J.-E. BERTIN

Variété de Picard de type linéaire commutatif

Mémoires de la S. M. F., tome 11 (1967)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1967__11__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 11, 1967, 103 p.

VARIETE DE PICARD DE TYPE LINEAIRE COMMUTATIF

par

Jean-Etienne BERTIN (*)

-:-:-

TABLE DES MATIERES

(*) Thèse Sc. math. Paris, 1967.

-:-:-:-

INDEX TERMINOLOGIQUE ET DES NOTATIONS

-:-:-

-:-:-:-

INTRODUCTION

Etant donné un corps algébriquement clos k, à une variété complète X définie sur k, on peut associer un groupe algébrique commutatif connxe P et un homomorphisme algébrique π de P dans le groupe $\mathcal{C}$ des classes de diviseurs (de Cartier) de X ayant les propriétés suivantes :

1°) Etant donné un groupe algébrique connexe H et un homomorphisme algébrique ϕ de H dans $\mathcal{C}$, il existe un homomorphisme de groupes algébriques et un seul $f : H \to P$ tel que $\phi = \pi \circ f$.

2°) Etant donné une variété algébrique T, une application algébrique ϕ de T dans $\mathcal{C}$ et un point $t \in T$, il existe un morphisme et un seul $f : T \to P$ tel que l'on ait :

$$\phi - \phi\,(t) = \pi \circ f.$$

3°) π est un isomorphisme de P sur le sous-groupe des éléments de qui sont algébriquement équivalents à zéro.

Ce résultat, connu depuis longtemps dans le cas où X est une variété complète non singulière, a été étendu au cas d'une variété complète quelconque par C. CHEVALLEY [8] et C.S. SESHADRI [21]. Récemment, ce résultat a été étendu par J.P. MURRE [14] au cadre des schémas sur un corps de base quelconque.

Il y a une dizaine d'années, P. CARTIER [3] a étendu la notion de diviseur au cas où on ne considère plus le groupe multiplicatif G_m, mais un groupe algébrique quelconque G ; lorsque G est commutatif, $\mathcal{C}$ est encore muni d'une structure de groupe.

Le but de ce travail est d'étendre le résultat rappelé au début de ce résumé au cas d'un groupe algébrique linéaire commutatif quelconque G. La méthode adoptée est très proche de celle de C. CHEVALLEY et C.S. SESHADRI dans [8]. On montre aussi que la variété de Picard de type G de X est un foncteur de la catégorie des groupes algébriques linéaires commutatifs connexes dans celle des groupes algébriques commutatifs connexes.

Lorsque G est le groupe additif G_a, la variété de Picard de X n'est autre que l'espace affine associé à $H^1(X,\mathcal{O}_X)$. Lorsque G est une variété abélienne, la variété de Picard de X est le groupe réduit à l'élément neutre. Lorsque G est un groupe linéaire commutatif unipotent, la variété de Picard de X est un groupe linéaire commutatif unipotent connexe.

Dans le chapitre I, on rappelle, dans le cas où G est un groupe algébrique quelconque, les définitions et les résultats élémentaires concernant les diviseurs de type G, et on étudie les effets d'un changement de groupes.

Le chapitre II est consacré à la comparaison de l'ensemble de définition d'une application rationnelle f d'un produit $X \times T$ de variétés dans un groupe algébrique G, aux ensembles de définition des applications rationnelles $f \circ j_t$, où $j_t : X \to X \times T$ est le morphisme $x \leadsto (x,t)$. On en déduit le théorème de continuité pour les familles algébriques de diviseurs.

Au chapitre II, on étend au cas d'un groupe algébrique commutatif la notion de diviseur infinitésimal associé à une famille algébrique de diviseurs et à un vecteur tangent à la variété de paramètres.

Dans le chapitre IV, on généralise au cas où G est le groupe des éléments inversibles d'une sous-algèbre commutative de l'algèbre des matrices d'ordre r à coefficients dans k la correspondance entre diviseurs, idéaux fractionnaires et fibrés localement triviaux.

Au chapitre V est démontré le théorème fondamental de continuité des familles algébriques de classes de diviseurs dans le cas où X est une variété semi-complète, et où G est un groupe algébrique linéaire commutatif : l'ensemble des zéros d'une famille algébrique de classes de diviseurs de type G sur X paramétrées par une variété T est un sous-ensemble fermé de T. Ensuite, on étudie l'ensemble des familles algébriques de classes de diviseurs de type G sur X paramétrées par une variété donnée T et on définit la notion de classe de diviseurs infinitésimale associée à une famille algébrique de classes de diviseurs et à un vecteur tangent à la variété de paramètres.

Le chapitre VI est consacré à deux thorèmes techniques de descente relatifs aux familles algébriques de classes de diviseurs.

Au chapitre VII, on montre l'existence du corps de rationalité d'une classe de diviseurs de type G sur X, dans le cas où G est le groupe algébrique G_a.

Au chapitre VIII, on définit la variété de Picard de type G de X comme solution du problème universel suivant : la variété X et le groupe algébrique commutatif G étant donnés, on cherche un groupe algébrique commutatif connexe P et un homomorphisme algébrique π de P dans le groupe $\mathscr{C}$ des classes de diviseurs de type G de X tels qu'étant donné un groupe algébrique connexe H et un homomorphisme algébrique ϕ de H dans $\mathscr{C}$, il existe un homomorphisme de groupes algébriques et un seul $f : H \to P$ tel que $\phi = \pi \circ f$. On établit ensuite l'existence de la variété de Picard (P,π) de type G de X dans le cas où

G est un groupe algébrique linéaire commutatif, et où X est une variété semi-complète telle que $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ soit un espace vectoriel de dimension finie sur k. On montre aussi que π est injectif, et que π définit un homomorphisme algébrique injectif de l'espace tangent à P en l'élément neutre dans le groupe des classes de diviseurs sur X de type l'espace tangent à G en l'élément neutre.

Enfin, au chapitre IX, on généralise au cas d'un groupe algébrique commutatif les notions d'équivalence algébrique entre diviseurs et entre classes de diviseurs. On montre que, dans le cas où X est une variété complète, et G un groupe algébrique linéaire commutatif la variété de Picard (P,π) de type G de X possède les propriétés suivantes :

a) Etant donné une variété algébrique T, une application algébrique ϕ de T dans $\mathcal{C}$ et un point $t \in T$, il existe un morphisme et un seul $f : T \to P$ tel que l'on ait :

$$\phi - \phi(t) = \pi \circ f.$$

b) π est un isomorphisme de P sur le sous-groupe de $\mathcal{C}$ formé des classes de diviseurs de type G sur X algébriquement équivalentes à zéro.

c) π définit un homomorphisme algébrique injectif de l'espace tangent à P en l'élément neutre dans le groupe des classes de diviseurs sur X de type l'espace tangent à G en l'élément neutre.

On montre enfin que ces résultats ne s'étendent pas au cas où G est un groupe algébrique commutatif quelconque.

Je suis heureux d'avoir ici l'occasion d'exprimer ma vive reconnaissance à l'égard de M. Pierre SAMUEL dont la grande compétence et la bienveillance m'ont été précieuses.

Qu'il me soit permis d'exprimer également ma gratitude envers M. Claude CHEVALLEY qui m'a fait l'honneur de présider mon jury, et à M. Michel HERVE qui a bien voulu me donner le sujet de ma seconde thèse.

Je tiens à remercier enfin mon camarade et ami Michel RAYNAUD pour l'intérêt qu'il a apporté à mon travail et les conversations fructueuses que j'ai tenues avec lui, ainsi que Madame ROBIN et Mademoiselle HOFMAN qui ont accepté la tâche ingratede polycopier cette thèse.

CHAPITRE I. DIVISEURS DE TYPE G

Ce chapitre rappelle les définitions et les résultats élémentaires concernant les diviseurs de type un groupe algébrique quelconque sur une variété algébrique ([3], [8], [9]). Les variétés considérées seront des variétés algébriques (irréductibles) sur un corps algébriquement clos K. En revanche, les groupes algébriques considérés ne seront pas nécessairement connexes.

1.- Définitions.

1.0. Notations.- Soient X une variété, G un groupe algébrique ; on notera $\mathcal{F}_X^G$, ou simplement $\mathcal{F}_X$, le faisceau de groupes des germes d'applications rationnelles de X dans G, et $\mathcal{F}'^G_X$, ou simplement $\mathcal{F}'_X$, le sous-faisceau de groupes de $\mathcal{F}_X$ des germes d'applications régulières de X dans G.

Définitions 1.1. ([3]).- Soient X une variété, G un groupe algébrique ; on appelle diviseur de type G sur X une section sur X du faisceau d'espaces homogènes $\mathcal{F}_X/\mathcal{F}'_X$ obtenu en faisant opérer $\mathcal{F}'_X$ à gauche sur $\mathcal{F}_X$.

L'ensemble $\Gamma(X, \mathcal{F}_X/\mathcal{F}'_X)$ des diviseurs de type G sur X se note $\mathcal{D}(X,G)$.

L'image dans $\mathcal{D}(X,G)$ de la section unité de $\mathcal{F}_X$ s'appelle diviseur neutre et se note 0.

La donnée d'un élément D de $\mathcal{D}(X,G)$ équivaut ([3]) à la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X et d'une famille d'applications rationnelles $(f_i)_{i\in I}$ de X dans G telle que, quels que soient $i,j \in I$, $f_i.f_j^{-1}$ soit défini en tout point de $U_i \cap U_j$. L'application f_i sera alors appelée une application de définition de D dans l'ouvert U_i ; si x est un point de U_i, on dira aussi que f_i est une application de définition de D au point x.

D'autre part, les groupes G et $\Gamma(X,\mathcal{F}_X)$ opèrent à droite sur $\mathcal{F}_X$ de façon compatible avec l'opération à gauche de $\mathcal{F}'_X$ sur $\mathcal{F}_X$, donc ils opèrent aussi sur $\mathcal{D}(X,G)$.

Définitions 1.2. ([3]).- Deux diviseurs de type G sur X sont dits linéairement équivalents ou, plus simplement, équivalents s'ils appartiennent à une même orbite du groupe $\Gamma(X, \mathcal{F}_X)$ dans $\mathcal{D}(X,G)$.

Un diviseur de type G sur X est dit principal s'il est équivalent à 0. Il revient au même de dire qu'un élément D de $\mathcal{D}(X,G)$ est principal ou qu'il existe une application rationnelle f de X dans G qui soit une application de définition de D dans X ; dans ce cas, on écrira $D = \mathrm{div}_G f$.

On note $\mathcal{P}(X,G)$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}(X,G)$ formé des diviseurs principaux ; il contient le diviseur neutre. Il est clair que $\mathcal{P}(X,G)$ est l'image de $\Gamma(X, \mathcal{F}_X)$ dans $\Gamma(X, \mathcal{F}_X/\mathcal{F}'_X)$ par l'application canonique.

L'ensemble des classes d'équivalence de diviseurs (appelées par la suite classes de diviseurs) de type G sur X sera noté $\mathcal{C}(X,G)$.

Cas particulier 1.3.- Lorsque G est commutatif, $\mathcal{D}(X,G)$ est muni naturellement d'une structure de groupe dont l'élément neutre est le diviseur neutre, $\mathcal{P}(X,G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{D}(X,G)$, et $\mathcal{C}(X,G)$ est le groupe quotient $\mathcal{D}(X,G)/\mathcal{P}(X,G)$

Lorsque $G = (G_a)^n$, nous pouvons associer à $\lambda \in K$ et à $D \in \mathcal{D}(X,G_a^n)$ un diviseur λD de la manière suivante : soient $x \in X$, f et g deux applications de définition de D en x ; alors $f - g$ est régulière en x, donc aussi $\lambda f - \lambda g = \lambda(f - g)$. Donc, si D est défini par un système d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, et d'applications $(f_i)_{i\in I}$, le système d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et d'applications $(\lambda f_i)_{i\in I}$ définit un diviseur λD de type G_a^n sur X. On vérifie aisément que $\mathcal{D}(X,G_a^n)$ est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel sur K. Alors $\mathcal{P}(X,G_a^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(X,G_a^n)$, et $\mathcal{C}(X,G_a^n)$ est canoniquement isomorphe au sous-espace vectoriel quotient $\mathcal{D}(X,G_a^n)/\mathcal{P}(X,G_a^n)$.

1.4. Point de vue des fibrés ([23]).- Un élément D de $\mathcal{D}(X,G)$ définit à isomorphisme près un fibré localement trivial de groupe G sur X ; deux fibrés définis par les diviseurs D et D' sont isomorphes si et seulement si D et D' sont équivalents ; enfin, à tout fibré localement trivial ϕ de groupe G sur X, on peut faire correspondre une classe d'équivalence Δ de diviseurs de type G sur X telle que tout diviseur D de Δ définisse ϕ . On dira que ϕ et Δ sont associés.

1.5. Point de vue cohomologique.- D'après ([10]), on a une suite exacte de cohomologie :

$$1 \to \Gamma(X, \mathcal{F}'_X) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_X) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_X/\mathcal{F}'_X) \overset{\delta}{\to} H^1(X, \mathcal{F}'_X) \to 1,$$

étant donné que $H^1(X, \mathcal{F}_X) = 1$ ([3]), ce qui permet d'identifier au moyen de δ l'ensemble $\mathcal{C}(X,G)$ à $H^1(X, \mathcal{F}'_X)$.

Remarque 1.6.- Dans le cas où X est une variété non singulière, et où G est une variété abélienne, toute application rationnelle de X dans G est partout régulière ([24]), donc $\mathcal{D}(X,G) = 0$.

Lemme 1.7.- *Soient X et T deux variétés, U et V deux ouverts de $X \times T$, et $p : X \times T \to X$ la projection canonique. Alors, $p(U \cap V) = p(U) \cap p(V)$.*

Il suffit de montrer que $p(U) \cap p(V) \subset p(U \cap V)$. Soit $x \in p(U) \cap p(V)$. Posons $T' = T \times \{x\}$. Par hypothèse les ouverts $U \cap T'$ et $V \cap T'$ de T sont non vides, donc leur intersection $U \cap V \cap T'$ est non vide, si bien que $x \in p(U \cap V)$, c.q.f.d.

<u>Proposition 1.8.- Soient X et T deux variétés, A une variété abélienne</u> ; <u>alors $\mathcal{D}(X \times T, A)$ est isomorphe à $\mathcal{D}(X,A) \times \mathcal{D}(T,A)$, et $\mathcal{C}(X \times T,A)$ est isomorphe à $\mathcal{C}(X,A) \times \mathcal{C}(T,A)$</u>.

Soit $D \in \mathcal{D}(X \times T,A)$, $(U_i)_{i\in I}$ et $(f_i)_{i\in I}$ un système d'ouverts et d'applications de définition de D. D'après un thèorème de A. Weil ([8], exp 9 th 2), chacune des f_i est de la forme $g_i + h_i$, où g_i est une application rationnelle de X dans A, et h_i une application rationnelle de T dans A.

Soient $i,j \in I$, et $(x_o, t_o) \in U_i \cap U_j$; notons V_i [resp. W_i] la projection de U_i sur X [resp. sur T] ; alors $g_i - g_j - h_i(t_o) - h_j(t_o)$ est régulière en tout point x tel que $(x,t_o) \in U_i \cap U_j$; on en déduit que $g_i - g_j$ est régulière en tout point de la projection de $U_i \cap U_j$ sur X, qui n'est autre que $V_i \cap V_j$ (1.7); de même, $h_i - h_j$ est régulière sur $W_i \cap W_j$. Donc le système d'ouverts $(V_i)_{i\in I}$ et d'applications $(g_i)_{i\in I}$ [resp. d'ouverts $(W_i)_{i\in I}$ et d'applications $(h_i)_{i\in I}$] définit un diviseur D_1 [resp. D_2] de type A sur X [resp. T], et il est clair que $D = D_1 + D_2$.

On en déduit que $\mathcal{D}(X \times T,A) = \mathcal{D}(X,A) \times \mathcal{D}(T,A)$. Si D est principal, il est de la forme $D_1 + D_2$, où D_1 et D_2 sont principaux, d'où $\mathcal{P}(X \times T,A) = \mathcal{P}(X,A) \times \mathcal{P}(T,A)$, si bien que $\mathcal{C}(X \times T,A)$ est isomorphe à $\mathcal{C}(X,A) \times \mathcal{C}(T,A)$.

<u>2.- Image réciproque</u> ([8] ou [9]).

<u>Définition 2.1.</u>- Soit D un diviseur de type G sur X. On appelle <u>support</u> de D et on note supp D l'ensemble des $x \in X$ tels que $D(x)$ ne soit pas l'image de l'élément neutre de $\mathcal{F}_{X,x}$ dans $\mathcal{F}_{X,x} / \mathcal{F}'_{X,x}$; c'est un fermé de X.

<u>Définition 2.2.</u>- Soit $\phi : Y \to X$ un morphisme de variétés. <u>Supposons que</u> $\phi(Y) \not\subset$ Supp D. Soit $y \in Y$ et soit f une application de définition de D au point $\phi(y)$; notons $D(\phi(y)) \circ \phi$ l'image dans $\mathcal{F}_{Y,y} / \mathcal{F}'_{Y,y}$ de $f \circ \phi$; cette image ne dépend pas du choix de l'application de définition f de D en $\phi(y)$ et l'application $y \rightsquigarrow D(\phi(y)) \circ \phi$ définit une section de $\mathcal{F}_Y / \mathcal{F}'_Y$ sur Y notée $\phi^*(D)$ ou $D \circ \phi$, et appelée <u>image réciproque de D par</u> ϕ.

Soit $\psi : Z \to Y$ un morphisme de variétés tel que $(\phi \circ \psi)(Z) \not\subset$ Supp D ; alors $\psi^*(\phi^*(D))$ est défini et égal à $(\phi \circ \psi)^*(D)$.

Proposition 2.3.- Soient $\phi : Y \to X$ un morphisme de variétés, G un groupe algébrique, C un élément de $\mathscr{C}(X,G)$; alors il existe un diviseur $D \in \mathscr{D}(X,G)$ appartenant à la classe C tel que $\phi^*(D)$ soit défini, et la classe de $\phi^*(D)$ de dépend pas du choix de $D \in C$ tel que $\phi^*(D)$ soit défini. On la note $\phi^*(C)$ ou $C \circ \phi$, et on l'appelle image réciproque de C par ϕ.

En effet, soit $x \in \phi(y)$, et soit f une application de définition en x d'un diviseur D' appartenant à C. Posons $D = D' f^{-1}$. Il est clair que $x \notin \operatorname{Supp} D$, ce qui montre que $\phi^*(D)$ est défini. Les autres assertions sont triviales.

Remarque 2.4.- Sous les hypothèses de (2.3), soit $\bar{C}$ le fibré sur X de groupe G associé à C (1.5) ; alors $\phi^{-1}(\bar{C})$ est le fibré sur Y de groupe G associé à $\phi^*(C)$.

Remarque 2.5.- Etant donné un groupe algébrique G (resp. un groupe algébrique commutatif G), on définit ainsi un foncteur contravariant $X \rightsquigarrow \mathscr{C}(X,G)$ de la catégorie des variétés algébriques sur K dans celle des ensembles pointés (resp. des groupes abéliens).

Cas particulier 2.6.- Soient X,T deux variétés, G un groupe algébrique ; étant donné $t \in T$, notons $j_t : X \to X \times T$ le morphisme $x \rightsquigarrow (x,t)$. Soit Δ une classe de diviseurs de type G sur $X \times T$. Quel que soit $t_o \in T$, il existe un ouvert T_o de T contenant t_o et un élément D de Δ tel que pour tout $t \in T_o$, $j_t^*(D)$ soit défini.

Cela résulte de (2.3), car l'ensemble des $t \in T$ tels que $D \circ j_t$ soit défini est la projection du complémentaire de $\operatorname{Supp} D$, donc est un ouvert (2.1).

3.- Familles algèbriques de diviseurs ([8] ou [9])

Définition 3.1.- Une application $f : T \to \mathscr{D}(X,G)$ d'une variété T dans l'ensemble des diviseurs de type G sur une variété X est appelée famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par T, (et souvent notée $(D_t)_{t\in T}$) s'il existe un diviseur D de type G sur $X \times T$ tel que, quelque soit $t \in T$, si $j_t : X \to X \times T$ désigne le morphisme défini par $x \rightsquigarrow (x,t)$, $j_t^*(D)$ soit défini et égal à $f(t) = D_t$. On dit alors que D est diviseur de définition de la famille $(D_t)_{t\in T}$.

Proposition 3.2.- Soient $(D_t)_{t\in T}$ une famille algébrique de diviseurs de type G sur une variété X paramétrée par une variété T, $g : T' \to T$ un morphisme de variétés et $\phi : X' \to X$ un morphisme dominant de variétés : alors l'application $t' \rightsquigarrow \phi^*(D_{g(t')})$ de T' dans $\mathcal{L}(X',G)$ est une famille algébrique de diviseurs de type G sur X' paramétrée par T' : si $h : X' \times T' \to X \times T$ est le morphisme défini par $(x',t') \rightsquigarrow (\phi(x'), g(t'))$, et si D est un diviseur de définition de $(D_t)_{t\in T}$, alors $h^*(D)$ est défini et est un diviseur de définition de $(\phi^*(D_{g(t')}))_{t'\in T'}$. Enfin, la famille algébrique $\phi^*(D_{g(t')})_{t'\in T'}$ s'appelle image réciproque de la famille $(D_t)_{t\in T}$ pour g et ϕ.

Cas particulier 3.3.- Hypothèses de (3.2) dans le cas où $X' = X$, où $\phi : X \to X$ est l'identité, où T' est une sous-variété de T, et où $g : T' \to T$ est l'immersion canonique. La famille $(D_{g(t')})_{t'\in T'}$ s'appelle restriction à T' de la famille $(D_t)_{t\in T}$.

4.- Familles algébriques de classes de diviseurs ([9]).

Nous prenons la définition de ([9]), et non celle de ([8]) ; nous verrons que lorsque X est une variété semi-complète, et lorsque G est un groupe algébrique linéaire commutatif, ces deux définitions coïncident.

Définition 4.1.- Une application $f : T \to \mathcal{C}(X,G)$ d'une variété T dans l'ensemble des classes de diviseurs de type G (G étant un groupe algébrique) sur une variété X est appelée famille algébrique de classes de diviseurs de type G sur X paramétrée par T, (et souvent notée $(\Delta_t)_{t\in T}$) s'il existe une classe de diviseurs Δ de type G sur $X \times T$ telle que, quel que soit $t \in T$, $f(t) = \Delta_t$ soit égal à $j_t^*(\Delta)$, où $j_t : X \to X \times T$ est le morphisme défini par $x \rightsquigarrow (x,t)$. On dit alors que Δ est une classe de diviseurs de définition de la famille $(\Delta_t)_{t\in T}$.

Proposition 4.2.- Soient $\phi : X' \to X$ et $g : T' \to T$ des morphismes de variétés, G un groupe algébrique, et $(\Delta_t)_{t\in T}$ une famille algébrique de classes de diviseurs de type G sur X paramétrée par T. Alors la famille $\phi^*(\Delta_{g(t')})_{t'\in T'}$ est une famille algébrique de classes de diviseurs de type G sur X' paramétrée par T', appelée image réciproque de $(\Delta_t)_{t\in T}$ par g et ϕ.
Si $h : X' \times T' \to X \times T$ est le morphisme $(x',t') \rightsquigarrow (\phi(x'), g(t'))$ et si Δ est une classe de définition de $(\Delta_t)_{t\in T}$, alors $h^*(\Delta)$ est une classe de définition de $(\phi^*(\Delta_{g(t')}))_{t'\in T'}$.

Cas particulier 4.3.- Hypothèses de (4.2) dans le cas où $X' = X$, où $\phi : X \to X$ est l'identité, où T' est une sous-variété de T et où $g : T' \to T$ est l'immersion canonique ; alors la famille algébrique $(\Delta_{g(t')})_{t'\in T'}$ s'appelle restriction à T' de la famille $(\Delta_t)_{t\in T'}$.

5.- Changement de groupes.

Définition 5.1.- Etant donnés une variété X, un homomorphisme $\phi : G' \to G$ de groupes algébriques, et un diviseur D de type G' sur X défini par un système d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et d'applications de définition $(f_i)_{i\in I}$, on vérifie aisément que le système d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et d'applications de définition $(\phi \circ f_i)_{i\in I}$ définit un diviseur de type G sur X, qu'on note $\mathcal{D}(X, \phi)$ (D) ou $\phi \circ D$.

Lorsque ϕ est un homomorphisme de groupes commutatifs, $\mathcal{D}(X, \phi)$ est un homomorphisme de groupes de $\mathcal{D}(X,G')$ dans $\mathcal{D}(X,G)$.

Il est clair que si $D \in \mathcal{P}(X,G')$, alors $\phi \circ D \in \mathcal{P}(X,G)$, d'où une application $\mathcal{P}(X,\phi)$ de $\mathcal{P}(X,G')$ dans $\mathcal{P}(X,G)$, et une application $\mathcal{C}(X,\phi)$ de $\mathcal{C}(X,G')$ dans $\mathcal{C}(X,G)$. On notera souvent, étant donné $\Delta \in \mathcal{C}(X,G')$, $\phi \circ \Delta$ au lieu de $\mathcal{C}(X,\phi)$ (Δ).

Remarque 5.2.- On définit ainsi, étant donnée une variété X, des foncteurs covariants $G \rightsquigarrow \mathcal{D}(X,G)$, $G \rightsquigarrow \mathcal{P}(X,G)$ et $G \rightsquigarrow \mathcal{C}(X,G)$ de la catégorie des groupes algébriques (resp. des groupes algébriques commutatifs) dans celle des ensembles pointés (resp. des groupes abéliens).

Proposition 5.3.- *Si G' est un sous-groupe algébrique d'un groupe algébrique G, et si i est l'immersion fermée canonique de G' dans G, alors $\mathcal{D}(X,i)$ et $\mathcal{P}(X,i)$ sont injectifs.*

Il suffit de montrer que si f' est une application rationnelle de X dans G', les ouverts de définition U' et U de f' et $f = i \circ f'$ sont les mêmes. Or $U' = U \cap f^{-1}(G')$; comme G' est fermé dans G, et que U' est partout dense dans U, on a bien $U = U'$.

Proposition 5.4.- *Soient G un groupe algébrique commutatif connexe, G' un sous-groupe résoluble connexe de G, i et p les homomorphismes canoniques $G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/G'$. Alors on a le diagramme commutatif suivant, où les lignes horizontales et verticales sont exactes :*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{P}(X,G') \arrow[r, "\mathcal{P}(X,i)"] \arrow[d] & \mathcal{P}(X,G) \arrow[dr] & & \mathcal{P}(X,G) \arrow[r, "\mathcal{P}(X,p)"] \arrow[dl] & \mathcal{P}(X,G/G') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L}(X,G') \arrow[rr, "\mathcal{L}(X,i)"] \arrow[d] & & \mathcal{L}(X,G) \arrow[rr, "\mathcal{L}(X,p)"] \arrow[d] & & \mathcal{L}(X,G/G') \arrow[d] & \\
 & \mathcal{C}(X,G') \arrow[rr, "\mathcal{C}(X,i)"] \arrow[d] & & \mathcal{C}(X,G) \arrow[rr, "\mathcal{C}(X,p)"] \arrow[d] & & \mathcal{C}(X,G/G') \arrow[d] & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

(5.4.1.) Montrons que $\mathcal{L}(X,p)$ a pour noyau l'image de $\mathcal{L}(X,i)$. Il est clair que $\operatorname{Im} \mathcal{L}(X,i) \subset \operatorname{Ker} \mathcal{L}(X,p)$. Soit $D \in \mathcal{L}(X,G)$ tel que $\mathcal{L}(X,p)(D) = 0$, et soit f une application de définition de D dans un ouvert U de X : alors $p \circ f$ est une application régulière de U dans G/G'. D'après ([16]), il existe une section rationnelle σ de p. Soit $h \in G/G'$ tel que σ soit défini en h et soit $x \in U$; il existe $g \in G$ tel que $p(g) = h - (p \circ f)(x)$.
Alors $p[g + f(x) - \sigma(p(g) + (p \circ f)(x))] = 0$, ce qui montre que si U_x est l'ouvert de définition de $\sigma(p(g) + p \circ f)$, alors $f_x = g + f - \sigma[p(g) + p \circ f]$ est une application rationnelle de U_x dans G'. Or $f_x - f$ est une application régulière de l'ouvert U_x dans G', et, par construction, $x \in U_x$. Considérons le système d'ouverts $(U_x)_{x\in U}$ et d'applications rationnelles $(f_x)_{x\in U}$; on vérifie que ce système définit un diviseur D'_U de type G' sur U, et que $i \circ D'_U$ est égal à la restriction de D à U. On en déduit l'existence d'un diviseur D' de type G' sur X tel que $i \circ D' = D$.

(5.4.2.) Montrons que $\mathcal{P}(X,p)$ est surjectif. Soit $D'' \in \mathcal{P}(X,G/G')$; il existe $f \in \mathcal{F}_X^{G/G'}$ telle que $D'' = \operatorname{div}_{G/G'} f''$. Posons $D = \operatorname{div}_G \sigma \circ f''$, où σ est une section rationnelle de p [16]. Alors $p \circ D = D''$.

(5.4.3.) Soit $\Delta \in \mathcal{C}(X,G)$ tel que $\mathcal{C}(X,p)(\Delta) = 0$. Soit $D \in \Delta$; il existe $f'' \in \mathcal{F}_X^{G/G'}$ telle que $p \circ D = \operatorname{div}_{G/G'} f''$. Posons $D_1 = D - \operatorname{div}_G(\sigma \circ f'')$. Alors $D_1 \in \Delta$ et $p \circ D_1 = 0$ car $p \circ \operatorname{div}_G(\sigma \circ f'') = p \circ D$. D'après (5.4.1.) il existe alors un diviseur D_1' sur X de type G' tel que $D_1 = i \circ D_1'$. Soit Δ' la classe de D_1', on a bien $i \circ \Delta' = \Delta$, ce qui montre que $\operatorname{Ker} \mathcal{C}(X,p) \subset \operatorname{Im} \mathcal{C}(X,i)$. Comme il est clair que $\operatorname{Im} \mathcal{C}(X,i) \subset \operatorname{Ker} \mathcal{C}(X,p)$, la démonstration de (5.4) est complète.

<u>Corollaire 5.5.- Soient X une variété non singulière, G un groupe algébrique commutatif connexe, et L son sous-groupe linéaire connexe maximal. Alors $\mathcal{L}(X,L)$</u>

<u>est canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}(X,G)$ et l'application canonique $\mathcal{C}(X,L) \to \mathcal{C}(X,G)$ est surjective.</u>

Cela résulte que (5.4), car, puisque G/L est une variété abélienne ([16], Th. 16), $\mathcal{L}(X,G/L) = 0$ (1.6) et car un groupe linéaire commutatif est résoluble.

<u>Contre-exemple 5.6.</u>- Sous les hypothèses de (5.4), en général la suite :

$$0 \to \mathcal{P}(X,G') \xrightarrow{\mathcal{P}(X,i)} \mathcal{P}(X,G) \xrightarrow{\mathcal{P}(X,p)} \mathcal{P}(X,G/G') \to 0$$

n'est pas exacte en $\mathcal{P}(X,G)$. Soit G la jacobienne généralisée d'une courbe elliptique à point de rebroussement ordinaire ; alors G est commutatif, connexe, contient un sous-groupe algébrique G' isomorphe à G_a, et G/G' est la jacobienne de la courbe. Alors le morphisme canonique $G \to G/G'$ admet une section rationnelle σ ([16]), mais pas de section régulière ([15]). Prenons $X = G/G'$; alors $\mathcal{P}(X,p)(\operatorname{div}_G \sigma) = 0$, mais $\operatorname{div}_G \sigma$ ne provient pas d'un diviseur principal de type G' sur X.

D'autre part, le diagramme de la proposition 5.4 montre que $\mathcal{C}(X,i)$ est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} \mathcal{P}(X,p) \subset \operatorname{Im} \mathcal{P}(X,i)$. Le contre-exemple précédent montre donc qu'en général $\mathcal{C}(X,i)$ n'est pas injectif.

Remarquons aussi que, dans le contre-exemple précédent, X est une variété non singulière, et G' est le sous-groupe linéaire connexe maximal ([16]), remarque suivant le corollaire 5 au théorème 16) de G ; ce qui précède montre alors que, sous les hypothèses de (5.5), $\mathcal{C}(X,i)$ n'est pas nécessairement injectif.

<u>Remarque 5.7.</u>- Sous les hypothèses de (5.4), la composition avec p et i définit des homomorphismes de faisceaux en groupes $\mathcal{F}'^{i}_X : \mathcal{F}'^{G'}_X \to \mathcal{F}'^{G}_X$ et $\mathcal{F}'^{p}_X : \mathcal{F}'^{G}_X \to \mathcal{F}'^{G/G'}_X$. Montrons qu'on a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{F}'^{G'}_X \xrightarrow{\mathcal{F}'^{i}_X} \mathcal{F}'^{G}_X \xrightarrow{\mathcal{F}'^{p}_X} \mathcal{F}'^{G/G'}_X \to 0 \; .$$

Il est clair que $\mathcal{F}'^{i}_X$ est injectif et que $\operatorname{Im} \mathcal{F}'^{i}_X = \operatorname{Ker} \mathcal{F}'^{p}_X$. Montrons que $\mathcal{F}'^{p}_X$ est surjectif. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}'^{p}_{X,x}$ est surjectif. Soit alors $f'' \in \mathcal{F}'^{G/G'}_{X,x}$. D'après ([16]), il existe une section rationnelle σ de p. Soit y un point de G/G' tel que σ soit défini en y. Il existe $z \in G$ tel que $p(z) = f''(x) - y$. Posons alors $f = \sigma(f + y - f''(x)) + z$. Il est clair que $f \in \mathcal{F}'^{G}_{X,x}$, et que $p \circ f = f''$.

On a donc une suite exacte de cohomologie :

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_X^{G'}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_X^{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_X^{G/G'}) \to$$

$$\to \mathcal{C}(X,G') \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C}(X,G) \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}(X,G/G') \to H^2(X, \mathcal{F}_X^{G'}) \to \ldots .$$

On vérifie aisément que $\alpha = \mathcal{C}(X,i)$ et $\beta = \mathcal{C}(X,p)$.

Proposition 5.8.- Soient G un groupe algébrique, G° sa composante neutre, $i : G^\circ \to G$ l'immersion canonique et X une variété. On a alors des isomorphismes

$$\mathcal{L}(X,G^\circ) \xrightarrow{\mathcal{L}(X,i)} \mathcal{L}(X,G), \quad \mathcal{P}(X,G^\circ) \xrightarrow{\mathcal{P}(X,i)} \mathcal{P}(X,G) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(X,G^\circ) \xrightarrow{\mathcal{C}(X,i)} \mathcal{C}(X,G).$$

D'après (5.2), il suffit de montrer que $\mathcal{L}(X,i)$ et $\mathcal{P}(X,i)$ sont surjectifs. Soit $D \in \mathcal{L}(X,G)$; D peut être défini par un système d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et d'applications de définition $(f_i)_{i\in I}$. Soit $x_i \in X$ tel que f_i soit défini en x_i ; il est clair que le système d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et d'applications de définition $(f_i \cdot f_i(x_i)^{-1})_{i\in I}$ définit le diviseur D. Notons V_i le domaine de définition de $g_i = f_i \cdot f_i(x_i)^{-1}$. Puisque X est irréductible, il est clair que g_i est une application régulière de V_i dans G°. Donc le système d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et d'applications de définition $(g_i)_{i\in I}$ définit aussi le diviseur $D_\circ$ de type G° sur X, et il est manifeste que $\mathcal{L}(X,i)(D_\circ) = D$. Donc $\mathcal{L}(X,i)$ est surjectif. Enfin, si nous supposons que $D \in \mathcal{P}(X,G)$, nous pouvons supposer que I est réduit à un élément, auquel cas $D_\circ \in \mathcal{P}(X,G^\circ)$, ce qui montre que $\mathcal{P}(X,i)$ est surjectif.

Proposition 5.9.- Soient G et H deux groupes algébriques, X une variété, $p : G \times H \to G$ et $q : G \times H \to H$ les homomorphismes canoniques. On a alors des isomorphismes :

$$\mathcal{L}(X,G\times H) \xrightarrow{(\mathcal{L}(X,p),\ \mathcal{L}(X,q))} \mathcal{L}(X,G) \times \mathcal{L}(X,H)$$

$$\mathcal{P}(X,G\times H) \xrightarrow{(\mathcal{P}(X,p),\ \mathcal{P}(X,q))} \mathcal{P}(X,G) \times \mathcal{P}(X,H)$$

$$\mathcal{C}(X,G\times H) \xrightarrow{(\mathcal{C}(X,p),\ \mathcal{C}(X,q))} \mathcal{C}(X,G) \times \mathcal{C}(X,H)$$

C'est immédiat.

Remarque 5.10.- Nous aurons dans la suite à étudier le cas où le groupe algébrique G est un groupe linéaire commutatif. D'après (5.8), on est ramené au cas où G est un groupe linéaire commutatif connexe ; or, d'après un résultat classique ([1])

un tel groupe G est de la forme $(G_m)^n U$, où G_m est le groupe multiplicatif, n un entier positif ou nul, et U un groupe algébrique linéaire commutatif connexe unipotent. Le cas où $G = G_m$ est classique ([8] ou [9]). Nous pourrons donc nous borner à étudier le cas où G est un groupe algébrique linéaire commutatif connexe unipotent.

