mathfrak{X}' \otimes \mathcal{E}$ muni de la topologie induite par $T(\mathcal{E})$.

([12]) T n'est pas ici un foncteur d'interpolation, mais sert à le construire!

([13]) On note T_{a} le foncteur $\mathcal{E} \mapsto T(a;\mathcal{E})$.

DÉFINITION 2.4.- <u>On désigne par</u> $T'_o(a;\mathcal{E})$ <u>le sous-espace de</u> $E'_{\cup}$, <u>des vecteurs</u> b <u>tels que</u> $a \otimes b$ <u>se prolonge en une forme linéaire continue sur</u> $T(\mathcal{E})$, <u>muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues l'injection canonique de</u> $T'_o(a;\mathcal{E})$ <u>dans</u> $E'_{\cup}$ <u>et l'application</u> $b \mapsto a \otimes b$ <u>de</u> $T'_o(a;\mathcal{E})$ <u>dans</u> $\mathfrak{X}' \overset{T}{\otimes} \mathcal{E}$.

On a alors la :

PROPOSITION 2.1.-

$\mathcal{E} \mapsto T'_o(a;\mathcal{E})$ <u>définit un foncteur dual d'interpolation</u>.

<u>Démonstration</u> :

1) $T'_o(a;\mathcal{E}) \leq E'_{\cup}$, par définition.

2) $E'_{\cap} \leq T'_o(a;\mathcal{E})$.

Pour tout élément b de $E'_{\cap}$, nous allons montrer que $a \otimes b$ se prolonge en une forme linéaire continue $L_{a,b}$ sur $T(\mathcal{E})$, et que la fonction $b \mapsto L_{a,b}$ ainsi définie, est injective et continue de $E'_{\cap}$ dans $\mathfrak{X}' \overset{T}{\otimes} \mathcal{E}$.

Posons $L_{a,b}(u) = < b,u(a) >_{(E'_{\cap},E^{\cup})}$,

pour tout u dans $T(\mathcal{E})$. L'application $J_{\mathcal{E}} : u \mapsto u(a)$ étant continue de $T(\mathcal{E})$ dans $E^{\cup}$, $L_{a,b}$ appartient à $(T(\mathcal{E}))'$, sa restriction à $\mathfrak{X}' \otimes \mathcal{E}$ coïncide avec $a \otimes b$, c'est donc le prolongement cherché. Si $L_{a,b} = 0$, b s'annule sur $T(a;\mathcal{E})$, donc sur $E^{\cap}$; $E^{\cap}$ est dense dans $E^{\cup}$, puisque, par hypothèse, $\mathcal{E}$ est dans <u>$\mathcal{C}^o$</u>, donc $b = 0$.

Reste la continuité. On a :

$$L_{a,b} = b \circ J_{a,\mathcal{E}} ,$$

où $J_{a,\mathcal{E}}$ est l'application continue $u \mapsto u(a)$ de $T(\mathcal{E})$ dans $E^{\cup}$. Puisque $T(\mathcal{E}) \leq \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, l'image d'un borné de $T(\mathcal{E})$ est contenue dans la somme d'un borné de E_1 et d'un borné de E_2 . La topologie de $E'_{\cap} \underset{alg}{=} (E_{\cup})'$ est celle de la convergence uniforme sur les sommes de bornés de E_1 et E_2 , l'application

$$b \mapsto b \circ J_{a,\mathcal{E}}$$

est donc continue de $E'_{\cap}$ dans $(T(\mathcal{E}))'$ et <u>a fortiori</u> dans $(\mathfrak{X}' \overset{T}{\otimes} \mathcal{E})'$.

3) Soit $\mathcal{F}$ un deuxième couple de <u>$\mathcal{C}^o$</u>. $(T'_o(a;\mathcal{E}),T'_o(a;\mathcal{F}))$ possède la propriété d'interpolation duale (cf. définition 2.2) par rapport à $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ .C'est à-dire que pour tout u de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, ${}^t u$ applique continuement $T'_o(a;\mathcal{F})$ dans $T'_o(a;\mathcal{E})$.

Interprétons la définition de l'espace $T'_o(a;\mathcal{E})$.

Notons $G_\mathcal{E}$ l'application d'injection de $X'_\cap \otimes_i E^\cap$ dans $T(\mathcal{E})$, $J_\mathcal{E}$ l'application $u \mapsto u(a)$ de $T(\mathcal{E})$ dans $T(a;\mathcal{E})$, $L_\mathcal{E}$ l'application $b \mapsto a \otimes b$ de $E'_\cup$ dans $(X'_\cap \otimes_i E^\cap)'$. On a alors

$$T'_o(a;\mathcal{E}) = L_\mathcal{E}^{-1}[{}^tG_\mathcal{E}[(T(\mathcal{E}))']] .$$

Notons $i_{X'_\cap}$ l'identité de $X'_\cap$, $i_{X'_\cap} \otimes u$ envoie continuement $X'_\cap \otimes_i E^\cap$ dans $X'_\cap \otimes F^\cap$, et les deux diagrammes suivants commutent :

(A)
$$\begin{tikzcd}
T'(\mathcal{E}) \arrow[r, "{}^tG_\mathcal{E}"] & (X'_\cap \otimes_i E^\cap)' & E'_\cup \arrow[l, "L_\mathcal{E}"'] \\
T'(\mathcal{F}) \arrow[r, "{}^tG_\mathcal{F}"'] \arrow[u, "{}^tu"] & (X'_\cap \otimes_i F^\cap)' \arrow[u, "{}^t(i_{X'_\cap} \otimes u)"'] & F'_\cup \arrow[l, "L_\mathcal{F}"] \arrow[u, "{}^tu"']
\end{tikzcd}$$

En effet celui de gauche est transposé du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X'_\cap \otimes E^\cap \arrow[r, "G_\mathcal{E}"] \arrow[d, "i_{X'_\cap} \otimes u"'] & T(\mathcal{E}) \arrow[d, "u"] \\
X'_\cap \otimes_i F \arrow[r, "G_\mathcal{F}"'] & T(\mathcal{F}) .
\end{tikzcd}$$

quant à celui de droite, il commute pour les raisons qui suivent : l'espace $(X'_\cap \otimes F^\cap)'$ est par définition l'espace des formes bilinéaires séparément continues sur $X'_\cap \times F^\cap$. Si L est une telle forme, ${}^t(i_{X'_\cap} \otimes u)(L)$ est un élément de $\mathcal{B}(X'_\cap \times E^\cap)$, qui, lorsque a' est dans $X'_\cap$ et e dans $E^\cap$, prend la valeur $L(a',u(e))$. On en déduit que si Z est dans $F'_\cup$:

$$[{}^t(i_{X'_\cap} \otimes u)(L_\mathcal{F}(Z))](a',e) = \langle a',a \rangle_{(X'_\cap, X^\cup)} \langle {}^tu(Z),e \rangle_{(E'_\cup, E^\cap)} = L_\mathcal{E}({}^tu(Z)) .$$

Ceci démontre que ${}^tu$ envoie $T'(a,\mathcal{F})$ dans $T'(a;\mathcal{E})$ continuement. La réunion des propriétés 1, 2 et 3, établies ci-dessus, achève la démonstration.

REMARQUE 2.1.-

Notons $\alpha_\mathcal{E}$ l'injection canonique de $T'(a,\mathcal{E})$ dans $E'_\cup$. Dans une première définition nous avons muni $T'(a,\mathcal{E})$ de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $L_\mathcal{E} : b \mapsto a \otimes b$ et $\alpha_\mathcal{E}$. On a le schéma :

(B)
$$\begin{tikzcd} T'_o(a;\mathcal{E}) \arrow[r, "b \mapsto a \otimes b"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathcal{E}}"'] & (X'_{\cap} \overset{T}{\otimes} E^{\cap})' \\ & E'_{\cup} \end{tikzcd}$$

Munissons l'espace ${}^tG_{\mathcal{E}}[(T(\mathcal{E}))']$ de la topologie quotient de $(T(\mathcal{E}))'$ par le noyau de ${}^tG_{\mathcal{E}}$; appelons $\beta_{\mathcal{E}}$ l'injection canonique de ${}^tG_{\mathcal{E}}[(T(\mathcal{E}))']$ dans $(\mathfrak{X}' \otimes_i \mathcal{E})'$. Le diagramme suivant est commutatif

(C)
$$\begin{tikzcd} T'_o(a;\mathcal{E}) \arrow[r, "L_{\mathcal{E}} \,:\, b \to a \otimes b"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathcal{E}}"'] & {}^tG_{\mathcal{E}}[(T(\mathcal{E}))'] \arrow[dr, "\beta_{\mathcal{E}}"] & \\ & E'_{\cup} \arrow[r, "b \mapsto a \otimes b"'] & (\mathfrak{X}' \otimes_i \mathcal{E})' \end{tikzcd}$$

On peut alors munir $T'_o(a,\mathcal{E})$ de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $b \mapsto a \otimes b$ de $T'(a;\mathcal{E})$ dans ${}^tG[(T(\mathcal{E}))']$ et $\alpha_{\mathcal{E}}$ de $T'(a;\mathcal{E})$ dans $E'_{\cup}$.

DÉFINITION 2.4.- <u>On désigne par</u> $T'(a;\mathcal{E})$ <u>l'espace localement convexe ainsi obtenu et</u> T'_a <u>le foncteur</u> $\mathcal{E} \mapsto T'(a;\mathcal{E})$.

Le diagramme (A) étant formé d'applications continues, on a clairement la :

PROPOSITION 2.3.-

$\mathcal{E} \mapsto T'(a;\mathcal{E})$ <u>définit un foncteur dual d'interpolation.</u>

REMARQUE 2.2.-

Dans le cas où $X'_{\cap} \otimes E^{\cap}$ <u>est dense dans</u> $T(\mathcal{E})$, l'application ${}^tG_{\mathcal{E}}$ est injective, nous plongerons alors $(T(\mathcal{E}))'$ dans $(X'_{\cap} \otimes_i E^{\cap})'$. <u>L'espace</u> $T'(a;\mathcal{E})$ <u>apparaît alors comme le sous-espace de</u> $E'_{\cup}$ <u>des vecteurs</u> b <u>tels que</u> $a \otimes b$ <u>appartienne à</u> $(T(\mathcal{E}))'$, muni de la topologie localement convexe rendant continues les deux applications écrites ci-dessous

$$\begin{tikzcd} T'(a;\mathcal{E}) \arrow[r, "{}^tG^{-1} \circ L_{\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathcal{E}}"'] & (T(\mathcal{E}))' \\ & E'_{\cup} \end{tikzcd}$$

REMARQUE 2.3.-

Supposons comme nous l'avons déjà fait au premier chapitre que le couple $\mathfrak{X}$ soit de la forme $\mathcal{Y}'_c$, où $\mathcal{Y}$ est un couple de $\underline{\mathscr{C}}^\circ$. Donnons-nous un foncteur T de la catégorie $\underline{\mathscr{C}}$ dans $\underline{\mathscr{G}}$ vérifiant :

$$(\mathcal{E} \mapsto Y_\cap \otimes_i E^\cap) \leqq T \leqq (\mathcal{E} \mapsto \mathfrak{L}_\varepsilon(\mathcal{Y}'_c,\mathcal{E})) ,$$

(cf. ch.1 § 3). A l'aide de la construction faite ci-dessus associons lui le foncteur dual d'interpolation T'_a . Soit $\mathcal{E}$ un couple de $\underline{\mathscr{C}}^\circ$, l'espace $T'(a;\mathcal{E})$ est alors le sous-espace de $E'_\cup$ des vecteurs b tels que la forme linéaire continue $a \otimes b$ sur $(Y'_c)'_\cap \otimes_i E^\cap$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $T(\mathcal{E})$ .Nous allons en donner une définition plus simple et équivalente. Nous avons déjà noté que $(Y'_c)'_\cap \otimes_i E^\cap \leqq Y^\cap \otimes E^\cap$. Mais si a est dans $(Y_\cap)' \underset{alg}{=} Y'_\cup$ et si b est dans $(E^\cap)' \underset{alg}{=} E'_\cup$, $a \otimes b$ définit une forme linéaire continue sur $Y^\cap \otimes E^\cap$. On peut donc définir $T'(a;\mathcal{E})$ comme le sous-espace de $E'_\cup$ des éléments b tels que la forme linéaire continue $a \otimes b$ sur $Y^\cap \otimes_i E^\cap$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $T(\mathcal{E})$.

Notons $\widetilde{G}_\mathcal{E}$ l'injection de $Y^\cap \otimes_i E^\cap$ dans $T(\mathcal{E})$. On munit alors $T'(a;\mathcal{E})$ de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $b \mapsto b$ de $T'(a;\mathcal{E})$ dans $E'_\cup$ et $b \mapsto a \otimes b$ de $T'(a;\mathcal{E})$ dans ${}^t\widetilde{G}_\mathcal{E}[(T(\mathcal{E}))']$, ce dernier espace étant muni de la topologie quotient de $(T(\mathcal{E}))'$ par le noyau de l'application ${}^t\widetilde{G}_\mathcal{E}$. On obtient manifestement sur $T'(a;\mathcal{E})$ une topologie isomorphe à celle définie précédemment.

§ 3. Dualité des foncteurs T_a et T'_a .

Soit $\mathfrak{X}$ un couple d'interpolation de $\underline{\mathscr{C}}^\circ$. A tout foncteur T de $\underline{\mathscr{C}}$ dans $\underline{\mathscr{G}}$, satisfaisant aux conditions du chapitre I, § 3, et à tout vecteur a de $X^\cup$, on attache la classe $\mathcal{K}_{T,a}$ des couples d'interpolation $\mathcal{E}$ de $\underline{\mathscr{C}}^\circ$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $X'_\cap \otimes E^\cap$ <u>est dense dans</u> $T(\mathcal{E})$
2) <u>L'ensemble</u> $L_{a,\mathcal{E}}$ <u>des</u> u <u>de</u> $X'_\cap \otimes E^\cap$ <u>tels que</u> $u(a) = 0$ <u>est dense dans l'ensemble</u> $M_{a,\mathcal{E}}$ <u>des</u> u <u>de</u> $T(\mathcal{E})$ <u>tels que</u> $u(a) = 0$ <u>pour la topologie induite par celle de</u> $T(\mathcal{E})$.

On a la :

PROPOSITION 2.4.-

<u>Supposons que</u> $X'_\cap \otimes E^\cap$ <u>soit dense dans</u> $T(\mathcal{E})$, <u>alors on a les inclusions</u> :

$$(T(a;\mathcal{E}))' \leqq (E^\cap)' \quad \text{et} \quad (T(a;\mathcal{E}))' \subset T'(a;\mathcal{E}) ,$$

l'application $b \mapsto a \otimes b$ *est continue de* $(T(a;\mathcal{E}))'$ *dans* $(\mathfrak{X}' \overset{T}{\otimes} \mathcal{E})'$ *et dans* $(T(\mathcal{E}))'$

Notons tout de suite que si les espaces $(E_\cap)'$ et $E'_\cup$ sont isomorphes, en particulier (cf. proposition 1.1) si $E_2 = E^\cup$ ou si E_1 et E_2 sont du type $(\mathcal{FS})$ ou $(\mathcal{DS})$, on a le :

COROLLAIRE.- *Si* $X'_\cap \otimes E^\cap$ *est dense dans* $T(\mathcal{E})$ *et si* $(E_\cap)' = E'_\cup$

$$(T(a;\mathcal{E}))'_b \equiv T'(a;\mathcal{E}) .$$

Démonstration de la proposition :

Si $X'_\cap \otimes E^\cap$ est dense dans $T(\mathcal{E})$, $(T(a;\mathcal{E}))'$ est un sous-espace vectoriel de $E'_\cup$ c'est-à-dire de $(E_\cap)'$. En effet on a le :

LEMME.- *Si* $X'_\cap \otimes E^\cap$ *est dense dans* $T(\mathcal{E})$, $E^\cap$ *est dense dans* $T(a;\mathcal{E})$.

Démonstration :

Notons α l'injection canonique de $E^\cap$ dans $T(a;\mathcal{E})$.

$$\begin{tikzcd} X'_\cap \otimes E^\cap \arrow[r, "G_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "u \mapsto u(a)"'] & T(\mathcal{E}) \arrow[d, "u \mapsto u(a)"] \\ E^\cap \arrow[r, "\alpha"'] & T(a;\mathcal{E}) \end{tikzcd}$$

L'application $u \mapsto u(a)$ est continue et surjective de $T(\mathcal{E})$ dans $T(a;\mathcal{E})$; $G_{\mathcal{E}}(X'_\cap \otimes E^\cap)$ est dense dans $T(\mathcal{E})$ donc $\alpha(E^\cap)$ est dense dans $T(a;\mathcal{E})$, ce qui démontre le lemme.

Si b est dans $(T(a;\mathcal{E}))'$, $L_{\mathcal{E}}(b)$ est dans ${}^tG[(T(\mathcal{E}))']$. En effet, l'application $b \mapsto b \circ J_{\mathcal{E}}$, où $J_{\mathcal{E}}$ désigne l'application $u \mapsto u(a)$ de $T(\mathcal{E})$ sur $T(a;\mathcal{E})$, envoie continuement $(T(a;\mathcal{E}))'$ dans $(T(\mathcal{E}))'$, et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} (T(\mathcal{E}))' \arrow[r, "{}^tG_{\mathcal{E}}"] & {}^tG_{\mathcal{E}}[(T(\mathcal{E}))'] \\ & (T(a;\mathcal{E}))' \arrow[u] \arrow[ul, "b \mapsto b \circ J_{\mathcal{E}}"] \end{tikzcd} .$$

On a donc l'inclusion $(T(a;\mathcal{E}))' \subseteq T'(a;\mathcal{E})$. L'application $L_{\mathcal{E}} : b \mapsto a \otimes b$ est continue de $(T(a;\mathcal{E}))'$ dans ${}^tG_{\mathcal{E}}[(T(\mathcal{E}))']$. On voit de même, en considérant l'application continue $b \mapsto b \circ J_{\mathcal{E}} \circ G_{\mathcal{E}}$ de $(T(a;\mathcal{E}))'$ dans $(\mathfrak{X}' \overset{T}{\otimes} \mathcal{E})'$, que l'application $b \mapsto a \otimes b$ est continue de $(T(a;\mathcal{E}))'$ dans $(\mathfrak{X}' \overset{T}{\otimes} \mathcal{E})'$, ce qui démontre la proposition.

On a enfin la

PROPOSITION 2.5.-

<u>Les foncteurs</u> T_a et T'_a <u>sont en dualité algébrique</u> sur $\mathcal{K}_{a,T}$.

<u>Démonstration</u> :

Il s'agit de montrer que pour tout $\mathcal{E}$ de $\mathcal{K}_{a,T}$, on peut définir un isomorphisme d'espace vectoriel $\alpha_{\mathcal{E}}$ de $(T(a;\mathcal{E}))'$ sur $T'(a;\mathcal{E})$, en sorte que, pour tout $\mathcal{F}\in\mathcal{K}_{a,T}$ et tout $u\in\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(T(a,\mathcal{E}))' \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{E}}"] & T'(a;\mathcal{E}) \\
(T(a;\mathcal{F}))' \arrow[u, "{}^t(T.u)"] \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{F}}"'] & T'(a;\mathcal{F}) \arrow[u, "T.u"']
\end{tikzcd} .$$

D'après l'hypothèse de densité de $X'_\cap \otimes E^\cap$ dans $T(\mathcal{E})$, $T'(a;\mathcal{E})$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $(T(\mathcal{E}))'$ (cf. remarque 2.2) à l'aide de l'application ${}^tG_{\mathcal{E}}^{-1} \circ L_{\mathcal{E}}$. D'autre part, l'application ${}^tJ_{\mathcal{E}}$ de $(T(a;\mathcal{E}))'$ dans $(T(\mathcal{E}))'$ identifie, puisque $J_{\mathcal{E}}$ est un homorphisme surjectif, $(T(a;\mathcal{E}))'$ au polaire du noyau $M_{a;\mathcal{E}}$ de $J_{\mathcal{E}}$ pour la dualité $(T(\mathcal{E}),(T(\mathcal{E}))')$.

D'après la proposition 2.4 :

$$(M_{a;\mathcal{E}})^\circ_{(T(\mathcal{E}),(T(\mathcal{E}))')} \subset G_{\mathcal{E}}^{-1} \circ L_{\mathcal{E}}(T'(a;\mathcal{E})) .$$

On peut donc définir l'application

$$\alpha_{\mathcal{E}} = (G_{\mathcal{E}}^{-1} \circ L_{\mathcal{E}})^{-1} \circ {}^tJ_{\mathcal{E}}$$

de $(T(a;\mathcal{E}))'$ dans $T'(a;\mathcal{E})$. Elle est injective. Pour montrer que $\alpha_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme, il reste à montrer que

$$G_{\mathcal{E}}^{-1} \circ L_{\mathcal{E}}(T'(a;\mathcal{E})) \subset (M_{a;\mathcal{E}})^\circ_{(T(\mathcal{E}),(T(\mathcal{E}))')} .$$

Mais par hypothèse, $\tilde{M}_{a;\mathcal{E}}$ est dense dans $M_{a,\mathcal{E}}$ pour la topologie de $T(\mathcal{E})$ donc encore pour la topologie affaiblie de $T(\mathcal{E})$, il suffit alors de montrer que :

$${}^tG_{\mathcal{E}}^{-1}[\{a\} \otimes E'_\cup] = [G_{\mathcal{E}}((\{a\} \otimes E'_\cup)^\circ_{(\mathcal{B}(X'_\cap \times E^\cap),X'_\cap \otimes_i E^\cap)})]^\circ_{(T(\mathcal{E}),T'(\mathcal{E}))} ,$$

ou encore qu'on a l'inclusion :

$$(\{a\} \otimes E'_{\cup})^{\circ}_{\mathcal{B}(X'_{\cap} \times E^{\cap}, X'_{\cap} \otimes_i E^{\cap})} \subseteq \tilde{M}_{a,\mathcal{E}} .$$

Le premier ensemble n'est autre que celui des éléments u de $\mathfrak{X}' \otimes \mathcal{E}$ tels que $< u(a),y' >_{(E^{\cap},E'_{\cup})} = 0$ pour tout y' de $E'_{\cup}$, c'est-à-dire, puisque $E^{\cap}$ est séparé, tels que $u(a) = 0$. Les propriétés fonctorielles sont vérifiées par les applications $J_{\mathcal{E}}$, $G_{\mathcal{E}}$ et $L_{\mathcal{E}}$ (cf. diagramme $\mathbb{A}$) donc aussi par $\alpha_{\mathcal{E}}$; ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 2.4.-

On aurait pu examiner un problème plus général, considérer les couples duaux $\mathcal{E}'_{\tau}$ (14), $\mathcal{E}'_c$, ou $\mathcal{E}'_s$ au lieu de $\mathcal{E}'_b$, définir les τ-foncteurs, c-foncteurs ou s-foncteurs duaux d'interpolation, (les b-foncteurs étant ceux définis ci-dessus) comme des foncteurs contravariants de $\underline{\mathcal{C}}^{\circ}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$ tels qu'on ait :

$$(\mathcal{E} \mapsto E'_{\mathfrak{S},\cap}) \leqq T \leqq (\mathcal{E} \mapsto E'_{\mathfrak{S},\cup}) , \quad \mathfrak{S} = \tau, c \quad \text{ou} \quad s \quad \text{respectivement.}$$

On aurait vu que $\mathcal{E} \mapsto T'(a;\mathcal{E})$ définit un τ c, ou s-foncteur dual d'interpolation quand on munit $T'(a;\mathcal{E})$ de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues l'injection canonique de $T'(a;\mathcal{E})$ dans (E'_{τ}) (resp. $(E'_c)^{\cup}, (E'_s)^{\cup}$) et l'application $b \mapsto a \otimes b$ de $T'(a;\mathcal{E})$ dans

$$^tG[(T(\mathcal{E}))'_{\tau}] \text{ (resp. } ^tG[(T(\mathcal{E}))'_c], {}^tG[(T(\mathcal{E}))'_s]) .$$

Notons $^{\tau}T'(a;\mathcal{E})$, $^cT'(a;\mathcal{E})$, $^sT'(a,\mathcal{E})$ les espaces correspondants. On a les

PROPOSITION 2.6.-

$^sT'_a : \mathcal{E} \mapsto {}^sT'(a;\mathcal{E})$ <u>définit un s-foncteur dual d'interpolation,</u>

$^cT'_a : \mathcal{E} \mapsto {}^cT'(a;\mathcal{E})$ <u>un c-foncteur dual d'interpolation,</u>

$\mathcal{E} \mapsto {}^{\tau}T'(a;\mathcal{E})$ <u>un τ-foncteur dual d'interpolation.</u>

En vertu de la proposition 1.1, $(E'_{s,\cup} = (E_{\cap})'_s$ et $E'_{s,\cap} = (E_{\cup})'_s$. Il est clair que l'application $b \mapsto b \circ J_{\mathcal{E}}$ de $(T(a;\mathcal{E}))'_s$ dans $(T(\mathcal{E}))'_s$, définie dans la démonstration de la proposition 2.4, est un homorphisme sur son image, on a donc la

PROPOSITION 2.7.-

<u>Si</u> $X'_{\cap} \otimes E^{\cap}$ <u>est dense dans</u> $T(\mathcal{E})$, <u>alors</u> $(T(a;\mathcal{E}))'_s \leqq {}^sT(a;\mathcal{E})$, <u>l'application d'injection définit un isomorphisme de</u> $(T(a;\mathcal{E}))'_s$ <u>sur son image</u>.

COROLLAIRE 1.- Si $\mathcal{E}$ est dans la classe $\mathcal{K}_{a,T}$: $^sT'(a;\mathcal{E}) = (T(a;\mathcal{E}))'_s$ on en déduit

---

(14) τ désigne ici la topologie de Mackey.

le

COROLLAIRE 2.- Si $\mathcal{E}$ est dans la classe $\mathcal{K}_{a,T}$ et si $(E_{\cap})'_c = E'_{c,\cup}$, on a les inégalités :

$$(T(a;\mathcal{E}))'_c \leq {}^cT'(a;\mathcal{E}) \leq (T(a;\mathcal{E}))'_c \ .$$

(c'est-à-dire que la topologie de ${}^cT'(a;\mathcal{E})$ est compatible avec la dualité $(T(a;\mathcal{E}),T'(a;\mathcal{E}))$.

On aurait un corollaire analogue si on remplaçait c par τ .

REMARQUE 2.5.-

Nous avons choisi ici les topologies de convergence simple ou de convergence uniforme sur les parties bornées ou compactes, ce choix n'est pas limité par des considérations générales, mais ce sont là les topologies les plus utilisées dans la théorie des espaces localement convexes dont nous appliquons ici la théorie.

§ 4. Propriétés des espaces $T'(a;\mathcal{E})$

Soit $\mathcal{E}$ un couple de $\underline{\mathcal{C}^\circ}$.

PROPOSITION 2.8.-

Supposons $E'_{\cup}$ complet, si ${}^tG_{\mathcal{E}}[(T(\mathcal{E}))']$ est complet, alors $T'(a;\mathcal{E})$ l'est aussi.

Démonstration :

Reportons-nous au diagramme (C) de la remarque 2.1. Les espaces ${}^tG_{\mathcal{E}}[(T(\mathcal{E}))']$ et $E'_{\cup}$ sont plongés dans $(\mathfrak{X}' \otimes_i \mathcal{E})'$ à l'aide des applications $\beta_{\mathcal{E}}$ et $L_{\mathcal{E}}$. Par définition l'espace $T'(a,\mathcal{E})$ est isomorphe au noyau de l'application

$$\beta_{\mathcal{E}} - L_{\mathcal{E}} \quad \text{de} \quad {}^tG[(T(\mathcal{E}))'] \times E'_{\cup} \quad \text{dans} \quad (\mathfrak{X}' \otimes_i \mathcal{E})'$$

application qui est continue (en effet l'application $b_j \mapsto a \otimes b_j$ est continue de E'_j dans $(X'_{\cap} \otimes E^{\cap})'$ $(j = 1,2)$, comme transposée de l'application

$$(x',e) \mapsto x'(a) \quad \text{de} \quad X'_{\cap} \otimes_i E^{\cap} \quad \text{dans} \quad E_j) \ .$$

Il en résulte que $T'(a;\mathcal{E})$ est complet si ${}^tG_{\mathcal{E}}[(T(\mathcal{E}))']$ et $E'_{\cup}$ le sont.

De cette caractérisation on peut déduire d'autres propriétés des espaces $T'(a;\mathcal{E})$.

1) Supposons par exemple que $T(\mathcal{E})$ et $E^{\cap}$ soient des espaces Banachisables, alors ${}^tG_{\mathcal{E}}[(T(\mathcal{E}))']$ et $E'_{\cup}$ le sont aussi et par suite $T'(a;\mathcal{E})$ est un espace normable et complet.

2) Supposons maintenant que $T(\mathcal{E})$ et $E^{\cap}$ soient du type $(\mathcal{FS})$ (resp. $(\mathcal{DS})$),

alors ${}^{t}G_{\mathcal{E}}[(T(\mathcal{E}))']$ et $E'_{\cup}$ sont du type $(\mathcal{DF})$ (resp. $(\mathcal{FS})$) et par suite aussi $T'(a;\mathcal{E})$.

§ 5. Généralisation de la précédente définition. Définition des foncteurs, T'_A .

Reprenons la construction décrite au précédent paragraphe. Comme nous l'avons fait au précédent chapitre (cf. § 4, ch. I), remplaçons le vecteur a de $X^{\cup}$ par un sous-espace vectoriel A de $X^{\cup}$. Désignons par $T'_o(A;\mathcal{E})$ le sous-espace de $E'_{\cup}$ des vecteurs b tels que $a \otimes b$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $T(\mathcal{E})$, pour tout vecteur a de A . Nous désignerons par $T'_o(A;\mathcal{E})$ cet espace vectoriel muni de la topologie de limite projective des espaces $T'_o(a,\mathcal{E})$ et par $T'(A,\mathcal{E})$ la limite projective des espaces $T(a;\mathcal{E})$, $a \in A$. On a alors les :

PROPOSITION 2.9.- $\mathcal{E} \mapsto T'(A,\mathcal{E})$ et $\mathcal{E} \mapsto T'_o(A;\mathcal{E})$ définissent deux foncteurs duaux d'interpolation.

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate du

LEMME.- Soit t_i , $i \in I$, une famille de foncteurs duaux d'interpolation, le foncteur $t^{\cap}$ défini par $\mathcal{E} \mapsto \bigcap_{i \in I} t_i(\mathcal{E})$, où l'espace $\bigcap_{i \in I} t_i(\mathcal{E}) = t^{\cap}(\mathcal{E})$ est muni de la topologie limite projective des espaces $t_i(\mathcal{E})$, est un foncteur dual d'interpolation.

Démonstration :

Pour tout $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}^{\circ}$, on a par définition

$$E'_{\cap} \leqq t_i(\mathcal{E}) \leqq E'_{\cup} \quad \text{quel que soit } i \text{ dans } I .$$

On a donc encore en passant à la limite projective de ces injections :

$$E'_{\cap} \leqq t^{\cap}(\mathcal{E}) \leqq E'_{\cup} \quad .$$

La propriété duale d'interpolation d'un couple $(t^{\cap}(\mathcal{E}), t^{\cap}(\mathcal{F}))$, $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^{\circ}$, est évidente.
Nous noterons T'_A le foncteur $\mathcal{E} \mapsto T'(A,\mathcal{E})$.
Nous allons maintenant étudier la dualité des foncteurs T'_A et T_A
Notons tout d'abord le

LEMME.- $(T(A,\mathcal{E}))'_s = \varprojlim_{a \in A} (T(a;\mathcal{E}))'_s$.[15]

Démonstration :

L'espace $T(A,\mathcal{E})$ (cf. ch. I § 4) est défini comme limite inductive des espaces

---

[15] Le symbole $\varprojlim$ désigne la limite projective dans la catégorie des espaces localement convexes.

$T(a,\mathcal{E})$, $a\in A$, ou encore comme le quotient de $\underset{a\in A}{\oplus} T(a,\mathcal{E})$ par le sous-espace formé des vecteurs $\oplus\, u_i(a_i)$ tels que $\Sigma\, u_i(a_i) = 0$. Son dual faible s'identifie donc au polaire de ce sous-espace pour la dualité $(\oplus\, T(a;\mathcal{E}),\Pi(T(a,\mathcal{E}))')$ muni de la topologie induite par $\underset{a\in A}{\Pi}(T(a,\mathcal{E}))'_s$ ou encore à $\underset{a\in A}{\cap}(T(a;\mathcal{E}))'_s$, muni de la topologie de limite projective des espaces $(T(a,\mathcal{E}))'_s$; ce qui démontre le lemme.

En utilisant les propositions 2.4 et 2.5 on obtient alors les

PROPOSITION 2.10.- <u>Supposons que</u> $X'_\cap \otimes E^\cap$ <u>est dense dans</u> $T(\mathcal{E})$, <u>on a alors</u> :

$$(T(A,\mathcal{E}))' \leqq (E_\cap)' \qquad \text{et} \qquad (T(A;\mathcal{E}))' \subseteq T'(A,\mathcal{E}) \quad ;$$

<u>les applications</u> $b \mapsto a\otimes b$, $a\in A$, <u>sont continues de</u> $(T(A,\mathcal{E}))'$ <u>dans</u> $(T(\mathcal{E}))'$.

COROLLAIRE.- Si en outre $(E_\cap)' = E'_\cup$ on a l'inégalité :

$$(T(A,\mathcal{E}))'_b \leqq T'(A,\mathcal{E})$$

PROPOSITION 2.10.- <u>Les foncteurs</u> T_A et T'_A <u>sont en dualité algébrique sur</u> $\underset{a\in A}{\cap}\mathcal{K}_{a,T}$.

REMARQUE.- Dans le cas particulier où A était réduit à une droite nous avons défini (cf. remarque 2.3) les foncteurs ${}^sT'_a$, ${}^cT'_a$, ${}^\tau T'_a$. Nous allons pouvoir définir à partir de ceux-ci d'autres foncteurs ${}^sT'_A$, ${}^cT'_A$, ${}^\tau T'_A$ par passage à la limite projective comme nous l'avons fait ci-dessus ${}^{\mathfrak{S}}T'(A,\mathcal{E})$, $(\mathfrak{S} = s,\tau,c)$ apparaît ici comme muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continue les applications $b \mapsto b$ de $T'(A,\mathcal{E})$ dans $E'_\cap$ et $b \mapsto a\otimes b$, $(a\in A)$ de $T'(A,\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. On obtient ainsi un $\mathfrak{S}$-foncteur dual d'interpolation $(\mathfrak{S} = s,\tau,c)$

De la conjonction de la proposition 2.7 et du lemme figurant ci-dessus, on déduit aussitôt la :

PROPOSITION 2.11.- <u>Si</u> $X'_\cap \otimes E^\cap$ <u>est dense dans</u> $T(\mathcal{E})$,

$$(T(A,\mathcal{E}))'_s \leqq {}^sT'(A,\mathcal{E}) \quad ,$$

<u>l'application d'injection définit un isomorphisme de</u> $(T(A,\mathcal{E}))'_s$ <u>sur son image</u>.

Du même lemme et du corollaire 1 de la proposition 2.7, on déduit le

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> $\mathcal{E}$ <u>appartient à la classe</u> $\underset{a\in A}{\cap}\mathcal{K}_{a,T}$, <u>alors</u> :

$${}^sT'(A,\mathcal{E}) = (T(A,\mathcal{E}))'_s \quad .$$

Du corollaire 2 de la proposition 2.7 découle alors le

COROLLAIRE 2.- Si $\mathcal{E}$ appartient à la classe $\bigcap_{a\in A} \mathcal{K}_{a,T}$, et si en outre $E'_{c,U} = (E_\cap)'_c$, alors :

$$(T(A,\mathcal{E}))'_c \leq {}^cT'(A,\mathcal{E}) \leq (T(A;\mathcal{E}))'_s$$

(c'est-à-dire que la topologie de ${}^cT'(A;\mathcal{E})$ est compatible avec la dualité

$$(T(A,\mathcal{E}),T'(A,\mathcal{E}))) .$$

§ 6. Définition et propriétés générales des espaces $N_{\mathfrak{S}}(a,\mathfrak{X},\mathcal{E})$

Nous allons maintenant, comme nous l'avons fait au chapitre précédent, regarder les cas extrêmes où le foncteur T de la construction du paragraphe 5 est de la forme $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, $\mathfrak{X}$ couple d'interpolation de $\underline{\mathcal{C}}^o$ donné.
Soit $a\in X^U$, nous noterons $N_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ l'espace $T'(a,\mathcal{E})$ correspondant à ce foncteur. C'est alors l'espace des vecteurs b de E'_U tels que la forme linéaire $a \otimes b$ sur $X'_\cap \otimes E^\cap$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $b \mapsto b$ et $b \mapsto a \otimes b$, respectivement dans E'_U et ${}^tG_{\mathcal{E}}((\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathcal{E}))')$ (cf. définition 2.4').

Nous noterons $N_{\mathfrak{X},\mathfrak{S},a}$ le foncteur dual d'interpolation $\mathcal{E} \mapsto N_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$.

Faisons varier $\mathfrak{X}$ dans $\underline{\mathcal{C}}^o$. On a alors les propriétés suivantes des espaces $N_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$:

Si $\mathfrak{X}$ est un élément de $\underline{\mathcal{B}} \cap \underline{\mathcal{C}}^o$, pour tout $\mathcal{E}$ appartenant à $\underline{\mathcal{B}} \cap \underline{\mathcal{C}}^o$, on munit l'espace $N_b(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ de la norme :

$$\|b\|_{N_b(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})} = \operatorname{Sup} [\|b\|_{E'_U} ; \inf_{{}^tG_{\mathcal{E}}(L_{a,b})=a \otimes b} \|L_{a,b}\|_{(\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'}]$$

L'espace $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est muni de la norme :

$$\|b\|_{N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})} = \operatorname{Sup} [\|b\|_{E'_U} ; \inf_{{}^t\tilde{G}_{\mathcal{E}}(L_{a,b})=a \otimes b} \|L_{a,b}\|_{(\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))'}]$$

Les espaces ${}^tG_{\mathcal{E}}[(\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathcal{E}))']$ et ${}^t\tilde{G}_{\mathcal{E}}[(\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))']$ sont complets comme quotients d'espaces de Banach par des sous-espaces fermés, il résulte alors de la proposition 2.8 la :

PROPOSITION 2.12.- Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ deux éléments de $\underline{\mathcal{B}} \cap \underline{\mathcal{C}}^o$, les espaces $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ et $N_b(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ sont des espaces de Banach pour les normes définies ci-dessus.

On a encore la :

PROPOSITION 2.13.- Si $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ sont des couples d'espaces $(\mathcal{FS})$ (resp. $(\mathcal{DS})$) et s'il existe i et j (i=1 ou 2 ; j=1 ou 2) tels que X_i et E_j soient nucléaires, alors $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est du type $(\mathcal{DS})$ (resp. $(\mathcal{FS})$) . Si en outre tous les espaces X_i et E_j sont nucléaires, $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est nucléaire.

Démonstration :

En appliquant les résultats du paragraphe 4, il suffit de montrer que $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est du type $(\mathcal{FS})$ (resp. $(\mathcal{DS})$) dans les hypothèses de la proposition. Ceci résulte alors de A. Grothendieck (cf. précisément ch.I § 2).

§ 7. Dualité des foncteurs $N_{\mathfrak{X},\mathfrak{S},a}$ et $L_{\mathfrak{X},\mathfrak{S},a}$. Equiapproximation.

En nous reportant aux propriétés générales établies au paragraphe 3, nous allons pouvoir donner quelques critères pour que les foncteurs $N_{\mathfrak{X},\mathfrak{S},a}$ et $L_{\mathfrak{X},\mathfrak{S},a}$ soient en dualité. Nous noterons $\mathcal{K}^{\mathfrak{X}}_{a,\mathfrak{S}}$ la classe $\mathcal{K}_{a,T}$ (cf. § 3 propriété (I)), lorsque T est le foncteur $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_\mathfrak{S}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. On a la :

PROPOSITION 2.14.- Si $X'_\cap \otimes E^\cap$ est dense dans $\mathcal{L}_\mathfrak{S}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, alors

$$N_\mathfrak{S}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leq (E_\cap)' \quad \text{et} \quad (L_\mathfrak{S}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \subseteq N_\mathfrak{S}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \quad ,$$

l'application $b \mapsto a \otimes b$ est continue de $(L_\mathfrak{S}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ dans $(\mathcal{L}_\mathfrak{S}(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$.

En particulier si $\mathfrak{X} = \mathcal{Y}'_c$, où $\mathcal{Y}$ est dans $\mathcal{C}^\circ$, on a le

COROLLAIRE.- Si $Y^\cap \otimes E^\cap$ est dense dans $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{Y}'_c,\mathcal{E})$, alors :

$$N_\varepsilon(a;\mathcal{Y}'_c,\mathcal{E}) \leq (E_\cap)' \quad \text{et} \quad (L_\varepsilon(a;\mathcal{Y}'_c,\mathcal{E}))' \subseteq N_\varepsilon(a;\mathcal{Y}'_c,\mathcal{E}) \quad ,$$

l'application $b \mapsto a \otimes b$ est continue de $L_\varepsilon(a;\mathcal{Y}'_c,\mathcal{E})$ dans $(\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{Y}'_c,\mathcal{E}))'$.

PROPOSITION 2.15.- Les foncteurs $L_{\mathfrak{X},\mathfrak{S},a}$ et $N_{\mathfrak{X},\mathfrak{S},a}$ sont en dualité sur $\mathcal{K}^{\mathfrak{X}}_{a,\mathfrak{S}}$.

Nous allons maintenant étudier une classe remarquable de couples d'interpolation pour laquelle la dualité des foncteurs $L_{\mathfrak{S},a}$ et $N_{\mathfrak{S},a}$ est réalisée. Nous introduirons pour cela la notion d'équiapproximation qui généralise la notion d'approximation de Grothendieck ([19] ch. I § 5 n° 1).

DÉFINITION 2.5.- Un élément $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}^\circ$ vérifie la propriété d'équiapproximation si l'identité de $\mathcal{E}$, $i_\mathcal{E}$ est adhérente à $E'_\cap \otimes E^\cap$ pour la topologie induite par $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

Ceci signifie que pour tout compact K_i de tout voisinage V_i de 0 de E_i (i=1,2), il existe $u \in E'_\cap \otimes E^\cap$ tel que :

$$u.\, x_i - x_i \in V \quad ,$$

pour tout x_i de K_i , (i=1,2).

DÉFINITION 2.6.- Un élément $\mathcal{E}$ de $\mathscr{C}^\circ$ vérifie la propriété de s-équiapproximation si $i'_{\mathcal{E}}$ est adhérent à $E'_\cap \otimes E^\cap$ dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

En analogie avec une "proposition" de A. Grothendieck (cf. [19] ch. I § 5 n° 1), il vient la

PROPOSITION 2.16.- Soit $\mathcal{E}$ un couple d'interpolation de $\mathscr{C}^\circ$, les hypothèses suivantes sont équivalentes :

(A_1) condition d'équiapproximation.

(A_2) $E'_\cap \otimes E^\cap$ est dense dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

(A_3) Pour tout $\mathcal{F}$ de $\mathscr{C}^\circ$, $E'_\cap \otimes F^\cap$ est dense dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

(A_4) Pour tout $\mathcal{F}$ de $\mathscr{C}^\circ$, $F'_\cap \otimes E^\cap$ est dense dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{F},\mathcal{E})$.

(A_5) Pour tout couple d'interpolation $\mathcal{F}$ de $\mathscr{C}^\circ$, $E^\cap \otimes F^\cap$ est dense dans $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{E}'_c,\mathcal{F})$.

(A_6) Pour tout couple d'interpolation $\mathcal{F}$ de $\mathscr{C}^\circ$, $F^\cap \otimes E^\cap$ est dense dans $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{F}'_c,\mathcal{E})$.

(A_7) Pour tout couple d'interpolation $\mathcal{F}$ de $\mathscr{C}^\circ$, et tout ensemble de parties convexes équilibrées $\mathfrak{S}_i$ de F_i (i=1,2), si u transforme toute partie de F_i appartenant à $\mathfrak{S}_i$ en une partie relativement compacte de E_i , alors u est adhérente à $F'_\cap \otimes E^\cap$ dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{F},\mathcal{E})$.

Démonstration :

De façon triviale (A_3) et (A_4) impliquent (A_2) qui implique (A_1) . Montrons que (A_1) entraîne (A_4) . Soit donc $u \in \mathcal{L}(\mathcal{F},\mathcal{E})$, l'application $v \mapsto v \circ u$ est continue de $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{F},\mathcal{E})$ (cf. proposition 1.2), $i_{\mathcal{E}}$ est adhérente à $E'_\cap \otimes E^\cap$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$, donc u est adhérente à son image par l'application $v \mapsto v \circ u$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{F},\mathcal{E})$, laquelle image est contenue dans $F'_\cap \otimes E^\cap$.

On voit de même que (A_1) entraîne (A_3) . La propriété (A_6) est une conséquence de (A_7) en vertu du théorème de caractérisation des applications de $\mathcal{L}(\mathcal{F}'_c,\mathcal{E})$ (cf. [19] ch. I proposition 5).

Les propriétés (A_5) et (A_6) sont équivalentes. En effet, l'application $u \mapsto {}^t u$ définit un isomorphisme de $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{E}'_c,\mathcal{F})$ sur $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{F}'_c,\mathcal{E})$; il suffit alors de remarquer qu'elle applique $E^\cap \otimes F^\cap$ sur $F^\cap \otimes E^\cap$.

Maintenant (A_1) entraîne (A_7) . En effet, soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{F},\mathcal{E})$. Supposons que $u_i(K_i)$ soit relativement compact dans E_i , pour tout K_i de $\mathfrak{S}_i$ (i=1,2). L'application $v \mapsto v \circ u$ est alors continue de $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{F},\mathcal{E})$ et u est adhérente dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{F},\mathcal{E})$ à l'image de $E'_\cap \otimes E^\cap$ par cette application. Cette image est contenue dans $F'_\cap \otimes E^\cap$ ce qui démontre (A_7) .

Il suffit pour achever la démonstration de montrer que (A_6) implique (A_4). Appliquons (A_6) à $\mathcal{G} = \mathcal{F}'_c$ (16). Alors $\mathcal{G}'_c = (\mathcal{F}'_c)'_c \leq \mathcal{F}$. On a donc

$$\mathcal{L}(\mathcal{F},\mathcal{E}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{G}'_c,\mathcal{E}) \quad ;$$

$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{G}',\mathcal{E})$ induit sur $\mathcal{L}(\mathcal{F},\mathcal{E})$ la topologie $\mathcal{L}_c(\mathcal{F},\mathcal{E})$. D'après (A_6), $(F'_c)^\cap \otimes E^\cap$ est dense dans $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{G}'_c,\mathcal{E})$, donc <u>à fortiori</u> dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{F},\mathcal{E})$. Il suffit alors pour achever la démonstration de noter que

$$(F'_c)^\cap \underset{\text{alg}}{=} F'_\cap \,.$$

Nous avons remarqué ici que si $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{C}^\circ$, $\mathcal{E}'_c$ est aussi dans $\underline{\mathcal{C}}^\circ$. On a la :

PROPOSITION 2.17.- <u>Soit</u> $\mathcal{E}$ <u>un couple d'interpolation de</u> $\underline{\mathcal{C}}^\circ$ <u>vérifiant la propriété d'équiapproximation, alors</u> $\mathcal{E}'_c$ <u>est dans</u> $\underline{\mathcal{C}}^\circ$ <u>et vérifie lui aussi la propriété d'équiapproximation, quand</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>ont la topologie</u> γ <u>respectivement de</u> $((E_1)'_c)'_c$, <u>et de</u> $((E_2)'_c)'_c$.

<u>Démonstration</u> :

La transposition $u \mapsto {}^t u$ définit manifestement un isomorphisme algébrique de $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$ sur $\mathcal{L}_c(\mathcal{E}'_c,\mathcal{E}'_c)$ si $\mathcal{E} = (\mathcal{E}'_c)'_c$. Cet isomorphisme est un isomorphisme topologique (cf. [40]; p.10). Il applique $i_\mathcal{E}$ sur $i_{\mathcal{E}'_c}$ et $E'_\cap \otimes E^\cap$ sur $E^\cap \otimes E'_\cap$. Mais les espaces $(E'_c)'_\cap$ et $E^\cap$ sont algébriquement isomorphes comme nous l'avons déjà remarqué. On en déduit que si $\mathcal{E}$ possède la propriété d'équiapproximation $\mathcal{E}'_c$ possède cette même propriété. On a encore la :

PROPOSITION 2.18.- <u>Soit</u> $\mathcal{E}$ <u>un couple d'interpolation de</u> $\underline{\mathcal{C}}^\circ$, <u>les trois propriétés suivantes sont équivalentes</u>

(i) $\mathcal{E}$ <u>vérifie la propriété de s-équiapproximation</u>

(ii) <u>pour tout</u> $\mathcal{F}\in\underline{\mathcal{C}}^\circ$, $E'_\cap \otimes F^\cap$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{L}_s(\mathcal{E},\mathcal{F})$

(iii) <u>pour tout</u> $\mathcal{F}\in\underline{\mathcal{C}}^\circ$, $F'_\cap \otimes E^\cap$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{L}_s(\mathcal{F},\mathcal{E})$

<u>Démonstration</u> :

Supposons que $\mathcal{E}$ vérifie la propriété de s-équiapproximation. Soit $\mathcal{F}$ un couple de $\underline{\mathcal{C}}^\circ$, u un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$. L'application $v \mapsto v \circ u$ est continue de $\mathcal{L}_s(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{E},\mathcal{F})$, il résulte que u est adhérent à l'image de $E'_\cap \otimes E^\cap$, par cette application, laquelle est contenue dans $E'_\cap \otimes F^\cap$. La propriété (ii)

---

(16) $\mathcal{F}'_c$ est dans $\underline{\mathcal{C}}^\circ$, puisque $E_i \leq E^\cup$ implique que $(E^\cup)'$ est dense dans $(E_i)'$ pour toute topologie compatible avec la dualité (E_i,E_i) en particulier pour celle de $(E_i)'_c$ $(i=1,2)$.

est donc réalisée. On voit de même en considérant l'application continue

$$v \mapsto u \circ v \quad \text{de} \quad \mathcal{L}_s(\mathcal{E},\mathcal{E}) \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}_s(\mathcal{E},\mathcal{F})$$

que (i) est une conséquence de la propriété de s-équiapproximation. Réciproquement (i) et (ii) impliquent la propriété de s-équiapproximation (il suffit de remplacer $\mathcal{F}$ par $\mathcal{E}$) .

On a alors les

PROPOSITION 2.19.- Soit $\mathfrak{X}$ un couple d'interpolation de $\mathcal{C}^\circ$ vérifiant la propriété d'équiapproximation. Pour tout $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}^\circ$:

1) $(L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))' \leq (E_\cap)'$ et $(L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))' \subseteq N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$

L'application $b \mapsto a \otimes b$ est continue de $(L(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))'$ dans $(\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))'$

2) $(L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \leq (E_\cap)'$ et $(L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \subseteq N_c(a,\mathfrak{X},\mathcal{E})$

L'application $b \mapsto a \otimes b$ est continue de $L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ dans $(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$.

COROLLAIRE.- Si $\mathcal{E}$ est tel que $(E_\cap)' = E'_\cup$ on a les inégalités :

$$(L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))' \leq N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$$

$$(L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \leq N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$$

PROPOSITION 2.20.- Soit $\mathfrak{X}$ un élément de $\mathcal{C}^\circ$ vérifiant la propriété de s-équiapproximation, alors pour tout $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}^\circ$:

$$(L_s(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \leq (E_\cap)' \quad \text{et} \quad (L_s(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \subseteq N_s(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$$

L'application $b \mapsto a \otimes b$ est continue de $(L(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ dans $(\mathcal{L}_s(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$.

COROLLAIRE.- Si $\mathcal{E}$ est tel que $(E_\cap)' = E'_\cup$ on a l'inégalité

$$(L_s(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \leq N_s(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \ .$$

Démonstration des propositions :

Ces deux propositions résultent des propositions 2.4, 2.5, 2.16 et 2.18.

Démontrons maintenant les

LEMME 1.- Soient $\mathfrak{X}$ un couple d'interpolation de $\mathcal{C}^\circ$, a un vecteur de $X^\cup$. $\mathcal{K}^{\mathfrak{X}'_c}_{a,\varepsilon}$ et $\mathcal{K}^{\mathfrak{X}}_{a,c}$ (17) contiennent tous les couples de $\mathcal{C}^\circ$ vérifiant la propriété d'équiapproximation.

---

(17) cf. définition § 7, p. 40.

LEMME 2.- Soient $\mathfrak{X}$ un couple d'interpolation de $\mathcal{C}^\circ$, a un vecteur de $X^\cup$. $\mathcal{H}^{\mathfrak{X}}_{a,s}$ contient tous les couples de $\mathcal{C}^\circ$ vérifiant la propriété de s-équiapproximation.

Démonstration :

Les deux démonstrations sont semblables. Démontrons par exemple, l'affirmation relative à la classe $\mathcal{H}^{\mathfrak{X}'_c}_{a,\varepsilon}$. Si nous nous reportons à la définition des classes $\mathcal{H}^{\mathfrak{X}'_c}_{a,\varepsilon}$ nous voyons qu'il suffit de montrer que si $u \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ et si $u(a) = 0$, u est adhérent pour la topologie de $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ au sous-ensemble de $X^\cap \otimes E^\cap$ des fonctions s'annulant au point a . Mais l'application $v \mapsto v \circ u$ est continue de $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ (cf. proposition 1.2), $i_{\mathcal{E}}$ est adhérent à $E'_\cap \otimes E_\cap$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$, u est donc adhérent à l'ensemble des $v \circ u$ où v parcourt $E'_\cap \otimes E^\cap$, ensemble d'applications appartenant à $X^\cap \otimes E^\cap$ et s'annulant au point a ; ce qu'il fallait démontrer.

Appliquons alors les propositions 2.4 et 2.5, on a le

THÉORÈME 2.1.- Soit $\mathfrak{X}$ un couple d'interpolation de $\mathcal{C}^\circ$. Si $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathcal{C}^\circ$ vérifiant la propriété d'équiapproximation, alors,

1) pour tout a' de $X'_\cup$:

$$N_\varepsilon(a';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} (L_\varepsilon(a';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))' \leq (E_\cap)'$$

2) pour tout a de $X^\cup$:

$$N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} (L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \leq (E_\cap)' \quad .$$

Les applications $b \mapsto a' \otimes b$ et $b \mapsto a \otimes b$ sont respectivement continues de $(L_\varepsilon(a';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))'$ dans $(\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))'$ et de $(L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ dans $(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$
Du corollaire de la proposition 2.4 découle alors le :

COROLLAIRE 1.- Si $\mathcal{E}$ vérifie la propriété d'équiapproximation et si $(E_\cap)' = E'_\cup$, la topologie de $(L_\varepsilon(a';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))'$ est plus fine que celle de $N_\varepsilon(a';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$, celle de $(L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ est plus fine que la topologie de $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$.

COROLLAIRE 2.- Si $\mathcal{E}$ vérifie la propriété d'équiapproximation, si X_i et E_i $(i=1,2)$ sont du type $(\mathcal{DF})$, et s'il existe i et j (i=1 ou 2), (j=1 ou 2), tels que X_i et E_j soient nucléaires, alors

$$N_b(a;\mathfrak{X}',\mathcal{E}) = (L_b(a;\mathfrak{X}',\mathcal{E}))' \quad .$$

Démonstration :

D'après le corollaire 1 l'injection de $(L_b(a;\mathfrak{X}',\mathcal{E}))'$ dans $N_b(a;\mathfrak{X}',\mathcal{E})$ est continue, elle est surjective d'après le théorème 2.1. Mais dans nos hypothèses $L_b(a;\mathfrak{X}',\mathcal{E})$ est du type $(\mathcal{F}\mathcal{S})$ (cf. ch. I ; § 5) et $N_b(a;\mathfrak{X}',\mathcal{E})$ du type $(\mathcal{D}\mathcal{S})$ (cf. § 4). Le corollaire résulte alors de l'application du théorème des homomorphismes de Banach.

L'application de ce même théorème des homomorphismes conduit au :

COROLLAIRE 3.- Soit $\mathcal{E}$ un couple d'interpolation de $\underline{\mathcal{B}} \cap \underline{\mathcal{C}}^o$, vérifiant la propriété d'équiapproximation. Pour tout $\mathfrak{X}$ de $\underline{\mathcal{B}} \cap \underline{\mathcal{C}}^o$, on a :

$$N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) = L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) \quad .$$

La conjonction des propositions 2.18 et 2.5 donne le :

THÉORÈME 2.2.- Soit $\mathfrak{X}$ un couple d'interpolation de $\underline{\mathcal{C}}^o$. Si $\mathcal{E}$ est un élément de $\underline{\mathcal{C}}^o$ vérifiant la propriété de s-équiapproximation, alors, pour tout $a \in X^\cup$:

$$N_s(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})) \underset{\text{alg}}{=} (L_s(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \leq (E_\cap)' \quad ,$$

l'application $b \mapsto a \otimes b$ est continue de $(L_s(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ dans $(\mathcal{L}_s(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$.

On en déduit le

COROLLAIRE.- Si $\mathcal{E}$ vérifie la propriété de s-équiapproximation et si $(E_\cap)'=E'_\cup$, la topologie de $(L_s(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ est plus fine que celle de $N_s(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$

Posons maintenant la

DÉFINITION 2.7.- On désigne par ${}^cN_{\mathfrak{S}}(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$, l'espace ${}^cT'(a;\mathcal{E})$, où T est le foncteur $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ (cf. § 5).

Si A est un sous-espace vectoriel de $X^\cup$ contenant $X^\cap$, on définit avec des définitions évidentes (cf. § 5) les espaces ${}^bN_{\mathfrak{S}}(A;\mathfrak{X},\mathcal{E})$, ${}^cN_{\mathfrak{S}}(A;\mathfrak{X},\mathcal{E})$, ${}^sN_{\mathfrak{S}}(A;\mathfrak{X},\mathcal{E})$, auxquels on associe des foncteurs duaux d'interpolation.

On a alors des théorèmes de dualité analogue à ceux écrits ci-dessus. Contentons nous de noter que la réunion des propositions 2.10' et 2.16 donne le

THÉORÈME 2.3.- Soit $\mathcal{E}$ un couple d'interpolation de $\underline{\mathcal{C}}^o$, vérifiant la propriété d'équiapproximation. Si A et A' sont des sous-espaces vectoriels de $X^\cup$ et $X'_\cup$ respectivement, on a :

$$N_c(A;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} (L_c(A;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$$

$$N_\varepsilon(A';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} (L_\varepsilon(A';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))' \quad .$$

Si en outre $E'_\cup = (E^\cap)'$, on a les inégalités :

$$(L_c(A;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \leq N_c(A;\mathfrak{X},\mathcal{E})$$

$$(L_\varepsilon(A';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))' \leq N_\varepsilon(A';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) \quad .$$

Des propositions 2.18 et 2.10, on déduit en analogie avec le théorème 2.2 le

THÉORÈME 2.4.- Soient $\mathcal{E}$ un couple d'interpolation de $\mathcal{C}^\circ$ vérifiant l'hypothèse d'équiapproximation, A et A' deux sous-espaces vectoriels de $X^{\cup}$ et $X'_{\cup}$ respectivement. On a alors :

$$^{s}N_c(A;\mathfrak{X},\mathcal{E}) = (L_c(A;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'_s$$

$$^{s}N_\varepsilon(A';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) = (L_\varepsilon(A';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))'_s \quad .$$

Si en outre $(E^{\cap})'_c = E'_{c,\cup}$, la topologie de $^{c}N_c(A;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ (resp. de $^{c}N_\varepsilon(A;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$) est compatible avec la dualité

$$(N_c(A;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \text{ , } L_c(A;\mathfrak{X},\mathcal{E})) \text{ [resp. } (N_\varepsilon(A';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) \text{ , } L_\varepsilon(A';\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))] \quad .$$

§ 8. Équiapproximation.

Nous allons examiner quelques exemples de couples d'interpolation vérifiant la propriété d'équiapproximation.

Soit $\mathcal{E}\in\mathcal{C}^\circ$; soit $\mathbb{A}$ un ensemble de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ défini par des éléments de $E'_{\cap} \otimes E^{\cap}$. On suppose que la projection $\mathbb{A}_i$ de $\mathbb{A}$ sur $\mathcal{L}(E_i,E_i)$ (i=1,2) est équicontinue dans $\mathcal{L}(E_i,E_i)$. Pour que $\mathcal{E}$ vérifie les propriétés d'équiapproximation il suffit qu'il vérifie la propriété suivante :
$i_{\mathcal{E}}$ est adhérente à $\mathbb{A}$ pour la topologie de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$, où $\mathfrak{S}_i$ désigne l'ensemble des points d'un sous-ensemble dense de $\mathbb{A}_i$.

En utilisant cette remarque on a alors les :

PROPOSITION 2.21.- Soit X un espace localement compact, μ une mesure positive sur X , $1 \leq p_i \leq \infty$ (i=1,2) , L^{p_i} l'espace des classes de fonctions de puissance p_i^{e} - μ sommable sur X , alors le couple d'espaces de distributions (L^{p_1}, L^{p_2}) vérifie la propriété d'équiapproximation.

Démonstration :

Il suffit de reprendre la démonstration de la propriété d'approximation pour les espaces L^p (cf. [4] ch. I § 5, n° 3, proposition 4.1.) Soit $(K_1,\dots, K_n, H)$ une partition de X , chaque X_j étant relativement compact dans X , $\mu(K_j) > 0$ (j=1,..., n). Soit Φ_j la fonction caractéristique de K_j . Considérons l'opérateur continu $u_{\{K_j\}}$ de L^{p_i} dans $L^{p_1} \cap L^{p_2}$ défini par :

$$u_{\{K_j\}}(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\int f_j.\Phi_j \, dx}{\mu(K_j)} \cdot \Phi_j \quad .$$

Dans $\mathcal{L}(L^{p_i}, L^{p_i})$, la norme de $u_{\{K_j\}}$ est inférieure à 1, donc si $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble de ces opérateurs $u_{\{K_j\}}$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des ensembles équicontinus de $\mathcal{L}(L^{p_1}, L^{p_1})$ et de $\mathcal{L}(L^{p_2}, L^{p_2})$ respectivement. Il suffit en conséquence de montrer que si $f_1,\dots,f_k$ sont des fonctions continues à support compact, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe u dans $\mathcal{F}$ telle que :

$$\|u\, f_j - f_j\|_{L^{p_i}} \leq \varepsilon \quad ; \quad i=1,2 \quad ; \quad j=1,\dots,k \quad .$$

Soit K un compact contenant le support des f_i, $H = \complement K$. Par $\{K_j\}$ désignons une partition finie de K telle que les oscillations des f_j sur chaque K_ℓ soient majorées par $\inf\left(\frac{\varepsilon}{(\mu(K))^{1/p_1}}, \frac{\varepsilon}{(\mu(K))^{1/p_2}}\right)$. Soit $u_{\{K_j\}}$ l'application définie ci-dessus. Pour tout x de K_ℓ , on a

$$|u_{\{K_j\}}.f_k(x) - f_k(x)| < \inf\left(\frac{\varepsilon}{(\mu(K))^{1/p_1}}, \frac{\varepsilon}{(\mu(K))^{1/p_2}}\right) ,$$

ceci pour tout $\ell=1,2,\dots,k$, donc pour tout x de X , ce qui achève la démonstration.

Considérons maintenant un couple d'espaces de distributions (§ 2, ch. I) que nous supposerons être dans $\underline{\mathcal{C}^o}$; Les propriétés de régularisation et de troncature définies dans L. Schwartz vont nous permettre de fournir des exemples de couples de $\underline{\mathcal{C}^o}$ vérifiant la propriété d'équiapproximation.

En analogie avec les définitions de L. Schwartz, [40], nous poserons la :

DEFINITION 2.8.- <u>Un couple d'espaces de distributions</u> $\mathcal{H}$ <u>sera dit normal si</u> H_1 <u>et</u> H_2 <u>sont des espaces normaux de distributions et si en outre</u> $\mathcal{D}$ <u>est dense dans</u> $H^\cap$.

Si on considère un couple d'espaces normaux de distributions $\mathfrak{X} = (H_1, H_2)$, on peut alors considérer le couple des espaces de distributions (H_1', H_2') ou encore celui des espaces $((H_1)_c', (H_2)_c')$. Nous les noterons respectivement $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}_c'$. Si le couple $\mathcal{H}$ est normal, il est clair que $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}_c' = \mathcal{H}_c'$.

DÉFINITION 2.9.- <u>On dit qu'un couple d'espaces de distributions</u> $\mathcal{H}$ <u>a la propriété d'approximation par troncature si pour toute</u> α <u>de</u> $\mathcal{D}$, <u>la multiplication</u> $[\alpha] : \alpha \mapsto \alpha T$ <u>est une opération de</u> $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$, et si, lorsque α converge vers 1 dans l'espace $\underline{\mathcal{E}}$ (18) en restant bornée dans $\underline{\mathcal{B}}$ (19) , l'opérateur $[\alpha]$ converge

(18) $\underline{\mathcal{E}}$ = espace des fonctions indéfiniment différentiables sur R^n

(19) $\underline{\mathcal{B}}$ = espace des fonctions bornées de $\underline{\mathcal{E}}$

vers $i_{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{H})$.
On dit qu'un couple d'espaces de distributions $\mathcal{H}$ <u>a la propriété d'approximation</u> par régularisation, si, pour toute fonction ρ de $\mathcal{D}$, la régularisation

$$\{\rho\} : T \mapsto T * \rho ,$$

est une opération de $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$, et si, lorsque le support de $\rho \geqq 0$ converge vers l'origine en même temps que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx$ tend vers $1, \{\rho\}$ tend vers $i_{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

On obtient alors, en analogie avec une proposition de [40] (proposition 3 ; p.9) la :

PROPOSITION 2.22.- <u>Si $\mathcal{H}$ est un couple d'espaces normaux de distributions ayant la propriété d'approximation par troncature et régularisation, il a la propriété d'équiapproximation.</u>

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de transcrire la démonstration donnée dans le cas des espaces de distributions (cf. [40] préliminaires ; proposition 3). On montre qu'avec les hypothèses de la proposition, $i_{\mathcal{H}}$ est adhérente dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{H})$ à $\mathcal{L}(\mathcal{D}',\mathcal{D}')$, et on achève la démonstration en démontrant le

LEMME.- <u>Soit $\mathcal{H}$ un couple d'interpolation de $\mathcal{E}^\circ$, G_1 et G_2 deux sous-espaces localement convexes respectivement de H_1 et H_2 . Désignons par $\mathcal{G}$ le couple d'interpolation $\mathcal{G} = (G_1, G_2; H^\cup)$. Si dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{H})$, $i_{\mathcal{H}}$ est adhérent à $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$, et si $\mathcal{G}$ a la propriété d'équiapproximation, il en est de même de $\mathcal{H}$.</u>

<u>Démonstration</u> :

C'est une adaptation de la démonstration donnée dans [40] (préliminaires p. 7). Pour la commodité du lecteur, nous allons la donner.

Appliquons la proposition 2.16. Elle montre que $H'_\cap \otimes G^\cap$ est dense dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{G})$ donc <u>a fortiori</u> dans $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ muni de la topologie induite par $\mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{H})$, et $i_{\mathcal{H}}$ est adhérente à $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{H})$, d'où le résultat.

COROLLAIRE 1.- <u>Les couples d'espaces de distributions formés de deux quelconques des espaces suivants possèdent la propriété d'équiapproximation</u> : $\mathcal{D}^m$, $\mathcal{E}^m$ (m fini ou non), $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}_{L^p}$, L^p, $\mathcal{D}'_{L^p}$ $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_c$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}'_c$, $\mathcal{S}'_{(\Gamma)}$ (cf. [31] préliminaires proposition 3 corollaire).

De la proposition 4 de [40] (p.10), on déduit encore le :

COROLLAIRE 2.- <u>Si H est un espace de distribution normal ayant la topologie γ de $(H'_c)'_c$ et possédant la propriété d'approximation par troncature et régularisation, le couple (H,H'_c) a la propriété d'équiapproximation.</u>

De [40] (préliminaires proposition 4), on déduit enfin le :

COROLLAIRE 3.- Soit $\mathcal{H}$ un couple d'espaces de distributions normal, tel que H_1 et H_2 aient la topologie γ. S'il possède la propriété d'approximation par troncature et régularisation, le couple $\mathcal{H}'_c$ est normal et possède la propriété d'équiapproximation.

§ 9. Conditions d'existence d'un espace intermédiaire.

Nous allons voir quelles conclusions on peut tirer de l'étude des espaces $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ pour l'étude des espaces intermédiaires pour le couple $\mathcal{E}$. Bien entendu le problème de savoir s'il existe des espaces intermédiaires pour un couple $\mathcal{E}$, distincts de $E^{\cap}$ et de $E^{\cup}$, n'offre d'intérêt que lorsque E_1 et E_2 sont respectivement isomorphes à chacun de ces espaces. Nous ferons donc dans ce paragraphe l'hypothèse suivante :

$$E_1 = E^{\cap} \qquad \text{et} \qquad E_2 = E^{\cup} .$$

Donnons les

DÉFINITION 2.10.- Nous dirons qu'un espace intermédiaire pour le couple d'interpolation $\mathcal{E}$ est topologiquement trivial s'il a la topologie induite par celle de $E^{\cup}$; qu'il est faiblement topologiquement trivial si sa topologie est celle induite par la topologie faible de $E^{\cup}$; qu'il est algébriquement trivial s'il est algébriquement égal à $E^{\cap}$ ou à $E^{\cup}$; qu'il est non trivial s'il est algébriquement et topologiquement non trivial.

On a tout d'abord la

PROPOSITION 2.23.- Soit $\mathcal{E}$ un couple d'interpolation de $\mathcal{C}^o$ vérifiant la propriété d'équiapproximation. Une condition nécessaire et suffisante pour que tout c-espace intermédiaire pour $\mathcal{E}$, distinct de $E^{\cap}$, soit faiblement topologiquement trivial, est que pour tout a de $E^{\cup}$ n'appartenant pas à $E^{\cap}$:

$$N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{alg}{=} E'_{\cap} .$$

Démonstration :

Pour tout a de $E^{\cup}$, $a \notin E^{\cap}$, on a :

$$E^{\cap} \leq L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \leq E^{\cup} .$$

Pour que l'application de $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $E^{\cup}$ soit un homomorphisme faible, il faut et il suffit que l'image de sa transposée soit faiblement fermée dans $(L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}))'_s$ donc encore dans $(L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}))'_c$. Puisque $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \mapsto E^{\cup}$ est injective, $(E^{\cup})'$ est faiblement dense dans $(L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}))'_s$. Donc il faut et il suffit que $(E^{\cup})' \underset{alg}{=} (L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}))'$, ou encore, en utilisant le théorème de dualité, que $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{alg}{=} E'_{\cap}$. Donc pour que tout c-espace intermédiaire H définisse un homomorphisme faible de H dans $E^{\cup}$, il est nécessaire que pour tout a de $E^{\cup}$, $a \notin E^{\cap}$, $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{alg}{=} E'_{\cap}$.

Réciproquement, supposons que pour tout a de $E^{\cup}$, a n'appartenant pas à $E^{\cap}$, $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{alg}{=} E'_{\cap}$. Le raisonnement fait ci-dessus, nous montre que pour tout a de $E^{\cup}$ n'appartenant pas à $E^{\cap}$, l'injection de $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $E^{\cup}$ est un homomorphisme faible. Il en est de même pour tout c-espace intermédiaire distinct de $E^{\cap}$. En effet, soit H un tel espace intermédiaire, on a les inégalités :

$$E^{\cap} \leqq L_c(H;\mathcal{E},\mathcal{E}) \leqq H \leqq E^{\cup} ,$$

et $L_c(H;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{alg}{=} H$. De plus, l'injection de $L_c(H;\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $E^{\cup}$ est encore un homomorphisme faible puisque

$$(L_c(H;\mathcal{E},\mathcal{E}))' \underset{alg}{=} \bigcap_{a \in H} N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) = (E^{\cup})'$$

(cf. proposition 2.10). On en déduit que l'application naturelle de H dans $E^{\cup}$ est encore un homomorphisme faible ; ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE 1.- <u>Si la condition de la proposition est réalisée pour tout c-espace intermédiaire,</u> $H \neq E^{\cap}$, on a $H' \underset{alg}{=} E'_{\cap}$.

REMARQUE.- Notons que si H est un c-espace intermédiaire pour le couple $\mathcal{E}$, E est faiblement dense dans $L_c(H;\mathcal{E},\mathcal{E})$, puisque $\mathcal{E}$ vérifie la propriété d'équi-approximation (cf. lemme de la proposition 2.4), donc aussi dans H qui a une topologie moins fine (cf. théorème 1.1). Il en résulte que H' est toujours un espace intermédiaire dual (cf. définition 2.2).

COROLLAIRE 2.- <u>Supposons que</u> $E^{\cup}$ <u>a la topologie de Mackey. Si la condition de la proposition est réalisée, tout c-espace intermédiaire semi-réflexif distinct de</u> $E^{\cap}$, <u>est topologiquement trivial</u>.

<u>En particulier si</u> $E^{\cup}$ <u>est complet, il n'existe pas d'espace c-intermédiaire semi-réflexif complet algébriquement distinct de</u> $E^{\cap}$ <u>ou</u> $E^{\cup}$.

<u>Démonstration</u> :

Soit H un c-espace intermédiaire semi-réflexif distinct de $E^{\cap}$ si la condition de la proposition est réalisée, l'application de H dans $E^{\cup}$ est un homomorphisme faible donc un homomorphisme de H muni de la topologie de Mackey dans $E^{\cup}$, puisque, par hypothèse, celui-ci est muni de la topologie de Mackey. L'espace H étant semi-réflexif a une topologie moins fine que celle de Mackey, d'où résulte la première assertion du corollaire.

La topologie de H est, dans ces conditions, isomorphe à la topologie induite par $E^{\cup}$. Puisque par hypothèse $\mathcal{E}$ appartient à $\underline{\mathcal{C}^{\circ}}$, H est dense dans $E^{\cup}$, si donc H et $E^{\cup}$ sont complets, $H = E^{\cup}$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3.- <u>Supposons que</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>sont nucléaires tonnelés complets</u> E_1' <u>et</u> E_2' <u>étant du type</u> $(\mathcal{Y})$ <u>et complets, et que la condition de la proposition soit réalisée. Si</u> $L_c(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$ <u>est quasi-complet,</u> $A \neq E^{\cap}$, $L_c(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$ <u>est topologiquement trivial</u>.

<u>Démonstration</u> :

C'est une conséquence du corollaire 2. En effet avec les hypothèses de la proposition, les espaces $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ sont tous du type $(\mathcal{Y})$ (cf. propriétés des espaces $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$; ch. I § 2), donc aussi les espaces $L_c(A;\mathcal{E},\mathcal{E})$. Ces espaces sont quasi complets du type $(\mathcal{Y})$ donc semi-réflexifs [18].
On applique alors le corollaire 2.

Supposons maintenant que E_1 et E_2 ont la topologie γ de $((E_1)_c')_c'$ et $((E_2)_c')_c'$ respectivement et que $\mathcal{E}$ soit dans $\underline{\mathcal{C}^{\circ}}$. Alors il est clair que dans le cadre où nous nous sommes placés $(E_1 = E^{\cap}, E_2 = E^{\cup})$, on a $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_c')_c'$. Pour un tel couple on a la :

PROPOSITION 2.24.- <u>Supposons que</u> $\mathcal{E}$ <u>vérifie l'hypothèse d'équiapproximation,</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>ayant la topologie</u> γ ; <u>alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>Pour tout</u> a <u>de</u> $E^{\cup}$, $a \notin E^{\cap}$, $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} E_{\cap}'$.
(ii) <u>Pour tout</u> b <u>de</u> $E_{\cup}'$, $b \notin E_{\cap}'$, $N_c(b;\mathcal{E}_c';\mathcal{E}_c') \underset{\text{alg}}{=} E^{\cup}$.
(iii) <u>Tout c-espace intermédiaire</u> H <u>pour le couple</u> $\mathcal{E}$, <u>distinct de</u> $E^{\cap}$, <u>est topologiquement faiblement trivial</u>.
(iv) <u>Tout c-espace intermédiaire</u> H <u>pour le couple</u> $\mathcal{E}_c'$, <u>distinct de</u> $E_{\cap}'$, <u>est topologiquement faiblement trivial</u>.

<u>Démonstration</u> :

D'après la proposition 2.23, les propriétés (i) et (iii) sont équivalentes. Puisque $\mathcal{E}_c'$ vérifie la propriété d'équiapproximation si $\mathcal{E}$ la vérifie (cf. proposition 2.17) et puisque $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_c')_c'$, les propriétés (ii) et (iv) sont équivalentes. Montrons que (i) implique (ii) et réciproquement. Puisque $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_c')_c'$, la transposition, comme nous l'avons déjà noté (cf. proposition 2.17), définit un isomorphisme algébrique et topologique de $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$ sur $\mathcal{L}_c(\mathcal{E}_c',\mathcal{E}_c')$, elle applique $E_{\cap}' \otimes E^{\cap}$ sur $E^{\cap} \otimes E_{\cap}'$. On en déduit le :

LEMME.- <u>Supposons que</u> $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_c')_c'$, $\mathcal{E}$ <u>vérifiant en outre la propriété d'équiapproximation. Pour que</u> $a \in N_c(b;\mathcal{E},\mathcal{E})$ <u>il faut et il suffit que</u> $b \in N(a;\mathcal{E}_c',\mathcal{E}_c')$.

Reprenons la démonstration de la proposition et supposons que (i) soit réalisé. Soit $b \in E'_{\cup}$, $b \notin E'_{\cap}$. D'après le lemme, pour que $a \in N_c(b;\mathcal{E}'_c,\mathcal{E}'_c)$ il faut et il suffit que $b \in N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$. Supposons que $a \notin E_{\cap}$, alors $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) = E'_{\cap}$, donc $b \in E'_{\cap}$, ce qui contredit l'hypothèse. Ceci signifie que $N_c(b;\mathcal{E}'_c,\mathcal{E}'_c) = E_{\cap}$ pour tout $b \in E^{\cup}$, $b \notin E^{\cap}$. On a donc (ii). Puisque $\mathcal{E} = (\mathcal{E}'_c)'_c$, on en déduit l'équivalence de (ii) et de (i).

COROLLAIRE.- <u>Si l'une des conditions de la proposition est réalisée, tout c-espace intermédiaire</u> H <u>pour</u> $\mathcal{E}$, $H = E^{\cap}$, <u>s'identifie algébriquement au dual de</u> $E'_{\cap}$ <u>muni d'une topologie de c-espace intermédiaire pour</u> $\mathcal{E}'_c$; <u>tout c-espace intermédiaire pour</u> $\mathcal{E}'_c$, <u>s'identifie algébriquement au dual de</u> $E^{\cap}$, <u>muni d'une topologie de c-espace intermédiaire pour le couple</u> $\mathcal{E}$.

<u>Démonstration</u> :

Démontrons par exemple le premier point. La propriété (iii) étant réalisée, si H est un c-espace intermédiaire pour $\mathcal{E}$, $H \neq E^{\cap}$, $H'_c \underset{\text{alg}}{=} E'_{c,\cap}$ .On a d'autre part $H \underset{\text{alg}}{=} (H'_c)'_c$. Donc H est le dual de $E'_{\cap}$ muni d'une topologie moins fine que celle de $E'_{c,\cap}$, H étant c-intermédiaire pour le couple $\mathcal{E}$, H'_c est un espace intermédiaire pour le couple $\mathcal{E}'_c$; il induit sur $E'_{\cap}$ une topologie de c-espace intermédiaire, puisque manifestement toute topologie d'espace intermédiaire moins fine qu'une topologie de c-espace intermédiaire (ici celle de $E'_{\cap,c}$) est encore c-intermédiaire, C.Q.F.D.

Donnons maintenant une condition pour que tout espace intermédiaire pour un couple d'interpolation $\mathcal{E}$ soit algébriquement trivial. On a la

PROPOSITION 2.25.- <u>Soit</u> $\mathcal{E}$ <u>un couple d'interpolation de</u> $\underline{\mathscr{C}^{\circ}}$ <u>vérifiant la propriété d'équiapproximation. Pour qu'il n'existe pas d'espace intermédiaire pour</u> $\mathcal{E}$ <u>algébriquement non trivial, il faut et il suffit que pour tout</u> a <u>de</u> $E^{\cup}$ <u>n'appartenant pas à</u> $E^{\cap}$, <u>l'injection de</u> $E'_{c,\cap}$ <u>dans</u> ${}^cN_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ <u>soit un homomorphisme faible</u>.

<u>Démonstration</u> :

Appliquons le théorème 1.1. Pour qu'il n'existe pas d'espace intermédiaire différent de E_1 ou E_2 , il faut et il suffit que pour tout a de $E^{\cup}$, n'appartenant pas à $E^{\cap}$, $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} E^{\cup}$. Puisque $\mathcal{E}$ vérifie l'hypothèse d'équiapproximation, $E^{\cap}$ est faiblement dense dans $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$. Cette condition équivaut donc à dire que $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ est faiblement fermé dans $E^{\cup}$, ou encore puisque $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} ({}^cN_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}))'$ (cf. corollaire 2, proposition 2.7), que

$$E'_{\cap,c} \mapsto {}^cN_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$$

est un homomorphisme faible. C.Q.F.D.

Supposons à nouveau que le couple d'interpolation $\mathcal{E}$ est tel que E_1 , E_2 , ont la topologie γ , alors $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ est un espace intermédiaire pour le couple $\mathcal{E}'_c$ puisque $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E}) = \mathcal{L}_c(\mathcal{E}'_c,\mathcal{E}'_c)$ (cf. [31]).
Donc pour que la condition de la proposition soit réalisée, il est nécessaire que $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) = E'_\cap$. C.Q.F.D.

On en déduit le :

COROLLAIRE.- On suppose que E_1 et E_2 ont la topologie γ . On suppose en outre que $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} E'_\cap$ pour tout $a\in E'_\cap$,

1) si pour tout $a\in E'_\cup$, $a\notin E'_\cap$, ${}^cN_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \leq (E_\cup)'_s$, tout espace intermédiaire pour $\mathcal{E}$ coïncide algébriquement avec $E^\cap$ ou $E^\cup$.

2) s'il existe $a\notin E_\cap$ tel que ${}^cN_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E} \nleq (E_\cup)'_s$, $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ est distinct de $E^\cup$ et l'injection $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E}) \mapsto E^\cup$ est un homomorphisme faible.

REMARQUE 2.6.- Plaçons-nous encore dans le cadre décrit ci-dessus où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}'_c)'_c$
Supposons que $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ soit distinct de $E'_\cap$ pour un vecteur a n'appartenant pas à $E^\cap$, alors $N_c(b;\mathcal{E}'_c,\mathcal{E}'_c)$ est différent de $E^\cap$. $N_c(b;\mathcal{E}'_c,\mathcal{E}'_c)$ est un espace intermédiaire pour le couple $\mathcal{E}$. Dans la pratique, nous verrons que la condition suivante est souvent réalisée :

Pour tout b de $E^\cup$ n'appartenant pas à $E^\cap$, $N_c(b;\mathcal{E}'_c,\mathcal{E}'_c) \neq E^\cup$. Si cette condition est réalisée, on déduira de l'existence d'un espace $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ distinct de $E'_\cap$, pour un vecteur de $E^\cup$ n'appartenant pas à $E^\cap$, l'existence d'un espace intermédiaire pour le couple d'interpolation $\mathcal{E}$, distinct de $E^\cap$ et de $E^\cup$.

§ 10. Quelques exemples.

I. Interpolation pour des couples d'espaces de suites.

Nous nous proposerons de regarder ce que deviennent les définitions des espaces $N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ quand $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ sont des couples d'espaces de suites multiples d'ordre p et q respectivement (cf. définition 1.3).

DÉFINITION 2.11.- Nous dirons qu'un couple d'espaces de suites multiples d'ordre p , $\mathcal{E}$, est normal si :

1) l'espace des suites finies $\bigoplus_{\mathbb{N}^p} \mathbb{C}$ est contenu dans $E^\cap$,

2) $\bigoplus_{\mathbb{N}^p} \mathbb{C}$ est dense dans $E^\cap$, E_1 et E_2 .

Toute application linéaire de $\bigoplus_{\mathbb{N}^p} \mathbb{C}$ dans un espace localement convexe étant continue, on a les inégalités :

$$\underset{\mathbb{N}^p}{\oplus} \mathbb{C} \leqq E^{\cap} \leqq E_i \leqq E^{\cup} \leqq \mathbb{C}^{\mathbb{N}^p} \qquad (i=1,2).$$

Et en transposant ces inégalités, on voit que :

$$\underset{\mathbb{N}^p}{\oplus} \mathbb{C} \leqq E'_{\cap} \leqq E'_i \leqq E'_{\cup} \leqq (E^{\cap})' \leqq \mathbb{C}^{\mathbb{N}^p} \qquad (i=1,2).$$

C'est-à-dire que le couple $\mathcal{E}'$ est un couple d'espaces de suites multiples d'ordre p. On verrait, par un raisonnement analogue à celui fait dans le cas des couples normaux d'espaces de distributions (cf. proposition 2.22, corollaire 3), que $\mathcal{E}'_c$ est encore un couple normal d'espaces de suites multiples d'ordre p.

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ deux couples normaux d'espaces de suites multiples d'ordres respectifs p et q. Alors on a manifestement l'inégalité :

$$\mathcal{L}_c(X_i,E_i) \leqq \mathcal{L}_c(\underset{\mathbb{N}^p}{\oplus} \mathbb{C}, \mathbb{C}^{\mathbb{N}^q}) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q} .$$

On appellera matrice de $A \in \mathcal{L}_c(X_i,E_i)$, la suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q}$ qui lui est associée dans cet isomorphisme.

En identifiant un élément de $\mathcal{L}_c(X_i,E_i)$ avec la matrice qu'il représente, on peut donc considérer le couple d'interpolation formé des espaces de suites multiples d'ordre $(p+q)$, $(\mathcal{L}_c(X_1,E_1)\ ,\ \mathcal{L}_c(X_2,E_2))$. Puisque l'espace des suites finies $\underset{\mathbb{N}^p}{\oplus} \mathbb{C}$ est dense dans $X^{\cap}$, dire que deux applications linéaires continues de X_i dans E_i, i=1,2 respectivement, coïncident sur $X^{\cap}$, équivaut à dire qu'elles coïncident sur $\underset{\mathbb{N}^p}{\oplus} \mathbb{C}$, donc que <u>leurs matrices sont égales</u>. En d'autres termes, l'injection de $\mathcal{L}_c(X_i,E_i)$, qui à un élément associe sa matrice, applique biunivoquement $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ sur l'espace intersection du couple d'espaces de suites $(\mathcal{L}_c(X_1,E_1)\ ,\ \mathcal{L}_c(X_2,E_2))$. Nous identifierons ces deux espaces. Alors l'espace des suites multiples finies d'ordre $(p+q)$ apparaît comme un sous-espace de $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. On peut faire alors l'hypothèse suivante :

> $A_1(\mathfrak{X},\mathcal{E})$: <u>Le couple d'espaces de suites multiples d'ordre</u> $(p+q)$ $(\mathcal{L}_c(X_1,E_1)\ ,\ \mathcal{L}_c(X_2,E_2))$ <u>est normal</u>.

Alors d'après les remarques faites ci-dessus, l'espace $(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ s'identifie à un espace de suites multiples d'ordre $(p+q)$. Et en utilisant la proposition 1.1 on en déduit aussitôt que c'est l'ensemble des suites multiples d'ordre $p+q$ qui peuvent s'écrire comme la somme de deux suites multiples du même ordre appartenant respectivement à $(\mathcal{L}_c(X_1,E_1))'$ et à $(\mathcal{L}_c(X_2,E_2))'$. On en déduit en se rapportant aux définitions du § 8, la :

PROPOSITION 2.26.- Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ deux couples normaux d'espaces de suites, vérifiant l'hypothèse $A_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. Soit a un vecteur de X^U . L'espace $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ est l'espace des suites $b = (b_j)$, $j\in\mathbb{N}^q$, telles que la suite d'ordre $(p+q)$, $(a_i\, b_j)$ puisse s'écrire comme somme d'une suite appartenant à l'espace de suites $(\mathcal{L}_c(X_1,E_1))'$ et d'une suite de $(\mathcal{L}_c(X_2,E_2))'$, muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $b \mapsto b$ et $(b_j) \mapsto (a_i\, b_j)$ dans E'_U et $(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ respectivement.

En notant que $\mathfrak{X}'_c$ est normal si $\mathfrak{X}$ l'est, on peut introduire l'hypothèse :

$A_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$: Le couple d'espaces de suites multiples d'ordre $(p+q)$ $(\mathcal{L}_\varepsilon((X_1)'_c,E_1)\ ,\ \mathcal{L}_\varepsilon((X_2)'_c,E_2))$ est normal.

Il vient la

PROPOSITION 2.27.- Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ deux couples normaux d'espaces de suites vérifiant l'hypothèse $A_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. Soit a un vecteur de X'_U . L'espace $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est l'espace des suites $b = (b_j)$, $j\in\mathbb{N}^q$, telles que la suite multiple d'ordre $(p+q)$, $(a_i\, b_j)$ puisse s'écrire comme somme d'une suite appartenant à l'espace de suites $(\mathcal{L}_\varepsilon((X_1)'_c,E_1))'$ et d'une suite de $(\mathcal{L}_\varepsilon((X_2)'_c,E_2))'$, muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $b \mapsto b$ et $(b_j) \mapsto (a_i\, b_j)$ dans E'_U et $(\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ respectivement.

REMARQUE 2.7.- Supposons, les hypothèses de la proposition 2.27 étant réalisées, que X_1 , X_2 , E_1 et E_2 sont complets et qu'il existe i et j (i=1 ou 2, j= 1 ou 2) tels que X_i et E_j soient nucléaires. Alors (cf. propriétés des espaces $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$; ch. I ; § 2), $\mathcal{L}_\varepsilon((X_k)'_c,E_k) = X_k \hat{\otimes}_\pi E_k$, (k=1,2), et son dual fort est l'espace des formes bilinéaires continues sur $X_k \times E_k$, que nous noterons $B(X_k,E_k)$, et qu'on identifiera à l'espace des applications linéaires ε-bornées [20] de X_k dans E_k , qui apparaît comme un sous-espace de

$$\mathcal{L}\Big(\bigoplus_{\mathbb{N}^p} \mathbb{C},\mathbb{C}^{\mathbb{N}^q}\Big) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q} \quad ;$$

c'est-à-dire qu'on peut identifier $B(X_k,E_k)$ à un espace de suites multiples d'ordre $(p+q)$ (l'application associée à la forme bilinéaire).

On en déduit le corollaire suivant de la proposition 2.27 :

COROLLAIRE.- Supposons que les hypothèses $A_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ soient réalisées, que X_1 ,

---

(20) On dit qu'une application u de A dans B' est ε-bornée s'il existe un voisinage W de 0 dans A dont l'image par u est une partie équicontinue de B' .

X_2 , E_1 <u>et</u> E_2 <u>soient complets et qu'il existe</u> i et j ,(i=1 ou 2, j=1 ou 2), <u>tels que</u> X_i <u>et</u> E_j <u>soient nucléaires. Alors</u> $N(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ <u>est l'ensemble des suites</u> b <u>telles que la suite</u> $(a_i\, b_j)$ <u>s'écrive comme somme d'une suite de</u> $B(X_1,E_1)$ <u>et d'une suite de</u> $B(X_2,E_2)$.

Voici maintenant un critère sur le couple $\mathcal{E}$ assurant que les hypothèses $A_1(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ et $A_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ sont vérifiées pour tout couple normal d'espaces de suites $\mathfrak{X}$.

PROPOSITION 2.28.- <u>Soit</u> $\mathcal{E}$ <u>un couple normal d'espaces de suites multiples d'ordre</u> p . <u>Si le couple</u> $\mathcal{E}$ <u>vérifie l'hypothèse d'équiapproximation, (en particulier si l'espace des suites finies est dense dans</u> $\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$ (21)<u>), et si</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>vérifient l'hypothèse d'approximation de Grothendieck,) alors pour tout couple normal d'espaces de suites</u> $\mathfrak{X}$, <u>les hypothèses</u> $A_1(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>et</u> $A_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>sont réalisées.</u>

<u>Démonstration</u> :

Soit $\mathfrak{X}$ un couple normal d'espaces de suites d'ordre q . On vérifie aisément que :

$$\bigoplus_{\mathbb{N}^{p+q}} \mathbb{C} \le X'_{c,\cap} \otimes_\pi E^\cap \le \mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}) \quad ,$$

$$\bigoplus_{\mathbb{N}^{p+q}} \mathbb{C} \le X^\cap \otimes_\pi E^\cap \le \mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) \quad .$$

Puisque $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'_c$, et $\mathcal{E}$ sont des couples normaux, $\bigoplus_{\mathbb{N}^p} \mathbb{C}$ est dense dans $X'_{c,\cap}$ et $X^\cap$, $\bigoplus_{\mathbb{N}^q} C$ est dense dans $E^\cap$. On en déduit que $\bigoplus_{\mathbb{N}^{p+q}} \mathbb{C}$ est dense dans $X'_{c,\cap} \otimes E^\cap$ et $X^\cap \otimes_\pi E^\cap$, donc aussi dans chacun de ces espaces munis des topologies induites respectivement par $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ et $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$. Mais le couple $\mathcal{E}$ vérifie l'hypothèse d'équiapproximation, donc $X'_{c,\cap} \otimes E^\cap$ est dense dans $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ et $X^\cap \otimes E^\cap$ dans $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ (cf. proposition 2.16). On en déduit que $\bigoplus_{\mathbb{N}^{p+q}} \mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ et $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$. D'autre part en reprenant le même raisonnement appliqué aux espaces $\mathcal{L}_c(X_i,E_i)$ (i=1,2) et en utilisant la propriété d'approximation de Grothendieck, on voit que $\bigoplus_{\mathbb{N}^{p+q}} \mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{L}_c(X_i,E_i)$ et $\mathcal{L}_\varepsilon((X_i)'_c,E_i)$ (i=1,2) ; ce qui démontre que les couples

$$(\mathcal{L}_c(X_1,E_1),\ \mathcal{L}_c(X_2,E_2)) \quad \text{et} \quad (\mathcal{L}_\varepsilon((X_1)'_c,E_1),\ \mathcal{L}_\varepsilon((X_2)'_c,E_2))$$

sont normaux.

---

(21) On a en effet : $\bigoplus_{\mathbb{N}^{2p}} \mathbb{C} \le E'_\cap \otimes E^\cap \le \mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

On démontrerait de la même manière la

PROPOSITION 2.29.- <u>Soit</u> $\mathfrak{X}$ <u>un couple normal d'espaces de suites multiples d'ordre</u> p . <u>Si le couple</u> $\mathfrak{X}$ <u>vérifie l'hypothèse d'équiapproximation, et si</u> X_1 <u>et</u> X_2 <u>vérifient l'hypothèse d'approximation de Grothendieck, alors pour tout couple normal d'espaces de suites</u> $\mathcal{E}$, <u>les hypothèses</u> $A_1(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>et</u> $A_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>sont réalisées.</u>

REMARQUE 2.8.- Si on suppose que l'espace $\bigoplus_{\mathbb{N}^{p+q}} \mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, sans être dense dans chacun des espaces $\mathcal{L}_c(X_i,E_i)$, il faut écrire que la suite $(a_i.b_j)$ est dans l'espace de suites $(\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$, en faisant attention que l'espace $(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X}_1,E_1))' + (\mathcal{L}_c(X_2,E_2))'$ n'est pas défini comme espace de suites. On ferait la même remarque concernant les espaces $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}_c',\mathcal{E})$.

II. Interpolation pour des couples d'espaces de distributions.

Explicitons maintenant les définitions des espaces $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ quand $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ sont des couples normaux d'espaces de distributions respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et sur $\mathbb{R}^q$ (cf. définition 2.8).

Notant x le point courant de $\mathbb{R}^p$, y celui de $\mathbb{R}^q$, nous indexerons par x ou par y les espaces de distributions sur $\mathbb{R}^p$ ou sur $\mathbb{R}^q$ respectivement.

On a manifestement :

$$\mathcal{L}_c(X_i,E_i) \leqq \mathcal{L}_c(\mathcal{D}_x,\mathcal{D}'_y) \quad .$$

Donc, par le théorème des noyaux de L. Schwartz (cf. [40] ; ch. I ; § 4)

$$\mathcal{L}_c(X_i,E_i) \leq \mathcal{D}'_{x,y} \quad ,$$

(l'élément de $\mathcal{D}'_{x,y}$ associé par cet isomorphisme à $A\in\mathcal{L}_c(X_i,E_i)$ est la "matrice" de cette application linéaire, le noyau de A) . On peut donc considérer le couple d'interpolation formé des espaces de distributions sur

$$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \quad , \quad (\mathcal{L}_c(X_1,E_1)\ ,\ \mathcal{L}_c(X_2,E_2)) \quad .$$

On voit, en raisonnant comme on l'a fait pour les couples d'espaces de suites, que l'espace "intersection" pour un tel couple est l'espace des distributions noyaux des éléments de $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. Toute fonction $\Phi(x,y)$ de $\mathcal{D}_x(\mathcal{D}_y) = \mathcal{D}_{x,y}$, définit une application linéaire continue de $\mathcal{D}'_x$ dans $\mathcal{D}_y$, (par $T_x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} \Phi(x,y)T(x)\,dx$) donc un élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. On peut alors faire l'hypothèse suivante :

$B_1(\mathfrak{X},\mathcal{E})$: <u>Le couple d'espaces de distributions sur</u>

$$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \quad , \quad (\mathcal{L}_c(X_1,E_1)\ ,\ \mathcal{L}_c(X_2,E_2))$$

est normal.

Alors l'espace $(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ s'identifie à l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ qui peuvent s'écrire comme la somme d'une distribution de $\mathcal{L}_c(X_1,E_1))'$ et d'une distribution de $(\mathcal{L}_c(X_2,E_2))'$.

On en déduit, en se reportant à la définition des espaces $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$, la :

PROPOSITION 2.30.- <u>Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ deux couples normaux de distributions vérifiant l'hypothèse</u> $B_1(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. <u>Soit</u> T_x <u>une distribution de</u> $\mathfrak{X}^{\cup}$. <u>L'espace</u> $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>est l'espace des distributions</u> S_y <u>telles que la distribution</u> $T_x \otimes S_y$ <u>sur</u> $\mathbb{R}^p_x \times \mathbb{R}^q_y$, <u>puisse s'écrire comme somme d'une distribution appartenant à l'espace des distributions</u> $(\mathcal{L}_c(X_1,E_1))'$ <u>et d'une distribution de</u> $(\mathcal{L}_c(X_2,E_2))'$, <u>muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications</u> $S_y \mapsto S_y$ <u>et</u> $S_y \mapsto T_x \otimes S_y$ <u>de</u> $N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>dans</u> $E'_{\cup}$ <u>et</u> $(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$ <u>respectivement.</u>

<u>Démonstration</u> :

Grâce à l'isomorphisme du théorème des noyaux, on a :

$$\mathcal{D}_x \otimes_\pi \mathcal{D}_y \leq X'_{c,\cap} \otimes_\pi E^{\cap} \leq \mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leq \mathcal{D}'_{x,y}$$

et

$$\mathcal{D}_{x,y} \leq \mathcal{D}_x \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_y \leq \mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leq \mathcal{D}'_{x,y} \quad .$$

Par définition pour qu'une distribution T soit dans $N(S;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ il faut et il suffit que la forme linéaire $S \otimes T$ sur $X'_{c,\cap} \otimes E^{\cap}$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. Mais $\mathcal{D}_x(\mathcal{D}_y)$ est dense dans $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ d'après l'hypothèse (A_1) et $\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y$ est dense dans $\mathcal{D}_{x,y}$ (cf. (3) ; VI ch. III ; § 2). Il en résulte que $\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y$ est dense dans $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ L'espace $N(S;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ est donc celui des distributions T de $E^{\cup}$ telles que la forme bilinéaire

$$(\Phi,\psi) \mapsto \langle S_x,\Phi(x) \rangle_{(\mathcal{D}',\mathcal{D})} \cdot \langle T_y,\psi(y) \rangle_{(\mathcal{D}',\mathcal{D})}$$

soit continue pour la topologie induite par celle de $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, ou encore telles que la distribution $T_x \otimes S_y$ soit dans l'espace de distributions $(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$.

Notant que le couple $\mathfrak{X}'_c$ est normal si $\mathfrak{X}$ l'est, on peut encore faire l'hypothèse suivante :

$B_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$: <u>Le couple d'espaces de distributions sur</u>

$$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \quad , \quad (\mathcal{L}_\varepsilon((X_1)'_c,E_1) \ , \ \mathcal{L}_\varepsilon((X_2)'_c,E_2))$$

est normal.

On en déduit de la même manière la :

PROPOSITION 2.31.- Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ deux couples normaux d'espaces de distributions sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement, vérifiant l'hypothèse $B_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. Soit T_x une distribution de X'_U .

L'espace $N_\varepsilon(T;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est l'espace des distributions S_y sur $\mathbb{R}^q_y$, telles que la distribution $T_x \otimes S_y$ puisse d'écrire comme somme d'une distribution appartenant à l'espace des distributions $(\mathcal{L}_\varepsilon((X_1)'_c,E_1))'$ et d'une distribution de $(\mathcal{L}_\varepsilon((X_2)'_c,E_2))'$, muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $S_y \mapsto S_y$ de $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ dans E'_U et $S_y \mapsto T_x \otimes S_y$ dans $(\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))'$.

Voici maintenant un critère sur le couple $\mathcal{E}$, assurant que les hypothèses $B_1(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ et $B_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ sont vérifiées pour tout couple normal $\mathfrak{X}$ d'espaces de distributions.

PROPOSITION 2.32.- Soit $\mathcal{E}$ un couple normal d'espaces de distributions sur $\mathbb{R}^p$. Si le couple $\mathcal{E}$ vérifie l'hypothèse d'équiapproximation, et si E_1 et E_2 vérifient l'hypothèse d'approximation de Grothendieck, alors pour tout couple normal d'espaces de distribution $\mathfrak{X}$, les hypothèses $B_1(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ et $B_2(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ sont vérifiées.

Démonstration :

Par un raisonnement analogue à celui fait au cours de la démonstration de la proposition 2.30, on montre que $\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y$ est dense dans $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$, $\mathcal{L}_c(X_i,E_i)$ et $\mathcal{L}_\varepsilon((X_i)'_c,E_i)$, (i=1,2). Pour terminer, on note les inégalités :

$$\mathcal{D}_{x,y} \leq \mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_{x,y} \leq \mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) \quad ,$$

et l'égalité :

$$\overline{\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y} = \mathcal{D}_{x,y} \quad . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

REMARQUE.- Supposant, les hypothèses de la proposition 2.32 étant réalisées, que X_1 , X_2 , E_1 et E_2 sont complets, et qu'il existe i et j (i=1 ou 2, j=1 ou 2) tels que X_i et E_j soient nucléaires, alors, (cf. ch. I § 2), $\mathcal{L}_\varepsilon((X_k)'_c,E_k)$ (k=1,2) s'identifie à l'espace $X_k \hat{\otimes}_\pi E_k$, et son dual fort, noté $B(X_k,E_k)$, à l'espace des formes bilinéaires continues sur $X_k \times E_k$, espace qu'on identifie à l'espace des applications linéaires ε-bornées de X_k dans E_k , qui apparaît, grâce au théorème des noyaux, comme un espace de distributions sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

-:-:-:-:-

CHAPITRE III

§ 1. Interpolation entre un espace échelonné et un espace de Köthe.

N° I : Notations.

Soit $\alpha^{(n)}$ une suite croissante de suites de nombres positifs telle que pour tout i de $\mathbb{N}$ on puisse déterminer un entier n tel que $\alpha_i^{(n)} \neq 0$.

On désigne par $E(\alpha^{(n)})$ l'espace des suites de nombres complexes qui peuvent s'écrire, pour au moins une valeur de $m \in \mathbb{N}$, comme produit de $\alpha^{(m)}$ et d'une suite sommable. On note $\alpha^{(m)}\ell^1$, $m \in \mathbb{N}$, l'espace des produits de suites de ℓ^1 (22), par la suite $\alpha^{(m)}$, muni de la topologie quotient de la topologie de ℓ^1 par l'application de multiplication $a \mapsto \alpha^{(m)}.a$ de ℓ^1 sur $\alpha^{(m)}\ell^1$. On a pour tout m : $\alpha^{(m)}\ell^1 \leq \alpha^{(m+1)}\ell^1$, et la réunion des espaces $\alpha^{(m)}\ell^1$ est l'espace $E(\alpha^{(n)})$. On munit alors $E(\alpha^{(n)})$ de la topologie de limite inductive des espaces $\alpha^{(m)}\ell^1$.