Proposition 5.11.- Sous les hypothèses de (5.4), supposons de plus que p admette une section régulière $\rho : G/G' \to G$. Alors $\mathscr{C}(X,i)$ est injectif et $\operatorname{Ker} \mathscr{I}(X,p) = \operatorname{Im} \mathscr{I}(X,i)$.

D'après le diagramme de la proposition (5.4) il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} \mathscr{I}(X,p) \subset \operatorname{Im} \mathscr{I}(X,i)$. Soit f une application rationnelle de X dans G telle que $p \circ f$ soit régulière. Alors $\rho \circ p \circ f$ est une application régulière de X dans G et $p \circ (f - \rho \circ p \circ f) = 0$, donc $f - \rho \circ p \circ f$ est une application rationnelle de X dans G'. De plus $\operatorname{div}_G f = \operatorname{div}_G (f - \rho \circ p \circ f)$, ce qui montre $\operatorname{Ker} \mathscr{I}(X,p) \subset \operatorname{Im} \mathscr{I}(X,i)$.

Corollaire 5.12.- Soient G un groupe algébrique linéaire commutatif connexe G' un sous-groupe connexe de G, $G'' = G/G'$, $i : G' \to G$ et $p : G \to G''$ les morphismes canoniques ; on a une suite exacte de groupes :

$$0 \to \mathscr{C}(X,G') \xrightarrow{\mathscr{C}(X,i)} \mathscr{C}(X,G) \xrightarrow{\mathscr{C}(X,p)} \mathscr{C}(X,G'') .$$

Compte tenu de (5.4) et (5.11), il suffit de montrer que p admet une section régulière, ce qui résulte de ([19], VII n° 6, prop. 7) car, d'après le théorème de Chevalley ([4]), G/G' est un groupe linéaire.

5.13. Produit extérieur de classes de diviseurs. Soient X et X' deux variétés, G et G' deux groupes algébriques, $D \in \mathscr{L}(X,G)$ et $D' \in \mathscr{L}(X,G')$. Soient $(U_i)_{i\in I}$ et $(f_i)_{i\in I}$ un système d'ouverts et d'applications de définition de D, $(V_j)_{j\in J}$ et $(g_i)_{j\in J}$ un système d'ouverts et d'applications de définition de D' ; on vérifie aisément que le système d'ouverts $(U_i \times V_j)_{(i,j) \in I\times J}$ et d'applications $(f_i \times g_j)_{(i,j) \in I\times J}$ définit un diviseur de type $G \times G'$ sur $X \times X'$, indépendant du choix des systèmes d'ouverts et d'applications de définition de D et D', qu'on notera $D \times D'$, et qu'on appellera produit extérieur de D et D'.

Soient $\Delta \in \mathscr{C}(X,G)$ et $\Delta' \in \mathscr{C}(X,G')$, $D \in \Delta$, $D' \in \Delta'$. Il est clair que la classe de $D \times D'$ est indépendante du choix de $D \in \Delta$ et de $D' \in \Delta'$; on la notera $\Delta \times \Delta'$, et on l'appellera produit extérieur de Δ et Δ'.

Proposition 5.14.- Soient X une variété, G et G' deux groupes algébriques, T et T' deux variétés, $f : T \to \mathcal{C}(X,G)$ et $f' : T' \to \mathcal{C}(X,G')$ deux familles algébriques de classes de diviseurs. Alors l'application $f \times f' : T \times T' \to \mathcal{C}(X,G) \times \mathcal{C}(X,G') = \mathcal{C}(X,G \times G')$ est une famille algébrique de classes de diviseurs.

Soit Δ (resp. Δ') une classe de définition de f (resp. f'). Notons $\delta : X \to X \times X$ l'application diagonale. Alors $\Delta \times \Delta' \in \mathcal{C}(X \times T \times X \times T', G \times G')$ et $(\delta \times id_{T \times T'})^* (\Delta \times \Delta') \in \mathcal{C}(X \times T \times T', G \times G')$. On vérifie aisément que $(\delta \times id_{T \times T'})^* (\Delta \times \Delta')$ est une classe de définition de $f \times f'$.

Remarque 5.15.- On démontre de même un énoncé analogue à celui de (1.14) relatif à des familles algébriques de diviseurs. Il suffit de voir que si $D \in \mathcal{D}(X \times T,G)$ et $D' \in \mathcal{D}(X \times T',G)$, l'ensemble des $x \in X$ tels qu'il existe $t \in T$ [resp. T'] tel que $(x,t) \notin \operatorname{Supp} D$ [resp. $x,t') \notin \operatorname{Supp} D'$] est un ouvert U [resp. V] non vide de X, donc que $U \cap V \neq \emptyset$, si bien que $(\delta \times id_{T \times T'})^* (D \times D')$ est défini.

CHAPITRE II. CONTINUITE DES FAMILLES ALGEBRIQUES DE DIVISEURS

1.- Une propriété des applications rationnelles d'un produit de variétés dans un groupe algébrique.

Hypothèses et notation 1.1. - Soient X et T deux variétés, F un fermé de $X \times T$ et f une application rationnelle de $X \times T$ dans un groupe algébrique G. Nous aurons besoin du résultat suivant qui est un critère pour que f soit régulière hors de F et qui généralise un résultat obtenu dans ([8] et [9]) dans le cas où $G = G_a$ et où $F = \emptyset$.

Proposition 1.2. - *Soient* X *et* T *deux variétés. Etant donné* $t \in T$, *on notera* $j_t : X \to X \times T$ *le morphisme* $x \leadsto (x,t)$ *et* $i_t : X \times \{t\} \to X$ *l'isomorphisme canonique. Soit* F *un fermé de* $X \times T$ *et soit* f *une application rationnelle de* $X \times T$ *dans une variété* G . *On se place dans l'un ou l'autre des deux cas suivants* :

a) G *est une variété affine* ;

b) G *est un groupe algébrique.*

On suppose que, quel que soit $t \in \{ t \in T / X \times\{t\} \not\subset F\}$, $f \circ j_t$ *soit défini. Supposons de plus qu'il existe une partie* A *de* T , *partout dense dans* T, *telle que, quel que soit* $t \in A$, $f \circ j_t$ *soit régulière sur* $X - i_t(F \cap X \times \{t\})$. *Alors* f *est régulière sur* $X \times T - F$.

Lemme 1.3. - *La proposition 1.2. est vraie dans le cas où* G *est une variété quelconque, où* X *et* T *sont des variétés normales, et où on fait de plus l'hypothèse* (H) *suivante* : (H) *toutes les composantes irréductibles de l'ensemble* S_1 *de non-définition de la restriction de* f *à* $X \times T - F$ *sont de codimension* 1.

Soit $U_1,\dots,U_p$ un recouvrement ouvert affine de G . On peut supposer que $U_1,\dots,U_n$ soient ceux des U_i qui rencontrent l'image de f . On sait qu'on peut considérer $U_1,\dots,U_n$ comme des sous variétés ouvertes de variétés complètes $\overline{U_1},\dots,\overline{U_n}$; on peut prolonger f en une application rationnelle $\overline{f_i}$ de $X \times T$ dans $\overline{U_i}$. Soient $S_2^1,\dots,S_2^n$ les ensembles de non-définition de $\overline{f_1},\dots,\overline{f_n}$.

Puisque $X \times T$ est une variété normale, ces ensembles sont de codimension au moins égale à 2 ([2], exposé 9, lemme 2 à la proposition 1). Alors $S_1' = S_1 - (S_2^1 \cup \dots \cup S_2^n)$ est un ouvert partout dense de S_1 . Soit $(x,t) \in S_1'$; alors $\overline{f_1},\dots,\overline{f_n}$ sont définies au point (x,t), mais f n'est pas défini au point (x,t), donc $\overline{f_i}(x,t) \notin U_i$ pour $1 \leq i \leq n$; donc $\overline{f_i} \circ j_t(x) \notin U_i$, ce qui montre que $f \circ j_t$ n'est pas défini au point x , donc que $t \notin A$. Autrement dit, la projection P de S_1' sur T est disjointe de A, donc ne contient aucun ouvert non vide de T : la projection de S_1' sur T n'est pas dominante ([5],chap.II paragraphe V). Puisque S_1' est un ouvert partout dense dans S_1, la projection de S_1 sur T n'est pas dominante non plus.

Toutes les composantes de S_1 sont de codimension 1, et puisque $f \circ j_t$ est définie pour tout $t \varepsilon \{t \varepsilon T/X \times \{t\} \not\subset F\}$, quel que soit $t \varepsilon T$, $S_1 \not\supset X \times \{t\}$; donc, si S_1 n'est pas vide la projection de S_1 sur T est dominante, ce qui est absurde. Donc $S_1 = \emptyset$, C.Q.F.D.

Remarque 1.4. - L'hypothèse (H) du lemme 1.3. est vérifiée dans les cas suivants :

a) X et T sont des variétés normales, et G est une variété affine

b) X et T sont des variétés non-singulières et G est un groupe algébrique ([8],exposé 9, lemme 1 à la proposition 1).

Lemme 1.5. - La proposition 1.2. est vraie dans le cas où X et T sont des variétés quelconques, et où G est le groupe additif G_a.

Il est clair qu'on peut supposer X et T affines. Soit alors $(x_o,t_o) \varepsilon X \times T - F$. Il existe une fonction régulière z sur $X \times T$, nulle sur F et telle que $z(x_o,t_o) \neq 0$. Soient X' et T' les normalisées de X et T, $p : X' \to X$, $q : T' \to T$ et $r : X' \times T' \to X \times T$ les morphismes canoniques. Etant donné $t' \varepsilon T$, on note $j_{t'} : X' \to X' \times T'$ le morphisme $x' \rightsquigarrow (x',t')$ et $i_{t'}' : X' \times \{t'\} \to X'$ l'isomorphisme canonique. Posons $A' = q^{-1}(A), F' = r^{-1}(F)$, $f' = f \circ r$.

Alors il est clair que X', T', F', f', G_a et A' vérifient les hypothèses du lemme 1.3. Donc, f' est régulière sur $X' \times T' - F'$. Et $z' = z \circ r$ est une fonction régulière nulle sur F'. Donc il existe un entier positif n tel que $z'^n f'$ soit régulière sur $X' \times T'$. Posons $g = z^n f$, $g' = (z^n f) \circ r = z'^n f'$. La fonction g' régulière sur le produit $X' \times T'$ se met sous la forme $g' = \sum_{i=1}^{h} \theta_i'(t) u_i'(x)$ où les θ_i' [resp. les u_i'] sont des fonctions régulières sur T' [resp. sur X']. Ce qui montre que l'espace vectoriel sur le corps de base K engendré par les fonctions $g' \circ j_{t'}'$ pour $t' \varepsilon T'$ est de dimension finie $\leq h$.

Or si $t = q(t')$, $g' \circ j_{t'}' = g \circ r \circ j_{t'}' = g \circ j_t \circ p$. Puisque p et q sont surjectifs, cela entraine que l'espace vectoriel sur K engendré par les fonctions $g \circ j_t$ par $t \varepsilon B \subset T$ est de dimension finie $\leq h$, quelle que soit la partie B de T.

Puisque $(x_o,t_o) \varepsilon X \times T - F$, $\{x_o\} \times T - F$ est un ouvert non vide de $\{x_o\} \times T$; posons $C = \{t \varepsilon T/(x_o,t) \notin F\}$, et $B = A \cap C$; on voit que $B = A \cap C$ est partout dense dans T. Puisque l'espace vectoriel sur K engendré par les fonctions $g \circ j_t$ pour $t \in B$ est de dimension finie m, il existe une base de cet espace de la forme : $(u_1 = g \circ j_{t_1}, \ldots, u_m = g \circ j_{t_m})$, où $t_1, \ldots, t_m \in B$.

Puisque $(\{x_o\} \times B) \cap F = \emptyset$, $x_o \notin i_{t_k}(F \cap (X \times \{t_k\}))$, pour $1 \leq k \leq m$. Donc il existe des fonctions régulières $v_1, \ldots, v_m$ sur X, nulles sur $i_{t_1}(F \cap (X \times \{t_1\})), \ldots, i_{t_m}(F \cap (X \times \{t_n\}))$ respectivement et telles que $v_k(x_o) \neq 0$ pour $1 \leq k \leq m$. Et il existe des entiers $n_1, \ldots, n_m$ positifs tels que les fonctions $v_k^{n_k} u_k$ soient régulières sur X pour $1 \leq k \leq m$, puisque $B \subset A$, et que par conséquent $u_k = g \circ j_{t_k} = (z^n \circ j_{t_k})(f \circ j_{t_k})$ est régulière par hypothèse sur $X - i_{t_k}(F \cap (X \times \{t_k\}))$ pour $1 \leq k \leq m$.

$$\begin{tikzcd} t' \arrow[d, squiggly] & T' \arrow[d, "q"] \\ t & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j'_{t'}"] \arrow[d, "p"'] & X' \times T' \arrow[d, "r"] \arrow[dr, dotted, "f'"] & \\ X \arrow[r, "j_t"] & X \times T \arrow[r, dotted, "f"'] & G_a \end{tikzcd}$$

pour $t \in B$, $g \circ j_t = \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\, u_k$, où $c_k(t) \in K$, si bien que $v_1^{n_1} \ldots v_m^{n_m}(g \circ j_t)$ est une fonction régulière sur X. Soit w_i la fonction régulière sur $X \times T$ définie par $w_i(x,t) = v_i(x)$, alors la fonction $h = w_1^{n_1} \ldots w_m^{n_m} z^n f$ est telle que pour tout $t \in B$, $h \circ j_t = v_1^{n_1} \ldots v_m^{n_m}(g \circ j_t)$ soit régulière. On sait alors (1) que la fonction h est régulière. Mais pour k de 1 à m, $w_i(x_o,t_o) = v_i(x_o) \neq 0$ et $z(x_o,t_o) \neq 0$, donc f est définie au point (x_o,t_o). C.Q.F.D.

1.5.- Démonstration de la proposition 1.2. dans le cas a).- Plaçons-nous dans l'hypothèse a). Soient X' et T' les normalisées de X et T, $p : X' \to X$, $q : T' \to T$, $r : X' \times T' \to X \times T$ les morphismes propres surjectifs canoniques. Posons $f' = f \circ r$, $F' = r^{-1}(F)$. $A' = q^{-1}(A)$; on note $j'_{t'} : X' \to X' \times T'$ le morphisme $x' \rightsquigarrow (x',t')$ et $i'_{t'} : X' \times \{t'\} \to X'$ l'isomorphisme canonique. Il est clair qu'alors X', T', F', f', G et A', compte tenu de la remarque (1,4), vérifient les hypothèses du lemme 1.3.. Donc f' est régulière sur $X' \times T' - F'$.

---

(1) la démonstration de ce résultat technique figure dans ([8], exposé 5, démonstration du théorème 1, pages 5-05 et 5-06) et dans ([9], chap.I, paragraphe II, démonstration du théorème 1, page 446).

(1.6.1) Première étape : Montrons que l'application (ensembliste) $f' : X' \times T' - F' \to G$ se factorise de manière unique à travers r en $\hat{f} : X \times T - F \to G$.

La factorisation, si elle existe, est unique puisque r est surjectif.

Soit $(x_o,t_o) \in X \times T - F$, et soient (x_1',t_1') et $(x_2',t_2') \in X' \times T' - F'$ tels que $r(x_1',t_1') = (x_o,t_o) = r(x_2',t_2')$. Soit Ω l'ouvert de définition de f . Puisque $f \circ j_{t_o}$ est défini, $\Omega \cap (X \times \{t_o\}) = V_{t_o} \times \{t_o\} \neq \emptyset$. Soit alors $x' \in p^{-1}(V_{t_o})$; on a $f'(x',t_1') = f(p(x'),t_o) = f'(x',t_2')$. Si on pose $f'_{t_1'}(x') = f'(x',t_1')$ et $f'_{t_2'}(x') = f'(x',t_2')$, les deux applications rationnelles sur X ainsi définies $f'_{t_1'}$ et $f'_{t_2'}$ coïncident sur tout leur ouvert de définition $X' \times T' - F'$, donc $f'(x_1',t_1') = f'(x_1',t_2')$.

D'autre part, pour tout $x' \in p^{-1}(V_{t_o})$, on a :

$f'(x',t_2') = f' \circ j'_{t_2'}(x') = f \circ j_{t_o}(p(x'))$, et puisque les applications rationnelles $f' \circ j'_{t_2'}$ et $f \circ j_{t_o} \circ p$ coïncident sur V_{t_o} , elles coïncident sur tout leur domaine de définition $X' - i'_{t_2'}(X' \times \{t_2'\} - F')$. En particulier, puisque $p(x_1') = p(x_2')$, $f \circ j_{t_o} \circ p(x_1') = f \circ j_{t_o} \circ p(x_2')$ donc $f' \circ j'_{t_2'}(x_2') = f' \circ j'_{t_2'}(x_1')$, si bien que $f'(x_2',t_2') = f'(x_1',t_2')$. Au total , $f(x_1',t_1') = f(x_2',t_2')$, ce qui montre l'existence de $\hat{f}$.

(1.6.2) 2ème étape : Montrons que l'application $\hat{f} : X \times T - F \to G$ est continue. C'est un résultat facile de topologie : soient $z \in X \times T - F$, $g = \hat{f}(z)$, V un voisinage ouvert de g dans G . Posons $Z' = r^{-1}(z)$; pour tout $z' \in Z'$, $f'(z') = g$, donc il existe un voisinage ouvert $V'_{z'}$ de z' dans $X' \times T' - F'$ tel que $f'(U'_z) \subset V$. Posons $U' = \bigcup_{z' \in Z'} U'_{z'}$ et $U = (X \times T\text{-}F) - r(X' \times T'\text{-}U')$.

$$\begin{tikzcd}
t' \arrow[d, squiggly] & T' \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[r, "j'_{t'}"] \arrow[d, "p"'] & X' \times T' \arrow[d, "r"] \arrow[dr, dotted, "f'"] & & \\
t & T & X \arrow[r, "j_t"] & X \times T \arrow[r, dotted, "f"'] & G \arrow[r, dotted, "\phi"] & G_a
\end{tikzcd}$$

Puisque r est fermée, $r(X' \times T' - V')$ est un fermé de $X \times T$ contenant F , (puisque $X' \times T' - U' \supset F'$), donc $r(X' \times T' - U') - F$ est un fermé de $X \times T - F$, si bien que U est un ouvert dans $X \times T - F$. Enfin $z \in U$, car quel que soit $z' \in X' \times T' - F'$ tel que $r(z') = z$, on a $z' \in U'$. De plus, puisque r est surjectif, pour tout $t \in U$, il existe $t' \in U'$ tel que $r(t') = t$, donc $\hat{f}(t) = f'(t') \in V$, et $\hat{f}(U) \subset V$.

(1.6.3) 3ème étape : Montrons que quelle que soit la fonction rationnelle ϕ sur G, le domaine de définition H, $\phi \circ f$ est régulier sur $\hat{f}^{-1}(H)$.

Posons $Q = X \times T - \hat{f}^{-1}(H)$; Q contient F. Si $Q = X \times T$, il n'y a rien à démontrer, sinon, posons $T_1 = \{t \in T / Q \not\supset X \times \{t\}\}$. Soit $t \in T_1$. Posons comme précédemment $\Omega \cap (X \times \{t\}) = V_t \times \{t\}$. Puisque $f \circ j_t$ est défini, V_t est un ouvert dense dans X ; alors $Q \not\supset V_t \times \{t\}$, et $U_t = (V_t \times \{t\}) \cap \hat{f}^{-1}(H) \neq \emptyset$. Soit $x \in X$ tel que $(x,t) \in U_t$, f est défini en (x,t) et $f(x,t) \in H$, donc $\phi\,[f(j_t(x))]$ existe, ce qui montre l'existence de $(\phi \circ f) \circ j_t$.

Soit maintenant $A_1 = A \cap T_1$. Puisque T_1 est la projection de $\hat{f}^{-1}(H)$ sur T, T_1 est ouvert et non vide, donc A_1 est une partie dense de T. Soit $t \in A_1$, alors $f \circ j_t$ est régulière sur $X - i_t(X \times \{t\}\ F)$ et $\phi \circ f \circ j_t$ est défini en x dès que $f \circ j_t(x) \in H$, donc dès que $\hat{f} \circ j_t(x) \in H$ car, puisque p est surjective les deux factorisations $f \circ j_t$ et $\hat{f} \circ j_t$ de $f \circ j'_{t'}$ (où t' est un élément de T tel que $q(t') = t$) à travers p sont égales. Or $\hat{f} \circ j_t(x) = \hat{f}(x,t) \in H$ dès que $(x,t) \in X \times T - Q$, donc dès que $x \in X - i_t(X \times \{t\} \cap Q)$, ce qui montre que, pour tout $t \in A_1$, $\phi \circ f \circ j_t$ est régulière sur $X - i_t(X \times \{t\} \cap Q)$.

Alors X, T, Q, $\phi \circ f$, G_a et A_1 vérifient les hypothèses du lemme 1.5., si bien que $\phi \circ f$ est régulière sur $X \times T - Q$.

(1.6.4) 4ème étape : Montrons que $\hat{f}$ est régulière sur $X \times T - F$ et égale à f.

Puisque p est surjective, les deux factorisations $\phi \circ f$ et $\phi \circ \hat{f}$ de $\phi \circ f'$ à travers p sont égales (sur $X \times T - Q$). Donc $\hat{f}$ est une application continue de $X \times T - F$ dans G, telle que pour toute fonction rationnelle sur G, $\phi \circ \hat{f}$ soit régulière sur $\hat{f}^{-1}(H)$, où H désigne l'ouvert de définition de ϕ. Donc $\hat{f}$ est une application régulière de $X \times T - F$ dans G.

Enfin, puisque r est surjective, les deux factorisations f et $\hat{f}$ de f' à travers r coïncident sur l'intersection Ω de leurs ensembles de définition, et puisque les applications rationnelles f et $\hat{f}$ de $X \times T$ dans G coïncident sur un ouvert non vide, elles sont égales. C.Q.F.D.

1.7. - Démonstration de la proposition 1.2. dans le cas b) où G est un groupe algébrique.

On peut évidemment supposer G connexe.

Soit L le plus grand sous-groupe linéaire connexe de G et B la variété abélienne G/L, $i : L \to G$ et $p : G \to B$ les homomorphismes canoniques. Alors, d'après le théorème de Weil ([8] exp. 9, Th. 2), $p \circ f$ est de la forme $g_1 + g_2$, où g_1 est une application rationnelle de X dans B et g_2 une application rationnelle de T dans B. Soit T_o la projection de $X \times T - F$ sur T ; puisque pour tout $t \in W$, $f \circ j_t$ est défini, g_2 est défini sur W. Soit X_o la projection de $X \times T - F$ sur X ; alors étant donné $x \in X_o$, il existe $t \in A \cap W$ tel que $f \Theta j_t$ soit régulière en x, donc g_1 est définie sur X_o. D'après ([16]), il existe une section rationnelle σ de p ; soit $(x_o,t_o) \in X \times T - F$, alors $x_o \in X_o$ et $t_o \in T_o$. Quitte à translater σ, nous pouvons supposer σ définie au point $g_1(x_o) + g_2(t_o)$. Il existe un ouvert T_1 de T_o contenant t_o tel que pour tout $t \in T_1$, σ soit définie en $g_1(x_o) + g_2(t)$. Posons $f' = f - \sigma_o(g_1+g_2)$. Alors $p \circ f' = 0$, donc f' est une application rationnelle de $X \times T$ dans L. Quel que soit $t \in T_1$, $f' \Theta j_t = f \Theta j_t - \sigma_o(g_1(t)+ g_2)$ est défini. Soit Φ le fermé de $X \times T_1$ hors duquel $\sigma_o(g_1+ g_2)$ est défini, et posons $F_1 = (F \cap X \times T_1) \cup \Phi$. Alors $(x_o,t_o) \notin F_1$; et pour tout $t \in A \cap T_1$, $f' \Theta j_t$ est régulière sur $X - i_t(F_1 \cap (X \times \{t\}))$. Appliquons donc la proposition 1.2.(cas a)) à X, T_1, F_1, f', L et $A \cap T_1$; on voit que f' est régulière sur $X \times T_1 - F_1$, donc f' est régulière en (x_o,t_o) ; donc f est régulière en (x_o,t_o). C.Q.F.D.

2.- Théorème de continuité des familles algébriques de diviseurs.

2.0. Notations et hypothèses. - Dans tout ce numéro, nous considérons deux variétés X et T et un groupe algébrique G.

De plus, étant donné $t \in T$, nous noterons $j_t : X \to X \times T$ le morphisme $x \rightsquigarrow (x,t)$ et $i_t : X \times \{t\} \to X$ l'isomorphisme canonique.

Théorème 2.1. - *Soit $(D_t)_{t\in T}$ une famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par T, et soient D et D' deux diviseurs de définition de cette famille ; alors $D = D'$.*

Nous dirons alors que D est le diviseur de définition de la famille $(D_t)_{t\in T}$.

Soit $(x_o,t_o) \in X \times T$, il existe un voisinage ouvert $X \times T - F$ de (x_o,t_o) dans $X \times T$ et des applications rationnelles f et f' de $X \times T$ dans G tels que f [resp. f'] soit une application de définition de D [resp. D'] dans $X \times T - F$. Posons $T_o = \{t \in T / X \times \{t\} \not\subset F\}$. Puisque pour tout $t \in T_o$, $D \Theta j_t$ et $D' \Theta j_t$ sont définis, il en est de même de $f \Theta j_t$ et $f' \Theta j_t$. D'autre part, $f \Theta j_t$ et $f' \Theta j_t$ sont des applications de définition de $D \Theta j_t$ et $D' \Theta j_t$ dans $X - i_t(X \times \{t\} \cap F)$. Comme $D \Theta j_t = D' \Theta j_t$ quel que soit $t \in T_o$, $(f \Theta j_t)(f' \Theta j_t)^{-1} = (ff'^{-1}) \Theta j_t$ est une application régulière de $X - i_t(X \times \{t\} \cap F)$ dans G. Enfin T_o, étant la projection sur T de $X \times T - F$ est un ouvert non vide de T, donc X, T, F, ff'^{-1}, G et T_o vérifient les hypothèses de la proposition (1.2.) , donc ff'^{-1} est régulière sur $X \times T - F$, donc au point (x_o,t_o), si bien que $D(x_o,t_o) = D'(x_o,t_o)$, C.Q.F.D.

Corollaire 2.2.- (Caractère local des familles algébriques).- *Soit* f *une application de* T *dans* $\mathcal{D}(X,G)$. *Supposons que pour tout* $t \in T$, *il existe un voisinage ouvert* T' *de* t *dans* T *tel que la restriction de* f *à* T' *soit une famille algébrique. Alors* f *est une famille algébrique.*

Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert $(T_i)_{i \in I}$ de T , et pour tout $i \in I$, un diviseur D_i de type G sur $X \times T_i$ tel que, pour tout $t \in T_i$, $D_i \odot j_t$ existe et soit égal à $f(t)$. Montrons que les sections $D_i \in \Gamma(X \times T_i, \mathcal{F}^G_{X \times T_i}/\mathcal{F}'^G_{X \times T_i})$ se recollent en une section $D \in \Gamma(X \times T, \mathcal{F}^G_{X \times T}/\mathcal{F}'^G_{X \times T})$. Il suffit de montrer, que, quels que soient i et j appartenant à I , les restrictions de D_i et D_j à $(X \times T_i) \cap (X \times T_j) = X \times (T_i \cap T_j)$ coïncident. Or pour tout $t \in T_i \cap T_j$, on a $D_i \odot j_t = f(t)$ et $D_j \odot j_t = f(t)$. Donc les restrictions de D_i et D_j à $X \times (T_i \cap T_j)$ sont deux diviseurs de définition de la restriction de f à T_i T_j . D'après le théorème (2.1.), elles sont égales.

Montrons maintenant que D est le diviseur de définition de f . Quel que soit $t \in T$, il existe $i \in I$ tel que $t \in T_i$; et alors $D_i \odot j_t$ existe donc $D \odot j_t$ existe et est égal à $D_i \odot j_t = f(t)$.

Remarque 2.3. - Le théorème (2.1.) montre que $(j^*_t)_{t \in T}$ est une application bijective de l'ensemble $\mathcal{D}_T(X \times T, G)$ des diviseurs D de type G sur $X \times T$ tels que pour tout $t \in T$, $j^*_t(D)$ soit défini sur l'ensemble des familles algébriques de diviseurs de type G sur X paramétrées par T .

Lorsque G est commutatif, on vérifie aisément que $\mathcal{D}_T(X \times T, G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{D}(X \times T, G)$ et que $(j^*_t)_{t \in T}$ est un isomorphisme de groupes.

Théorème 2.4.-(Théorème de continuité).- *Soit* $(D_t)_{t \in T}$ *une famille algébrique de diviseurs de type* G *sur* X *paramétrée par* T , *et supposons qu'il existe une partie partout dense* A *de* T *telle que, quel que soit* $t \in A$, *on ait* $D_t = 0$. *Alors, le diviseur de définition* D *de* $(D_t)_{t \in T}$ *est nul ; en particulier, quel que soit* $t \in T$, $D_t = 0$.

Soit $(x_o,t_o) \in X \times T$; il existe un voisinage ouvert $X \times T - F$ de (x_o,t_o) dans $X \times T$ et une application rationnelle f de $X \times T$ dans G tels que f soit une application de définition de D dans l'ouvert $X \times T - F$. Posons $T_o = \{t \in T / X \times \{t\} \not\subset F\}$. Puisque pour tout $t \in T_o$, $D \odot j_t$ est défini, il en est de même de $f \odot j_t$; enfin pour tout $t \in A \cap T_o$, $f \odot j_t$, étant application de définition de $D \odot j_t$ dans $X - i_t(X \times \{t\} \cap F)$, est régulière sur :

$X - i_t(X \times \{t\} \cap F)$. Comme T_o est la projection sur T de $X \times T - F$, T_o est ouvert, donc $A \cap T_o$ est dense dans T, et X, T, F, f, G et $A \cap T_o$ vérifient les hypothèses de la proposition (1.2.), si bien que f est régulière sur $X \times T - F$, donc en (x_o, t_o). C.Q.F.D.

Corollaire 2.5. - *Soit* $(D_t)_{t \in T}$ *une famille algébrique de diviseurs de type* G *sur* X *paramétrée par* T. *Alors l'ensemble* H *des éléments* t *de* T *tels que* $D_t = 0$ *est fermé dans* T.

Soit E une composante irréductible de l'adhérence de H dans T. Alors $E \cap H$ est partout dense dans E, et la restriction de $(D_t)_{t \in T}$ à E(I.3.3) est une famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par E, telle que pour tout $t \in E \cap H$, $D_t = 0$; alors le théorème (2.4.) montre que pour tout $t \in E$, $D_t = 0$; donc $E \subset H$. Alors H contient toute composante irréductible de son adhérence ; donc H est fermé.

CHAPITRE III. DIVISEUR INFINITESIMAL ASSOCIE A UNE FAMILLE ALGEBRIQUE DE DIVISEURS ET A UN VECTEUR TANGENT.

1. - Définitions.

1.0. - Notations et hypothèses. - Nous considérons dans ce numéro deux variétés X et T et un groupe algébrique commutatif G.

Etant donné $t \in T$, notons $\mathbb{T}^T_t$ l'espace tangent à T en t (dual de l'espace cotangent de Zariski). Lorsque T est non singulière, notons $\mathbb{T}^T$ l'espace fibré tangent à T. Notons 0 l'élément neutre du groupe G, et considérons $\mathbb{T}^G_0$ comme muni de sa structure canonique de groupe algébrique isomorphe à $(G_a)^n$, où n désigne la dimension de G.

Etant donné $g \in G$, notons $\gamma \rightsquigarrow g\gamma : \mathbb{T}^G_h \to \mathbb{T}^G_{gh}$ la différentielle du morphisme $h \rightsquigarrow g+h: G \to G$.

Etant donné $x \in X$, notons $k_x : T \to X \times T$ le morphisme $t \rightsquigarrow (x,t)$; étant donné $t \in T$, notons $j_t : X \to X \times T$ le morphisme $x \rightsquigarrow (x,t)$.

Etant donné un morphisme $u : X \to G$, un point $x \in X$ et un vecteur tangent L à X en x, u définit un homorphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{u(x)} \to \mathcal{O}_x$ et une application linéaire $u_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m}_{u(x)}/\mathfrak{m}^2_{u(x)} \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}^2_x$, où $\mathfrak{m}_x$ (resp. $\mathfrak{m}_{u(x)}$) est l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ (resp. $\mathcal{O}_{u(x)}$). Alors L est une forme linéaire sur $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}^2_x$, et nous noterons du (L) la forme linéaire sur $\mathfrak{m}_{u(x)}/\mathfrak{m}^2_{u(x)}$ définie par $du(L) = L \circ u_{\mathfrak{m}}$.

Soient U un ouvert affine de X contenant x, et tel que $u(U)$ soit contenu dans un ouvert affine V de G, $i : U \to A$ un plongement de U dans un espace affine A, $j : V \to B$ un plongement de V dans un espace affine B, u_0 la restriction de u à U, $\hat{u}_0$ un prolongement de u_0 de A dans B ; notons $d\hat{u}_0$ la différentielle de $\hat{u}_0$; nous pouvons considérer L comme un vecteur tangent en x à A ; alors $du(L) = d\hat{u}_0(L)$.

Lorsque x est un point simple de X, la différentielle du est définie en L et y prend la valeur $du(L)$.

Lemme 1.1. - Soient X une variété, G un groupe algébrique commutatif, u et v deux morphismes de X dans G, $x \in X$ et $L \in \mathbb{T}^X_x$; alors :

$$((u+v)(x))^{-1}\, d(u+v)(L) = u(x)^{-1}\, du(L) + v(x)^{-1}\, dv(L).$$

D'après une remarque précédente, pour démontrer cette formule, nous pouvons supposer que X est un espace affine. Notons p_1 et p_2 les projections de $G \times G$ sur G, et posons $\rho = p_1 + p_2$. Il résulte alors de ([19] III,11, proposition 17) que pour tout $\ell \in \mathbb{T}^{G \times G}_{(u,v)(x)}$, on a :

$$((u+v)(x))^{-1}\, d\rho(\ell) = u(x)^{-1}\, dp_1(\ell) + v(x)^{-1}\, dp_2(\ell) .$$

Or $u = p_1 \circ (u,v)$, $v = p_2 \circ (u,v)$ et $u + v = \rho \circ (u,v)$, donc en prenant $\ell = (du(L), dv(L))$ on trouve la formule désirée.

1.2. - Construction du diviseur infinitésimal.

Soit $(D_t)_{t \in T}$ une famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par T , et soit $L \in \mathbb{T}^T_{t_o}$ un vecteur tangent à T en un point t_o de T ; nous nous proposons d'associer à la famille $(D_t)_{t \in T}$ et à L un diviseur de type $\mathbb{T}^G_0$ sur X .

Soient D le diviseur de définition de la famille $(D_t)_{t \in T}$, (unique d'après (II,2.1.)), $x_o \in X$ et u une application de définition de D au point (x_o, t_o) ; puisque $u \circledcirc j_{t_o}$ est défini, l'ensemble U des éléments de X tels que u soit défini au point (x, t_o) est un ouvert non vide. Etant donné $x \in X$, posons $L_x = dk_x(L) \in \mathbb{T}^{X \times T}_{(x_o, t_o)}$. Pour tout $x \in U$, on peut définir $du(L_x) \in \mathbb{T}^G_{u(x,t_o)}$; posons :

$$< u, L_x > = (u(x,t_o))^{-1} \, du(L_x) \in \mathbb{T}^G_0 .$$

(1.2.1) lère étape : Montrons que l'application $x \rightsquigarrow < u, L_x >$ ainsi définie est une application régulière de U dans $\mathbb{T}^G_0$.

Soit $x_1 \in U$: posons : $w = - u(x_1, t_o) + u$. D'après le lemme (1,1), quel que soit $x \in U$, $(w(x,t_o))^{-1} \, dw(L_x) = u(x,t_o)^{-1} \, du(L_x)$. Donc, il suffit de montrer que l'application $x \rightsquigarrow < w, L_x >$ est régulière en x_1 . Soit alors G' un ouvert affine de G contenant 0 ; puisque $w(x_1, t_o) = 0$, il existe des ouverts affines X' et T' de X et T respectivement, tels que $w(X' \times T' \cap U) \subset G'$, et que $(x_1, t_o) \in X' \times T'$. Posons $U' = X' \times T' \cap U$.

Nous pouvons alors considérer G' comme plongé dans un espace affine S , et choisir des applications coordonnées de G' , ce qui permet, quel que soit $g \in G'$, d'identifier canoniquement $\mathbb{T}^{G'}_g$ à $\mathbb{T}^{G'}_0$. Alors $(w(x,t_o))^{-1}$: $\mathbb{T}^{G'}_{w(x,t_o)} \to \mathbb{T}^{G'}_0$ apparait comme un isomorphisme, et pour montrer que l'application $x \rightsquigarrow < w, L_x >$ de U' dans $\mathbb{T}^{G'}_0$ est définie en x_1 , il suffit de montrer que l'application $x \rightsquigarrow dw(L_x)$ de U' dans $\mathbb{T}^{G'}_0$ est définie en x_1, ou encore que, quelle que soit la fonction coordonnée p sur S , l'application $x \rightsquigarrow dp \, dw(L_x)$ est régulière en x_1 .