On sait alors, (cf.[19] ; ch. II ; § 4 n° 3), que $E(\alpha^{(n)})$ limite inductive d'une suite d'espaces normés est un espace tonnelé, bornologique, séparé du type $(\mathcal{DF})$ et complet. Nous dirons que c'est l'espace de Köthe associé à la suite $\alpha^{(n)}$.

Suivant A. Grothendieck, nous appellerons espace échelonné défini par suite $\alpha^{(n)}$, l'espace des suites $\xi = (\xi_i)$ dont le produit par tout $\alpha^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, est sommable, muni de la topologie définie par la famille de semi-normes

$$p_m(\xi) = \|\alpha^{(m)}\xi\|_{\ell^1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Nous noterons cet espace $F(\alpha^{(n)})$.

On a le critère de nucléarité suivant ([19] chap. II ; § 2) :

THEORÈME. Une condition nécessaire et suffisante pour que $E(\alpha^{(n)})$ soit nucléaire est que pour tout m il existe un entier n tel que la suite $\alpha^{(m)}/\alpha^{(n)}$ soit sommable.(23)

Si une suite vérifie la condition énoncée dans ce théorème, nous dirons qu'elle vérifie la condition (H^1).

Si la condition (H^1) est vérifiée le dual fort de $F(\alpha^{(n)})$ est $E(\alpha^{(n)})$, et

---

(22) On désigne par ℓ^1 l'espace des suites sommables.

(23) On fera la convention $\alpha/\beta = 0$ si α et β sont nuls simultanément.

le dual fort de $E(\alpha^{(n)})$ s'identifie à l'espace $F(\alpha^{(n)})$.

Dans un espace $F(\alpha^{(n)})$ ou $E(\beta^{(n)})$, l'espace des suites finies est dense. Un couple d'interpolation formé de deux quelconques espaces de ces types est toujours normal (cf. déf. 2.11).

Considérons un couple d'espaces de suites formé d'un espace de Köthe et d'un espace échelonné, $\mathcal{E} = (F(\alpha^{(n)}), E(\beta^{(n)}))$. L'espace des suites finies est dense dans $F(\alpha^{(n)})$ et $E(\beta^{(n)})$, et en outre le couple $\mathcal{E}$ est normal (cf. déf. 2.11).

Rappelons quelques propriétés des produits tensoriels projectifs de tels espaces $F(\alpha^{(n)})$ et $E(\beta^{(n)})$. Suivant nos conventions, étant donnés deux espaces de suites E_1 et E_2 , on identifiera un élément de $E_1 \otimes E_2$ à sa matrice, c'est-à-dire à une suite double (u_{ij}) , où i représente la variable muette du premier espace, j celle du second. On montre alors que l'application $u \mapsto (u_{ij})$ de $E(\alpha^{(n)}) \otimes \ell^1$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ se prolonge continuement en une injection continue de $E(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi \ell^1$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. On a la :

PROPOSITION . (Cf. [19]; ch. II, § 3). <u>L'espace</u> $E(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi F(\beta^{(n)})$ <u>s'identifie à l'espace des suites doubles</u> (u_{ij}) <u>telles que pour tout</u> n , <u>il existe un entier</u> m_n <u>tel que</u> :

$$\sum_{i,j} \beta_j^{(n)} |u_{ij}| / \alpha_i^{(m_n)} < \infty \quad , \tag{2}$$

<u>muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications</u> $(u_{ij}) \mapsto \beta_j^{(n)} u_{ij}$ <u>de</u> $E(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi F(\beta^{(n)})$ <u>dans</u> $E(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi \ell^1$.

Posons $\mathfrak{X} = (F(\alpha^{(n)}), E(\alpha'^{(n)}))$, et supposons que les suites $\alpha^{(n)}$ et $\alpha'^{(n)}$ vérifient la condition (H^1) . Nous avons alors le

LEMME. <u>Le couple</u> $\mathfrak{X}$ <u>vérifie l'hypothèse d'équiapproximation</u>.

<u>Démonstration</u> :

Les espaces $F(\alpha^{(n)})$ et $E(\alpha'^{(n)})$ sont nucléaires et complets. On en déduit les inégalités

$$\bigoplus_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mathbb{C} \leq \mathcal{L}_c(F(\alpha^{(n)}), F(\alpha^{(n)})) \cap \mathcal{L}_c(E(\alpha'^{(n)}), E(\alpha'^{(n)})) =$$

$$(E(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi F(\alpha^{(n)})) \cap (F(\alpha'^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi E(\alpha'^{(n)})) \leq \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \quad .$$

En utilisant la proposition 3.1, on voit facilement (cf. [19] ; ch. II, § 3 n° 3) que l'espace des suites doubles finies est dense dans

$$(E(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi F(\alpha^{(n)})) \cap (F(\alpha'^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi E(\alpha'^{(n)}))$$

et dans chacun des deux espaces composant cette intersection . C.Q.F.D.

En utilisant le corollaire de la proposition 2.27, on a alors la :

PROPOSITION 3.1.- Soit $\mathcal{E}$ un couple normal d'espaces de suites, a une suite de X^U . L'espace $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ est l'espace des suites $b = (b_j)$ telles que la suite $(a_i\, b_j)$ s'écrive comme somme d'une suite appartenant à l'espace de suites $B(E(\alpha^{(n)}),\, E_1)$ et d'une suite de $B(F(\alpha'^{(n)}),\, E_2)$, muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications

$$b \mapsto b \quad \text{et} \quad b \mapsto (a_i\, b_j) \quad \text{dans} \quad E'_U \quad \text{et} \quad (E(\alpha^{(n)}) \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} E_1) \cap (F(\alpha'^{(n)}) \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} E_2)$$

respectivement.

Posons $\mathcal{E} = F(\beta^{(n)}),\, E(\beta'^{(n)}))$. En considérant $B(E(\alpha^{(n)}),\, F(\beta^{(n)}))$ comme l'espace des applications linéaires de $E(\alpha^{(n)})$ dans $F'_{B_n}(\beta^{(n)})$ (24) dont les restrictions à chaque sous-espace $\alpha^{(m)}\ell^1$ sont continues, on obtient la

PROPOSITION 3.2.- [19] ; ch. II, § 3, n° 3). $B(E(\alpha^{(n)}),\, F(\beta^{(n)}))$ s'identifie à l'espace des suites doubles (v_{ij}) telles que, pour un entier $n \geqq 0$ convenable, on ait pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Sup}\, \alpha_i^{(m)}\, |v_{ij}| / \beta_j^{(n)} < +\infty \quad .$$

On en déduit aussitôt la :

PROPOSITION 3.3.- L'espace $N_c(a;(F(\alpha^{(n)}),\, E(\alpha'^{(n)})),\, (F(\beta^{(n)}),\, E(\beta'^{(n)})))$ est l'espace des suites $b = (b_j)$ telles que la suite $(a_i\, b_j)$ s'écrive comme somme d'une suite $u = (u_{ij})$, telle que pour un entier $m_o \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ la suite double $\dfrac{\alpha_i^{(m_o)} u_{ij}}{\beta_j^{(n)}}$ soit bornée, et d'une suite $v = (v_{ij})$ telle que pour un entier $n_o \in \mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite double $\dfrac{\beta_j'^{(n_o)}}{\alpha_i'^{(m)}}\, v_{ij}$ soit bornée.

COROLLAIRE.- L'espace $N(a;(F(\alpha^{(n)}),\, E(\alpha'^{(n)})))$ s'identifie algébriquement au dual de $L(a;(F(\alpha^{(n)}),\, E(\alpha'^{(n)})))$ (25) pour la dualité

$$< c,b > = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j\, b_j \qquad \begin{aligned} c &= (c_j) \in L(a;(F(\alpha^{(n)}),\, E(\alpha'^{(n)}))) \\ b &= (b_j) \in N(a;(F(\alpha^{(n)}),\, E(\alpha'^{(n)}))) \end{aligned} \quad .$$

(24) On note par F'_{B_n} l'espace normé engendré par B_n , où B_n désigne un borné convexe équilibré de F' , muni de la norme jauge de B_n (cf. [3]) .

(25) Si $\mathcal{E} \in \mathcal{E}^o$, nous noterons $N(a;\mathcal{E})$ et $L(a;\mathcal{E})$ respectivement pour $N_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$ et $L_c(a;\mathcal{E},\mathcal{E})$.

Démonstration :

Posons $C = L(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha'^{(n)})))$, $B = N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha'^{(n)})))$.
Le couple $\mathcal{E} = (F(\alpha^{(n)}), E(\alpha'^{(n)}))$ vérifie l'hypothèse d'équiapproximation. Donc B s'identifie algébriquement au dual de C pour la dualité

$$< c,b > = < u, a \otimes b >_{(\mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E}),\ \mathcal{L}_c(\mathcal{E},\mathcal{E}))')}$$

où u est un élément quelconque de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ tel que $u(a) = c$ (cf. th. 2.1, ch. 2, § 7). D'après la proposition $a \otimes b = H + G$, où $H\in B(E(\alpha^{(n)}), F(\alpha'^{(n)}))$ et $G\in B(F(\alpha'^{(n)}), E(\alpha'^{(n)}))$. Si on représente H , G et u par leurs matrices respectives dont les caractérisations ont été rappelées ci-dessus (cf. proposition 3.2), on peut écrire :

$$< c,b > = \sum_{i,j} u_{ij}(H_{ij} + G_{ij})$$

la série du second membre étant absolument sommable. On a alors

$$< c,b > = \sum_j (\sum_i u_{ij}\ a_i)b_j = \sum_j c_j\ b_j \quad .$$

C.Q.F.D.

N°II : Conditions d'existence d'un espace intermédiaire entre un espace de Köthe nucléaire et son dual.

Nous supposerons dans ce paragraphe que la suite $\alpha^{(n)}$ vérifie les conditions suivantes :

1) Condition de nucléarité (H^1) (cf. § 1)
2) Condition (H^2) : Il existe un entier t_o positif tel que $\inf_n \alpha_n^{(t_o)} > 0$.

Dans l'hypothèse (H^2) , on a $\alpha^{(t_o)} \ell^1 \supseteq \ell^1$ et $F(\alpha^{(n)}) \subseteq \ell^1$, donc a fortiori $F(\alpha^{(n)}) \subseteq E(\alpha^{(n)})$. On peut alors appliquer les propositions du paragraphe 9 du chapitre 2, qui vont nous conduire à des conditions d'existence d'un espace intermédiaire non trivial pour le couple $(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))$.

Soit a un vecteur de $E(\alpha^{(n)})$ n'appartenant pas à $F(\alpha^{(n)})$. D'après la proposition 3.1, l'espace $N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$ est l'espace des suites $b = (b_j)$ telles que la suite double $(a_i\ b_j)$ puisse se décomposer sous la forme $v + w$, où les suites $v = (v_{ij})$, $w = (w_{ij})$ sont telles que pour un couple d'entiers $(m_o,n_o)\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ convenable, et pour tout couple d'entiers $(m,n)\in\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, les suites

$$(\alpha_i^{(m_o)}\ v_{ij}/\alpha_j^{(n)}) \quad \text{et} \quad (\alpha_j^{(n_o)}\ w_{ij}/\alpha_i^{(m)})$$

soient bornées. Il en résulte la :

PROPOSITION 3.4.- <u>Pour qu'il existe un b-espace intermédiaire faiblement topologiquement non trivial pour le couple</u> $(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))$, <u>il est nécessaire que la condition suivante soit réalisée</u> :

<u>On peut trouver deux applications strictement croissantes</u> $k \mapsto i_k$ <u>et</u> $k' \mapsto j_{k'}$ <u>de</u> $\mathbb{N}$ <u>dans</u> $\mathbb{N}$, <u>deux entiers</u> $(m_o , n_o) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, <u>et deux entiers</u>

$$r, r' \quad , \quad (r,r') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad ,$$

<u>tels que</u> :

<u>Pour tout</u> $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, <u>il existe une constante</u> $c_{mn} > 0$, <u>telle qu'on ait pour tout</u> $(k,k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{(\alpha_{i_k}^{(r)})(\alpha_{j_{k'}}^{(r')})} \leq c_{mn} \left(\frac{\alpha_{i_k}^{(m_o)}}{\alpha_{j_{k'}}^{(n)}} + \frac{\alpha_{j_{k'}}^{(n_o)}}{\alpha_{i_k}^{(m)}} \right)$$

<u>Démonstration</u> :

D'après la proposition 2.23, pour qu'il existe un b-espace intermédiaire faiblement topologiquement non trivial pour le couple $(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))$, il est nécessaire (et suffisant) qu'il existe une suite a de $E(\alpha^{(n)})$ n'appartenant pas à $F(\alpha^{(n)})$ telle que

$$N(a;F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})) \neq F(\alpha^{(n)}) \quad ,$$

puisque le couple $(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))$ vérifie la propriété d'équiapproximation. Supposons donc l'existence d'une telle suite $a = (a_i)$. Soit $b = (b_j)$ une suite de $N(a;F(\alpha^{(n)}) , E(\alpha^{(n)}))$ qui ne soit pas dans $F(\alpha^{(n)})$. Dire que a et b ne sont pas dans $F(\alpha^{(n)})$ signifie qu'on peut trouver deux entiers r et r' , deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $k \mapsto i_k$ et $k' \mapsto j_{k'}$ strictement croissantes, et une constante μ strictement positive telles qu'on ait pour tout entier k :

$$|\alpha_{i_k}^{(r)} a_{i_k}| \geq \mu \quad \text{et} \quad |\alpha_{j_{k'}}^{(r')} b_{j_{k'}}| \geq \mu \quad .$$

Mais la suite b est dans $N(a;F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))$. Utilisons la décomposition de $a_i b_j$ explicitée dans la proposition 3.3. Il existe deux entiers m_o et n_o positifs tels que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe une constante strictement positive c_{mn} telle que

$$\frac{\alpha_{i_k}^{(m_o)} \alpha_{i_k}^{(r)} \alpha_{j_{k'}}^{(r')}}{\alpha_{j_{k'}}^{(n)}} + \frac{\alpha_{j_{k'}}^{(n_o)} \alpha_{i_k}^{(r)} \alpha_{j_{k'}}^{(r')}}{\alpha_{i_k}^{(m)}} \geq c_{mn} \quad .$$

ce qui démontre la proposition.

Introduisons maintenant une nouvelle condition (H^3) sur les suites $\alpha^{(n)}$:

1) Pour tout couple d'entiers $(m',m'')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que la suite $\alpha^{(m')}\alpha^{(m'')}/\alpha^{(m)}$ soit bornée.

2) Pour tout n entier assez grand on peut déterminer une constante $c_n > 0$ telle que

$$\alpha_i^{(n)} \leq c_n\, \alpha_j^{(n)} \text{ , pour tout } (i,j) \text{ tel que } i \leq j \text{ .}$$

Si les hypothèses (H^1), (H^2) et (H^3) sont réalisées, on peut mettre le critère (I) de la proposition 3.4 sous une forme (II) plus maniable qui apparaît comme une condition suffisante d'existence d'espaces intermédiaires non triviaux pour le couple $(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))$. On a de façon précise la

PROPOSITION 3.5.- Supposons que les hypothèses (H^1), (H^2) et (H^3) soient réalisées par les suites $\alpha^{(n)}$. Considérons les propriétés suivantes

(i) Condition (I)[26]

(ii) Condition (II) :

Il existe un couple d'entiers $(m_o',n_o')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, un couple d'entiers $(r,r')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $k\mapsto i_k$ et $k'\mapsto j_{k'}$, tels que pour tout entier $m\in\mathbb{N}$ soient réalisées les deux inégalités

$$\text{(II)} \qquad \varliminf_{\substack{j_{k'}\leq i_k\\ k\to\infty\\ k'\to\infty}} \frac{\alpha_{j_{k'}}^{(n_o')}\,\alpha_{i_k}^{(r)}}{\alpha_{i_k}^{(m)}} > 0 \quad \text{et} \quad \varliminf_{\substack{j_{k'}\geq i_k\\ k\to\infty\\ k'\to\infty}} \frac{\alpha_{i_k}^{(m_o')}\,\alpha_{j_{k'}}^{(r')}}{\alpha_{j_{k'}}^{(m)}} > 0$$

(iii) Il existe $a\in E(\alpha^{(n)})$ tel que $N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$ soit un espace intermédiaire algébriquement et topologiquement non trivial pour le couple $(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))$ et que l'injection naturelle de $L(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$ dans $E(\alpha^{(n)})$ ne soit pas un homomorphisme faible.

On a les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) .

Démonstration :

Supposons les hypothèses (H^1), (H^2) et (H^3) réalisées.

1) On a manifestement (i) $\Rightarrow$ (ii) .

---

(26) cf. proposition 3.4

Si les inégalités (I) sont vérifiées, pour tout couple d'entiers (m_o,n_o) , on peut déterminer un couple d'entiers (m'_o,n'_o) tel que

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha^{(m_o)}\,\alpha^{(r)} \leqq A\,\alpha^{(m'_o)} \\ \alpha^{(n_o)}\,\alpha^{(r')} \leqq A\,\alpha^{(n'_o)} \end{cases}$$

où A désigne une constante strictement positive. On suppose m'_o et n'_o assez grands pour que les suites $1/\alpha^{(m'_o)}$ et $1/\alpha^{(n'_o)}$ soient bornées (condition (H²)) et que les suites $\alpha^{(m'_o)}$ et $\alpha^{(n'_o)}$ vérifient le second point de la condition (H³).

On a alors en portant (1) dans (I)

$$0 < \gamma_{m,n} < \frac{\alpha_{i_k}^{(m'_o)}\,\alpha_{j_{k'}}^{(r')}}{\alpha_{j_{k'}}^{(n)}} + \frac{\alpha_{j_{k'}}^{(n'_o)}\,\alpha_{i_k}^{(r)}}{\alpha_{i_k}^{(m)}} ,$$

avec $\gamma_{m,n} = 1/c_{m,n}\,A$.

D'après la condition de croissance imposée aux suites $\alpha^{(m'_o)}$ et $\alpha^{(n'_o)}$, on peut déterminer deux constantes C et C' strictement positives telles que

$$\alpha_i^{(m'_o)} \leqq C\,\alpha_j^{(m'_o)} , \quad \text{pour} \quad j \geqq i$$

$$\alpha_{j'}^{(n'_o)} \leqq C'\alpha_{i'}^{(n'_o)} , \quad \text{pour} \quad j' \leqq i' .$$

On aura donc pour $j_{k'} \geqq i_k$, l'inégalité

$$0 < \gamma_{m,n} < C\,\frac{\alpha_{j_{k'}}^{(m'_o)}\,\alpha_{j_{k'}}^{(r)}}{\alpha_{j_{k'}}^{(n)}} + \frac{\alpha_{j_{k'}}^{(n'_o)}\,\alpha_{i_k}^{(r)}}{\alpha_{i_k}^{(m)}} .$$

On vérifie que la réunion des hypothèses (H¹) et (H³) entraîne la propriété que : quel que soit le couple (m'_o,r') d'entiers, il existe un entier n pour lequel la suite $\alpha^{(m'_o)}\,\alpha^{(r')}\,/\,\alpha^{(n)}$ tend vers 0 à l'infini. Donc pour que $\gamma_{m,n}$ soit strictement positive, il faut que

$$(2)\qquad \varliminf_{\substack{j_{k'} \geqq i_k \\ k \to \infty \\ k' \to \infty}} \frac{\alpha_{j_{k'}}^{(n'_o)}\,\alpha_{i_k}^{(r)}}{\alpha_{i_k}^{(m)}} > 0 .$$

On aura de façon symétrique, en intervertissant les rôles de i_k et $j_{k'}$, la condition

$$(3) \qquad \varliminf_{\substack{j_{k'} \leq i_k \\ k \to \infty \\ k' \to \infty}} \frac{\alpha_{i_k}^{(m_o')} \alpha_{j_{k'}}^{(r)}}{\alpha_{j_{k'}}^{(n)}} > 0 \quad ;$$

ce qui montre que (II) est vérifié si (I) l'est et établit l'équivalence de (i) et (ii).

2) <u>Montrons que</u> (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Supposons que la condition (II) soit vérifiée pour deux suites (i_k), $(j_{k'})$ données, deux entiers r, r' , $(r,r') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et un couple (m_o', n_o') de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nous allons construire un espace $N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$ distinct de $F(\alpha^{(n)})$ et de $E(\alpha^{(n)})$.

Il est toujours possible de supposer r et r' supérieurs à l'entier t_o donné dans l'hypothèse (H^2) .

Posons :

$$a_i = \begin{cases} 0 \ , \text{ si } i \neq i_k \\ \dfrac{1}{\alpha_{i_k}^{(r)}} \ , \text{ si } i = i_k \end{cases} \qquad b_j = \begin{cases} 0 \ , \text{ si } j \neq j_{k'} \\ \dfrac{1}{\alpha_{j_{k'}}^{(r')}} \ , \text{ si } j = j_{k'} \end{cases}$$

Posons encore :

$$v_{ij} = a_i\, b_j \ \text{ si } i > j \ , \quad v_{ij} = 0 \ , \ \text{ si } i \leq j$$

$$w_{ij} = 0 \ \text{ si } i > j \ , \quad w_{ij} = a_i\, b_j \ , \ \text{ si } i \leq j \ .$$

On a alors pour tout $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $a_i\, b_j = v_{ij} + w_{ij}$.

Les suites $a = (a_i)$ et $b = (b_i)$ ainsi construites sont dans $E(\alpha^{(n)})$.

En effet nous avons supposé la suite $\dfrac{1}{\alpha^{(t_o)}}$ bornée, $r \geq t_o$ et $r' \geq t_o$.

Il en résulte que les suites $(\alpha^{(r)})^{-1}$ et $(\alpha^{(r')})^{-1}$ sont majorées à une constante près respectivement par les suites $\alpha^{(r)}$ et $\alpha^{(r')}$. Ces suites ne sont pas dans $F(\alpha^{(n)})$, puisque $a.\alpha^{(r)}$ et $\alpha^{(r')}.b$ ne sont pas sommables.

D'autre part les inégalités (2) et (3) montrent que pour tout m et tout n , les suites

$$\left(\frac{\alpha_i^{(m)}}{\alpha_j^{(n'_o)}} v_{ij} \right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\alpha_j^{(n)}}{\alpha_i^{(m'_o)}} w_{ij} \right)$$

sont bornées. C'est-à-dire d'après la proposition 3.3, que b est dans

$$N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))) \quad .$$

Il reste à montrer que $N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$ est distinct de $E(\alpha^{(n)})$ et que sa topologie n'est pas celle induite par la topologie de $E(\alpha^{(n)})$. Ceci va résulter du lemme suivant :

LEMME.- <u>Si la suite</u> $(\alpha^{(n)})$ <u>vérifie la condition</u> (H^3) , <u>la propriété</u>

$$N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))) \underset{alg}{=} E(\alpha^{(n)})$$

<u>équivaut à la propriété</u> : a <u>appartient à</u> $F(\alpha^{(n)})$.

<u>Démonstration</u> :

Si a est dans $F(\alpha^{(n)})$, $L(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))) = F(\alpha^{(n)})$ (cf. ch. I ; § 5, remarque 1.6). D'autre part, en vertu du théorème de dualité (th. 2.1.), son dual s'identifie algébriquement à $N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$, donc

$$N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))) \underset{alg}{=} E(\alpha^{(n)}) \quad .$$

Réciproquement, soit a un vecteur de $E(\alpha^{(n)})$ n'appartenant pas à $F(\alpha^{(n)})$, a n'appartient pas à $N(a;(E(\alpha^{(n)}), F(\alpha^{(n)})))$. En effet supposons le contraire, alors la suite $(a_i\ a_j)$ vérifiera les conditions (I). On pourra donc trouver deux entiers r et r' , $(r,r')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, un couple $(m_o,n_o)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante $k\mapsto i_k$, et pour tout m et n une constante strictement positive c_{mn} telle que :

$$c_{mn} \leq \frac{\alpha_{i_k}^{(m_o)}\ \alpha_{i_k}^{(r)}\ \alpha_{i_k}^{(r')}}{\alpha_{i_k}^{(n)}} + \frac{\alpha_{i_k}^{(n_o)}\ \alpha_{i_k}^{(r)}\ \alpha_{i_k}^{(r')}}{\alpha_{i_k}^{(m)}} ,$$

pour tout $k\in\mathbb{N}$. Ou encore, en utilisant la condition (H^3) , il existera un couple $(m'_o,n'_o)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et une constante $c'_{mn} > 0$, tels que :

$$c'_{mn} \leq \frac{\alpha_{i_k}^{(m'_o)}}{\alpha_{i_k}^{(n)}} + \frac{\alpha_{i_k}^{(n_o)}}{\alpha_{i_k}^{(m)}} \text{ , pour tout } k\in\mathbb{N} \text{ ,}$$

ce qui est absurde, car lorsque k tend vers l'infini l'expression de droite tend vers zéro. Ceci achève la démonstration du lemme et de la proposition 3.5.

Dans notre construction des suites v et w, telles que $a \otimes b = v + w$, nous avons posé $v_{ij} = a_i b_j$ si $i \geq j$, $v_{ij} = 0$ si $i < j$, et $w_{ij} = a_i b_j$ si $i < j$, $w_{ij} = 0$ si $i \geq j$. Cette construction est générale comme le montre la

PROPOSITION 3.6.- <u>Supposons que la suite</u> $\alpha^{(n)}$ <u>vérifie la condition</u> (H^3). <u>Pour que les suites</u> $a = (a_i)$, $b = (b_j)$ <u>soient telles que</u> $a \in N(b; E(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))$ <u>il faut et il suffit que la suite double</u>

$$v_{ij} = \begin{cases} a_i b_j & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

<u>soit dans</u> $(E(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi F(\alpha^{(n)}))'$ <u>et que la suite</u>

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ a_i b_j & \text{si } i < j \end{cases}$$

<u>soit dans</u> $(F(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi E(\alpha^{(n)}))'$.

(<u>c'est-à-dire qu'il existe</u> $(m_o, n_o) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ <u>tel que pour tout</u> $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ <u>les suites</u>

$$\left(v_{ij} \frac{\alpha_j^{(n)}}{\alpha_i^{(n_o)}} \right) \quad \text{et} \quad \left(w_{ij} \frac{\alpha_i^{(m)}}{\alpha_j^{(m_o)}} \right)$$

<u>soient bornées</u>.)

<u>Démonstration</u> :

Soient a et b deux suites de $E(\alpha^{(n)})$ telles que $b \in N(a; (F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$. On a :

$$a_i b_j = v_{ij} + w_{ij} \quad , \quad (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad ,$$

et on peut déterminer deux entiers m_o et n_o tels que pour tout $m \in N$ les suites

$$\left(v_{ij} \frac{\alpha_j^{(m)}}{\alpha_i^{(n_o)}} \right) \quad \text{et} \quad \left(w_{ij} \frac{\alpha_i^{(m)}}{\alpha_j^{(m_o)}} \right)$$

soient bornées.

On a donc pour tout $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\left| a_i \, b_j \frac{\alpha_i^{(m)}}{\alpha_j^{(m_o)}} \right| \leq c_{mn} \frac{\alpha_i^{(n_o)}}{\alpha_j^{(m_o)}} \frac{\alpha_i^{(m)}}{\alpha_j^{(n)}} + c'_n \quad , \quad (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad ,$$

où c_m et c'_n sont des constantes indépendantes de i et j .

Si $j \geqq i$, pour n assez grand $\frac{\alpha_i^{(n_o)}}{\alpha_j^{(m_o)}} \frac{\alpha_i^{(m)}}{\alpha_j^{(n)}}$ tend vers 0 uniformément par rapport à j quand $i \to \infty$. La suite

$$\frac{v_{ij} \, \alpha_i^{(m)}}{\alpha_j^{(m_o)}}$$

est donc bornée. On verrait de même que la suite

$$\frac{w_{ij} \, \alpha_j^{(n)}}{\alpha_j^{(n_o)}}$$

est dans ℓ^∞ . La condition de la proposition 3.6 est donc nécessaire.

Réciproquement si $a = (a_i)$ et $b = (b_j)$ sont deux suites vérifiant cette même condition, elles sont manifestement dans $E(\alpha^{(n)})$ et $b \in N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$ d'après la proposition 3.3 ce qui achève la démonstration.

Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Notons $\Phi(A) = (\Phi_i(A))_{i \in \mathbb{N}}$, la fonction caractéristique de A . Soit r un entier positif tel que

$$\inf_i \alpha_i^{(r)} > 0$$

(il suffit de choisir $r \geqq t_o$) on a la

PROPOSITION 3.7.- <u>On suppose que la suite</u> $\alpha^{(n)}$ <u>vérifie la condition</u> (H^3) . <u>Alors l'espace</u>

$$N\left(\frac{\Phi(A)}{\alpha^{(r)}} \; ; \; (F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))\right)$$

<u>est l'espace des suites</u> $b = (b_j)$ <u>telles que pour un entier</u> $n_o \in \mathbb{N}$, <u>les suites</u>

$$b \quad \text{et} \quad b^{(n_o)} = \frac{b}{\alpha^{(n_o)}}$$

<u>vérifient les conditions suivantes</u> :

1) <u>Pour tout</u> $m\in\mathbb{N}$: $\sup\limits_{i\in A}\left[\left(\sup\limits_{j\geq i}|b_j^{(n_o)}|\right)\cdot\alpha_i^{(m)}\right] < +\infty$,

2) <u>Il existe</u> $m_o\in\mathbb{N}$, <u>tel que pour tout</u> $m\in\mathbb{N}$, <u>on ait</u> :

$$\sup_{i\in A}\left[\left(\sup_{j\leq i}|b_j\,\alpha_j^{(m)}|\right)/\alpha_i^{(m_o)}\right] < +\infty .$$

<u>Démonstration</u> :

Soit $b=(b_j)$ une suite de $N(\frac{\Phi(A)}{\alpha^{(r)}}\ ;\ (F(\alpha^{(n)}),\ E(\alpha^{(n)})))$.

D'après la proposition 3.6, il existe un couple d'entiers $(m_o',n_o')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, tels que pour tout $m'\in\mathbb{N}$, on puisse trouver une constante strictement positive $c_{m'}$ telle que :

1) $$|b_j| \leq c_{m'}\ \frac{\alpha_j^{(n_o')}\ \alpha_i^{(r)}}{\alpha_i^{(m')}}\ ,\ \text{pour tout}\ j\geq i\ \text{et tout}\ i\in A\ ,$$

2) $$|b_j| \leq c_{m'}\ \frac{\alpha_i^{(m_o')}\ \alpha_i^{(r)}}{\alpha_j^{(m')}}\ ,\ \text{pour tout}\ i\in A\ \text{et tout}\ j\leq i\ .$$

On doit donc, en majorant $\alpha^{(m_o')}\ \alpha^{(r)}$ par une suite $\alpha^{(m_o)}$ convenable, déterminer une constante $\gamma_{m'}>0$ telle que

$$|b_j| \leq \gamma_{m'}\ \frac{\alpha_i^{(m_o)}}{\alpha_j^{(m')}}\ ,\ \text{pour tout}\ i\in A\ \text{et tout}\ j\leq i\ .$$

On a donc la condition 2) de l'énoncé.

Soit $m\in\mathbb{N}$. Il existe d'après (H^3) un entier positif m' tel que la suite $\alpha^{(r)}\ \alpha^{(m)}\ /\ \alpha^{(m')}$ soit bornée par une constante strictement positive finie, que nous désignerons par K_m . En majorant $\alpha^{(r)}\ /\ \alpha^{(m')}$ par $K_m/\alpha^{(m)}$ dans (1), on obtient la condition 1) de l'énoncé.

Réciproquement, supposons les conditions 1) et 2) de l'énoncé réalisées. Soit $m\in\mathbb{N}$, on a pour tout $i\in A$:

$$\sup_{j\geq i}|b_j^{(n_o)}| \leq \frac{c_m}{\alpha_i^{(m)}} \leq \frac{c_m}{\alpha_i^{(r)}}\ \frac{\alpha_i^{(r)}}{\alpha_i^{(m)}}\ ,$$

où c_m désigne une constante strictement positive. La suite $(\alpha^{(r)})^{-1}$ est bornée par hypothèse, on en déduit la condition (1).

On détermine d'autre part, une constante $c'_m > 0$, telle que pour tout $i \in A$:

$$\sup_{j \leq i} |b_j \alpha_j^{(m)}| \leq c'_m \alpha_i^{(m_o)} \leq \left(\frac{c'_m}{\inf_i \alpha_i^{(r)}} \right) \alpha_i^{(m_o)} \alpha_i^{(r)} .$$

La condition (2) est donc réalisée. Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- <u>Supposons que la condition</u> (H^3) <u>est réalisée et qu'en outre pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i^{(n)}$ <u>tend vers l'infini avec</u> i.

<u>Soit</u> $a \in E(\alpha^{(n)})$. <u>Une condition nécessaire pour que l'espace</u>

$$N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$$

<u>soit algébriquement non trivial, est qu'il existe un sous-ensemble infini</u> A <u>de</u> $\mathbb{N}$, <u>un entier</u> $n_o \in \mathbb{N}$, <u>tels que pour tout</u> $m \in \mathbb{N}$ <u>on ait</u> :

$$\sup_{i \in A} \left[\left(\sup_{j \geq i} \left| a_j^{(n_o)} \right| \right) \cdot \left(\sup_{j \leq i} \left| a_j \alpha_j^{(m)} \right| \right) \right] < \infty .$$

<u>Démonstration</u> :

Soit $a \in E(\alpha^{(n)})$. Nous avons vu (cf. prop. 3.5.) que pour qu'il existe

$$b \in N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))) ,$$

b n'appartenant pas à $F(\alpha^{(n)})$, il est nécessaire qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, un sous ensemble infini A de $\mathbb{N}$, tels que la suite $c = \Phi(A) / \alpha^{(r)}$ appartienne à $N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$.

Mais pour que c soit dans $N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$, il faut et il suffit que a appartienne à $N(c;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$ (cf. ch. II ; § 9, prop. 2.24.) Appliquons la proposition 3.7. Les suites a et c vérifient les inégalités 1) et 2) formulées dans cette proposition. On obtient alors le corollaire en rapprochant ces inégalités.

<u>Notation</u> :

Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ on pose pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$i^-(A) = \sup \{j \in A ; j < i\} ,$$
$$i^+(A) = \inf \{j \in A ; j \geq i\} .$$

On peut alors énoncer le

COROLLAIRE 2.- <u>Supposons, les conditions du corollaire</u> 1 <u>étant réalisées, que les</u>

<u>suites</u> $\alpha^{(n)}$ <u>soient toutes croissantes à partir d'un certain rang. Pour qu'il existe un espace</u> $N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$ <u>algébriquement non trivial, il faut qu'on puisse déterminer deux sous-ensembles infinis</u> B <u>et</u> C <u>de</u> $\mathbb{N}$, $C \subset B$ <u>et un entier</u> $m_o \in \mathbb{N}$, <u>tels que pour tout</u> $m \in \mathbb{N}$, <u>on ait</u> :

$$\lim_{\substack{i \to \infty \\ i \in C}} \frac{\alpha^{(m)}_{i^-(B)}}{\alpha^{(m_o)}_i} = 0$$

<u>Démonstration</u> :

S'il existe un espace $N(a;(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)})))$ algébriquement non trivial, on pourra trouver un sous-ensemble infini B de $\mathbb{N}$, et un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que l'espace

$$N\left(\frac{\Phi(B)}{\alpha^{(r)}} \; ; \; (F(\alpha^{(n)}, E(\alpha^{(n)}))\right)$$

soit algébriquement non trivial. On doit donc trouver, d'après le corollaire 1, un sous-ensemble infini C' de $\mathbb{N}$, et un entier $n_o \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\text{(1)} \qquad \sup_{i \in C'} \left\{ \left(\sup_{\substack{j \geq i \\ j \in B}} \frac{1}{\alpha_j^{(n_o)} \; \alpha_j^{(r)}} \right) \cdot \left(\sup_{\substack{j \leq i \\ j \in B}} \frac{\alpha_j^{(m)}}{\alpha_j^{(r)}} \right) \right\} < +\infty$$

Soit $n'_o \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^{(n'_o)}$ minore $\alpha^{(n_o)} \cdot \alpha^{(r)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $m_{n,r}$ tel que la suite $\alpha^{(n)}$ soit majorée par la suite

$$\frac{\alpha^{(m'_{n,r})}}{\alpha^{(n)}} \; .$$

L'inégalité (1) est vérifiée pour $m = m_{n,r}$, on aura encore pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{i \in C'} \left\{ \left(\sup_{\substack{j \geq i \\ j \in B}} \frac{1}{\alpha_j^{(n'_o)}} \right) \cdot \left(\sup_{\substack{j \leq i \\ j \in B}} \alpha_j^{(n)} \right) \right\} < +\infty \; .$$

En particulier, il vient

$$\text{(2)} \qquad \sup_{i \in C'} \alpha^{(m)}_{i^-(B)} \Big/ \alpha^{(n'_o)}_{i^+(B)} < +\infty$$

Pour $i \in C'$, on a :

$$(i^+(B))^+(B) = i^+(B)$$
$$(i^+(B))^-(B) = i^-(B) \; .$$

Posons $C = \bigcup_{i\in C'} i^{+}(B)$, la condition (2) s'écrit encore

$$\operatorname*{Sup}_{i\in C} \left(\alpha^{(m)}_{i^{-}(B)} \;/\; \alpha_i^{(n'_o)} \right) < +\infty \ .$$

Ceci doit avoir lieu pour tout $m\in\mathbb{N}$. Puisque la condition (H^3) est réalisée et que les suites $\alpha^{(m)}$ tendent vers l'infini on a encore

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ i\in C}} \alpha^{(m)}_{i^{-}(B)} \;/\; \alpha_i^{(n'_o)} = 0 \ , \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

REMARQUE 3.1.- On peut encore écrire cette condition : il existe une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante $k \to u_k$, et un entier $m_o\in\mathbb{N}$, tels que pour tout $m\in\mathbb{N}$ on ait :

$$\lim_{k\to\infty} \left(\alpha^{(m)}_{u_{2k-1}} \;/\; \alpha^{(m_o)}_{u_{2k}} \right) = 0 \ .$$

N° III : Application

Espaces intermédiaires entre un espace de Fréchet nucléaire possédant une base et son dual.

Rappelons un résultat de Mitiagin ([31]) qui va nous permettre d'associer à tout espace de Fréchet nucléaire possédant une base un couple d'interpolation.

On dit qu'un espace localement convexe F possède une base de Schauder, s'il existe une suite (x_k) de F telle que pour tout x de F , il existe une suite de nombres (c_k) unique vérifiant

$$x = \sum_1^{\infty} c_k \, x_k \ ,$$

série convergente mais non nécessairement sommable. Une suite (x'_k) de vecteurs de F' forme par définition un système orthogonal à (x_k) , si pour tout

$$(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \ ,$$

on a : $x'_j(x_k) = \delta_{jk}$, où δ_{jk} désigne l'indice de Kronecker. Un tel système orthogonal existe toujours lorsque F est du type $(\mathcal{F})$. On a alors le

THÉORÈME (cf. Mitiagin [31]) Soit F un espace de Fréchet nucléaire possédant une base (x_k) . Désignons par (p_n) une suite croissante de semi-normes définissant sa topologie et par (x'_k) un système orthogonal à (x_k) . L'application $x \mapsto (x'_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$, est un isomorphisme de F sur l'espace échelonné $F(\alpha^{(n)})$, où

<u>pour tout</u> n <u>la suite</u> $\alpha^{(n)}$ <u>est définie par</u> :

(1) $$\alpha_k^{(n)} = p_n(x_k) \quad , \; k\in\mathbb{N} \quad .$$

Si donc F est un espace de Fréchet nucléaire possédant une base (x_k) , on peut, compte tenu de ce résultat, plonger F et F' dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ à l'aide des injections respectives

$$f_1 : x \mapsto (x_k'(x)) \quad \text{et} \quad f_2 : y \to (y(x_k))_k \quad .$$

On désigne alors par $\mathcal{F} = (F,F';(x_k);\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ le couple d'interpolation correspondant. On obtient alors à l'aide des résultats qui précèdent des conditions d'existence d'un espace intermédiaire quand on fait l'hypothèse que $F^{\cap} = F$ c'est-à-dire que $F(\alpha^{(n)}) \subseteq E(\alpha^{(n)})$, où $\alpha^{(n)}$ et la suite définie en (1).

§ 2. Interpolation entre un espace de Köthe nucléaire défini par une suite de puissances et son dual.

N° I : <u>Préliminaires</u> :

Soit β une suite positive croissante, tendant vers l'infini, telle que pour un nombre positif t_o , la suite β^{-t_o} soit sommable. Nous noterons $E(\beta)$, $F(\beta)$ respectivement l'espace de Köthe et l'espace échelonné associés à la suite $\alpha^{(n)}$ des puissances de la suite β . Une telle suite $\alpha^{(n)}$ vérifie les conditions (H^1) , (H^2) et (H^3) définies dans le précédent paragraphe. On en déduit que les espaces $E(\beta)$ et $F(\beta)$ sont nucléaires et que $F(\beta) \subseteq E(\beta)$. On a la

PROPOSITION 3.8.- <u>Il existe des espaces non triviaux</u> $N(a;(F(\beta), E(\beta)))$, <u>pour le couple</u> $(F(\beta), E(\beta))$.

<u>Démonstration</u> :

Soit $k \mapsto u_k$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $\alpha > 0$, la suite $\beta_{u_k} \cdot \beta^{\alpha}_{u_{k-1}}$ tende vers l'infini(27).

On pose : $i_k = u_{2k}$, $j_k = u_{2k+1}$, $A = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{u_{2k}\}$, $B = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{u_{2k+1}\}$.

On vérifie immédiatement à l'aide de la proposition 3.5, que les suites $\Phi(A)$ et $\Phi(B)$ sont dans $E(\beta)$, sans appartenir à $F(\beta)$, et que

---

(27) Il suffit par exemple de considérer une application croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x)$, telle que pour tout $\alpha > 0$, $f(x)\, x^{-\alpha}$ tende vers l'infini avec x . On définit par récurrence sur k , β_{u_k} comme le plus petit des β_i , $i\in\mathbb{N}$, majorant $f(\beta_{u_{k-1}})$ et on pose $\beta_{u_o} = \beta_o$.

$$\Phi(B)\in N(\Phi(A);(F(\beta),\ E(\beta)))\ . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

REMARQUE 3.1.- On pourrait de façon analogue, envisager le cas du centre d'une échelle de Riesz nucléaire (cf. [31]), c'est-à-dire considérer non plus toutes les puissances d'une suite β , mais choisir $\alpha^{(n)} = \beta^{\mu_n}$, ou μ_n est une suite strictement croissante tendant vers l'infini. Nous ne nous y intéresserons pas ici, bien que cette étude ne présente aucune difficulté supplémentaire, (sinon une difficulté d'écriture) par rapport au cas que nous étudierons.

Nous nous proposons de déterminer tous les vecteurs a pour lesquels les espaces $N_c(a;(F(\beta),\ E(\beta)))$ sont non triviaux, et de caractériser algébriquement les espaces $N(a;(F(\beta),\ E(\beta)))$ correspondants.
On introduit les

Notations :

Soit a une suite de $E(\beta)$, A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

1) On note $\Phi(A)$ la suite caractéristique de A , et $(i_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ la suite ordonnée des points de A .

On appelle support de a , noté $\bar{K}(a)$, le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{N}$ en dehors duquel la suite a est nulle.

On désigne par $E_A(\beta)$ l'espace des suites b de $E(\beta)$ dont le support est contenu dans A , muni de la topologie induite par celle de $E(\beta)$.

2) On note $a^{(A)}$ la suite $a\,.\,\Phi(A)$. On pose $|a| = (|a_i|)_{i\in\mathbb{N}}$, et pour tout $n_o\in\mathbb{Z}$, $a^{(n_o)} = (a_i\,.\,\beta_i^{-n_o})_{i\in\mathbb{N}}$.

On dira qu'une suite $b = (b_j)$ domine a , ce qu'on écrira $|b|\prec|a|$ s'il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout $i\in\mathbb{N}$ on ait $|b_i| \leq k|a_i|$.

On notera a^{-1} la suite définie par

$$a_i^{-1} = \frac{\Phi_i(\bar{K}(a))}{a_i} \ ,\text{(28)}.$$

On désigne alors par $E_o(\beta)$ le sous-ensemble de $E(\beta)$ (noter que cet ensemble n'est pas un espace vectoriel) des suites a telles que $a^{-1}\in E(\beta)$ (Ceci signifie qu'on peut déterminer $q\in\mathbb{Z}$ et une constante $\varepsilon > 0$ tels que $|b_j| \geq \varepsilon(\beta_j)^q$ pour tout $j\in\bar{K}(a)$).

3) Pour tout r entier, on notera $K_r(\beta;a)$ l'ensemble des entiers i de $\mathbb{N}$ tels

---

(28) On fait ici encore la convention $\frac{\alpha}{\alpha'} = 0$ si α et α' sont nuls.

que

$$(\beta_i)^r \leqq |a_i| \ .$$

Supposons que $a \notin F(\beta)$. On note $R(\beta,a)$ le plus grand des entiers tels que l'ensemble $K_{r-1}(a)$ soit infini.

Si $a \in E_0(\beta)$, on pose $R'(\beta,a) = R(\beta;a^{-1})$. C'est le plus grand des entiers $r \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $r' \leqq r$, $r' \in \mathbb{Z}$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers appartenant à $K_{r'}(a)$ sans appartenir à $K_{r+1}(a)$.

Si $a \notin E_0(\beta)$ on posera $R'(\beta,a) = -\infty$. On notera $K(\beta,a)$ la réunion des ensembles $K_r(\beta,a)$, $r \in \mathbb{Z}$, $R'(\beta,a) < r < R(\beta,a)$. Si $a \in F(\beta)$, on posera

$$K(\beta,a) = \emptyset \ .$$

On dira que $K(\beta,a)$ est le β-<u>support essentiel de</u> a .

4) On a déjà défini pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ les deux applications $k \mapsto k^+(A)$ et $k \mapsto k^-(A)$ suivantes :

$$\begin{cases} k^+(A) = \text{Inf } \{k' \in A \ ; \ k' \geqq k\} \\ k^-(A) = \text{Sup } \{k'' \in A \ ; \ k'' < k\} \end{cases} \qquad \text{(cf. § 1) .}$$

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Pour tout $\alpha > 0$, on pose

$$\begin{cases} d_\alpha^-(\beta;A,B) = \underset{k\in A}{\text{Inf}} \ (\log \beta_k - \alpha \log \beta_{k^-(B)}) \\ d_\alpha^+(\beta;A,B) = \underset{k\in A}{\text{Inf}} \ (\log \beta_{k^+(B)} - \alpha \log \beta_k) \end{cases}$$

On pose alors la

DÉFINITION 3.1.-

1) <u>On dira que l'ensemble</u> A <u>est dans la classe</u> $\mathcal{B}^0(\beta)$, <u>si on peut trouver un</u> sous-ensemble infini B de A tel que pour tout $\alpha > 0$, on ait

$$d_\alpha^-(\beta;B,A) > -\infty$$

2) <u>On dira qu'un sous-ensemble</u> B <u>de</u> $\mathbb{N}$ <u>appartient à la classe</u> $\mathfrak{S}(B;A)$ <u>si pour tout</u> $\alpha > 0$, <u>on a</u> :

$$\text{i)} \quad d_\alpha^-(\beta;A,B) > -\infty$$

$$\text{ii)} \quad d_\alpha^+(\beta;A,B) > -\infty$$

<u>Remarques</u> :

1) On peut exprimer le fait que $A \in \mathcal{B}^0(\beta)$ sous la forme suivante : il existe une

application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, $\sigma \mapsto k_\sigma$, telle que pour tout $\alpha > 0$, on puisse trouver une constante strictement positive c_α telle que

$$\beta_{i_{k_\sigma}}(A) \geqq c_\alpha (\beta_{i_{k_{\sigma-1}}}(A))^\alpha ,$$

pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$.

2) Dans le cas particulier où β est la suite $i \mapsto i$, nous omettrons dans toutes les notations qui précèdent d'écrire β . On aura, par exemple,

$$d^+_\alpha(A,B) \quad , \quad \tau^o \quad , \quad R(a) \quad \text{etc...}$$

<u>Nous écrirons</u> (s'_o) <u>pour</u> E_o , (s'_A) <u>pour</u> E_A .

Nous allons maintenant caractériser les espaces $N(a;(F(\beta), E(\beta)))$ non triviaux. Nous effectuerons totalement les calculs dans le cas particulier de la suite $\beta : i \mapsto i$ et nous nous contenterons d'énoncer les résultats dans le cas général, laissant au lecteur le soin de vérifier que toutes les démonstrations s'adaptent par un simple changement d'écriture.

N° II : <u>Interpolation pour le couple</u> (s,s') .

En choisissant pour β la suite $i \mapsto i$, on obtient pour $F(\beta)$ l'espace (s) des suites à décroissance rapide. Son dual fort, noté (s') , est alors l'espace de Köthe des suites à croissance lente. Nous noterons (s,s') le couple correspondant d'espaces de suites.

1) <u>Propriétés des espaces</u> $N(a;(s,s'))$.

Soit a une suite de (s') . Appliquons la proposition 3.6 (§ 1 n° II). Elle permet de caractériser les éléments de $N(a;(s,s'))$.

<u>Critère (I) : Pour qu'une suite</u> $b = (b_j)$ <u>appartienne à</u> $N(a;(s,s'))$, <u>il faut et il suffit qu'on puisse déterminer</u> $(m_o,n_o) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ <u>tel qu'il existe pour tout</u> $m \in \mathbb{N}$ <u>une constante strictement positive</u> c_m <u>telle que</u>

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} (\mathrm{i}) \quad |a_i\, b_j| \leq c_m\, i^{m_o}\, j^{-m} , \text{ pour tout } i > j , \quad (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} , \\ (\mathrm{ii}) \quad |a_i\, b_j| \leq c_m\, j^{n_o}\, i^{m} , \text{ pour tout } i \leq j , \quad (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} . \text{ [29]} \end{cases}$$

On a les

PROPOSITION 3.9.- <u>Pour que</u> $N(a;(s,s'))$ <u>soit algébriquement non trivial, il faut et il suffit que</u>

[29] cf. note [33].

1) $a \in (s)$
2) $N(a;(s,s')) \neq (s)$.

Démonstration :

Ceci est un cas particulier du lemme de la proposition 3.5 (§ 1 n° II). On en déduit le

COROLLAIRE.- Soit $a \in (s')$. Si $a \in N(a;(s,s'))$, alors $a \in (s)$.

PROPOSITION 3.10.- Soient a , a_1 et a_2 trois suites de (s') . On a les propriétés suivantes :

(1) $N(a;(s,s')) = N(|a|;(s,s'))$.
(2) si $|a_2| \leqslant |a_1|$, $N(|a_1|;(s,s')) \subset N(|a_2|;(s,s'))$.
(3) si $a = a_1 + a_2$, où $a_2 \in (s)$, alors $N(a;(s,s')) = N(a_1;(s,s'))$.
(4) si $a_2 = m.a_1$, où $m \in (s')$, alors $N(|a_1|;(s,s')) \subset N(|a_2|;(s,s'))$
(5) $N(a;(s,s')) = N(a^{(K(a))};(s,s')) = N(a^{(\bar{K}(a))};(s,s'))$.
(6) $N(\Phi(K(a));(s,s')) \subset N(a;(s,s'))$.

Si $a \in (s'_o)$,(30)

$$N(a;(s,s')) = N(a^{-1};(s,s')) = N(\Phi(K(a));(s,s')) .$$

(7) si $a \in (s'_o)$, $a = a_1 + a_2$

$$N(a_1;(s,s')) \cap N(a_2;(s,s')) = N(|a_1|+|a_2|;(s,s')) .$$

Démonstration :

Les points (1) et (2) se déduisent immédiatement du critère (I).