Puisque X' et T' sont affines, on peut écrire $p \circ w = \frac{f_1}{f_2}$, où f_1 et f_2 sont des fonctions régulières sur $X \times T$, telles que :

$$f_2(x_1, t_o) \neq 0 \text{ . Alors } d\frac{f_1}{f_2}(L_x) = \frac{df_1(L_x) f_2(x,t_o) - df_2(L_x) f_1(x,t_o)}{f_2(x,t_o)^2} ,$$

quel que soit $x \in U'$. Pour montrer que l'application $x \rightsquigarrow dp\, dw(L_x)$ est régulière en x_1, il suffit donc de montrer que pour toute fonction régulière f sur $X \times T$, l'application $x \rightsquigarrow df(L_x)$ est régulière sur X.

Mais alors, on peut écrire $f = \sum_{i=1}^{h} \phi_i(x)\, \psi_i(t)$, où les ϕ_i [resp. les ψ_i] sont des fonctions régulières sur X [resp. T], si bien que :

$$df(L_x) = \sum_{i=1}^{h} \phi_i(x)\, d\psi_i(L),$$

où les $d\psi_i(L)$ sont des constantes ; donc l'application $x \rightsquigarrow df(L_x)$ est régulière sur X, C.Q.F.D.

1.2.2. - Construction du diviseur $\langle D,L \rangle$ de type $\mathbb{T}_0^G$ sur X.

Soit v une autre application de définition de D au point (x_o,t_o) ; puisque $v \circ j_{t_o}$ est défini, l'ensemble V des éléments de X tels que v soit défini au point (x,t_o) est un ouvert non vide. Alors, $u-v$ est une application régulière en (x_o,t_o), et pour tout $x \in U \cap V$, $u-v$ est défini au point (x,t_o).

D'après (1.2.1), les applications $x \rightsquigarrow \langle u,L_x \rangle$, $x \rightsquigarrow \langle v,L_x \rangle$ et $x \rightsquigarrow \langle u-v,L_x \rangle$ sont régulières sur U, V et $U \cap V$ respectivement. On peut donc les considérer comme des applications rationnelles de X dans $\mathbb{T}_0^G$.

D'après le lemme (1,1), quel que soit $x \in U \cap V$, on a :

$$((u-v)(x,t_o))^{-1}\, d(u-v)(L_x) = u(x,t_o)^{-1}\, du(L_x) - v(x,t_o)^{-1}\, dv(L_x),$$

ce qui montre que les applications rationnelles $\langle u-v,L_x \rangle$ et $\langle u,L_x \rangle - \langle v,L_x \rangle$ coïncident sur l'ouvert non vide $U \cap V$. Elles sont donc égales.

Or d'après (1.2.1), puisque $u-v$ est définie en (x_o,t_o), $\langle u-v,L_x \rangle$ est régulière au point x_o ; il en est donc de même de $\langle u,L_x \rangle - \langle v,L_x \rangle$.

Par conséquent, si à tout $y \in X$, on associe une application de définition u_y de D au point (y,t_o), et un ouvert U_y contenant y dans lequel u_y soit une application de définition de D, le système d'ouvert $(U_y)_{y \in X}$ et d'applications rationnelles $(\langle u_y,L_x \rangle)_{y \in X}$ de X dans $\mathbb{T}_0^G$ définit un diviseur de type $\mathbb{T}_0^G$ sur X qu'on notera $\langle D,L \rangle$, ou $\langle (D_t)_{t \in T},L \rangle$, et qu'on appellera diviseur infinitésimal associé à la famille $(D_t)_{t \in T}$ et au vecteur tangent L.

Proposition 1.3. - Hypothèses de (1.2). Si le diviseur de définition D de la famille $(D_t)_{t \in T}$ est principal, il en est de même du diviseur $\langle (D_t)_{t \in T},L \rangle$.

Soit u une application de définition de D dans $X \times T$, alors $\langle u,L_x \rangle$ est une application de définition de $\langle D,L \rangle$ dans X.

Proposition 1.4. - Hypothèses de (1.2). - Soit $(E_t)_{t\varepsilon T}$ une autre famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par T. Alors :

$$< (D_t+E_t)_{t\varepsilon T}, L > = < (D_t)_{t\varepsilon T}, L > + < (E_t)_{t\varepsilon T}, L >$$

Soit $x \varepsilon X$, u [resp. v] une application de définition de D [resp. du diviseur de définition E de $(E_t)_{t\varepsilon T}$] au point (x,t_o). Puisque $u \circledcirc j_{t_o}$ et $v \circledcirc j_{t_o}$ sont définis, l'ensemble A des $x \varepsilon X$ tels que u et v soient régulières en (x,t_o) est un ouvert non vide de X. D'après le lemme (1,1), pour tout $x \varepsilon A$, on a :

$$< u+v, L_x > = < u, L_x > + < (v, L_x > \quad \text{Or} \quad < u+v, L_x > \; [\text{resp.} < u, L_x >,$$

resp. $< v, L_x >$] est une application de définition de $< D+E, L >$ [resp. $< D, L >$, resp. $< E, L >$] en x, donc $< D+E, L > = < D, L > + < E, L >$.

Remarque 1.5. - Hypothèses de (1.2). - (i) Soit T' une sous-variété de T qui soit un voisinage de t_o dans T, et soit $(D_t)_{t\varepsilon T'}$, la restriction à T' de la famille $(D_t)_{t\varepsilon T}$ (I,3.3). Alors $< (D_t)_{t\varepsilon T'}, L > = < (D_t)_{t\varepsilon T}, L >$.

(ii) Soit $\lambda \varepsilon K$, alors $< (D_t)_{t\varepsilon T}, \lambda L > = \lambda < (D_t)_{t\varepsilon T}, L >$.

(iii) si $L' \varepsilon \mathbb{T}^T_{t_o}$, $< (D_t)_{t\varepsilon T}, L+L' > = < (D_t)_{t\varepsilon T}, L > + < (D_t)_{t\varepsilon T}, L' >$.

Cela résulte immédiatement des définitions.

Proposition 1.6. - Hypothèses de (1.0). - Soit Δ une classe de diviseurs de type G sur $X \times T$. Soient $t_o \varepsilon T$, $L \varepsilon \mathbb{T}^T_{t_o}$ et soit $D \varepsilon \Delta$ tel que $D \circledcirc j_{t_o}$ existe (I,2.3). Alors il existe un voisinage ouvert T_o de t_o dans T tel que pour tout $t \varepsilon T_o$, $D \circledcirc j_t$ existe. Donc D définit une famille algébrique $(D \circledcirc j_t)_{t\varepsilon T_o}$ de diviseurs de type G sur X paramétrée par T_o. Alors la classe d'équivalence (linéaire) du diviseur $< (D \circledcirc j_t)_{t\varepsilon T_o}, L >$ de type $\mathbb{T}^G_0$ sur X ne dépend pas du choix d'un ouvert T_o contenant t_o et d'un diviseur D appartenant à Δ tel que $D \circledcirc j_t$ existe pour tout $t \varepsilon T_o$. On la note $< \Delta, L >$, et on l'appelle classe de diviseurs infinitésimale associée à la classe Δ et au vecteur tangent L.

D'abord, l'ensemble des $t \varepsilon T$ tels que $D \circledcirc j_t$ existe est $\{t \varepsilon T / \text{Supp } D \not\supset X \times \{t\}\}$, c'est donc la projection du complémentaire de Supp D ; c'est bien un ouvert, ce qui montre l'existence d'un voisinage ouvert T_o de t_o dans T tel que, pour tout $t \varepsilon T_o$, $D \circledcirc j_t$ existe.

Soit T_1 un voisinage ouvert de t_o dans T et soit D_1 un diviseur appartenant à Δ tel que pour tout $t \in T_1$, $D_1 \circledcirc j_t$ existe. D'après la remarque (1.5), il suffit de montrer que $< (D_1 \circledcirc j_t)_{t\in T_o \cap T_1}, L >$ et $< (D \circledcirc j_t)_{t\in T_o \cap T_1}, L >$ ont même classe. Nous pouvons donc supposer que $T_O = T_1 = T$.

Alors D et D_1 sont équivalents, donc $D-D_1$ est un diviseur principal P. D'après (1.3), $< P,L >$ est principal, et d'après (1.4), $< P,L > = < D,L > - < D_1,L >$, ce qui montre que D,L et D_1,L sont équivalents, C.Q.F.D.

<u>Proposition 1.7</u>. - <u>Soient</u> T <u>une variété non singulière,</u> X <u>une variété, et</u> G <u>un groupe algébrique commutatif</u>. <u>Soit</u> $(D_t)_{t\in T}$ <u>une famille algébrique de diviseurs de type</u> $\mathbb{T}_0^G$ <u>sur</u> X <u>paramétrée par</u> $\mathbb{T}^T$.

Notons $\pi : \mathbb{T}^T \to T$ la projection canonique, et D le diviseur de définition de la famille $(D_t)_{t\in T}$. Posons $\pi' = id_X \times \pi : X \times \mathbb{T}^T \to X \times T$. Soit $(x_o,t_o) \in X \times T$, et soit u une application de définition de D en (x_o,t_o). Notons U l'ouvert de définition de u. Montrons d'abord que l'application $(x,L) \rightsquigarrow < u,L_x >$ est une application régulière de $\pi'^{-1}(U)$ dans $\mathbb{T}_0^G$. On se ramène, comme en (1.2.1), à montrer que, lorsque X et T sont affines, et que u est une fonction régulière sur $X \times T$, alors $(x,L) \rightsquigarrow du(L_x)$ est une fonction régulière sur $X \times \mathbb{T}^T$.

Dans ce cas, u est de la forme $\sum_{i=1}^{h} \phi_i(x)\, \psi_i(t)$, où les ϕ_i [resp. les ψ_i] sont des fonctions régulières sur X [resp. T]. Alors :

$du(L_x) = \sum_{i=1}^{h} \phi_i(x)\, \psi_i(L)$, qui est bien une fonction régulière sur $X \times \mathbb{T}^T$.

Soit alors v une autre application de définition de D au point (x_o,t_o). Alors $u-v$ est régulière au point (x_o,t_o), et, d'après ce qui précède, $<u-v,L_x>$ est régulière en tout point de $\{x_o\}\times\pi^{-1}(t_o)$. On montre, comme en (1.2.2.), que les applications rationnelles $< u-v,L_x>$ et $< u,L_x> - < v,L_x>$ de $X \times \mathbb{T}^T$ dans $\mathbb{T}_0^G$ sont égales; donc $< u,L_x > - < v,L_x>$ est régulière en tout point de $\{x_o\}\times\pi^{-1}(t_o)$.

Par conséquent, si à tout $(y,t)\in X \times T$, on associe une application de définition $u_{y,t}$ de D en (y,t) et un ouvert $U_{y,t}$ contenant (y,t) dans lequel $u_{y,t}$ soit une application de définition de D, le système d'ouverts $(U_{y,t})_{y,t\in X\times T}$ et d'applications rationnelles $(<u_{y,t},L_x>)_{(y,t)\in X \times T}$ de $X \times \mathbb{T}^T$ dans $\mathbb{T}_0^G$ définit un diviseur de type $\mathbb{T}_0^G$ sur $X \times \mathbb{T}^T$, qu'on notera $< D,.>$ ou $<(D_t)_{t\in T},.>$.

Soit maintenant $(y,L°)\in X \times \mathbb{T}^T$, alors $< u_{y,\pi(L°)},L_x > \circledcirc j_{L°}$ est une application de définition de $< D,. > \circledcirc j_{L°}$ (où $j_{L°} : X \to X \times \mathbb{T}^T$ est le morphisme $x \rightsquigarrow (x,L°)$). Puisque $u_{y,\pi(L°)} \circledcirc j_{\pi(L°)}$ est défini, l'ouvert U formé des éléments $x\in X$ tels que $u_{y,\pi(L°)}$ soit défini en $(x,\pi(L°))$ est non vide, et d'après (1.2.1), $< u_{y,\pi(L^\circ)}, L_x > \circledcirc j_{L^\circ}$ est défini, et évidemment égal à $< u_{y,\pi(L^\circ)}, L_x^\circ >$, qui est une application de définition de $< D, L^\circ >$ en y. Donc $< D, . > \circledcirc j_{L^\circ}$ existe et est égal à $< D, L^\circ >$, C.Q.F.D.

Corollaire 1.8. - Sous les hypothèses de (1.7), soit δ une section régulière de $\mathbb{T}^T$ (c'est à dire un champ de vecteurs tangents). A la famille $(D_t)_{t\varepsilon T}$ et à δ, nous pouvons associer la famille algébrique $(< (D_t)_{t\varepsilon T}, \delta(t) >)_{t\varepsilon T}$ de diviseurs de type $\mathbb{T}_0^G$ sur X paramétrée par T. On obtient ainsi un homomorphisme du groupe des familles algébriques de diviseurs sur X de type G paramétrées par T dans le groupe des familles algébriques de diviseurs sur X de type $\mathbb{T}_0^G$ paramétrées par T.

Le fait que la famille $(<(D_t)_{t\varepsilon T}, \delta(t)>)_{t\varepsilon T}$ soit algébrique résulte de (I,3.2). Le fait qu'on obtienne un homomorphisme de groupes résulte immédiatement des constructions précédentes et du lemme (1.1.).

Proposition 1.9. - Soient X, T et G vérifiant les hypothèses de (1.0) et $(D_t)_{t\varepsilon T}$ une famille algébrique de diviseurs sur X de type G et $g : T' \to T$ un morphisme de variétés. Soient $t' \varepsilon T'$ et $L' \varepsilon \mathbb{T}_{t'}^{T'}$. Posons $L = dg\,(L')$. Alors :

$$< (D_{g(t')})_{t'\varepsilon T'}, L' > = < (D_t)_{t\varepsilon T}, L >$$

Soit D le diviseur de définition de la famille $(D_t)_{t\varepsilon T}$. Notons $h : X \times T' \to X \times T$ le morphisme $(x,t') \rightsquigarrow (x,g(t'))$. Alors (I,3.2) $h^*(D)$ est défini, et c'est le diviseur de définition de la famille $(D_{g(t')})_{t\varepsilon T}$. Etant donné $x \varepsilon X$, notons $k'_x : T' \to X \times T'$ le morphisme $t' \rightsquigarrow (x,t')$, et posons $L_x = dk_x(L)$ et $L'_x = dk'_x(L')$; alors $dh(L'_x) = L_x$. Soit $x_0 \varepsilon X$ et soit u une application de définition de D en $(x_0, g(t'))$; alors $u \circledcirc h$ est une application de définition de $h^*(D)$ en (x_0, t') ; et puisque $dh(L'_x) = L_x$, en tout point $x \varepsilon X$ tel que u soit régulière en $(x,g(t'))$, on aura $d(v \circledcirc h)(L'_x) = dv(L_x)$. Mais puisque $u \circledcirc j_{g(t')}$ est défini, l'ensemble des $x \varepsilon X$ tels que u soit régulière en $(x,g(t'))$ est un ouvert non vide de X, si bien que les applications rationnelles $d(v \circledcirc h)(L'_x)$ et $dv(L_x)$ sont égales. Et puisque $(v \circledcirc h)(x,t') = v(x,g(t'))$, on a :

$$((v \circledcirc h)(x,t'))^{-1}\, d(v \circledcirc h)(L'_x) = (v(x,g(t')))^{-1}\, dv(L_x)\,,$$

d'où

$$< (D_{g(t')})_{t'\varepsilon T'}, L' > = < (D_t)_{t\varepsilon T}, L >$$

Proposition 1.10. - Soient X et T deux variétés, G et H deux groupes algébriques commutatifs, $\phi : G \to H$ un homomorphisme de groupes algébriques, $t_0 \varepsilon T$ et $L \varepsilon \mathbb{T}_{t_0}^T$.

Soit $(D_t)_{t\varepsilon T}$ une famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par T de diviseur de définition D. Alors :

$$d\phi\circ\langle D,L\rangle = \langle \phi\circ D,L\rangle$$

Soit Δ une classe de diviseurs de type G sur X. Alors :

$$d\phi\circ\langle \Delta,L\rangle = \langle \phi\circ\Delta,L\rangle .$$

Il est clair qu'il suffit de démontrer que pour toute application rationnelle u de $X\times T$ dans G, on a pour tout $x\varepsilon X$ tel que $\langle u,L_x\rangle$ soit défini $d\phi(\langle u,L_x\rangle) = \langle \phi\circ u,L_x\rangle$, ce qui résulte de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^G_{u(x,t_o)} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{T}^G_0 \\ d\phi \downarrow & & \downarrow d\phi \\ \mathbb{T}^H_{(\phi\circ u)(x,t_o)} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{T}^H_0 \end{array}$$

où α est l'application $\ell \rightsquigarrow u(x,t_o)^{-1}\ell$ et β l'application $\ell \rightsquigarrow (\phi\circ u)(x,t_o)^{-1}\ell$.

2. - Familles algébriques de diviseurs infinitésimalement injectives.

Définition 2.1. - Soient X et T deux variétés, et G un groupe algébrique. Une famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par T est dite injective si elle est injective en tant qu'application de T dans $\mathcal{D}(X,G)$.

Définition 2.2. - Hypothèses de (1.0). - Une famille algébrique $(D_t)_{t\varepsilon T}$ de diviseurs de type G sur X paramétrée par T est dite infinitésimalement injective en un point $t_o\varepsilon T$, si pour tout vecteur non nul $L\varepsilon \mathbb{T}^T_{t_o}$, on a $\langle (D_t)_{t\varepsilon T},L\rangle \neq 0$. Elle est dite infinitésimalement injective si elle est infinitésimalement injective en tout point $t\varepsilon T$.

Proposition 2.3. - Hypothèses de (1.0). - Soit $(D_t)_{t\varepsilon T}$ une famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par T. Supposons que $(D_t)_{t\varepsilon T}$ soit infinitésimalement injective en un point simple t_o de T. Alors il existe un voisinage ouvert T_o de t dans T tel que la restriction de $(D_t)_{t\varepsilon T}$ à T_o soit infinitésimalement injective.

D'après (1.5) nous pouvons supposer que T est une variété non-singulière. Le fibré $\mathbb{T}^T$ étant localement trivial, nous pouvons trouver un voisinage ouvert T_1 de t_o dans T et un isomorphisme de la restriction $\mathbb{T}^{T_1}$ de $\mathbb{T}^T$ à T_1 sur $T_1\times\mathbb{T}^T_{t_o}$.

D'après (1.7), la famille $(< (D_t)_{t\varepsilon T}, L >)_{L\varepsilon \mathbb{T}^{T_1}}$ est une famille algébrique de diviseurs de type $\mathbb{T}_0^G$ sur X paramétrée par $\mathbb{T}^{T_1}$ donc (II,2.5), l'ensemble F des $L \varepsilon \mathbb{T}^{T_1}$ tels que $< (D_t)_{t\varepsilon T}, L > = 0$ est fermé dans $\mathbb{T}^{T_1}$.

Mais (1.5), quel que soit $\lambda \varepsilon K$, $< (D_t)_{t\varepsilon T}, \lambda L > = \lambda < (D_t)_{t\varepsilon T}, L >$ donc si $< (D_t)_{t\varepsilon T}, L > = 0$, il en est de même de $< (D_t)_{t\varepsilon T}, \lambda L >$. Ceci montre que si on note $\mathbb{P}$ l'espace projectif associé à $\mathbb{T}_{t_o}^{T_1}$, et $p : T_1 \times (\mathbb{T}_{t_o}^T - \{0\}) \to T_1 \times \mathbb{P}$ le morphisme canonique, $F \cap T_1 \times (\mathbb{T}_{t_o}^T - \{0\})$ est de la forme $p^{-1}(\Phi)$, où Φ est un fermé de $T_1 \times \mathbb{P}$. Donc Φ et $F \cap T_1 \times (\mathbb{T}_0^T - \{0\})$ ont même projection sur T_1.

Puisque $(D_t)_{t\varepsilon T}$ est infinitésimalement injective en t_o, $F \cap (\{t_o\} \times \mathbb{T}_{t_o}^T - \{0\}) = \emptyset$, donc $\Phi \cap (\{t_o\} \times \mathbb{P}) = \emptyset$, et la projection de Φ sur T_1 (qui est fermée puisque $\mathbb{P}$ est une variété complète) ne contient pas t_o ; son complémentaire est donc un ouvert T_o de T contenant t_o tel que pour tout $t \varepsilon T_o$, $F \cap (\{t_o\} \times \mathbb{T}_{t_o}^T - \{0\}) = \emptyset$; donc pour tout $t \varepsilon T_o$, et tout vecteur non nul $L \varepsilon \mathbb{T}_t^T$, on aura $< (D_t)_{t\varepsilon T}, L > \neq 0$.

<u>Proposition 2.4</u>. - <u>Hypothèses de (1.9)</u>. - <u>Soit</u> t' <u>un point de</u> T' <u>tel que</u> $dg : \mathbb{T}_{t'}^{T'} \to \mathbb{T}_{g(t')}^T$ <u>soit injectif</u>. <u>Si la famille</u> $(D_t)_{t\varepsilon T}$ <u>est infinitésimalement injective en</u> g(t'), <u>alors la famille</u> $(D_{g(t')})_{t'\varepsilon T'}$ <u>est infinitésimalement injective en</u> t'.

C'est une conséquence immédiate de (1.9).

<u>Théorème 2.5</u>. - <u>Soient</u> G <u>un groupe algébrique commutatif</u>, X, S <u>et</u> T <u>trois variétés</u>. <u>Soit</u> $(D_t)_{t\varepsilon T}$ [<u>resp</u>. $(E_s)_{s\varepsilon S}$] <u>une famille algébrique de diviseurs de type</u> G <u>sur</u> X <u>paramétrée par</u> T [<u>resp</u>. S] . <u>Soit</u> $p : S \times T \to T$ <u>la projection canonique</u>. <u>Supposons que</u> :

i) <u>La restriction de</u> p <u>à l'ensemble</u> F <u>des</u> $(s,t) \varepsilon S \times T$ <u>tels que</u> $D_t - E_s = 0$ <u>est propre et bijective</u> (<u>d'image</u> T).

ii) <u>La famille</u> $(E_s)_{s\varepsilon S}$ <u>est infinitésimalement injective</u>. <u>Alors</u> F <u>est irréductible et fermé</u>, <u>et il existe un morphisme</u> $\lambda : T \to F$ <u>tel que</u> $(D_t)_{t\varepsilon T}$ <u>soit l'image réciproque de</u> $(E_s)_{s\varepsilon S}$ <u>par</u> $q \circ \lambda$, <u>où</u> $q : S \times T \to S$ <u>est la projection canonique</u>.

D'après (I,3.2) la famille $(D_{p(s,t)})_{(s,t)\varepsilon S \times T}$ [resp. $(E_{q(s,t)})_{(s,t)\varepsilon S \times T}$] image réciproque de $(D_t)_{t\varepsilon T}$ [resp. $(E_s)_{s\varepsilon S}$] par p [resp. q] est une famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par $S \times T$. Il en est donc de même de la famille $(D_{p(s,t)} - E_{q(s,t)})_{(s,t)\varepsilon S \times T} = (D_t - E_s)_{(s,t)\varepsilon S \times T}$, car si D' [resp. E'] est le diviseur de définition de $(D_{p(s,t)})_{(s,t)\varepsilon S \times T}$ [resp. $(E_{q(s,t)})_{(s,t)\varepsilon S \times T}$], il est clair que $D' - E'$ est un diviseur de définition de $(D_t - E_s)_{(s,t)\varepsilon S \times T}$. Alors, d'après (II,2.5) l'ensemble F des $(s,t)\varepsilon S \times T$ tels que $D_t - E_s = 0$ est fermé dans $S \times T$.

Puisque $p(F) = T$, il existe une composante irréductible F_1 de F telle que $p(F_1)$ soit dense dans T ; puisque F est fermé, et que p est une application fermée, $p(F_1) = T$; et puisque p est bijective $p(F_1) = p(F)$ entraine $F_1 = F$, donc F est irréductible. Nous pouvons donc considérer F comme une sous-variété fermée de $S \times T$.

Il suffit de montrer que la restriction p_1 de p à F est un isomorphisme car alors le morphisme $\lambda : T \to F$ réciproque de p_1 convient puisque, pour tout $t \varepsilon T$, on aura $E_{q\circ\lambda(t)} = D_t$.

Puisque p_1 est par hypothèse un revêtement bijectif de F sur T , il résulte de ([8], exposé 5, Appendice) que pour montrer que p_1 est un isomorphisme, il suffit de montrer que pour tout $(s,t) \varepsilon F$, $dp_1 : \mathbb{T}^F_{(s,t)} \to \mathbb{T}^T_t$ est injectif.

Soient alors $(s,t) \varepsilon F$ et $L \varepsilon \mathbb{T}^{S \times T}_{(s,t)}$ tels que $dp_1(L) = 0$. Alors d'après (1.9) on a :

$$< (E_s)_{s\varepsilon S}, d_q(L) > = < E_q(s,t)_{(s,t)\varepsilon F}, L > = < (D_t)_{t\varepsilon T}, dp_1 (L)) > = 0$$

Alors puisque la famille $(E_s)_{s\varepsilon S}$ est infinitésimalement injective, on a $d_q(L) = 0$. Mais puisque $d_q(L) = 0$ et $d_p(L) = 0$, on a $L = 0$ ([5],chap.VI), C.Q.F.D.

CHAPITRE IV. DIVISEURS DE TYPE H^*, OU H EST UNE SOUS-ALGEBRE COMMUTATIVE DE $GL(r)$.

1. Diviseurs et Idéaux fractionnaires localement principaux inversibles.

1.0. Notations. - Notons M_r l'algèbre des matrices carrées d'ordre r à coefficients dans K. Soit H une sous-algèbre commutative de M_r, contenant l'élément unité, et soit H^* le groupe des éléments inversibles de H. Considérons H^* comme un groupe linéaire commutatif. Notons $\mathcal{H}_X$ [resp. $\mathcal{H}_{+,X}$] le faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres des germes d'applications rationnelles [resp. régulières] de X dans H, et $\mathcal{H}^*_X$ [resp. $\mathcal{H}^*_{+,X}$] le faisceau de groupes abéliens de germes d'applications rationnelles [resp. régulières] de X dans H^*. Notons que $\mathcal{H}_{+,X}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent.

Définition 1.1. - On appelle Idéal fractionnaire de $\mathcal{H}_X$ un faisceau de sous-$\mathcal{H}_{+,X}$-Modules de $\mathcal{H}_X$ qui est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent.

Notons que tout faisceau localement principal de sous-$\mathcal{H}_{+,X}$-modules de $\mathcal{H}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent ; un tel faisceau sera appelé Idéal fractionnaire localement principal de $\mathcal{H}_X$. Un Idéal fractionnaire localement principal $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}_X$ sera dit inversible s'il existe un Idéal fractionnaire localement principal $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{H}_X$ tel que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{H}_{+,X}} \mathcal{F}' \simeq \mathcal{H}_{+,X}$. Notons $FPI(\mathcal{H}_X)$ l'ensemble des Idéaux fractionnaires localement principaux inversibles de $\mathcal{H}_X$.

Lemme 1.2. - Soit $\mathcal{F}$ un Idéal fractionnaire localement principal inversible de $\mathcal{H}_X$. Il existe alors un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\varepsilon X}$, et une famille d'applications rationnelles $(f_i)_{i\varepsilon I}$ de X dans H^* telle que $\forall\, i\varepsilon I$, $\mathcal{F}|U_i = f_i\, \mathcal{H}_{+,X}|U_i$.

Soit $\mathcal{F}'$ un Idéal fractionnaire localement principal de $\mathcal{H}_X$ tel que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{H}_{+,X}} \mathcal{F}' = \mathcal{H}_{+,X}$. Il existe alors un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\varepsilon I}$ de X et une famille $(f_i)_{i\varepsilon I}$ [resp. $(g_i)_{i\varepsilon I}$] d'applications rationnelles de X dans H telle que pour tout $i \varepsilon I$, $\mathcal{F}|U_i = f_i\, \mathcal{H}_{+,X}|U_i$ [resp. $\mathcal{F}'|U_i = g_i\, \mathcal{H}_{+,X}|U_i$]. On sait qu'il y a un isomorphisme canonique de $f_i\, \mathcal{H}_{+,X} \otimes_{\mathcal{H}_{+,X}} g_i\, \mathcal{H}_{+,X}$ sur $f_i\, g_i\, \mathcal{H}_{+,X}$, ce qui montre que $f_i\, g_i$ est une application régulière inversible de U_i dans H, donc une application régulière de U_i dans H^*. Soit alors V_i l'ensemble des $x \varepsilon U_i$ tels que $f_i(x)$ et $g_i(x)$ soient définis ; V_i est un ouvert non vide de X, et pour tout $x \varepsilon V_i$, $f_i(x) \varepsilon H^*$. Donc on peut considérer f_i comme une application rationnelle de X dans H^*, C.Q.F.D.

<u>1.3. Correspondance entre diviseurs de type</u> H* <u>sur</u> X <u>et Idéaux fractionnaires localement principaux inversibles de</u> $\mathcal{H}_X$. - Un diviseur D de type H* sur X est une section du faisceau $\mathcal{H}_X^*/\mathcal{H}^*_{+,X}$; il est donc déterminé par un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\varepsilon I}$ et une famille $(f_i)_{i\varepsilon I}$ d'applications rationnelles de X dans H* telles que pour tout $(i,j) \varepsilon I \times J$, $f_i f_j^{-1}$ soit régulière sur $X_i \cap X_j$. Posons $\mathcal{F}_i = f_i \mathcal{H}_{+,X}$. Alors les faisceaux $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_j$ coïncident sur $X_i \cap X_j$; de plus, chacun des $\mathcal{F}_i$ est inversible, puisque $\mathcal{F}_i \otimes_{\mathcal{H}_{+,X}} f_i^{-1} \mathcal{H}_{+,X} = \mathcal{H}_{+,X}$. Alors la famille des $(\mathcal{F}_i | U_i)_{i\varepsilon I}$ définit par recollement un Idéal fractionnaire localement principal inversible $\mathcal{F}_D$ de $\mathcal{H}_X$, indépendant du système $((U_i)_{i\varepsilon I}, (f_i)_{i\varepsilon I})$ qui définit D. Pour vérifier que $\mathcal{F}$ est bien inversible, il suffit de remarquer que si on pose $\mathcal{F}'_i = f_i^{-1} \mathcal{H}_{+,X}$, la famille $(\mathcal{F}'_i | U_i)_{i\varepsilon I}$ définit par recollement un Idéal fractionnaire localement principal $\mathcal{F}'$ de $_X$ tel que $\mathcal{F}_D \otimes_{\mathcal{H}_{+,X}} \mathcal{F}' = \mathcal{H}_{+,X}$. On appelle $\mathcal{F}_D$ <u>l'Idéal fractionnaire</u> (localement principal inversible de $\mathcal{H}_X$) <u>associé à</u> D.

Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ un Idéal fractionnaire localement principal inversible de $\mathcal{H}_X$. D'après le lemme (1.2), il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\varepsilon I}$ de X, et un système $(f_i)_{i\varepsilon I}$ d'applications rationnelles de X dans H* tel que, pour tout $i\varepsilon I$, $\mathcal{F}|U_i = f_i \mathcal{H}_{+,X}$. Puisque $f_i \mathcal{H}_{+,X} | U_i \cap U_j = f_j \mathcal{H}_{+,X} | U_i \cap U_j$, quels que soient $i,j\varepsilon I$, $f_i f_j^{-1}$ est une application régulière inversible de $U_i \cap U_j$ dans H, donc une application régulière de $U_i \cap U_j$ dans H*, ce qui montre que le système d'ouverts $(U_i)_{i\varepsilon I}$ et d'applications $(f_i)_{i\varepsilon I}$ définit un diviseur $D_{\mathcal{F}}$ de type H* sur X, qu'on appelle <u>diviseur associé à l'Idéal fractionnaire inversible</u> $\mathcal{F}$.

Il est clair que $D_{\mathcal{F}_D} = D$ et que $\mathcal{F}_{D_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$.

<u>Proposition 1.4. - La correspondance bijective définie en 1.3. de</u> $\mathcal{L}(X,H^*)$ <u>sur</u> F P I ($\mathcal{H}_X$) <u>définit une loi de groupe</u> $\circ$ <u>sur</u> F P I ($\mathcal{H}_X$) <u>telle que si</u> $\mathcal{F}$ <u>et</u> $\mathcal{F}'$ <u>sont deux éléments de</u> F P I ($\mathcal{H}_X$), <u>on a</u> : $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}' \simeq \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{H}_{+,X}} \mathcal{F}'$, <u>et dont l'élément neutre est</u> $\mathcal{H}_{+,X}$.

Cela résulte immédiatement de (1.3.) et du fait que si f et g sont deux éléments de $\mathcal{H}_X$, on a un isomorphisme canonique de $f\mathcal{H}_{+,X} \otimes_{\mathcal{H}_{+,X}} g\mathcal{H}_{+,X}$ sur $fg\mathcal{H}_{+,X}$. Enfin il est clair que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{H}_{+,X}$.

<u>Proposition 1.5. - Pour qu'on ait</u> $\mathcal{F}_D \simeq \mathcal{H}_{+,X}$ <u>il faut et il suffit que</u> D <u>soit principal</u>.

En effet dire que $\mathcal{F}_D$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{+,X}$ revient à dire qu'il existe $f\varepsilon \mathcal{H}_X$ tel que $\mathcal{F}_D = f \mathcal{H}_{+,X}$, donc qu'il existe $f \varepsilon \mathcal{H}_X$ tel que

$D = \mathrm{div}_{H^*} f$, C.Q.F.D.

<u>Corollaire 1.6.</u> - <u>Soient</u> D <u>et</u> D' <u>deux éléments de</u> $\mathcal{L}(X,H^*)$. <u>Pour qu'on ait</u> $\mathcal{F}_D \simeq \mathcal{F}_{D'}$, <u>il faut et il suffit que</u> D <u>et</u> D' <u>soient équivalents</u>.

En effet, si $\mathcal{F}_D \simeq \mathcal{F}_{D'}$, $\mathcal{F}_D \circ \mathcal{F}_{D'}^{-1} \simeq \mathcal{F}_D \otimes_{\mathcal{H}_{+,X}} \mathcal{F}_{D'}^{-1} = \mathcal{H}_{+,X}$, donc D - D' est principal. Réciproquement, si D et D' sont équivalents, D - D' est principal, donc $\mathcal{F}_D \circ \mathcal{F}_{D'}^{-1} \simeq \mathcal{H}_{+,X}$ et $\mathcal{F}_D \simeq \mathcal{H}_{+X} \otimes_{\mathcal{H}_{+,X}} \mathcal{F}_{D'} \simeq \mathcal{F}_{D'}$.

2. Diviseurs positifs.

<u>Lemme 2.1.</u> - <u>Soit</u> $\mathcal{A}$ <u>un Idéal fractionnaire de</u> $\mathcal{H}_X$; <u>l'ensemble</u> E <u>des points</u> $x \in X$ <u>tels que</u> $\mathcal{A}_x \not\subset \mathcal{H}_{+,X,x}$ <u>est fermé dans</u> X <u>et distinct de</u> X ; <u>et si</u> $\mathcal{E}$ <u>désigne le faisceau de définition de</u> E , <u>il existe un entier</u> $k > 0$ <u>tel que</u> $\mathcal{E}^k \mathcal{A} \subset \mathcal{H}_{+,X}$.

En effet, si une application rationnelle de X dans H est régulière en un point $x \in X$, elle est régulière en tout point d'un voisinage de x ; il est clair que E est fermé. De plus, $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{H}_{+,X}$-Module de type fini. Soit $(a_1,\dots,a_n)$ un système générateur de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}_{+,X}$ au dessus d'un ouvert affine U de X . Il existe alors $x \in U$ tel que $a_1,\dots,a_n$ soient toutes régulières en x ; alors $x \notin E$, ce qui montre que $E \neq X$.

Il existe un recouvrement fini $(X_i)_{i\in J}$ formé d'ouverts affines. Notons $\mathcal{A}_i$ la restriction de $\mathcal{A}$ à X_i . Il est clair que $\mathcal{A}_i$ est un Idéal fractionnaire de $\mathcal{H}_{+,X_i}$. Notons I la matrice unité d'ordre r , et posons $\pi_i = \{u \in \mathcal{O}_{X_i} / (uI)\mathcal{A}_i \subset \mathcal{H}_{+,X_i}\}$. Alors π_i est un faisceau d'idéaux (au sens ordinaire) de $\mathcal{O}_{X_i}$.

Etant donné $x \in X$, puisque X_i est affine, on vérifie aisément que

$$\pi_i \mathcal{O}_{X_{i,x}} = \{u \in \mathcal{O}_{X_{i,x}} / (uI)\mathcal{A}_i \mathcal{H}_{+,X_{i,x}} \subset \mathcal{H}_{+,X_{i,x}}\} = \{u \in \mathcal{O}_{X_{i,x}} / (uI)\mathcal{A}_x \subset \mathcal{H}_{+,X,x}\}$$

Donc si $x \notin E$, $\pi_i \mathcal{O}_{X_{i,x}} \subset \mathcal{O}_{X_{i,x}}$.