Démontrons le point (4). Soit $m \in (s')$. Soient $q \in \mathbb{Z}$ et K une constante strictement positive tels que $|m_i| \leqq K\, i^q$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Si

$$b = (b_j) \in N(a;(s,s')) ,$$

le critère (I) sera vérifié par cette suite, pour un couple d'entiers

$$(m_o,n_o) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ , et des constantes } c_m > 0 \text{ , } m \in \mathbb{N} .$$

On aura

$$|a_{1,i}\, b_j| \leqq c_m\, i^{m_o}\, j^{-m} \text{ , pour } i > j$$

$$|a_{2,i}\, b_j| \leqq (K\, c_m)\, i^{m_o+q}\, j^{-m} \text{ , pour } i > j$$

Et pour $i \leqq j$,

$$|a_{2,i}\, b_j| \leqq (K\, c_m)\, i^{-m+q}\, j^{n_o} ,$$

(30) On note (s'_o) pour $E_o(i)$ (cf. définition 3.1)

ce qui signifie d'après ce même critère (I) que $b \in N(|a_2|;(s,s'))$.

-Démontrons le point (3). Soit $b \in (s')$. Pour que $b \in N(a;(s,s'))$, il faut et il suffit que $a \in N(b;(s,s'))$ (cf. ch. II § 6), donc que $a-a_2 \in N(b;(s,s'))$ ou encore que $b \in N(a_1;(s,s'))$. C.Q.F.D.

-Démontrons le point (5). La relation $N(a;(s,s')) = N(a^{(\bar{K}(a))};(s,s'))$, apparaît clairement d'après le critère (I).

La relation $N(a;(s,s')) = N(a^{(K(a))};(s,s'))$ est une conséquence de (3). En effet, écrivons a sous la forme

$$a = a \cdot \Phi(K(a)) + a \cdot \Phi(\complement K(a)) \quad .$$

La suite $a \cdot \Phi(\complement K(a))$ est à décroissance rapide. En effet l'ensemble des indices appartenant au support de a sans appartenir à $K_r(a)$, pour une valeur de $r < R(a)$, est fini par définition. Donc il suffit de voir que si

$$B = \bigcup_{r \leqq R'(a)} K_r(a) \quad ,$$

la suite $a^{(B)}$ est dans (s) , c'est-à-dire que pour tout $\alpha > 0$, la suite

$$(i^{\alpha} |\Phi_i(B)\ a_i|)_{i \in \mathbb{N}}$$

est bornée. Ceci est clair puisqu'il n'existe par définition, qu'un nombre fini d'indices i dans B tels que $|a_i \cdot \Phi_i(B)|$ soit minoré par $i^{-\alpha}$. Donc

$$a^{(\complement K(a))} \in (s)$$

et d'après (3) :

$$N(a;(s,s')) = N(a^{(K(a))};(s,s')) \quad ;$$

ce qui établit (5).

-Démontrons le point (6). Nous venons de voir que

$$N(a;(s,s')) = N(a.\Phi(K(a));(s;s')) \quad .$$

Appliquons (4), il vient

$$N(\Phi(K(a));(s,s')) \subset N(a;(s,s')) \quad .$$

Supposons maintenant que $a \in (s'_o)$ (c'est-à-dire que $a^{-1} \in (s')$) . Posons

$$\alpha = |a^{(K(a))}| \quad .$$

Par hypothèse la suite $\alpha^{-1} \in (s')$ et on a

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = \Phi(K(a)) \quad .$$

Il vient d'après (4) :

$$N(\alpha;(s,s')) \subset N(\alpha^{-1}\alpha;(s,s')) = N(\Phi(K(a);(s,s')) \quad .$$

D'autre part on a :

$$\alpha = \alpha \cdot \Phi(K(a)) \quad ,$$

et en appliquant à nouveau (4), on obtient l'inclusion :

$$N(\Phi(K(a));(s,s')) \subset N(\alpha;(s,s')) \quad .$$

D'où il suit que

$$N(\alpha;(s,s')) = N(\Phi(K(a));(s,s')) \quad .$$

Appliquons (1) et (5), on obtient alors que

$$N(a;(s,s')) = N(\Phi(K(a));(s,s')) \quad .$$

Mais on a $K(a) = K(a^{-1})$, puisque $R'(a) = R(a^{-1})$ par définition . Les égalités suivantes s'en déduisent :

$$N(a;(s,s')) = N(a^{-1};(s,s')) = N(\Phi(K(a));(s,s')) \quad ;$$

ce qui achève la démonstration de (6).

-Démontrons le point (7). Posons $A_1 = K(a_1)$ et $A_2 = \bar{K}(a_2)$. D'après les inégalités (I), on a :

$$N(\Phi(A_1 \cup A_2);(s,s')) = N(\Phi(A_1);(s,s')) \cap N(\Phi(A_2);(s,s')) \quad .$$

La suite $|a_1| + |a_2|$ appartient à (s_0') et $\bar{K}(|a_1| + |a_2|) = A_1 \cup A_2$.
La propriété (6) conduit alors aux égalités

$$N(|a_1|+|a_2|;(s,s')) = N(\Phi(A_1 \cup A_2);(s,s')) = N(a_1;(s,s')) \cap N(a_2;(s,s')) \quad .$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition.

Pour qu'une suite b de (s') appartienne à N(a;(s,s')) nous avons déjà noté qu'il est nécessaire et suffisant que a appartienne à N(b;(s,s')) . Appliquons cette remarque aux espaces décrits dans la proposition 3.10, on obtient une forme équivalente de la proposition 3.10 sous la forme de la

PROPOSITION 3.10'.- Soient a , a_1 , a_2 trois suites de (s') . On a les propriétés suivantes :

(1)' Pour que $a_1 \in N(a;(s,s'))$ il faut et il suffit que $|a_1| \in N(a;(s,s'))$.
(2)' si $|a_1| \leqslant |a_2|$ et si $a_2 \in N(a;(s,s'))$, alors $a_1 \in N(a;(s,s'))$
(4)' si $a_1 \in N(a;(s,s'))$, pour tout $m \in (s')$, on a :

$$a_1 \cdot m \in N(a;(s,s')) \quad .$$

(5)' <u>Pour que</u> $a_1 \epsilon N(a;(s,s'))$, <u>il faut et il suffit que</u>

$$a_1 . \Phi(K(a_1)) \epsilon N(a;(s,s')) \quad .$$

(6)' <u>si</u> $a_1 \epsilon (s'_o)$, <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

a) $a_1 \epsilon N(a;(s,s'))$

b) $\Phi(K(a_1)) \epsilon N(a;(s,s'))$

c) $a_1^{-1} \epsilon N(a;(s,s'))$.

Appliquons (6)' et (4)', on obtient le

COROLLAIRE 1.- <u>On suppose que</u> $a_1 \epsilon (s'_o)$. <u>Si</u> $a_1 \epsilon N(a;(s,s'))$

$$(s'_{K(a_1)}) \subset N(a;(s,s')) \text{ } (^{31})$$

COROLLAIRE 2.- <u>On suppose que</u> $a_1 \notin (s)$ <u>et que</u> $a \epsilon (s'_o)$, <u>alors si</u>

$$K(a_1) \subset K(a) \quad ,$$

<u>on a</u> :

$$a_1 \notin N(a;(s,s')) \quad .$$

<u>Démonstration</u> :

Appliquons la propriété (6) on a :

$$N(a;(s,s')) = N(\Phi(K(a));(s,s'))$$

Puisque $K(a_1) \subset K(a)$ on peut écrire :

$$N(\Phi(K(a));(s,s')) \subset N(\Phi(K(a_1));(s,s')) \subset N(a_1;(s,s'))$$

(cf. propriétés (2) et (6)).
Par conséquent si la suite a_1 appartient à $N(a;(s,s'))$, on a aussi

$$a_1 \epsilon N(a_1;(s,s')) \quad ,$$

d'où une contradiction puisque cette dernière condition impose que $a_1 \epsilon (s)$ (cf. lemme de la proposition 3.5). Donc $a_1 \notin N(a;(s,s'))$. C.Q.F.D.

2) <u>Caractérisation des espaces</u> $N(a;(s,s'))$.

Nous allons maintenant donner des critères équivalents au critère (I). On a la

PROPOSITION 3.11.- <u>Soient</u> $a = (a_i)$, $b = (b_j)$ <u>deux suites de</u> (s') . <u>Les cinq conditions suivantes sont équivalentes</u> :

---

(31) Si $A \subset N$ on note (s'_A) pour $E_A(i)$, c'est-à-dire l'ensemble des suites de (s') à support dans A (cf. définition 3.1 § 2).

1) $b \in N(a;(s,s'))$.
2) Critère (I).
3) Critère (II) :

Il existe un couple d'entiers $(m_o,n_o) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $m_o > R(a)$, $n_o > R(b)$, et pour tout $m \in \mathbb{N}$, une constante $\gamma_m > 0$, tels que pour tout $r \in \mathbb{Z}$ compris entre $R'(a)$ et $R(a)$ et tout $r' \in \mathbb{Z}$ compris entre $R'(b)$ et $R(b)$ on ait les inégalités :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad i^{m_o - r} \geqq \gamma_m \, j^{m+r'} \quad , \text{ pour } j < i \ , \ i \in K_r(a) \ , \ j \in K_{r'}(b) \\ \text{(ii)} \quad j^{n_o - r'} \geqq \gamma_m \, i^{m+r} \quad , \text{ pour } j \geqq i \ , \ i \in K_r(a) \ , \ j \in K_{r'}(b) \ . \end{cases}$$

4) Critère (III) :

Il existe un couple d'entiers $(m_o,n_o) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $m_o > R(a)$, $n_o > R(b)$, tel que pour tout $(r,r') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, vérifiant $R'(a) < r < R(a)$ et $R'(b) < r' < R(b)$, on puisse déterminer, pour chaque $\alpha > 0$, des constantes strictement positives $c_\alpha^{(r)}$ et $c_\alpha^{(r')}$ telles que pour tout $i \in K_r(a)$, on ait :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad i^{m_o - r} \ . \ (i^-(K_{r'}(b))^{-\alpha} > c_\alpha^{(r')} \\ \text{(ii)} \quad (i^+(K_{r'}(b)))^{n_o - r'} \ . \ i^{-\alpha} > c_\alpha^{(r)} \ . \end{cases}$$

5) Critère (IV) :

Il existe un couple d'entiers $(m_o,n_o) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $m_o > R(a)$, $n_o > R(b)$, tel que pour tout $(r,r') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, vérifiant $R'(a) < r < R(a)$ et $R'(b) < r' < R(b)$, on puisse déterminer pour chaque $\alpha > 0$ des constantes finies $k_\alpha^{(r)}$, $k_\alpha^{(r')}$ en sorte qu'on ait :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad |a_i^{(m_o)}| \ . \ (i^-(K_{r'}(b)))^\alpha < k_\alpha^{(r')} \quad , \ i \in K(a) \ , \\ \text{(ii)} \quad |b_j^{(n_o)}| \ . \ (j^-(K_r(a)))^\alpha < k_\alpha^{(r)} \quad , \ j \in K(b) \ , \\ \text{(iii)} \quad a \ . \ b \in (s) \ . \end{cases}$$

Démonstration :

-Les critères (I) et (II) sont équivalents. En effet, d'après les propriétés (5) et (5)' des propositions 3.10 et 3.10', on obtient des conditions (I)' équivalentes aux conditions (I), en limitant les valeurs des indices i et j à $K(a)$ et $K(b)$ respectivement. Substituons dans les inégalités ainsi obtenues i^r à a_i , et $j^{r'}$ à b_j , on obtient alors le critère (II).

Réciproquement supposons que (II) est réalisé. Alors pour $i \in K_r(a) \cap \complement K_{r+1}(a)$ et pour $j \in K_{r'}(b) \cap K_{r'+1}(b)$, on a :

$$|a_i\, b_j| < \frac{1}{\gamma_m} \frac{i^{m_o}}{j^m} \cdot i \cdot j < \frac{1}{\gamma_m} \frac{i^{m_o+1}}{j^{m-1}} \quad , \text{ pour } j < i \ ,$$

$$|a_i\, b_j| < \frac{1}{\gamma_m} \frac{j^{n_o}}{} \cdot i \cdot j < \frac{1}{\gamma_m} \frac{j^{m_o+1}}{i^{m-1}} \quad , \text{ pour } i \leqq j \ .$$

Ceci ayant lieu pour tout r et tout r' , on obtient les inégalités (I)' donc aussi (I). Ce qui prouve l'équivalence de (I) et (II).

-<u>Les critères</u> (II) et (III) <u>sont équivalents</u>.

Supposons que (II) (i) soit réalisé. Il l'est en particulier pour $i \in K_r(a)$ et $j = i^-(K_{r'}(b)))$, ce qui donne

$$i^{m_o - r} \cdot (i^-(K_{r'}(b)))^{-(m+r')} \geqq \gamma_m \ .$$

Si $\alpha > r'$, on a :

$$i^{m_o - r} \cdot (i^-(K_{r'}(b)))^{-\alpha} \geqq c_\alpha^{(r')} \ ,$$

où $c_\alpha^{(r')} = \gamma_{\alpha - r'}$. Si $\alpha \leqq r'$, on pose $c_\alpha^{(r')} = \gamma_1$. On obtient ainsi (III) (i) pour toute valeur de $\alpha > 0$.

On obtient de la même manière l'équivalence de (II) (ii) et (II) (iii), en posant pour tout $\alpha > r$: $c_\alpha^{(r)} = \gamma_{\alpha - r}$ et pour tout $\alpha - r > 0$: $c_\alpha^{(r)} = \gamma_1$.
Le critère (II) entraîne donc (III).

Réciproquement supposons les conditions (III) réalisées. Pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $m+r' \leqq 0$ et $n+r \leqq 0$, les inégalités (II)(i) et (II)(ii) sont trivialement vérifiées pour toutes constantes γ_m , γ_n supérieures à 1 , puisqu'on a supposé $m_o > R(a)$, $n_o > R(b)$.

Si $n+r' > 0$ et $m+r > 0$, on pose $\alpha = n+r'$, $\beta = m+r$. Il vient en posant $\gamma_\alpha^{(r)} = c_{n+r'}^{(r)}$ et $\gamma_\beta^{(r')} = c_{m+r}^{(r)}$:

$$\gamma_\alpha^{(r')} \cdot j^\alpha \leqq i^{m_o - r} \quad , \text{ si } i > j \ , \ i \in K_r(a) \ , \ j \in K_{r'}(b) \ .$$

$$\gamma_\beta^{(r)} \cdot i^\beta \leqq j^{\,o^{-r'}} \quad , \text{ si } i \leqq j \ , \ i \in K_r(a) \ , \ j \in K_{r'}(b) \ .$$

On obtient alors les inégalités (II) en posant

$$\gamma_m = \operatorname*{Inf}_{\operatorname{Inf}(R'(a),R'(b)) \leq \sigma \leq \operatorname{Sup}(R(a),R(b))} (1, \gamma_m^{(\sigma)}) \quad .$$

Ceci montre l'équivalence des critères (II) et (III).

-<u>Le critère</u> (I) <u>implique</u> (IV).

En effet, il suffit d'écrire (I)(i) pour tout $i \in \mathbb{N}$, $j \in K_{r'}(b)$, $R'(b) < r' < R(b)$ et de substituer $j^{r'}$ à b_j dans ces inégalités. On obtient (IV) (i) en faisant alors varier r' . On aura (IV) (iii) en limitant (I) (ii) aux indices $i \in K_r(a)$ et en substituant i^r à a_i , pour tout r compris entre $R'(a)$ et $R(a)$, (IV) (iii) en écrivant (I) pour $i=j$.

-Montrons enfin, pour achever la démonstration de la proposition que le <u>critère</u> (IV) <u>implique</u> (III). Soit $r \in \mathbb{Z}$, $R'(a) < r < R(a)$. On limite les inégalités (IV) (i) aux indices $i \in K_r(a)$ et on minore $a_i^{(m_o)}$ par i^{r-m_o} pour de tels entiers. En faisant varier, on obtient (III) (i).

La restriction de (IV) (iii) aux entiers $j \in K_{r'}(b)$, $R'(b) < r < R(b)$ donne, si on minore $b_j^{(n_o)}$ par $j^{n_o-r'}$:

$$j^{-n_o+r'} \cdot i^{\alpha} \leq k_{\alpha}^{(r)}$$

pour tout $i \in K_r(a)$ tel que $i < j$, $j \in K_{r'}(b)$.

On peut d'autre part d'après (IV) (iii) déterminer une constante finie $k'^{(r)}_{\alpha}$ telle que :

$$j^{-n_o+r'} \cdot i^{\alpha} \leq k'^{(r)}_{\alpha} \quad ,$$

pour tout $i = j$, $i \in K_r(a)$, $j \in K_{r'}(b)$.

En joignant les deux inégalités écrites ci-dessus, on a :

$$j^{-n_o+r'} \cdot i^{\alpha} \leq \operatorname{Sup}(k'^{(r)}_{\alpha} , k_{\alpha}^{(r)}) \quad ,$$

pour $j \in K_{r'}(b)$, $i \in K_r(a)$, $i \leq j$, en particulier pour $j = i^+(K_{r'}(b))$ avec $i \in K_r(a)$, ce qui conduit à (III) (ii) et achève la démonstration.

Dans le cas où on suppose que la suite $a \in (s'_o)$, cette caractérisation se simplifie. D'après la propriété (6) de la proposition 3.10 on est ramené au cas d'une suite caractéristique d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. On peut alors énoncer le

THÉORÈME 3.1.- <u>Soit</u> $a \in (s'_o)$. <u>Posons</u> $A = K(a)$. <u>Pour qu'une suite</u> $b = (b_j)$ <u>appartienne à</u> $N(a;(s,s'))$, <u>il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées</u> :

$$
(V)\quad \left[\begin{array}{l}
\text{(i) \underline{Il existe} } m_o \in \mathbb{N} \text{, \underline{tel que la suite} } b^{(m_o)} = (b_j . j^{-m_o})_{j\in\mathbb{N}} \text{, \underline{vérifie}} \\
\text{\underline{la condition : pour tout} } \alpha > 0 \text{ \underline{on a}} \\
\qquad \lim_{\substack{i \to \infty \\ i \in A}} \left[\left(\sup_{j \geq i} |b_j^{(m_o)}| \right) . \, i^{\alpha} \right] = 0 \, . \\
\text{(ii) \underline{Pour tout} } r \in \mathbb{Z} \text{ , } R'(b) < r < R(b) \text{ , \underline{et pour tout} } \alpha > 0 \\
\qquad d^{-}_{\alpha} (A, K_r(b)) > -\infty \, . \text{ (32)}
\end{array}\right.
$$

Démonstration :

Notons tout d'abord que la condition (i) implique que la suite b est dans (s') et qu'on peut alors supposer $m_o > R(b)$. Il suffit donc, en vertu de la proposition 3.11, de montrer l'équivalence des conditions écrites ci-dessus et des conditions exprimées dans le critère (IV). On obtient immédiatement une telle équivalence en écrivant (IV) pour $r = 0$.

COROLLAIRE 1.- Une condition nécessaire pour $b = (b_j) \in N(a;(s,s'))$ est que pour tout $r' \in \mathbb{Z}$, $K_{r'}(b)$ appartienne à la classe $\mathfrak{S}(A)$.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que la condition (i) du théorème 3.1 implique que pour tout $\alpha > 0$ et tout r' compris entre $R'(b)$ et $R(b)$ on doit avoir

$$d^{+}_{\alpha} (A, K_{r'}(b)) > -\infty \, .$$

Cette condition jointe à la condition (ii) traduit, par définition même, que $K_{r'}(b)$ appartient à la classe $\mathfrak{S}(A)$. Pour les autres valeurs entières de r' , $K_{r'}(b)$ est un ensemble fini, la condition est encore trivialement vérifiée.

COROLLAIRE 2.- Soit $b \in (s'_o)$. Pour que $b \in N(a;(s,s'))$, il faut et il suffit que $K(b)$ appartienne à la classe $\mathfrak{S}(A)$.

Démonstration :

Les conditions (i) et (ii) du théorème 3.1 peuvent s'énoncer sous la forme suivante :

1°) Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $R'(b) < r < R(b)$, $K_r(b) \in \mathfrak{S}(A)$,

2°) Il existe $m_o \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\alpha > 0$

$$\inf_{R'(b) < r < R(b)} \left(\left(d^{+}_{\frac{\alpha}{m_o - r}} (A, K_r(b)) \right)^{m_o - r} \right) > -\infty \, .$$

(32) cf. note (33)

Puisque $b\in(s'_o)$, $R(b) < +\infty$ et $R'(b) > -\infty$; donc le 2°) est une conséquence du premier point. Mais la classe $\mathfrak{S}(A)$ est stable par réunion finie donc 1°) s'énonce : $K(b)$ appartient à la classe $\mathfrak{S}(A)$. C.Q.F.D.

3) Conditions de non-trivialité des espaces $N(a;(s,s'))$.

Nous allons maintenant, utilisant la caractérisation des espaces $N(a;(s,s'))$ décrite dans les propositions qui précèdent, déterminer tous les vecteurs a de (s') pour lesquels $N(a;(s,s'))$ est non trivial.

En utilisant les résultats généraux du § 1, on obtient la

PROPOSITION 3.11.- Soit $a\in(s')$, $a\notin(s)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $N(a;(s,s'))$ soit algébriquement non trivial est qu'il existe un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ tel que $\Phi(A)\in N(a;(s,s'))$.

Démonstration :

Pour que $N(a;(s,s'))$ soit algébriquement non trivial, il faut et il suffit qu'il existe $r\in\mathbb{Z}$ et un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ tels que

$$\Phi(A) \ . \ i^{-r}\in N(a;(s,s'))$$

(cf. corollaire 1 proposition 3.7). Mais $\Phi(A) \ . \ i^{-r}\in(s'_o)$, il est donc nécessaire et suffisant (cf. proposition 3.10) que $\Phi(A)\in N(a;(s,s'))$. C.Q.F.D

Utilisons maintenant le corollaire 1 de la proposition 3.10', il vient le

COROLLAIRE.- Soit $a\in(s')$, $a\notin s$. Pour que $N(a;(s,s'))$ soit un espace intermédiaire non trivial pour (s,s') , il faut (et il suffit) qu'il existe un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ tel que :

$$(s'_A) \subset N(a;(s,s')) \ .$$

Nous allons maintenant pouvoir démontrer le

THÉORÈME 3.2.- Soit $a\in(s')$, $a\notin(s)$.

Pour que $N(a;(s,s'))$ soit algébriquement non trivial, il faut et il suffit qu'il existe un entier $m_o > R(a)$, un sous-ensemble infini B de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $\alpha > 0$, on ait quel que soit r entier compris entre $R'(a)$ et $R(a)$:

$$\text{(V)} \qquad \lim_{\substack{i\to\infty \\ i\in B}} \left[\left(\sup_{j\geq i} |a_j^{(m_o)}|\right) \ . \ \left(i^{-}(K_r(a))\right)^{\alpha}\right] = 0 \ . \ (^{33})$$

Démonstration :

a) la condition est nécessaire.

---

(33) Signalons une erreur dans les inégalités du lemme 1 de [12], leur formulation correcte figure dans le critère I de la page 81. En conséquence les énoncés de la proposition et du théorème de la page 2 de [12] doivent être remplacés par ceux des th. 3.1 et th. 3.2.

Si $N(a;(s,s'))$ est algébriquement non trivial, il existera un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$, tel que le critère (IV) de la proposition 3.11 soit réalisé. Ecrivons ces conditions. On aura pour tout $\alpha > 0$:

$$|a_i^{(m_o)}| \, . \, j^\alpha \leqq k_\alpha^{(o)} \quad , \qquad \text{pour tout } j\in B \;,\; i \geqq j$$

et
$$j^{-n_o} \, . \, (j^-(K_r(a)))^\alpha < k_\alpha^{(r)} \quad , \text{ pour tout } j\in B$$

pour au moins un couple $(m_o,n_o)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $k_\alpha^{(r)}$ désignant des constantes finies. On aura donc pour tout $j\in B$:

$$(\operatorname*{Sup}_{i\geqq j} |a_i^{(m_o)}|) \, . \, (j^-(K_r(a)))^\alpha \leqq (k_{n_o}^{(o)} \; k_\alpha^{(r)}) \; .$$

Ceci ayant lieu pour tout $\alpha > 0$, on en déduit que

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in B}} \left[(\operatorname*{Sup}_{i\geqq j} |a_i^{(m_o)}|) \, . \, (j^-(K_r(a)))^\alpha \right] = 0 \qquad \text{(V)}$$

Ce qui démontre la nécessité de la condition.

b) <u>la condition est suffisante</u>.

Soient m_o un entier positif et B un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ tels que la condition (V) soit réalisée.

Notons $(i_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{N}}$ la suite ordonnée des points de B et posons pour tout $\sigma\in\mathbb{N}$:

$$u_\sigma = (\operatorname*{Sup}_{i\geqq i_\sigma} |a_i^{(m_o)}|)^{-1}$$

et pour tout $r\in\mathbb{Z}$ compris entre $R'(a)$ et $R(a)$

$$v_{\sigma,r} = (i_\sigma)^-(K_r(a))$$

$$v'_{\sigma,r} = (i_\sigma)^+(K_r(a))$$

L'hypothèse (V) s'écrit encore : Pour tout $r\in\mathbb{Z}$, $R'(a) < r < R(a)$ et tout $\alpha>0$

$$\lim_{\sigma\to\infty} (u_\sigma \, . \, (v_{\sigma,r})^{-\alpha}) = +\infty \; .$$

Nous allons montrer qu'il existe un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ tel que

$$\Phi(A)\in N(a;(s,s'))$$

la suffisance résultera alors de la proposition 3.11. Nous allons pour cela déterminer une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ strictement croissante $(j_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} (1) \quad \text{Pour tout } \alpha > 0 \ : \ \lim_{\sigma\to\infty} \left[\left(\sup_{i \geq j} |a_i^{(m_o)}| \right) . \ j_\sigma^\alpha \right] = 0 \\ (2) \quad \text{Pour tout } \alpha > 0 \text{ et tout } R'(a) < r < R(a) \ : \\ \qquad \lim_{\sigma\to\infty} \left[j_\sigma \ . \ ((j_\sigma)^-(K_r(a)))^{-\alpha} \right] = +\infty \end{cases}$$

La suite caractéristique de l'ensemble $A = \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}} \{j_\sigma\}$ sera un élément de

$$N(a;(s,s'))$$

d'après la proposition 3.11, ce qui démontrera notre assertion.

Démontrons tout d'abord le

LEMME.- <u>Il existe une suite à valeurs entières</u> $(j_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{N}}$ <u>vérifiant les deux conditions suivantes</u> :

(i) <u>Pour tout</u> $\alpha > 0$, $u_\sigma \ . \ j_\sigma^\alpha \to 0$ <u>quand</u> $\sigma \to \infty$,

(ii) <u>Pour tout</u> $\alpha > 0$ <u>et tout</u> $r\in\mathbb{Z}$, $R'(a) < r < R(a)$, $\dfrac{j_\sigma}{(v_{\sigma,r})^\alpha} \to \infty$ <u>quand</u> $\sigma \to \infty$.

<u>Démonstration</u> :

Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $R(a) < r < R(a)$,

$$\frac{u_\sigma}{(v_{\sigma,r})^\alpha} \to +\infty$$

quand $\sigma \to \infty$, c'est-à-dire que quel que soit $M > 0$,

$$\frac{u_\sigma}{(v_{\sigma,r})^\alpha} > M ,$$

pour σ assez grand, ou encore $\log u_\sigma - \alpha \log v_{\sigma,r} > \log M$, soit

$$\frac{\log u_\sigma - \log M}{\log v_{\sigma,r}} > \alpha ,$$

pour σ assez grand.

Donc chaque suite

$$\frac{\log u_\sigma - \log M}{\log v_{\sigma,r}}$$

tend vers $+\infty$. On peut se contenter de donner à M des valeurs entières, ces suites sont alors en infinité dénombrable. Il existe donc, par le lemme classique de Dubois Reymond, une suite (α_σ) tendant vers $+\infty$, telle que

$$\frac{\log u_\sigma - \log M}{\log v_{\sigma,r}} > \alpha_\sigma ,$$

pour σ assez grand, c'est-à-dire

$$\frac{u_\sigma}{(v_{\sigma,r})^{\alpha_\sigma}} > M ,$$

pour σ assez grand, ce qui signifie que la suite

$$\frac{u_\sigma}{(v_{\sigma,r})^{\alpha_\sigma}} \to +\infty .$$

Choisissons maintenant une suite (β_σ) positive tendant vers l'infini, telle que pour tout $\alpha > 0$, la suite

$$\frac{\alpha \cdot \beta_\sigma}{\alpha_\sigma}$$

tende vers 0 quand σ tend vers l'infini. Pour cela il suffit (et il faut) que β_σ croisse moins vite que chaque suite $\frac{\alpha_\sigma}{\alpha}$, ce qui est toujours possible, grâce encore au lemme de Dubois Reymond. Alors pour tout $\alpha > 0$ la suite

$$\frac{u_\sigma}{(v_{\sigma,r})^{\alpha \cdot \beta_\sigma}}$$

tend vers l'infini avec σ .

Posons $j_\sigma = ([u_\sigma] + 1)^{1/\beta_\sigma}$, où $[u_\sigma]$ désigne la partie entière de u_σ . On voit alors, pour tout $\alpha > 0$ et tout $r \in \mathbb{Z}$, $R'(a) < r < R(a)$, que

$$\frac{j_\sigma}{(v_{\sigma,r})^{\alpha}} \to +\infty .$$

La condition (ii) est donc vérifiée pour une telle suite.

Vérifions la condition (i).
Soit $\alpha > 0$, on a pour tout σ l'égalité

$$u_\sigma \cdot j_\sigma^\alpha = u_\sigma^{-1 + \frac{\alpha}{\beta_\sigma}} \left(\frac{[u_\sigma] + 1}{u_\sigma} \right)^{\alpha/\beta_\sigma} .$$

Mais $$u_\sigma = \left(\sup_{i \geqq i_\sigma} |a_i^{(m_o)}|\right)^{-1} \geqq i_\sigma^{m_o - R(a)} ,$$

donc $u_\sigma \to \infty$ quand $\sigma \to \infty$, puisque $m_o > R(a)$. Il en résulte que $u_\sigma \cdot j_\sigma^\alpha$ tend vers zéro quand $\sigma \to \infty$, ce qui démontre (i). Le lemme en résulte.

Considérons une suite (j_σ) du type décrit dans le lemme.
Alors pour tout $R'(a) < r < R(a)$ et tout $\alpha > 0$:

$$((j_\sigma)^-(K_r(a)))^{-\alpha} \cdot j_\sigma \to +\infty ,$$

quand $\sigma \to +\infty$.
En effet puisque pour tout $\alpha > 0$, la suite $u_\sigma^{-1} \cdot j_\sigma^\alpha \to 0$ lorsque $\sigma \to +\infty$, la suite

$$[(i_\sigma)^+(K_r(a)))]^{m_o - r} \cdot j_\sigma^{-\alpha}$$

tend vers l'infini. On en déduit que pour tout r , $(i_\sigma)^+(K_r(a))/j_c \to +\infty$ quand $\sigma \to +\infty$. Donc pour σ assez grand, on a :

$$j_\sigma < (i_\sigma)^+(K_r(a)) = v'_{\sigma,r} .$$

Puisqu'on peut réaliser $j_\sigma > v_{\sigma,r}$ pour σ assez grand, on a

$$(j_\sigma)^-(K_r(a)) = v_{\sigma,r}$$

à partir d'une certaine valeur de σ .

Donc pour tout $\alpha > 0$ et tout r entier $R'(a) < r < R(a)$,

$$((j_\sigma)^-[K_r(a)]) \cdot j_\sigma \to \infty ,$$

quand $\sigma \to \infty$.
La suite (j_σ) vérifie donc la condition (2) énoncée ci-dessus.

Pour achever la démonstration il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite infinie de la suite (j_σ) vérifiant la condition (1).

Supposons qu'il existe une fonction strictement croissante $k \to \sigma_k$ de N dans N telle que pour tout $k \in N$ on ait

$$i_{\sigma_k} \leqq j_{\sigma_k}$$

Alors

$$(\sup_{i \to j_{\sigma_k}} |a_i^{(m_o)}|) \leqq u_{\sigma_k}$$

On a donc d'après la condition (i) du lemme

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{i \geq j_{\sigma_k}} |a_i^{(m_o)}|\right) \cdot j_{\sigma_k}^{\alpha} = 0$$

ce qui prouve que si $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{j_{\sigma_k}\}$, $\Phi(A)\in N(a;(s,s'))$

Si I) n'est pas vérifié alors dès que σ est assez grand, on a

$$i_\sigma > j_\sigma \quad , \text{ pour tout } \sigma\in\mathbb{N} \; .$$

Alors, puisque pour tout $\alpha > 0$

$$\left(\sup_{i \geq i_\sigma} |a_i^{(m_o)}|\right) \cdot j_\sigma^{\alpha}$$

tend vers 0 quand $\sigma \to +\infty$, il suffit pour montrer que la condition (1) est réalisée par la suite (j_σ) de prouver que pour tout $\alpha > 0$, il existe $c_\alpha > 0$, tel que

$$\left(\sup_{j_\sigma \leq i < i_\sigma} |a_i^{(m_o)}|\right) \cdot j_\sigma^{\alpha} < c_\alpha \; .$$

Il est clair qu'on peut se limiter aux valeurs entières positives de α . Soit $r_o\in\mathbb{N}$, $r_o > \alpha - m_o$. Puisque la suite

$$\frac{j_\sigma}{v_{\sigma,r_o}} \to \infty \; ,$$

pour σ assez grand, on aura $v_{\sigma,r} < j_\sigma$, c'est-à-dire, puisque $j_\sigma < i_\sigma$, qu'il n'existe pas d'indice i compris entre j_σ et i_σ pour lesquels

$$a_i \geq i^{-r_o} \; .$$

Donc on peut réaliser pour σ assez grand :

$$a_i^{(m_o)} \leq i^{-r_o - m_o} \leq j_\sigma^{-r_o - m_o} \; ,$$

dès que $j_\sigma \leq i < i_\sigma$.

On a donc

$$\left(\sup_{i_\sigma > i \geq j_\sigma} |a_i^{(m_o)}|\right) \cdot j_\sigma^{\alpha} \leq j_\sigma^{\alpha - (r_o + m_o)} \; .$$

D'après le choix de r_o , cette quantité tend vers 0 quand $\sigma \to +\infty$. La condition (1) est par conséquent réalisée et si

$$A = \bigcup_{\sigma\in N} \{j_\sigma\} \quad , \quad \Phi(A)\in N(a;(s,s')) \quad .$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> $a\in(s_o')$. <u>Pour que</u> $N(a;(s,s'))$ <u>soit algébriquement non trivial, il faut et il suffit que</u> $K(a)$ <u>appartienne à la classe</u> $\mathcal{R}^\circ$ [34] .

4) <u>Propriétés des espaces intermédiaires pour le couple</u> (s,s') .

PROPOSITION 3.13.- <u>Soient</u> A_1 <u>et</u> A_2 <u>deux ensembles de</u> $\mathcal{R}^\circ$; <u>posons</u>

$$a_1 = \Phi(A_1) \quad , \quad a_2 = \Phi(A_2) \quad .$$

<u>Pour que</u> $(s_o') \cap N(a_1;(s,s')) \neq (s_o') \cap N(a_2;(s,s'))$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un sous-ensemble infini propre</u> B <u>de</u> $A_1 \cup A_2$ <u>tel que</u>

$$\Phi(B)\in N(a_1;(s,s')) \cup N(a_2;(s,s')) \quad .$$

<u>Démonstration</u> :

a) <u>la condition est suffisante</u>.

En effet, supposons par exemple que $\Phi(B)\in N(a_1;(s,s'))$. D'après le corollaire 2 de la proposition 3.10' , $\Phi(B)$ n'appartient pas à $N(\Phi(A_1 \cup A_2);(s,s'))$, puisque $B \subset A_1 \cup A_2$. Mais

$$(s_o') \cap N(\Phi(A_1 \cup A_2);(s,s')) = (s_o') \cap N(a_1;(s,s')) \cap N(a_2;(s,s'))$$

(cf. proposition 3.10) . On a donc

$$N(a_1;(s,s')) \cap N(a_2;(s,s')) \cap (s_o') \neq N(a_1(s,s')) \cap (s_o') \quad . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

b) <u>la condition est nécessaire</u>.

Supposons que $(s_o') \cap N(a_1;(s,s'))$ soit distinct de $(s_o') \cap N(a_2;(s,s'))$.
On aura encore, soit

$$N(a_1;(s,s')) \cap N(a_2;(s,s')) \cap (s_o') \neq N(a_1;(s,s')) \cap (s_o') \quad ,$$

soit

$$N(a_1;(s,s')) \cap N(a_2;(s,s')) \cap (s_o') \neq N(a_2;(s,s')) \cap (s_o') \quad .$$

Supposons par exemple que la première condition est réalisée. Posons

$$A_3 = A_1 \cup A_2 \quad , \quad a_2 = \Phi(a_3) \quad .$$

Soit D un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ tel que

---

(34) cf. définition 3.1 ; § 2 n° I .

$$\Phi(D)\in N(a;(s,s')) \quad \text{et} \quad \Phi(D)\notin N(a_3;(s,s')) \quad .$$

Un tel ensemble existe d'après la proposition 3.10' . Appliquons le critère IV de la proposition 3.11 à la suite C . Pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on a

$$\text{(i)} \qquad \operatorname*{Sup}_{i\in D} (i^{-} \ . \ (i^{-}(A_1))^{n}) < +\infty$$

$$\text{(ii)} \qquad \operatorname*{Sup}_{i\in D} (i^{n} \ . \ (i^{+}(A_1))^{-1}) < +\infty \ .$$

On a

$$(i^{-}(A_3))^{n} \ . \ i^{-1} = (i^{-1} \ .(i^{-}(A_1))^{\alpha\cdot n}) \ . \ ((i^{-}(A_1))^{-\alpha} \ . \ i^{-}(A_3))^{n} \ .$$

Puisque $\Phi(D)\in N(a_1;(s,s'))$, le premier facteur du produit du second nombre reste borné quand i parcourt D (critère IV). S'il existait une valeur de α telle que $(i^{-}(A_1))^{-\alpha} \ . \ i^{-}(A_3)$ reste borné, on aurait, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\operatorname*{Sup}_{i\in D} (i^{-1} \ . \ (i^{-}(A_3))^{n}) < +\infty \qquad (1') \ .$$

On voit de même que si, pour une valeur positive de β , $i^{+}(A_1).(i^{+}(A_3))^{-\beta}$ restait borné, on aurait pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\operatorname*{Sup}_{i\in D}((i^{+}(A_3))^{-m_o} \ . \ i^{n}) < +\infty \qquad (2') \ .$$

Par hypothèse $\Phi(D)$ n'est pas dans $N(a_3;(s,s'))$. L'une des deux conditions (1') ou (2') n'est pas réalisée. On pourra donc trouver un sous-ensemble infini D' de D tel que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

1) Pour tout $\alpha > 0$:

$$\operatorname*{Inf}_{i\in D'} (i^{-}(A_3) \ . \ (i^{-}(A_1))^{-\alpha}) > 0 \qquad (3)$$

2) Pour tout $\alpha > 0$:

$$\operatorname*{Inf}_{i\in D'} (i^{+}(A_1) \ . \ (i^{+}(A_3))^{-\alpha}) > 0 \qquad (4)$$

Posons $B_1 = \bigcup_{i\in D'}\{i^{-}(A_3)\}$ et $B_2 = \bigcup_{i\in D'}\{i^{+}(A_3)\}$.

On a, puisque $A_1 \subset A_3$:

$$(i^{-}(A_3))^{-}(A_1) = i^{-}(A_3) \quad ,$$

et

$$(i^{+}(A_3))^{+}(A_1) = i^{+}(A_3) \quad ,$$

pour tout $i \in D'$. Les conditions (3) et (4) donnent alors

$$\operatorname*{Inf}_{i\in B_1} (i \ . \ (i^-(A_1))^{-\alpha}) > 0 \qquad (3')$$

$$\operatorname*{Inf}_{i\in B_2} (i^+(A_1) \ . \ i^{-\alpha}) > 0 \qquad (4') .$$

On a d'autre part pour tout i de D' :

$$i^-(A_3) \ . \ ((i^-(A_1))^+(A_1))^{-\alpha} \leq i \ . \ (i^+(A_1))^{-\alpha}$$

$$(i^+(A_3))^{-\alpha} \ . \ (i^+(A_3))^-(A_1) \leq i^{-\alpha} \ . \ (i^-(A_1)) \ .$$

Puisque la suite $\Phi(D)$ appartient à $N(a_1;(s,s'))$, $\Phi(D')$ lui appartient et le critère IV de la proposition 3.11 est vérifié. On en déduit que pour tout $\alpha > 0$

$$\operatorname*{Sup}_{i\in B_1} (i \ . \ (i^+(A_1))^{-\alpha}) < +\infty \qquad (5)$$

et

$$\operatorname*{Sup}_{i\in B_2} (i^{-\alpha} \ . \ (i^-(A_1))) < +\infty \qquad (4) \ .$$

Ces conditions jointes aux conditions (3') ou (4') montrent (cf. proposition 3.11) que l'une des deux suites $\Phi(B_1)$ ou $\Phi(B_2)$ est dans l'espace $N(a_1;(s,s'))$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE.- Supposons que $A_2 \subset A_1$. Si $N(a_1;(s,s')) \neq N(a_2;(s,s'))$ il existe un sous-ensemble infini B appartenant à la classe $\mathcal{N}^\circ$ tel que

1) $A_2 \subset B \subset A_1$
2) $(s'_B) \subset N(a_2;(s,s'))$
3) $(s'_B) \cap N(a_1;(s,s')) = (s) \cap (s'_B)$.

Nous allons alors pouvoir énoncer le

THÉORÈME 3.3.- Il existe une infinité d'espaces intermédiaires algébriquement et topologiquement non triviaux pour le couple (s,s') , dont les intersections avec (s'_o) sont deux à deux distinctes.

Démonstration :

D'après la proposition 3.13, il suffit de construire une famille d'ensembles de $\mathcal{N}^\circ$, (A_α) , $\alpha\in I$, telle que pour tout couple $(\alpha,\alpha')\in I\times I$, ou bien A_α contienne un sous-ensemble infini appartenant à la classe $\mathfrak{S}(A_{\alpha'})$, ou bien $A_{\alpha'}$ contienne un sous-ensemble infini appartenant à la classe $\mathfrak{S}(A_\alpha)$.

En notant que, pour α fixé, la classe $\mathfrak{S}(A_\alpha)$ est stable par réunion, on peut procéder de la façon suivante.

Soit A_o un ensemble de la classe $\mathcal{N}^o$; il existe $A_1 \in \mathcal{N}^o$ tel que A_1 soit dans la classe $\mathfrak{S}(A_c)$ (cf. corollaire 1, théorème 3.1). On construit alors par récurrence des ensembles A_p de $\mathcal{N}^o$ définis par $A_p \in \mathfrak{S}(A_o \cup \dots \cup A_{p-1})$.

Les ensembles $B_p = A_o \cup \dots \cup A_p$ répondent alors à la question. En modifiant A_o , on obtiendra de nouvelles familles d'ensembles.

Nous allons voir maintenant que tous les espaces intermédiaires "raisonnables" sont formés de suites du type décrit dans la

DÉFINITION 3.2.- <u>On désigne par</u> $\mathfrak{S}(s')$ <u>l'ensemble des suites vérifiant la condition</u> (V) (cf. théorème 3.2 ; n° II-3).

THÉORÈME 3.4.- <u>Tout</u> b-<u>espace intermédiaire pour le couple</u> (s,s') <u>distinct de</u> (s) , <u>faiblement topologiquement non trivial est contenu dans</u> $\mathfrak{S}(s')$.

<u>Démonstration</u> :

Soit F un b-espace intermédiaire pour le couple (s,s') . Supposons qu'il existe a dans F n'appartenant pas à $\mathfrak{S}(s')$. On a :

$$(s) \leqq L(a;(s,s')) \leqq F \leqq (s') .$$

Le théorème de dualité (cf. ch. II ; § 7) donne

$$(s) \leqq F' \subset N(a;(s,s')) \subset (s')$$

Si a n'est pas dans $\mathfrak{S}(s')$, $N(a;(s,s')) \underset{\text{alg}}{=} (s)$ (cf. théorème 3.2 ; n° II-3).

Donc l'injection de F dans (s') est un homomorphisme faible, ce qui contredit l'hypothèse.

5) <u>Exemples d'ensembles de</u> $\mathcal{N}^o$.

A toute suite $a = (a_i)$ de (s) , $a_i > 0$ pour tout i , on peut associer un ensemble de la classe $\mathcal{N}^o$.

On pose $i_1 = [a_o] + 1$ et on définit par récurrence :

$$i_k = [(a_{i_{k-1}})^{-1}]$$

On a alors pour tout $\alpha > 0$

$$\frac{i_k}{(i_{k-1})^\alpha} \geqq a_{i_{k-1}}^{-1} \cdot i_{k-1}^{-\alpha} - i_{k-1}^{-\alpha}$$

cette expression tend vers l'infini puisque $a \in (s)$, ce qui signifie que l'ensemble $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{i_k\}$ est dans $\mathcal{N}^o$.

REMARQUE.- Soit a une suite de (s') dont le support essentiel appartienne à $\mathcal{N}^o$. Nous avons vu que tous les espaces (s'_B) ou $B \in \mathfrak{S}[K(a)]$ étaient des sous-espaces de $N(a;(s,s'))$. Ce sont des espaces de suites lacunaires. Mais il ne faudrait pas croire que tous les éléments de $N(a;(s,s'))$ sont des suites dont le support essentiel est lacunaire, c'est-à-dire d'une suite pouvant s'écrire comme somme d'une suite de (s) et d'une suite lacunaire. Au contraire, nous allons montrer que pour toute suite caractéristique d'un ensemble $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{i_k\}$, où (i_k) est une suite strictement croissante d'entiers tels que pour tout $\alpha > 0$,

$$i_{k+1} \cdot i_k^{-\alpha}$$

tend vers l'infini avec k , l'espace $N(\Phi(A);(s,s'))$ contient des suites dont le support essentiel est $\mathbb{N}$ tout entier.

Soit (α_k) une suite d'entiers positifs tendant vers l'infini, telle que pour tout k :

$$i_k < (i_k)^{\alpha_k} < i_{k+1}$$

et que l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (i_k)^{\alpha_k}$ soit dans la classe $\mathfrak{S}(A)$.
(Une telle suite existe d'après la proposition 3.8 ; § 2 ; n° I). Soit R un entier quelconque. Posons $u_k = (i_k)^{\alpha_k}$, et définissons une suite $b = (b_j)$ comme suit :

$$\begin{cases} b_{u_k} = (u_k)^R \\[2ex] b_{u_k+p} = (u_k+p)^{R-p} , \quad \text{si } p \leqq i_{k+1}-u_k \\[2ex] \begin{cases} b_{u_k-p} = (u_k-p)^{R-r_{p,k}} , \quad \text{si } p < u_k-i_k , \\ \text{où} \\ r_{p,k} = \dfrac{\log u_k}{\log(u_k-p)} . \end{cases} \end{cases}$$

On a :

$$\sup_{i_{k+1} > i \geqq u_k} |b_i^{(R+1)}| = \sup_p \frac{(u_k+p)^{R-p}}{u_k^{R+1}} = u_k^{-1} .$$

D'autre part, on a pour $p < u_k - i_k$:

$$b_{u_k-p}^{(R+1)} = \frac{1}{(u_k-p)^{r_{p,k}+1}} = \frac{1}{u_k\,(u_k-p)} < u_k^{-1} .$$

On en déduit que

$$\sup_{i \geqq i_k} |b_i^{(R+1)}| = u_k^{-1} .$$

Par définition même de la suite (u_k) , pour tout $\alpha > 0$, la suite $i_k^{\alpha} \cdot u_k^{-1}$ tend vers 0 , c'est-à-dire que $\sup_{i \quad i_k} |b_i^{(R+1)}| \cdot i_k^{\alpha}$ tend vers 0.

D'autre part, pour $r \leqq R$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(i_k)^{-}(K_r(b)) = u_k + R - r .$$

Mais pour tout $\lambda > 0$,

$$\frac{i_k}{(u_k+\lambda)^{\alpha}} \to +\infty \quad \text{quand} \quad k \to +\infty ,$$

puisque la suite $\dfrac{i_{k+1}}{(u_k)^{\alpha+1}}$, et u_k tendent vers l'infini.

La suite $b = (b_j)$ remplit donc les deux conditions de la proposition 3.11 (§ 2; n° II-2) et $b \in N(\Phi(A);(s,s'))$.

Montrons maintenant que $K(b) = \mathbb{N}$.

Soit σ un entier positif quelconque

1) $\sigma = u_k + p$, pour une valeur k entière, avec $p < i_{k+1} - u_k$
Alors σ appartient à $K_{R-p}(b)$, et puisque $i_{k+1} - u_k$ tend vers l'infini avec k , $K_r(b)$ contient une infinité de nombres pour tout $r \leqq R$.

2) $\sigma = u_k - p$, pour une valeur k entière, avec $p > u_k - i_k$.
Alors σ est dans $K_{R-r_{p,k}}$.

Soit $\alpha > 1$, pour $p > u_k^{\alpha} - u_k$, $r_{p,k} > \alpha$ et puisque $u_k^{\alpha} - u_k \to \infty$ avec k , on voit que chaque ensemble $K_r(b)$ a une infinité de tels nombres.

Le support essentiel de b est donc bien $\mathbb{N}$ tout entier.[35] C.Q.F.D.

6) <u>Remarques sur les espaces intermédiaires pour le couple</u> (s,s') .

Nous avons vu (cf. proposition 3.11 et corollaire) que tout espace $N(a;(s,s'))$ algébriquement non trivial possède des sous-espaces du type (s_A') , A sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Cette propriété suggère la

PROPOSITION 3.14.- <u>Soit</u> F <u>un espace intermédiaire pour le couple</u> (s,s') (<u>non</u>

(35) Remarquons que $R'(b) = -\infty$.

nécessairement b-intermédiaire), alors pour tout $a \in F$, on a quel que soit r entier fini : $(s'_{K_r(a)}) \subset F$.

Démonstration :

Soit F un espace intermédiaire distinct de (s). Soit a une suite de F n'appartenant pas à (s), r un entier compris entre $R'(a)$ et $R(a)$. La multiplication par $\Phi(K_r(b))$ est un morphisme de (s,s') dans lui-même. Donc

$$a.\Phi(K_r(a)) = a_r$$

est dans F. On a le

LEMME.- Soit c une suite telle que $|c| \leqslant |a|$, alors $c \in F$.

Démonstration :

Il suffit de montrer que $c \in L(a;(s,s'))$ c'est-à-dire qu'il existe $u \in \mathcal{L}((s,s'))$ tel que $u(a) = c$.

On a pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$c_j = \Sigma \left(\delta_{ij} \frac{c_j}{a_j}\right) c_j ,$$

où δ_{ij} désigne l'indice de Kronecker. Posons $u_{ij} = \delta_{ij} \frac{c_j}{a_j}$, $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
On vérifie, grâce à la proposition 3.3, que (u_{ij}) est la matrice associée à un morphisme de (s,s') dans lui-même. Donc

$$c \in L(a;(s,s'))^{(36)} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On a $a_r = \Phi(K_r(a)).a \in L(a;(s,s'))$. Donc en utilisant le lemme

$$j^r \ . \ \Phi(K_r(a)) \in L(a;(s,s')) .$$

La multiplication par j^R, R entier fini, est un morphisme de (s,s'), donc

$$j^R \ . \ \Phi(K_r(a)) \in L(a;(s,s'))$$

pour tout $R \in \mathbf{Z}$, et en appliquant à nouveau le lemme, on voit que toute suite de (s') dont le support est contenu dans $K_r(a)$ appartient à $L(a;(s,s'))$. Autrement dit $(s'_{K_r(a)}) \subset L(a;(s,s')) \subset F$; C.Q.F.D.

REMARQUE.- On pourrait directement étudier les espaces $L(a;(s,s'))$ comme l'a suggéré M. Zerner. Mais ces espaces sont plus difficiles à caractériser. On obtient cependant assez facilement en étudiant des séries

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_{ij}\, a_i , \quad \text{où} \quad (u_{ij}) \in \mathcal{L}((s,s')) , \quad (a_i) \in (s')$$

---

(36) Avec toujours la convention $\frac{c_j}{a_j} = 0$ si c_j et a_j sont nuls simultanément.

des propriétés de lacunarité des suites de (s'_o) qui appartiennent à un espace intermédiaire pour le couple (s,s') .

N° III : Cas général de l'interpolation d'un couple $(F(\beta)\ ,\ E(\beta))$.

Comme nous l'avons énoncé au début de ce paragraphe, on obtient dans le cas général de l'interpolation d'un couple $(F(\beta),\ E(\beta))$ des résultats semblables à ceux décrits dans le cas de (s,s') , en remplaçant partout la suite $\beta : i \mapsto i$ par une suite β arbitraire. Notons par exemple en analogie avec le théorème 3.1 (§ 2 n° II), le

THÉORÈME 3.5.- Soit $a \in E_o(\beta)$. Pour que $b = (b_j) \in N(a;(F(\beta),\ E(\beta))$ il faut et il suffit que

(i) Il existe un entier $m_o \in \mathbb{N}$, tel que la suite $b^{(m_o)} = (b_j\ \beta_j^{-m_o})\ j \in \mathbb{N}$ vérifie la condition :

Pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{\substack{i \in K(\beta;a) \\ i \to +\infty}} \left(\left(\sup_{j \geq i} \left| b_j^{(m_o)} \right| \right) \cdot (\beta_i)^{\alpha} \right) = 0$$

(ii) Pour tout r entier tel que $R'(\beta;b) < r < R(\beta,b)$, $K_r(\beta,b)$ appartienne à la classe $\mathfrak{S}(\beta;K(a))$ [37]

COROLLAIRE.- Soit $b = (b_j) \in E_o(\beta)$. Pour que $b \in N(a;(F(\beta),\ E(\beta)))$, il faut et il suffit que $K(\beta;b)$ appartienne à la classe $\mathfrak{S}(\beta;K(a))$.

En adaptant la démonstration du théorème 3.2 (§ 2 ; n° II) on obtient aussitôt le

THÉORÈME 3.6.- Soit $a \in E(\beta)$, $a \notin F(\beta)$. Pour que $N(a;(F(\beta)\ ,\ E(\beta)))$ soit algébriquement non trivial, il faut et il suffit qu'il existe un entier $m_o > R(\beta;a)$, un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $\alpha > 0$ et tout r entier compris entre $R'(a)$ et $R(a)$, on ait :

$$\lim_{\substack{i \to \infty \\ i \in A}} \left(\left(\sup_{j \geq i} \left| a_j^{(m_o)} \right| \right) \cdot (\beta_{i - (K_r(a))})^{\alpha} \right) = 0$$

COROLLAIRE 1.- Soit $a \in E_o(\beta)$. Pour que $N(a;(F(\beta)\ ,\ E(\beta)))$ soit algébriquement non trivial, il faut et il suffit que son support soit dans la classe $\mathcal{T}_o(\beta)$.

On obtient enfin de façon analogue au théorème 3.3, le

THÉORÈME 3.7.- Il existe une infinité d'espaces $N(a;(F(\beta)\ ,\ E(\beta)))$ algébriquement et topologiquement non triviaux pour le couple $(F(\beta)\ ,\ E(\beta))$ dont les intersections avec $E_o(\beta)$ soient deux à deux distinctes.

---

(37) cf. définition § 3 ; n° I.

En transcrivant dans le cas d'une suite β générale la proposition 3.14, on établit la

PROPOSITION 3.15.- Tout espace intermédiaire pour le couple $(F(\beta), E(\beta))$ distinct de $F(\beta)$, contient un espace $E_A(\beta)$, A sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$.

N° IV : Problèmes des topologies

Tous les résultats que nous avons explicités jusqu'ici ne font pas intervenir les topologies des espaces $N(a;(F(\beta), E(\beta)))$. On sait seulement que ces topologies ne sont pas des topologies faiblement triviales d'espaces intermédiaires. Mais on peut se poser à ce sujet quelques questions fondamentales dont nous n'aborderons pas ici la discussion.

1) $N(a;(F(\beta), E(\beta)))$ est-il quasi-complet? Ici, on est amené de façon naturelle à se demander si l'espace $(\mathcal{L}((F(\beta), E(\beta))))'$ est quasi-complet, ce qui serait vrai si $\mathcal{L}((F(\beta), E(\beta)))$ était quasi-tonnelé ([21]).

Il serait intéressant de décider si $\mathcal{L}((F(\beta), E(\beta)))$ est bornologique, car on saurait alors en particulier que $N(a;(F(\beta), E(\beta)))$ est complet.

2) $N(a;(F(\beta), E(\beta)))$ est-il bornologique? C'est un sous-espace fermé de l'espace ultrabornologique $(\mathcal{L}((F(\beta), E(\beta))))'$ (dual d'un espace $(\mathcal{F})$ complet). S'il est bornologique, on pourra expliciter sa topologie, et, caractérisant l'espace des formes linéaires bornées sur ses parties bornées en tant qu'espace de suites, on en déduira une caractérisation algébrique de tous les espaces intermédiaires pour le couple $(F(\beta), E(\beta))$.

3) $L(a;(F(\beta), E(\beta)))$ est-il quasi-complet? Si cela était, $N(a;(F(\beta), E(\beta)))$ muni de la topologie de dual fort de $L(a;(F(\beta), E(\beta)))$ (qui est une topologie d'espace intermédiaire pour $(F(\beta), E(\beta)))$ serait bornologique. Ceci permettrait de résoudre le problème de savoir s'il existe des espaces intermédiaires non triviaux pour le couple $(F(\beta), E(\beta))$ qui soient bornologiques.

§ 3. Interpolation pour des couples d'espaces de distributions.

N° I.1 : Quelques exemples.

Si on peut définir un isomorphisme du couple (s,s') sur un couple d'interpolation $\mathcal{F}$, appliquant les calculs effectués dans le cas de (s,s') on obtiendra via cet isomorphisme des espaces intermédiaires pour le couple $\mathcal{F}$.

Rappelons quelques isomorphismes connus :

a) Si p est un entier, $p > 1$, nous noterons $(s_{(p)})$ l'espace des suites multiples d'ordre p, $(a_{i_1 \dots i_p})$, $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$, à décroissance rapide,

$(s'_{(p)})$ l'espace des suites multiples d'ordre p à croissance lente, $(s,s')_p$ le couple d'espaces de suites formé de $(s_{(p)})$ et $(s'_{(p)})$. $(\Sigma,\Sigma')_p$ désignera le couple d'espaces de suites formé des couples d'espaces de suites multiples d'ordre p d'indices positifs ou négatifs $\Sigma_{(p)}$ et $\Sigma'_{(p)}$, respectivement à décroissance rapide et à croissance lente.

Considérons l'ensemble des suites multiples d'ordre p ,

$$(a_{i_1 \dots i_p}) \quad , \quad (i_1,\dots i_p) \in \mathbb{N}^p \ .$$

On peut transformer un tel espace en fabriquant une fonction biunivoque σ_p de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^p$, $j \mapsto \sigma_p(j) = (i_{1,j},\dots,i_{p,j})$ qui satisfasse aux propriétés suivantes : L'image réciproque de

$$A_n = \{(i_1 + i_2 + \dots + i_p) \mid i_1 + \dots + i_p = n\}$$

est un intervalle J_n de $\mathbb{N}$ et $J_k < J_{k+1}$, c'est-à-dire que tout α de J_k est inférieur à tout β de J_{k+1} .

Alors à $a = (a_{i_1 \dots i_p})$, on associe la suite $(\tilde{a}_j)_{j\in\mathbb{N}}$, définie par

$$\tilde{a}_j = a_{\sigma_p(j)} \quad , \quad j \in \mathbb{N} \ .$$

Dans ces conditions l'application $\tilde{\sigma}_p$: $a \mapsto \tilde{a}$, établit un isomorphisme entre $(s_{(p)})$ et (s) d'une part, entre $(s'_{(p)})$ et (s') d'autre part, qui conserve l'inclusion naturelle et le produit scalaire. Autrement dit, elle établit un isomorphisme de $(s,s')_p$ sur le couple (s,s') . Nous noterons encore $\tilde{\sigma}_p$ cet isomorphisme.

Par une méthode analogue, on établira un isomorphisme entre les couples d'interpolation $(\Sigma,\Sigma')_p$ et (s,s') .

b) Nous considérons maintenant $T_{(p)}$, le tore à p dimensions, et son groupe dual $(Z_{(p)})$, l'ensemble des systèmes de n entiers $(n_1,\dots,n_p)$. Alors (cf. [36], tome II), la transformation de Fourier établit un isomorphisme entre le couple d'espaces de distributions $(\mathcal{E}(T_{(p)}), \mathcal{E}'(T_{(p)}))$ des fonctions indéfiniment dérivables et des distributions sur le tore à p dimensions, et le couple $(\Sigma,\Sigma')_p$. (La conservation du produit scalaire est la formule de Plancherel).

c) Considérons maintenant le système des fonctions de Hermite sur $\mathbb{R}$ soient :

$$\mathcal{H}_n(x) = \exp(-\pi x^2) \frac{2^{1/4-n}}{\sqrt{n!}} Q_n\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, x\right)^{(38)}$$

---

(38) $Q_n(x) = n! \sum_{m=0}^{[n/2]} (-)^m \frac{(2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}$, $[\frac{n}{2}]$ = partie entière de $\frac{n}{2}$.

(avec les notations de L. Schwartz), base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. On montre que ([36], tome II ; p. 117) $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ équivaut à

$$a_n(f) = \int f(x)\, \mathcal{H}_n(x)\, dx \quad , \qquad n\in\mathbb{N} \quad ,$$

est une suite à décroissance rapide. Pour tout $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, posant $T(\mathcal{H}_n) = a_n(T)$, on en déduit que $T \mapsto a(T) = a_n(T))$, établit un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sur (s'). Il vient en outre $T(f) = \Sigma\, a_n(T)\, a_n(f)$. Donc le développement suivant les fonctions d'Hermite, établit un isomorphisme du couple (s,s') sur le couple $(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ d'espaces de distributions sur $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{R}^p$, les systèmes $\mathcal{H}_{i_1\ldots i_p}(x) = \mathcal{H}_{i_1}(x_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{i_p}(x_p)$ forment un système orthonormé de $L^2(\mathbb{R}^p)$, on en déduit de la même manière un isomorphisme entre le couple $(s,s')_p$ et le couple d'interpolation que nous noterons $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_p$ formé des espaces de distributions $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$. D'après ce qui précède, on a donc un isomorphisme de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_p$ sur (s,s') . Nous le désignerons par σ_p .

N° I.2 : Interpolation pour le couple $(H(\mathbb{C})\ ,\ H(\{0\}))$.

Soit ω un ouvert du plan complexe, nous désignerons par $H(\omega)$ l'espace des fonctions entières sur le plan complexe, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de ω . Si W est un ensemble quelconque du plan complexe, nous noterons ici $H(W)$ l'espace des fonctions holomorphes sur V muni de la topologie de limite inductive des $H(\omega)$ quand ω parcourt la famille des voisinages ouverts de W .

On désigne par $\mathcal{H}_0$ le couple d'interpolation formé des espaces de distributions $H(\mathbb{C})$ et $H(\{0\})$. On peut établir un isomorphisme de $\mathcal{H}_0$ sur un couple

$$(F(\beta)\ ,\ E(\beta))$$

comme suit :

Posons $\beta_j = k^j$, $j\in\mathbb{N}$, où k est un nombre positif quelconque supérieur à 1. L'espace $F(\beta)$ ne dépend pas de la valeur choisie pour k . C'est l'espace des coefficients de Taylor à l'origine des fonctions entières sur $\mathbb{C}$. On peut l'identifier à l'espace des fonctions entières muni de la convergence uniforme sur tout compact, à l'aide de l'isomorphisme $(a_n) \mapsto (Z \mapsto \sum_n a_n Z^n)$. Cet isomorphisme se prolonge en un isomorphisme de l'espace $E(\beta)$ des coefficients de Taylor qui sont dominés par une suite (R^j) pour $R > 0$, sur l'espace $H(\{0\})$ des fonctions holomorphes à l'origine. Cet isomorphisme respecte l'inclusion naturelle et le produit scalaire. On a donc un isomorphisme h_0 de $\mathcal{H}_0$ sur le couple $(F(\beta)\ ,\ E(\beta))$. On peut alors utiliser les résultats généraux énoncés dans le paragraphe 2 n° III. On sait donc qu'il existe une infinité d'espaces intermédiaires qu'on peut caractériser comme espaces de coefficients de Taylor à l'origine.

Les espaces $N(f;\mathcal{K}_o)$

Reportons-nous aux résultats généraux du paragraphe 2 n° III.

-La classe $\mathcal{N}°(\beta)$ s'explicite comme suit :

$A \in \mathcal{N}°(\beta)$ équivaut à :

Il existe un sous-ensemble infini B de A, tel que pour tout $\alpha > 0$

$$d_\alpha^+(\beta;A,B) = \operatorname*{Inf}_{i \in B} (i - \alpha i^-(A)) > -\infty$$

$-B \in \mathfrak{S}(\beta;A)$ si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$

$$\left\langle \begin{array}{l} d_\alpha^+(\beta;B,A) = \operatorname*{Inf}_{i \in A} (i - \alpha i^-(B)) > -\infty \\ d_\alpha^-(\beta;B,A) = \operatorname*{Inf}_{i \in A} (i^+(B) - \alpha i) > -\infty \end{array} \right.$$

Soit $(i_k)_{k \in N}$, une suite d'entiers positifs, qui vérifie la condition :

Pour tout $\alpha > 0$, $i_{k+1} - \alpha i_k$ tend vers l'infini avec k.

Soit

$$a(Z) = \sum_k \frac{Z^{i_k}}{i_k!}, \text{[39]}$$

THÉORÈME 3.8.- L'espace $N(a;\mathcal{K}_o)$ est algébriquement et topologiquement non trivial.

Pour qu'une fonction f de $H(\{0\})$, $f(Z) = \sum_n c_n(f) Z^n$, appartienne à $N(a;\mathcal{K}_o)$,

il faut et il suffit que

(i) il existe R_o supérieur au rayon de convergence de f tel que

$$\sum_k \left(\operatorname*{Sup}_{i \geq i_k} \frac{|c_i(f)|}{R_o^i}\right) Z^{i_k} \in H(\mathbb{C}) ,$$

(ii) Pour tout $R > 0$,

$$\sum_k \left(\operatorname*{Sup}_{i < i_k} |a_i R^i|\right) Z^{i_k} \in H(\{0\}) .$$

---

(39) $i^-(A) = \operatorname{Sup} \{j \in A;\ j < i\}$; $i^+(A) = \operatorname{Inf} \{j \in A;\ j \geq i\}$

On en déduit le

COROLLAIRE.- Si $(c(f))^{-1} = ((c_i(f))^{-1})_{i\in N}$ appartient à $E(\beta)$, la condition du théorème équivaut à la suivante : le support $\bar{K}(c(f))$ appartient à la classe $\mathfrak{S}(\beta;A)$, où $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{i_k\}$.

REMARQUE 3.4.- Les espaces apparaissent comme peu naturels pour des analystes. Ici encore on peut justifier le résultat. On peut opérer comme on l'a fait dans le cas (s,s') , en montrant que dans tout espace intermédiaire pour le couple

$$(F(\beta)\ ,\ E(\beta))$$

il existe un sous-espace du type $E_A(\beta)$, A sous-ensemble "lacunaire" infini de $\mathbb{N}$ (cf. § 2 n° II, 5) ; proposition 3.14). On en déduit que si un espace intermédiaire pour $\mathcal{K}_0$ était contenu dans un espace $(\mathcal{LF})$ on aurait $E_A(\beta) \subseteq F$[40]. (Ceci grâce au théorème du graphe fermé ([19] ; préliminaires)). On voit ainsi qu'un espace intermédiaire pour $\mathcal{K}_0$ ne peut pas être contenu dans un espace de fonctions holomorphes sur un compact de $\mathbb{C}$ distinct de $\{0\}$. (En effet ceci signifierait que pour toute suite $c = (c_i)$ de $E(\beta)$, la série $\sum_{n\in A} a_n Z^n$ serait convergente en un point Z distinct de l'origine).

On peut opérer également de façon directe pour montrer qu'un espace intermédiaire pour $\mathcal{K}_0$ ne contient pas un espace de fonctions holomorphes sur un ensemble V de Runge du plan complexe distinct de $\{0\}$ ou de $\mathbb{C}$. En effet, pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, et pour tout $f\in H(\{0\})$, posons $f_\lambda(Z) = f(\lambda Z)$. L'application $u : f \mapsto f_\lambda$ est un morphisme du couple $\mathcal{K}_0$ sur lui-même. Si F est un espace intermédiaire tel que $H(V) \subseteq F$, u se prolonge en une application continue de F dans F . Grâce à la propriété que V est de Runge, on peut affirmer que le prolongement de u à $H(V)$ est encore l'opérateur de changement de variable $Z \mapsto \lambda Z$. Donc F devra contenir $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} H(\lambda V) = H(\{0\})$ C.Q.F.D.

N° II : Interpolation pour le couple $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$.

Nous nous plaçons maintenant sur $\mathbb{R}^n$. Nous allons examiner plus en détail le cas de l'interpolation pour le couple $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$. Nous avons dit dans le N° I de ce paragraphe qu'on obtenait une infinité d'espaces intermédiaires pour $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ à partir des calculs effectués dans le cas (s,s') . Les espaces $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ qu'on obtient ainsi n'entrent pas dans le cadre classique des espaces de distributions utilisés en analyse (espaces de fonctions différentiables, duaux de tels espaces, espaces de fonctions sommables etc...) Nous allons justifier ce résultat en démontrant une proposition sur la structure locale des distributions d'un espace intermédiaire pour $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$.

---

[40] Sous-espace des suites à support contenu dans A .

PROPOSITION 3.16.- Soit F un espace intermédiaire pour $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$,

1) Si la restriction de F à un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ non vide est formée de distributions d'ordre uniformément borné, alors $F \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2) Si la restriction de F à un ouvert contient une mesure de Dirac, alors

$$F \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Démonstration du premier point :

On se ramène aussitôt au cas où Ω est un voisinage ouvert borné de l'origine, puisque les translations et les homothéties sont des isomorphismes du couple $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ sur lui-même.

Soit Ω un tel ouvert. La dérivation envoie F dans F . Donc si $\Theta \in F$, toutes ses dérivées sont dans l'ouvert Ω des distributions d'ordre uniformément borné, par suite Θ est indéfiniment dérivable sur cet ouvert.

Supposons que F soit distinct de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\sigma_n(F)$ (41) est un espace intermédiaire pour (s,s') distinct de (s) . Donc, il existe un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ tel que $(s'_A) \subset \sigma_n(F)$, ou encore $\sigma_n^{-1}(s'_A) \subset F$, (§ 2 n° II.5 ; proposition 3.14).

L'espace (s'_A) muni de la topologie induite par (s') est du type $(\mathcal{DF})$ parce que (s') est un $(\mathcal{DS}))$, donc aussi $\sigma_n^{-1}(s'_A)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Par hypothèse l'application de restriction de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ à l'ouvert Ω envoie $\sigma_n^{-1}(s'_A)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$. Les applications de restriction de

$$\sigma_n^{-1}(s'_A) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

et de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$, qui est séparé, sont continues. Donc l'application de $\sigma_n^{-1}(s'_A)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ est continue d'après le théorème du graphe fermé ([20], préliminaires).

Une distribution S de $\sigma_n^{-1}(s'_A)$ est somme de sa série d'Hermite

$$S = \sum_{(p_1,\ldots,p_n)\in\sigma(A)} a_{p_1\ldots p_n} \mathcal{H}_{p_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{p_n} \quad ,$$

où $\mathcal{H}_k$ désigne la fonction d'Hermite d'ordre k . Donc, pour toute suite

$$(a_{p_1\ldots p_n}) \quad \text{de} \quad (s'_{(n)})$$

la série écrite ci-dessus devrait converger dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et en particulier à l'origine.

---

(41) σ_n est l'isomorphisme de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ sur (s,s') (cf. § 3, I/1).

Posons $a_{p_1 \dots p_n} = p_1 \dots p_n$. Quand k tend vers l'infini $\mathcal{H}_{2k}(0)$ se comporte comme $k^{-1/4}$. On peut supposer que $\sigma(A)$ contient une infinité de termes de la forme $(2k_1, \dots, 2k_n)$. La série considérée n'est alors pas convergente, ce qui contredit l'hypothèse et achève la démonstration de 1).

Démonstration du 2ème point :

On suppose là encore que Ω est un voisinage borné de l'origine, et on se ramène au cas où la restriction de F à Ω contient la distribution de Dirac à l'origine. Démontrons tout d'abord le

LEMME.- Soient $T_1, \dots, T_n$, n distributions tempérées sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in (s')$. Si $T_1 \otimes \dots \otimes T_n \in L(a;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$, $T_i \in L(a;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1)$, pour $i = 1,2,\dots,n$.

Démonstration :

Soient $\Phi_1, \dots, \Phi_n$, n fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telles que pour tout $i = 1,\dots,n$, on ait :

$$< T_i , \Phi_i >_{(\mathcal{S}',\mathcal{S})_1} = 1 .$$

Les applications $u_i : \Theta \mapsto \Phi_1 \otimes \dots \otimes \Phi_{i-1} \otimes \Theta \otimes \Phi_{i+1} \otimes \dots \otimes \Phi_n$ sont des morphismes de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1$ dans $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$, donc les ${}^t u_i$ définissent des morphismes de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ dans $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1$. En appliquant la propriété d'interpolation on sait donc que si $T_1 \otimes \dots \otimes T_n$ est dans $L(a;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$, $T_i = {}^t u(T_i)$ est dans

$$L(a;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Ceci permet d'affirmer que des espaces de fonctions m fois continuement différentiables distincts de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ne sont pas intermédiaires pour le couple $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$. En notant qu'un espace intermédiaire est stable par dérivation et par transformation de Fourier, on en déduit qu'un espace intermédiaire qui contient une fonction constante ou une distribution de Dirac n'est pas intermédiaire. Ceci permet par exemple d'affirmer que $\mathcal{D}_{L^p}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}_M + \mathcal{O}'_c$, $(\mathcal{S}'_\Gamma)$ ([42]) etc... ne sont pas intermédiaires.

Les espaces $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$

DÉFINITION 3.3.- On pose $\mathfrak{S}(\mathcal{S}_n) = \sigma_n^{-1}(\mathfrak{S}(s))$ (cf. définition 3.2 ; § 2 n° II - 4). C'est l'ensemble des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$, T , telles que

$$N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \text{ soit distinct de } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

([42]) cf. définitions dans [36] et [40].

C'est encore l'espace des distributions T de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dont la suite des coefficients du développement suivant les fonctions d'Hermite, $a(T) = (a_i(T))_{i\in\mathbb{N}^p}$, est tel que la suite $\sigma_n(a(T))$ ([43]) vérifie le critère (V) (cf. § 2 ; n° II - 4).

THÉORÈME 3.9.-

1) <u>Tout</u> b-espace <u>intermédiaire faiblement topologiquement non trivial pour</u> $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ <u>distinct de</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, <u>est contenu dans</u> $\mathfrak{S}(\mathcal{S}_n)$.

2) <u>Si</u> $T\in\mathfrak{S}(\mathcal{S}_n)$, $T\notin\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ <u>les espaces</u> $L(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ <u>et</u> $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ <u>sont algébriquement et topologiquement faiblement non triviaux</u>.

<u>Démonstration</u> :

Le premier point est une transcription du théorème 3.4. (§ 2, n° II - 4) à partir de l'isomorphisme σ_n de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ sur (s,s').

On sait que si $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ est algébriquement non trivial, $L(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}'))$ est topologiquement non trivial (cf. chapitre II ; § 9 ; proposition 2.23), ce dernier est donc contenu dans $\mathfrak{S}(\mathcal{S}_n)$ donc distinct de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, il contient la distribution T et est donc algébriquement non trivial. Rappelons que $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ n'est jamais faiblement topologiquement trivial si $T\notin\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sinon ${}^sN(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ le serait aussi, ce qui contredit les relations

$$({}^sN(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n))' \underset{alg}{=} L(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \neq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> $T\in\mathfrak{S}(\mathcal{S}_n)$, <u>n'appartenant pas à</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, <u>alors</u>

$$N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

<u>est distinct de</u> $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>Démonstration</u> :

D'après le théorème $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ est algébriquement non trivial donc ne contient pas de distribution de Dirac en un point (prop. 3.16) C.Q.F.D.

Nous allons maintenant établir un théorème d'existence d'une infinité d'espaces intermédiaires algébriquement et topologiquement non triviaux pour $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$.

Soit $\mathcal{A}$ une famille de suites de (s'_o) telle que pour tout

$$(a_1,a_2)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A},\quad a_1\neq a_2 ,$$

on ait :

([43]) On a : $\sigma_n(a(T)) = a_{\sigma_n(j)}(T)$, $j\in\mathbb{N}$ (cf. § 3 ; I - 1).

$$N(a_1;(s,s')) \cap (s'_o) \neq N(a_2;(s,s')) \cap (s'_o) \quad . \text{ [44]}$$

Posons $\tilde{\mathcal{A}} = \sigma_n^{-1}(\ )$. On a le

THÉORÈME 3.10.- <u>Les espaces</u> $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$, $T\in\mathcal{A}$ <u>sont non triviaux. Ils vérifient les propriétés suivantes</u> :

1) <u>Pour tout</u> $m\in\mathbb{N}$, <u>les espaces</u> $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{D}'^{(m)}(\mathbb{R}^n)$, $T\in\tilde{\mathcal{A}}$, <u>sont deux à deux distincts</u>.

2) (<u>Propriété de quasi-analycité</u>) <u>Pour que deux espaces</u> $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$, $T\in\tilde{\mathcal{A}}$, <u>coïncident, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert non vide de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>tel que leurs restrictions à</u> Ω <u>coïncident</u>.

3) <u>Pour que deux espaces</u> $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ <u>coïncident, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert non vide de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>tel que leurs intersections avec</u> $\mathcal{E}'(\Omega)$[45] <u>coïncident</u>.

<u>Démonstration du premier point</u> :

Supposons que le résultat est acquis pour $n = 1$. Posons pour tout $a\in(s')$

$$\mathcal{M}(a) = N(a;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) + \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes N(a;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) +$$
$$\dots + \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes N(a;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1) \quad .$$

Soient $m\in\mathbb{N}$, T_1 et T_2 deux distributions de $\tilde{\mathcal{A}}$, on pose $a_1 = \sigma_n(T_1)$, $a_2 = \sigma_n(T_2)$.

Si $N(T_1;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n \cap \mathcal{D}'^{(m)}(\mathbb{R}^n) \underset{alg}{=} N(T_2;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{D}'^{(m)}(\mathbb{R}^n)$, alors toute distribution de $\mathcal{M}(a_1) \cap \mathcal{D}^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ est une distribution de $\mathcal{M}(a_2) \cap \mathcal{D}'^{(m)}(\mathbb{R}^n)$. Mais on a le

LEMME.- <u>Soient</u> $S_1,\dots,S_n\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ <u>tels que</u> $S_1 \otimes \dots \otimes S_n\in N(a_1;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$, alors $S_i\in N(a_1;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1)$, pour $i = 1,2,\dots,n$.

<u>Démonstration</u> :

Elle est analogue à celle du lemme de la proposition 3.16.

Appliquons ce lemme. On a alors :

$$N(a_1;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1) \cap \mathcal{D}'^{(m)}(\mathbb{R}) = N(a_2;(s,s');(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1) \cap \mathcal{D}'^{(m)}(\mathbb{R}) \quad ,$$

soit encore :

---

(44) L'existence d'une telle famille a été prouvée dans le théorème 3.3 (§ 2 n° II - 4).

(45) $\mathcal{E}'(\Omega)$ = Espace des distributions à support compact dans Ω .

$$N(T_1;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1) \cap \mathcal{D}'^{(m)}(\mathbb{R}) = N(T_2;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1) \cap \mathcal{D}'^{(m)}(\mathbb{R}) \quad ,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Reste le cas de $n = 1$. Appliquons le corollaire de la proposition 3.13 (§ 2 n° II - 4). Il existe $B \subset \bar{K}(a_1) \cup \bar{K}(a_2)$ tel que (s'_B) soit un sous-espace de $N(a_1;(s,s'))$ ou de $N(a_2;(s,s'))$ et que

$$(s'_B) \cap N(|a_1| + |a_2|;(s,s')) = (s'_B) \cap (s) \quad .$$

Nous avons vu que $\sigma_n^{-1}(s'_B)$ contient des distributions d'ordre arbitrairement grand (cf. proposition 3.16). Et puisque

$$N(a_1;(s,s')) \cap N(a_2;(s,s')) \cap (s'_B) = (s'_B) \cap N(|a_1| + |a_2|;(s,s')) \quad ,$$

il existe des distributions d'ordre arbitrairement grand dans $\sigma_n^{-1}(s'_B)$ qui ne sont pas dans $N(T_1;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1) \cap N(T_2;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1$; ce qui démontre 1).

Mais la multiplication par une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un morphisme de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$. Donc si $\alpha\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a : $\alpha \cdot \sigma_n^{-1}(s'_B) \subset N(T_1;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1) \cup N(T_2;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_1)$.

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ (non vide). D'après la proposition 3.16, il existe $\alpha\in\mathcal{D}(\Omega)$ et une distribution $S\in\sigma_n^{-1}(s'_B)$ tels que αS ne soit pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors αS n'appartient pas à

$$N(T_1;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap N(T_2;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \quad .$$

En effet si cela était, on aurait :

$$\sigma_n(\alpha S)\in N(a_1;(s,s')) \cap N(a_2;(s,s')) = N(|a_1| + |a_2|;(s,s'))$$

(cf. § 2 ; n° II ; proposition 3.10).

Puisque $B \subset \bar{K}(|a_1| + |a_2|)$, $N(|a_1| + |a_2|;(s,s')) \subset N(\Phi(B);(s,s'))$ (§ 2 ; n° II ; proposition 3.10). D'autre part comme $\sigma_n(S)\in s'_B$, on a par la même proposition que

$$N(\Phi(B);(s,s')) \subset N(\sigma_n(S);(s,s')) \quad .$$

Il vient donc :

$$\sigma_n(\alpha S)\in N(\sigma_n(S);(s,s')) \quad ,$$

soit

$$\alpha S\in N(S;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \quad .$$

La multiplication par α est un morphisme de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')$. On en déduit que :

$$S\in N(\alpha S;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \quad ,$$

qui impose que $\alpha S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (cf. proposition 3.9) ; § 2 ; n° II - 1), ce qui est absurde.

Autrement dit, si $T_1 \neq T_2$, T_1 et $T_2 \in \mathcal{A}$, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, il existe une distribution à support compact contenu dans Ω , appartenant à

$$N(T_1;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cup N(T_2;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$$

sans appartenir à $N(T_1;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap N(T_2;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$. Ceci démontre le trosième point, le deuxième en est une conséquence.

On peut établir de façon analogue la

PROPOSITION 3.17.- <u>Il existe une famille infinie</u> Φ <u>de distributions à support compact telle que les espaces</u> $N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n \cap \mathcal{E}'$, $T \in \Phi$ <u>soient deux à deux distincts</u>.

<u>Démonstration</u> :

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles infinis de $\mathbb{N}$, tels que $A_{i+1} \subset A_i$, pour tout i et tels que

$$N(\Phi(A_{i+1});(s,s')) \cap (s'_o) \neq N(\Phi(A_i);(s,s')) \cap (s'_o) \quad .$$

Alors, d'après la proposition 3.13 (§ 2 ; n° II - 4), on peut trouver des sous-ensembles infinis B_i de A_i , $i \in \mathbb{N}$, tels que :

$$N(\Phi(A_i);(s,s')) \cap (s'_{B_i}) = (s) \cap (s'_{B_i}) \quad , \text{ et } \quad (s'_{B_i}) \in N(\Phi(A_{i+1});(s,s')) \quad .$$

Ensuite, on détermine des distributions T_p de $\sigma_n^{-1}(s'_{B_p})$ et les fonctions α_p de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\alpha_p\ T_p$ soit un élément de $N(\Phi(A_p);(s,s'))$, sans être dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Alors les espaces $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap N(\alpha_p\ T_p;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ sont deux à deux distincts. En effet puisque

$$\alpha_p\ T_p \notin N(\alpha_p\ T_p;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \quad ,$$

il suffit de montrer que $\alpha_p\ T_p \in N(\alpha_{p+k}\ T_{p+k};(\mathcal{S},\mathcal{S}')$, pour tout $k \geqq 1$.

Or, on a les inclusions (déjà justifiées dans le théorème 3.10) :

$$\sigma_n(T_p) \in (s'_{B_p}) \subset N(\Phi(A_{p+1});(s,s')) \subset N(\Phi(A_{p+k});(s,s')) \subset N(\Phi(B_{p+k});(s,s')) \quad ,$$

$$N(\sigma_n^{-1}(\Phi(B_{p+k}));(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \subset N(T_{p+k};(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \subset N(\alpha_{p+k}\ T_{p+k};(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \quad ,$$

ce qui montre que

$$\alpha_p \, T_p \text{ appartient à } N(\alpha_{p+k} \, T_{p+k};(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

N° III - Interpolation pour le couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$.

Nous désignerons par $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ le couple d'interpolation formé des espaces de distributions $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Si x désigne le point courant de $\mathbb{R}^n$,

$$x = (x_1,\ldots,x_n) \quad ,$$

nous préciserons parfois $(\mathcal{E}_x , \mathcal{E}'_x)$.

Nous allons voir de quelle manière on peut ramener l'étude de l'interpolation pour $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ à celle de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$. Nous allons pour cela démontrer le

THÉORÈME 3.11.-

1) Si X est un espace intermédiaire pour le couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, il existe un espace intermédiaire Y pour $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ tel qu'on ait soit $X \underset{alg}{=} Y \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, soit

$$X = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) + Y \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad .$$

2) Si X est un espace intermédiaire pour le couple $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$, il existe un espace intermédiaire Y pour le couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ tel que

$$Y \underset{alg}{=} X \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Nous allons tout d'abord établir quelques propositions.

PROPOSITION 3.18.- Soit X un espace intermédiaire pour le couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, on a

$$X \underset{alg}{=} X \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) + X \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Démonstration :

L'espace X étant intermédiaire pour $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, les espaces $X_1 = X \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et $X_2 = X \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ sont encore intermédiaires pour ce même couple. On a (cf. th. 1.1 ; ch. I ; § 6)

$$(1) \qquad X = L(X_1;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) + L(X_2;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) + \sum_{\substack{T\in X \\ T\notin X_1 \cup X_2}} L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$$

Soit T une distribution de X , de la forme $T_1 + T_2$, où $T_1 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et $T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, T_1 n'étant pas à support compact.

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\alpha T_2 = T_2$. Alors $(1-\alpha)T = (1-\alpha)T_1$ est une fonction indéfiniment différentiable. La multiplication par une fonction de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ est un morphisme du couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, donc $(1-\alpha)T \in X_1$ et $\alpha T \in X_2$. Il suit de l'égalité (1) que

$$L((1-\alpha)T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) + L(\alpha T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \subset X \ .$$

On a l'égalité $T = \alpha T + (1-\alpha)T$, donc

$$L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \subset L(\alpha T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) + L((1-\alpha)T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$$

et

$$L(X;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{alg}{=} L(X_1;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) + L(X_2;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \ .$$

Les espaces X_1 et X_2 sont intermédiaires pour le couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, ce qui signifie que $X_1 = L(X_1;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ et $X_2 = L(X_2(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$. Ceci démontre la proposition.

PROPOSITION 3.19.- Soit X un espace intermédiaire pour $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, contenu dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors

$$X \underset{alg}{=} L(X;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

Démonstration :

On a le

LEMME.- Soit $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, T n'appartenant pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{alg}{=} L(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \ .$$

Démonstration :

Soit u une application continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Supposons que $u(T)\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Il existe alors $\alpha\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\beta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tels que $\beta.u(\alpha T) = u(T)$. Désignons par $[\alpha]$ et $[\beta]$ les opérations de multiplication par α et β respectivement. On a $([\beta] \circ u \circ [\alpha])(T) = u(T)$, et on vérifie aisément que si $u\in\mathcal{L}((\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$, $[\beta] \circ u \circ [\alpha]$ appartient à $\mathcal{L}((\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, tandis que si $u\in\mathcal{L}((\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, $[\beta] \circ u \circ [\alpha]$ est dans $\mathcal{L}((\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$. On en déduit aussitôt le lemme.

Soit maintenant X un espace intermédiaire quelconque pour $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$. On a

$$X \underset{alg}{=} L(X;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) = \sum_{T\in X} L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \ ,$$

d'où encore d'après le lemme :

$$X \underset{alg}{=} \sum_{T\in X} [L(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)] \subset L(X;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \ . \tag{2}$$

Réciproquement, si $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ s'écrit sous la forme $T_1 + \dots T_k$ pour k fini, avec $T_i\in L(S_i;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$, $S_i\in X$, $(i = 1,\dots,k)$, il s'écrit encore

$$(\alpha T_1) + \dots + (\alpha T_k) \ ,$$

pour toute fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\alpha T = T$. Mais $\alpha T_1 \in L(S_i;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ puisque la multiplication par α est un morphisme de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$. Autrement dit T appartient à l'espace $\sum_{S\in X} (L(S;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$, donc à X, d'après (2). Et on a :

$$X \underset{\text{alg}}{=} L(X;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad ; \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

PROPOSITION 3.20.- <u>Soit</u> X <u>un espace intermédiaire pour</u> $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, <u>contenu dans</u> $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, <u>distinct de</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, <u>alors</u> $X \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Démonstration</u> :

Démontrons tout d'abord le

LEMME 1.- <u>Si</u> X <u>contient une fonction strictement positive en dehors d'une boule de rayon fini, alors</u> $X \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Démonstration</u> :

Soit f une fonction de X strictement positive en dehors de la boule de rayon R. Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha f + \beta$ est encore dans X. En choisissant convenablement α et β, on voit donc que X contient des fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $g\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ la multiplication par gh^{-1} est un morphisme de $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, donc

$$g = (gh^{-1})(h)\in L(h;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \quad , \text{ et } \quad X \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \quad , \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

L'espace X contient au moins une fonction non négative invariante par rotation à support non compact. Il contient une fonction non négative à support non compact, puisque X est distinct de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et que $f\bar{f}\in X$ chaque fois que f est dans X. D'autre part, considérons l'application $T \mapsto T^{\natural}$, avec

$$T^{\natural} \quad \int_{\mathcal{O}(n)} (\rho.T)\, d\rho$$

où $\mathcal{O}(n)$ désigne le groupe des rotations de $\mathbb{R}^n$, et où la distribution $\rho.T$ est définie par

$$< \rho.T,\Phi > = < T,\rho^{-1}.\Phi > \qquad , \quad \Phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad ,$$

avec

$$\rho^{-1}.\Phi(x) = \Phi(\rho.x) \quad .$$ (46)

Cette application définit un morphisme du couple $(\mathcal{E}\ \mathcal{E}')_n$ et on sait (cf. [38], exposé n° 7) que si f est une fonction indéfiniment différentiable, on a

---

(46) Ceci a un sens puisque $\mathcal{O}(n)$ est compact et que la fonction $\rho \mapsto \rho.T$ est continue à valeurs dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$f^{\natural}(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{|x|=|y|=r} f(y)\, dS \quad ,$$

où σ_n désigne l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit $f^{\natural}$ est invariante par rotation et d'après la propriété d'interpolation, $f^{\natural}$ est dans X quand f lui appartient.

Donc l'espace X contient une fonction F non négative invariante par rotation à support non compact. Pour montrer que $X \underset{alg}{=} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ il suffit alors de montrer, d'après le lemme, qu'il existe $u \in \mathcal{L}((\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ tel que $u(F)$ soit strictement positive en dehors d'une boule de rayon fini.

On peut alors trouver une suite (a_i,b_i) d'intervalles de $\mathbb{R}^+$, $a_i \to +\infty$, tels que F soit strictement positive sur la couronne

$$K_i = \{a_i < |x| < b_i\}$$

Nous allons choisir la suite des K_i de la façon suivante. On fixe (a_o,b_o) arbitrairement. On choisit ensuite $a_1 > \operatorname{Sup}(1, b_o + a_o)$, puis par récurrence

$$a_{i+1} \geqq \operatorname{Sup}(i+1, b_i + (a_i - b_{i-1})) \quad , \text{ pour } i \geqq 1 \quad .$$

Posons $\ell_i = a_{i+1} - b_i$, la suite $\ell = (\ell_i)$ est alors croissante.

1°) La suite ℓ est bornée supérieurement.

Soit M une borne supérieure de ℓ , Φ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ strictement positive sur la boule de rayon M . L'application $v : T \mapsto T * \Phi$ définit un morphisme du couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, donc $v(F) \in X$. Mais $v(f)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^n$, donc $X \underset{alg}{=} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, d'après le lemme.

2°) La suite ℓ tend vers l'infini.

Choisissons pour chaque $i \in \mathbb{N}$ deux fonctions α_i et β_i de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, strictement positives à l'intérieur de leur support, le support de α_i étant égal à K_i , celui de β_i étant une boule de rayon ε_i , $\varepsilon_i > 0$, la suite des ε_i étant choisie comme il suit : on prend $\varepsilon_o = a_o$ et on impose aux ε_i les conditions récurrentes suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} \varepsilon_{i+1} < a_{i+1} - b_i \\ \varepsilon_{i+1} > a_{i+1} - (b_i + \varepsilon_i) \end{cases}$$

Dans ces conditions, pour toute distribution T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, le support de $T_i^* = \beta_i * \alpha_i T$ est contenu dans la couronne

$$K_i' = \{a_i - \varepsilon_i \leqq |x| \leqq b_i + \varepsilon_i\} \quad ,$$

T^* étant une fonction strictement positive à l'intérieur de cette couronne.

D'après les inégalités (1), $F \mapsto \sum_i \beta_i * \alpha_i F$ est une application de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (sur tout compact on a une somme finie) qui est continue. L'application $T \mapsto \sum_i \beta_i * \alpha_i T$ est manifestement continue de $\mathcal{E}'_K$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, elle est donc continue de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Donc

$$v : T \mapsto \sum_i \beta_i * \alpha_i T$$

est un morphisme de $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ sur lui-même. D'après la propriété d'interpolation $v(F)$ appartient à X . Mais $v(F) = \sum_i F_i^*$ est strictement positive sur

$$\cup \overset{\circ}{K}{}'_i = \complement_{\mathbb{R}^n}\{0\}$$

donc $X \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, par le lemme 1 . C.Q.F.D.

<u>Démonstration du théorème</u> :

Soit X un espace intermédiaire pour $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$. Posons $X_1 = X \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et $X_2 = X \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. D'après la proposition 3.20, X_1 est algébriquement égal soit à $(\mathbb{R}^n)$, soit à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. D'après la proposition 3.19, il existe un espace intermédiaire pour $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$, soit Y , tel que $Y \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \underset{\text{alg}}{=} X_2$. En appliquant la proposition 3.18, on obtient alors le premier point du théorème.

Soit X un espace intermédiaire pour le couple $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ on a

$$X \underset{\text{alg}}{=} L(X;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \quad .$$

Puisque la multiplication par une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un morphisme de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ on a :

$$X \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \underset{\text{alg}}{=} \sum_{b \in X \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)} (L(b;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)) \quad .$$

Par le lemme de la proposition 3.19, on a :

$$X \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \underset{\text{alg}}{=} \sum_{b \in X \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)} L(b;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) = L(X \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n);(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \quad .$$

ce qui démontre le deuxième point du théorème.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> X <u>un espace intermédiaire pour le couple</u> $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$. <u>Si</u> X <u>contient une distribution à support non compact, il contient</u> $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ <u>tout entier.</u>

REMARQUE 3.5.- Grâce à ce théorème et au théorème 3.10 (§ 3 n° II), on peut affirmer qu'il existe une famille infinie d'espaces intermédiaires pour le couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ du type $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, où $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Mais on ne sait pas <u>a priori</u> s'il existe des espaces intermédiaires topologiquement non triviaux. L'étude des espaces $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ va nous permettre de répondre à cette question.

Les espaces $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$

Nous allons maintenant étudier les espaces $N(T;(\mathcal{E};\mathcal{E}')_n)$. Les espaces $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ vérifient l'hypothèse d'approximation de Grothendieck, le couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ est normal (cf. définition 2.8 ; § 8) et vérifie l'hypothèse d'équiapproximation (cf. ch. II ; § 8). Il en résulte par la proposition 2.32 (ch. II ; § 10, n° 2) qu'étant donnée une distribution T de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) + \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, l'espace $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ est celui des distributions S de $(\mathcal{E}+\mathcal{E}')(\mathbb{R}^n)$, telles que $S_x \otimes T_y$ puisse s'écrire comme somme d'une distribution de $B(\mathcal{E}_x ,\mathcal{E}'_y)$ et d'une distribution de $B(\mathcal{E}'_x ,\mathcal{E}_y)$.

Nous allons ramener la caractérisation des espaces $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, à celle des espaces intermédiaires pour le couple $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ précédemment étudiés en démontrant le :

THÉORÈME 3.12.- Soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, de la forme $T_1 + T_2$, où $T_1\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et où $T_2\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, T_2 n'étant pas à support compact. Alors :

1°) si $T_1 = 0$, $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{alg}{=} \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$,

2°) si $T_1 \neq 0$ et $T_2 = 0$,

$$N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{alg}{=} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) + (N(T_1;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)) ,$$

3°) si $T_1 \neq 0$ et $T_2 \neq 0$,

$$N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{alg}{=} N(T_1;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) .$$

Démonstration :

Nous allons tout d'abord établir les

LEMME 1.- Soit $H\in\mathcal{D}'_{x,y}$. Si $H\in B(\mathcal{E}'_x ,\mathcal{E}_y)$, son support est contenu dans un ensemble de la forme

$$\mathbb{R}^n_x \times K ,$$

où K est un compact de $\mathbb{R}^n_y$.

Démonstration :

Si T est une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{E}'_x \times \mathcal{E}_y$, elle définit une application linéaire $u : \theta_x \mapsto (f_y \mapsto T(\theta_x ,f_y))$ de $\mathcal{E}'_x$ dans $\mathcal{E}'_y$ bornée. Nos espaces étant nucléaires complets, l'application u est nucléaire (cf. [21] ; ch. II ; p. 39) , c'est-à-dire définie par un noyau :

$$H(x,y) = \sum_\nu \lambda_\nu \Phi_\nu(x) \otimes Y_\nu (y)$$

où $(\gamma_\nu)\in\ell^1$, $(\Phi_\nu(x))$ borné de $\mathcal{E}_x$, $(Y_\nu(y))$ borné de $\mathcal{E}'_y$.
Un borné de $\mathcal{E}'_y$ est contenu dans un espace $\mathcal{E}'_K$, K compact de $\mathbb{R}^n_y$,(cf.[36]).
La distribution H s'annule donc sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_{\complement K}$, donc par continuité sur

$$\mathbb{R}^n \times \complement K \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

(cf. [36] ; ch. IV ; § 3 ; th. 3). Autrement dit, H a son support contenu dans $\mathbb{R}^n_x \times K$.(47)

En raisonnant par symétrie sur x et y , on obtient le

LEMME 2.- <u>Soit</u> H <u>une distribution sur</u> $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$. <u>Pour que</u> $H\in B(\mathcal{E}_x,\mathcal{E}'_y)$ <u>il faut que son support soit contenu dans le produit d'un compact de</u> $\mathbb{R}^n_x$ <u>par</u> $\mathbb{R}^n_y$.

LEMME 3.- <u>Si</u> $S\in N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, <u>l'une des distributions</u> S <u>ou</u> T <u>est à support compact</u>.

<u>Démonstration</u> :

Si $S\in N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, la distribution $S_x\otimes T_y$ s'écrit, d'après les lemmes 1 et 2, comme la somme d'une distribution H à support compact K' en x et d'une distribution G à support compact K en y . Si T n'est pas un support compact, il existe $\Phi\in\mathcal{D}_y$, à support dans $\complement K$ et telle que $< T_y ,(y) >_{(\mathcal{D}'_y,\mathcal{D}_y)} = 1$. On a donc

$$S_x = < G(x,y),\Phi(y) >_{(\mathcal{D}'_y,\mathcal{D}_y)} ,$$

c'est une distribution à support compact.

Mais les relations $T\in N(S;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ et $S\in N(T;\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ sont équivalentes. Donc si S n'est pas à support compact, T doit être à support compact.

LEMME 4.- <u>Si</u> $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)\supset\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Démonstration</u> :

Soit S(x) une fonction de $\mathcal{E}_x$, T_y une distribution de $\mathcal{E}'_y$.
L'application $(\theta_x ,f)\mapsto < \theta_x ,S(x) >_{(\mathcal{E}'_x,\mathcal{E}_x)} < T_y ,f(y) >_{(\mathcal{E}'_y,\mathcal{E}_y)}$ est une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{E}'_x\times\mathcal{E}_y$. Donc

$$S_x \otimes T_y\in B(\mathcal{E}'_x,\mathcal{E}_y) \quad \text{et} \quad S\in N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On aura de façon analogue le

LEMME 5.- <u>Si</u> $T\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)\supset\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

---

(47) Notons que H est une fonction indéfiniment différentiable en x à valeurs dans $\mathcal{E}'_y$.

LEMME 6.- Si $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\cap N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\cap N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$.

Démonstration :

Soient $S\in\mathcal{E}'_x$, $T\in\mathcal{E}'_y$. Il existe $\alpha\in\mathcal{D}_x$ et $\beta\in\mathcal{D}_y$ tels que $\alpha S = S$ et $\beta T = T$.

Si $S\in N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$, puisque la multiplication par α définit un morphisme de $(\mathcal{S}_x,\mathcal{S}'_x)$ dans $(\mathcal{E}_x,\mathcal{E}'_x)$, $S = \alpha S\in N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n,(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$. Donc

$$T\in N(S;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n);(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) .$$

La multiplication par β est un morphisme de $(\mathcal{S}_y,\mathcal{S}'_y)$ dans $\mathcal{E}_y,\mathcal{E}'_y)$, alors

$$T = \beta T\in N(S;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) .$$

Si $S\in N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, on déduit de façon analogue que $S\in N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ du fait que la multiplication par une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un morphisme de $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ dans $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$. Ceci achève la démonstration du lemme.

Démonstration du théorème :

1) soit $T\in\mathcal{E}_y$, T n'étant pas à support compact. D'après le lemme 5 on a : $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\subset N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, par le lemme 3, $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)\subset\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. On en déduit l'égalité $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \underset{alg}{=} N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$.

2) Soit $T\in\mathcal{E}'_y$. D'après les lemmes 4 et 6 , on a l'inclusion :

$$N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)\supset\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)+\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\cap N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) .$$

Réciproquement si $S\in N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, S est de la forme $S_1 + S_2$ où

$$S_1\in\mathcal{E}_x , \quad S_2\in\mathcal{E}'_x .$$

Par le lemme 4 , $S_2 = S - S_1\in N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, alors d'après le lemme 6 ,

$$S_2\subset N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) ,$$

autrement dit S appartient à l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)+\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\cap N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$, donc

$$N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)+\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\cap N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) .$$

3) Soit $T\in\mathcal{D}'_y$ de la forme $T_1 + T_2$, où $T_1\in\mathcal{E}'_y$, $T_2\in\mathcal{E}_y$, T_2 n'étant pas à support compact. D'après le lemme 3 , $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)\subset\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Le lemme 6 montre alors que

$$N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{alg}{=} \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\cap N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) .$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

On en déduit le

COROLLAIRE.- <u>Il existe une infinité d'espaces intermédiaires</u> $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ <u>contenus dans</u> $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ <u>deux à deux distincts.</u>

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de considérer les espaces $N(1+S;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, où S parcourt une famille Φ de distributions à support compact telle qu'on l'a décrite dans la proposition 3.17 (§ 3, n° II). Les espaces $N(1+S;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ sont alors deux à deux distincts d'après le théorème ci-dessus et la proposition 3.17.