Notons A_i l'ensemble fermé de X_i défini par l'Idéal π_i ; on a donc $A \subset E$. La restriction $\mathcal{E}_i$ de $\mathcal{E}$ à X_i étant l'Idéal de définition du fermé $E \cap X_i$ de X_i , le théorème des zéros de Hilbert montre qu'il existe un entier $k_i > 0$ tel que $\mathcal{E}_i^{k_i} \subset \pi$.

Alors pour tout $x \in X_i$, on a $(\mathcal{E}_i^{k_i})\mathcal{A}_{i,x} = (\mathcal{E}_x)^{k_i} \mathcal{A}_x \subset \mathcal{H}_{+,X,x}$, donc si on pose $k = \sup_{i\in J} k_i$, on a bien, pour tout $x \in X$, $(\mathcal{E}^k_x)\mathcal{a}_x \subset \mathcal{h}_{+,X,x}$ donc $\mathcal{E}^k \mathcal{a} \subset \mathcal{h}_{+,X}$.

Définition 2.2. - Soit $D \in \mathcal{L}(X,H^*)$. On dit que D est positif en un point $x\in X$ si $D_x \in \mathcal{h}_{+,X,x}$. On dit que D est positif lorsque D est positif en tout point de X : on écrit alors $D \geq 0$.

Proposition 2.3. - Soient $D \in \mathcal{L}(X,H^*)$, $x \in X$ et $\mathcal{I}_D$ l'Idéal fractionnaire de $\mathcal{h}_X$ associé à D . Pour que D soit positif [resp. positif au point x], il faut et il suffit que $\mathcal{I}_D \subset \mathcal{h}_{+,X}$ [resp. que $\mathcal{I}_{D,x} \subset \mathcal{h}_{+,X,x}$].

Cela résulte immédiatement des définitions.

Proposition 2.4. - Soient $D \in \mathcal{L}(X,H^*)$ et E l'ensemble des $x \in X$ tels que D ne soit pas positif en x . Alors E est un fermé de X distinct de x , et il existe un entier $k > 0$ tel que pour toute fonction régulière f sur X non identiquement nulle et nulle sur E , $(\mathrm{div}_{H^*} f)^k + D$ soit positif, f étant considérée comme une application rationnelle de X dans H^* au moyen de l'immersion canonique de G_m dans H^* .

C'est une traduction immédiate du lemme 2.1.

Proposition 2.5. - Etant donnés deux éléments D et D' de $\mathcal{L}(X,H^*)$, si on pose $D \geq D'$ si et seulement si $D - D' \geq 0$, on définit sur $\mathcal{L}(X,H^*)$ une relation d'ordre compatible avec la loi de groupe.

Il suffit de montrer que la relation $\geq$ est antisymétrique et que la somme de deux diviseurs positifs est positive. Cette dernière assertion est évidente car le produit de deux applications régulières de X dans H est régulière.

Enfin, supposons que D et $- D$ soient positifs. Soient $x \in X$ et f une application de définition de D en x ; puisque $D \geq 0$, $f \in \mathcal{h}_{+,X,x}$, et puisque $-D \geq 0$, $f^{-1} \in \mathcal{h}_{+,X,x}$, donc f est une application régulière et inversible de X dans H , donc $D_x = 0$. D'où $D = 0$, C.Q.F.D.

Lemme 2.6. - Soient X et T deux variétés, Δ une classe de diviseurs de type H^* sur $X \times T$, t_o un point de T . Il existe alors un diviseur D appartenant à Δ , un voisinage ouvert T_o de t_o dans T et un Idéal fractionnaire $\mathcal{a}$ de $\mathcal{h}_X$ tel que, pour tout $t \in T_o$, $j_t^*(D)$ soit défini (où $j_t : X \to X \times T$ désigne le morphisme $x \rightsquigarrow (x,t)$) et que l'Idéal fractionnaire δ_t de $\mathcal{h}_X$ défini par $j_t^*(D)$ soit un sous-faisceau de $\mathcal{a}$.

Il existe, d'après (I,2.3) un représentant D_1 de Δ tel que $j^*_{t_o}(D_1)$ soit défini. Puisque l'ensemble des $t \in T$ tels que $j^*_t(D_1)$ soit défini est la projection du complémentaire de $\mathrm{Supp}(D_1)$, c'est un ouvert, donc il existe un voisinage ouvert affine T_1 de t_o dans T tel que, pour tout $t \in T_1$ $j^*_t(D_1)$ soit défini.

Soit U_o un ouvert affine de X. Appliquons le lemme (2.1) à l'Idéal fractionnaire $\mathcal{L}_1$ de $\mathcal{H}_{U_o \times T_1}$ associé à la restriction de D_1 à $U_o \times T_1$: il existe un Idéal $\mathcal{E}$ de $\mathcal{O}_{U_o \times T_1}$ et un entier $k > 0$ tels que $\mathcal{E}^k \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{H}_{+,U_o \times T_1}$.

Puisque $j^*_{t_o}(D_1)$ est défini, il existe $x_o \in U_o$ tel que $\mathcal{L}_1(x_o,t_o) \subset \mathcal{H}_{+,T_1 \times U_o}$; donc (x_o,t_o) n'appartient pas à l'ensemble fermé E des $(x,t) \in U_o \times T_1$ tels que $\mathcal{L}_{1(x,t)} \not\subset \mathcal{H}_{+,U_o \times T_1}$. Donc il existe $w \in \mathcal{E}$ tel que $w(x_o,t_o) \neq 0$. Alors, on a : $w^k \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{H}_{+,U_o \times T_1}$. Posons $D = D_1 + \mathrm{div}_{H^*} w^k$ (où w^k est considéré comme une application de X dans H^* grâce à l'immersion canonique de G_m dans H^*). Alors $D \in \Delta$, $j^*_{t_o}(D)$ est défini, et D est positif en tout point de $U_o \times T_1$. Il existe donc un voisinage ouvert T_o de t_o dans T tel que pour tout $t \in T_o$, $j^*_t(D)$ soit défini, et pour $t \in T_o$, $w \circ j_t$ est non nulle.

Soit D' la restriction de D à $X \times T_o$; posons $F = (X-U_o) \times T_o$. Alors D' est positif en tout point de $X \times T_o - F$. Soit $\mathcal{J}$ le faisceau de définition de F. D'après le lemme 2.1., si on note $\mathcal{L}'$ l'Idéal fractionnaire de $\mathcal{H}_{X \times T_o}$ associé à D', il existe un entier $k' > 0$ tel que $\mathcal{J}^{k'} \mathcal{L}' \subset \mathcal{H}_{+,X \times T_o}$.

Soit enfin $\mathcal{G}$ le faisceau de définition de $X-U_o$ dans X, et soit $\mathcal{a}$ le transporteur de $\mathcal{G}^{k'}$ dans $\mathcal{H}_{+,X}$. Puisque $\mathcal{H}_{+,X}$ et $\mathcal{G}$ sont des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents, il en est de même de $\mathcal{a}$, donc $\mathcal{a}$ est un Idéal fractionnaire de $\mathcal{H}_X$. Puisque $\mathcal{J}^{k'} \mathcal{L}' \subset \mathcal{H}_{+,X \times T_o}$, on a $\mathcal{G}^{k'} \delta_t \subset \mathcal{H}_{+,X}$, où δ_t désigne l'Idéal fractionnaire associé à $j^*_t(D)$, quel que soit $t \in T_o$, donc $\delta_t \subset \mathcal{a}$, C.Q.F.D.

3. Diviseurs et fibrés de fibre H et de groupe H*.

3.1. Correspondances entre diviseurs de type H* sur X et fibrés localement triviaux de base X, de fibre H à groupe d'opérateurs H*.

Soit D un diviseur de type H^* sur X. Soit $(U_i)_{i\in T}$ un système d'ouverts et $(f_i)_{i\varepsilon I}$ un système d'applications rationnelles de X dans H^* définissant D. Il résulte de ([23]) que les systèmes des U_i et des f_i définit un fibré localement trivial de base X, de fibre H à groupe d'opérateurs H^* opérant de façon naturelle sur H, et une section rationnelle inversible de ce fibré, et que deux systèmes d'ouverts et d'applications rationnelles qui définissent D définissent deux fibrés isomorphes de fibre H à groupe d'opérateurs H^*, et deux sections rationnelles inversibles se correspondant dans cet isomorphisme. Donc, à un isomorphisme près, D définit un fibré de base X, de fibre H, à groupe d'opérateurs H^*, et une section rationnelle inversible de ce fibré.

Soit maintenant F un fibré localement trivial de base X, de fibre H à groupe d'opérateur H^*, et soit σ une section rationnelle et inversible de F. Alors σ définit un diviseur de type H^* sur X de la manière suivante : soit $(U_i)_{i\varepsilon I}$ un recouvrement ouvert de X tel que, pour tout $i \varepsilon I$, la restriction de F à U_i soit triviale. On a alors un isomorphisme canonique de $F|U_i$ sur $U_i \times H$; nous identifierons donc $U_i \times H$ à $F|U_i$. Notons p_i : $U_i \times H \to H$ la projection canonique. L'hypothèse faite sur σ revient à dire, que l'ensemble des $x \varepsilon U_i$ tels que $p_i \circ \sigma$ soit régulière et inversible en x est un ouvert non vide de U_i, donc que $p_i \circ \sigma$ peut être considérée comme une application rationnelle de X dans H^*. Soit ϕ_{ij} le changement de cartes faisant passer de $U_j \times H$ à $U_i \times H$; alors $p_i \circ \sigma = \phi_{ij} \circ (p_j \circ \sigma)$. Puisque ϕ_{ij} est une application régulière de $U_i \cap U_j$ dans H^*, il en est de même de $(p_j \circ \sigma)^{-1} . (p_i \circ \sigma)$. Ce qui montre que le système d'ouverts $(U_i)_{i\varepsilon I}$ et d'applications rationnelles $(p_i \circ \sigma)_{i\varepsilon I}$ de X dans H^* définit un diviseur D_σ de type H^* sur X.

Soit maintenant σ' une autre section rationnelle et inversible de F, et soit $D_{\sigma'}$ le diviseur défini par σ'. Pour tout $i \varepsilon I$, $p_i \circ \sigma = (p_i \circ \sigma') . (\sigma'^{-1} . \sigma)$ ce qui montre que $D_\sigma = D_{\sigma'} + \mathrm{div}_{H^*}(\sigma'^{-1} . \sigma)$, où $\sigma'^{-1} . \sigma$ s'interprète comme une application rationnelle de X dans H^*, ce qui montre que D_σ et $D_{\sigma'}$ sont équivalents.

Enfin, il résulte des définitions que F est, à isomorphisme près le fibré défini par D_σ.

Lemme 3.2. - Soit D un diviseur de type H^* sur X, et soient $x_1, \ldots, x_m$ un nombre fini de points de X appartenant à un même morceau affine de X. Il existe alors une application rationnelle de X dans H^* qui soit application de définition de D en chacun des x_i, pour $1 \leq i \leq m$.

Il est clair qu'on peut supposer X affine. Soit F le fibré de base X, de fibre H à groupe d'opérateurs H^* défini (à isomorphisme près) par D, et soit $\mathcal{F}$ le faisceau des germes de sections régulières de F. Il est clair que $\mathcal{F}$ est une $\mathcal{O}_X$ - Algèbre cohérente. Donc $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ ([17], II, parag.3, corollaire 1 à la proposition 7). Soit $\mathcal{I}_Y$ le faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ défini par le fermé $Y = \{x_1,\dots,x_m\}$. On a une suite exacte :

$$0 \to H^\circ(X, \mathcal{I}_Y \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^\circ(X, \mathcal{F}/\mathcal{I}_Y \mathcal{F}) \to 0$$

puisque $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Le faisceau $\mathcal{F}/\mathcal{I}_Y \mathcal{F}$ s'interprète comme le faisceau des germes de sections régulières du fibré F_Y induit par F sur Y. Comme F_Y est isomorphe à H^m, il est clair qu'il existe une section régulière de F_Y inversible en tout point de Y. Cette section correspond à un élément $\theta \in H^\circ(X, \mathcal{F}/\mathcal{I}_Y \mathcal{F})$ qui se relève en un élément $\bar{\theta} \in H^\circ(X, \mathcal{F})$, auquel correspond une section régulière f de F inversible aux points $x_1,\dots,x_m$. Cette section définit un diviseur E de type H^* sur X équivalent à D, et f est une application de définition de E en chacun des points $x_1,\dots,x_m$. Il existe une application rationnelle g de X dans H^* telle que $D = E + (\mathrm{div}_{H^*} g)$ et il est clair que $f\,g$ est une application de définition de D en chacun des points $x_1,\dots,x_m$, C.Q.F.D.

CHAPITRE V. CONTINUITE DES FAMILLES ALGEBRIQUES DE CLASSES DE DIVISEURS.

1.- Familles algébriques de classes de diviseurs paramétrées par un espace vectoriel.

1.1. Définition.- Une variété X est dite semi-complète, si pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_X$, $H^\circ(X,\mathfrak{a})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur K.

Rappelons ([9] I.1) que toute fonction régulière sur une variété semi-complète est constante, on en déduit immédiatement que toute application régulière de X dans une variété affine est constante.

Toute variété complète est semi-complète ([18]).

1.2. Notations A, A*, A^*_u

Notons A_r (ou simplement A) la sous-algèbre de l'algèbre M_r des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans K formées des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-2} & a_{r-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \ddots & & a_{r-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

A est canoniquement isomorphe à $(G_a)^r$, en tant que variété affine. Notons A^*_r (ou simplement A^*) le groupe des éléments inversibles de A, considéré comme groupe linéaire commutatif, et $A^*_{u,r}$ (ou simplement A^*_u) le sous-groupe de A^* formé des éléments unipotents de A^*.

Etant donné un groupe algébrique G, nous dirons que G est de type A^* (resp. A^*_u) s'il existe un entier r et un isomorphisme de G sur A^*_r (resp. $A^*_{u,r}$).

Il est clair que A^*_r est, en tant que variété, isomorphe à $G_m \times (G_a)^{r-1}$ et est muni d'un système de coordonnées tel que si on note $(h_o, \ldots, h_{r-1})$ les coordonnées d'un élément $h \in A^*_r$, on a $(h\,h')_o = h_o\,h'_o$ et $(h\,h')_i = h_o\,h'_i + h_1\,h'_{i-1} + \ldots + h_i\,h'_o$ pour i de 1 à r.
Enfin $A^*_{u,r}$ est formé des $h \in A^*_r$ tels que $h_o = 1$.

Proposition 1.3.- Soient X une variété semi-complète, et V un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications rationnelles de X dans A ; notons V_i, pour i de 0 à n, l'espace vectoriel des coordonnées d'indice i des éléments de V, et soit ϕ_o une application rationnelle de X dans K^* telle que, quel que soit i de 0 à n, on ait $\phi_o \notin V_o + V_i$. Alors la famille $(\mathrm{div}_{A^*}(\phi_o I + \sigma))_{\sigma \in V}$ est une famille algébrique de diviseurs de type A^* sur X paramétrée par V injective et infinitésimalement injective, I désignant la matrice unité d'ordre r.

Il est clair que l'application $(x,\sigma) \rightsquigarrow \phi_o(x)\, I + \sigma(x)$ est une application rationnelle de $X \times V$ dans A^* et que le diviseur principal défini par cette application est un diviseur de définition de la famille $(\mathrm{div}_{A^*}(\phi_o I + \sigma))_{\sigma \in V}$ ce qui montre que cette famille est algébrique.

1.3.1. 1ère étape. Montrons que cette famille est injective. Soient σ et σ' deux éléments de V tels que $\mathrm{div}_{A^*}(\phi_o I + \sigma) = \mathrm{div}_{A^*}(\phi_o I + \sigma')$. Alors $(\phi_o I + \sigma)(\phi_o I + \sigma')^{-1}$ est une application régulière de X dans A^*, donc une constante. Il existe donc $h \in A^*$ tel que $h(\phi_o I + \sigma) = \phi_o I + \sigma'$. Montrons que, quel que soit l'entier k tel que $1 \leqq k \leqq n$, on a $h_k = 0$. Raisonnons par récurrence sur k.

Montrons d'abord que $h_o = 1$; nous avons :

$h_o(\phi_o + \sigma_o) = \phi_o + \sigma'_o$, donc $\phi_o(h_o - 1) = \sigma'_o - \sigma_o \in V_o$. Puisque $\phi_o \notin V_o$, on a $h_o = 1$.

Supposons maintenant que $h_1 = \ldots = h_{k-1} = 0$, et montrons que $h_k = 0$. Puisque $h_o = 1$ et que $h_1 = \ldots = h_{k-1} = 0$, on a $(h(\phi_o I + \sigma))_k = (\phi_o + \sigma_o)h_k + \sigma_k = \sigma'_k$, d'où :

$$h_k\,\phi_o = \sigma'_k - \sigma_k - h_k\,\sigma_o \in V_o + V_k .$$

Puisque $\phi_o \notin V_o + V_k$, on a $h_k = 0$. Nous avons donc montré que h est l'élément neutre de A^*, donc que $\sigma = \sigma'$, c.q.f.d.

1.3.2. 2ème étape. Montrons maintenant que la famille $(\mathrm{div}_{A^*}(\phi_o I+\sigma))_{\sigma\in V}$ est infinitesimalement injective. Soit $L \in \mathbb{T}_\tau^V$ un vecteur tangent à V en un point $\tau\in V$. Puisque $\mathbb{T}_o^{A_u^*}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{T}_o^{G_a^{r-1}}$, donc à $(G_a)^{r-1}$, et que $\mathbb{T}_1^{G_m}$ est canoniquement isomorphe à G_a ; $\mathbb{T}_I^{A^*}$ est canoniquement isomorphe à $(G_a)^r$. Notons Σ le diviseur de définition de la famille $(\mathrm{div}_{A^*}(\sigma_o I+\sigma))_{\sigma\in V}$, et $<\Sigma, L>_i$ la composante d'indice i de $<\Sigma, L>$

Supposons que $<\Sigma, L>=0$. Soit $(\phi_i^k)_{i\in I_k}$ une base de V_k ; posons $\alpha_i^k = d\lambda_i^k(L)$, où λ_i^k est la composante d'indice i de V_k par rapport à la base $(\phi_i^k)_{i\in I}$. Montrons par récurrence sur k, que pour tout $i\in I_k$, $\alpha_i^k=0$
Si $k=-1$, il n'y a rien à démontrer ; supposons qu'on ait $\alpha_i^1=0$, $\alpha_i^2=0,\ldots$ $\alpha_i^{k-1}=0$ pour tout indice i. Alors, quel que soit $\sigma\in V$, $d\sigma_q(L)=0$, pour tout entier q tel que $0\leq q\leq k-1$.
Un calcul facile montre que :

$$<\Sigma,L>_k = \mathrm{div}_{\mathbb{T}_I^{A^*}}\{(\phi_o+\tau_o)^{-1}[\sum_{i\in I_k}\alpha_i^k\ \phi_i^k + \sum_{q=o}^{k-1} P'_{qk}\left(\frac{\tau_1}{\tau_o+\phi_o},\ldots,\frac{\tau_{k-1}}{\tau_o+\phi_o}\right)d\sigma_q(L)]\}$$

où les P'_{qk} sont des polynômes. Donc $<\Sigma,L>_k = \mathrm{div}_{\mathbb{T}_I^{A^*}}[(\phi_o+\tau_o)^{-1}\sum_{i\in I_k}\alpha_i^k\ \phi_i^k]=0.$

Donc l'application $(\phi_o+\tau_o)^{-1}\sum_{i\in I_k}\alpha_i^k\ \phi_i^k$ est une application régulière de X dans G_a, donc une constante, puisque X est semi-complète. Il existe donc $\alpha_o^h\in k$ tel que :

$$\alpha_o^k\ \phi_o = -\alpha_o^k\ \tau_o + \sum_{i\in I_k}\alpha_i^k\ \phi_i^k \in V_k+V_o\ .\ \text{Puisque}\ \phi_o\notin V_k+V_o$$

on a $\alpha_o^k=0$ et puisque $(\phi_i^k)_{i\in I_k}$ est une base de V_k, on a $\alpha_i^k=0$ quel que soit $i\in I_k$ c.q.f.d.

On a montré que toutes les composantes de L sont nulles, donc $L=0$, ce qui termine la démonstration de la proposition.

Proposition 1.4.- Hypothèses de (1.3), V étant de plus supposé de dimension finie. Soient de plus T une variété, w une fonction rationnelle sur $X\times T$ telle que pour tout $t\in T$, l'application $x \rightsquigarrow w(x,t)$ soit définie et non nulle, I la matrice unité d'ordre r, et $(D_t)_{t\in T}$ une famille algébrique de diviseurs de type A_u^* paramétrée par T sur X. Notons $j_t : X\to T$ le morphisme $x\rightsquigarrow(x,t)$ Supposons qu'il existe une partie partout dense B de T telle que, pour tout $t\in B$, il existe $\sigma\in V$ tel que $(w\,I)\,D_t = \mathrm{div}_{A^*}(\phi_o I+\sigma)$. Alors, l'ensemble

<u>des $t \in T$ tels qu'il existe $\sigma \in V$ tel que $(w\ I)\ D_t = \mathrm{div}_{A*}\ (\phi_o\ I + \sigma)$</u> est <u>un ouvert non vide T' de T, l'ensemble T'' des $t \in T$ tels que</u> :

$$\mathrm{div}_{G_m}\ w \otimes j_t = \mathrm{div}_{G_m}\ (\phi_o + \sigma_o), \ \underline{\text{où}}\ \ \sigma_o \in V_o\ \ \underline{\text{est égal à}}\ \ T',$$

<u>et il existe un morphisme</u> $\rho : T' \to V$ <u>tel que</u> $((w\ I)D_t)_{t\in T'}$ <u>soit l'image réciproque par</u> ρ <u>de la famille</u> $(\mathrm{div}_{A*}\ (\phi_o\ I + \sigma))_{\sigma\in V}$.

Posons $W = \phi_o\, k \oplus V$; l'espace des droites issues de l'origine dans W est isomorphe à l'espace projectif $\mathcal{P}(V)$ associé à V. Considérons V comme plongé dans $\mathcal{P}(V)$ au moyen de l'application qui à $\sigma \in V$ fait correspondre la droite issue de l'origine dans W passant par $\phi_o\ I + \sigma$. Notons λ_o la coordonnée d'homogénisation. Alors V est le complémentaire dans $\mathcal{P}(V)$ du fermé d'équation $\lambda_o = 0$.

<u>1.4.1. lère étape. Montrons que la famille</u> $(\mathrm{div}_{A*}\ (\phi_o\ I + \sigma)) - ((wI)D_t))_{(\sigma,t)\in V\times T}$ <u>est une famille algébrique</u>. Si on pose D le diviseur de définition de $(D_t)_{t\in T}$, et Σ celui de $(\mathrm{div}_{A*}\ (\phi_o\ I + \sigma))_{\sigma\in V}$, et p_1 et q_1 les projections de $V\times T$ sur T et V respectivement, il est clair que $- p^*(((wI)D) + q^*(\Sigma)$ est un diviseur de définition de la famille $(\Delta_{\sigma,t})_{(\sigma,t)\in V\times T} = ((\mathrm{div}_{A*}(\phi_o\ I + \sigma) - ((wI)D_t))_{(\sigma,t)\in V\times T}$ qui est donc algébrique. Nous poserons $D'_t = (wI)D_t$ et $D' = (wI)D$.
Notons F l'ensemble de $(\sigma,t) \in V\times T$ tels que $\Delta_{\sigma,t} = 0$. D'après (II.2.5), F est un fermé de $V\times T$. Notons T' la projection de F sur T : c'est bien l'ensemble des $t \in T$ tels qu'il existe $\sigma \in V$ tel que $D'_t = \mathrm{div}_{A*}\ (\phi_o\ I + \sigma)$.
Par construction, $B\subset T'$, donc T' est une partie dense de T.

<u>1.4.2. 2ème étape</u>. <u>Montrons que F est fermé dans $\mathcal{P}(V)\times T''$</u>. Soit :

$$(\sigma^1, t_1) \in (\mathcal{P}(V) - V) \times T'',$$

et supposons que (σ^1, t_1) soit adhérent à F. Alors $\lambda_o(\sigma^1) = 0$ puisque $\sigma^1 \notin V$. Soit $(\phi_1, \dots, \phi_m)$ une base de V, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ le système de coordonnées de V relatif à cette base. Alors $(\lambda_o, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est un système de coordonnées homogènes de $\mathcal{P}(V)$. Il existe un indice i tel que $\lambda_i(\sigma^1) \neq 0$. Notons V_i l'ouvert de $\mathcal{P}(V)$ d'équation $\lambda_i \neq 0$, et considérons $\sigma \in V_i$ et l'application $s^\sigma : X \to A^*$ définie par :

$$x \rightsquigarrow \sum_{j=o}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_i}\ \phi_i(x)\ .$$

Il est clair que l'application $(x,\sigma,t) \rightsquigarrow s^\sigma(x)\ z(x,t)$, (où z est une application rationnelle de $X\times T$ dans A^*), est une application rationnelle de $X\times U_i\times T$ dans A^*.

Soient $x_o \in X$; alors, puisque D est un diviseur de type A^*_u sur $X \times T$, toute application de définition z' de D en (x_o,t_1) est telle que $z'_o = 1$. Alors $z = ((wI)z')^{-1}$ est une application de définition de $(D')^{-1}$ en (x_o,t_1) telle que $z_o = w^{-1}$. Soit $\mathcal{F}$ le fermé de $X \times T$ hors duquel z est application de définition de $(D')^{-1}$. Alors, quels que soit $(\sigma,t) \in F \cap (U_1 \times T)$, l'application $s^{\sigma}(z \otimes j_t)$ est régulière sur $X - i_t \; (\mathcal{F} \cap X \times \{t\})$, puisque $(D'_t)^{-1} = \mathrm{div}_{A^*}(\phi_o + \sigma)$, $j_t : X \to X \times T$ désignant comme toujours le morphisme $x \rightsquigarrow (x,t)$, et i_t désignant l'isomorphisme canonique de $X \times \{t\}$ sur X. Mais d'après (II.1.2.), l'ensemble des $(\sigma,t) \in U_1 \times T$ tels que $s^{\sigma}(z \otimes j_t)$ soit régulière hors de $i_t \; (\mathcal{F} \cap X \times T)$ est fermé dans $U_1 \times T$; donc puisque (σ^1,t_1) est adhérent à F, si on pose $s^1 = s^{\sigma_1}$, $s^1 (z \otimes j_{t_1})$ est régulière en x_o.

Montrons alors, par récurrence sur j de 0 à n, que $s^1_j = 0$. Tout d'abord, si $\psi_1, \dots, \psi_n$ désigne une base de V_o, et si $(\mu_o, \dots, \mu_n)$ sont les coordonnées de s^1_o relatives à cette base, on a $(s^1(z \otimes j_{t_1}))_o = (\mu_1\psi_1 + .. + \mu_n\psi_n)(z_o \otimes j_{t_1})$ puisque $\lambda_o(s^1) = 0$, c'est-à-dire :

$$(s^1(z \otimes j_{t_1})_o = (\mu_1\psi_1 + \dots + \mu_n\psi_n)(w^{-1} \otimes j_{t_1}).$$

Donc $(s^1(z \otimes j_{t_1}))_o$ ne dépend pas du choix de l'application de définition z en (x_o,t_1) telle que $z_o = w^{-1}$, donc $(s^1(z \otimes j_{t_1}))_o$ ne dépend pas du choix de $x_o \in X$. On a vu que $(s^1(z \otimes j_{t_1}))_o$ est régulière en x_o, elle est donc régulière en tout point de X, donc constante.

Or, puisque $t_1 \in T''$ il existe $\sigma'^1 \in V_o$ telle que $\mathrm{div}_{G_m}(w \otimes j_{t_1}) = \mathrm{div}_{A^*}(\phi_o I + \sigma'^1)$, donc, il existe une fonction régulière non nulle sur X, donc constante C_o, telle que :

$$w(x,t_1) = C_o[\phi_o(x) + \mu'_1 \psi_1(x) + \dots + \mu'_n \psi_n(x)].$$

au total, on a donc montré que l'application

$$\frac{\mu_1 \psi_1 + \dots + \mu_n \psi_n}{\phi_o + \mu'_1 \psi_1 + \dots + \mu'_n \psi_n} \quad \text{est constante.}$$

Il existe donc $\lambda_o \in K$ tel que $\lambda_o \phi_o = (\mu_1 - \lambda_o \mu'_1)\psi_1 + \dots + (\mu_n - \lambda_o \mu'_n)\psi_n \in V_o$

puisque $\phi_o \notin V_o$, cela entraîne que $\lambda_o = 0$, donc, puisque $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ est une base de V_o, que $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$. Donc $s^1_o = 0$.

Supposons maintenant qu'on ait $s_o^1 = \ldots = s_{j-1}^1 = 0$. Soit $(\psi'_1 \ldots \psi'_m)$ une base de V_j et soient $\mu_1, \ldots, \mu_m$ les coordonnées de s_j^o par rapport à cette base. On a alors

$$(s^1(z \circ j_{t_1}))_j = (\mu_1 \psi'_1 + \ldots + \mu_m \psi'_m)(z_o \circ j_{t_1}) = (\mu_1 \psi_1 + \ldots + \mu_m \psi_m)(w^{-1} \circ j_{t_1})$$

Donc $s^1(z \circ j_{t_1})_j$ est indépendant du choix de x_o. On a vu que $(s^1(z \circ j_{t_1}))_j$ est régulière en x_o, elle est donc régulière en tout point de X, donc constante. On a donc montré que l'application :

$$\frac{\mu_1 \psi'_1 + \ldots + \mu_m \psi'_m}{\phi_o + \mu'_1 \psi_1 + \ldots + \mu'_m \psi_m} \quad \text{est une constante } \lambda_o .$$

Donc $\lambda_o \phi_o = \mu_1 \psi'_1 + \ldots + \mu_m \psi'_m - \lambda_o (\mu'_1 \psi_1 + \ldots + \mu'_m) \psi_m \in V_j + V_o$.

Or, $\phi_o \notin V_o + V_j$, donc $\lambda_o = 0$; puisque $(\psi'_1, \ldots, \psi'_m)$ est une base de V_i, on en déduit que $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$, donc que $s_j^1 = 0$

On a donc démontré que pour tout j de 1 à n, $s_j^o = 0$, ce qui est absurde, puisque il existe $i \neq 0$ tel que $\lambda_i(s^1) \neq 0$. Donc $(\mathcal{F}(V)-V) \times T''$ ne contient aucun point adhérent à F, ce qui signifie, puisque F est fermé dans $V \times T$, que F est fermé dans $V \times T''$. Comme il est clair que $T' \subset T''$, nous avons aussi montré que F est fermé dans $V \times T'$.

<u>1.4.3. 3ème étape</u>. <u>Fin de la démonstration</u>. Puisque F est fermé à la fois dans $\mathcal{F}(V) \times T''$ et dans $V \times T$, si on note $\bar{F}$ l'adhérence de F dans $\mathcal{F}(V) \times T$, on a $\bar{F} - F \subset (\mathcal{F}(V)-V) \times T-T''$. Or il est clair que, puisque $F \subset V \times T'$, on a $\bar{F} \cap [(\mathcal{F}(V)-V) \times T-T'] \subset \bar{F}-F$; en particulier $\bar{F}-F = \bar{F} -(V \times T)$, si bien que F est ouvert dans $\bar{F}$.

D'autre part, puisque $\mathcal{F}(V)$ est une variété complète et que T' est dense dans T, la projection de $\bar{F}$ sur T est égale à T, et par conséquent $T - T'$ est la projection sur T de $\bar{F} - F$, donc $T - T'$ est fermé, ce qui montre que T' est ouvert dans T, et $T - T' = T - T''$, donc $T'' = T'$.

Puisque $\mathcal{F}(V)$ est une variété complète, la projection de $\bar{F}$ sur T est un morphisme propre, il en est donc de même de la projection de F sur T'. Puisque la famille $(\mathrm{div}_{A*}(\phi_o I + \sigma))_{\sigma}$ est injective (1.3), la projective de F sur T' est injective, donc bijective. Nous sommes alors sous les hypothèses de (III.2.5). Il existe donc un morphisme $\lambda : T' \to F$ tel que $(D_t)_{t \in T}$ soit l'image réciproque de $(\mathrm{div}_{A*}(\phi_o I + \sigma))_{\sigma \in V}$ par le morphisme $\rho = q_1 \circ \lambda : T \to V$.

Cas particulier 1.5.- Soient X une variété semi-complète, V un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace vectoriel des fonctions rationnelles sur X, $(\phi_1,\dots,\phi_n)$ une base de V, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ les coordonnées de V relatives à cette base, ϕ_o une fonction rationnelle sur X n'appartenant pas à V, $\mathcal{P}(V)$ l'espace projectif associé à V, λ_o la coordonnée d'homogénisation ; T une variété, w une fonction rationnelle sur $X \times T$ telle que pour tout $t \in T$, l'application $x \rightsquigarrow w(x,t)$ soit définie non nulle. Notons $j_t : X \to X \times T$ le morphisme $x \rightsquigarrow (x,t)$, et supposons qu'il existe une partie dense B de T telle que pour tout $t \in B$, il existe $\lambda_1^t,\dots,\lambda_n^t \in K$ tels que :

$$\operatorname{div}_{G_m} w \circ j_t = \operatorname{div}_{G_m}(\phi_o + \lambda_1^t \phi_1 + \dots + \lambda_n^t \phi_n).$$

Alors pour tout $t \in T$, il existe $\lambda_o^t,\dots,\lambda_n^t \in K$ tels que :

$$\operatorname{div}_{G_m}(w \circ j_t) = \operatorname{div}_{G_m}(\lambda_o^t \phi_o + \lambda_1^t \phi_1 + \dots + \lambda_n^t \phi_n). \quad \text{(cf [8]).}$$

Etant donné un point de $\mathcal{P}(V)$ de coordonnées homogènes $(\lambda_o, \lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_o \phi_o + \dots + \lambda_n \phi_n$ est défini à un facteur constant près, et définit un diviseur principal qu'on notera $\operatorname{div}_{G_m}(\lambda_o \phi_o + \dots + \lambda_n \phi_n)$. Montrons d'abord que la famille $(\operatorname{div}_{G_m}(\lambda_o \phi_o + \dots + \lambda_n \phi_n))$ est une famille algébrique de diviseurs de type G_m sur X paramétrée par $\mathcal{P}(V)$. Soit U_i l'ouvert de $\mathcal{P}(V)$ d'équation $\lambda_i \neq 0$. L'application ψ_i de $X \times U_i$ dans G_m définie par $\psi_i(x,(\lambda_o,\dots,\lambda_n)) = \sum_{j=o}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \phi_i(x)$ est une application rationnelle de $X \times U_i$ dans G_m. Etant donné $(\lambda_o,\dots,\lambda_n) \in U_i \cap U_{i'}$, on a

$$\psi_i(x,(\lambda_o,\dots,\lambda_n))(\psi_{i'}(x,(\lambda_o,\dots,\lambda_n)))^{-1} = \frac{\lambda_{i'}}{\lambda_i}$$

qui est une application régulière de $X \times \mathcal{P}(V)$ dans G_m, donc le système d'ouverts $(X \times U_i)_{i=0}^{n}$ et d'applications rationnelles $(\psi_i)_{i=0}^{n}$ définit un diviseur Δ de type G_m sur $X \times \mathcal{P}(V)$ qui est diviseur de définition de la famille $(\operatorname{div}_{G_m}(\lambda_o \phi_o + \dots + \lambda_n \phi_n))_{(\lambda_o,\dots,\lambda_n) \in \mathcal{P}(V)}$.

Si on note p et q les projections de $\mathcal{P}(V) \times T$ sur T et $\mathcal{P}(V)$ respectivement, alors $-(p^*(w)) + q^*(\Delta)$ est un diviseur de définition de la famille $\operatorname{div}_{G_m}(\lambda_o \phi_o + \dots + \lambda_n \phi_n)(w \circ j_t)^{-1}$ qui est donc une famille algébrique de diviseurs de type G_m sur X paramétrée par $\mathcal{P}(V) \times T$. Alors l'ensemble Φ des $((\lambda_o,\dots,\lambda_n),t) \in \mathcal{P}(V) \times T$ tels que $\operatorname{div}_{G_m}(\lambda_o \phi_o + \dots + \lambda_n \phi_n) = \operatorname{div}_{G_m} w \circ j_t$

est un fermé Φ de $\mathcal{P}(V) \times T$ (II 2.5). Puisque $\mathcal{P}(V)$ est une variété complète, la projection T_1 de Φ sur T est fermée dans T. Mais, par hypothèse $B \subset T_1$, et B est partout dense dans T, donc $T_1 = T$, c.q.f.d.

2. Théorème de continuité des familles algébriques de classe de diviseurs.

2.0. Notations et hypothèses.- Dans ce numéro, nous considérons une variété semi-complète X, une variété T quelconque et un groupe algébrique linéaire commutatif G. Nous nous proposons de démontrer le théorème fondamental suivant.

Théorème 2.1.- Soient X une variété semi-complète, T une variété quelconque, G un groupe linéaire commutatif, $(D_t)_{t\in T}$ une famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par T de diviseur de définition D. Supposons qu'il existe une partie B de T partout dense dans T telle que, pour tout $t \in B$, D_t soit principal. Alors, quel que soit $t_o \in T$, il existe un ouvert T_o de T contenant t_o et une application rationnelle ϕ de $X \times T_o$ dans G telle que la restriction de D à $X \times T_o$ soit égale à $\mathrm{div}_G\, \phi$. En particulier, quel que soit $t \in T$, D_t est principal.