On obtient en corollaire le

THÉORÈME 3.13.-

1-a) <u>Soit</u> A <u>un espace</u> b-<u>intermédiaire pour le couple</u> $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, <u>faiblement topologiquement non trivial, distinct</u> de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, <u>contenant une fonction indéfiniment différentiable à support non borné, alors</u> $A \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) + \mathfrak{S}(\mathcal{S}'_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

1-b) <u>Soit</u> A <u>un espace</u> b-<u>intermédiaire pour le couple</u> $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, <u>distinct de</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ <u>et tel que</u> $A \leqq \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, <u>l'injection n'étant pas un homomorphisme faible,</u> <u>alors</u> $A \subset \mathfrak{S}(\mathcal{S}'_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

2) <u>Supposons que</u> $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{S}'_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, T <u>n'appartenant pas à</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, <u>alors</u>

$$L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \leqq \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad ,$$

<u>il est distinct de</u> $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, <u>algébriquement et faiblement topologiquement non trivial</u> ; $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ <u>est algébriquement non trivial, distinct de</u> $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ <u>et de</u> $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>Démonstration</u> :

1-a) La démonstration de ce premier point est calquée sur celle du théorème 3.9 (§ 3 ; n° II). Si A est un espace intermédiaire vérifiant les conditions requises pour tout $T \in A \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, n'appartenant pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$L(1+T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \leqq A \quad ,$$

d'où on déduit par dualité que

$$A' \underset{\text{alg}}{=} N(1+T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{\text{alg}}{=} N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad ,$$

si T n'est pas dans $\mathfrak{S}(\mathcal{S}'_n)$. Ceci implique que A soit topologiquement faiblement trivial et contredit l'hypothèse.

Pour démontrer b), on procède de façon semblable en utilisant la propriété que

$$N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \quad ,$$

si T est à support compact sans être dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

2) Soit $T \in \mathcal{O}(\mathcal{S}_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, T n'appartenant pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) + \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$$

d'après le théorème ci-dessus. Mais $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n)$ est distinct de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (cf. corollaire du th. 3.9). Ceci montre que $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ est algébriquement non trivial et distinct de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

On a d'autre part $L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{\text{alg}}{=} L(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et

$$L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \subseteq \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad ,$$

puisque $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est un espace b-intermédiaire pour $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ (cf. ch. I ; § 6 ; th. 1.1). Puisque $N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ est distinct de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ est faiblement topologiquement non trivial, et par 1-b) est contenu dans $\mathcal{O}(\mathcal{S}'_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ donc distinct de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, ce qui achève la démonstration.

N° IV - Interpolation pour le couple $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$.

Nous désignerons par $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$ le couple d'interpolation formé des espaces de distributions $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; nous préciserons parfois $(\mathcal{D}_x, \mathcal{D}'_x)$ comme dans le cas de $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$.

On peut ici encore ramener l'étude (algébrique) des espaces intermédiaires pour le couple $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$ à celle des espaces intermédiaires pour $(\mathcal{S},\mathcal{S}')$. On remarque tout d'abord comme l'a fait L. Schwartz, que $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces intermédiaires pour le couple $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$. On a en fait la propriété plus générale suivante :

THÉORÈME 3.14.-

1) Soit A un espace intermédiaire pour le couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, il existe un espace intermédiaire B pour le couple $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$ tel que $A \underset{\text{alg}}{=} B$.

2) Soit A un espace intermédiaire pour le couple $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$ contenu dans $(\mathcal{E} + \mathcal{E}')(\mathbb{R}^n)$, il existe un espace intermédiaire B pour le couple $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ tel que $A \underset{\text{alg}}{=} B$.

Démonstration :

Soit A un espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$. Si A est intermédiaire pour $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$, on a $A = L(A;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) = \sum_{T\in A} L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$; s'il est intermédiaire pour $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$,

$$A = L(A;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n) = \sum_{T\in A} L(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n) \quad .$$

Les deux points du théorème seront donc établis si on montre que pour tout

$$T\in(\mathcal{E}+\mathcal{E}')(\mathbb{R}^n) \quad , \quad L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n \underset{\text{alg}}{=} L(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n \quad ,$$

ou encore si on établit le

LEMME.- $\mathcal{L}((\mathcal{D},\mathcal{D}')_n) \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{L}((\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$.

<u>Démonstration</u> :

1) Soit u une application de $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_x,\mathcal{D}'_y)$. Elle définit par restriction un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_x,\mathcal{D}'_y)$ et de $\mathcal{L}(\mathcal{E}'_x,\mathcal{D}'_y)$. Le noyau associé à u est donc par définition même (cf. [40] ; ch. I ; p. 99 et 100) semi-compact et semi-régulier en x . Soit u une application de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_y)$, sa transposée définit un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_y,\mathcal{D}'_x)$, le noyau associé à u est donc semi-régulier et semi-compact en y .

Donc si $u\in\mathcal{L}((\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$, le noyau associé est un noyau régulier et compact, il appartient donc à $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{E}_y) \cap (\mathcal{E}'_x \hat{\otimes} \mathcal{E}_y)$ d'après (cf. [40] ; ch. I ; p. 102 ; prop. 31) , ce qui établit que

$$u\in\mathcal{L}((\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \quad .$$

2) Soit maintenant $u\in\mathcal{L}((\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$, T le noyau associé à u . Alors

$$u\in\mathcal{L}(\mathcal{D}'_x,\mathcal{D}'_y) \quad .$$

En effet, il suffit de montrer d'après le théorème des noyaux que $T\in\mathcal{D}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$, ou encore, puisque $\mathcal{D}_x$ vérifie la propriété de L. Schwartz (cf. 40 ; ch. I ; p. 55) que, pour toute Φ dans $\mathcal{D}_y$, la fonction $T.\Phi = (x \mapsto \langle T_{x,y},\Phi(y)\rangle_{(\mathcal{D}'_y,\mathcal{D}_y)})$ appartient à $\mathcal{D}_x$. On a $T.\Phi = {}^tu(\Phi)$, et l'application ${}^tu$ est dans

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}_y,\mathcal{E}_x) \cap \mathcal{L}(\mathcal{E}'_y,\mathcal{E}'_x) \quad ,$$

par suite $T.\Phi\in\mathcal{E}_x \cap \mathcal{E}'_x = \mathcal{D}_x$. Ceci montre que $T\in\mathcal{D}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$.

Pour voir que $u\in\mathcal{L}(\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_y)$ il suffit de raisonner par symétrie sur x et y . D'après le raisonnement fait ci-dessus on voit que ${}^tu\in\mathcal{L}(\mathcal{D}'_y,\mathcal{D}'_x)$, donc que $u\in\mathcal{L}(\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_y)$.

Ceci achève la démonstration du lemme, et par suite celle du théorème.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> X <u>un espace intermédiaire pour</u> $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$ <u>distinct de</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. <u>Si</u> X <u>est contenu dans</u> $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ <u>alors</u> $X \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

REMARQUE 3.6.- Comme dans le cas de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$, on va résoudre le problème de savoir s'il existe des espaces intermédiaires topologiquement non triviaux en étudiant les espaces $N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$.

<u>Les espaces</u> $N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$.

THÉORÈME 3.15.-

1) <u>Soit</u> T <u>une distribution sur</u> $\mathbb{R}^n$ <u>à support non compact, on a</u> :

$$N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n) \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) .$$

2) <u>Soit</u> T <u>une distribution de</u> $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, <u>n'appartenant pas à</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, <u>on a</u> :

$$N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n) \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \cap N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) .$$

<u>Démonstration</u> :

1°) On raisonne comme on l'a fait dans le cas de $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$.
Soit S une distribution de $N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$. $S_x \otimes T_y$ est la somme d'une fonction F indéfiniment dérivable en x à valeurs dans $\mathcal{D}'_y$ et à support compact et d'une fonction G indéfiniment dérivable en y à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$ et à support compact.

Donc si T n'est pas à support compact, il existe $\Phi\in\mathcal{D}_y$ tel que

$$< T,\Phi >_{(\mathcal{D}'_y , \mathcal{D}_y)} = 1$$

et tel que le support de Φ ne rencontre pas celui de G . On a alors :

$$S_x = < S_x \otimes T_y , \Phi(y) >_{(\mathcal{D}'_y , \mathcal{D}_y)} = < F(x,y), \Phi(y) >_{(\mathcal{D}'_y ,\mathcal{D}_y)} .$$

C'est une fonction indéfiniment dérivable à support compact. C.Q.F.D.

2) Soit $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, n'appartenant pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. S'il existe S à support non compact dans $N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$, puisque $S\in N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$ équivaut à $T\in N(S;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$, on déduit du premier point ce théorème que T est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ce qui est absurde. On a donc :

$$N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) .$$

Pour achever la démonstration, il suffit d'établir le

LEMME.- <u>Soit</u> $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, <u>on a les égalités</u> :

$$N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \underset{\text{alg}}{=} N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \underset{\text{alg}}{=} N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) .$$

<u>Démonstration</u> :

On raisonne comme dans le cas de $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ (cf. th. 3.12). On choisit α et β dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tels que $\alpha S = S$ et $\beta T = T$. La multiplication par une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un morphisme de $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$ dans $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$ et de $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$ dans $(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n$.
On en déduit que

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n) \underset{\text{alg}}{=} \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap N(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) .$$

Et en utilisant le lemme 6 du théorème 3.12, on obtient l'égalité :

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n) \underset{alg}{=} \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap N(T;(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n) \quad . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le couple $\mathcal{F} = (\mathcal{D},\mathcal{D}')$ est tel que $(\mathcal{F}'_c)'_c = \mathcal{F}$ (cf. ch. II ; § 9), donc en utilisant le fait que la topologie de ${}^cN(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$ est compatible avec la dualité

$$(N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n) \; , \; L(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n))$$

(cf. proposition 2.24; ch. II ; § 9) on aura établi comme on l'a fait dans le cas de $(\mathcal{S},\mathcal{S}')_n$ en corollaire les

THÉORÈME 3.16.- Il existe une infinité d'espaces intermédiaires $N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$ pour le couple $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$, algébriquement et topologiquement non triviaux.

Démonstration :

Il suffit de considérer les espaces $N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$, $T\in\Phi$, Φ désignant une famille du type décrit dans la proposition 3.17 (§ 3 ; n° II).

THÉORÈME 3.17.-

1) Soit X un espace b-intermédiaire pour le couple $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$, distinct de $(\mathbb{R}^n)$, topologiquement faiblement non trivial, alors X est contenu dans

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}'_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad .$$

2) Si $T\in\mathcal{C}(\mathcal{S}'_n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, T n'appartenant pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $L(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$ et $N(T;(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$ sont algébriquement et topologiquement non triviaux.

COROLLAIRE.- Les espaces $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ne sont pas b-intermédiaires pour le couple $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$ (c'est-à-dire que l'injection de $(\mathcal{D}_x \,\varepsilon\, \mathcal{D}'_y) \cap (\mathcal{D}'_x \,\varepsilon\, \mathcal{D}_y)$ dans

$$(\mathcal{E}_x \,\varepsilon\, \mathcal{E}'_y) \cap (\mathcal{E}'_x \,\varepsilon\, \mathcal{E}_y)$$

n'est pas continue).(48)

Problème :

Existe-t-il des espaces intermédiaires distincts de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ pour le couple $(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n$ qui contiennent $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) + \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ sans lui être égaux algébriquement? Autrement dit si T est une distribution à support non borné, $T\notin\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) + \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, a-t-on toujours $L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n) \underset{alg}{=} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$? (On sait seulement que la topologie faible de $L(T;(\mathcal{E},\mathcal{E}')_n)$ est la topologie induite par la topologie faible de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) .

---

(48) On peut ajouter en utilisant le théorème du graphe borélien déjà cité (cf. note 11) que la topologie de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ est strictement plus fine que celle de $(L(\mathcal{E};(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$. (En effet $L(\mathcal{E};(\mathcal{D},\mathcal{D}')_n)$ est souslinien , $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ est du type $(\mathcal{F})$ et le graphe de l'injection canonique de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ dans $L(\mathcal{E};(\mathcal{D},\mathcal{D}')n)$ est fermé).

§ 4. Interpolation de deux duaux d'espaces échelonnés et de deux espaces de Köthe nucléaires.

N° I - Interpolation de deux duaux d'espaces échelonnés.

On se propose maintenant de caractériser quelques espaces $N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ quand $\mathcal{E}$ est un couple d'espaces échelonnés $(F(\beta^{(n)}), F(\beta'^{(n)}))$.

Donnons-nous deux espaces échelonnés $F(\beta^{(n)})$, $F(\beta'^{(n)})$ quelconques. On vérifie aisément que le couple $\mathcal{E} = (F(\beta^{(n)}), F(\beta'^{(n)}))$ est un couple normal d'espaces de suites. Nous allons faire sur ce couple une hypothèse dont le seul but est simplifier les énoncés des résultats qui vont suivre.

(H4) : Soit $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, alors l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée:

(i) $\beta'^{(m)}/\beta^{(n)}$ est bornée,

(ii) $\beta_j'^{(m)}/\beta_j^{(n)}$ tend vers l'infini avec j .

On supposera en outre que les suites $\beta^{(n)}$ et $\beta'^{(m)}$ sont strictement positives.

Soit μ un entier tel que $0 \leqq \mu \leqq 1$. On pose la

DÉFINITION.- L'espace $E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})$ (resp. $E(\beta_\mu^{(m,n)})$ est l'espace des suites $b = (b_j)$ qui peuvent s'écrire comme le produit d'une suite bornée (resp. sommable) et d'une suite $\beta_\mu^{(m,n)}$, où

$$\beta_\mu^{(m,n)} = (\beta^{(n)})^{1-\mu}(\beta^{(m)})^\mu ,$$

muni de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les applications $b \mapsto b.\beta_\mu^{(m,n)}$ de ℓ^∞ (resp. ℓ^1) dans $E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})$.

L'espace $E(\beta_\mu^{(m,n)})$ est alors un espace de Köthe.

Supposons que les suites $\beta^{(n)}$ et $\beta'^{(m)}$ vérifient la condition de nucléarité (H1). Alors, pour une valeur donnée de μ , les suites $\beta_\mu^{(m,n)}$, $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ vérifient cette même condition, l'espace $E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})$ est alors nucléaire et s'identifie au dual fort de l'espace échelonné

$$F(\beta_\mu^{(m,n)}) .$$

Donnons-nous deux suites $\alpha^{(n)}$ et $\alpha'^{(n)}$ définies par :

$$\alpha_i^{(n)} = (R - \tfrac{1}{n})^i \quad , \quad \alpha_i'^{(n)} = (R' - \tfrac{1}{n})^i \quad , \quad i\in\mathbb{N} ,$$

où R et R' dont deux constantes telles que $1 < R' < R$.

On vérifie aisément que les suites $\alpha^{(n)}$ et $\alpha'^{(n)}$ vérifient la condition (H1) de nucléarité, le couple $\mathfrak{X} = (E(\alpha^{(n)}), E(\alpha'^{(n)}))$ est alors un couple normal d'espaces de suites, $E(\alpha^{(n)})$ et $E(\alpha'^{(n)})$ vérifient l'hypothèse d'approximation de Grothendieck. On établit comme pour le couple $(F(\alpha^{(n)}), E(\alpha^{(n)}))$ (cf. § 1, n° I) que $\mathfrak{X}$ vérifie la propriété d'équiapproximation. On en déduit, en appliquant la proposition 2.28 (cf. ch. II, § 10), que si a est un vecteur de

$$E(\alpha^{(n)}) + E(\alpha'^{(n)}) = E(\alpha^{(n)}) \quad ,$$

pour tout couple normal d'espaces de suites $\mathcal{E}$, l'espace $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ est celui des suites $b = (b_j)$ telles que la suite double $(a_i\, b_j)$ soit dans l'espace

$$(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \quad ,$$

c'est-à-dire dans l'espace $B(F(\alpha^{(n)}), E_1) + B(F(\alpha'^{(n)}), E_2)$.

Nous allons déduire de cette caractérisation le :

THÉORÈME 3.18.- <u>Soit</u> $a = (\lambda^i)$, $\lambda \in]R',R[$. <u>Soit</u> $\mathcal{E} = (F(\beta^{(n)}), F(\beta'^{(n)}))$, <u>un couple d'espaces échelonnés vérifiant l'hypothèse</u> (H4) , <u>alors</u> :

1) $$N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} \bigcup_{0 \leq \mu < \mu_0} E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)}) \quad ,$$

<u>où</u> $\mu_0 = \dfrac{\log R/\lambda}{\log R/R'}$.

2) <u>si l'hypothèse</u> $F(\beta'^{(n)}) \leq F(\beta^{(n)})$ <u>est réalisée</u>, $\beta^{(n)}$ <u>et</u> $\beta'^{(n)} > 0$, <u>la topologie de</u> $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>est moins fine que celle de la limite inductive des espaces</u> $E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})$ $(\mu < \mu_0)$.

Supposons que $F(\beta'^{(n)}) \leq F(\beta^{(n)})$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que la suite $\beta'^{(m)}/\beta^{(n)}$ tende vers l'infini. Soient

$$(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad , \quad 0 \leq \mu < 1 \quad ,$$

la suite $\beta_\mu^{(m,n)}$ est dominée par toutes les suites $\beta_\nu^{(m,n)}$, $\mu \leq \nu < 1$. On en déduit les inégalités

$$\begin{cases} E(\beta_\mu^{(m,n)}) \leq E(\beta_{\mu'}^{(m,n)}) \\ F(\beta_\mu^{(m,n)}) \geq F(\beta_{\mu'}^{(m,n)}) \end{cases}$$

dès que $1 > \mu' > \mu$.

Pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$, posons

$$E^{<\lambda}(\beta_\mu^{(m,n)}) = \underset{\mu<\lambda}{\underrightarrow{\mathrm{Lim}}}\, E(\beta_\mu^{(m,n)}) = \underset{\substack{\mu<\lambda \\ (m,n)\in N\times N}}{\underrightarrow{\mathrm{Lim}}} (\beta_\mu^{(m,n)}.\ \ell^\infty) \quad (49)$$

$$F^{<\lambda}(\beta_\mu^{(m,n)}) = \underset{\mu<\lambda}{\underleftarrow{\mathrm{Lim}}}\, F(\beta_\mu^{(m,n)})$$

On a le

COROLLAIRE.- Les notations ont la même signification que dans le théorème 3.6. <u>Supposons que la condition</u> 2) <u>du théorème soit réalisée. Si</u> $F(\beta^{(n)})$ <u>et</u> $F(\beta'^{(n)})$ <u>sont des espaces nucléaires, alors</u>

1) $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) = E^{<\mu_o}(\beta_\mu^{(m,n)})$

2) $L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) = F^{<\mu_o}(\beta_\mu^{(m,n)})$

<u>Démonstration du théorème</u> :

Soit $b = (b_j)$ une suite de $E_\infty(\beta_o^{(m,n)}) + E_\infty(\beta_1^{(m,n)})$. Pour que b appartienne à $N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$, il faut et il suffit que la suite double $(a_i b_j)$ puisse se décomposer comme somme d'un élément de l'espace de suites doubles $B(F(\alpha^{(n)}), F(\beta^{(n)}))$ et d'un élément de l'espace de suites doubles $B(F(\alpha'^{(n)}), F(\beta'^{(n)}))$.

LEMME 1.-

1) $F(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi F(\beta^{(n)}) = F(\alpha^{(n)} \otimes \beta^{(n)})$, où $F(\alpha^{(n)} \otimes \beta^{(n)})$ <u>désigne l'espace échelonné de suites doubles associé à la famille des suites doubles</u> $(\alpha_i^{(n)}\ \beta_j^{(m)})$, $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2) $B(F(\alpha^{(n)}), F(\beta^{(n)})) + B(F(\alpha'^{(n)}), F(\beta'^{(n)}))$,

<u>est l'espace des suites doubles</u> (u_{ij}) <u>pour lesquelles on peut déterminer deux couples d'entiers</u> $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $(m',n')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, <u>et une constante</u> C <u>strictement positive telles que</u> :

$$|u_{ij}| \leq C\,[\alpha_i^{(m)}\ \beta_j^{(n)} + \alpha_i'^{(m')}\ \beta_j'^{(n')}] \quad , \qquad (1)$$

<u>pour tout</u> $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

<u>Démonstration</u> :

1) Si on identifie $F(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi F(\beta^{(n)})$ de façon naturelle à un espace de suites doubles, c'est encore l'espace limite projective des espaces

---

(49) Le symbole $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}$ désigne la limite inductive dans la catégorie des espaces localement convexes, $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}$ désigne la limite projective dans cette même catégorie.

$$(\alpha_i^{(n)}) \cdot (\beta_j^{(m)}) \cdot (\ell^1 \hat{\otimes}_\pi \ell^1)$$

d'après la propriété de commutation du produit tensoriel et de la limite projective (cf. exposé n° 7, prop. 5), par les applications

$$(u_{ij}) \mapsto (\alpha_i^{(n)} \ \beta_j^{(m)} \ u_{ij}) \quad .$$

Mais on a $\ell^1 \hat{\otimes} \ell^1_j = \ell^1_{i,j}$ (ch. I; § 2, p.61); l'espace $F(\alpha^{(m)}) \otimes F(\beta^{(n)})$ est donc un sous-espace vectoriel topologique de $F(\alpha^{(n)} \otimes \beta^{(n)})$. Mais

$$F(\alpha^{(n)} \otimes \beta^{(n)})$$

est complet et l'espace des suites doubles finies est manifestement dense dans $F(\alpha^{(n)} \otimes \beta^{(n)})$. On en déduit que $F(\alpha^{(m)}) \otimes F(\beta^{(n)})$ est dense dans $F(\alpha^{(n)} \otimes \beta^{(n)})$ et par suite que $F(\alpha^{(n)}) \hat{\otimes}_\pi F(\beta^{(n)}) = F(\alpha^{(n)} \otimes \beta^{(n)})$, ce qui établit 1).

2) En appliquant ce résultat, on voit alors que l'espace $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ est la limite projective des deux espaces échelonnés associés respectivement aux deux familles de suites $\alpha^{(m)} \otimes \beta^{(n)}$ et $\alpha'^{(m)} \otimes \beta'^{(n)}$, $(m,n)\in\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Son dual s'identifie alors (cf. § 2, n° 1) à l'espace des suites $v_{ij} + w_{ij}$, où (v_{ij}) est majorée à une constante près par une suite $(\alpha_i^{(m)} \cdot \beta_j^{(n)})$ et w_{ij} par une suite

$$(\alpha_i'^{(m')} \cdot \beta_j^{(n')})$$

convenable ce qui établit la deuxième partie du lemme. La dualité

$$(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}), \ (\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathcal{E}))')$$

est donc de la forme $< u,v > = \sum_{i,j} u_{ij} \ v_{ij}$, $u\in\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathcal{E})$, $v\in(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$.

Reprenons la démonstration du théorème. Supposons les inégalités (1) du lemme 1 réalisées. Elles s'écrivent : il existe $(m,n,m',n')\in\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que

$$|b_j| \leqq C \left[\frac{(R - \frac{1}{m})^i}{\lambda} \beta_j^{(n)} + \frac{(R' - \frac{1}{m'})^i}{\lambda} \beta'^{(n')}_j\right] \tag{1}$$

pour tout couple d'entiers $(i,j)\in\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ou encore : il existe deux nombres A et B , avec

$$\frac{R - 1}{\lambda} \leqq A < \frac{R}{\lambda} \qquad \frac{R' - 1}{\lambda} \leqq B < \frac{R'}{\lambda} ,$$

et un couple d'entiers (m,n) tels que

$$|b_j| \leqq C \ (A^i \ \beta_j^{(n)} + B^i \ \beta'^{(n')}) \quad , \tag{1'}$$

pour tout couple d'entiers $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

D'après le choix de λ , B est inférieur à 1 . Supposons $A < 1$. Faisant tendre i vers l'infini pour j fixé, on trouve $b_j = 0$. On peut donc ajouter aux conditions (1') la condition $A \geqq 1$. Nous écarterons pour l'instant le cas $A = 1$

Fixons A et B , $A > 1$, $B < 1$. Pour réaliser(1'), il suffit de le réaliser pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour la valeur i_j de l'entier i qui rend minimum le second membre de (1'), c'est-à-dire que (1') équivaut à

$$|b_j| \leqq C\, [A^{i_j}\, \beta_j^{(n)} + B^{i_j}\, \beta'^{(n')}_j]$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Remarquons que si $i_j = i'_j + i''_j$, où i'_j est une suite de $\mathbb{R}^+$, (i''_j) une suite bornée de R^+ , l'inégalité (1') est équivalente à la suivante :

Il existe C' strictement positif, tel que

$$|b_j| \leqq C'\, [\beta_j^{(n)}\, A^{i'_j} + \beta'^{(n')}_j\, B^{i'_j}] \tag{2}$$

Soit j une valeur entière positive quelconque. La fonction

$$f(t) = \beta_j^{(n)}\, A^t + \beta'^{(n')}_j\, B^t \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

atteint son minimum pour la seule valeur

$$t_j = \xi + \zeta \log \frac{\beta'^{(n)}_j}{\beta_j^{(n)}}$$

avec

$$\begin{cases} \xi = \log \left(\dfrac{|\log B|}{\log A}\right) / \log \dfrac{A}{B} \\ \\ \zeta' = \log \dfrac{A}{B} \end{cases}$$

On a alors en remplaçant t_j par sa valeur dans f

$$f^{(j)}(t_j) = K(\beta'^{(n')}_j)^{\mu}\, (\beta_j^{(n)})^{1-\mu}$$

avec $$\mu = \frac{\log A}{\log A/B}$$

Notons encore que lorsque A et B prennent toutes les valeurs dénotées ci-dessus μ varie de 0 à μ_o bornes exclues ; $\mu_o = (\log R/\lambda) / (\log R/R')$.

1) Supposons que la suite $\beta'^{(n')}/\beta^{(n)}$ soit bornée. Alors si on pose

$$i'_j = (\operatorname{Sup} t_j, 0) \quad ,$$

la suite $i_j - i'_j$ est bornée et d'après ce qui précède on peut remplacer i_j par i'_j, dans l'inégalité (1'). On a donc

$$|b_j| \leqq C\,[\beta_j^{(n)} + \beta_j'^{(n')}] \leqq C'\,[\beta_j^{(n)}] \leqq C'\,[\beta_j^{(n)} + \beta_j'^{(n')}] \tag{3}$$

où on a posé

$$C' = C(1 + \sup \frac{\beta'^{(n')}}{\beta^{(n)}}) \quad .$$

C'est-à-dire que si pour un entier n il existe au moins un entier n' tel que $\beta'^{(n')}/\beta^{(n)}$ soit borné, alors toute suite majorée à une constante près par $\beta^{(n)}$ est dans $N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$.

2) Supposons maintenant que la suite $\beta'^{(n')}/\beta^{(n)}$ tende vers l'infini. Si on pose $i_j = t_j + i''_j$, il est clair que (i''_j) est une suite bornée. La condition (2) est donc équivalente à la suivante :

Il existe μ , $0 < \mu < \mu_0$, un couple d'entiers $(n,n')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et une constante C strictement positive, tels que

$$|b_j| \leqq C(\beta_j'^{(n')})^{\mu}\,(\beta_j^{(n)})^{1-\mu} \quad , \quad j\in\mathbb{N} \quad . \tag{4}$$

Nous allons maintenant pouvoir conclure :

Soit une suite b dominée par une suite $\beta^{(n)}$. Ou bien il existe n' tel que $\beta'^{(n')}/\beta^{(n)}\in\ell^\infty$ et d'après 1) b est dans $N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$, ou bien il existe n' tel que $\beta'^{(n')}/\beta^{(n)}$ tende vers l'infini, auquel cas $\beta^{(n)}$ est dominée par toute suite $\beta_\mu^{(m',n)}$, $0 < \mu < 1$, et b est dans $N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ d'après 2), (on retrouve ici les conditions données par le cas $A = 1$ que nous avions écarté).

Soit b une suite dominée par une suite $\beta_\mu^{(m,n)}$, $0 < \mu < \mu_0$. Si $\beta'^{(m)}/\beta^{(n)}$ tend vers l'infini b est dans $N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ d'après 2) , sinon $\beta'^{(m)}/\beta^{(n)}$ est bornée d'après (H4) donc $\beta_\mu^{(m,n)}$ dominée par $\beta^{(n)}$, et b est dans $N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ d'après 1).

Il en résulte que <u>pour que</u> $b\in N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$, <u>il faut et il suffit qu'elle soit dominée par une suite</u> $\beta_\mu^{(m,n)}$, $0 \leqq \mu < \mu_0$, ce qui démontre la partie algébrique du théorème.

2) Comparons maintenant les topologies de $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ et celle de limite inductive des espaces $E_\infty[\beta_\mu^{(m,n)}]$, quand on suppose que $F(\beta'^{(m)}) \leqq F(\beta^{(n)})$. Si $\mathcal{E}$ désigne le couple

$$(F(\beta^{(n)}, F(\beta'^{(n)}))\quad ,$$

on a alors $(E_\cup)' = E'_\cap$, et puisque $\mathfrak{X}$ vérifie la propriété d'équiapproximation, on en déduit (cf. proposition 2.19, ch. 2 ; § 7) que

$$(L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \leqq N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})\quad .\text{(}^{50}\text{)}$$

Il suffit de montrer pour établir le deuxième point du théorème que pour tout $0 \leqq \mu < \mu_o$, on a :

$$E_\infty\,[\beta_\mu^{(m,n)}] \leqq L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'\quad .$$

Nous allons maintenant majorer $L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$. D'après le lemme 1

$$\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}) = F(\alpha^{(n)} \otimes \beta^{(n)}) \cap F(\alpha'^{(n)} \otimes \beta'^{(n)})\quad .$$

En écrivant pour tout couple $(m,n)\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et tout couple $(m',n')\in\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ les inégalités

$$((\alpha_i^{(m)})^\theta (\alpha_i'^{(m')})^{1-\theta})\ ((\beta_j^{(n)})^\theta (\beta_j'^{(n')})^{1-\theta})\ |u_{ij}|$$

$$\leqq \theta\ \alpha_i^{(m)}\ \beta_j^{(n)}|u_{ij}| + (1-\theta)\ \alpha_i'^{(m')}\beta_j'^{(n')}|u_{ij}|\quad ,\text{(}^{51}\text{)}$$

où $(u_{uj})\in\mathbb{C}^{N \times N}$, $0 < \theta < 1$. On en déduit aussitôt que pour tout θ compris entre 0 et 1

$$F(\alpha^{(n)} \otimes \beta^{(n)}) \cap F(\alpha'^{(n)} \otimes \beta'^{(n)}) \leqq F[(\alpha^{(m)\theta}(\alpha'^{(m')})^{1-\theta} \otimes (\beta^{(n)})^\theta(\beta'^{(n')})^{1-\theta}]\quad ,$$

ou encore d'après le lemme 1 du théorème 3.18, que :

$$\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{L}) \leqq F((\alpha^{(m)})^\theta(\alpha'^{(m')})^{1-\theta})\ \hat{\otimes}_\pi\ F[(\beta^{(n)})^\theta(\beta'^{(n')})^{1-\theta}]\quad ,$$

soit $$\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leqq F(\alpha_{(1-\theta)}^{(m,n)})\hat{\otimes}_\pi F(\alpha_{(1-\theta)}^{(m,n)})\quad .$$

Mais $a = (\lambda^i)$ est dans le dual de l'espace $F(\alpha_\mu^{(m,n)})$, pour tout $0 \leqq \mu < \mu_o$. En effet, il suffit de vérifier que pour tout $0 \leqq \mu < \mu_o$, la suite a est dominée par une suite $\alpha_\mu^{(m,n)}$ convenable, ou encore qu'il existe m et n tels que :

(^{50}) On aura la même propriété si $F(\beta^{(n)})$ et $F(\beta'^{(n)})$ sont nucléaires car on a encore $(E_\cup)' = E'_\cap$ comme espaces $\mathcal{DF}$ (cf. proposition 1.1)

(^{51}) Ceci résultant immédiatement de l'inégalité
$x^\theta\ y^{1-\theta} \leqq \theta x + (1-\theta)y$ si $x,y \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq 1$, dite inégalité de Young.

$$\lambda < (R - \frac{1}{m})^{1-\mu} (R' - \frac{1}{n})^{\mu} ,$$

ce qui peut toujours être réalisé si

$$\mu < \mu_o = \frac{\log \frac{R}{\lambda}}{\log \frac{R'}{R}} .$$

On en déduit aussitôt le

LEMME.- $L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leqq F((\beta^{(n)})^{1-\mu} (\beta'^{(n)})^{\mu})$, <u>pour tout</u> $0 \leqq \mu < \mu_o$.

En transposant cette injection d'image dense, on a la relation

$$(F(\beta_\mu^{(m,n)}))' \leqq (L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' .$$

D'autre part $(F(\beta_\mu^{(m,n)}))' \underset{\text{alg}}{=} E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})$, et on vérifie aisément que l'application $b \mapsto b/\beta_\mu^{(m,n)}$ est continue de ℓ^∞ dans $(F(\beta_\mu^{(m,n)}))'$, c'est-à-dire que

$$E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)}) \leqq F(\beta_\mu^{(m,n)}))' .$$

On a donc

$$E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)}) \leqq N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) ,$$

pour tout $0 \leqq \mu < \mu_o$. D'où en passant à la limite inductive

$$\underrightarrow{\text{Lim}}\, E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)}) \leqq N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

<u>Démonstration du corollaire</u> :

1) Supposons les conditions 2) du théorème 3.6 réalisées. Alors on a :

$$\bigcup_{o < \mu < \mu_o} E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)}) \underset{\text{alg}}{=} N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) ,$$

la topologie du premier espace étant plus fine que celle de $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$. D'après l'hypothèse de nucléarité, les espaces $E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})$ $(0 \leqq \mu \leqq 1)$ sont nucléaires, du type $(\mathcal{LF})$ et isomorphes à $E(\beta_\mu^{(m,n)})$. On en déduit que

$$\bigcup_{o < \mu < \mu_o} E_\infty(\beta_\mu^{(m,n)}) = \underset{q \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\text{Lim}}}\, E(\beta_{\mu_o - \frac{1}{q}}^{(m,n)}) = E^{<\mu_o}(\beta^{(m,n)}) .$$

L'espace $E^{<\mu_o}(\beta_\mu^{(m,n)})$ est du type $(\mathcal{LF})$. L'espace $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ est du type $(\mathcal{DF})$ (cf. ch. II, § 4, prop. 2.8). En appliquant le théorème des homomorphismes à l'application continue de $E^{<\mu_o}(\beta^{(m,n)})$ dans $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ on a donc :

$$N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) = E^{<\mu_o}(\beta_\mu^{(m,n)}) \quad . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

2) L'espace $L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ est du type $(\mathcal{F}\mathcal{S})$ (cf. ch. I, § 5). L'espace

$$\bigcap_q F\left(\beta_{\mu_o}^{(m,n)} - 1/q\right)$$

est du type $(\mathcal{F})$ et nucléaire, donc du type $(\mathcal{S})$, quand on le munit de la topologie de limite projective des espaces

$$F\left(\beta_{\mu_o}^{(m,n)} - 1/q\right) .$$

Nous avons vu que $L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \subseteq \bigcap_q F\left(\beta_{\mu_o}^{(m,n)} - 1/q\right)$ (cf. lemme). D'autre part les suites finies dont denses dans

$$\bigcap_q F\left(\beta_{\mu_o}^{(m,n)} - 1/q\right) .$$

On sait que

$$\left(\bigcap_q F\left(\beta_{\mu_o}^{(m,n)} - 1/q\right)\right)' \underset{\text{alg}}{=} \bigcup_q E\left(\beta_{\mu_o}^{(m,n)} - 1/q\right) \quad \text{et} \quad (L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' = N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$$

d'après le théorème de dualité. On en déduit que :

$$(L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \underset{\text{alg}}{=} \left(\bigcap_q F\left(\beta_{\mu_o}^{(m,n)} - 1/q\right)\right)' .$$

Mais si $E \subseteq F$, E dense dans F , E et F du type $(\mathcal{F}\mathcal{S})$, pour que $E = F$, il faut et il suffit que $E' \underset{\text{alg}}{=} F'$ (cf. ch. II, § 9). Il en résulte aussitôt que

$$L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) = \bigcap_q F\left(\beta_{\mu_o}^{(m,n)} - 1/q\right) = F^{<\mu_o}(\beta_\mu^{(m,n)}) \quad . \qquad \text{C.Q.F.D}$$

REMARQUE 3.7.- Pour tout nombre $\rho > 0$, notons $H(D_\rho)$ l'espace des fonctions holomorphes sur le disque de centre 0 , de rayon ρ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de D_ρ . On désignera par $H'(D_\rho)$ le dual fort de $H(D_\rho)$, espace des fonctionnelles analytiques sur D_ρ .

Puisqu'on a supposé que $0 < R' < R$, on a $H'(D_{R'}) \subseteq H'(D_R)$. On peut donc, en plongeant $H'(D_{R'})$ dans $H'(D_R)$ considérer le coupke d'interpolation des fonctionnelles analytiques sur D_R et $D_{R'}$, que nous noterons $= H'_{\{D_R,D_{R'}\}}$.

Le développement de Taylor à l'origine, permet d'identifier les espaces localement convexes $E(\alpha^{(n)})$ et $H'(D_R)$ d'une part, $E(\alpha'^{(n)})$ et $H'(D_{R'})$ d'autre part. Cette identification respecte les inégalités

$$E(\alpha'^{(n)}) \leqq E(\alpha^{(n)}) \quad \text{et} \quad H'(D_{R'}) \leqq H'(D_R) \quad .$$

Autrement dit le couple d'interpolation $\mathfrak{X} = E(\alpha^{(n)}),\ E(\alpha'^{(n)}))$ est isomorphe au couple d'interpolation $\mathcal{Y} = H'_{\{D_R, D_{R'}\}}$ .. On a donc pour tout couple d'interpolation $\mathcal{E}$

$$\begin{cases} L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) = L_c(b;\mathcal{Y},\mathcal{E}) \\ N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) = N_c(b;\mathcal{Y},\mathcal{E}) \end{cases}$$

où $a = (\lambda^i)$ et $b = \delta_\lambda$, δ_λ désignant la fonctionnelle analytique $f \mapsto f(\lambda)$ sur D_R .

On peut alors remplacer dans tous les résultats de ce paragraphe le couple $\mathfrak{X}$ par $\mathcal{Y}$. On en déduira des propriétés d'interpolation entre les espaces

$$N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$$

et les espaces

$$N_c(b;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad L_c(b;\mathfrak{X},\mathcal{E})$$

qui font l'objet de l'étude du prochain chapitre.

<u>Applications</u> :

I - Supposons que les suites $\beta^{(n)}$ et $\beta'^{(n)}$ soient de la forme

$$\beta_j^{(n)} = (\beta_n)^j \quad , \quad \beta_j'^{(n)} = (\beta_n')^j \quad ,$$

où β_n et β_n' sont deux suites strictement positives croissantes et telles que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la suite β_m'/β_n tende vers l'infini. L'hypothèse de nucléarité est alors vérifiée. Si on suppose en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe q et p entiers tels que $\beta_n < \beta_{n+p}$ et $\beta_n' < \beta_{n+q}'$ les hypothèses du corollaire sont vérifiées. Donnons quelques exemples :

I) Posons $\beta^{(n)} = \rho - \frac{1}{n}$, $\beta'^{(n)} = \rho' - \frac{1}{n+\zeta}$, où ρ et ρ' sont deux nombres tels que $0 < \rho < \rho' < \infty$, ζ un nombre positif tel que $\rho < \rho' - \frac{1}{\zeta+1}$.

$F(\beta^{(n)})$ et $F(\beta'^{(n)})$ s'identifient alors respectivement aux espaces $H(D_\rho)$ et $H(D_{\rho'})$ à l'aide du développement en série de Taylor, où D_ρ et $D_{\rho'}$ désignent les disques du plan complexe centré à l'origine de rayons respectifs ρ et ρ' . On retrouve alors un résultat connu [52] que nous généraliserons dans le chapitre

[52] Cf. M. Mascart [30] et J. Lions [26]. Ce résultat a également été établi par M. Zerner (non publié).

suivant sous la forme du

THÉORÈME 3.19.- Soient $0 < R' < \lambda < R$, $0 < \rho < \rho'$, z_o un nombre complexe de module égal à λ , alors :

1) $$L_c(\delta_{z_o},(H'_{\{D_R,D_{R'}\}}));(H(D_\rho),H(D_{\rho'})) = H(D_{\rho^{1-\mu_o}\rho'^{\mu_o}})$$

où $$\mu_o = \frac{\log \lambda/R}{\log R'/R} .$$

2) $$N_c(\delta_{z_o};(H'_{\{D_R,D_{R'}\}}));(H(D_\rho),H(D_{\rho'})) = H'(D_{\rho^{1-\mu_o}\rho'^{\mu_o}}) .$$

Démonstration :

En appliquant le corollaire du théorème on voit qu'il suffit de montrer le

LEMME.- $$\bigcap_{\mu < \mu_o} F\left((\beta_n^{1-\mu})^j\right) = \bigcap_{\mu < \mu_o} H\left(D_{\rho^{1-\mu}\rho'^{\mu}}\right)$$

Démonstration :

Soit $\mu < \mu_o$. L'espace $H\left(D_{\rho^{1-\mu}\rho'^{\mu}}\right)$ s'identifie par développement de Taylor à l'espace $F[\gamma^{(m)}]$ où $\gamma^{(m)}$ désigne la suite définie par

$$\gamma_i^{(m)} = (\rho^{1-\mu}\rho'^{\mu} - 1/m)^i \quad , \quad i\in\mathbb{N} .$$

Pour montrer que les espaces $F[(\lambda^{(m)})]$ et $F[(\beta_n^{1-\mu}\beta_m'^{\mu})^j]$ coïncident, il suffit de remarquer ([19] ; ch. II, p. 111), que pour tout m il existe p et q tels que

$$\frac{\rho^{1-\mu}\rho'^{\mu} - 1/m}{(\rho' - \frac{1}{p+\xi})^{\mu}(\rho - 1/q)^{1-\mu}} < 1 ,$$

et que pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on peut trouver m tel que

$$\frac{(\rho' - \frac{1}{p+\xi})^{\mu}(R' - 1/q)^{1-\mu}}{\rho^{1-\mu}\rho'^{\mu} - 1/m} < 1 .$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

II) Etudions maintenant le cas où

$$\begin{cases} \beta_j^{(n)} = (\gamma_j)^{\frac{1}{\rho+\frac{1}{n}}} \\ \beta_j'^{(n)} = (\gamma_j)^{\frac{1}{\rho'+\frac{1}{n}}} \end{cases},$$

où ρ et ρ' sont deux nombres réels positifs donnés $(0 < \rho < \rho')$ et où (γ_j) désigne une suite strictement positive, $\gamma_j \leqq 1$ pour tout j, la suite γ_j étant supposée monotone décroissante tendant vers 0 quand j tend vers l'infini.

Soit μ un nombre tel que $0 < \mu < 1$. L'expression des suites $\beta_\mu^{(m,n)}$ est donnée par :

$$(\beta_\mu^{(m,n)})_j = (\gamma_j)^{\frac{\mu}{\rho'+\frac{1}{n}} + \frac{1-\mu}{\rho+\frac{1}{m}}} .$$

En étudiant la variation de m et de n, on obtient le

THÉORÈME 3.20.- <u>On a les égalités</u> :

1) $$N_c((\lambda^i);(H'_{\{D_R,D_{R'}\}});(F(\beta^{(n)}),F(\beta'^{(n)}))) = \bigcup_{\mu<\mu_o} E((\gamma_j)^{\frac{1}{\chi+\frac{1}{n}}}) ,$$

<u>avec</u> $\chi = \frac{1-\mu}{\rho} + \frac{\mu}{\rho'}$ <u>et</u> $\mu_o = (\log \lambda/R)/(\log R'/R)$.

2) $$L_c\Big((\lambda^i);(H'_{\{D_R,D_{R'}\}});(F(\beta^{(n)}),F(\beta'^{(n)}))\Big) = \bigcap_{\mu<\mu_o} F((\gamma_j)^{\frac{1}{\chi+\frac{1}{n}}}) .$$

<u>Exemple</u> : Posons $\gamma_j = \frac{1}{j!}$

D'après le théorème de Hadamard (cf. [1]) l'espace $E(\beta^{(n)})$ s'identifie à l'espace des fonctions entières d'ordre $< \rho$, (muni de la topologie de limite inductive des espaces de fonctions entières d'ordre k, $k < \rho$) que nous noterons $\mathcal{H}^{<\rho}$. L'espace des fonctions entières d'ordre $\leqq \rho$ est alors isomorphe à l'espace des fonctions entières d'ordre $\leqq \rho$ que nous noterons $\mathcal{H}^{\leqq \rho}$ .On obtient le

THÉORÈME 3.21.- <u>Soit</u> $\mathfrak{X} = (H'(D_R),H'(D_{R'}))$, $0 < R' < R < \infty$, $a = (\lambda^i)$, $R' < \lambda < R$.<u>Pour tout</u> $\rho < \rho' < \infty$ <u>on a les égalités</u> :

$$\begin{cases} L_c(a;\mathfrak{X},(\mathcal{H}^{\leqq}\rho,\mathcal{H}^{\leqq}\rho')) = \mathcal{H}^{\leqq}\chi \\ N_c(a;\mathfrak{X},(\mathcal{H}^{\leqq}\rho,\mathcal{H}^{\leqq}\rho')) = \mathcal{H}^{<}\chi \end{cases} ,$$

<u>avec</u> $$\frac{1}{\chi} = \frac{\mu_o}{\rho'} + \frac{1-\mu_o}{\rho} , \quad \mu_o = (\log \lambda/R)/\log R'/R)) .$$

N° II - <u>Interpolation de deux duaux d'espaces de Köthe</u>.

Tout en conservant le même foncteur $\mathcal{E} \mapsto N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ où

$$\mathfrak{X} = (H'(D_R),H'(D_{R'})) \quad , \quad 0 < R' < R < \infty \quad ,$$

$$a = (\lambda^i) \qquad\qquad , \quad R' < \lambda < R \quad ,$$

nous allons étudier les espaces $N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ quand $\mathcal{E}$ est un couple d'espaces de Köthe $(E(\beta'^{(n)}),E(\beta^{(n)}))$.

Nous supposerons comme nous l'avons fait dans le N° I de ce paragraphe, que les suites $\beta^{(n)}$ et $\beta'^{(n)}$ vérifient l'hypothèse (H4) (cf. § 4, n° 1).

Pour tout μ , $0 < \mu < 1$, définissons l'espace $F_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})$ comme l'espace des suites dont le produit par toute suite $\beta_\mu^{(m,n)}$, $(m,n)\in\mathbb{N}$, est sommable, muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $b \mapsto b\,\beta_\mu^{(m,n)}$ de $F_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})$ dans ℓ^∞ .

On a alors le

THÉORÈME 3.22.- <u>Soit</u> $\mathcal{E} = (E(\beta'^{(n)}),E(\beta^{(n)}))$ <u>un couple d'espaces de Köthe vérifiant l'hypothèse</u> (H4) , <u>alors</u> :

1) $$N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \underset{\text{alg}}{=} \bigcup_{\mu<\mu<1} F_\infty(\beta^{(m,n)}) \quad , \underline{\text{où}} \quad \mu_1 = \frac{\log R'/\lambda}{\log R'/R} ,$$

2) <u>Si</u> $E(\beta^{(n)}) \leqq E(\beta'^{(n)})$, <u>les deux espaces étant nucléaires, alors la topologie de limite inductive des espaces</u> $F_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})$ <u>est une topologie d'espaces</u> $(\mathcal{LF})$ <u>et est plus fine que celle de</u> $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$.

<u>Démonstration</u> :

Par définition $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ est l'espace des suites $b = (b_j)$ telles que $a \otimes b$ soit dans $(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$. Comme on l'a fait dans le cas des espaces de Köthe on montre alors que ceci équivaut à dire que la suite double $(a_i\, b_j)$ peut se décomposer comme somme de deux suites doubles appartenant respectivement aux espaces de suites doubles $\beta(F(\alpha^{(m)}),E(\beta'^{(n)})$ et $B(F(\alpha'^{(n)}),E(\beta^{(n)}))$ (cf. ch. II, § 10, prop.2.28)

Nous avons déjà décrit la caractérisation de ces espaces (cf. § 1, n° I). Il en résulte le

LEMME 1.- <u>Pour que</u> $b\in N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>il faut qu'on puisse déterminer deux entiers</u> m <u>et</u> n_o <u>tels que pour tout couple d'entiers</u> $(m,n)\in N\times N$, <u>il existe une constante</u> C_{mn} <u>positive telle qu'on ait pour tout</u> i <u>et tout</u> j <u>entiers positifs</u>

$$|a_i\, b_j| \leq C_{mn}\; \frac{\alpha_i^{(m_o)}}{\beta_j'^{(n)}} + \frac{\alpha_j'^{(n_o)}}{\beta_j^{(m)}} \qquad (1)$$

On est ramené pour étudier de telles inégalités à étudier des inégalités du type

$$|b_j| \leq C_{mn}\; (A^i(\beta_j^{(m_o)})^{-1} + B^i(\beta_j'^{(n_o)})^{-1}) \quad ,$$

où $A = \lambda^{-1}(R - \frac{1}{m_o})$, $B = \lambda^{-1}(R' - \frac{1}{n_o})$. Nous avons déjà étudié de telles inégalités (cf. démonstration du théorème 3.18). On obtient alors le

LEMME 2.- <u>Pour que</u> $b\in N(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ <u>il faut qu'on puisse déterminer</u> $\mu_1 < \mu < 1$, <u>tel que pour tout couple</u> $(m,n)\in N\times N$ <u>la suite</u> $\beta_\mu^{(m,n)}b$ <u>soit bornée</u>.

Pour achever la démonstration de la partie algébrique du théorème il faut encore montrer que pour tout $\mu_1 < \mu < 1$, $F_\infty(\beta_\mu^{(m,n)}) \subset N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$. Mais puisque $\mathfrak{X}$ vérifie l'hypothèse d'équiapproximation, on a :

$$(L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \subset N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \quad , \quad \text{(cf. proposition 2.19)}$$

Il suffit de montrer que

$$F_\infty(\beta_\mu^{(m,n)}) \subset (L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$$

Mais il est clair que $F_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})$ s'identifie au dual de $E(\beta_\mu^{(m,n)})$ (pour la dualité

$$< u,v > = \sum_{i,j} u_{ij}\, v_{ij} \quad , \quad u\in E(\beta_\mu^{(m,n)}) \quad , \quad v\in F_\infty(\beta_\mu^{(m,n)})) \quad .$$

Il suffit donc de montrer le

LEMME.- $L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leq E(\beta_\mu^{(m,n)})$ <u>pour tout</u> $\mu_1 < \mu \leq 1$.

<u>Démonstration</u> :

Nous aurons démontré le lemme si nous montrons que

$$\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}) \leq \mathcal{L}_b(E(\alpha_{1-\mu}^{(m,n)}),E(\beta_\mu^{(m,n)}))$$

pour tout $\mu_1 < \mu \leq 1$ et que $a\in E(\alpha_{1-\mu}^{(m,n)})$ pour ces mêmes valeurs de μ . Nous avons déjà établi le deuxième point.

Montrons le premier :

Soit $u = (u_{ij})$ une suite double définissant un élément de $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E})$. Ceci signifie (cf. [19], ch. II, § 4, n° 3) que pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, il existe $(m',n')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que les suites :

$$\sum_{i,j} |u_{ij}| \frac{\alpha_i^{(m)}}{\beta_j'^{(m')}} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{i,j} \frac{|u_{ij}|\alpha_i'^{(m)}}{\beta_j'^{(n')}} < \infty$$

On déduit donc que pour tout $0 < \theta < 1$

$$\sum_{i,j} |u_{ij}| \left(\frac{\alpha_i^{(m)}}{\beta_j'^{(m')}}\right)^{\theta} \left(\frac{\alpha_i'^{(n)}}{\beta_j^{(n')}}\right)^{1-\theta} < \infty \quad ,$$

et en particulier que

$$\sum_{i,j} |u_{ij}| \frac{(\alpha_i^{(m)})^{1-\mu}\,(\alpha_i'^{(n)})^{\mu}}{(\beta_j'^{(m')})^{\bar\mu}\,(\beta_j^{(n')})^{1-\bar\mu}} < +\infty \quad , \quad \bar\mu = 1-\mu \quad ,$$

pour tout $0 \leq \mu < \mu_o$. La suite (u_{ij}) définit donc un élément de

$$F(\alpha_\mu^{(m,n)}) \hat{\otimes}_\pi E(\beta_\mu^{(m,n)}) \quad .$$

Le premier espace de ce produit tensoriel étant nucléaire, le deuxième étant complet, c'est donc encore l'espace $\mathcal{L}(E(\alpha_\mu^{(m,n)}),E(\beta_\mu^{(m,n)}))$. L'application est continue car si $(\alpha_i'^{(m)}\,u_{ij})$ tend vers 0 dans $\ell^1 \hat{\otimes}_\pi E(\beta^{(n)})$ et $(\alpha_i^{(n)}\,u_{ij})$ dans $\ell^1 \hat{\otimes}_\pi E(\beta'^{(n)})$, pour tout $0<\theta<1$, la suite $\left((\alpha_i'^{(m)})^{\theta}\,(\alpha_i^{(n)})^{1-\theta}\,u_{ij}\right)$ tend vers 0 dans $\ell^1 \hat{\otimes}_\pi\left(E\,(\beta^{(n)})^{\theta}(\beta'^{(n)})^{1-\theta}\right)$. En effet nous savons que

$$\ell^1 \hat{\otimes}_\pi E(\beta^{(n)}) = E((\tilde\beta_{ij}^{(n)}))$$

$$\ell^1 \hat{\otimes}_\pi E(\beta'^{(n)}) = E((\tilde\beta_{ij}'^{(n)}))$$

$$\ell^1 \hat{\otimes}_\pi E\left((\beta^{(n)})^{\theta}(\beta'^{(n)})^{1-\theta}\right) = E\left((\tilde\beta^{(n)})^{\theta}(\tilde\beta'^{(m)})^{1-\theta}\right) \quad ,$$

où $\tilde\beta_{ij}^{(n)} = \beta_j^{(n)}$, $\tilde\beta_{ij}'^{(n)} = \beta_j^{(n)}$ (cf. [21] déjà cité au § 1).

Donc ces trois espaces sont définis respectivement comme limites inductives de

$$\tilde\beta^{(n)}\,\ell^1_{i,j} \quad , \quad \tilde\beta'^{(n)}\,\ell^1_{i,j} \quad \text{et} \quad (\tilde\beta^{(n)})^{\theta}(\tilde\beta'^{(m)})^{1-\theta}\,\ell^1_{i,j} \quad .$$

Mais l'injection de

$$(\tilde\beta^{(n)}.\ell^1_{i,j}) \cap (\tilde\beta'^{(n)}.\ell^1_{i,j}) \quad \text{dans} \quad (\tilde\beta^{(n)})^{\theta}.(\beta'^{(n)})^{1-\theta}.\ell^1_{i,j}$$

est continue, ce qui achève la démonstration du lemme et du théorème.
On a alors la

PROPOSITION 3.21.- <u>Soient</u> $\gamma^{(n)}$ <u>et</u> $\gamma'^{(n)}$ <u>deux suites vérifiant</u> (H1) , $\beta^{(n)}$ <u>et</u> $\beta'^{(n)}$ <u>deux suites quelconques, alors pour tout</u> $0 < \theta < 1$, <u>le couple</u>

$$E((\gamma^{(n)})^{\theta}(\gamma'^{(n)})^{1-\theta}),E((\beta^{(n)})^{\theta}(\beta'^{(m)})^{1-\theta})$$

<u>possède la propriété d'interpolation par rapport aux couples</u>

$$(E(\gamma^{(n)}),E(\gamma'^{(n)})) \ \underline{\text{et}} \ (E(\beta^{(n)}),E(\beta'^{(n)})) \ .$$

Si $\beta^{(n)}$ et $\beta'^{(n)}$ vérifient (H1) (condition de nucléarité) ou si

$$F(\beta^{(n)}) \leqq F(\beta'^{(n)}) \ ,$$

$$F_{\infty}(\beta_{\mu}^{(m,n)}) \leqq (E(\beta_{\mu}^{(m,n)}))' \leqq (L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))' \leqq N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \ ,$$

alors

$$\varinjlim F_{\infty}[\beta_{\mu}^{(m,n)}] \leqq N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}) \ .$$

<u>Problèmes</u> : Les deux espaces sont-ils isomorphes? Dans le cas où les espaces $F(\beta^{(n)})$ et $F(\beta'^{(n)})$ sont nucléaires, on se ramène pour le premier espace à une limite inductive d'une suite d'espaces $F(\beta_{\mu_1}^{(m,n)}+\frac{1}{q})$, c'est-à-dire à un espace $(\mathcal{LF})$. Le graphe de l'application

$$\varinjlim F_{\infty}(\beta_{\mu}^{(m,n)}) \to N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$$

est fermé, et l'application est surjective ; mais on ne sait malheureusement pas démontrer que $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ est bornologique (c'est un sous-espace fermé de

$$(\mathcal{L}_c(\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$$

espace ultrabornologique puisque dual d'un espace du type $(\mathcal{S})$ et complet).

Si $N_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E})$ n'est pas bornologique, on peut néanmoins espérer que

$$(L_c(a;\mathfrak{X},\mathcal{E}))'$$

soit bornologique (cf. problème des topologies, § 2, n° IV).

-:-:-:-:-

CHAPITRE IV

§ 1. Préliminaires.

N° I : Notations.

V étant une variété analytique complexe dénombrable à l'infini ([53]), on désigne toujours dans la suite par $H(V)$ l'espace des fonctions holomorphes sur V, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de V. C'est un espace $(\mathcal{F}\mathcal{S})$ nucléaire ([19]) ; ch. II, § 1, n° 3). A partir de la donnée d'une telle variété V, utilisant les notations de A. Martineau [29], on pose les définitions suivantes :

$H'(V)$ est l'espace dual de $H(V)$, espace des fonctionnelles analytiques définies sur V.

Si ω est une partie de V, on note $H_\omega(V)$ l'espace des fonctions holomorphes sur ω, muni de la topologie de limite inductive des $H(U)$, U parcourant la famille des voisinages ouverts relativement compacts de ω. On sait alors que si ω est un ouvert de V on a : $H_\omega(V) = H(\omega)$, et $H_\omega(V)$ est donc du type $(\mathcal{F}\mathcal{S})$ nucléaire, tandis que si ω est compact, ce même espace est du type $(\mathcal{D}\mathcal{S})$ nucléaire. Un élément du dual topologique de $H_\omega(V)$, noté $H'_\omega(V)$, sera dit <u>fonctionnelle analytique locale définie sur</u> ω <u>dans</u> V.

Si ω_1 et ω_2 sont deux compacts, ou ouverts de V, $\omega_1 \subset \omega_2$, on désignera par ${}^t i_{\omega_1,\omega_2}$ l'application de restriction de $H_{\omega_2}(V)$ dans $H_{\omega_1}(V)$, et par i_{ω_1,ω_2} l'application transposée qui applique continuement $H'_{\omega_1}(V)$ dans $H'_{\omega_2}(V)$.

Etant donné une sous-variété fermée W de V, A un ouvert (ou un compact) de W, B un ouvert (ou un compact de V tel que $A \subset B$, on désignera par

$$ {}^t\rho_{(A,W),(B,V)} $$

l'application de restriction de $H_B(V)$ dans $H_A(W)$ et par $\rho_{(A,W),(B,V)}$ sa transposée qui va de $H'_A(W)$ dans $H'_B(V)$.

On dira qu'une fonctionnelle analytique définie sur V, est <u>portable</u> par B,

---

([53]) Toutes les variétés analytiques complexes intervenant dans la suite seront implicitement suposées dénombrables à l'infini. On ne fait pas d'hypothèse de connexité sur V.

si elle provient d'une fonctionnelle analytique locale définie sur B , c'est-à-dire si elle appartient à l'espace $i_{B,V}(H'_B(V))$. On dira qu'une fonctionnelle analytique définie sur B dans V est <u>strictement portable par</u> A <u>dans</u> W , si elle provient d'une fonctionnelle analytique locale définie dans W sur A , c'est-à-dire si elle appartient à l'espace $\rho_{(A,W),(B,V)}(H'_A(W))$.

<u>Généralisation des notations</u> :

Considérons deux variétés analytiques complexes V et W , un étalement φ de V dans W , c'est-à-dire une application analytique qui soit un homéomorphisme local ([6] ; [28] ; [22]). L'application $f \mapsto f_o\varphi$ envoie continuement $H(W)$ dans $H(V)$, nous la noterons ${}^t i_{V,W,\varphi}$, et désignerons par $i_{V,W,\varphi}$ sa transposée, qui va de $H'(V)$ dans $H'(W)$. On pose alors la

DÉFINITION 4.1.- <u>Une fonctionnelle analytique définie sur</u> W , <u>sera dite</u> φ-<u>portable par</u> V <u>si elle appartient à l'espace</u> $i_{V,W,\varphi}(H'(V))$.

Soit (V,φ) une variété analytique complexe étalée dans $\mathbb{C}^n$, où φ désigne l'étalement de la variété analytique complexe V dans $\mathbb{C}^n$. Supposons V connexe et considérons le prolongement analytique maximum au-dessus de $\mathbb{C}^n$ de toutes les fonctions holomorphes de V relativement à φ (cf. [28] et [22]). On a un domaine étalé dans $\mathbb{C}^n$, $(\Gamma(V),\tilde{\Phi})$ et un étalement $\tilde{\Psi}$ de V dans $\Gamma(V)$, avec

$$\varphi = \tilde{\Phi}_o\tilde{\Psi} \quad ,$$

dont la donnée constitue l'enveloppe d'holomorphie de (V,φ) et que nous noterons $(\Gamma(V),\tilde{\Phi},\tilde{\Psi})$ .On sait alors d'après un théorème d'Oka ([34], [22]) que $\Gamma(V)$ est une variété de Stein et que l'application ${}^t i_{V,\Gamma(V),\tilde{\Psi}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

Tout ouvert de $\mathbb{C}^n$ sera muni canoniquement d'une structure de variété étalée dans $\mathbb{C}^n$. Si ω est un tel ouvert, nous noterons $i_{\omega,\Gamma(\omega)}$ pour $i_{\omega,\Gamma(\omega),\tilde{\Psi}}$.

Notons enfin que par abus de langage, si A est un sous-ensemble d'un espace topologique B , on appellera composante connexe de A dans B , la réunion des composantes connexes des points de A relativement à B .

N° II : <u>p-uplets d'espaces de fonctions holomorphes sur</u> $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$.

Soit V une variété analytique complexe. Considérons p-ouverts (ou compacts), $\omega_1,\dots,\omega_p$ de V d'intersection non vide.

Nous noterons

$$\omega = \bigcup_{j=1}^{p} \omega_j \quad ,$$

$$\omega_{i_1\dots i_k} = \omega_{i_1} \cap \dots \cap \omega_{i_k} \quad ,$$

pour tout système d'indice $(i_1,\dots,i_k)$ $k \leq p$.

On dira que le système $(\omega_1,\dots,\omega_p)$ vérifie <u>l'hypothèse de connexité</u> (C) , <u>si la composante connexe de</u> $\omega_{1\dots p}$ <u>dans chacun des</u> ω_j <u>est égale à</u>

$$\omega_j \quad , \quad j = 1,\dots,p \ .$$

On peut alors, sous cette hypothèse plonger à l'aide des applications de restriction ${}^t i_{\omega_j,\omega_{1\dots p}}$, les espaces $H_{\omega_j}(V)$ dans $H_{\omega_{1\dots p}}(V)$, $j = 1,\dots,p$.

On définit ainsi un p-uplet d'interpolation

$$H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V) \quad , \text{ ou } \quad (H_{\omega_1}(V),\dots,H_{\omega_p}(V)) \quad , \text{ ou enfin } \quad (H(\omega_1),\dots,H(\omega_p))_V$$

s'il s'agit d'ouverts de V . Un tel objet sera dit p-uplet des fonctions holomorphes sur $\omega_1,\dots,\omega_p$.

L'espace somme $H_{\omega_1}(V)+\dots+H_{\omega_p}(V)$ relatif à ce p-uplet d'interpolation est alors l'espace des fonctions holomorphes sur $\omega_{1\dots p}$ qui sont la somme des restrictions à $\omega_{1\dots p}$ de fonctions holomorphes sur $\omega_1,\dots,\omega_p$, muni de la topologie quotient de

$$H_{\omega_1}(V)\times\dots\times H_{\omega_p}(V) \ .$$

L'espace intersection $H_{\omega_1}(V) \cap \dots \cap H_{\omega_p}(V)$ s'identifie grâce à l'hypothèse (C) , à l'espace $H_\omega(V)$.

III : <u>p-uplets d'espaces de fonctionnelles analytiques locales définies sur</u> $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ <u>dans</u> V .

Soit V une variété analytique complexe ; si ω_1 et ω_2 sont deux ouverts (ou compacts) de V , $\omega_1 \subset \omega_2$, on dira que ω_1 possède la propriété de Runge par rapport à ω_2 , si l'image de $H_{\omega_2}(V)$ par l'application ${}^t i_{\omega_1,\omega_2}$ est dense dans $H_{\omega_1}(V)$. Alors l'application i_{ω_1,ω_2} est une injection et toute fonctionnelle analytique locale définie sur ω_1 peut être identifiée à une fonctionnelle analytique locale définie sur ω_2 .

DÉFINITION 4.2.- <u>Soit</u> $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ <u>un système de p-ouverts (ou compacts de</u> V) . <u>On dira qu'il vérifie la propriété</u> $(\mathcal{R})$ <u>si : pour tout</u> $j = 1,2,\dots,p$, ω_j <u>est de Runge par rapport à</u> ω .

<u>On dira qu'il vérifie la propriété</u> $(\mathcal{R}')$, <u>si pour tout</u> $j = 1,\dots,p$, ω_j <u>est de Runge par rapport à</u> V <u>et si</u> ω <u>est de Runge par rapport à</u> V .

Sous l'une de ces deux hypothèses, on peut plonger les espaces $H'_{\omega_j}(V)$ dans

$H'_\omega(V)$ à l'aide des injections $i_{\omega_j,\omega}$, et on obtient ainsi un p-uplet d'interpolation noté :

$$H'_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V) \quad , \text{ ou encore } \quad (H'_{\omega_1}(V),\dots,H'_{\omega_p}(V)) \quad ,$$

ou enfin parfois s'il s'agit d'ouverts $(H'(\omega_1),\dots,H'(\omega_p))_V$. Un tel objet sera dit <u>p-uplet des espaces de fonctionnelles analytiques locales définies sur</u>

$$\{\omega_1,\dots,\omega_p\} \ \underline{\text{dans}} \ V \ .$$

L'espace intersection $H'_{\omega_1}(V) \cap \dots \cap H'_{\omega_p}(V)$, s'identifie alors à l'espace des fonctionnelles analitiques locales définies sur ω qui sont représentables par des fonctionnelles analytiques locales sur ω_j à l'aide des applications $i_{\omega_j,\omega}$.

On a immédiatement le

LEMME 1.- <u>Soit</u> $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ <u>un système de p-ouverts ou compacts de</u> V , <u>si les hypothèses</u> $(\mathcal{R})$ <u>et</u> (C) <u>sont réalisées, alors</u>

$$(H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))' = H'_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V) \quad .$$

IV : <u>Propriété</u> (H)

DÉFINITION 4.3.- <u>On dira qu'un système de p-ouverts (ou compacts) de</u>

$$V \ , \ \{\omega_1,\dots,\omega_p\}$$

<u>vérifie la propriété</u> (H) , <u>si toute fonction holomorphe sur</u> $\omega_{1\dots p}$, <u>peut s'écrire comme la somme de p-fonctions holomorphes sur</u> $\omega_1,\dots,\omega_p$ <u>respectivement.</u>

Supposons la propriété (C) réalisée par un système $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ d'ouverts (ou de compacts) de V . Alors la propriété (H) signifie que les espaces

$$H_{\omega_1}(V)+\dots+H_{\omega_p}(V) \quad \text{et} \quad H_{\omega_{1\dots p}}(V)$$

sont égaux et isomorphes. Si en outre le système considéré vérifie $(\mathcal{R})$, alors la propriété de dualité énoncée dans la proposition, signifie que l'espace

$$H'_{\omega_1}(V) \cap \dots \cap H'_{\omega_p}(V) \quad ,$$

identifié à un sous-espace de $H'_\omega(V)$, est l'image de $H'_{\omega_{1\dots p}}(V)$ dans $H'_\omega(V)$ par l'application $i_{\omega_{1\dots p},\omega}$.

En particulier si $\omega = V$, il résulte des propriétés (H) , (C) et $(\mathcal{R})$ que toute fonctionnelle analytique définie sur V portable par $\omega_1,\dots,\omega_p$ est portable par $\omega_{1\dots p}$.

Remarques sur la propriété (H)

On suppose maintenant que V est une variété de Stein.
Nous noterons $\mathcal{O}_V$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur V.

Un système de p-ouverts (ou compacts) de V, $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$, forme un recouvrement $\mathcal{U}$ de ω. On désigne par $H^k(\mathcal{U},\mathcal{O}_V)$, le $k^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie du recouvrement $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_V$.

Cas de deux ouverts ou compacts

Soit $\{\omega_1,\omega_2\}$ un système de deux ouverts ou compacts de V. Dire qu'un tel système vérifie la propriété (H) signifie par définition même que :

$$H^1(\mathcal{U};\mathcal{O}_V) = 0 .$$

Notons $H^k(\omega,\mathcal{O}_V)$ le $k^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de ω à valeurs dans $\mathcal{O}_V$, $k > 0$. On sait qu'il existe une injection de $H^1(\mathcal{U};\mathcal{O}_V)$ dans $H^1(\omega,\mathcal{O}_V)$, on a par suite le

LEMME 3.- Soit $\{\omega_1,\omega_2\}$ un système de deux ouverts (ou compacts) de V, pour que $\{\omega_1,\omega_2\}$ vérifie la propriété (H), il suffit que

$$H^1(\omega,\mathcal{O}_V) = 0 .$$

Si ω_1 et ω_2 sont soit des ouverts de Stein, soit des compacts $H(V)$-convexes, la condition est nécessaire.

Démonstration :

Nous venons de voir la suffisance de cette condition. Elle est nécessaire. En effet si ω_1 et ω_2 sont des compacts $H(V)$-convexes on a $H^1(\omega_j,\mathcal{O}_V) = 0$ ([6]). D'autre part on sait que $\omega_{1,2}$ est encore $H(V)$-convexe, on a donc

$$H^1(\omega_{1,2},\mathcal{O}_V) = 0 .$$

En appliquant le théorème de Leray sur les recouvrements acycliques ([16] ; ch. II, § 5), on en déduit que

$$H^1(\mathcal{U};\mathcal{O}_V) = H^1(\omega,\mathcal{O}_V) = 0 .$$

On ferait le même raisonnement dans le cas d'ouverts de Stein en notant qu'une intersection de deux ouverts de Stein est un ouvert de Stein (cf. [5]).

Cas de p-ouverts ou p-compacts

Introduisons une propriété plus faible que la propriété (H).
Nous dirons qu'un système $\{\omega_1,\dots\omega_2\}$ de p-ouverts ou compacts de V vérifie la

propriété (H') si la condition (H) est vérifiée par le système des ouverts (ou compacts) $\{\omega'_1,\dots,\omega'_p\}$ avec

$$\omega'_j = \omega_{1\dots(j-1)(j+1)\dots p}$$

Notons encore $\mathfrak{U}$ le recouvrement de ω par $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$. La condition (H') signifie que $H^{p-1}(\mathfrak{U};\mathcal{O}_V) = 0$.

En appliquant à nouveau le théorème de Leray on obtient le

LEMME 4.- <u>Pour qu'un système de</u> p-<u>ouverts de Stein (ou de</u> p-<u>compacts</u> H(V) <u>convexes</u>), $\{\omega_1,\dots\omega_p\}$, <u>vérifie la propriété</u> (H) <u>il est nécessaire que</u>

$$H^{p-1}(\omega;\mathcal{O}_V) = 0 \quad (^{54}) .$$

Supposons les conditions du lemme réalisées. Si chaque système

$$\{\omega_1,\dots,\omega_{j-1},\omega_{j+1},\dots,\omega_p\} \quad , \quad j = 1,\dots,p \quad ,$$

satisfait à la propriété (H), la propriété (H) sera vraie pour le système $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$. En effet, soit

$$f \in H_{\omega_{1\dots p}}(V) .$$

Puisque $H^{p-1}(\mathfrak{U};\mathcal{O}_V) = 0$, la propriété (H') est donc réalisée. La fonction f peut donc se décomposer comme la somme des restrictions de p-fonctions holomorphes sur ω'_j, $j = 1,\dots,p$. Il suffit alors d'appliquer la propriété (H) aux systèmes $\{\omega_1,\dots,\omega_{j-1},\omega_{j+1},\dots,\omega_p\}$ pour démontrer notre assertion.

On en déduit par exemple le

LEMME 5.- <u>Soit</u> V <u>une variété de Stein connexe de dimension</u> n, <u>non compacte</u>, <u>pour que le système de</u> p-<u>ouverts ou compacts</u> $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ <u>satisfasse à la propriété</u> (H).

<u>Démonstration</u> :

On sait que $H^q(\omega;\mathcal{O}_V) = 0$ pour $q \geq n+1$.
La variété V étant supposée connexe non compacte, d'après un théorème de B. Malgrange $H^n(\omega;\mathcal{O}_V) = 0$ ([27]). Donc toute fonction f de $H_{\omega_{1\dots p}}(V)$ est dans

$$\sum_j H_{\omega_{1\dots(j-1)(j+1)\dots p}}(V) .$$

On applique le même raisonnement aux fonctions de

$$H_{\omega_{1\dots(j-1)(j+1)\dots p}}(V) \quad , \text{ pour } j = 1,\dots,p .$$

(54) Cette condition est vide si $p > n$.

En itérant le procédé on décompose f en une somme de restrictions à $\omega_{1\ldots p}$ de fonctions de $H_{\omega_{i_o}\ldots i_{n-2}}(V)$. On applique alors l'hypothèse, d'où on déduit le lemme.

COROLLAIRE.- Si $V = \mathbb{C}$, l'hypothèse (H) est vérifiée pour tout système d'ouverts $\{\omega_1,\ldots\omega_p\}$. (55)

§ 2. Interpolation pour un p-uplet d'espaces de fonctions holomorphes sur des ouverts d'une variété analytique complexe étalée dans $\mathbb{C}^n$.

Soit (V,φ) une variété analytique complexe étalée dans $\mathbb{C}^n$. Considérons un système de p-ouverts $\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$ de V vérifiant l'hypothèse de connexité (C) . Nous allons caractériser les espaces

$$L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V)) \ (^{56}) ,$$

quand $\mathfrak{X}$ et a sont les objets suivants :

$$\mathfrak{X} = H_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}) \quad , \quad D_1,\ldots,D_p$$

désignant p disques ouverts du plan complexe d'intersection non vide, et $a = \delta_{z_o}$ la fonctionnelle analytique définie sur $D = \bigcup_1^p D_j$:

$$f \mapsto f(z_o) \quad ,$$

où z_o est un point de D . (57)
On a le

LEMME 1.- $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V)) = H_\Omega(\mathbb{C}\times V)$,

où on a posé

$$\Omega = (D_1\times\omega_1) \cup (D_2\times\omega_2) \cup \ldots \cup (D_p\times\omega_p) \quad .$$

Démonstration :

Par définition $\mathcal{L}_c(\mathfrak{X}'_c,H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V))$ est l'espace de p-uplets d'applications linéaires continues de

$$H'(D_j) \text{ dans } H_{\omega_j}(V) \quad , \quad j = 1,\ldots,p$$

---

(55) Cf. Zelazko [41]
(56) Cf. chapitre I.
(57) Une telle fonctionnelle est un élément de $H'_D(\mathbb{C})$ donc encore de $H'_{D_1}(\mathbb{C}) +\ldots + H'_{D_p}(\mathbb{C})$.

dont les restrictions à $H'(D_1) \cap \ldots \cap H'(D_p) = H'(D_{1\ldots p})$ considérées comme applications à valeurs dans

$$H_{\omega_{1\ldots p}}(V) ,$$

coïncident.

Mais on sait d'après A. Grothendieck ([18]) que :

$$\mathcal{L}_\varepsilon(H'(D_{1\ldots p}),H_{\omega_{1\ldots p}}(V)) = H_{D_{1\ldots p}\times\omega_{1\ldots p}}(\mathbb{C}\times V) \quad (^{58})$$

Ce même isomorphisme applique $\mathcal{L}_\varepsilon(H'(D_j),H_{\omega_j}(V))$ sur l'espace $H_{D_j\times\omega_j}(\mathbb{C}\times V)$. L'espace

$$\mathcal{L}_\varepsilon(H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V))$$

peut donc être identifié à l'espace des p-uplets de fonctions holomorphes sur $D_1\times\omega_1,\ldots,D_p\times\omega_p$, qui coïncident sur $D_{1\ldots p}\times\omega_{1\ldots p}$, c'est-à-dire à l'espace des fonctions holomorphes sur Ω . C.Q.F.D.

Introduisons les notations suivantes :

Soit (W,Φ) une variété analytique complexe étalée dans $\mathbb{C}^{n+1}$.
Si z_o désigne un point de $\mathbb{C}$, on notera W_{z_o} la sous-variété de W :

$$W_{z_o} = \Phi^{-1}(\{z_o\} \times \mathbb{C}^n)$$

et par Φ_{z_o} l'application $(p\circ\Phi)/W_{z_o}$, où p désigne la projection de $\mathbb{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{C}^n$. La variété W_{z_o} est alors étalée dans $\mathbb{C}^n$ par Φ_{z_o} .

Nous noterons $\Gamma_{z_o}(W)$ à la place de $(\Gamma(W))_{z_o}$.

A la donnée d'une variété analytique complexe dans $\mathbb{C}^n$, (V,φ) , et d'un systéme d'ouverts $\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$ de V nous allons associer les objets suivants :

1°) <u>La variété analytique complexe étalée dans</u> $\mathbb{C}^{n+1}$ (Ω,Φ) , <u>dite associée à</u> $((V,\varphi),\{\omega_1,\ldots,\omega_p\})$, où

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{p} D_k \times \omega_k ,$$

et où Φ désigne la restriction à Ω de l'application $id_D \times \Phi$ de $D \times V$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

(58) Cet isomorphisme peut être défini par
$u \mapsto \big((x,y) \mapsto (u(\delta_x))(y)\big)$, $u \in \mathcal{L}_\varepsilon(H'(D_{1\ldots p}),H_{\omega_{1\ldots p}}(V))$.

2°) *L'étalement* φ'_{z_o} *de* $\omega_{1\ldots p}$ *dans* $\Gamma_{z_o}(\Omega)$, *associé à* φ , construit de la façon suivante :

Si $(\Gamma(\Omega),\tilde{\Phi},\tilde{\Psi})$ désigne l'enveloppe d'holomorphie de (Ω,Φ) et si on note σ l'étalement naturel de $\omega_{1\ldots p}$ dans Ω_{z_o} on pose

$$\varphi'_{z_o} = \tilde{\Psi}_{z_o} \circ \sigma \; .$$

C'est un étalement de $\omega_{1\ldots p}$ dans $\Gamma_{z_o}(\Omega)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\omega_{1\ldots p} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi'_{z_o}"'] & \Omega_{z_o} \arrow[r, "\Phi_{z_o}"] \arrow[d, "\tilde{\Psi}_{z_o}"] & \mathbb{C}^n \\
 & \Gamma_{z_o}(\Omega) \arrow[ur, "\Phi_{z_o}"'] &
\end{tikzcd}$$

DÉFINITION 4.4.- *On dira qu'une fonction* f *de* $H_{\omega_{1\ldots p}}(V)$ *est* φ'_{z_o} *prolongeable à* $\Gamma_{z_o}(\Omega)$, *s'il existe une fonction* $\tilde{f}$ *holomorphe sur* $\Gamma_{z_o}(\Omega)$ *telle que* :

$$f = \tilde{f} \circ \varphi'_{z_o} \; .$$

(ceci signifie encore d'après nos notations qu'elle appartient à l'espace

$${}^t i_{\omega_{1\ldots p},\Gamma_{z_o}(\Omega),\varphi'_{z_o}}(H(\Gamma_{z_o}(\Omega))) \; .$$

On peut alors énoncer le :

THÉORÈME 4.1.- *Soit* (V,φ) *une variété analytique complexe étalée dans* $\mathbb{C}^n$, $\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$ *un système de* p-*ouverts de* V *vérifiant l'hypothèse de connexité* (C). *Alors*

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1\ldots\omega_p\}}(V)) \; ,$$

s'identifie à l'espace des fonctions de $H(\omega_{1\ldots p})$, φ'_{z_o} *-prolongeables à* $\Gamma_{z_o}(\Omega)$. *L'application* $g \mapsto g \circ \varphi'_{z_o}$ *définit un homomorphisme de* $H(\Gamma_{z_o}(\Omega))$ *sur*

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1\ldots\omega_p\}}(V)) \; .$$

Démonstration :

Posons
$$\begin{cases} \alpha_1 = {}^t\rho_{\omega_{1\ldots p},\Omega} \\ \alpha_2 = {}^t i_{\omega_{1\ldots p},\Gamma_{z_o}(\Omega),\varphi'_{z_o}} \\ \alpha_3 = {}^t\rho_{\Gamma_{z_o}(\Omega),\Gamma(\Omega)} \\ \alpha_4 = {}^t i_{\Omega,\Gamma(\Omega),\tilde{\Psi}} \ . \end{cases}$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H(\Omega) & \xrightarrow{\alpha_1} & H(\omega_{1\ldots p}) \\ \alpha_4 \uparrow & & \uparrow \alpha_2 \\ H(\Gamma(\Omega)) & \xrightarrow{\alpha_3} & H(\Gamma_{z_o}(\Omega)) \end{array} \ .$$

Il résulte de la définition et du lemme 1 du § 2, que l'espace

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V))$$

est le sous-espace de $H(\omega_{1\ldots p}), \alpha_1(H(\Omega))$, muni de la topologie quotient de $H(\Omega)$ par le noyau de α_1 .

Mais α_4 est un isomorphisme vectoriel topologique par combinaison de la définition de l'enveloppe d'holomorphie qui par le théorème classique de Poincaré-Volterra est dénombrable à l'infini, et du théorème du graphe fermé (cf. [32] et [22]). . D'autre part d'après H. Cartan ([5]), α_3 est un homomorphisme surjectif(59). En appliquant la commutativité du diagramme écrit ci-dessus on voit donc que

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V)) \underset{\text{alg}}{=} \alpha_2(H(\Gamma_{z_o}(\Omega)) \ ,$$

et que α_2 est continue de $H(\Gamma_{z_o}(\Omega))$ dans

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V)) \ .$$

Mais ces deux espaces sont du type $(\mathfrak{F})$ (cf. resp. [20] et ch. I, § 2) α_2 est donc un homomorphisme d'après le théorème des homomorphismes de Banach ; ce qui achève la démonstration.

---

(59) Comme nous l'avons rappelé plus haut (après la définition 4.1) $\Gamma(\Omega)$ est une variété de Stein, d'après le théorème d'Oka.

Nous allons maintenant choisir pour fonctionnelle analytique de $H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C})$ la fonctionnelle $c_o\delta_{z_o} + \dots + c_k\delta_{z_k}$, où $z_o,\dots,z_k$ sont $(k+1)$ points de D , $c_o,\dots,c_k$, $k+1$ constantes complexes non nulles.

PROPOSITION 4.1.- Soit (V,φ) une variété analytique complexe étalée dans $\mathbb{C}^n$, $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ un système de p-ouverts de V vérifiant (C) . Alors

$$L_\varepsilon\Big(\sum_{\sigma=0}^{k} c_\sigma\delta_{z_\sigma};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)\Big)$$

est l'espace

$$\sum_{\sigma=0}^{k} L_\varepsilon(\delta_{z_\sigma};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$$

des fonctions holomorphes sur $\omega_{1\dots p}$ qui peuvent s'écrire comme la somme de $k+1$ fonctions de $H(\omega_{1\dots p})$ qui soient respectivement φ'_{z_σ}-prolongeables à $\Gamma_{z_\sigma}(\Omega)$: $\sigma = 0,\dots,k$. L'application

$$(g_o,\dots,g_k) \mapsto \sum_{\sigma=0}^{k} g_\sigma \circ \varphi'_{z_\sigma}$$

définit un homomorphisme de

$$\bigoplus_{\sigma=0}^{k} H(\Gamma_{z_\sigma}(\Omega)) \quad \text{sur} \quad L_\varepsilon\Big(\sum_{\sigma=0}^{k}\delta_{z_\sigma};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)\Big) .$$

Démonstration :

La nécessité résulte aussitôt du théorème 4.1. Réciproquement, soit f une fonction de

$$\sum_{\sigma=0}^{k} L_\varepsilon(\delta_{z_\sigma};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) .$$

Par définition, il existe $(f_o,\dots,f_k)$ holomorphes sur $\omega_{1\dots p}$ appartenant respectivement à $L_\varepsilon(\delta_{z_\sigma};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$, $\sigma = 1,\dots,k$, telles que $f = \sum_{\sigma=0}^{k} c_\sigma f_\sigma$.

D'après le théorème 4.1, puisque $c_\sigma f_\sigma$ définit une fonction de

$$L_\varepsilon(\delta_{z_\sigma};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) ,$$

elle est φ'_{z_σ}-prolongeable à $\Gamma_{z_\sigma}(\Omega)$; c'est-à-dire qu'il existe $(\tilde f_o,\dots,\tilde f_k)$

dans $\bigoplus_{\sigma=0}^{p} H(\Gamma_{z_\sigma}(\Omega))$ telle que $\sum_{\sigma=0}^{k} c_\sigma f_\sigma = \sum_{\sigma=0}^{k} \tilde{f} \circ \varphi'_{z_\sigma}$.

La fonction $(\tilde{f}_o,\ldots,\tilde{f}_k)$ définit une fonction holomorphe sur la sous-variété régulière de $\Gamma(\Omega)$

$$\bigcup_{\sigma=0}^{k} \Gamma_{z_\sigma}(\Omega) .$$

C'est donc, d'après un théorème de H. Cartan déjà cité, la restriction à

$$\bigcup_{\sigma=0}^{k} \Gamma_{z_\sigma}(\Omega)$$

d'une fonction holomorphe sur $\Gamma(\Omega)$; et on a pour tout $\zeta\in\omega_{1\ldots p}$:

$$\sum_{\sigma=0}^{k} F \circ {}^{t}i_{\Omega,\Gamma(\Omega),\tilde{\Psi}}(z_\sigma,\zeta) = \sum_{\sigma=0}^{k} \tilde{f} \circ \varphi'_{z_\sigma}(\zeta) = f(\zeta) .$$

Ce qui montre que f appartient à l'espace

$$L_\varepsilon\Big(\sum_{\sigma=0} \delta_{z_\sigma};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C});H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V)\Big) .$$

La partie topologique de l'énoncé résulte encore une fois du théorème de l'homomorphisme. C.Q.F.D.

Notons $[[\delta_{z_o},\ldots,\delta_{z_k}]]$ le sous-espace vectoriel de $H'_D(\mathbb{C})$ engendré par

$$\delta_{z_o},\ldots,\delta_{z_k} .$$

On déduit aussitôt de la proposition 4.1 le :

COROLLAIRE.- $L_\varepsilon([[\delta_{z_o},\ldots,\delta_{z_k}]];H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V))$

$$= L_\varepsilon\Big(\sum_{\sigma=0}^{k} \delta_z;H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V)\Big) .$$

§ 3 - Interpolation d'espaces de fonctionnelles analytiques locales.

N° I : Cas de p-ouverts d'une variété étalée dans $\mathbb{C}^n$.

Nous allons ici utiliser les propriétés de dualité (généralisées au cas des p-uplets d'interpolation) établies au chapitre II . Les résultats du paragraphe précédent vont alors nous permettre de caractériser certains espaces

$$N_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C});H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V)) .$$

Soit donc $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$, un système de p-ouverts d'une variété analytique complexe (V,φ) étalée dans $\mathbb{C}^n$. On suppose que ce système vérifie les propriétés (C) et $(\mathfrak{R})$. D'après le paragraphe 2, posant

$$\mathfrak{X} = H_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V) \quad ,$$

on a

$$\mathfrak{X}' \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{E} = H(D) \hat{\otimes}_\varepsilon H(\omega) = H(D \times \omega)$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) = H(\Omega) \quad ,$$

et l'injection de $\mathfrak{X}' \hat{\otimes} \mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ devient l'application de restriction des fonctions de $H(D) \hat{\otimes} H(\omega)$ à l'ouvert Ω .

Voici d'abord une condition nécessaire et suffisante pour que le p-uplet

$$H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)$$

appartienne à la classe $\mathcal{K}_{\delta_{z_o},H}$, (où H désigne le foncteur $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{L}_\varepsilon(\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$) , classe pour laquelle les foncteurs $\mathcal{E} \mapsto L_\varepsilon(\delta_{z_o};\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ et $\mathcal{E} \mapsto N_\varepsilon(\delta_{z_o};\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ sont en dualité (cf. ch. II, § 3,(I)) . On a le :

LEMME.- Pour que $H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)$ appartienne à la classe $\mathcal{K}_{\delta_{z_o},H}$, il faut et il suffit que Ω soit de Runge par rapport à $D \times \omega$.

Démonstration :

La condition est nécessaire en vertu des identifications faites ci-dessus. Elle est suffisante. En effet, notons W la sous-variété de $D \times \omega$, $\{z_o\} \times \omega$. Nous devons montrer que toute fonction holomorphe sur Ω dont la restriction à

$$\{z_o\} \times \omega_{1\dots p}$$

est nulle, est limite dans $H(\Omega)$ de fonctions de $H(D \times \omega)$ nulles sur W . Soit f une fonction de $H(\Omega)$, nulle sur $\{z_o\} \times \omega_{1\dots p}$. La variété $\Omega \cap W$ est isomorphe à un espace $\omega_{i_o} \cup \dots \cup \omega_{i_k}$ pour un ensemble d'indices $(i_o\dots i_k)$ (par projection sur V). En vertu de l'hypothèse (C) , f est donc nulle sur $\Omega \cap W$. Elle peut donc s'écrire sous la forme

$$f = (z-z_o)g \quad , \quad z \in \mathbb{C} \quad , \text{ où } g \in H(\Omega) \quad .$$

L'ouvert Ω étant de Runge par rapport à $D \times \omega$, g est adhérente à

$${}^t i_{\Omega,D\times\omega}(H(D\times\omega))$$

dans $H(\Omega)$, donc encore à

$$ {}^t i_{\Omega,D\times\omega}(H(D) \otimes H(\omega)) $$

puisque $H(D) \otimes H(\omega))$ est dense dans $H(D\times\omega)$. La multiplication par $(z-z_o)$ opère continuement de $H(\Omega)$ dans lui-même, donc f est adhérente à

$$ (z-z_o).{}^t i_{\Omega,D\times\omega}(H(D) \otimes H(\omega)) \quad . $$

Les fonctions de $(z-z_o).{}^t i_{\Omega,D\times\omega}(H(D) \otimes H(\omega))$ s'annulent sur W , ce qui achève la démonstration.

Supposons les hypothèses du lemme réalisées et interprétons le théorème de dualité.

Posons $\mathfrak{X} = H_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C})$, $\mathcal{E} = H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)$, et choisissons encore pour a la fonctionnelle δ_{z_o} .

On sait alors que $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ est l'image de $(L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))'$ dans $H'_\omega(V)$, par l'application transposée de l'application d'injection de $H_\omega(V)$ dans $L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ (cf. proposition 2.5) .

Avec les notations introduites dans le précédent paragraphe, notons $\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega)$ la composante connexe de $\varphi'_{z_o}(\omega_{1\dots p})$ dans $\Gamma_{z_o}(\Omega)$.

Si φ' désigne l'étalement naturel de Ω dans $D \times \omega$, il existe un étalement $\tilde{\varphi}'$ de $\Gamma(\Omega)$ dans $D \times \Gamma(\omega)$ tel que le diagramme suivant commute

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\tilde{\Psi}"'] & D \times \omega \arrow[d, "id_D \times \ddot{\Psi}"] \\
\Gamma(\Omega) \arrow[r, "\tilde{\Phi}'"'] & D \times \Gamma(\omega)
\end{tikzcd}
$$

Nous dirons <u>que</u> $\tilde{\Phi}'$ <u>est le prolongement de</u> Φ <u>à</u> $\Gamma(\Omega)$.

Alors $\tilde{\Phi}'_{z_o}$ est un étalement de $\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega)$ dans $\Gamma(\omega)$, et l'injection de $H_\omega(V)$ dans $L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$ se factorise de la façon suivante :

$$
\begin{tikzcd}
H_\omega(V) \arrow[r, "{}^t i_{\omega_{1\dots p},\omega}"] \arrow[d, "{}^t i^{-1}_{\omega,\Gamma(\omega)}"'] & L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}) \\
H(\Gamma(\omega)) \arrow[r, "{}^t \rho_{\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega),\Gamma(\omega),\tilde{\Phi}'_{z_o}}"'] & H(\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega)) \arrow[u, "{}^t \rho_{\omega_{1\dots p},\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega),\varphi'_{z_o}}"']
\end{tikzcd}
$$

où $i_{\omega,\Gamma(\omega)}$ et ${}^t\rho_{\omega_{1\ldots p},\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega),\varphi'_{z_o}}$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels topologiques.

On en déduit que l'image de $(L_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E}))'$ dans $H'_\omega(V)$ par l'application $i_{\omega_{1\ldots p},\omega}$ est égale à :

$$i^{-1}_{\omega,\Gamma(\omega)} \circ \rho_{\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega),\Phi'_{z_o}}[H'(\Gamma_{z_o}(\Omega))]$$

C'est-à-dire que pour qu'une fonctionnelle analytique locale définie sur ω dans V appartienne à $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$, il faut et il suffit que son image dans $H'(\Gamma(\omega))$ soit $\tilde{\Phi}'_{z_o}$-quasi portable par $\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega)$.

La topologie de $H(\omega)$ étant isomorphe à celle de $H(\Gamma(\omega))$ l'application

$$T \mapsto i^{-1}_{\omega,\Gamma(\omega)} \circ \rho_{\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega),\Gamma(\omega),\tilde{\Phi}'_{z_o}}(T) ,$$

définit un isomorphisme de $H'(\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega))$ sur $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,\mathcal{E})$. On en déduit le

THÉORÈME 4.2.- <u>Soient</u> (V,φ) <u>une variété analytique complexe étalée dans</u> $\mathbb{C}^n$, $\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$ <u>un système de</u> p-<u>ouverts de</u> V <u>vérifiant les hypothèses</u> (C) <u>et</u> $(\mathcal{R})$ (60).

<u>On suppose que la variété</u> Ω <u>associée à</u> $((V,\varphi),\{\omega_1,\ldots,\omega_p\})$ <u>est un ouvert de Runge de</u> $D\times\omega$.

<u>Alors l'espace</u> $N_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V))$ <u>est formé des fonctionnelles analytiques locales sur</u> ω <u>dont l'image dans</u> $\Gamma(\omega)$ <u>sont des fonctionnelles</u> $\tilde{\Phi}'_{z_o}$-<u>portables par</u> $\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega)$, (<u>où</u> $\tilde{\Phi}'$ <u>est le prolongement à</u> $\Gamma(\Omega)$ <u>de l'étalement naturel</u> Φ' <u>de</u> Ω <u>dans</u> $D\times\omega$) .

<u>La topologie de</u> $N_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(V))$, <u>est la topologie localement convexe la moins fine rendant continue l'injection</u>

$$T \mapsto \rho^{-1}_{\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega),\Gamma(\omega),\tilde{\Phi}'_{z_o}} \circ i_{\omega,\Gamma(\omega)}(T) \ \underline{\text{dans}}\ H'(\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega)) .$$

N° II : <u>Cas d'un système d'ouverts sur une variété de Stein.</u>

Nous allons maintenant utiliser des résultats généraux sur les porteurs des fonctionnelles analytiques définies sur une variété de Stein, pour donner un résultat dans un cadre légèrement différent.

---

(60) $(\mathcal{R})$ signifie que ω_j est de Runge par rapport) ω , $(j = 1,\ldots,p)$, (cf. déf. 4.2).

On suppose que V est une variété de Stein, $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ un système de p-ouverts de V vérifiant la propriété (C) de connexité et la propriété $(\mathfrak{R}')$ [61] .

Alors l'espace $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$ est formé de fonctionnelles analytiques locales sur ω et s'identifie donc par l'application $i_{\omega,V}$ à un espace de fonctionnelles analytiques définies sur V . C'est cet espace que nous nous proposons de caractériser.

On a le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} H'(\Omega) \arrow[r, "i_{\Omega,D\times\omega}"] & H'(D\times\omega) \arrow[r, "i_{D\times\omega,D\times V}"] & H'(D\times V) \\ & H'(\omega) \arrow[u, "\rho_{\omega,D\times\omega}"] \arrow[r, "i_{\omega,V}"'] & H'(V) \arrow[u, "\rho_{V,D\times V}"'] \end{tikzcd} \qquad (I)$$

en identifiant ω à la sous-variété $\{z_o\}\times\omega$ de $D\times\omega$ et V à la sous-variété $\{z_o\}\times V$ de $D\times V$.

Par définition l'espace $N(a;\mathfrak{X}'_c,H'_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$ est formé des vecteurs T de $H'(\omega)$ tels que

$$\rho_{\omega,D\times\omega}(T)\in i_{\Omega,D\times\omega}(H'(\Omega)) \quad .$$

Mais l'application $i_{D\times\omega,D\times V}$ est injective en vertu du :

LEMME.- $D\times\omega$ <u>est de Runge par rapport à</u> $D\times V$.

<u>Démonstration</u> :

Ceci résulte immédiatement du fait que

$$H(D\times\omega) = H(D)\hat{\otimes}_\pi H(\omega)$$
$$H(D\times V) = H(D)\hat{\otimes}_\pi H(V) \quad ,$$

(cf. [19]) , et de la densité de $H(V)$ dans $H(\omega)$, C.Q.F.D.

Donc, pour que $T\in N(a;\mathfrak{X}'_c,H'_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$, il faut et il suffit que la fonctionnelle $\tilde{T} = i_{\omega,V}(T)$ soit telle que $\rho_{V,D\times V}(\tilde{T})$ soit portable dans $D\times V$ par l'ouvert Ω . Pour qu'il en soit ainsi d'après un théorème de A. Martineau ([29] ; ch.I, th. 1.1) il faut et il suffit que $\rho_{V,D\times V}(\tilde{T})$ soit portable par l'enveloppe $H(D\times V)$-convexe de Ω , $\tilde{\Omega}_{D\times V}$. Mais pour que $\rho_{V,D\times V}(\tilde{T})$ soit portable par l'ouvert $H(D\times V)$-convexe $\tilde{\Omega}_{D\times V}$, il faut et il suffit (cf. [29]; ch. I, th. 2.6) que

---

(61) C'est-à-dire qu'on suppose ω_j et ω de Runge (cf. § 1) dans V .

$\tilde{T}$ soit portable dans V par $V \cap \tilde{\Omega}_{D\times V}$ c'est-à-dire d'après nos définitions par $(\tilde{\Omega}_{D\times V})_{z_o}$.

Notons $\tilde{\omega}_{z_o}$ la projection de $(\tilde{\Omega}_{D\times V})_{z_o}$ sur la variété V . On a le

LEMME.- $\tilde{\omega}_{z_o}$ <u>est de Runge par rapport à</u> V .

<u>Démonstration</u> :

$(\tilde{\Omega}_{D\times V})_{z_o}$ est une sous-variété régulière de $D \times V$ la variété de Stein $\tilde{\Omega}_{D\times V}$. Donc toute fonction holomorphe sur $(\tilde{\Omega}_{D\times V})_{z_o}$ se relève en une fonction holomorphe sur $\tilde{\Omega}_{D\times V}$. Mais $\tilde{\Omega}_{D\times V}$ est de Runge par rapport à $D \times V$, d'où on déduit le lemme.

Il s'ensuit que

$$i_{\omega,V}\Big(N(a;\mathfrak{X}'_c,H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))\Big) = i_{\tilde{\omega}_{z_o},V}(H'(\tilde{\omega}_{z_o})) \quad ,$$

ou encore

$$N(a;\mathfrak{X}'_c,H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) \underset{alg}{=} H'_{\omega_{z_o}}(V) \cap H'_{\omega}(V)$$

Comparons les topologies de ces deux espaces.

La topologie de $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$ est définie comme la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $T \mapsto T$ et $T \mapsto \rho_{\omega,D\times\omega}(T)$ dans $H'_\omega(V)$ et $i_{\Omega,D\times\omega}(H'(\Omega))$ respectivement, ce dernier espace étant muni de la topologie quotient de celle de $H'(\Omega)$ par le noyau de $i_{\Omega,D\times\omega}$.

Pour montrer l'égalité des topologies des espaces $N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$ et $H'_{\tilde{\omega}_{z_o}}(V) \cap H'_\omega(V)$, il suffit donc d'établir que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\rho_{\omega,D\times\omega}(T) \mapsto 0$ dans $i_{\Omega,D\times\omega}(H'(\Omega))$, $T \in N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$.

b) $i^{-1}_{\tilde{\omega}_{z_o},V} \circ i_{\omega,V}(T) = i^{-1}_{\tilde{\omega}_{z_o},V}(\tilde{T})$,(qui uniquement déterminé pour T dans

$$N_\varepsilon(a;\mathfrak{X}'_c,H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) \quad ,$$

tend vers 0 dans $H'_{\tilde{\omega}_{z_o}}(V))$.

Utilisons la commutativité du diagramme (I) et l'injectivité de l'application $i_{D\times\omega,D\times V}$. On peut alors mettre a) sous la forme

a') $\rho_{V,D\times V}(\tilde{T})$ tend vers 0 dans $i_{\Omega,D\times V}(H'(\Omega))$ muni de la topologie quotient de $H'(\Omega)$.

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} H'(\tilde{\Omega}_{D\times V}) & & \\ \uparrow {\scriptstyle i_{\Omega,\tilde{\Omega}_{D\times V}}} & \searrow {\scriptstyle i_{\tilde{\Omega}_{D\times V},D\times V}} & \\ H'(\Omega) & \xrightarrow[i_{\Omega,D\times V}]{} & H'(D\times V) \end{array} ,$$

où $i_{\Omega,\tilde{\Omega}_{D\times V}}$ est un homomorphisme surjectif comme application transposée d'une injection d'image fermée d'un espace $(\mathcal{FS})$ dans un espace $(\mathcal{FS})$. D'autre part, $i_{\tilde{\Omega}_{D\times V},D\times V}$ est injective. Il en résulte que $H'(\Omega)/\ker i_{\Omega,D\times V}$ est isomorphe à

$$H'(\tilde{\Omega}_{D\times V}) \ .$$

C'est-à-dire que a') équivaut à :

a") $\rho_{V,D\times V}(\tilde{T})$ tend vers 0 dans $i_{\tilde{\Omega}_{D\times V}}(H'(\tilde{\Omega}_{D\times V}))$.

Mais le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H'(\tilde{\Omega}_{D\times V}) & \xrightarrow{i_{\tilde{\Omega}_{D\times V},D\times V}} & H'(D\times V) \\ {\scriptstyle \rho_{(\tilde{\omega}_{z_o},V),\tilde{\Omega}_{D\times V}}} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \rho_{V,D\times V}} \\ H'(\tilde{\omega}_{z_o}) & \xrightarrow[i_{\tilde{\omega}_{z_o},V}]{} & H'(V) \end{array}$$

$\rho_{(\tilde{\omega}_{z_o},V),\tilde{\Omega}_{D\times V}}$ est un isomorphisme de $H'(\tilde{\omega}_{z_o})$ sur son image, toujours d'après le théorème de H. Cartan cité. Donc a") s'écrit :

$i^{-1}_{\tilde{\omega}_{z_o},V}(\tilde{T})$ tend vers 0 dans $H'(\tilde{\omega}_{z_o})$ soit b) . C.Q.F.D.

THÉORÈME 4.3.- Soient V une variété de Stein, $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ un système de p-ouverts de V vérifiant (C) et $(\mathcal{R}')$.

Alors, si on note $\tilde{\omega}_{z_o}$ la projection de $(\tilde{\Omega}_{D\times V})_{z_o}$ sur la variété V , on a :

$$N_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) = H'_\omega(V)\cap H'_{\tilde{\omega}_{z_o}}(V) \ .$$

COROLLAIRE 1.- <u>Dans les hypothèses du théorème, si le système</u> $\{\omega,\tilde{\omega}_{z_o}\}$ <u>vérifie la propriété</u> (H) , (<u>en particulier si</u> $V = \mathbb{C}$) , <u>alors</u>

$$N_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) = H'_{\omega\cap\tilde{\omega}_{z_o}}(V) .$$

<u>Démonstration</u> :

Ceci est une conséquence immédiate des résultats du § 1.