Lemme 2.2.- Soient X une variété semi-complète, T une variété, H un groupe algébrique connexe linéaire commutatif (noté additivement), G un sous-groupe connexe de H, D un diviseur de type G sur $X \times T$. Supposons que pour tout $t \in T$, $j_t^*(D)$ soit défini (où $j_t : X \to X \times T$ désigne le morphisme $x \mapsto (x,t)$), qu'il existe une partie A de T dense dans T telle que pour tout $t \in A$, $j_t^*(D)$ soit principal, et que $i \circ D$ soit principal, où $i : G \to H$ est l'immersion canonique. Alors, quel que soit $t_o \in T$, il existe un voisinage ouvert T_o de t_o dans T, tel que la restriction de D à $X \times T_o$ soit un diviseur principal.

Etant donné $t \in A$, il existe une application rationnelle ϕ_t de X dans G telle que $j_t^*(D) = \mathrm{div}_G\, \phi_t$. De même, il existe une application rationnelle f de X dans H telle que $i \circ D = \mathrm{div}_H\, f$. Soit $p : H \to H/G$ la projection canonique : puisque pour tout $t \in T$, $j_t^*(D)$ est défini, il en est de même de $f \odot j_t$. Pour tout $t \in A$, posons $h_t = f \odot j_t - \phi_t$. Alors h_t est une application régulière de X dans H, puisque $\mathrm{div}_H\, h_t = 0$. Puisque X est une variété semi-complète, et que H est une variété affine, h_t est constante. Il en est donc de même de $p \circ h_t = p \circ f \odot j_t$; donc, quel que soit $t \in A$, $p \circ f \odot j_t$ est constante. On en déduite aisément (en se ramenant par exemple au cas où X, T et G/H sont des variétés affines) que $p \circ f$ est de la forme $\psi \circ \pi$, où $\pi : X \times T \to T$ est la projection canonique, et où ψ est une application rationnelle de T dans H/G définie en tout $t \in T$ tel que $p \circ f \odot j_t$ soit défini ;

donc en fait ψ est une application régulière de X dans H/G.

Puisque G est un sous-groupe linéaire, donc résoluble, d'après ([16]), il existe une section rationnelle σ de p. Il existe $h \in H$ tel que σ soit régulière en h, et $g \in G$ tel que $p(g) = h - \psi(t_o)$; soit T_o l'ouvert de définition de l'application rationnelle $\sigma \circ (p(g) + \psi)$ de T dans H. Il est clair que $t_o \in T_o$. De plus $p \circ (f + g - \sigma\circ(p(g) + \psi \circ \pi)) = p \circ f - \psi \circ \pi = 0$ ce qui montre que $f + g - \sigma\circ(p(g) + \psi \circ \pi)$ est une application rationnelle de X dans G. Puisque $\sigma\circ(p(g) + \psi \circ \pi)$ est régulière sur $X \times T_o$, la restriction de D à $X \times T_o$ est égale à $\mathrm{div}_G(f+g- \sigma\circ(p(g)+ \psi\circ \pi))$, donc est principale, c.q.f.d.

<u>Proposition 2.3.- Le théorème 2.1 est vrai pour tout groupe algébrique connexe linéaire unipotent de type</u> A^*_u .

Un tel groupe G peut être considéré comme isomorphe au sous-groupe commutatif des éléments unipotents de A^*. Notons $\mathfrak{A}_X$[resp. $\mathfrak{A}_{+,X}$] le faisceau de $\mathcal{C}_X$ - algèbres des germes d'applications rationnelles [resp. régulières] de X dans A et $\mathfrak{A}^*_X$ [resp. $\mathfrak{A}^*_{+,X}$] le faisceau de groupes abéliens de germes d'applications rationnelles [resp. régulières]de X dans A^* . Notons $i : A^*_u \to A^*$ l'immersion canonique. Etant donné une application rationnelle f d'une variété dans A, nous noterons f_i sa coordonnée d'indice i (cf. 1.2.).

Posons $D_1 = i \circ D$; alors, puisque $D_1 \odot j_{to}$ est défini, la démonstration du lemme (IV, 2.6.) montre qu'il existe un ouvert T_1 de T contenant t_o, un Idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{A}_X$, et une fonction rationnelle non nulle w sur $X \times T$ telle, si on pose $D' = D_1 + \mathrm{div}_{A^*} w$, (en considérant w comme une application rationnelle de $X \times T$ dans A^* au moyen de l'immersion canonique de G_m dans A^*), que, pour tout $t \in T_1$, $w \odot j_t$ existe et ne soit pas nulle, que pour tout $t \in T_1$, $D' \odot j_t$ soit défini et que l'Idéal fractionnaire δ'_t de $\mathfrak{A}_X$ défini par $D' \odot j_t$, soit, pour tout $t \in T_1$, un sous-faisceau de $\mathfrak{a}$.

Puisque, pour tout $t \in B \cap T_1$, $j^*_t(D)$ est principal, il en est de même de $j^*_t(D')$; donc, pour tout $t \in B \cap T_1$ il existe une application rationnelle s^t de $X \times T_1$ dans A^* telle que $j^*_t(D') = \mathrm{div}_{A^*} s^t$. De plus puisque $\delta'_t \subset \mathfrak{a}$, s_t est une section de $\mathfrak{a}$ sur X.

<u>2.3.1.- lère étape. Construction d'un espace vectoriel V.</u>

Notons $\mathfrak{a}_i$ le faisceau sur X dont les sections sur un ouvert U de X sont les coordonnées d'indice i des sections sur U de $\mathfrak{a}$. Il est clair que

$\mathcal{a}_i$ est un Idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_X$. Puisque X est une variété semi-complète, l'espace vectoriel $V'_i = H^o(X, \mathcal{a}_i)$ est de dimension finie sur K.

Soit $(\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_d)$ une base de V'_o. Posons $s^t_o = \lambda^t_o \phi_o + \ldots + \lambda^t_o \phi_d$. Puisque s^t est une application rationnelle de X dans A^*, quel que soit $t \in B \cap T_1$, il existe un indice i tel que $\lambda^t_i \neq 0$. Posons $B_i = \{t \in B \cap T_1 / \lambda^t_i \neq 0\}$. Puisque $B \cap T_1 = \bigcup_{i=1}^{d} B_i$ il existe un indice, qu'on supposera être 0, tel que B_o soit partout dense dans $B \cap T_o$, donc dans T. Notons alors V_o le sous-espace vectoriel de V'_o engendré par $\phi_1, \ldots, \phi_d$.

Posons $V''_i = V'_o + V'_i$. Alors $(\phi_o, \ldots, \phi_d)$ est un système libre de V''_i ; complètons-le en une base $\phi_o, \ldots, \phi_d, \psi^i_{d+1}, \ldots \psi^i_m$ de V''_i, et notons V_i le sous-espace vectoriel de V''_i engendré par $\phi_1, \ldots, \phi_d, \psi^i_{d+1}, \ldots \psi^i_m$.

Posons enfin $V' = \oplus V_i$. Soit alors $f \in V$ et notons f_i sa composante dans V_i. Alors l'application $\phi_o I + f$ de composantes $\phi_o + f_o, f_1, \ldots, f_n$ est une application régulière de X dans A^*, puisque, comme $\phi_o \notin V_o$, la fonction rationnelle $\phi_o + f_o$ sur X est non nulle.

<u>2.3.2. 2ème étape</u>. <u>Montrons que pour</u> $t \in B_o$, <u>il existe</u> $\sigma \in V$ <u>tel que</u> $\operatorname{div}_{A^*}(\phi_o I + \sigma) = j^*_t(D')$ où I est la matrice unité d'ordre r. Remarquons d'abord que si on pose $s'^t = (\lambda^t_o)^{-1} I s^t$, on a $s'^t_o = \phi_o + (\lambda^t_o)^{-1} (\lambda^t_1 \phi_1 + \ldots + \lambda^t_d \phi_d)$ donc $s'^t_o - \phi_o \in V_o$ et $\operatorname{div}_{A^*} s'^t = \operatorname{div}_{A^*} s^t$, donc $s'^t \in \mathcal{a}$.

Considérons la propriété (P_k) suivante : étant donné un entier k compris entre 0 et $n-1$, une section s^t de $\mathcal{a}$ sur X a la propriété (P_k) lorsque $s^t_o - \phi_o \in V_o$, que, pour tout entier i tel que $1 \leqq i \leqq k$, $s^t_k \in V_k$, et que $\operatorname{div}_{A^*} s^t = j^*_t(D')$.

Nous venons de montrer qu'il existe une section s^t de $\mathcal{a}$ sur X ayant la propriété (P_o). Soit alors s^t une section de $\mathcal{a}$ sur X ayant la propriété (P_{k-1}). Soit μ le coefficient de ϕ_o dans la décomposition de s^t_k suivant la base $\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_n, \psi^k_{n+1}, \ldots, \psi^k_m$ de $V'_o + V'_k$. Soit h l'élément de H^* tel que $h_j = 0$ pour $j \neq 0, k$, $h_o = 1$ et $h_k = -\mu$. Alors si on pose $s'^t = hs^t$ on a $s'^t_k = s^t_k - \mu s^t_o$. Mais, d'après l'hypothèse de récurrence $s^t_o - \phi_o \in V_o \subset V_k$ et $s^t_k - \mu\phi_o \in V_k$ par construction donc $s'^t_k \in V_k$. D'autre part $\operatorname{div}_{H^*} s^t = \operatorname{div}_{H^*} s'^t$ donc $\operatorname{div}_{A^*} s'^t = j^*_t(D')$ donc $s'^t \in \delta'_t \subset \mathcal{a}$.

Il existe donc une section s'^t de $\mathcal{A}$ ayant la propriété (P_n), c'est-à-dire telle que $s'^t - \phi_o I \in V$, et telle que $\mathrm{div}_{A*}\, s'^t = j_t^*(D')$, c.q.f.d.

Nous sommes alors dans les conditions de la proposition (1.4.), donc il existe un ouvert non vide T' de T et morphisme ρ de $T' \to V$ tel que $(D_t)_{t\in T'}$ soit image réciproque par ρ de la famille $(\mathrm{div}_{A*}(\phi_o\, I+\sigma))_{\sigma\in V}$.

2.3.3. 3ème étape. Montrons que $w \otimes j_{t_o} \in V'_o$. Etant donné $t \in T'$, il existe $\sigma \in V'$ tel que $D' \otimes j_t = \mathrm{div}_{H*}\,(\phi_o\, I + \sigma)$, donc si nous considérons le diviseur multiplicatif $\mathrm{div}_{G_m} w$ associé à w, pour tout $t \in T'$, il existe $\lambda_1^t,\dots,\lambda_d^t \in K$ tels que $\mathrm{div}_{G_m}(w \otimes j_t) = \mathrm{div}_{G_m}(\phi_o + \lambda_1^t \phi_1 +\dots+ \lambda_d^t\, \phi_d)$. Alors, d'après (1.5.) pour tout $t \in T_1$, $\mathrm{div}_{G_m}(w \otimes j_t)$ est de la forme $\mathrm{div}_{G_m}(\lambda_o\phi_o+\lambda_1\phi_1+\dots+\lambda_d\, \phi_d)$ donc il existe $\lambda_o^o,\dots, \lambda_d^o \in k$ tels que $\mathrm{div}\,(w \otimes j_{t_o}) = \mathrm{div}_{G_m}(\lambda_o^o\phi_o+\dots+\lambda_d^o\, \phi_d)$

Il existe donc une fonction régulière non nulle, sur X, donc constante c telle que $w \otimes j_{t_o} = c(\lambda_o^o\, \phi_o +\dots+ \lambda_d^o\, \phi_d) \in V'_o$.

Puisque $c \neq 0$, si nous posons $\phi'_o = w \otimes j_{t_o}$, il existe une base $(\phi'_o,\phi'_1,\dots,\phi'_d)$ de V'_o. Soit $\rho_o : T \to V_o$ la composante de c sur V_o, et notons λ'_i la coordonnée d'indice i de $\phi_o + \rho_o$ par rapport à la base $(\phi'_i)_{i=1}^d$ de V'_o. Alors, quel que soit $t \in T'$, $D'_t = \mathrm{div}_{A*}\;(\phi_o + \rho(t))$ en particulier D'_t est principal, et $\mathrm{div}_{G_m}(w \otimes j_t) = \mathrm{div}_{G_m}(\lambda'_i(t)\, \phi'_o +\dots+ \lambda'_d(t)\, \phi'_d)$; et si s^t est une application de définition de D'_t sur X, il existe une fonction régulière non nulle sur X, donc constante c_t telle que $s_o^t = c_t(\lambda'_i(t)\phi'_o+\dots+ \lambda'_d(t)\, \phi'_d)$. Puisque $c_t \neq 0$, et que $\lambda'_i : T' \to k$ est une fonction continue, l'ensemble B'_o des $t \in T'$ tels que $c_t\, \lambda'_i(t) \neq 0$ est un ouvert non vide de T', donc est dense dans T.

2.3.4.-4ème étape. Fin de la démonstration. Alors, nous pouvons construire comme en (2.3.1) un espace vectoriel V_1 à partir de ϕ'_o, au lieu de ϕ_o ; et démontrer de même que l'ensemble T'_1 des $t \in T$ tels que $D'_t=\mathrm{div}_{A*}(\phi'_o+\sigma_1)$, où $\sigma_1 \in V_1$ est un ouvert de T, qu'il existe un morphisme $\rho_1 : T'_1 \to V_1$ tel que pour tout $t \in T'_1$, $D'_t = \mathrm{div}_{A*}\,(\phi'_o + \rho_1(t))$, et que l'ensemble T''_1 des $t \in T$ tels que $\mathrm{div}_{G_m} w \otimes j_t$ soit de la forme $\mathrm{div}_{G_m}(\phi'_o + \lambda'_1\, \phi'_1+\dots+ \lambda'_d\, \phi'_d)$ est égal à T'_1. Il est clair que $t_o \in T''_1$, donc $t_o \in T'_1$.

On a donc construit un ouvert T_1' de T contenant t_o et un morphisme $\rho_1 : T_1' \to V$ tel que pour tout $t \in T_1'$, on ait $D_t' = \mathrm{div}_{A*} (\phi_o' + \rho_1(t))$. Donc la restriction de $i \circ D$ à $X \times T_1'$ est égale à $\mathrm{div}_{A*}((\phi_o' I + \rho) (w^{-1} I))$, où $i : G \to H^*$ est l'immersion canonique ; et $i \circ D$ est principal. On est alors dans les conditions du lemme (2.2) qui nous assure qu'il existe un voisinage ouvert T_o de t_o dans T_1', (donc aussi dans T), tel que la restriction à $X \times T_o$ de D soit principale, c.q.f.d.

<u>Lemme 2.4.- Si le théorème (2.1) est vrai pour deux groupes algébriques G et H, alors il est vrai pour leur produit GH.</u>

En effet, D est un diviseur de type GH sur $X \times T$. D'après (I,6.9), $D = (E,F)$, où E est un diviseur de type G sur $X \times T$, et où F est un diviseur de type H sur $X \times T$. Alors il existe un ouvert T_1 [resp. T_2] de T contenant t_o tel que la restriction à $X \times T_1$ [resp. $X \times T_2$] de E [resp. F] soit principale. Posons $T_o = T_1 \cap T_2$, il est clair que la restriction à $X \times T_o$ de D est principale (I,5.9).

<u>Lemme 2.5.- Soit G un groupe algébrique linéaire commutatif connexe ; alors G est sous-groupe d'un produit de groupes de type A^*.</u>

En caractéristique 0, G est produit d'un tore par un produit de groupes isomorphes à G_a ([1] et [19] VII, corollaire à la proposition 8). Comme A_2^* est isomorphe à $G_m \times G_a$, G est isomorphe à un sous-groupe d'un produit de groupes A_2^*.

En caractéristique p, G est produit d'un tore par un sous-groupe d'un produit de groupes de Witt ([1] et [19] III, th. 2). Comme A^* est isomorphe à $G_m \times A_u^*$, il suffit de montrer que tout groupe de Witt est sous-groupe d'un groupe de type A_u^*.

Or ([19], V n° 7, prop. 9) $A_{u,r}^*$ est produit des groupes de Witt de dimension s_i, pour i de 1 à $r-1$ et premier à p, s_i désignant le plus petit entier s tel que $p^s \geq \frac{r}{i}$. Soit W le groupe de Witt de dimension s, W est donc sous-groupe de $A_{u,r}^*$ pour $r = (p-1)\, p^s$.

<u>2.6.- Démonstration du Th. 2.1.</u> D'après (I,5.8) on peut supposer G connexe. D'après (2.3) le théorème est vrai pour A_u^*, d'après ([8], exp. 5, Th.3), il est vrai pour G_m, donc (2.4) il est vrai pour A^*, donc (2.4) pour tout produit de groupes de type A^*, donc (2.2) pour tout sous-groupe de produit de groupes de

type A*, donc (2.5) il est vrai pour tout groupe linéaire commutatif G.

Corollaire 2.7.- (continuité des familles algébriques de classes de diviseurs). Soient G un groupe algébrique linéaire commutatif, X une variété semi-complète, $(\Delta_t)_{t\varepsilon T}$ une famille algébrique de classe de diviseurs de type G sur X paramétrée pour une variété T ; alors l'ensemble H des $t \varepsilon T$ tels que $\Delta_t = 0$ est fermé dans T.

Soit $t_o \varepsilon T$; d'après (I, 2.3) il existe $D \varepsilon \Delta$ tel que $j^*_{t_o}(D)$ soit défini, où $j_t : X \to X \times T$ désigne le morphisme $x \leadsto (x,t)$. L'ensemble T_1 des $t \varepsilon T$ tels que $D_t = D \circledcirc j_t$ soit défini est un ouvert de T contenant donc t_o. Soit E une composante irréductible de l'adhérence $\bar{H}$ de H dans T. Montrons que $E \cap H \cap T_1 = E \cap T_1$. Si $E \cap T_1 = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer.

Si $E \cap T_1 \neq \emptyset$, $E \cap T_1$ est localement fermé dans T, donc est canoniquement muni d'une structure de variété. Alors la famille $(D_t)_{t\varepsilon E \cap T_1}$ est une famille algébrique définie par la restriction à $E \cap T_1$ de D, et telle que pour tout $t \varepsilon E \cap H \cap T_1$, D_t soit principal ; comme $E \cap H \cap T_1$ est dense dans $E \cap T_1$, d'après (2.1) D_t est principal pour tout $t \varepsilon E \cap T_1$; donc (I,2.3) $\Delta_t = 0$ quel que soit $t \varepsilon E \cap T_1$, si bien que $E \cap T_1 \cap H = E \cap T_1$.

Nous avons montré que quel que soit $t_o \varepsilon$ T, il existe un voisinage ouvert T_1 de t_o dans T tel que $E \cap H \cap T_1 = E \cap T_1$, donc $E \cap H = E$; ce qui signifie que $H \supset E$; donc H contient toute composante irréductible de $\bar{H}$; d'où $H = \bar{H}$, c.q.f.d.

3.- L'ensemble des familles algébriques de classes de diviseurs paramétrées par une variété donnée.

3.0. Hypothèses et notations.- Dans ce numéro, nous considérons un groupe algébrique linéaire commutatif G, une variété semi-complète X et une variété quelconque T. Notons $A(T,\mathscr{C}(X,G))$ l'ensemble des familles algébriques de classes de diviseurs de type G sur X paramétrées par T. Notons 1 l'élément neutre de G, et notons multiplicativement la loi de groupe sur G.

Soient $(\Delta_t)_{t\varepsilon T}$ et $(\Delta'_t)_{t\varepsilon T}$ deux éléments de $A(T,\mathscr{C}(X,G)$ et soient Δ et Δ' des classes de définition de $(\Delta_t)_{t\varepsilon T}$ et $(\Delta'_t)_{t\varepsilon T}$ respectivement. Il est clair que $\Delta - \Delta'$ est une classe de définition de la famille $(\Delta_t - \Delta'_t)_{t\varepsilon T}$, donc $A(T,\mathscr{C}(X,G))$ est naturellement muni d'une structure de groupe.

Notons $p : X \times T \to T$ la projection canonique. Etant donné $t \in T$, notons $j_t : X \to X \times T$ le morphisme $x \leadsto (x,t)$.

Proposition 3.1.- Soit $(\Delta_t)_{t\in T}$ un élément de $A(T, \mathcal{C}(X,G))$ et soit Δ une classe de définition de $(\Delta_t)_{t\in T}$. Pour que, quel que soit $t \in T$, on ait $\Delta_t = 0$, il faut et il suffit qu'il existe une classe Λ de diviseurs de type G sur T telle que $\Delta = p^*(\Lambda)$.

Montrons d'abord que la condition est nécessaire.

Quel que soit $t_1 \in T$, on sait qu'il existe un élément D de Δ tel que $D \Theta j_{t_1}$ soit défini (I,2.3), et que l'ensemble des $t \in T$ tels que $D \Theta j_t$ soit défini est un ouvert. Donc il existe un recouvrement ouvert $(T_i)_{i\in I}$ et un système de diviseurs $(D_i)_{i\in I}$ associé à ce recouvrement tel que : quel que soit $i \in I$, $D_i \in \Delta$ et que pour tout $t \in T_i$, $D_i \Theta j_t$ soit défini. Puisque, pour tout $t \in T$, $\Delta_t = 0$, pour tout $t \in T_i$, $D_i \Theta j_t$, qui appartient à Δ_t (I,2.3) est principal ; donc d'après (2.1), quitte à raffiner le recouvrement ouvert $(T_i)_{i\in I}$ de T, on peut supposer que la restriction de D_i à $X \times T_i$ est un diviseur principal, donc que la restriction de Δ à $X \times T_i$ est nulle. Donc (I,1.4) le fibré δ de base $X \times T$ et de groupe G associé à Δ est trivial au-dessus de $X \times T_i$, quel que soit $i \in I$. Notons alors g_{ij} le changement de cartes de $X \times T_j$ à $X \times T_i$ de ce fibré ; c'est une application régulière de $X \times (T_i \cap T_j)$ dans G. En particulier, pour tout $t \in T_i \cap T_j$, $g_{ij} \Theta j_t$ est une application régulière de X dans G, donc une constante puisque X est semi-complète, et que G est affine. Par conséquent, g_{ij} est de la forme $f_{ij} \circ p$, où f_{ij} est une application régulière de $T_i \cap T_j$ dans G. De la relation $g_{ij} \cdot g_{ik} \cdot g_{ki} = 1$ dans $X \times (T_i \cap T_j \cap T_k)$, on déduit la relation $f_{ij} \cdot f_{jk} \cdot f_{ki} = 1$ dans $T_i \cap T_j \cap T_k$, si bien que le système d'ouverts $(T_i)_{i\in I}$ et de changements de base $(f_{ij})_{(i,j)\in I\times I}$ définit un fibré λ de base T et de groupe G, dont l'image réciproque par p est le fibré δ de base $X \times T$ et de groupe G associé à Δ ; donc, si on note Λ la classe de diviseurs de type G sur T associée à λ, on a $\Delta = p^*(\Lambda)$ (I,2.3).

Montrons maintenant que la condition de l'énoncé est suffisante. Soit toujours λ le fibré de base T et de groupe G associé à Λ (I,1.4), et δ le fibré de base $X \times T$ et de groupe G associé à Δ. On sait que λ est localement trivial, donc il existe un recouvrement ouvert $(T_i)_{i\in I}$ de T tel que, pour tout $i \in I$, λ soit trivial au-dessus de T_i ; alors, puisque $\lambda = p^{-1}(\delta)$, (I,2.3), λ est trivial au-dessus de $X \times T_i$, pour tout $i \in I$; donc pour tout

$t \in T$, il existe $i \in I$ tel que $t \in T_i$, et il est clair que $j_t^{-1}(\lambda)$ est un fibré trivial. Mais comme Δ_t est associé à $j_t^{-1}(\lambda)$, on a bien $\Delta_t = 0$ c.q.f.d.

<u>Corollaire 3.2.- On a une suite exacte de groupes</u> :

$$\mathscr{C}(T,G) \xrightarrow{p^*} \mathscr{C}(X \times T,G) \xrightarrow{(j_t^*)_{t\in T}} A(T,\mathscr{C}(X,G)) \to 0$$

D'après la définition des familles algébriques de classes de diviseurs, $(j_t^*)_{t\in T}$ est une application sucjective de $\mathscr{C}(X \times T,G)$ sur $A(X,\mathscr{C}(X,G))$ et la proposition 3.1 exprime précisément que $\mathrm{Im}\, p^* = \mathrm{Ker}((j_t^*)_{t\in T}$.

<u>Proposition 3.3.- (Caractère local des familles algébriques de classes de diviseurs). Soit</u> $f : T \to \mathscr{C}(X,G)$ <u>une application telle qu'il existe un recouvrement ouvert</u> $(T_i)_{i\in I}$ de T <u>tel que, pour tout</u> $i \in I$, <u>la restriction de</u> f <u>à</u> T_i <u>soit une famille algébrique de classes de diviseurs paramétrée par</u> T_i ; <u>alors</u> f <u>est une famille algébrique de classes de diviseurs paramétrée par</u> T.

Soit $x_o \in X$; notons $k_{x_o} : T \to X \times T$ le morphisme $t \mapsto (x_o,t)$ étant donné $i \in I$, nous noterons aussi k_{x_o}, par abus de notation, la restriction de k_{x_o} à T_i. Par hypothèse, pour tout $i \in I$, il existe une classe de définition Δ_i de la famille $(f(t))_{t\in T_i}$.

D'après (I,2.3), il existe $D_i \in \Delta_i$ tel que $k_{x_o}^*(D_i)$ soit défini ; posons $C_i = k_{x_o}^*(D_i)$ et soit Γ_i la classe d'équivalence de C_i.

D'après (3.2), $\Delta_i' = \Delta_i - p^*(\Gamma_i)$ est une classe de définition de la famille algébrique $(f(t))_{t\in T_i}$; mais puisque $p \circ k_{x_o} = id_T$,

$$k_{x_o}^*(D_i - p^*(C_i)) = k_{x_o}^*(D_i) - C_i = 0 \quad \text{et} \quad D_i' = D_i - p^*(C_i) \in \Delta_i' .$$

Nous avons donc montré que pour tout $i \in I$, il existe une classe de définition Δ_i' de la famille $(f(t))_{t\in T_i}$, et un diviseur $D_i' \in \Delta_i'$ tel que $k_{x_o}^*(D_i')$ soit défini et nul.

Alors les restrictions de Δ_i' et Δ_j' à $X \times (T_i \cap T_j)$ définissent toutes deux la même famille algébrique $(f(t))_{t\in T_i \cap T_j}$, donc (3.2) il existe une classe de diviseurs λ_{ij} de type G sur $T_i \cap T_j$ telle que, sur $X\times(T_i \cap T_j)$, on ait $\Delta_i' - \Delta_j' = p^*(\lambda_{ij})$. Alors $k_{x_o}^*(\Delta_i' - \Delta_j') = k_{x_o}^* p^*(\lambda_{ij}) = \lambda_{ij}$ dans $T_i \cap T_j$, et de même, $k^*_{x_o}(D'_i - D'_j) = 0$ donc $0 \in \lambda_{ij}$, autrement dit $\lambda_{ij} = 0$, et Δ_i et Δ'_j ont même restriction à $T_i \cap T_j$, donc D'_i est équivalent à D'_j.

Il existe donc une application rationnelle f_{ij} de $X \times (T_i \cap T_j)$ dans G telle que $D'_i - D'_j = \mathrm{div}_G\, f_{ij}$. Puisque $k^*_{x_o}(D_i)$ est nul dans T_o, et que $k^*_{x_o}(D'_j)$ est nul dans T_j, $f_{ij} \circledcirc k_{x_o}$ est une application régulière de $T_i \cap T_j$ dans G.

Posons $f'_{ij} = ((f_{ij} \circledcirc k_{x_o}) \circ p)^{-1} f_{ij}$. Alors $\mathrm{div}_G\, f'_{ij} = \mathrm{div}_G\, f_{ij}$ et $f_{ij} \circledcirc k_{x_o} = 1$. Dans $X \times (T_i \cap T_j \cap T_k)$, on a $(D'_i - D'_j) + (D'_j - D'_k) + (D'_k - D'_i) = 0$, donc, si on pose $g_{ijk} = f'_{ij}\, f'_{jk}\, f'_{ki}$, g_{ijk} est une application régulière de $X \times (T_i \cap T_j \cap T_k)$ dans G telle que $g_{ijk} \circledcirc k_{x_o} = 1$. Pour tout $t \in T_i \cap T_j \cap T_k$, $g_{ijk} \circledcirc j_t$ est une application régulière de X dans G, donc une constante puisque X est semi-complète, et que G est affine ; donc il existe une application régulière h_{ijk} de $T_i \cap T_j \cap T_k$ dans G telle que $g_{ijk} = h_{ijk} \circ p$. Alors $g_{ijk} \circledcirc k_{x_o} = h_{ijk} \circ (p \circ k_{x_o}) = h_{ijk}$. D'où $h_{ijk} = 1$ et $g_{ijk} = 1$, si bien que $f'_{ij}\, f'_{jk}\, f'_{ki} = 1$ dans $X \times (T_i \cap T_j \cap T_k)$.

Soit maintenant $i_o \in I$; posons $f_i = f'_{ii_o}$; alors nous pouvons considérer f_i comme une application rationnelle de $X \times T$ dans G, et $f_j^{-1} f_i = f'^{-1}_{ji_o}\, f'_{ii_o} = f'_{ij}$ puisque $f'_{i_o i}\, f'_{ij}\, f'_{ji_o} = 1$ dans $X \times (T_i \cap T_j \cap T_k)$, donc aussi dans $X \times T$. Posons $D''_i = D'_i - \mathrm{div}_G\, f_i$ dans $X \times T_i$. Alors dans $X \times (T_i \cap T_j)$ on a $D''_i - D''_j = \mathrm{div}_G\, f'_{ij} - \mathrm{div}_G\, f_i + \mathrm{div}_G\, f_j = 0$ puisque $f_j^{-1} f_i = f'_{ij}$, donc les diviseurs D''_i sur $X \times T_i$ se recollent en un diviseur D'' de type G sur $X \times T$. Comme pour tout $i \in I$, $D''_i \in \Delta'_i$, la classe de D''_i est une classe de définition de la famille $(f(t))_{t \in T_i}$, la classe de D'' est une classe de définition de la famille $(f(t))_{t \in T}$, c.q.f.d.

<u>Lemme 3.4.- Soit G un groupe algébrique linéaire unipotent commutatif connexe ; en tant que variété d'après ([19], VII n°6) G est isomorphe à $(G_a)^n$, où $n = \dim G$, et G possède un système de coordonnées globales telles que si on note</u>

$h_1, \dots, h_n$ les coordonnées d'un élément h de G suivant ce système, on ait pour r de 1 à n :

$$(hh')_r = h_r + h'_r + P_r\,(h_1, h'_1, \dots, h_{r-1}, h'_{r-1})$$

où les P_r sont des polynômes. Alors le sous-ensemble de G forme des éléments de G dont les $n-1$ premières coordonnées sont nulles est un sous-groupe algébrique G' de G isomorphe à G_a. Notons G'' le quotient G/G', et $p : G \to G''$ l'homomorphisme canonique. Alors le système de coordonnées globales de G définit par composition avec p un système de coordonnées globales de G'' telle que si on note $h_1, \dots, h_{n-1}$ les coordonnées d'un élément h de G'' suivant ce système, on ait pour r de 1 à $n-1$,

$$(hh')_r = h_r + h'_r + P_r(h_1, h'_1, \dots, h_{r-1}, h'_{r-1}) \, .$$

Lemme 3.5. - Soient G un groupe algébrique linéaire unipotent commutatif et T une variété affine ; alors $\mathscr{C}(T,G) = 0$.

D'après (I,5.8) on peut supposer G connexe.

Raisonnons par récurrence sur $n = \dim G$. Si $n = 1$, G est isomorphe à G_a, et (I,1.5) $\mathscr{C}(T,G) = H^1(T, \mathcal{O}_T) = 0$ ([17]II,2 Th 3). Supposons $n > 1$ et la proposition vraie en dimension $n-1$. Etant donné G, construisons G' et G'' comme dans (3.4). Alors G'' est un groupe linéaire unipotent commutatif connexe de dimension $n-1$, donc $\mathscr{C}(T,G'') = 0$. Il résulte de (I,5.12) qu'on a une suite exacte :

$$0 = \mathscr{C}(T,G') \to \mathscr{C}(T,G) \to \mathscr{C}(T,G'') = 0$$

Donc $\mathscr{C}(T,G) = 0$.

Lemme 3.6. - Soient G et H deux groupes algébriques $\phi : G \to H$ un homomorphisme (de groupes algébriques), X et T deux variétés, $f \in A(T, \mathscr{C}(X,G))$. Alors $\mathscr{C}(X,\phi) \circ f \in A(T, \mathscr{C}(X,H))$ et l'application de $A(T, \mathscr{C}(X,G))$ dans $A(T, \mathscr{C}(X,H))$ qui à $f \in A(T, \mathscr{C}(X,G))$ fait correspondre $\mathscr{C}(X,\phi) \circ f$ est un homomorphisme de groupes qu'on notera $A(T, \mathscr{C}(X,\phi))$.

Soit Δ une classe de définition de f, il est clair que $i \circ \Delta$ est une classe de définition de $\mathscr{C}(X,\phi) \circ f$, ce qui montre que

$\mathscr{C}(X,\phi) \circ f \in A(T,\mathscr{C}(X,H))$.

Soient $f' \in A(T,\mathscr{C}(X,G))$, et Δ' une classe de définition de f' ; puisque $\Delta - \Delta'$ est une classe de défintion de $f - f'$, $i \circ (\Delta - \Delta') = i\circ\Delta - i\circ\Delta'$ est une classe de défintion de $\mathscr{C}(X,\phi) \circ (f - f')$ ce qui montre que

$$\mathscr{C}(X,\phi) \circ (f - f') = \mathscr{C}(X,\phi) \circ f - \mathscr{C}(X,\phi) \circ f' .$$

<u>Proposition 3.7.</u>- <u>Soient G un groupe algébrique linéaire unipotent commutatif, G' un sous-groupe connexe de G, $G''=G/G'$, $i : G' \to G$ et $p : G \to G/G'$ les morphismes canoniques, X une variété semi-complète et T une variété . On a une suite exacte de groupes</u> :

$$0 \to A(T,\mathscr{C}(X,G')) \xrightarrow{A(T,\mathscr{C}(X,i))} A(T,\mathscr{C}(X,G)) \xrightarrow{A(T,\mathscr{C}(X,p))} A(T,\mathscr{C}(X,G'')).$$

D'après (I,5.9) on peut supposer G connexe.

i) Montrons que $A(T,\mathscr{C}(X,i))$ est injectif. Soit $f' \in A(T,\mathscr{C}(X,G'))$ tel que $\mathscr{C}(X,i) \circ f' = 0$; puisque $\mathscr{C}(X,i)$ est injectif (I,5.12), on a $f'=0$, c.q.f.d.

ii) Montrons que $\operatorname{Ker} A(T,\mathscr{C}(X,p)) = \operatorname{Im} A(T,\mathscr{C}(X,i))$. Il est clair que $\operatorname{Im} A(T,\mathscr{C}(X,i)) \subset \operatorname{Ker} A(T,\mathscr{C}(X,p))$ puisque $\operatorname{Im} \mathscr{C}(X,i) = \operatorname{Ker} \mathscr{C}(X,p)$ (I,5.4). Soit $f \in A(T,\mathscr{C}(X,G))$ tel que $\mathscr{C}(X,p) \circ f = 0$. Puisque $\operatorname{Im} \mathscr{C}(X,i)=\operatorname{Ker}\mathscr{C}(X,p)$ et que $\mathscr{C}(X,i)$ est injectif il existe une application et une seule $g : T \to \mathscr{C}(X,G')$ telle que $\mathscr{C}(X,i) \circ g = f$. Il s'agit de montrer que g est une famille <u>algébrique</u> de classes de diviseurs. D'après (3.3), il suffit de montrer que la restriction de g à tout ouvert affine T_o de T est une famille algébrique de classes de diviseurs. Donc nous pouvons supposer T <u>affine</u>.

Soit alors Δ une classe de définition de f, alors $p \circ \Delta$ est une classe de définition de $\mathscr{C}(X,p) \circ f = 0$, donc (3.2), $p \circ \Delta$ est de la forme $q^*(\delta)$, où $\delta \in (T,G'')$ et où $q : X \times T \to T$ est la projection canonique. Mais d'après le théorème de Chevalley [4], G'' est un groupe linéaire, donc unipotent commutatif et d'après (3.5) $\mathscr{C}(T,G'') = 0$ donc $p \circ \Delta = 0$. Donc (I,5.4) Δ est de la forme $i \circ \Delta'$ où $\Delta' \in \mathscr{C}(X \times T,G')$, et Δ' définit $f' \in A(T,\mathscr{C}(X,G'))$ tel que $\mathscr{C}(X,i) \circ f' = f$.

4.- Classe de diviseurs infinitésimale associée à une famille algébrique de classes de diviseurs et à un vecteur tangent.