On a en particulier le :

COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> ω <u>est</u> H(V)-<u>convexe, alors on a</u> :

$$N_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) = H'_{\tilde{\omega}_{z_o}}(V) .$$

Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

DÉFINITION 4.5.- <u>Etant donné un recouvrement ouvert fini</u> $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ <u>d'un ouvert</u> H(V)-<u>convexe</u> ω <u>de</u> V , <u>on dira qu'un ouvert</u> U <u>de</u> V <u>est intermédiaire pour le système d'ouverts</u> $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ <u>si</u> :

1) $\omega_{1\dots p} \subset U \subset V$

2) $H'_U(V)$ <u>est un espace intermédiaire pour</u> $H'_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)$.

On aura par exemple le :

COROLLAIRE 2'.- <u>Si</u> ω <u>est</u> H(V)-<u>convexe, pour tout</u> z_o , <u>l'ouvert</u> $\tilde{\omega}_{z_o}$ <u>est un ouvert intermédiaire pour le</u> p-<u>uplet d'interpolation</u> $H'_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}$.

Considérons maintenant deux points z_o , z'_o de D , on obtient le

THÉORÈME 4.4.- <u>Soient</u> V <u>une variété de Stein,</u> $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ <u>un système de</u> p-<u>ouverts de</u> V <u>vérifiant</u> (C) <u>et</u> ($\mathcal{R}'$) , <u>alors</u>

$$N_\varepsilon([[\delta_{z_o},\delta_{z'_o}]],H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) = H'_\omega(V) \cap H'_{\tilde{\omega}_{z_o}}(V) \cap H'_{\tilde{\omega}_{z'_o}}(V)$$

<u>En particulier si</u> ω <u>est pseudo-convexe et si</u> $H^1(\tilde{\omega}_{z_o} \cup \tilde{\omega}_{z'_o}) = 0$, $\tilde{\omega}_{z_o} \cap \tilde{\omega}_{z'_o}$ <u>est un ouvert intermédiaire pour le système</u> $\{\omega_1,\omega_2\}$.

N° III : <u>Cas d'un système de compacts sur une variété de Stein</u>.

Soit $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ un système de p-compacts de V , V variété de Stein. On suppose que ce système vérifie les propriétés (C) et ($\mathcal{R}'$) .

On choisit maintenant comme foncteur d'interpolation le foncteur $\mathcal{E} \mapsto N_\varepsilon(\delta_{z_o}, '_c, \mathcal{E})$, où

$$\mathcal{Y} = H_{\{\bar{D}_1,\dots,\bar{D}_p\}}(C) \quad ,$$

$\bar{D}_1,\dots,\bar{D}_p$ désignant p-disques fermés du plan complexe, d'intersection non vide.

On a alors si $\mathcal{E}$ désigne le p-uplet d'interpolation $H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)$, le

LEMME.-
$$\mathcal{Y} \otimes \mathcal{E} = H_{\bar{D}_{1\dots p}}(\mathbb{C}) \otimes H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)$$
$$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{Y}'_c,\mathcal{E}) = H_{\bar{\Omega}}(\mathbb{C}\times V) \quad , \text{ où } \bar{\Omega} = \bigcup_i \bar{D}_i \times \omega_i$$

Dans ce cas $N(\delta_{z_0};\mathcal{Y}'_c,H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$ apparaît comme l'espace des fonctionnelles analytiques définies sur ω dans V , dont l'image dans $H'_{\bar{D}\times\omega}(\mathbb{C}\times V)$ est quasi-portable par $\bar{\Omega}$.

Rappelons la définition suivante [29] : on dit qu'un compact K de V est un "bon compact" si $H_{\tilde{K}_V}(V)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $H_K(V)$ (par l'homomorphisme de restriction). On démontre qu'une condition suivante pour que K soit un bon compact de V est qu'il vérifie la condition suivante :

γ) Il existe une famille équicontinue F d'applications de $[0,1]$ dans $\tilde{K}_V$ telle que pour tout $y\in\tilde{K}_V$, il existe $f\in F$, vérifiant $f(0) = y$, $f(1)\in K$. (On voit alors que si V est de dimension égale à 1 , tout compact de V est un bon compact, que cette condition est remplie par un polyèdre analytique de $\mathbb{C}^n$, d'un compact convexe, de l'enveloppe de deux polydisques etc...)

c) Alors si K est un bon compact de V , pour qu'une fonctionnelle analytique définie sur V soit quasi-portable par K il faut et il suffit qu'elle soit quasi-portable par $\tilde{K}_V$ ([29], ch.I, prop. 1.10).

On peut alors énoncer le

THÉORÈME 4.5.- Soient V une variété de Stein, $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ un système de p-compacts de V vérifiant (C) et ($\mathcal{R}'$) . Alors si Ω est un bon compact de $\mathbb{C}\times V$, on a :

$$N_\varepsilon(\delta_{z_0};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) = H'_\omega(V) \cap H^{\perp}_{\omega_{z_0}}(V) \quad .$$

Nous n'écrirons pas la démonstration qui suit en tout point celle faite dans le cas d'un système d'ouverts. L'hypothèse que Ω est un bon compact de $\mathbb{C}\times V$ est nécessaire à cette démonstration. En effet, contrairement au cas ouvert, on ne sait pas si une fonctionnelle définie sur $\mathbb{C}\times V$ est quasi-portable par un compact si et seulement si elle l'est par son enveloppe $H(\mathbb{C}\times V)$-convexe.

§ 4. Exemples.

N° I : Cas des domaines étoilés de $\mathbb{C}^n$.

Supposons maintenant que $V = \mathbb{C}^n$. Considérons un ouvert de V étoilé par rapport à un de ses points (c'est-à-dire stable pour les homothéties réelles positives ayant pour centre ce point, de rapport λ , $0 \leqq \lambda \leqq 1$) . On obtient alors le

LEMME.- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ étoilé par rapport à un de ses points, $\Gamma(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ étoilé par rapport à ce point.

Démonstration :

Donnons ici quelques indications de la démonstration suggérée par H. Cartan.

Notons ψ l'étalement canonique de Ω dans $\mathbb{C}^n$, $(\Gamma(\Omega),\tilde{\psi},\tilde{\Phi})$ l'enveloppe d'holomorphie de (Ω,ψ) . Appelons Φ_λ l'homothétie de rapport λ , $\lambda\in[0,1]$. C'est une application analytique de Ω dans lui-même dépendant continuement du paramètre λ . On sait alors qu'il existe une famille d'applications $\tilde{\Phi}_\lambda$ analytique de $\Gamma(\Omega)$ dans lui-même, telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, "\Phi_\lambda"] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dd, "\tilde{\Phi}"'] & & \Omega \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dd, "\tilde{\Phi}"] & \\
& \mathbb{C}^n \arrow[rr, "\Phi_\lambda"] & & \mathbb{C}^n \\
\Gamma(\Omega) \arrow[rr, "\tilde{\Phi}_\lambda"'] \arrow[ur, "\tilde{\psi}"'] & & \Gamma(\Omega) \arrow[ur, "\tilde{\psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

On en déduit alors que $\tilde{\psi}$ est injective. En effet, soient ζ_1 et ζ_2 deux points de $\Gamma(\Omega)$ de même projection sur $\mathbb{C}^n$ c'est-à-dire tels que $\tilde{\psi}(\zeta_1) = \tilde{\psi}(\zeta_2)$. On a

$$\tilde{\psi}(\tilde{\Phi}_\lambda(\zeta_1)) = \tilde{\psi}(\tilde{\Phi}_\lambda(\zeta_2)) \quad , \text{ pour tout } \lambda\in[0,1] \; .$$

ψ est un homéomorphisme local, donc l'ensemble des λ tels que $\tilde{\Phi}_\lambda(\zeta_1) = \tilde{\Phi}_\lambda(\zeta_2)$ est ouvert ; il est fermé puisque $\tilde{\Phi}_\lambda$ dépend continuement de λ . Mais $\tilde{\Phi}_o$ est une application constante, on a donc $\tilde{\Phi}_\lambda(\zeta_1) = \tilde{\Phi}_\lambda(\zeta_2)$ pour $\lambda = 0$, donc pour tout $\lambda\in[0,1]$; en particulier pour $\lambda = 1$ d'où il découle que

$$\zeta_1 = \zeta_2 \qquad\qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Soit $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ un système de p-ouverts de $\mathbb{C}^n$ étoilés par rapport à un même point de $\omega_{1\dots p}$. Alors Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$ étoilé par rapport à un de ses points, donc aussi son enveloppe d'holomorphie $\Gamma(\Omega)$. Notons $\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega)$ la composante connexe de $\varphi'_{z_o}(\omega_{1\ldots p})$ dans $\Gamma_{z_o}(\Omega)$ (avec les notations du paragraphe 2) et appelons $\hat{\omega}_{z_o}$ la projection de $\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega)$ sur $\mathbb{C}^n$; on a alors en corollaire du théorème 4.1 , le

THÉORÈME 4.6.- Soit $\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$ un système de p-ouverts de $\mathbb{C}^n$, qu'on suppose étoilés par rapport à un même point de $\omega_{1\ldots p}$. Alors

1) $L_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(\mathbb{C}^n)) = H(\hat{\omega}_{z_o})$.

2) Si $z_o,\ldots,z_k$ sont $(k+1)$ points de D , $c_o,\ldots,c_k$ $(k+1)$ constantes non nulles, on a

$$L_\varepsilon(\sum_{\sigma=0}^{k} c_\sigma\,\delta_{z_\sigma};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(\mathbb{C}^n)) = H(\hat{\omega}_{z_o})+\ldots+H(\hat{\omega}_{z_k}) \;.$$

$$= L_\varepsilon([[\delta_{z_o},\ldots,\delta_{z_o}]],H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(\mathbb{C}^n))$$ (62)

On en déduit le

COROLLAIRE 1.- Si $n = 1$

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o}+\ldots+\delta_{z_\sigma};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C});H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(\mathbb{C})) = (H(\hat{\omega}_{z_o}\cap\ldots\cap\hat{\omega}_{z_k}) \;.$$

On a de façon plus générale (cf. § 1 - 4)

COROLLAIRE 2.- Si le système $\{\hat{\omega}_{z_o},\ldots,\hat{\omega}_{z_k}\}$ vérifie la propriété (H) , alors :

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o}+\ldots+\delta_{z_k};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}}(\mathbb{C})) = (H(\hat{\omega}_{z_o}\cap\ldots\cap\hat{\omega}_{z_k}) \;.$$

REMARQUE.- Les ouverts $\hat{\omega}_{z_j}$ sont pseudo-convexes, puisque toute sous-variété régulière d'une variété de Stein, ici $\Gamma(\Omega)$, est de Stein ([15]) . On peut alors appliquer les remarques faites sur la propriété (H) dans le § 1. En particulier si $k = 1$, une condition nécessaire et suffisante pour que le corollaire 2 soit vérifié est que

$$H^1(\hat{\omega}_{z_o}\cup\hat{\omega}_{z_1};\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0 \;.$$

Méthode duale :

Soit $\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$ un système d'ouverts étoilés de $\mathbb{C}^n$.

---

(62) $[[\delta_{z_o},\ldots,\delta_{z_\sigma}]]$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par $\delta_{z_o},\ldots,\delta_{z_\sigma}$.

On sait d'après un résultat de Behnke (cf. [5]) que tout ouvert pseudo-convexe étoilé de $\mathbb{C}^n$ est régulièrement étendable à $\mathbb{C}^n$ et que tout domaine régulièrement étendable à $\mathbb{C}^n$ est polynomialement convexe. Il en est donc ainsi de l'enveloppe d'holomorphie d'un ouvert étoilé de $\mathbb{C}^n$, d'après le lemme. Mais puisque pour tout j, $H(\omega_j) = H(\Gamma(\omega_j))$, on a $H(\omega) = H(\Gamma(\omega))$. On en déduit que le système

$$\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$$

considéré vérifie la propriété $(\mathcal{R}')$.

Posons $V = \Gamma(\omega)$. C'est un ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$ et $\Gamma(\Omega)$ d'après le lemme qui précède, est un ouvert étoilé pseudo-convexe de V. Nous venons de voir qu'il est polynomialement convexe, on a donc le

LEMME.- Ω <u>est de Runge par rapport à</u> V.

On peut alors appliquer le théorème à un tel système d'ouverts. On obtient le

THÉORÈME 4.7.- <u>Soit</u> $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ <u>un système d'ouverts étoilés par rapport à un même point de</u> $\mathbb{C}^n$, <u>alors</u>

1) $N_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(\mathbb{C}^n)) = H'(\hat{\omega}_{z_o})$

2) <u>Si</u> $z_o,\dots,z_k$ <u>sont</u> $(k+1)$ <u>points de</u> D :

$$N_\varepsilon([[\delta_{z_o},\dots,\delta_{z_k}]]; H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(\mathbb{C}^n)) = H'_{\hat{\omega}_{z_o}}(\mathbb{C}^n)\cap\dots\cap H'_{\hat{\omega}_{z_o}}(\mathbb{C}^n).$$

COROLLAIRE.- <u>Si le système</u> $\{\hat{\omega}_{z_o},\dots,\hat{\omega}_{z_k}\}$ <u>vérifie la propriété</u> (H), <u>ou encore si</u> $n = 1$ <u>on a</u> :

$$N_\varepsilon([[\delta_{z_o},\dots,\delta_{z_k}]]; H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(\mathbb{C}^n)) = H'_{\hat{\omega}_{z_o}\cap\dots\cap\hat{\omega}_{z_k}}(\mathbb{C}^n) .$$

N° II : <u>Application au cas de deux polydisques</u> de $\mathbb{C}^n$.

Considérons sur $\mathbb{C}^n$ le système d'ouverts $\{\omega_1,\omega_2\}$, où

$$\omega_\chi = \prod_{\sigma=1}^{n} \gamma^{(\chi)} \quad , \quad \chi = 1,2, \gamma_\sigma^{(\chi)}$$

désignant des disques du plan complexe, tels que pour tout $\sigma = 1,\dots,n$,

$$\gamma_\sigma^{(1)} \cap \gamma_\sigma^{(2)} \neq \emptyset .$$

Soit $D_1 = \gamma_o^{(1)}$ et $D_2 = \gamma_o^{(2)}$ deux disques de $\mathbb{C}$, d'intersection non vide. Nous noterons $\partial\gamma_\sigma^{(\chi)}$ la frontière de $\gamma_\sigma^{(\chi)}$; $\chi = 1,2$; $\sigma = 1,\dots,n$.

Alors ω_1 et ω_2 sont des ouverts étoilés et on peut appliquer les résultats des théorèmes 4.6 et 4.7 à un tel système d'ouverts si on connait l'enveloppe d'holomorphie de la réunion Ω des deux polydisques de $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\prod_{\sigma=0}^{n} \gamma_\sigma^{(1)} \quad \text{et} \quad \prod_{\sigma=0}^{n} \gamma_\sigma^{(2)} .$$

Celle-ci a été déterminée par M.M. Bros et Glaser [63]. Rappelons leur résultat.

Soit $\omega_\chi = \prod_{\sigma=0}^{n} \gamma_\sigma^{(\chi)}$, $\chi = 1,2$ les polydisques de $\mathbb{C}^n$ considérés ci-dessus.

On note i , j , k , respectivement les indices des variables relatives à chacune des configurations (i) , (ii) , (iii) , que nous allons décrire :

(i) $\partial\gamma_i^{(1)}$ et $\partial\gamma_i^{(2)}$ se coupent en deux points α_i et β_i distincts, on peut alors définir les disques $\gamma_i^{(\chi)}$, $\chi = 1,2$ par :

$$\gamma_i^{(\chi)} = \{z_i \in \mathbb{C} \ ; \ \theta_i^{(\chi)} < \operatorname{Arg} \frac{z_i-\alpha_i}{z_i-\beta_i} < \theta_i^{(\chi)} + \pi\} \quad ,$$

où $0 < \theta_i^{(\chi)} < \pi$; $\chi = 1,2$.

(ii) L'un des disques est strictement intérieur à l'autre, par exemple

$$\gamma_j^{(1)} \subset \gamma_j^{(2)} .$$

Si α_j et β_j désignent les points de base du faisceau défini par $\gamma_j^{(1)}$ et $\gamma_j^{(2)}$, en appelant α_j celui des deux points tel que $\alpha_j \in \gamma_j^{(\chi)}$:

$$\gamma_j^{(\chi)} = \{z_j \in \mathbb{C} \ ; \ \left|\frac{z_j-\alpha_j}{z_j-\beta_j}\right| < \rho_j^{(\chi)}\} \quad , \quad 0 < \rho_j^{(\chi)} < 1 \quad ; \quad \chi = 1,2 \quad .$$

(iii) $\gamma_k^1 \subset \gamma_k^2$, $\partial\gamma_k^{(1)}$ et $\partial\gamma_k^{(2)}$ ont un point commun α_k , on notera $z_k^{(\chi)}$ le centre et $d_k^{(\chi)}$ le diamètre de $\gamma^{(\chi)}$ ($\chi = 1,2$) .

- Pour tout λ tel que $0 \leqq \lambda \leqq 1$, on définit :

---

(63) Ce résultat est exposé dans un travail dactylographié intitulé " Enveloppe d'holomorphie de la réunion de deux polydisques " par M.M. Bros et Glaser (C.E.R.N. Genève).

$$\begin{cases} \gamma_i(\lambda) = \{z_i \in \mathbb{C} \ ; \ (1-\lambda)\ \theta_i^{(1)} + \lambda\theta_i^{(2)} < \operatorname{Arg} \dfrac{z_i-\alpha_i}{z_i-\beta_i} < (1-\lambda\ \ \theta_i^{(1)} + \lambda\theta_i^{(2)} + \pi\} \\ \gamma_j(\lambda) = \{z_j \in \mathbb{C} \ ; \ \left|\dfrac{z_j-\alpha_j}{z_j-\beta_j}\right| < (\rho_j^{(1)})^{1-\lambda}(\rho_j^{(2)})^{\lambda}\} \\ \gamma_k(\lambda) = \left\{ z_k \in \mathbb{C} \ ; \ |z_k - z_k(\lambda)| < |z_k(\lambda)-\alpha_k| \ ; z_k(\lambda) = \alpha_k + \dfrac{(z_k^1-\alpha_k)(z_k^2-\alpha_k)}{\lambda z_k^1+(1-\lambda)z_k^2-\alpha_k} \right\} \end{cases}$$

Nous poserons $\omega^{(\lambda)} = \prod_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma(\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$. Un tel ouvert $\omega^{(\chi)}$ sera désigné par "polydisque intérieur du polyfaisceau déterminé par ω_1 et ω_2 ." (64) Il vient alors, en appliquant les théorèmes 4.6 et 4.7 , le

THÉORÈME 4.8.-

1) <u>Soit</u> $z_o\in D_1$. <u>On a les égalités</u> :

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H\left(\bigcup_{\mu_1^{(z_o)} \leq\lambda\leq 1} \omega^{(\lambda)} \right) ,$$

$$N_\varepsilon(\delta_{z_o}, H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H'\left(\bigcup_{\mu_1^{(z_o)} \leq\lambda\leq 1} \omega^{(\lambda)} \right) .$$

<u>où</u> $\mu_1^{(z_o)}$ <u>est donné par la relation</u>

$$\mu_1^{(zo)} = \frac{\theta_o^2-\theta_{z_o}}{\theta_o^2-\theta_o^1} \quad , \text{ avec } \quad \theta_{z_o} = \operatorname{Arg} \frac{z_o-\alpha_o}{z_o-\beta_o} \quad .$$

2) <u>Soit</u> $z'_o\in D_2$. <u>On a les égalités</u> :

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H\left(\bigcup_{0\leq\lambda\leq\mu_2^{(z'_o)}} \omega^{(\lambda)} \right) ,$$

$$N_\varepsilon(\delta_{z'_o}; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H'\left(\bigcup_{0\leq\lambda\leq\mu_2^{(z'_o)}} \omega^{(\lambda)} \right) .$$

---

(64) Dans le cas où $n = 1$ on retrouve ainsi les disques du faisceau de cercles déterminé par ω_1 et ω_2 , qui sont intérieurs à $\omega_1 \cup \omega_2 = \omega$.

où $\mu_2^{(z'_o)}$ est donnée par la relation :

$$\mu_2^{(z'_o)} = \frac{\theta_o^2 + \pi - \theta_{z'_o}}{\theta_o^2 - \theta_o^1} \quad , \text{ avec } \quad \theta_{z'_o} = \operatorname{Arg} \frac{z'_o - \alpha_o}{z'_o - \beta_o} \quad .$$

THÉORÈME 4.9.- Soient $z_o \in D_1$, $z'_o \in D_2$, on suppose $\theta_{z_o} \geqq \pi - \theta_{z'_o}$, alors :

1) $$L_\varepsilon(\delta_{z_o} + \delta_{z'_o}; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H\left(\bigcup_{\mu_1^{(z_o)} \leqq \lambda \leqq \mu_2^{(z'_o)}} \omega^{(\lambda)} \right) =$$

$$L_\varepsilon([[\delta_{z_o}, \delta_{z'_o}]], H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}); H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) \quad .$$

2) $$N_\varepsilon([[\delta_{z_o}, \delta_{z'_o}]]; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}); H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H'\left(\bigcup_{\mu_1^{(z_o)} \leqq \lambda \leqq \mu_2^{(z'_o)}} \omega^{(\lambda)} \right) .$$

où $\mu_1^{(z'_o)}$ et $\mu_2^{(z_o)}$ sont les constantes définies dans le théorème 4.8.

Démonstration :

1) Appliquons le théorème 4.6 , il vient :

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o} + \delta_{z'_o}; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = L_\varepsilon([[\delta_{z_o}, \delta_{z'_o}]]; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C})) =$$

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}); H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) + L_\varepsilon(\delta_{z'_o}; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}); H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) \quad .$$

D'après le théorème qui précède, c'est encore l'espace

$$H\left(\bigcup_{\mu_1^{(z_o)} \leqq \lambda \leqq 1} \omega^{(\lambda)} \right) + \left(\bigcup_{0 \leqq \lambda \leqq \mu_1^{(z'_o)}} \omega^{(\lambda)} \right) .$$

Le système des deux ouverts

$$\left\{ \bigcup_{\mu_1^{(z_o)} \leqq \lambda \leqq 1} \omega^{(\lambda)} \quad , \quad \bigcup_{0 \leqq \lambda \leqq \mu_1^{(z'_o)}} \omega^{(\lambda)} \right\}$$

vérifie la propriété (H) . En effet, puisque nous avons supposé

$$\theta_{z_o} \geqq \pi - \theta_{z'_o} \quad , \quad \mu_1^{(z'_o)} \leqq \mu_2^{(z'_o)}$$

et la réunion des deux ouverts considérés est un ouvert pseudo-convexe, d'après le théorème de Bros et Glaser.

On a donc

$$H^1\Big(\bigcup_{0\leq\lambda\leq 1} \omega^{(\lambda)}\ ;\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}\Big) = 0 \quad ,$$

et la propriété (H) est vérifiée (cf. § 1) . Il suffit alors d'appliquer le corollaire 2 du théorème 4.6 pour obtenir la première partie du théorème. La deuxième partie est une conséquence du théorème 4.7 et de la propriété (H) (cf. corollaire 2) .

On aura en particulier les

COROLLAIRE 1.- *Supposons* $\theta_{z_0} = \pi - \theta_{z'_0}$,

$$L_\varepsilon(\delta_{z_0}+\delta_{z'_0};H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C});H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H\Big(\omega^{(\mu_1^{(z_0)})}\Big)$$

$$N_\varepsilon([[\delta_{z_0},\delta_{z'_0}]];H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C});H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H'\Big(\omega^{(\mu_1^{(z_0)})}\Big) \quad .$$

On en déduit que *tout polydisque intérieur du polyfaisceau déterminé par* ω_1 *et* ω_2 *est un ouvert intermédiaire au sens donné dans le paragraphe* 3 , pour le système des polydisques $\{\omega_1,\omega_2\}$.

Ce résultat généralise celui donné au chapitre 3 dans le cas de deux polydisques concentriques. Enonçons de façon précise ce qu'on obtient dans ce cas.

COROLLAIRE 2.- *Si* ω_1 *et* ω_2 *sont deux polydisques concentriques de* $\mathbb{C}^n$ *de rayons respectifs*

$$R_1^{(\chi)},\ldots,R_n^{(\chi)} \qquad (\chi = 1,2) \quad ,$$

alors si $a\in D_2$ *et si* $R_j^{(1)} \leq R_j^{(2)}$ *pour* $j = 1,2,\ldots,n$:

$$L_\varepsilon(\delta(z_0);H'_{\{D_1,D_2\}}(C),H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(C^n)) = H(\omega^{(\lambda_0)})$$

où $\omega^{(\lambda_0)}$ est le polydisque de même centre que ω_1 et ω_2 , de rayons

$$R_j(\lambda_0) = \Big(R_j^{(1)}\Big)^{1-\lambda_0}\Big(R_j^{(2)}\Big)^{\lambda_0} \quad , \quad j = 1,\ldots,n$$

$$\lambda_0 = \frac{\theta_0^2 + \pi - \theta_{z_0}}{\theta_0^2 - \theta_0^1}$$

N° 3 : Cas des tubes de $\mathbb{C}^n$.

Considérons dans $\mathbb{C}^n$ le système d'ouverts $\{\omega_1,\omega_2\}$, où ω_1 et ω_2 désignent deux tubes de $\mathbb{C}^n$ ayant pour bases respectives deux domaines S_1 et S_2 de $\mathbb{R}^n$. On voit facilement à l'aide du théorème du tube (cf. [2] ; p. 92) que les espaces intermédiaires pour le couple

$$H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)$$

obtenus par les méthodes précédemment décrites, sont des espaces de fonctions holomorphes sur des tubes de $\mathbb{C}^n$. Nous allons expliciter ce résultat dans le cas où S_1 et S_2 sont des domaines convexes de $\mathbb{R}^n$ d'intersection non vide. On obtient alors, en désignant par $\omega^{(\lambda)}$ le tube de $\mathbb{C}^n$ de base $S^{(\lambda)} = \lambda S_1 + (1-\lambda)\, S_2$ le

THÉORÈME 4.10.- Soit $z_o \in D_1$, $z'_o \in D_2$, on a les égalités

1) $L_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C});H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H\left(\bigcup_{\mu_1^{(z_o)}<\lambda\leq 1} \omega^{(\lambda)}\right)$,

2) $L_\varepsilon(\delta_{z'_o};H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C});H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H\left(\bigcup_{0\leq\lambda<\mu_2^{(z'_o)}} \omega^{(\lambda)}\right)$,

3) $N_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C});H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H'\left(\bigcup_{\mu_1^{(z_o)}<\lambda\leq 1} \omega^{(\lambda)}\right)$,

4) $N_\varepsilon(\delta_{z'_o};H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C});H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H'\left(\bigcup_{0\leq\lambda<\mu_2^{(z'_o)}} \omega^{(\lambda)}\right)$,

où $\mu_1^{(z_o)}$ et $\mu_2^{(z_o)}$ sont les constantes définies dans le précédent numéro (cf. théorème 4.8) .

Démonstration :

On se trouve dans le cadre d'applications des théorèmes 4.6 et 4.7 . Il suffit donc de caractériser les ensembles

$$\omega_{z_o} \text{ et } \omega_{z'_o} .$$

On transforme comme dans le cas des polydisques concentriques, D_1 et D_2 en deux tubes de bases réelles et on applique alors le théorème du tube ([2] ; p. 92) . Un calcul aisé conduit aussitôt au résultat.

On aurait un théorème analogue au théorème 4.9 en choisissant

$$\theta_{z_o} \geq \pi - \theta_{z'_o} ,$$

en particulier si on a le

COROLLAIRE.- <u>Supposons que</u> $\theta_{z_o} = \pi - \theta_{z'_o}$, <u>alors</u>

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o} + \delta_{z'_o}; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(C^n)) = H\ (\omega^{\mu_1(z_o)})$$

$$N_\varepsilon([[\delta_{z_o},\delta_{z_o}]]; H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(C^n)) = H'\ (\omega^{\mu_1(z_o)}) \ .$$

Ce corollaire exprime que tout tube de base $S^{(\lambda)} = \lambda S_1 + (1-\lambda)S_2$ est un ouvert intermédiaire (au sens du § 3) pour le système de tubes $\{\omega_1,\omega_2\}$.

N° IV : <u>Cas des domaines de Reinhardt de</u> $\mathbb{C}^n$.

Rappelons qu'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ est dit domaine de Reinhardt, si pour tout $(z_1,\ldots,z_n)$ de Ω , le point

$$(e^{i\theta_1} z_1,\ldots,e^{i\theta_n} z_n)$$

appartient à Ω , quel que soit $(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in\mathbb{R}^n$ (cf. [28], [22]) . Si Ω est un domaine de Reinhardt connexe contenant l'origine, toute fonction f holomorphe sur Ω peut s'écrire d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \ ,$$

la série converge normalement dans Ω . On montre que pour que Ω connexe contenant l'origine soit un domaine d'holomorphie, il faut et il suffit que l'ensemble

$$\Omega^* = \{\xi;\xi\in\mathbb{R}^n;(e^{\xi_1},\ldots,e^{\xi_n})\in\Omega\}$$

soit un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, tel que si $\xi\in\Omega^*$, $\eta\in\Omega^*$ dès que $\eta_j \leq \xi_j$, $j = 1,\ldots,n$.

Considérons un système $\{\omega_1,\omega_2\}$ de deux domaines de Reinhardt connexes, contenant l'origine. On peut supposer sans restreindre la généralité du problème d'interpolation, que ω_1 et ω_2 sont des domaines d'holomorphie (puisque l'enveloppe d'holomorphie de tels domaines, est univalente).

Soient D_1 et D_2 deux disques de $\mathbb{C}$, centrés à l'origine de rayons respectifs R_1 et R_2 , $R_1 < R_2$. Les ouverts $\Omega_1 = D_1 \times \omega_1$ et $\Omega_2 = D_2 \times \omega_2$ sont manifestement des domaines de Reinhardt de

$$\mathbb{C}^{n+1}$$

leur enveloppe d'holomorphie est un domaine de Reinhardt univalent de $\mathbb{C}^{n+1}$ et on tombe alors dans le cadre d'application des théorèmes 4.1 et 4.2 (§ 3, resp. A et B) .

Pour tout λ réel, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, posons

$$\omega(\lambda) = \{z\in\mathbb{C}^n \ ; \ z = (z')^{\lambda}(z'')^{1-\lambda} \ , \ z'\in\omega_1 \ , \ z''\in\omega_2\} \ .$$

Il vient alors, en utilisant l'expression du domaine d'holomorphie d'un domaine de Reinhardt (ici $\Omega_1 \cup \Omega_2$) rappelée ci-dessus, le

THÉORÈME 4.11.- <u>Soit</u> $\{\omega_1,\omega_2\}$ <u>un système de deux domaines pseudo-convexes de Reinhardt de</u> $\mathbb{C}^n$, <u>connexes, contenant l'origine. Si</u> $z_o\in D_2$, $z_o\notin D_1$, <u>on a les égalités</u> :

$$L_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H\left(\bigcup_{\lambda_o\leqq\lambda\leqq 1} \omega^{(\lambda)}\right)$$

$$N_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\omega_2\}}(\mathbb{C}^n)) = H'\left(\bigcup_{\lambda_o\leqq\lambda\leqq 1} \omega^{(\lambda)}\right)$$

<u>avec</u>
$$\lambda_o = \frac{\log(|z_o|/R_2)}{\log(R_1/R_2)} \ .$$

REMARQUES.-

1) On retrouve ici les résultats du paragraphe n° 2 dans le cas particulier des polydisques concentriques.

2) En intervertissant les rôles de D_1 et D_2 sans modifier la valeur de λ_o on en déduit que les ouverts $\omega^{(\lambda)}$ sont pour tout λ compris entre 0 et 1 des ouverts intermédiaires pour le système $\{\omega_1,\omega_2\}$, (cf. déf. 4.5) .

§ 5 - P-uplets d'espaces de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles.

Rappelons brièvement quelques notions connues (cf. [21]) .

Soit E un espace localement convexe <u>quasi-complet</u>, V une variété analytique complexe. Une fonction f définie sur V à valeurs dans E est dite holomorphe sur V à valeurs dans E , si elle est scalairement holomorphe sur V à valeurs dans E , c'est-à-dire si, pour tout $e'\in E'$, la fonction

$$z \mapsto \langle \vec{f}(z) \ , \ e' \rangle_{(E,E')} \ , \quad z\in V \ ,$$

est holomorphe sur V .

L'application qui à une telle fonction f associe l'application $e' \mapsto \langle \vec{f}, e' \rangle$

de E' dans $H(V)$, définit un isomorphisme de l'espace vectoriel $H(V,E)$ des fonctions holomorphes sur V muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de V sur l'espace

$$H(V)\varepsilon E = \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c,H(V)) = \mathcal{L}_\varepsilon(H'(V),E) \quad .$$

Nous identifierons indifféremment $H(V,E)$ à l'un de ces deux espaces.

Supposons que V est étalée dans $\mathbb{C}^n$, par un étalement φ . De l'isomorphisme de $H(V)$ sur $H(\Gamma(V))$ et des égalités rappelées ci-dessus, on déduit un isomorphisme de $H(V,E)$ sur $H(\Gamma(V),E)$. Si $f\in H(V,E)$ nous noterons f son prolongement à $H(\Gamma(V),E)$.

Par extension, on dit qu'une fonction f définie sur une variété analytique eomplexe V à valeurs dans un espace localement convexe F non nécessairement quasi-complet est holomorphe à valeurs dans F si elle est holomorphe à valeurs dans le quasi-complété $\widehat{F}$ de F .

Soient E et F deux espaces localement convexes, $j_{(E,F)}$ une injection continue de E dans F .

Soient V et W deux variétés analytiques complexes, φ un étalement de V dans W . On pose alors la :

DÉFINITION.- <u>Une fonction</u> $f\in H(V,F)$ <u>est</u> φ-<u>prolongeable à</u> $H(W,E)$ <u>s'il existe</u> $f'\in H(W,E)$ <u>telle que</u> :

$$f = j_{(E,F)} \circ f' \circ \varphi \quad .$$

Si $f'\in H(W,E)$ nous appellerons φ-<u>restriction</u> de f' à V l'élément f de $H(V,F)$ défini par $f = f' \circ \varphi$.

- Considérons une variété analytique complexe V , un système d'ouverts

$$\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$$

de V vérifiant les hypothèses (C) et $(\mathcal{R}')$.

Soit $\mathcal{E}$ un p-uplet d'interpolation de $\mathcal{C}^{\,o}_{(p)}$ [65] . Pour simplifier, nous supposerons que <u>les espaces</u> $E_1,\dots,E_p$ et $E^{\cup}$ <u>sont quasi-complets et que</u> $\mathcal{E} = (\mathcal{E}'_c)'_c$.

Soit f une fonction de $H(\omega,E^{\cup})$ dont la restriction à ω_j , notée f_j , définit une fonction holomorphe à valeurs dans E_j , $j = 1,\dots,p$.

Par principe du prolongement analytique, puisque la propriété (C) est vérifiée,

---

[65] C'est-à-dire tel que $E^{\cap}$ est faiblement dense dans chacun des E_j , $j = 1,\dots,p$.

ceci équivaut à la donnée de p-fonctions holomorphes $f_1,\dots,f_p$ respectivement sur $\omega_1,\dots,\omega_p$ à valeurs dans $E_1,\dots,E_p$, dont les restrictions à $\omega_{1\dots p}$ définissent une même fonction holomorphe à valeurs dans $E^{\cup}$.

Considérons pour tout $j = 1,\dots,p$ l'application v_j de $(E_j)'_c$ dans $H_{\omega_j}(V)$ définie par $e' \mapsto \langle \vec{f}_j, e' \rangle$.

Pour tout $e' \in E'_1 \cap \dots \cap E'_p \underset{alg}{=} (E^{\cup})'$, on a, si $z \in \omega_{1\dots p}$;

$$\langle \vec{f}_j(z), e' \rangle = \langle f_{j'}(z), e' \rangle \ , \quad (j,j') \in \{1,\dots,p\} \times \{1,\dots,p\} \ .$$

Donc $v = (v_1,\dots,v_p)$ définit un élément de $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{E}'_c, H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$.
Appliquons la propriété duale d'interpolation. Elle montre que ${}^t v$ applique continuement

$$N_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}), H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$$

dans

$$N_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}), \mathcal{E}'_c) \ ,$$

et le diagramme suivant est commutatif :

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{ccccc} H'_{\omega_1}(V) \cap \dots \cap H'_{\omega_p}(V) & \longrightarrow & N_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}); H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) & \longrightarrow & H'_\omega(V) \\ \Big\downarrow {}^t v^{\cap} & & \Big\downarrow {}^t v & & \Big\downarrow {}^t v^{\cup} \\ E^{\cap} & \longrightarrow & N_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}); \mathcal{E}'_c) & \longrightarrow & E^{\cup} \end{array}$$

Nous allons interpréter ce diagramme dans chacun des différents cas étudiés dans le paragraphe 3 :

1°) <u>Cas d'une variété étalée dans</u> $\mathbb{C}^n$.

On a le

THÉORÈME 4.12.- <u>Soient</u> (V,φ) <u>une variété analytique complexe étalée dans</u> $\mathbb{C}^n$, $\{\omega_1,\dots,\omega_p\}$ <u>un système d'ouverts vérifiant</u> (R), (C) et (H).

<u>Si</u> $f \in H(\omega, E^{\cup})$, <u>et si sa restriction à</u> ω_j est dans $H(\omega_j, E_j)$; $j = 1,\dots,p$, <u>alors il existe</u> $f' \in H'(\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega), {}^c N_\varepsilon(\delta_{z_o}; H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}), \mathcal{E}'_c))$ <u>telle que</u> :

1) f' <u>est un</u> φ'_{z_o} <u>-prolongement de la restriction de</u> f <u>à</u> $\omega_{1\dots p}$ (qui est un élément de

$$H(\omega_{1\dots p}, E^{\cup}))\,(66).$$

(66) φ'_{z_o} est l'étalement de $\omega_{1\dots p}$ dans $\Gamma_{z_o}(\Omega)$ associé à φ (cf. § 2).

2) <u>Le prolongement</u> $\tilde{f}$ <u>de</u> f <u>à</u> $H(\Gamma(\omega),E^{\cup})$, <u>est un</u> $\tilde{\Phi}'_{z_o}$ -<u>prolongement de</u> f' <u>à</u> $\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega)$ (67) .

<u>Démonstration</u> :

1) Puisque la propriété (H) est vérifiée, on a :

$$H'_{\omega_1}(V) \cap \dots \cap H'_{\omega_p}(V) = H'_{\omega_{1\dots p}}(V)$$

L'injection de $H'_{\omega_{1\dots p}}(V)$ dans $N_c(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$ n'est autre que la transposée $i_{\omega_{1\dots p},\omega}$ de l'application de restriction à $\omega_{1\dots p}$.

L'injection de

$$N_c(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$$

est l'injection canonique que nous noterons σ . Nous noterons α_1 l'isomorphisme de $H'(\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega))$ sur $N_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\dots,D_p\}}(\mathbb{C}),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V))$ défini dans le théorème 4.2 (cf. § 3) . (68)

Alors le diagramme (I) peut se compléter de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & H'(\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega)) \arrow[rr, "i_{\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega),\Gamma(\omega),\tilde{\Phi}'_{z_o}}"] \arrow[d, dashed, "\alpha_1"] & & H'(\Gamma(\omega)) \arrow[d, "i^{-1}_{\omega,\Gamma(\omega)}"] \\
H'_{\omega_{1\dots p}} \arrow[ur, "i_{\omega_{1\dots p},\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega),\varphi'_{z_o}}"] \arrow[r, "i_{\omega_{1\dots p},\omega}"'] \arrow[d, "{}^t v"', "\cap"] & N_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,D_p\}}(C),H_{\{\omega_1,\dots,\omega_p\}}(V)) \arrow[rr, "\sigma"'] \arrow[d, "{}^t v"] & & H'_\omega(V) \arrow[d, "{}^t v", "\cup"'] \\
E^{\cap} \arrow[r] & {}^cN_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,D_p\}}(C);\mathcal{E}'_c) \arrow[rr, "\sigma'"'] & & E^{\cup}
\end{tikzcd}$$

---

(67) Φ'_{z_o} est l'étalement de $\Gamma_{z_o}(\Omega)$ dans $\Gamma(\omega)$ construit à partir de l'étalement de Ω dans $D \times \omega$ (cf. § 3) .

(68) $\alpha_1 = \rho^{-1}_{\Gamma_{z_o}(\Omega),\Gamma(\omega),\Phi'_{z_o}} \circ i_{\omega,\Gamma(\omega)}$.

On obtient à nouveau un diagramme commutatif, et on a :

$$^t v \circ i_{\omega_{1\ldots p},\omega} = {}^t v \circ \alpha_1 \circ i_{\omega_{1\ldots p},\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega),\varphi'_{z_o}}$$

$$\sigma' \circ {}^t v \circ \alpha_1 = {}^t v \circ i^{-1}_{\omega,\Gamma(\omega)} \circ i_{\tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega),\ (\omega),\tilde{\Phi}'_{z_o}} \ .$$

Ceci s'écrit encore, en désignant par f' l'application holomorphe

$$z \mapsto ({}^t v \circ \alpha_1)(\delta_z) \ \text{, de } \tilde{\Gamma}_{z_o}(\Omega) \text{ dans } {}^cN_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),\mathcal{E}'_c) \ .$$

$$\begin{cases} f/\omega_{1\ldots p} = f' \circ \varphi'_{z_o} \\ f' = \tilde{f} \circ \tilde{\Phi}'_{z_o} \ . \end{cases}$$

Ceci démontre les deux affirmations du théorème.

- Dans le cas particulier où φ'_{z_o} et $\tilde{\Phi}'_{z_o}$ sont des isomorphismes, l'énoncé se simplifie. On aura par exemple le

THÉORÈME 4.13.- Soient $\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$ p ouverts étoilés de $\mathbb{C}^n$, ou p domaines de Reinhardt.

On suppose que le système $\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$ vérifie la propriété (H) .

Soit $f \in H(\omega,E^{\cup})$, $\tilde{f}$ son prolongement à $H(\Gamma(\omega),E^{\cup})$. Alors la restriction de f à $\omega_{1\ldots p}$ est prolongeable en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\hat{\omega}_{z_o}$ de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans

$$^cN_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C});\mathcal{E}'_c)$$

qui coïncide avec la restriction de $\tilde{f}$ à $\hat{\omega}_{z_o}$.

2°) Cas d'une variété de Stein.

On a une interprétation immédiate du diagramme (I) sous la forme du

THÉORÈME 4.14.- Soient V une variété de Stein, $\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$ un système d'ouverts vérifiant (R) , (C) et (H) . On suppose que ω est H(V)-convexe.
Soit $f \in H(\omega,E^{\cup})$. Si sa restriction f_j à ω_j est dans $H(\omega_j,E_j)$, $j = 1,\ldots,p$ la restriction de f à $\tilde{\omega}_{z_o}$ est holomorphe à valeurs dans

$$^cN_\varepsilon(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,\ldots,D_p\}}(\mathbb{C}),\mathcal{E}'_c) \ .$$

Applications :

En choisissant pour D_1 et D_2 deux disques concentriques de rayons respectifs R et R' , et pour z_o le nombre réel λ , $R < \lambda < R'$, on pourra appliquer ces résultats quand le couple $\mathcal{E}$ est un couple d'espaces de Köthe, nucléaires

$$(E(\beta^{(n)}),E(\beta'^{(n)}))$$

tel que
$$E(\beta^{(n)}) \leq E(\beta'^{(n)})$$

Nous avons remarqué (cf. ch. III, § 4, remarque 3.7) qu'on avait

$$N_c(\delta_{z_o};H'_{\{D_1,D_2\}}(\mathbb{C});\mathcal{E}'_c) = N_c(a;(E(\alpha^{(n)}),E(\alpha'^{(n)})),\mathcal{E}'_c)$$

où
$$a = (\lambda^i) \quad , \quad \alpha_i^{(n)} = (R-\tfrac{1}{n})^i \quad , \quad \alpha_i = (R'-\tfrac{1}{n})^i \quad , \quad i\in\mathbb{N} \quad .$$

En appliquant les résultats du précédent chapitre (cf. corollaire th. 3.18) on aura par exemple, le

THÉORÈME 4.15.- <u>Soient</u> $F(\beta^{(n)})$ <u>et</u> $F(\beta'^{(n)})$ <u>deux espaces échelonnés nucléaires</u>, $F(\beta'^{(n)}) \leq F(\beta^{(n)})$, $\beta^{(n)}$ <u>et</u> $\beta'^{(n)}$ <u>étant supposés strictement positifs</u>.

<u>Soient</u> ω_1 <u>et</u> ω_2 <u>deux ouverts étoilés par rapport à un même point de</u> $\mathbb{C}^n$, z_o <u>un point de</u> $D_1 \cup D_2$. <u>On pose</u> $\lambda = |z_o|$.

<u>Alors, toute fonction holomorphe sur</u> ω_1 <u>à valeurs dans</u> $E(\beta^{(n)})$ <u>et sur</u> ω_2 <u>à valeurs dans</u> $E(\beta'^{(n)})$ <u>est holomorphe sur</u> $\tilde{\omega}_{z_o}$ <u>à valeurs dans</u>

$$E^{<\mu_o}(\beta_\mu^{(m,n)}) \quad ,$$

avec
$$\mu_o = \frac{\log \lambda/R}{\log R'/R} \text{ [69]} \quad .$$

REMARQUES.- On pourra, par exemple, expliciter ces résultats dans le cas où $E(\beta^{(n)})$ désigne l'espace des fonctions entières d'ordre $< \rho$, $E(\beta'^{(n)})$ l'espace des fonctions entières d'ordre $< \rho'$, $\rho < \rho' < \infty$.

Ceci donne l'énoncé suivant :

Une fonction holomorphe de ω_1 à valeurs dans l'espace des fonctions entières d'ordre $< \rho_1$, de ω_2 à valeurs dans l'espace des fonctions entières d'ordre $< \rho_2$, est holomorphe de $\tilde{\omega}_{z_o}$ à valeurs dans l'espace des fonctions entières d'ordre $< \mathfrak{x}$, où $\mathfrak{x}$ est donné par :

---

[69] $E^{<\mu_o}(\beta_\mu^{(m,n)}) = \varinjlim_{\mu < \mu_o} E\left((\beta'^{(m)})^\mu(\beta^{(n)})^{1-\mu}\right)$ (cf. ch.III, § 4, th. 3.18)

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{\mu_o}{\rho'} + \frac{1 - \mu_o}{\rho} \ .$$ (70)

Pour ω_1 et ω_2 on pourra, par exemple, considérer des tubes, des polydisques de $\mathbb{C}^n$ ou des domaines de Reinhardt, cas dans lesquels nous avons défini explicitement les ensembles $\tilde{\omega}_{z_o}$.

(70) (cf. ch. III, § 4, th. 3.2I)

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOAS (R.-P.). - Entire functions. - New York, Academic Press, 1954 (Pure and applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, 5).

[2] BOCHNER (S.) et MARTIN (W.-T.). - Several complex variables. - Princeton, Princeton University Press, 1948.

[3] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. - Paris, Hermann, 1958, (Actualités scientifiques et industrielles, 1229).

[4] CALDERON (A.). - Intermediate spaces and interpolation. - Reports on the conference on functional analysis - Varsovie, 1960.

[5] CARTAN (H.). - Variétés analytiques complexes et cohomologie, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables ; p. 41-55. - Bruxelles, 1953 (Publication du Centre belge de recherches mathématiques).

[6] CARTAN (H.). - Séminaire, t. 4, 1951/1952 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes - Paris, Ecole Normale Supérieure (multigraphié).

[7] DEUTSCH (N.). - Interpolation dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 257, 1963, p. 3796-3799.

[8] DEUTSCH (N.). - Construction duale de la construction d'une note précédente, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 257, 1963, p. 4114-4116.

[9] DEUTSCH (N.). - Espaces intermédiaires, conditions d'existence d'espaces intermédiaires non triviaux, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 41-43.

[10] DEUTSCH (N.). - Espaces intermédiaires pour des espaces de fonctions holomorphes d'une variable, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 1686-1688.

[11] DEUTSCH (N.). - Espaces intermédiaires pour des espaces de fonctions holomorphes de plusieurs variables, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 1981-1983.

[12] DEUTSCH (N.). - Espaces intermédiaires entre l'espace des suites à croissance lente et l'espace des suites à décroissance rapide, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 2468-2470.

[13] FOIAS (G.) et LIONS (J.). - Sur certains théorèmes d'interpolation, Acta Sc. Math. Szeged, t. 22, 1961, p. 269-282.

[14] FRIEDMANN (A.). - Generalized functions and partial differential equations. - Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1963.

[15] GAGLIARDO (E.). - Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni, Ricerche di Matematica, t. 9, 1960, p. 58-81.

[16] GODEMENT (R.). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Actualités scientifiques et industrielles, 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[17] GOULAOUIC (C.). - Interpolation pour les opérateurs compacts et les opérateurs continus, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 2248-2250.

[18] GROTHENDIECK (A.). - Sur les espaces (F) et (DF) , Summa Brasil. Math., t. 3, 1954, p. 57-123.

[19] GROTHENDIECK (A.). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, Amer. Math. Soc., 1955 (Mem. Amer. Math. Soc., 16).

[20] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques. - Sao Paulo, Publication de la Société Mathématique de Sao Paulo, 1958.

[21] GROTHENDIECK (A.). - Sur certains espaces de fonctions holomorphes, Journal für die reine und ungewandte Math., vol. 192, 1963, part. 1, p. 35-64 ; part. 2, p. 77-95.

[22] HÖRMANDER (L.). - An introduction to complex analysis in several variables. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (The University series in Higher Mathematics).

[23] KREIN (S.-G.). - Sur un théorème d'interpolation dans la théorie des opérateurs, Doklady Akad. Nauk., t. 130, 1960, p. 491-494.

[24] LIONS (J.). - Théorème de trace et d'interpolation. - Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, t. 12, 1959, p. 389-403.

[25] LIONS (J.). - Une construction d'espaces d'interpolation, C.R. Acad. Sc. Paris t. 83, 1960, p. 1853-1855.

[26] LIONS (J.) et PEETRE (J.). - Sur une classe d'espaces d'interpolation. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 19, p. 5-68).

[27] MALGRANGE (B.). - Faisceaux sur des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. Math. France, t. 83, 1957, p. 231-237.

[28] MALGRANGE (B.). - Lectures on the theory of functions of several complex variables. - Bombay, Tata Institute, 1962 (Lectures on Mathematics, 13).

[29] MARTINEAU (A.). - Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier Borel, J. Analyse math., Jerusalem, vol. 11, 1963, p. 1-164 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[30] MASCART (J.). - Sur les opérateurs linéaires appliquant l'un sur l'autre deux espaces de fonctions analytiques de plusieurs variables, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1962, p. 1911-1913.

[31] MITIAGIN (B.-S.). - Dimension approchée et bases dans les espaces nucléaires [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 16, n° 4, 1961, p. 63-132.

[32] OKA (K.). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. Domaines finis sans point critique intérieur, Japan. of Math., vol. 23, p. 97-155.

[33] PEETRE (J.). - Espaces intermédiaires et la théorie constructive des fonctions, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 54-55.

[34] SCHAPIRA (P.). - Espaces d'équi-interpolation, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, p. 32-34.

[35] SCHWARTZ (L.). - Théorie des noyaux, Proceedings of the International Congress of Mathematicians [Cambridge, 1950], vol. 1, p. 220-230. - Providence, Amerc. Math. Soc., 1952.

[36] SCHWARTZ (L.). - Théorie des distributions. - Paris, Hermann, 1950/1951 (Actualités scientifiques et industrielles, 1122 et 1245 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).

[37] SCHWARTZ (L.). - Séminaire, 1ère année, 1953/1954 : Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. - Paris, Secrétariat mathématique, 1954.

[38] SCHWARTZ (L.). - Séminaire, 2e année, 1954/1955 : Equations aux dérivées partielles. - Paris, Secrétariat Mathématique, 1955.

[39] SCHWARTZ (L.). - Espaces de fonctions différentiables, J. Analyse math., Jérusalem, vol. 4, 1954/1955, p. 88-148.

[40] SCHWARTZ (L.). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-141 ; t. 8, 1959, p. 1-209.

[42] ZELAZKO (W.). - On the analytic functions in p-normed algebras, Studia Mathematica, t. 21, 1961/1962, p. 203-206, 345-350.