<u>Proposition 4.1.</u>- <u>Soient X une variété semi-complète, T une variété, G un groupe algébrique linéaire commutatif</u>, $t_o \in T$, $L \in \mathbb{T}^T_{t_o}$, $(\Delta_t)_{t\in T} \in A(T,\mathscr{C}(X,G))$

et Δ et Δ' deux classes de défintion de $(\Delta_t)_{t\in T}$. Alors $<\Delta, L> = <\Delta', L>$ *(III,1.6). On posera* $<(\Delta_t)_{t\in T}, L> \; = \; <\Delta, L>$, *et on dira que* $<(\Delta_t)_{t\in T}, L>$ *est la classe de diviseurs infinitésimale associée à la famille* $(\Delta_t)_{t\in T}$ *et au vecteur tangent* L.

D'après (I,2.6) il existe un ouvert T_o de T contenant T, et un élément $D \in \Delta$ tel que pour tout $t \in T_o$, $D \odot j_t$ existe. De même, il existe un ouvert T_1 de T contenant t_o et un élément $D' \in \Delta'$ tel que pour tout $t \in T_1$, $D' \odot j_t$ existe.

Quel que soit $t \in T_o \cap T_1$, $(D-D') \odot j_t = (D \odot j_t) - (D' \odot j_t)$ appartient à $(\Delta \odot j_t) - (\Delta' \odot j_t) = \Delta_t - \Delta_t = 0$, donc $(D-D') \odot j_t$ est principal ; il résulte alors de 2.1. qu'il existe un voisinage ouvert T_2 de t_o dans $T_o \cap T_1$ tel que la restriction de $D - D'$ à T_2 soit un diviseur principal $\bar{P}$. Alors (III,1.6) $<\Delta, L> \ni <(D \odot j_t)_{t\in T_2}, L>$ et $<\Delta', L> \ni <(D' \odot j_t)_{t\in T_2}, L>$ donc (III,1.4) $<\Delta', L> - <\Delta, L> \ni <P, L>$. Mais d'après (III,1.3) $<P, L>$ est un diviseur principal, donc $<\Delta', L> = <\Delta, L>$, c.q.f.d.

Proposition 4.2.- Soient X une variété semi-complète, T une variété non singulière et G un groupe algébrique linéaire commutatif. Soit $(\Delta_t)_{t\in T}$ une famille algébrique de classes de diviseurs de type G sur X paramétrée par T. Alors la famille $<(\Delta_t)_{t\in T}, L>_{L\in \mathbb{T}^T}$ est une famille algébrique de classes de diviseurs de type $\mathbb{T}_1^G$ sur X paramétrée par $\mathbb{T}^T$.

D'après (I,2.6) il existe un recouvrement ouvert $(T_i)_{i\in I}$ de T, et une famille $(D_i)_{i\in I}$ d'éléments d'une classe de définition Δ de la famille $(\Delta_t)_{t\in T}$ tels que $D_i \odot j_t$ soit défini quel que soit $t \in T_i$. Alors (4.1 et III,1.2.6), pour tout $L \in \mathbb{T}^{T_i}$, on a $<(\Delta_t)_{t\in T}, L> \ni <D_i, L> = <(D_i \odot j_t)_{t\in T_i}, L>$.

Or (III,1.7) la famille $(<(D_i \odot j_t)_{t\in T_i}, L>)_{L\in \mathbb{T}^{T_i}}$ est une famille algébrique de diviseurs de type $\mathbb{T}_1^G$ sur X paramétrée par $\mathbb{T}^{T_i}$.
Donc la famille $(<(\Delta_t)_{t\in T}, L>)_{L\in \mathbb{T}^{T_i}}$ est une famille algébrique de classes de diviseurs de type $\mathbb{T}_1^G$ sur X paramétrée par $\mathbb{T}^{T_i}$, et d'après (3.3), la famille $(<(\Delta_t)_{t\in T}, L>)_{L\in \mathbb{T}^T}$ est donc une famille algébrique de classes de diviseurs.

Corollaire 4.3.- Hypothèses de (4.2) ; soit δ une section régulière de $\mathbb{T}^T$ (c'est-à-dire un champ de vecteurs tangents). Alors à un élément $(\Delta_t)_{t\in T}$ de

$A(T,\mathscr{C}(X,G))$ et à δ , nous pouvons associer l'élément $(<(\Delta_t)_{t\in T}, \delta(t)>)_{t\in T}$ de $A(T,\mathscr{C}(X,\mathbb{T}_1^G))$. On obtient ainsi un homomorphisme de groupes de $A(T,\mathscr{C}(X,G))$ dans $A(T,\mathscr{C}(X,\mathbb{T}_1^G))$.

Le fait que $(<(\Delta_t)_{t\in T},\delta(t)>)_{t\in T}$ soit élément de $A(T,\mathscr{C}(X,\mathbb{T}_1^G))$ résulte de (4.2), et le fait qu'on obtienne un homomorphisme de groupes résulte de (4.1 et II,1.8).

Proposition 4.4.- Hypothèses de (4.1). Soient T' une variété, $g : T' \to T$ un morphisme, $(\Delta_t)_{t\in T}$ un élément de $A(T,\mathscr{C}(X,G))$, $t' \in T'$ et $L' \in \mathbb{T}_{t'}^{T'}$. Posons $L = dg(L')$. Alors $<(\Delta_g(t'))_{t'\in T'},L'> = <(\Delta_t)_{t\in T},L>$.

C'est une conséquence immédiate de (III,1.9) (III,1.6) et (4.1).

Remarque 4.5.- Sous les hypothèses de (4.1). Soient $\lambda \in K$ et $L' \in \mathbb{T}_{t_o}^T$ alors $<(\Delta_t)_{t\in T},\lambda L> = \lambda <(\Delta_t)_{t\in T},L>$ et $<(\Delta_t)_{t\in T},L+L'> = <(\Delta_t)_{t\in T},L> + <(\Delta_t)_{t\in T},L'>$

Cela résulte immédiatement de (4.1) et de (III,1.5).

Proposition 4.6.- Hypothèses de (4.1). Soient H un groupe algébrique linéaire commutatif, $\phi : G \to H$ un homomorphisme de groupes algébriques, et $f \in A(T,\mathscr{C}(X,G))$. Alors, pour tout $t \in T$ et tout $L \in \mathbb{T}_t^T$, $\mathscr{C}(X,d\phi)(<f,L>) = <\mathscr{C}(X,\phi)\circ f,L>$.

Cela résulte immédiatement de (4.1) et de (III,1.10).

CHAPITRE VI. THEOREME DE DESCENTE

1. Descente dans le cas séparable.

<u>Lemme 1.1. - Soient</u> S <u>une variété,</u> (T,h) <u>un revêtement galoisien non ramifié de</u> S , G <u>un groupe algébrique, et</u> D <u>un diviseur de type</u> G <u>sur</u> S <u>tel que</u> $h^*(D) = 0$; <u>alors</u> $D = 0$.

Puisque h est surjectif, il suffit de montrer que toute application rationnelle u de S dans G telle que $u \circ h$ soit définie et soit régulière en un point t de T , est régulière au point h(t). On peut évidemment supposer G affine, donc on est ramené au cas où u est une fonction rationnelle sur S : le résultat provient alors de ([6]).

<u>Proposition 1.2. - Soient</u> S <u>une variété normale,</u> (T,h) <u>un revêtement galoisien non ramifié de</u> S , X <u>une variété quelconque,</u> G <u>un groupe algébrique linéaire commutatif, et</u> D <u>un diviseur de type</u> G <u>sur</u> $X \times T$ <u>tel que</u> $(id_X \times \sigma)*(D) = D$ <u>pour tout automorphisme</u> σ <u>du revêtement</u> (T,h). <u>Il existe alors un diviseur de type</u> G <u>et un seul</u> E <u>sur</u> $X \times S$ <u>tel que</u> $D = (id_X \times h)*(E)$.

L'unicité de E provient de (1.1) puisque $(X \times T, id_X \times h)$ est un revêtement galoisien non ramifié de $X \times S$.

Par démontrer l'existence de E , puisqu'on sait que la proposition est vraie lorsque $G = G_m$ ([8], exposé 5, th.6) , d'après [1] (I,5.8) et (I,5.9), on est ramené au cas où G est unipotent et connexe. Nous pouvons considérer G comme un sous-groupe commutatif unipotent formé de matrices triangulaires supérieures de l'algèbre M_r des matrices d'ordre r à coefficients dans k . Soit H la sous-algèbre de M_r engendrée par G , alors H est commutative, et G est un sous-groupe de H* . Supposons la proposition vraie pour le groupe H* .

Notons alors $i : G \to H^*$ et $p : H^* \to H^*/G$ les morphismes canoniques. Posons $D' = i \circ D$; il existe alors un diviseur E' de type H* sur $X \times S$ tel que $D' = (id_X \times h)^*(E')$; on a $p \circ D' = 0$. Le Lemme (1.1) montre alors que $p \circ E' = 0$. D'après (I,5.4), il existe un diviseur E de type G sur $X \times S$ tel que $E' = i \circ E$. On a alors $D = (id_X \times h)*(E)$. Nous sommes donc ramenés à démontrer la proposition dans le cas où $G = H^*$.

Puisque S est normale, il résulte de ([6]), qu'étant donné $s \in S$, $h^{-1}(s)$ est contenu dans un ouvert affine de T . Etant donné $(x,s) \in X \times S$, il existe donc une application rationnelle v de $X \times T$ dans G qui soit application de définition de D en chacun des points de $\{x\} \times h^{-1}(s)$(IV.3.2). Notons Γ le groupe des automorphismes du revêtement (T,h), puisque $h^{-1}(s)$ est contenu dans un ouvert affine de T , étant donné $t \in h^{-1}(s)$, il existe une fonction rationnelle z sur T définie en tout point de $h^{-1}(s)$ et telle que $z(t) = 1$ et $z(\sigma(t)) = 0$ pour tout $\sigma \in \Gamma$ distinct de l'identité.

Posons alors $v' = \sum_{\sigma \in G} (id_X \times z) \cdot v \circ (id_X \times \sigma)$; alors $v^{-1} v'$ est définie en (x,t) et y prend la valeur 1, donc v' est une application de définition de D en (x,t). De plus $v' \circ (id_X \times \sigma) = v'$ pour tout $\sigma \in \Gamma$; donc v' est une application de définition de D en tout point de $\{x\} \times h^{-1}(s)$. Puisque G est affine, il résulte de [6] que v' est de la forme $w \circ (id_X \times h)$, où w est une application rationnelle de $X \times S$ dans G.

Soit U l'ouvert de $X \times T$ dans lequel v' est application de définition de D ; puisque, pour tout $\sigma \in \Gamma$, $v' \circ (id_X \times \sigma) = v'$ et $D \circ (id_X \times \sigma) = D$, on vérifie aisément que $(id_X \times \sigma)(U) = U$, donc U est de la forme $(id_X \times h)^{-1}(V)$, où V est un ouvert de $X \times S$ contenant (x,s).

Soit $(x',s') \in X \times S$; il existe alors un ouvert V' de $X \times S$ et une application rationnelle w' de $X \times S$ dans G telle que $w' \circ (id_X \times h)$ soit application de définition de D en tout point de $(id_X \times h)^{-1}(V')$. Donc $(w^{-1} w') \circ (id_X \times h)$ est régulière en tout point de $(id_X \times h)^{-1}(V \cap V')$. Puisque G est affine, on déduit de [6] que $w^{-1} w'$ est régulière en tout point de $V \cap V'$.

Donc, à tout $(x,s) \in X \times S$, on peut associer un ouvert $V_{x,s}$ de $X \times S$ contenant (x,s) et une application rationnelle $w_{x,s}$ de $X \times S$ dans G telle que $w_{x,s} \circ (id_X \times h)$ soit application de définition de D en tout point de $(id_X \times h)^{-1}(V_{x,s})$, et le système d'ouverts $(V_{x,s})_{(x,s) \in X \times S}$ et d'applications $(w_{x,s})_{(x,s) \in X \times S}$ définit un diviseur E de type G sur $X \times S$ tel que $D = (id_X \times h)^*(E)$.

<u>Théorème 1.3</u>. - <u>Soient</u> S <u>une variété</u>, (T,h) <u>un revêtement séparable de</u> S, X <u>une variété semi-complète</u>, G <u>un groupe algébrique linéaire commutatif et</u> f <u>une application de</u> S <u>dans</u> $\mathcal{C}(X,G)$. <u>Si</u> $f \circ h$ <u>est une famille algébrique de classes de diviseurs de type</u> G <u>sur</u> X <u>paramétrée par</u> T, <u>il existe un ouvert non vide</u> S_o <u>de</u> S <u>tel que la restriction de</u> f <u>à</u> S_o <u>soit une famille algébrique de classes de diviseurs de type</u> G <u>sur</u> X <u>paramétrée par</u> S_o. <u>De plus, si</u> S <u>est normale, et si</u> (T,h) <u>est un revêtement non ramifié, on peut supposer que</u> $S_o = S$.

Il est clair qu'on peut supposer S normale. D'après [1],(I,5.8) et (I,5.9), puisque la proposition est vraie lorsque $G = G_m$ ([8] exp. 5, corollaire au Th.7), on peut supposer que G est unipotent et connexe.

Puisque il existe un ouvert non vide S_1 de S tel que la restriction du revêtement (T,h) au-dessus de S_1 soit non-ramifié ([6]), on peut supposer que (T,h) est non ramifié. Soit (T',h') le revêtement galoisien non ramifié associé à (T,h) ([6]). Alors h' est de la forme $h\circ p$, où (T',p) est un revêtement non ramifié de T.

Puisque $f\circ h$ est algébrique, il en est de même de $f\circ h' = f\circ h\circ p$ qui n'est autre que l'image réciproque de $f\circ h$ par p (I,4.2). Donc, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où le revêtement (T,h) est galoisien non ramifié.

Soit Γ le groupe des automorphismes du revêtement (T,h) ; nous pouvons le considérer comme opérant trivialement sur X, donc comme opérant sur $X\times T$. L'application $f\circ h$ est définie par une classe Δ de diviseurs de type G sur $X\times T$. Etant donné $t_o \in T$, il existe $x\in X$ et $D\in\Delta$ tels que pour tout $\sigma\in\Gamma$, on ait $(x,\sigma(t_o))\in \operatorname{Supp} D$ (I,2.3). Pour tout $\sigma\in\Gamma$, on a $f\circ h\circ\sigma = f\circ h$, donc $\sigma^*(\Delta)-\Delta$ est de la forme $p^*(\delta_\sigma)$, où $p: X\times T\to T$ est la projection canonique, et où $\delta_\sigma \in \mathcal{C}(T,G)$ (V,3.1) ; par conséquent :

$$\sigma^*(D) - D = \operatorname{div}_G w_\sigma + p^*(d_\sigma),$$

où $d_\sigma\in\delta_\sigma$, et où w_σ est une application rationnelle de $X\times T$ dans G. Notons $k_x : T\to X\times T$ le morphisme $t \rightsquigarrow (x,t)$.

<u>1.3.1. lère étape</u>. - <u>Montrons qu'on peut choisir de façon unique w_σ tel que</u> $w_\sigma \circ k_x = 1$.

Puisque $\{x\}\times T \not\subset \operatorname{Supp} D$, $k_x^*(D)$ est défini ; il en est donc de même de $k_x^*(w_\sigma) = w_\sigma\circ k_x$; posons $z = w_\sigma\circ k_x\circ p$; alors $w_\sigma\circ k_x = z\circ k_x$ et $\operatorname{div}_G z = p^*\operatorname{div}_G(z\circ k_x)$, d'où :

$$\sigma^*(D) - D = \operatorname{div}_G(z^{-1} w_\sigma) + p^*(\operatorname{div}_G(w_\sigma\circ k_x) + d_\sigma).$$

Posons alors $w'_\sigma = z^{-1} w_\sigma$, on aura bien $w'_\sigma\circ k_x = 1$ et $\sigma^*(D)-D$ est de la forme $\operatorname{div}_G w'_\sigma + p^*(d'_\sigma)$ où $d'_\sigma\in\delta_\sigma$.

Montrons que w'_σ est unique, il s'agit de vérifier que si une application rationnelle w'' de $X\times T$ dans G est telle que $\operatorname{div}_G(w'') = p^*(d'')$, où d'' est un diviseur de type G sur T et que $w''\circ k_x = 1$, alors $w'' = 1$. Pour tout $t\in T$ notons $j_t : X\to X\times T$ le morphisme $x \rightsquigarrow (x,t)$. Pour $t\notin \operatorname{Supp} d''$, $j_t^*(\operatorname{div}_G w'')$ est défini et nul, donc $\operatorname{div}_G(w''\circ j_t) = 0$.

Puisque G est affine et que X est semi-complète, $w''\circ j_t$ est constante. Puisque $w''\circ k_x = 1$, $w''(t,x) = 1$, donc $w''\circ j_t = 1$ pour tout $t\notin \operatorname{Supp} d''$, donc $w'' = 1$.

Nous supposerons dans la suite de la démonstration que $w_\sigma\circ k_x = 1$. Alors, $t_o \notin \operatorname{Supp}(D\circ k_x)\cup \operatorname{Supp}(\sigma^*(D)\circ k_x)\cup \operatorname{Supp}(\operatorname{div}_G w_\sigma\circ k_x)$, donc $t_o\notin \operatorname{Supp} d_\sigma$.

1.3.2. 2ème étape. - Fin de la démonstration.

Quels que soient $\sigma, \tau \in \Gamma$, $((w_\sigma \circledcirc \tau)w_\tau) \circledcirc k_X = 1$ et
$$(\sigma\circ\tau)^*(D) - D = \tau^*(\sigma^*(D) - D) + \tau^*(D) - D\ ;$$
l'assertion d'unicité de (1.3.1) montre donc que $w_{\sigma\tau} = (w_\sigma \circledcirc \tau)\, w_\tau$, autrement dit que $(w_\sigma)_{\sigma\in\Gamma}$ est un 1-cocycle de Γ à valeurs dans le groupe $F^G_{X\times T}$ des applications rationnelles de $X\times T$ dans G. D'après le lemme (1.4) ci-dessous, $H^1(\Gamma, F^G_{X\times T}) = 0$; donc $(w_\sigma)_{\sigma\in\Gamma}$ est un 1-cobord de Γ à valeurs dans $F^G_{X\times T}$, autrement dit, il existe une application rationnelle w de $X\times T$ dans G telle que $w_\sigma = (w \circledcirc \sigma)\, w^{-1}$. On a par conséquent $\sigma^*(D) - D = \mathrm{div}_G((w\circledcirc\sigma)w^{-1}) + p^*(d_\sigma)$ pour tout $\sigma\in\Gamma$.

Posons $D' = D - \mathrm{div}_G\, w$; alors D' est un élément de Δ tel que $\sigma^*(D') - D' = p^*(d_\sigma)$ pour tout $\sigma\in\Gamma$. Posons alors $S_o = \complement_S \bigcup_{\sigma\in\Gamma} h(\mathrm{Supp}\ d_\sigma)$. Puisque h est propre, S_o est un ouvert non vide de S tel que si on note D_1 la restriction de D' à $X\times T_o$, où $T_o = h^{-1}(S_o)$, on ait $\sigma^*(D_1) = D_1$ pour tout $\sigma\in\Gamma$. Alors (1.2), $D_1 = (id_X \times h)^*(D_o)$, où D_o est un diviseur de type G sur $X\times S_o$. Soit Δ_o la classe de D_o ; si on note $i : X\times T_o \to X\times T$ l'immersion canonique, $(id_X \times (h|T_o))^*(\Delta_o) = i^*(\Delta)$ donc Δ_o est une classe de définition de la restriction à S_o de f. Enfin, par construction $h(t_o)\in S_o$, et la dernière assertion résulte de (V.3.3).

Lemme 1.4. - *Soient* S *une variété,* (T,h) *un revêtement galoisien non ramifié de* S *de groupe d'automorphismes* Γ, G *un groupe algébrique linéaire commutatif, connexe unipotent, et* F^G_T *le groupe des applications rationnelles de* T *dans* G. *Alors* $H^1(\Gamma, F^G_T) = 0$.

Considérons le groupe H^* associé à G comme un début de la démonstration de (1.2). Notons K' [resp. k'] le corps des fonctions rationnelles de T [resp. S]. Alors K' est une extension galoisienne de k' de groupe Γ. Avec les notations de (IV.1.0), $\mathfrak{H}_T = \mathfrak{H}_S \otimes_{k'} K'$, et $F^{H^*}_T$ est le groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{H}_T$, donc ([20],X,1,exercice 2) on a $H^1(\Gamma, F^{H^*}_T) = 0$.

Soit alors $(w_\sigma)_{\sigma\in\Gamma}$ un 1-cocycle de Γ à valeurs dans F^G_T, on peut le considérer comme un 1-cocycle de Γ à valeurs dans $F^{H^*}_T$, donc il existe une application rationnelle w' de $X\times T$ dans H^* telle que $w_\sigma = (w' \circledcirc \sigma)\, w'^{-1}$ pour tout $\sigma\in\Gamma$. Notons $p : H^* \to H^*/G$ l'application canonique. Puisque $p\circ w_\sigma = 0$, on a $p\circ(w'\circledcirc\sigma) = p\circ w'$. Puisque H^*/G est affine (théorème de Chevalley [4]), on en déduit [6] que $p\circ w'$ est de la forme $v'' \circledcirc h$, où v'' est une application rationnelle de S dans H^*/G. D'après [16], il existe une section rationnelle ρ de p. Il existe $a \in H^*/G$ tel que ρ soit régulière en a, et il existe $s\in S$ tel que v' soit régulière en s ; enfin il existe $b\in H$ tel que :

$$p(b) = a^{-1}\, v''(s).$$

Alors $v'_1 = \rho \circledcirc (v''(s)^{-1}\, a\, v'')$ est défini et on a $p\circ v'_1 = v''(s)^{-1}\, a\, v''$; posons $v' = b\, v'_1$, nous avons $p\circ v' = v''$.

Posons $w = w'(v'^{-1} \circledcirc h)$; puisque $p\circ w' = v'' \circledcirc h = p\circ v' \circledcirc h$, on voit que $p\circ w = 1$, donc w est en fait une application rationnelle de T dans G. Enfin, pour tout $\sigma \in \Gamma$, $(v' \circledcirc h) \circledcirc \sigma = v' \circledcirc h$, donc $(w\circledcirc\sigma)w^{-1} = (w'\circledcirc\sigma)w'^{-1} = w_\sigma$, ce qui montre que $(w_\sigma)_{\sigma\in\Gamma}$ est un 1-cobord de Γ à valeurs dans F_T^G, autrement dit que $H^1(\Gamma, F_T^G) = 0$.

<u>Corollaire 1.5</u>. - <u>Soient</u> X <u>une variété semi-complète,</u> H <u>un groupe algébrique connexe,</u> H' <u>un sous-groupe algébrique invariant de</u> H, $h : H \to H/H'$ <u>le morphisme canonique,</u> G <u>un groupe algébrique linéaire commutatif, et</u> g <u>un homomorphisme (de groupes) de</u> H <u>dans</u> (X,G). <u>Supposons que</u> H' <u>soit contenu dans le noyau de</u> g, <u>et que</u> g <u>soit une famille algébrique de classes de diviseurs de type</u> G <u>sur</u> X <u>paramétrée par</u> H ; <u>alors l'application</u> f <u>de</u> H/H' <u>dans</u> (X,G) <u>telle que</u> $f\circ h = g$, <u>est une famille algébrique de classes de diviseurs de type</u> G <u>sur</u> X <u>paramétrée par</u> H/H'.

D'après ([6],exp.1,prop.3), le fibré (H,h) est isotrivial sur H/H'. Donc, quelque soit $a'' \in H/H'$, il existe un ouvert V'' de H/H' contenant a'', et un revêtement non ramifié (V''_1, p_1) de V'', tel que l'image réciproque (H_1, h_1) du fibré (H,h) par $i\circ p$ soit triviale au-dessus de V''_1, i désignant l'immersion canonique $i : V'' \to H/H'$. Notons $q : H_1 \to H$ le morphisme canonique, et soit $\rho : V''_1 \to H_1$ une section du fibré $(H_1 h_1)$. Alors $f\circ i\circ p_1 = g\circ q\circ\rho$. Puisque g est une famille algébrique, il en est de même de son image réciproque $g\circ q\circ\rho$ par $q\circ\rho$ (I,4.2). Puisque $f\circ i\circ p_1$ est une famille algébrique, il en est de même de $f\circ i$ (1.3). Donc il existe un recouvrement ouvert de H/H' tel que la restriction de f à chacun des ouverts de ce recouvrement soit une famille algébrique. D'après (V,3.3.) il en est de même de f, C.Q.F.D.

2. Descente dans le cas radiciel.

<u>2.1. - Rappels sur les fibrés intégrables ([8],exposé 6, parag.3).</u>

Dans ce numéro, nous supposons que K est de caractéristique $p > 0$. Soit T une variété non singulière ; notons $\mathbb{T}^T$ l'espace fibré des vecteurs tangents à T. Pour tout point Q de T, les germes de sections de $\mathbb{T}^T$ au voisinage de Q forment un module libre $\mathcal{I}_Q$ de rang $n = \dim T$ sur $\mathcal{O}_{T,Q}$, et $\mathcal{I}_Q$ possède une structure de p-anneau de lie. Soit $\mathbb{N}$ un sous-fibré vectoriel de $\mathbb{T}^T$, et soit $\mathcal{N}_Q$ le module des germes de section de $\mathbb{N}$ au voisinage de Q. Si pour tout $Q \in T$, $\mathcal{N}_Q$ est stable par rapport aux opérations de crochet et de puissance $p^{\text{ième}}$ dans I_Q, on dit que $\mathbb{N}$ est un sous fibré <u>intégrable</u> de $\mathbb{T}^T$.

Soient T' une variété non singulière et $i : T' \to T$ un morphisme de revêtement radiciel sur une variété T. Supposons que le noyau de di soit un sous-fibré $\mathbb{N}$ de $\mathbb{T}^T$ (condition qui est réalisé pourvu qu'on se restreigne à un ouvert convenable de T), alors $\mathbb{N}$ est un sous-fibré intégrable de $\mathbb{T}^T$. En particulier, si T et T' sont deux groupes algèbriques connexes, et si i est un homomorphisme (de groupes algèbriques) radiciel, alors le noyau de di est un sous-fibré invariant et intégrable de $\mathbb{T}^T$.

<u>Théorème 2.2.([8],exp.6,Th.2).</u> - <u>Soient</u> T' <u>une variété non singulière et</u> $\mathbb{N}$ <u>un sous-fibré intégrable de</u> $\mathbb{T}^{T'}$: <u>il existe une structure de variété</u> T <u>et une seule sur l'espace topologique sous-jacent à</u> T' <u>telle que l'application identique</u> $i : T' \to T$ <u>soit un morphisme de revêtement radiciel de hauteur 1, et que</u> $\mathbb{N}$ <u>soit le noyau de</u> di ; <u>de plus</u> T <u>est alors une variété non singulière</u>. <u>Si on suppose de plus que</u> T' <u>est un groupe algèbrique connexe et que</u> $\mathbb{N}$ <u>est un sous-fibré invariant de</u> $\mathbb{T}^{T'}$, <u>alors</u> T <u>est un groupe algèbrique connexe et</u> i <u>est un homomorphisme</u>. <u>Nous appelerons</u> T <u>la variété quotient de</u> T' <u>par</u> $\mathbb{N}$.

<u>Proposition 2.3.</u> - <u>Soient</u> T <u>une variété non singulière</u>, $\mathbb{N}$ <u>un sous-fibré intégrable de</u> $\mathbb{T}^T$, $i : T \to S$ <u>le morphisme canonique de</u> T <u>sur la variété quotient</u> S <u>de</u> T <u>par</u> $\mathbb{N}$, X <u>une variété</u>, G <u>un groupe algèbrique linéaire commutatif</u>, $(D_t)_{t\in T}$ <u>une famille algèbrique de diviseurs de type</u> G <u>sur</u> X <u>telle que pour tout vecteur tangent</u> $L \in \mathbb{N}$, <u>on ait</u> $\langle (D_t)_{t\in T}, L \rangle = 0$. <u>Alors la famille</u> $(D_t)_{t\in T}$ <u>est image réciproque par</u> i <u>d'une famille algèbrique de diviseurs sur</u> X <u>de type</u> G <u>paramètrée par</u> S .

<u>(2.3.1) lère étape:réduction au cas où</u> G <u>est de type</u> A^*_u .

D'après (I,5.8) nous pouvons supposer G connexe.

D'après le lemme (V,2.5) nous pouvons considérer G comme un sous-groupe d'un produit W de groupes de type A^*. Supposons la propriété vraie pour W.

Notons $j : G \to W$ et $p : W \to W/G$ les morphismes canoniques. Posons $D' = j \circ D$, où D est le diviseur de définition de $(D_t)_{t\in T}$. Il résulte des définitions de (II,1.2) que $\langle j\circ D, L \rangle = dj \circ \langle D, L \rangle$ pour tout $L \in \mathbb{T}^T$; donc pour tout $L \in \mathbb{N}$, on a $\langle D', L \rangle = 0$, et D' est de la forme $i_1^*(E)$, où E est un diviseur de type G sur $X \times S$ et où $i_1 : X \times T \to X \times S$ est le morphisme $id_X \times i$. On a $p \circ D' = 0$. Soit $t \in S$ et soit f une application de définition de $p \circ E'$ en t ; alors $f \circ i_1$ est une application de définition de $p \circ D'$ en t, donc $f \circ i_1$ est une application régulière en t. Or W/G est affine (théorème de Chevalley [4]), donc pour montrer que f est régulière en t,il suffit de montrer que toute fonction ϕ sur $X \times S$ telle que $\phi \circ i_1$ soit régulière en t, est régulière en t, ce qui résulte de ([8] exp.6, prop.7).

Donc $f \circ i_1$ est régulière en t, si bien que $p \circ E' = 0$. Donc E' est de la forme $j \circ E$, où E est un diviseur de type G sur $X \times S$ (I,5.4). Alors $D = i_1(E)$, et nous sommes ramenés à démontrer la proposition dans le cas où $G=W$.

D'après (I,5.9), il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $G = A^*$. Comme $A^* = G_m \times A_u^*$, d'après (I,5.9), puisque la proposition est vraie pour G_m ([8],exp.6,Th.3), il suffit de montrer la proposition dans le cas où $G = A_u^*$.

Nous considérons A_u^* comme muni de son système canonique de coordonnées (V.1.2).

Soient D le diviseur de définition de $(D_t)_{t\varepsilon T}, (x_o,t_o) \varepsilon X \times T$, et f une application de définition de D en (x_o,t_o). Soient $y_1,\ldots,y_r$ un système d'éléments de $\mathcal{O}_{x_o,t_o}$ provenant d'une partie d'un système de variables uniformisantes de $\mathcal{O}_{t_o}$ et qui forment une p-base de $\mathcal{O}_{x_o,t_o}$ sur $\mathcal{O}_{x_o,s_o}$, où $s_o = i(t_o)$ (cf [8],exp.6, prop.7). Soient $\frac{\partial}{\partial y_i}$ les dérivations de $\mathcal{O}_{x_o,t_o}$ nulles sur $\mathcal{O}_{x_o,s_o}$ telles que $\frac{\partial}{\partial y_i}(y_{ij}) = \delta_{ij}$, et soit T_o un ouvert affine de T sur lequel chacun des y_i soit régulier. Les $\frac{\partial}{\partial y_i}$ proviennent alors de sections de $\mathbb{N}$ au-dessus de T_o.

<u>2.3.2. 2ème étape. - Montrons qu'il existe une application rationnelle θ de</u> $X \times T$ <u>dans</u> A_u^*, <u>régulière en</u> (x_o,t_o), <u>telle que</u> $f - \theta$ <u>provienne d'une application rationnelle de</u> $X \times S$ <u>dans</u> A_u^*.

$$< D,\frac{\partial}{\partial y_i} > \text{ est un diviseur de type } (G_a)^n \text{ sur } X \times T_o\text{, où } n = \dim A_u^*,$$

dont la restriction à $X \times \{t\}$, pour tout $t \varepsilon T_o$, est nulle par hypothèse, donc c'est le diviseur nul (II,2.1) ; donc l'application $< f,\frac{\partial}{\partial y_i} >$ est régulière en (x_o,t_o).

Notons $< f,\frac{\partial}{\partial y_i} >_j$ la jième coordonnée de $< f,\frac{\partial}{\partial y_i} >$. On vérifie aisément que $< f,\frac{\partial}{\partial y_i} >_\ell = \frac{\partial f_\ell}{\partial y_i} + \sum_{q=1}^{\ell-1} P_{iq}(f_1,\ldots,f_{\ell-1}) \frac{\partial f_q}{\partial f_i}$ où les P_{iq} sont des polynômes. En particulier, si :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_i} = \ldots = \frac{\partial f_{\ell-1}}{\partial y_i} = 0 \text{ , alors } < f,\frac{\partial}{\partial y_i} >_\ell = \frac{\partial f_\ell}{\partial y_i} .$$

Nous allons trouver par récurrence sur n une application $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$

de $X \times T$ dans A^*_u, régulière en (x_o,t_o) telle que :

$< f.\theta, \frac{\partial}{\partial y_i} > = 0$ pour i de 1 à r.

Notons C l'opérateur de Cartier ([3],II, parag.6).

Posons $d = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial y_i} dy_i$; alors $< f,d >_1 = df_1$ est régulière en (x_o,t_o) $C(df_1) = 0$ et $d(df_1) = 0$, donc ([3]II,prop.8) il existe une fonction θ_1 sur $X \times T$ régulière en (x_o,t_o) telle que $d\theta_1 = - df_1$. On aura alors :

$< f\theta_1,d >_1 = d(f_1+\theta_1) = 0$.

Supposons qu'on ait trouvé des fonctions $\theta_1,\dots,\theta_\ell$ sur $X \times T$ régulières en (x_o,t_o) telles que $< f.(\theta_1,\dots,\theta_\ell,0,\dots,0),d >_q = 0$ pour $q \leqq \ell$, et montrons qu'on peut trouver une fonction $\theta_{\ell+1}$ sur $X \times T$ régulière en (x_o,t_o) telle que $< f.(\theta_1,\dots,\theta_{\ell+1},0,\dots,0),d >_q = 0$ pour $q \leqq \ell+1$.

Posons $g^\ell = f(\theta_1,\dots,\theta_\ell,0,\dots,0)$ et $g^{\ell+1} = f(\theta_1,\dots,\theta_{\ell+1},0,\dots,0)$. Alors $< g^{\ell+1},d >_q = < g^\ell,d >_q = 0$ pour $q \leqq \ell$. Puisque, lorsque :

$\frac{\partial}{\partial y_i} g^\ell_s = 0$ pour $s < q$,

on a $\frac{\partial}{\partial y_i} g^\ell_q = < g^\ell, \frac{\partial}{\partial y_i} >_q$,

on voit facilement par récurrence sur q que $\frac{\partial}{\partial y_i} g^\ell_q = 0$ pour tout $q \leqq \ell$ et pour tout i de 1 à r. Par conséquent :

$< g^{\ell+1},d >_{\ell+1} = < g^{\ell+1}_{\ell+1},d > = d[(g^\ell.(0,0,\dots 0,\theta_{\ell+1},0,\dots,0))_{\ell+1}] = d(g^\ell_{\ell+1} + \theta_{\ell+1})$

Comme $< f,d >$ est régulière en (x_o,t_o) ainsi que $\theta_1,\dots,\theta_\ell$, il en est de même de $< g^\ell,d >$, donc de $dg^\ell_{\ell+1}$. Puisque $C(dg^\ell_{\ell+1}) = d(dg^\ell_{\ell+1}) = 0$, il existe une fonction $\theta_{\ell+1}$ sur $X \times T$ régulière en (x_o,t_o) et telle que $d\theta_{\ell+1} = - dg^\ell_{\ell+1}$. On aura alors :

$< g^{\ell+1},d >_q = 0$ pour $q \leqq \ell+1$.

Nous avons donc montré par récurrence sur n l'existence d'une application rationnelle θ de $X \times T$ dans A^*_u régulière en (x_o,t_o) telle que $< f.\theta,d > = 0$. Alors $< (f.\theta)_j,d > = 0$ pour j de 1 à n donc $f.\theta$ provient d'une application rationnelle ϕ de $X \times S$ dans A^*_u et $f.\theta$ est aussi application de définition de D au point (x_o,t_o).

<u>2.3.3. 3ème étape</u>. - <u>Fin de la démonstration</u>.

A tout point $(x_o,t_o) \in X \times T$, nous pouvons donc associer une application de définition f_{x_o,t_o} de D en (x_o,t_o) et une application rationnelle θ_{x_o,t_o} de

$X \times T$ dans A_u^* telle que θ_{x_o,t_o} soit régulière en (x_o,t_o) et que f_{x_o,t_o} θ_{x_o,t_o} provienne d'une application ϕ_{x_o,t_o} de $X \times S$ dans A_u^*. Notons U_{x_o,t_o} l'intersection de l'ouvert de définition de θ_{x_o,t_o} et de l'ouvert de $X \times T$ dans lequel f_{x_o,t_o} est d'application de définition. On vérifie immédiatement que le système d'ouverts U_{x_o,t_o} et d'applications rationnelles ϕ_{x_o,t_o} de $X \times S$ dans A_u^* définit un diviseur E de type A_u^* sur $X \times S$ tel que $D = i^*(E)$. Donc $(D_t)_{t\varepsilon T}$ est l'image réciproque par i de la famille algèbrique $(E_s)_{s\varepsilon S}$.

Théorème 2.4. - Soient T,S,i,G et $\mathbb{N}$ comme dans l'énoncé précédent. Supposons de plus X semi-complète. Soit $(\Delta_t)_{t\varepsilon T}$ une famille algébrique de classes de diviseurs sur X de type G paramétrée par T telle que pour tout $L \varepsilon \mathbb{N}$, on ait $< (\Delta_t)_{t\varepsilon T}, L > = 0$. Alors $(\Delta_t)_{t\varepsilon T}$ est image réciproque par i d'une famille algébrique de classes de diviseurs de type G sur X paramètrée par S.

2.4.1. lère étape. - Supposons d'abord que G soit du type A_u^*.

Soit Δ une classe de définition de $(\Delta_t)_{t\varepsilon T}$. D'après (V,3.3.) il suffit de montrer que pour tout $t_o \varepsilon T$, il existe un ouvert affine T_o de T contenant t_o tel que la restriction de Δ à $X \times T_o$ provienne d'une classe de diviseurs sur $X \times i(T_o)$. D'après (2.3), il suffit de montrer qu'il existe un diviseur D de type G sur $X \times T_o$ appartenant à la restriction de Δ à $X \times T_o$ tel que $< D,L > = 0$ pour tout $L \varepsilon \mathbb{N}$.

Etant donné $(x_o,t_o) \varepsilon X \times T$, et un ouvert affine T_o de T contenant t_o, on choisit les y_i comme dans la démonstration de (2.3). Quitte à restreindre le voisinage ouvert affine T_o, on peut supposer qu'il existe $D_o \varepsilon \Delta$ tel que la restriction de D_o à $x_o \times T_o$ soit définie et nulle (I,2.3). Notons $p : X \times T_o \to T_o$ la projection canonique.

Par hypothèse la classe de diviseurs $< \Delta, \frac{\partial}{\partial y_i} >$ de type $(G_a)^n$ (où $n = \dim G$) sur $X \times T$ est telle que, pour tout $t \varepsilon T_o$, sa restriction à $X \times \{t\}$ est nulle ; donc (V,3.1), sa restriction à $X \times T_o$ est de la forme $p\,(\delta)$, où $\delta \varepsilon H^1(T_o,(G_a)^n) = 0$ ([17]II,parag.2,Th.3), donc est nulle. Par conséquent, les diviseurs de type $(G_a)^n$ sur $X \times T_o$ définis par la formule $< D_o, \frac{\partial}{\partial y_i} >$ peuvent être définis sur $X \times T_o$ par des applications rationnelles $g^i (1 \leq i \leq r)$ de $X \times T_o$ dans $(G_a)^n$.

2.4.2. 2ème étape. - Montrons qu'il existe une application rationnelle $h = (h_1,\dots,h_n)$ de $X \times T$ dans G telle que le diviseur $D = D_o + \mathrm{div}_G\, h$ ait au point (x_o,t_o) une application de définition provenant d'une application rationnelle de $X \times S$ dans G, et que $< D, \frac{\partial}{\partial y_i} > = 0$ pour i de 1 à r.

D'abord, puisque la restriction de D_o à $\{x_o\} \times T_o$ est définie et nulle chacune des g^i est régulière en tout point de $\{x_o\} \times T_o$, donc on peut choisir g^i de sorte que g^i soit nulle en tout point de $\{x_o\} \times T_o$. En effet, il existe une application régulière h^i de $\{x_o\} \times T_o$ dans G, telle que $g^i + h^i$ soit nulle en tout point de $\{x_o\} \times T_o$; mais h^i provient d'une application régulière h'^i de T_o dans G, alors $g^i + h'^i \circ p$ est nulle en tout point de $\{x_o\} \times T_o$ et définit le même diviseur que g^i. Nous supposerons désormais que g^i est nulle en tout point de $\{x_o\} \times T_o$.

Posons $\omega_1 = \Sigma\, g_1^i\, dy_i$. Soit $f = (f_1,\dots,f_n)$ une application de définition de D_o en (x_o,t_o). Posons $\omega_1' = \Sigma \frac{\partial}{\partial y_i} f_1\, dy_i = < d,f >_1$, chacune des applications $g_1^i - \frac{\partial}{\partial y_i} f_1$ est régulière en (x_o,t_o). Posons :

$$\lambda_{ij}(\omega_1) = \frac{\partial}{\partial y_i}(g_1^j) - \frac{\partial}{\partial y_j}(g_1^i)$$

et $$\mu_i(\omega_1) = \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^{p-1}(g_1^i).$$

On définit de même $\lambda_{ij}(\omega_1')$ et $\mu_i(\omega_1')$. Or :

$$\lambda_{ij}(\omega_1) = \lambda_{ij}\Big(\sum_{i=1}^{r} \big(g_1^i - \frac{\partial}{\partial y_i} f_1\big)dy_i\Big) + \lambda_{ij}(\omega_1') = \lambda_{ij}\Big(\sum_{i=1}^{r} \big(g_1^i - \frac{\partial}{\partial y_i} f_1\big)dy_i\Big)$$

ce qui montre que $\lambda_{ij}(\omega_1)$ est régulière en (x_o,t_o) donc en tout point de $X \times T_o$ donc (puisque X est semi-complète), pour tout $t \in T_o$, $\lambda_{ij}(\omega_1)$ est constante sur $X \times \{t\}$. D'après le choix des g_i, $\lambda_{ij}(\omega_1) = 0$ sur $\{x_o\} \times T_o$, donc $\lambda_{ij}(\omega_1) = 0$ sur $X \times T_o$. De même, puisque $d(df_1) = C(df_1) = 0$, on a : $\lambda_{ij}(\omega_1') = 0$, d'où $\mu_i(\omega_1) = \mu_i\big(\sum_{i=1} (g_1^i - \frac{\partial}{\partial y_i} f_i)dy_i\big)$, si bien que $\mu_i(\omega_1)$ est régulière sur $X \times T_o$, donc constante sur $X \times \{t\}$ pour $t \in T_o$, et nulle sur $\{x_o\} \times T_o$, donc nulle sur $X \times T_o$.

Puisque $\lambda_{ij}(\omega_1) = 0$, pour tout (i,j), on a $d\omega_1 = 0$. Puisque $d\omega_1 = 0$ et $\mu_i(\omega_1) = 0$, on a $C\omega_1 = 0$ ([8] exp.6, prop.3). Donc ([3]II, prop.8), il existe une fonction rationnelle h_1 sur $X \times T$ telle que $dh_1 = - d\omega_1$. Posons $D_1 = D_o + \mathrm{div}\,(h_1,0,\dots,0)$.

D'après la démonstration de (2.3), puisque pour tout i de 1 à r on a $< D_1, \frac{\partial}{\partial y_i} >_1 = \mathrm{div}\,(g_1^i + \frac{\partial}{\partial y_i} f_1) = 0$, on voit qu'il existe une application de définition f' de D_1 en (x_o,t_o) telle que f'_1 provienne d'une fonction rationnelle de $X \times S$ et on a $< D_1, \frac{\partial}{\partial y_i} >_1 = 0$ pour i de 1 à r.

Supposons maintenant qu'on ait trouvé des fonctions rationnelles $h_1,\ldots,h_\ell$ de $X \times T$ dans G telles que le diviseur $D_\ell = D_o + \mathrm{div}_G(h_1,\ldots,h_\ell,0,\ldots,0)$ ait en (x_o,t_o) une application de définition f telle que $f_1,\ldots,f_\ell$ proviennent de fonctions rationnelles de $X \times S$ et que $< D_\ell, \frac{\partial}{\partial y_i} >_q = 0$ pour $q \leqq \ell$ et i de 1 à r.

Posons $D_{\ell+1} = D_o + \mathrm{div}_G(h_1,\ldots,h_{\ell+1},0,\ldots,0)$. D'après ce qui précède $< D_\ell, \frac{\partial}{\partial y_i} >$ peut être défini par une application rationnelle g'^i de $X \times T$ dans G, telle que $g'^i_1 = \ldots = g'^i_\ell = 0$, et on peut choisir $g'^i_{\ell+1}$ nul sur $\{x_o\} \times T_o$.

Posons $\omega_{\ell+1} = \Sigma\, g'^i_{\ell+1}\, dy_i$ et $\omega'_{\ell+1} = \Sigma \frac{\partial f_{\ell+1}}{\partial y_i} dy_i$.

Puisque $df_1 = \ldots = df_\ell = 0$, on a $\omega'_{\ell+1} = < f,d >_{\ell+1}$. Puisque : $\frac{\partial f_{\ell+1}}{\partial y_i} = < f, \frac{\partial}{\partial y_i} >_{\ell+1}$, chacune des applications rationnelles $g'^i_{\ell+1} - \frac{\partial f_{\ell+1}}{\partial y_i}$ est régulière au point (x_o,t_o).

On montre comme précédemment que $d\omega_{\ell+1} = 0$ et $C\omega_{\ell+1} = 0$, donc qu'il existe une fonction rationnelle $h_{\ell+1}$ sur $X \times T$ telle que $dh_{\ell+1} = -\, d\omega_{\ell+1}$. Alors, pour ce choix de $h_{\ell+1}$, on a $< D_{\ell+1}, \frac{\partial}{\partial y_i} >_{\ell+1} = \mathrm{div}(g'^i_{\ell+1} + \frac{\partial}{\partial y_i} f_{\ell+1}) = 0$ pour tout i de 1 à r puisque $g'^i_1 = \ldots = g'^i_\ell = 0$, donc, d'après la démonstration de (2.3), il existe une application de définition f' de $D_{\ell+1}$ en (x_o,t_o) telle que $f'_1,\ldots,f'_{\ell+1}$ proviennent de fonctions rationnelles sur $X \times S$ et $< D_{\ell+1}, \frac{\partial}{\partial y_i} >_q = 0$ pour $q \leqq \ell+1$ et i de 1 à r.

Nous avons donc démontré l'assertion (2.4.2) par récurrence sur ℓ.

2.4.3. 3ème étape. - Fin de la démonstration.

Nous avons montré qu'il existe un diviseur $D \in \Delta$ tel que $< D, \frac{\partial}{\partial y_i} > = 0$ pour i de 1 à r. Alors pour tout $L \in \mathbb{N}$, $< D,L > = 0$. Donc (2.3), il existe un diviseur E de type G sur $X \times S$ tel que $D = i^*(E)$. Soit Γ la classe de E, on a $\Delta = i^*(\Gamma)$, et Γ est la classe de définition d'une famille algébrique $(\Gamma_s)_{s\in S}$ de classes de diviseurs de type G sur X paramétrée par S dont $(\Delta_t)_{t\in T}$ est l'image réciproque par i, ce qui démontre la proposition dans le cas où G est du type A^*_u. Comme la proposition est vraie dans le cas où $G = G_m$

([8],exp.6,TH.4), on déduit de (I,5.9) que la proposition est vraie dans le cas où G est isomorphe à $G_m \times A_u^* = A^*$. Il en résulte, toujours d'après (I,5.9) que la proposition est vraie dans le cas où G est produit de groupes du type A^*, C.Q.F.D.

Dans le cas général, d'après (V,2.5), G peut être considéré comme sous-groupe d'un produit W de groupes du type A^*. Notons $f' : T \to \mathscr{C}(X,G)$ la famille $(\Delta_t)_{t\in T}$. D'après (V,3.6), si on note $j : G \to W$ et $p : W \to W/G$ les morphismes canoniques, $\mathscr{C}(X,j)\circ f' \in A(T, \mathscr{C}(X,W))$. Il résulte de (III,1,10) que si Δ est une classe de définition de f', $< j\circ\Delta, L > = dj\circ<\Delta,L>$ pour tout $L \in \mathbb{T}^T$, donc $< \mathscr{C}(X,j)\circ f', L > = dj_\circ< f',L >$, ce qui montre que $< \mathscr{C}(X,j)\circ f',L > = 0$ pour tout $L \in \mathbb{N}$. Donc $f = \mathscr{C}(X,j)\circ f'$ se factorise à travers i au moyen de $g \in A(S, \mathscr{C}(X,W)$. Comme $p\circ j\circ\Delta = 0$, $\mathscr{C}(X,p)\circ f = 0$. Comme i est bijectif, et que $f = g\circ i$, $\mathscr{C}(X,p)\circ g = 0$, et il résulte de (V,3.7) que g est de la forme $\mathscr{C}(X,i)\circ g'$ où $g' \in A(S, \mathscr{C}(X,G))$. Il est clair que $i\circ g' = f'$, C.Q.F.D.

CHAPITRE VII - CORPS DE RATIONALITE D'UNE CLASSE DE DIVISEURS.

1. Généralités.

1.0. Notations.- Soient K un corps algébriquement clos, K_o un sous-corps algébriquement clos de K, X une variété définie sur K_o, G un groupe algébrique linéaire commutatif unipotent connexe défini sur K_o, que nous considérerons comme isomorphe, en tant que variété, à $(G_a)^n$, à l'aide d'un système de coordonnées globales ayant les propriétés décrites dans l'énoncé du lemme (V,3.4.). Notons U l'extension de X à K, et $K_o(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X.

Définition 1.1.- Soient D un diviseur de type G sur U, et K' un sous-corps de K contenant K_o ; nous dirons que D est rationnel sur K' s'il peut être défini par un système d'ouverts $(U_i)_{i\epsilon I}$ rationnels sur K' et d'applications $(f_i)_{i\epsilon I}$ rationnelles sur K' (c'est-à-dire dont toutes les coordonnées sont rationnelles sur K').

Définition 1.2.- Soient Δ une classe de diviseurs de type G sur U, et K' un sous-corpt de K contenant K_o ; nous dirons que Δ est rationnelle sur K' si elle contient un diviseur rationnel sur K'. Il revient au même de dire que Δ peut être défini par un système d'ouverts $(U_i)_{i\epsilon I}$ rationnels sur K', et d'applications de transition $(\theta_{ij})_{i,j\epsilon I}$ rationnelles sur K' (cf. I,1.4).

1.3.- Correspondance entre classes de diviseurs rationnelles sur $K_o(T)$ et familles algébriques de classes de diviseurs paramétrées par T.

Soient T une variété définie sur K_o telle que K contienne $K_o(T)$. Soit $f \epsilon A(T,\mathscr{C}(X,G))$ et soit Δ une classe de définition de f. Alors Δ est définie par un système d'ouverts $(V_i)_{i\epsilon I}$ et d'applications de transition $(\theta_{ij})_{i,j\epsilon I}$ de $X \times T$ dans G régulières sur $V_i \cap V_j$.

Au système d'ouverts $(V_i)_{i\epsilon I}$ recouvrant $X \times T$ correspond un système d'ouverts $(U_i)_{i\epsilon I}$ rationnels sur $K_o(T)$ et recouvrant U, et au système $(\theta_{ij})_{i,j\epsilon I}$ correspond un système $(\phi_{ij})_{i\epsilon I}$ d'applications rationnelles de U dans G, rationnelles sur $K_o(T)$ et régulières sur $U_i \cap U_j$. Notons $K(f)$ la classe de diviseurs de type G sur U définie par le système d'ouverts $(U_i)_{i\epsilon I}$ et d'applications de transition $(\phi_{ij})_{i,j\epsilon I}$. On vérifie aisément que $K(f)$ est rationnelle sur $K_o(T)$ et ne dépend pas du choix de la classe de définition Δ de f.

Réciproquement, soit δ une classe de diviseurs de type G sur U rationnelle sur $K_o(T)$; alors δ peut être définie par un système d'ouverts $(U_i)_{i\varepsilon I}$ rationnels sur $K_o(T)$ et d'applications de transition $(\phi_{ij})_{i,j\varepsilon I}$ rationnelles sur $K_o(T)$. Puisque U est quasi-compact, on peut supposer I fini ; au recouvrement ouvert $(U_i)_{i\varepsilon I}$, correspond un recouvrement ouvert $(V_i)_{i\varepsilon I}$ de $X \times T$, et au système $(\phi_{ij})_{i,j\varepsilon I}$ correspond un système $(\theta_{ij})_{i\varepsilon I}$ d'applications rationnelles de $X \times T$ dans G. Notons T_o le plus grand ouvert de T tel que pour tout $i,j \varepsilon I$, θ_{ij} soit régulière sur $V_i \cap V_j \cap T_o$. Puisque I est fini, $T_o \neq \emptyset$. Soit alors f l'élément de $A(T_o, \mathcal{C}(X,G))$ défini par la classe $\Delta \varepsilon \mathcal{C}(X \times T_o,G)$ définie par le système d'ouverts $(V_i \cap T_o)_{i\varepsilon I}$ et d'applications de transition $(\theta_{ij} | T_o)_{i,j\varepsilon I}$. On vérifie aisément que $K(f) = \delta$.

2. Existence du corps de rationalité d'une classe de diviseurs additifs.

Proposition 2.1.- Soient K un corps algébriquement clos, K_o un sous-corps algébriquement clos de K, X une variété définie sur K_o, U l'extension de X à K, Δ une classe de diviseurs de type G_a sur U ; alors l'ensemble des sous-corps K' de K contenant K_o sur lesquels Δ est rationnelles a un plus petit élément, qui est une extension de type fini de K_o.

Considérons l'espace annelé T' dont les ouverts sont les ouverts de U rationnels sur K', et dont le faisceau est celui des germes des fonctions régulières sur U rationnelles sur K'. En raisonnant comme dans (I,1.5), on voit que le groupe des classes de diviseurs de type G_a sur U rationnelles sur K' est isomorphe à $H^1(T')$. D'autre part, on a $H^o(T') = H^o(X, \mathcal{O}_X) \otimes_{K_o} K'$. On en déduit immédiatement que $H^1(T') = H^1(X, \mathcal{O}_X) \otimes_{K_o} K'$. Or étant donné $\Delta \varepsilon H^1(U, \mathcal{O}_U)$, on sait que l'ensemble des sous-corps K' de K contenant K_o et tels que $\Delta \varepsilon V \otimes_{K_o} K'$ admet un plus petit élément qui est une extension de type fini de K_o, c.q.f.d.

CHAPITRE VIII - VARIETE DE PICARD DE TYPE LINEAIRE COMMUTATIF .

1. Généralités.

Définition 1.1.- Soient X une variété, G un groupe algébrique commutatif, H un groupe algébrique connexe, f une application de H dans $\mathscr{C}(X,G)$; On dit que f est un homomorphisme algébrique (resp. un isomorphisme algébrique) si f est une famille algébrique de classes de diviseurs de type G sur X paramétrée par H et un homomorphisme (resp. un isomorphisme) de groupes.

Définition 1.2.- Soient X une variété, G un groupe algébrique commutatif. Un couple (P, π), où P est un groupe algébrique connexe et où $\pi : P \to \mathscr{C}(X,G)$ est un homomorphisme algébrique, est appelé variété de Picard de type G de X si pour tout couple (H,ϕ), où H est un groupe algébrique connexe et ϕ un homomorphisme algébrique de H dans $\mathscr{C}(X,G)$, il existe un homomorphisme (de groupes algébriques) et un seul $f : H \to P$ tel que $\pi \circ f = \phi$.

Il est clair que le couple (P,π) est unique à isomorphisme près.

Proposition 1.3.- Soient X une variété semi-complète, G un groupe algébrique linéaire commutatif. Si X admet une variété de Picard (P,π) de type G, alors π est injectif.

Soit N le noyau de π ; c'est un sous-groupe distingué de P ; fermé dans P en vertu de (V,2.7). Donc (VI,1.5). π se factorise à travers la projection $p : P \to P/N$ au noyau d'un homomorphisme algébrique $\pi : P/N \to P$ tel que $\pi_1 = \pi \circ \theta$. Alors $\pi_1 \circ p = \pi \circ \theta \circ p = \pi \circ id_G$. Puisque P est une variété de Picard de type G de X, l'égalité $\pi \circ \theta \circ p = \pi \circ id_G$ entraine que $\theta \circ p = id_G$, donc p est injectif et $N = 0$.

Corollaire 1.4.- Sous les hypothèses de (1.3) P est un groupe algébrique commutatif.

C'est une conséquence immédiate de (1.3) puisque $\mathscr{C}(X,G)$ est un groupe abélien.

Proposition 1.5.- Sous les hypothèses de (1.3) pour que la variété de Picard (P,π) de type G de X existe, il faut et il suffit que soit vérifiée la condition suivante :

(C) étant donné un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n \arrow[r, "\theta_n"] \arrow[dr, "\eta_n"'] & H_{n+1} \arrow[r, "\theta_{n+1}"] \arrow[d, "\eta_{n+1}"] & H_{n+2} \arrow[r] \arrow[dl, "\eta_{n+2}"] & \cdots \\
& & \mathscr{C}(X,G) & &
\end{tikzcd}$$

<u>les</u> H_i <u>étant des groupes algébriques connexes, les</u> θ_i <u>des homomorphismes injectifs et les</u> η_i <u>des homomorphismes algébriques injectifs, il existe un entier</u> n_o <u>tel que pour</u> $n \geq n_o$, θ_n <u>soit un isomorphisme</u>.

Il est clair que la condition est nécessaire.

Montrons qu'elle est suffisante. Si H et H^1 sont des groupes algébriques connexes et ϕ, ϕ^1 des homomorphismes algébriques injectifs de H et H^1 respectivement dans $\mathscr{C}(X,G)$, notons $(H,\phi) < (H^1,\phi^1)$ s'il existe un homomorphisme $f : H \to H^1$ qui n'est pas un isomorphisme et tel que $\phi^1 \circ f = \phi$. Par hypothèse, il n'existe aucune suite infinie (H_n,ϕ_n) telle que $(H_n,\phi_n) < (H_{n+1},\phi_{n+1})$ pour tout n. Il existe donc un groupe algébrique P et un homomorphisme algébrique injectif $\pi : P \to \mathscr{C}(X,G)$ tel qu'il n'existe aucun couple (H,ϕ) tel que $(H,\phi) > (P,\pi)$.

Montrons que (P,π) est une variété de Picard de type G de X. Soit H un groupe algébrique connexe et $\phi : H \to \mathscr{C}(X,G)$ un homomorphisme algébrique. Considérons l'homomorphisme algébrique $\theta = \pi+\phi : P \times H \to \mathscr{C}(X,G)$.
Soit N le noyau de θ , N est un sous-groupe invarient et fermé (V,2.7) de $P \times H$, et θ se factorise à travers la projection $p : P \times H \to (P \times H)/N$ en un homomorphisme algébrique $\theta_1 : (P \times H)/N \to \mathscr{C}(X,G)$. (VI,1.5) soit $\mu_1 : P \to (P \times H)/N$ l'homomorphisme défini par $\mu_1(g) = (g,e_H) \bmod N$, où e_H est l'élément neutre de H. On a $\theta_1 \circ \mu_1 = \pi$; puisque π est injectif, μ_1 l'est aussi. Puisque (P,π) est maximal pour la relation $<$, μ_1 est un isomorphisme puisque θ_1 est injectif. Soit $\mu_2 : H \to (P \times H)/N$ l'homomorphisme défini par $\mu_2(g) = (e_G,h) \bmod N$ où e_G est l'élément neutre de G ; posons $f = \mu_1^{-1} \circ \mu_2 : H \to P$. C'est un homomorphisme et on a $\phi = \pi \circ f$. Puisque π est injectif, l'unicité de l'homomorphisme f tel que $\phi = \pi \circ f$ est évidente ; donc (P,π) est la variété de Picard de type G de X.

<u>Corollaire 1.6.</u>- <u>Sous les hypothèses de (1.3), pour que la variété de Picard</u> (P,π) <u>de type</u> G <u>de</u> X <u>existe, il faut et il suffit qu'il existe un entier</u> n <u>tel que pour tout groupe algébrique connexe et tout homomorphisme algébrique injectif</u> $f : H \to \mathscr{C}(X,G)$, <u>on ait</u> $\dim H \leq n$.

D'après ([1], I,1.8, I,1.9, 1.8 et 1.9) on est ramené au cas où G est soit G_m, soit unipotent connexe.

Il est clair que la condition (C) de (1.5) est conjonction des deux conditions suivantes :

(C_1) soit $f : H \to \mathcal{C}(X,G)$ un homomorphisme algébrique injectif d'un groupe algébrique connexe H dans $\mathcal{C}(X,G)$. Alors $\dim H$ est majoré par un entier n indépendant de H.

(C_2) pour tout diagramme commutatif ,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n \arrow[r, "\theta_n"] \arrow[dr, "\eta_n"'] & H_{n+1} \arrow[r, "\theta_{n+1}"] \arrow[d, "\eta_{n+1}"] & H_{n+2} \arrow[r] \arrow[dl, "\eta_{n+2}"] & \cdots\cdots \\
& & \mathcal{C}(X,G) & &
\end{tikzcd}$$

où les H_i sont des groupes algébriques connexes, les η_i des homomorphismes algébriques injectifs, et les θ_i des homomorphismes de revêtement radiciel, il existe n_o tel que pour tout $n \geqq n_o$, θ_n soit un isomorphisme.

La condition (C_1) étant celle de l'énoncé, il suffit de montrer que la condition (C_2) est toujours satisfaite ce qui est évident en caractéristique 0, et ce qui résulte de (4.5) en caractéristique p dans le cas où G est unipotent connexe, et de ([8], exp. 8 §1 propo.5) dans le cas où $G = G_m$.

Lemme 1.7.- Soient X une variété semi-complète, T une variété, G un groupe algébrique linéaire commutatif, H un groupe algébrique connexe, e l'élément neutre de H, $a \in H$, $\ell_a : H \to H$ le morphisme de translation à gauche par a, $L_e \in \mathbb{T}^H_e$, $L_a = d\ell_a(L_e)$; alors, pour tout homomorphisme algébrique $f : H \to \mathcal{C}(X,G)$, on a : $< f, L_a > = < f, L_e >$.

D'après (V,4.4) on a $< f, d\ell_a(L_e) > \; = \; < \ell^*_a(f), L_e >$.

Or $\ell^*_a(f)(h) = f(h) + f(a)$, donc (V,4.1) et (III,1.3) on a :

$< \ell^*_a(f), L_e > = < f, L_e > + < f(a), L_e > = < f, L_e >$, car, puisque $f(a)$ est constant on a $< f(a), L_e > = 0$, ainsi qu'il résulte immédiatement des définitions. Au total, nous avons bien $< f, L_a > = < f, L_e >$.

Lemme 1.8.- Etant donnés une variété X et un groupe algébrique commutatif G, pour que X admette une variété de Picard de type G, il faut et il suffit qu'elle admette une variété de Picard de type G^o, et ces deux variétés de Picard de X

sont isomorphes.

C'est une conséquence immédiate de (I,5.8).

Lemme 1.9.- Soient G_1 et G_2 deux groupes algébriques commutatifs, X une variété. Si X admette une variété de Picard P_1 de type G_1 et une variété de Picard P_2 de type G_2, alors $P_1 \times P_2$ est une variété de Picard de X de type $G_1 \times G_2$.

C'est une conséquence immédiate de (I,5.9).

Proposition 1.10.- Soient X une variété, A une variété abélienne ; alors X admet une variété de Picard de type A : c'est le groupe unité.

Il suffit de montrer que pour tout groupe algébrique connexe H, tout homomorphisme algébrique ϕ de H dans $\mathcal{C}(X,A)$ est nul. Soit Δ une classe de définition de ϕ ; d'après (1.7) Δ est de la forme $\Delta_1 + \Delta_2$, où $\Delta_1 \in \mathcal{C}(X,A)$ et $\Delta_2 \in \mathcal{C}(H,A)$. Donc, si e désigne l'élément neutre de H, $\phi(e) = \Delta_1 = 0$, donc $\Delta \in \mathcal{C}(H,A)$, si bien que $\phi = 0$.

2. Existence en caractéristique 0.

Théorème 2.1.- Soient G un groupe algébrique linéaire commutatif, et X une variété semi-complète définis sur un corps K algébriquement clos de caractéristique 0. Supposons que $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ soit un espace vectoriel de dimension finie sur K (ce qui est le cas si X est complète [18]). Alors X admet une variété de Picard de type G.

Puisque K est de caractéristique 0, on peut supposer que $k = \mathbb{C}$. D'après ([1], (1,8 et (1.9), compte tenu de ([8] esp. 8, Th.1), on est ramené au cas où $G = G_a$, puisque tout groupe unipotent connxe est de la forme $(G_a)^p$.

D'après (1.6), il suffit de montrer l'existence d'un entier n tel que, pour tout groupe algébrique connexe H tel qu'il existe un homomorphisme algébrique injectif $f : H \to \mathcal{C}(X,G)$, on ait $\dim H \leqq n$.

Nous avons vu (V,4.3) que si on note e l'élément neutre de H, et si pour tout $L \in \mathbb{T}_e^H$, on pose $\sigma_f(L) = \langle f,L \rangle$, σ_f est un homomorphisme algébrique de $\mathbb{T}_e^H$ dans $\mathcal{C}(X,G_a)$. Or (I,1.5) on a $\mathcal{C}(X,G_a) = H^1(X,\mathcal{O}_X)$. Posons alors $n = \dim H^1(X,\mathcal{O}_X)$. Pour démontrer que $\dim H \leqq n$, puisque $\dim \mathbb{T}_e^H = \dim H$, il suffit de montrer que si f est injectif, il en est de même de σ_f. Nous sommes donc ramenés à montrer la proposition suivante :

Proposition 2.2.- (Cartier) Soient X une variété semi-complète et H un groupe algébrique connexe définis sur $\mathbb{C}$, et $f : H \to \mathscr{C}(X,G_a)$ un homomorphisme algébrique injectif. Alors l'homomorphisme algébrique $\sigma_f : \mathbb{T}_e^H \to \mathscr{C}(X,G_a)$ défini par $\sigma_f(L) = < f,L >$, e désignant l'élément neutre de H, est injectif.

Soit $L \in \mathbb{T}_e^H$ tel que $L \neq 0$ et $< f,L> = 0$. Soit λ le champ de vecteurs tangents invariant à gauche sur H tel que $\lambda(e) = L$. D'après (1.7) pour tout $s \in H$, $< f,\lambda(s) > = < f,\lambda(e) > = 0$.

Donc l'application $\delta : s \to < \lambda(s),f >$ de H dans $\mathscr{C}(X,G_a)$ est nulle. Nous avons vu (V,4.3) que cette application est une famille algébrique de diviseurs de type G_a sur X paramétrée par H. Soit T_o un ouvert affine de H contenant e ; puisque la restriction δ_o de δ à T_o est nulle, d'après (V,3.1) elle est définie par une classe de la forme $p^*(\lambda)$, où $p : X \times T_o \to T_o$ est la projection canonique et où $\lambda \in \mathscr{C}(T_o,G_a) = H^1(T_o,G_a) = 0$ ([17] II, 2, Th.3). Donc la restriction δ_o de δ à $p^{-1}(T_o)$ est nulle.

Notons $j_t : X \to X \times T_o$ le morphisme $x \rightsquigarrow (x,t)$. D'après (I,2.6) quitte à restreindre le voisinage ouvert affine T_o de e dans H, nous pouvons supposer qu'il existe un diviseur D élément d'une classe de définition de f tel que pour tout $t \in T_o$, $D \odot j_t$ soit défini. Notons D_o la restriction de D à $X \times T_o$; d'après ce qui précède, si on note λ_o la restriction de λ à T_o, $< D_o,\lambda_o >$ est principal.

Considérons $X \times T_o$ comme un espace analytique compact ; à D_o nous pouvons associer un diviseur additif analytique $\bar{D}_o$ sur $X \times T_o$. Il existe alors un voisinage ouvert (analytique) T_1 de e dans T_o, un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i\in I}$ de l'espace analytique X tels que pour chaque $i \in I$, le diviseur induit sur $U_i \times T_1$ par $\bar{D}_o$ soit défini par une fonction méromorphe f_i sur $U_i \times T_1$. Puisque $L \neq 0$, $\lambda_o \neq 0$, donc on peut trouver un système de coordonnées $(z_1,\ldots, z_n)$ sur T_1 tel que la restriction λ_1 de λ_o à T_1 soit le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z_1}$, que l'image de T_1 par l'application $t \rightsquigarrow (z_1(t),\ldots, z_n(t))$ soit un connexe de $\mathbb{C}^n$, et que $z_i(e) = 0$ pour i de 1 à n. Alors $<\lambda_o,\bar{D}_o>$ est le diviseur analytique associé à $\bar{D}_o$ et au champ de vecteur λ_o, il est principal et représenté par une fonction méromorphe g sur $X \times T_o$ telle que pour i de 1 à n,

$$h_i = \frac{\partial f_i}{\partial z_1} - g$$

soit holomorphe sur $U_i \times T_1$. Il existe une fonction holomorphe h_i' sur $U_i \times T_1$ telle que :

$$\frac{\partial h_i'}{\partial z_1} = h_i.$$

Posons $f'_i = f_i - h'_i$; on a $\frac{\partial f'_i}{\partial z_1} = g$ sur $U_i \times T_1$ et la restriction de $\bar{D}_o$ à $U_i \times T_1$ est définie par f'_i. Posons $f''_i(x,t) = f'_i(x,t) - f'(x,e)$. Alors dans $(U_i \cap U_j) \times T_1$ on a $\frac{\partial f''_i}{\partial z_1} = \frac{\partial f''_j}{\partial z_1}$ et $f''_i(x,e) = f''(x,e)$ donc si on note $s(z)$ l'élément $(z,0,\ldots,0)$, pour $x \in U_i \cap U_j$ et pour z suffisamment voisin de 0 (en fait tel que $s(z) \in T_1$), on a $f''_i(x,s(z)) = f''_j(x,s(z))$.

Il est clair que f''_i définit dans U_i le diviseur $\bar{D}_o \odot j_t - \bar{D}_o \odot j_e$. Nous avons donc montré que $\bar{D}_o \odot j_{s(z)} - \bar{D}_o \odot j_e$ est principal ; il en est donc de même de $D_o \odot j_{s(z)} - D_o \odot j_e$, donc $f(s(z)) = f(e)$, contrairement à l'hypothèse, c.q.f.d.

Corollaire 2.3.- Hypothèses de (2.1). Soit (P,π) la variété de Picard de type G de X, alors l'homomorphisme algébrique $L \mapsto \langle \pi, L \rangle : \mathbb{T}^P_e \to \mathscr{C}(X, \mathbb{T}^G_o)$, où o et e désignent respectivement les éléments neutres de P et G, est injectif.

D'après [1] (I,5.8) (I,5.9) (1.8) et (1.9), puisque le corollaire est vrai lorsque $G = G_m$ ([8] esp. 6, prop. 2 et Th.1), on est ramené au cas où $G = G_a$. Dans ce cas, le corollaire résulte de (2.2) et de 1.3).

3.- Cas où $G = G_a$.

Proposition 3.1.- Soient X une variété semi-complète telle que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ soit un K-espace vectoriel de dimension finie, T une variété affine ; il existe une bijection canonique fonctorielle entre l'ensemble $A(T, \mathscr{C}(X,G_a))$ et celui des morphismes de T dans l'espace affine Q associé au K-espace vectoriel $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Considérons X et T comme des K-schémas algébriques intègres, notons $g : T \to \mathrm{Spec}(K)$ et $f : X \to \mathrm{Spec}(K)$ les morphismes structuraux et notons $f' : X \times_K T \to T$ la projection canonique. D'après ([12] III,1.4.15) on a $R^1 f'_*(\mathcal{O}_X \otimes_K \mathcal{O}_T) = R^1 f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_K \mathcal{O}_T$, d'où $H^1(X \times_K T), \mathcal{O}_{X \times T}) = \Gamma(T, R^1 f'_*(\mathcal{O}_X \otimes_K \mathcal{O}_T)) = \Gamma(T, R^1 f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_K \mathcal{O}_T) = H^1(X, \mathcal{O}_X) \otimes_K g_*(\mathcal{O}_T)$ (1). Comme $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est de dimension finie $H^1(X, \mathcal{O}_X) \otimes_K g_*(\mathcal{O}_+) = \mathrm{Hom}\,(H^1(X, \mathcal{O}_X)^v, g_*(\mathcal{O}_T)) = \mathrm{Hom}_K(T,Q)$ ([12], II,1.7.8). D'où $H^1(X \times_K T, \mathcal{O}_{X \times T}) = \mathrm{Hom}(T,Q)$. Or puisque T est affine, $H^1(T, \mathcal{O}_T) = 0$ ([17]) donc $H^1(X \times_K T, \mathcal{O}_{X \times T}) = A(T, \mathscr{C}(X,G_a))$ (III,3.1).

(1) Autre démonstration : d'après la formule de Künneth ([19] VII, propo. 12), on a $H^1(X \times T, \mathcal{O}_{X \times T}) = H^1(X, \mathcal{O}_X) \otimes_K H^o(T, \mathcal{O}_T)$ puisque $H^1(T, \mathcal{O}_T) = 0$. Et il est clair que $H^o(T, \mathcal{O}_T) = g_*(\mathcal{O}_T)$.

D'où $A(T, \mathscr{C}(X,G_a)) = \mathrm{Hom}\ (T, Q)$ c.q.f.d.

Corollaire 3.2.- Hypothèses de (3.1). Il existe un isomorphisme algébrique i de l'espace affine Q associé à $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ sur $\mathscr{C}(X,G_a)$, tel que, pour toute variété T et tout $f \in A(T, \mathscr{C}(X,G_a))$, il existe un morphisme $\phi : T \to Q$ et un seul tel que $f = i \circ \phi$.

Si T est un groupe algébrique connexe et si f est un homomorphisme algébrique, alors ϕ est un homomorphisme. En particulier, (Q,i) est la variété de Picard de type G_a de X.

Soit i l'application de Q dans (X,G_a) associée au morphisme identique de Q dans Q. Il résulte du caractère fonctoriel de la bijection définie en (3.1) entre $A(T,\mathscr{C}(X,G_a))$ et $\mathrm{Hom}\ (T,Q)$ pour une variété affine T, qu'au morphisme $\phi : T \to Q$ correspond l'application $i \circ \phi \in A(T,\mathscr{C}(X,G_a))$. Remarquons que $\mathscr{C}(X,G_a) = H^1(X, \mathcal{O}_X)$ (I,1.5). En prenant T réduite à un point, on voit que c'est l'application identique de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, donc i est un isomorphisme algébrique.

Soit T une variété quelconque, $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement affine de T. Notons $g_i : U_i \to T$ l'immersion canonique. Soit $f \in A(T,\mathscr{C}(X,G_a))$; alors $f \circ g_i \in A(U_i, \mathscr{C}(X,G_a))$ donc il existe un morphisme $\phi_i : U_i \to Q$ tel que $f \circ g_i = i \circ \phi_i$. Puisque $U_i \cap U_j$ est une variété affine, à la restriction à $U_i \cap U_j$ de $f \circ g_j$ (qui est un élément de $A(U_i \cap U_j, \mathscr{C}(X,G_a)))$ correspond un morphisme et un seul ψ tel que $f \circ g_i - f \circ g_j = i \circ \psi$ sur $U_i \cap U_j$. Puisque $f \circ g_i = f \circ g_j$ sur $U_i \cap U_j$, $\psi = 0$, donc $i \circ (\phi_i - \phi_j) = 0$ d'où $\phi_i - \phi_j = 0$ puisque i est injectif. Donc les morphismes ϕ_i définissent par recollement un morphisme $\phi : T \to Q$, tel que $f = i \circ \phi$. Soit ϕ' un morphisme de T dans Q tel que $f = i \circ \phi'$, alors on a $\phi = \phi'$ sur chacun des ouverts affines U_i d'après (3.1), donc $\phi = \phi'$.

Enfin, si T est un groupe algébrique connexe et f un homomorphisme algébrique, puisque i est un isomorphisme de groupes le morphisme $\phi : T \to Q$ tel que $f = i \circ \phi$ est un homomorphisme, c.q.f.d.

4.- Existence en caractéristique $p > o$.

Hypothèses et notations 4.0.- Dans ce numéro, nous supposons K de caractéristique $p > 0$. Nous considérons une variété X semi-complète telle que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ soit un espace vectoriel de dimension finie sur K, et un groupe G algébrique linéaire commutatif.

<u>Lemme 4.1.- Soient H un groupe algébrique connexe d'élément neutre e, et $f : H \to \mathscr{C}(X,G)$ un homomorphisme algébrique. Alors les vecteurs $L \in \mathbb{T}^H$ tels que $< f,L > = 0$ forment un sous-fibré intégrable et invariant de $\mathbb{T}^H$.</u>

Soit $L \in \mathbb{T}^H_e$ tel que $< f,L> = 0$. D'après (1.7), pour tout $a \in H$, $< f, d\ell_a (L) > = 0$, et l'ensemble des $L \in \mathbb{T}^H_e$ tels que $< f,L > = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{T}^H_e$ (V,4.5) ; on en déduit donc que l'ensemble $\mathbb{N}$ des $L \in \mathbb{T}^H$ tels que $< f,L > = 0$ est un sous-fibré de $\mathbb{T}^H$, invariant à gauche. On démontre de même que $\mathbb{N}$ est invariant à droite, donc $\mathbb{N}$ est un sous-fibré invariant de $\mathbb{T}^H$.

Soient $L \in \mathbb{T}^H$ et $L' \in \mathbb{T}^H$ tels que $< f,L >= < f,L' >= 0$; notons λ et λ' les champs de vecteurs invariants à gauche passant par L et L' respectivement. Pour montrer que $\mathbb{N}$ est intégrable (VI,2.1), il suffit de montrer que pour tout ouvert affine T_o de H, les restrictions à T_o de $< f,[\lambda,\lambda'] >$ et $< f,\lambda^p >$ sont nulles.

Notons λ_o [resp λ'_o] la restriction de λ [resp λ'] à T_o, et f_o la restriction de f à T_o. Pour tout $t \in T_o$, $< f(t), \lambda(t) > = 0$ d'après ce qui a été vu plus haut, donc (V,3.1) $< f_o,\lambda_o >$ est défini par une classe de la forme $p^*(\mu)$, où $p : X \times T_o \to T_o$ est la projection canonique, et où $\mu \in \mathscr{C}(T_o,G_a) = H^1(T_o, \mathcal{O}_{T_o}) = 0$ ([17] II 2 Th.3), donc $< f_o,\lambda_o >= 0$. De même $< f_o,\lambda'_o >= 0$.

Soit alors μ_o un champs de vecteurs quelconque sur T_o, il est clair que $<< f_o,\lambda_o >, \mu_o > = 0$ est $<< f_o,\lambda'_o > \mu_o > = 0$. Par conséquent $<f_o,[\lambda_o,\lambda'_o] > = <<f_o,\lambda_o >,\lambda'_o > - < f_o,\lambda'_o> \lambda_o > = 0$ et $< f_o,\lambda_o^p > = <<\cdots$

$<<f_o,\lambda_o> ,\lambda_o > \cdots >, \lambda_o > = 0$, c.q.f.d.

<u>Théorème 4.2.- (Cartier). Soient H un groupe algébrique connexe,</u> $f : H \to \mathscr{C}(X,G)$ <u>un homomorphisme algébrique : alors il existe un groupe algébrique connexe H' et un homomorphisme</u> $g : H \to H'$ <u>de revêtement radiciel de hauteur 1 tels que :</u>

1) <u>le noyau de dg se compose exactement des</u> $L \in \mathbb{T}^H$ <u>tels que</u> $< f,L > = 0$.

2) <u>Il existe un homomorphisme algébrique</u> $f' : H' \to \mathscr{C}(X,G)$ <u>tel que</u> $f = f' \circ g$.

Compte tenu de (4.1), la première assertion est une conséquen ce immédiate de (VI,2.2) et la seconde résulte de (VI,2.4).

<u>Corollaire 4.3.- Supposons que X admette une variété de Picard (P,π) de type G ; alors l'homomorphisme algébrique</u> $\tilde{\pi} : L \leadsto < \pi,L > : \mathbb{T}^P_e \to \mathscr{C}(X, \mathbb{T}^G_o)$ <u>où o et e désignent les éléments neutres de G et P respectivement, est injectif.</u>

Soit N le noyau de $\tilde{\pi}$, et soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des $L \in \mathbb{T}^P$ tels que $< \pi . L > = 0$. D'après (1.7) $N = \mathbb{N}_e$, et d'après (4.2), il existe un groupe algébrique connexe P', un homomorphisme $g : P \to P'$ tel que le noyau de dg soit $\mathbb{N}$, et un homomorphisme algébrique π' de P' dans $\mathscr{C}(X,G)$ tel que $\pi = \pi' \circ g$. Puisque P est la variété de Picard de type G de X, g est un isomorphisme, donc $\mathbb{N} = 0$ et $N = \mathbb{N}_e = 0$, c.q.f.d.

Théorème 4.4.- Soient G un groupe algébrique linéaire commutatif et X une variété semi-complète telle que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ soit un espace vectoriel de dimension finie sur K, (ce qui est le cas si X est complète [18]). Alors X admet une variété de Picard de type G.

D'après (1.6), il suffit de montrer qu'il existe un entier n_o tel que pour tout groupe algébrique connexe H_o tel qu'il existe un homomorphisme algébrique injectif $\phi_o : H_o \to \mathscr{C}(X,G)$, alors $\dim H_o \leq n_o$.

Soit $\mathbb{N}_o$ le noyau de l'homomorphisme algébrique $L \rightsquigarrow < \phi_o, L >$ de $\mathbb{T}^{H_o}$ dans $\mathscr{C}(X, \mathbb{T}_o^G)$, où o désigne l'élément neutre de G. D'après (4.2), il existe un groupe algébrique connexe H_1, et un homomorphisme $q_o : H_o \to H_1$ de revêtement radiciel tels que ϕ_o se factorise à travers q_o au moyen d'un homomorphisme algébrique $\phi_1 : H_1 \to \mathscr{C}(X,G)$ et que le noyau de dq_o soit égal à $\mathbb{N}_o$.

Nous pouvons ainsi construire une suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de groupes algébriques connexes, une suite $\phi_n : H_n \to \mathscr{C}(X,G)$ d'homomorphismes algébriques injectifs et une suite $q_n : H_n \to H_{n+1}$ d'homomorphismes de revêtement radiciel tels que ϕ_n se factorise à travers q_n au moyen de ϕ_{n+1}, et que le noyau de dq_n soit égal au noyau $\mathbb{N}_n$ de l'homomorphisme algébrique $L \rightsquigarrow < \phi_n, L >$ de $\mathbb{T}^{H_n}$ dans $\mathscr{C}(X, \mathbb{T}_o^G)$.

Nous verrons (4.5) qu'il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, q_n soit un isomorphisme, donc $\mathbb{N}_n$ soit nul.

Alors $\dim H_n \leq \dim \mathscr{C}(X, \mathbb{T}_o^G) = \dim \mathscr{C}(X, G_a^m)$, où m est la dimension de G. Mais, par construction, $\dim H_o = \dim H_n$, et (I,1.5) $\dim \mathscr{C}(X, G_a^m) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X^m) = m \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Donc si nous prenons $n_o = m \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$, où $m = \dim G$, nous avons $\dim H_o \leq n_o$, c.q.f.d.

Lemme 4.5. - Soient X une variété semi-complète telle que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ soit un K-espace vectoriel de dimension finie, G un groupe linéaire unipotent commutatif connexe. Etant donné un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \to H_n \arrow[r, "\theta_n"] \arrow[dr, "\eta_n"'] & H_{n+1} \arrow[r, "\theta_{n+1}"] \arrow[d, "\eta_{n+1}"] & H_{n+2} \to \cdots \arrow[dl, "\eta_{n+2}"] \\ & \mathcal{C}(X,G) & \end{tikzcd}$$

où les H_i sont des groupes algébriques connexes, les η_i des homomorphismes algébriques injectifs et les θ_i des homomorphismes de revêtement radiciel, il existe un entier n_o tel que pour tout $n \geqq n_o$, les θ_n soient des isomorphismes.

Raisonnons par récurrence sur $d = \dim G$. Dans le cas où $d = 1$, G est isomorphe à G_a, et la conclusion résulte de l'existence de la variété de Picard de X de type G_a (3.2).

Supposons l'assertion vraie pour tout groupe linéaire unipotent commutatif connexe G" de dimension d-1.

Munissons G d'un système de coordonnées globales comme en (V,3.4), et notons G' le sous-groupe de G formé des éléments de G dont les d-1 premières coordonnées sont nulles, et posons $G'' = G/G'$. Posons $\eta'_n = \mathcal{C}(X,p)\circ\eta_n$. Alors (V,3.1) Ker η'_n est un sous-groupe algébrique H'_n de H_n. Posons $H''_n = H_n/H'_n$ et notons $\eta''_n : H''_n \to \mathcal{C}(X,G'')$ l'application algébrique déduite de η'_n par passage au quotient (VI,1.5). Il est clair que $\theta_n(H'_n) = H'_{n+1}$; notons $\theta''_n : H''_n \to H''_{n+1}$ l'homomorphisme déduit de θ_n par passage au quotient. Il est clair que θ''_n est un homomorphisme de revêtement radiciel, que η''_n est injectif, et que $\eta''_{n+1}\circ\theta''_n = \eta'_n$.

Donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geqq n_1$, θ''_n soit un isomorphisme. Notons $j_n : H'_n \to H_n$ l'immersion canonique et posons $h_n = \eta_n \circ j_n$. Alors h_n est un homomorphisme algébrique de H'_n dans $\mathcal{C}(X,G')$. Puisque η_n est injectif, il en est de même de h_n ; enfin il est clair que si on note $\theta'_n : H'_n \to H'_{n+1}$ l'homomorphisme déduit de θ_n, θ'_n est un homomorphisme de revêtement radiciel, et on a $h_n = h_{n+1}\circ\theta_n$.

Comme G' est isomorphe à G_a, il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geqq n_2$, θ'_n soit un isomorphisme. Posons $n_o = \sup(n_1,n_2)$, pour $n \geqq n_o$, θ'_n et θ''_n sont des isomorphismes, il en est donc de même de θ_n ([19]VII§1 Lem.1).

Lemme 4.6. - Soient X et T deux variétés, G un groupe algébrique linéaire unipotent commutatif connexe de dimension d ; munissons G d'un système de coordonnées globales comme dans (V,3.4). Soit G' le sous-groupe de G formé des éléments dont les $d-1$ premières coordonnées sont nulles, et notons $p : G \to G/G'$ l'homomorphisme canonique soit $f \in A(T, \mathcal{C}(X,G/G'))$ tel que $f(T) \subset \mathcal{C}(X,p)(\mathcal{C}(X,G))$. Nous dirons que f possède la propriété ($\mathcal{P}$) s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, des points distincts $t_1,\dots,t_n$ de T, un système $(f^i_k)_{i\in I,k=1,\dots,n}$ d'applications rationnelles de X dans G/G' et des applications régulières $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de T dans G/G' tels que si on note $\lambda_{k,s}$ la coordonnée d'indice s de λ_k, le système d'ouverts $(U_i \times T)_{i\in I}$ et d'applications rationnelles $(\phi^i)_{i\in I}$ de coordonnées $\phi^i_s(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,s}(t)\, f^i_{k,s}(x)$ définisse un diviseur D de type G/G' sur $X \times T$ appartenant à une classe de définition de f. Supposons que f possède la propriété ($\mathcal{P}$). Alors il existe $g \in A(T, \mathcal{C}(X,G))$ possédant la propriété ($\mathcal{P}$) telle que $\mathcal{C}(X,p)\circ g = f$.

Etant donné une application rationnelle ρ de X [resp. $X \times T$] dans G/G' de coordonnées $(\rho_1,\dots,\rho_{d-1})$, notons $\bar{\rho}$ l'application rationnelle de X [resp. $X \times T$] dans G de coordonnées $(\rho_1,\dots,\rho_{d-1},0)$. Alors pour s de 1 à $d-1$, $(\bar{\phi}^i(\bar{\phi}^j)^{-1})_s = (\phi^i(\phi^j)^{-1})_s$ est une fonction régulière sur $(U_i \cap U_j) \times T$. De plus $(\bar{\phi}^i(\bar{\phi}^j)^{-1})_{r+1}$ est un polynôme en $\phi^i_1,\dots,\phi^i_{d-1},\phi^j_1,\dots,\phi^j_{d-1}$ donc est de la forme $\sum_\alpha M_\alpha(t)\, h^{i,j}_\alpha(x)$, où les M_α sont des polynômes en les $\lambda_{k,s}$ et où les $h^{i,j}_\alpha$ sont des fonctions rationnelles sur X.

Considérons le système :

$$\sum_\alpha M_\alpha(t)\, h_\alpha + \phi_t = 0 \quad \text{pour} \quad t \in T$$

où les h_α et les ϕ_t sont des indéterminées. La théorie de l'élimination montre qu'il existe des éléments distincts $t_{n+1},\dots,t_{n+m} \in T$ (qu'on peut supposer distincts de $t_1,\dots,t_n$) et des fonctions régulières μ_ℓ sur T (qui sont en fait des combinaisons linéaires des $M_\alpha(t)$) tels que pour tout $t \in T$, on ait

$$\phi_t = \sum_{\ell=1}^{n+m} \mu_\ell(t)\ \phi_{t_\ell}.$$

Posons $D_\ell = D \circledcirc j_{t_\ell} \in f(t_\ell)$. Puisque $f(T) \subset \mathcal{C}(X,p)(\mathcal{C}(X,G))$, on a $D_\ell \in \mathcal{L}(X,p)(\mathcal{L}(X,G))$. Donc quitte à raffiner le recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, on peut supposer qu'il existe un système d'applications $(\psi^i_\ell)_{i\in I}$ de définition dans U_i d'un diviseur D''_ℓ de type G sur X tel que $D''_\ell \circ p = D_\ell$ pour ℓ de 1 à $n+m$.

Notons χ_ℓ^i l'application rationnelle de X dans G/G' de coordonnées $\phi_1^i(t_\ell),\ldots,\phi_{d-1}^i(t_\ell)$; alors le système d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et d'applications $(\chi_\ell^i)_{i\in I}$ définit le diviseur D_ℓ, si bien que $\chi_\ell^i\circ(p\circ\psi_\ell^i)^{-1}$ est une application régulière ξ^i de U_i dans G/G'. Posons $\eta_\ell^i = \overline{\xi}^i.\psi_\ell^i$. Alors pour $1 \leq s \leq d-1$ on a $\eta_{\ell,s}^i = (\xi_\ell^i.(p\circ\psi_\ell^i))_s = \chi_{\ell,s}^i$. D'autre part :

$$(\eta_\ell^i(\eta_\ell^j)^{-1})d = (\overline{\xi}_\ell^i(\overline{\xi}_\ell^j)^{-1}\ \psi_\ell^i(\psi_\ell^j)^{-1})d$$

est un polynôme en les $(\psi_\ell^i(\psi_\ell^j)^{-1})_s$ les $\xi_{\ell,s}^i$ et les $\xi_{\ell,s}^j$, donc est une fonction régulière sur les $U_i\cap U_j$. Or on a :

$$(\eta_\ell^i(\eta_\ell^j)^{-1})_d = \eta_{\ell,d}^i - \eta_{\ell,d}^j + \Sigma\, M_\alpha(t_\ell)\, h_\alpha^{i,j}$$

on en déduit donc pour que pour tout $t \in T$,

$$\Sigma\, M_\alpha(t)\, h_\alpha^{i,j} + \sum_{\ell=1}^{n+m} \mu_\ell(t)(\eta_{\ell,d}^i - \eta_{\ell,d}^j)$$

est une fonction régulière sur $(U_i\cap U_j)\times T$.

Notons alors $\hat{\phi}^i$ l'application rationnelle de $X\times T$ dans G de coordonnées :

$$(\phi_1^i,\ldots,\phi_{d-1}^i, \sum_{\ell=1}^{n+m}\mu_\ell(t)\,\eta_{\ell,d}^i).$$

On a alors :

$$(\hat{\phi}^i(\hat{\phi}^j)^{-1})_s = (\phi^i(\phi^j)^{-1})_s \qquad \text{pour} \quad 1 \leq s \leq d-1$$

et :

$$(\hat{\phi}^i(\hat{\phi}^j)^{-1})_s = \sum_{\ell=1}^{n+m}\mu_\ell(t)(\eta_{\ell,d}^i - \eta_{\ell,d}^j) + \Sigma\, M_\alpha(t)\, h_\alpha^{i,j}$$

est une fonction régulière sur $(U_i\cap U_j)\times T$. Donc le système d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et d'applications $(\hat{\phi}^i)_{i\in I}$ définit un diviseur $\hat{D}$ de type G sur $X\times T$ tel que $p\circ\hat{D} = D$. Donc si g est l'élément de $A(T,\mathscr{C}(X,G))$ défini par la classe de $\hat{D}$, on a $\mathscr{C}(X,p)\circ g = f$, et il est clair que g possède la propriété $(\mathcal{S})$.

<u>Corollaire 4.7. - Soient</u> X <u>une variété semi-complète telle que</u> $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ <u>soit un K-espace vectoriel de dimension finie,</u> T <u>une variété,</u> G <u>un groupe linéaire unipotent commutatif connexe, et</u> $f\in A(T,\mathscr{C}(X,G))$. <u>Alors</u> f <u>possède la propriété</u> $(\mathcal{S})$ <u>de</u> (4.5).

Raisonnons par récurrence sur $d = \dim G$. Lorsque $d = 1$, G est isomorphe à G_a. Soit (Q, χ) la variété de Picard de type G_a de X. D'après (3.2) il existe un morphisme $\lambda : T \to Q$ tel que $f = \chi \circ \lambda$. Notons Q' le sous-espace vectoriel de Q engendré par $\lambda(T)$. Il existe alors des éléments distincts $(t_1, \dots, t_n)$ de T tels que $\lambda(t_1), \dots, \lambda(t_n)$ forment une base de Q'. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coordonnées de λ par rapport à cette base. Pour k de 1 à n, soit $D_k \in (\chi \circ \lambda)(t_k) = f(t_k)$; il existe alors un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de X, et pour $k = 1, \dots, n$ un système $(f_k^i)_{i \in I}$ d'application de D_k dans U_i. Il est clair que le système d'ouverts $(U_i \times T)_{i \in I}$ et d'applications

$$\phi^i(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t)\, f_k^i(x)$$

définit un diviseur de type G_a sur $X \times T$ appartenant à la classe de définition de f.

Supposons maintenant $d > 1$. Munissons G d'un système de coordonnées globales comme en (V,3.4), et soit G' le sous-groupe de G formé des éléments dont les $(d-1)$ premières coordonnées sont nulles.

Notons $p : G \to G/G'$ l'homomorphisme canonique. Alors G/G' est un groupe linéaire unipotent commutatif connexe de dimension $d-1$. D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{C}(X,p) \circ f$ vérifie les hypothèses du lemme 4.6. Il existe donc $g \in A(T, \mathcal{C}(X,G))$ tel que $\mathcal{C}(X,p) \circ g = \mathcal{C}(X,p) \circ f$ et que g possède la propriété $(\mathcal{J})$. Alors $\mathcal{C}(X,p) \circ (f-g) = 0$ donc $f-g \in A(T, \mathcal{C}(X,G'))$ (V,3.7). Or G' est isomorphe à G_a, donc $f-g$ possède la propriété $(\mathcal{J})$, ainsi que g ; on vérifie aisément que f vérifie la propriété $(\mathcal{J})$, c.q.f.d.

<u>Corollaire 4.8. - Soient</u> X <u>une variété semi-complète telle que</u> $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ <u>soit un K-espace vectoriel de dimension finie,</u> T <u>une variété,</u> G <u>un groupe algébrique linéaire unipotent commutatif connexe</u> ; <u>munissons</u> G <u>d'un système de coordonnées globales comme en (V,3.4.) et notons</u> G' <u>le sous-groupe de</u> G <u>formé des éléments dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la dernière. Notons</u> $p : G \to G/G'$ <u>l'homomorphisme canonique. Soit</u> $f \in A(T, \mathcal{C}(X, G/G'))$ <u>tel que</u> $f(T) \subset \mathcal{C}(X,p)(\mathcal{C}(X,G))$ <u>Alors il existe</u> $g \in A(T, \mathcal{C}(X,G))$ <u>tel que</u> $\mathcal{C}(X,p) \circ g = f$.

C'est une conséquence immédiate de (4.6) et (4.7).

CHAPITRE IX - EQUIVALENCE ALGEBRIQUE

1. Généralités.

Définition 1.1. - Soient X une variété, G un groupe algébrique commutatif, D et D' deux diviseurs de type G sur X [resp. deux classes de diviseurs de type G sur X]. On dit que D et D' sont algébriquement équivalents s'il existe une variété T, une famille algébrique $(\Delta_t)_{t\in T}$ de diviseurs [resp. de classes de diviseurs] de type G sur X paramétrée par T, et deux éléments t_1 et t_2 de T tels que $\Delta_{t_1} = D$ et $\Delta_{t_2} = D'$.

Proposition 1.2. - Sous les hypothèses de (1.1), pour que D et D' soient algébriquement équivalents, il faut et il suffit que $D - D'$ soit algébriquement équivalent à 0.

Supposons d'abord qu'il existe une variété T, deux éléments t_1 et t_2 de T et une famille algébrique de diviseurs [resp. de classes de diviseurs] $(\Delta_t)_{t\in T}$ de type G sur X telle que $\Delta_{t_1} = D$ et $\Delta_{t_2} = D'$, et soit Δ un diviseur de définition [resp. une classe de définition] de cette famille. Alors le diviseur [resp. la classe de diviseurs] $\Delta - q^*(D')$, où $q : X \times T \to X$ est la projection canonique, définit une famille algébrique $(\Delta'_t)_{t\in T}$ de diviseurs [resp. de classes de diviseurs] de type G sur X paramétrée par T telle que $\Delta'_{t_1} = D-D'$, et $\Delta'_{t_2} = D' - D' = 0$.

Réciproquement, s'il existe une variété T, deux éléments t_1 et t_2 de T et une famille algébrique de diviseurs [resp. de classes de diviseurs] $(\Delta'_t)_{t\in T}$ de type G sur X telle que $\Delta'_{t_1} = D - D'$ et $\Delta'_{t_2} = 0$, soit Δ' un diviseur de définition [resp. une classe de définition] de cette famille. Alors le diviseur [resp. la classe de diviseurs] $\Delta' + q^*(D')$ définit une famille algébrique $(\Delta_t)_{t\in T}$ de diviseurs [resp. de classes de diviseurs] de type G sur X telle que $\Delta_{t_1} = D$ et $\Delta_{t_2} = D'$.

Proposition 1.3. - Sous les hypothèses de (1.1), si D et D' sont équivalents à 0, il en est de même de $D - D'$.

D'après (1.2), $- D'$ est équivalent à 0. Donc, il existe deux variétés T et T', deux points t_1 et t_2 de T, deux points t'_1 et t'_2 de T', une famille algébrique $f : T \to \mathcal{D}(X,G)$ [resp. $\mathcal{C}(X,G)$] telle que $f(t_1) = D$ et $f(t_2) = 0$ et une famille algébrique $f' : T' \to \mathcal{D}(X,G)$ [resp. $\mathcal{C}(X,G)$] telle que $f'(t'_1) = - D'$ et $f'(t'_2) = 0$. Alors, d'après (I.5.15) [resp. (I.5.14)] $f \times f' : T \times T' \to \mathcal{D}(X, G \times G)$ [resp. $\mathcal{C}(X, G \times G)$] est une famille algébrique de diviseurs [resp. de classes de diviseurs]. Notons $\mu : G \times G \to G$ le morphisme définissant la structure de groupe de G ; puisque G est commutatif, μ est un homomorphisme de groupes algébriques, donc $\mathcal{D}(X,\mu)\circ(f \times f')$ [resp. $\mathcal{C}(X,\mu)\circ(f \times f')$] est une famille algébrique de diviseurs [resp. de classes de diviseurs] de type G sur X, paramétrée par $T \times T'$ telle que $f_{(t_1,t'_1)} = D - D'$ et $f_{(t_2,t'_2)} = 0$.

Corollaire 1.4. - La relation d'équivalence algébrique est une relation d'équivalence sur $\mathcal{D}(X,G)$ [resp. $\mathcal{C}(X,G)$].

Il est clair que notre relation est symétrique. Elle est transitive d'après (1.2) et (1.3). Montrons qu'elle est réflexive.

Soit D un diviseur [resp. une classe de diviseur] de type G sur X, et soit $\{t\}$ une variété réduite à un point. Alors D peut être considéré comme diviseur [resp. classe de diviseur] sur $X \times \{t\}$; et D définit ainsi une famille algèbrique $(D_t)_{t\in\{t\}}$ telle que $D_t = D$.

Corollaire 1.5. - L'ensemble des diviseurs [resp. des classes de diviseurs] de type G sur X algébriquement équivalents à 0 forment un sous-groupe de $\mathcal{D}(X,G)$ [resp. $\mathcal{C}(X,G)$] stable pour tout endomorphisme de G, et qu'on note $\mathcal{D}^\circ(X,G)$ [resp. $\mathcal{C}^\circ(X,G)$].

C'est une conséquence immédiate de (1.3) et des définitions.

Lemme 1.6. - Soient G et H deux groupes algèbriques commutatifs, et X une variété ; on a des isomorphismes canoniques $\mathcal{D}^\circ(X,G) \times \mathcal{D}^\circ(X,H) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\circ(X,G \times H)$ et $\mathcal{C}^\circ(X,G) \times \mathcal{C}^\circ(X,H) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\circ(X,G \times H)$.

C'est une conséquence immédiate de (I,5.9) et des définitions.

Proposition 1.7. - Soient G un groupe algèbrique linéaire commutatif, et X une variété. Alors $\mathcal{P}(X,G) \subset \mathcal{D}^\circ(X,G)$.

D'après [1],(I,5.8),(I,5.9) et (1.5), on est ramené au cas où G est soit égal à G_m, soit unipotent et connexe. Soit $D \in \mathcal{P}(X,G)$, et soit f une application de définition de D dans X.

1.7.1. - 1er Cas. - $G = G_m$. Posons $F(x,t) = (f(x)-t)(1-t\,f(x))^{-1}$, où $x \in X$ et $t \in G_a$; on définit ainsi une application rationnelle F de $X \times G_a$ dans G_m telle que $F(x,0) = f(x)$ et $F(x,1) = -1$. Donc si $(D_t)_{t\in T}$ est la famille algèbrique de diviseurs de type G_m sur X paramètrée par G_a, définie par $\operatorname{div}_{G_m} F$, on a $D_0 = D$ et $D_1 = 0$.

1.7.2. - 2ème Cas. - G est un groupe algébrique commutatif linéaire unipotent connexe.

Alors G est isomorphe, en tant que variété, à $(G_a)^n$, où $n = \dim G$, et G possède un système de coordonnées globales. Etant donné $g \in G$, nous noterons $(g_1, \ldots, g_n)$ les coordonnées de g par rapport à ce système. Posons alors pour $1 \leq \rho \leq n, F_\rho(x,t) = f_\rho(x)(1-t)$, où $x \in X$ et $t \in G_a$. On définit ainsi une application rationnelle F de $X \times G_a$ dans G telle que $F(x,0) = f(x)$ et $F(x,1) = (0,\ldots,0) = 0$. Donc si $(D_t)_{t \in T}$ est la famille algébrique de diviseurs de type G sur X paramétrée par G_a définie par $\mathrm{div}_G F$, on a $D_o = D$ et $D_1 = 0$.

Proposition 1.8. - Soient H un groupe algébrique commutatif, et $\phi : G \to H$ un homomorphisme. Alors $\mathscr{C}(X,\phi)(\mathscr{C}^\circ(X,G)) \subset \mathscr{C}^\circ(X,H)$.

Soit $\Delta \in \mathscr{C}^\circ(X,G)$; alors il existe une variété T', une famille algébrique $f' : T' \to \mathscr{C}(X,G)$ et deux points t'_o et t'_1 de T' tels que $f'(t'_o) = 0$ et $f'(t'_1) = \Delta$. Alors $(\mathscr{C}(X,\phi)\circ f')(t'_o) = \mathscr{C}(X,\phi)(0) = 0$ et $(\mathscr{C}(X,\phi)\circ f')(t'_1) = \mathscr{C}(X,\phi)(\Delta)$; donc $\mathscr{C}(X,\phi)(\Delta)$ est algébriquement équivalent à 0, C.Q.F.D.

2. Le foncteur de Picard.

Définition 2.1. - Soient X et T deux variétés, G un groupe algébrique linéaire commutatif ; notons $A(T,\mathscr{C}^\circ(X,G))$ le sous-groupe de $A(T,\mathscr{C}(X,G))$ formé des $f \in A(T,\mathscr{C}(X,G))$ tels que $f(T) \subset \mathscr{C}^\circ(X,G)$. On peut définir un facteur de la catégorie des variétés algébriques définies sur K dans celle des groupes abéliens $T \leadsto A(T,\mathscr{C}^\circ(X,G))$ en faisant correspondre à un morphisme de variétés $p : T' \to T$ l'homomorphisme de groupes $f \leadsto \mathscr{C}(X,p)\circ f$ de $A(T,\mathscr{C}^\circ(X,G))$ dans $A(T',\mathscr{C}^\circ(X,G))$ (1.8) ; on l'appelle foncteur de Picard de X de type G.

Lemme 2.2. - Supposons que le foncteur de Picard de X de type G soit représentable par une variété Q. Alors Q est la variété sous-jacente à un groupe algébrique P qui est la variété de Picard de X de type G. Si on note $i = Q \to \mathscr{C}(X,G)$ la famille algébrique correspondant au morphisme identique de Q dans Q, on a $i(Q) = \mathscr{C}^\circ(X,G)$.

Montrons d'abord que i est injectif. Soient $x,y \in Q$ tels que $i(x)=i(y)$. Soit T une variété réduite à un point t ; alors l'application $f : T \to \mathscr{C}(X,G)$ d'image $i(x)=i(y)$ est une famille algébrique ; il lui correspond un morphisme et un seul $\phi : T \to Q$ tel que $f = i\circ\phi$. Donc $\phi(t) = x = y$.

Soit $c \in \mathscr{C}^\circ(X,G)$, et soit T une variété réduite à un point t ; alors l'application $f : T \to \mathscr{C}(X,G)$ d'image c est une famille algébrique ; il lui correspond un morphisme $\phi : T \to Q$ tel que $f = i\circ\phi$; donc $i(\phi(t)) = c$, si bien que $i(Q) \supset \mathscr{C}^\circ(X,G)$. En prenant $c=0$, on voit que $0 \in i(Q)$, donc $i(Q) \subset \mathscr{C}^\circ(X,G)$, si bien que $i(Q) = \mathscr{C}^\circ(X,G)$: Q est donc muni d'une structure de groupe déduite de celle de $\mathscr{C}^\circ(X,G)$. D'après (I,1.14), $i \times i : Q \times Q \to \mathscr{C}(X,G \times G)$ est une famille algébrique.

Notons $\mu: G \times G \to G$ le morphisme définissant la structure de groupe de G ; puisque G est commutatif, c'est un homomorphisme de groupes algébriques ; donc $\mathscr{C}(X,\mu)\circ(i \times i)$ est une famille algébrique de $Q \times Q$ dans $\mathscr{C}(X,G)$; il lui correspond un morphisme et un seul $\nu : Q \times Q \to Q$ tel que $\mathscr{C}(X,\mu)\circ(i \times i) = i\circ\nu$. On vérifie aisément que ν définit la structure de groupe de Q déduite de celle de $\mathscr{C}^\circ(X,G)$, ce qui montre que Q est canoniquement muni d'une structure de groupe algébrique [[8] exp.9] telle que $i : Q \to \mathscr{C}^\circ(X,G)$ soit un isomorphisme de groupes algébriques.

Soient alors H un groupe algébrique connexe, et $f : T \to \mathscr{C}(X,G)$ un homomorphisme algébrique ; il lui correspond un morphisme et un seul $\phi : T \to Q$ tel que $f = i\circ\phi$. Puisque i est un isomorphisme de groupes de Q sur $\mathscr{C}^\circ(X,G)$, ϕ est un homomorphisme de groupes donc de groupes algébriques, si bien que Q, muni de sa structure canonique de groupe algébrique, est la variété de Picard de type G de X, C.Q.F.D.

<u>Théorème 2.3.</u> - <u>Soient</u> G <u>un groupe algébrique linéaire commutatif,</u> X <u>une variété complète</u> ; <u>alors le foncteur de Picard de type</u> G <u>de</u> X <u>est représentable</u>. <u>Lorsque</u> G <u>est un groupe unipotent et que</u> X <u>est une variété semi-complète telle que</u> $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ <u>soit un K-espace vectoriel de dimension finie</u> , <u>ce foncteur est représentable par un groupe linéaire unipotent commutatif connexe de dimension</u> $\leq \dim G \ \dim_K H^1(X,\mathcal{O}_X)$.

D'après [1],(I,5.8) et (I,5.9), on est ramené au cas où G est soit égal à G_m, soit unipotent connexe. Le cas où $G = G_m$ est traité dans ([8],exp.8, paragraphe 3, prop.5).

Supposons donc G unipotent connexe. Munissons G d'un système global de coordonnées ayant les propriétés exposées dans l'énoncé de (V,3.4). Soit G' le sous-groupe de G des éléments dont les $n-1$ premières coordonnées sont nulles, où $n = \dim G$; alors G/G' est un groupe unipotent connexe commutatif de dimension $n-1$, et G' est isomorphe à G_a. Notons $p : G \to G/G'$ et $i : G' \to G$ les homomorphismes canoniques.

Raisonnons par récurrence sur n. Lorsque $n = 1$, G est isomorphe à G_a, et le théorème résulte de (VIII,3.2) .

Supposons donc $n > 1$. D'après (I,5.12) et (1.8) on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathscr{C}(X,G') & \xrightarrow{\mathscr{C}(X,p)} & \mathscr{C}(X,G) & \xrightarrow{\mathscr{C}(X,p)} & \mathscr{C}(X,G'') \\
& \uparrow \alpha & & \uparrow \beta & & \uparrow \gamma \\
0 \to & \mathscr{C}^\circ(X,G') & \xrightarrow{\mathscr{C}^\circ(X,i)} & \mathscr{C}^\circ(X,G) & \xrightarrow{\mathscr{C}^\circ(X,p)} & \mathscr{C}^\circ(X,G'')
\end{array}$$

où la première ligne est exacte, où α, β et γ sont les injections canoniques. D'après (VIII,3.2), et (2.2), puisque G' est isomorphe à G_a, α est bijectif on en déduit que la deuxième ligne du diagramme est exacte.

Posons $\mathcal{D} = \mathcal{C}^{\bullet}(X,p)(\mathcal{C}^{\circ}(X,G))$. Notons (P',π') [resp. (P'',π'')] la variété de Picard de type G' [resp. G/G'] de X. D'après (2.2) et l'hypothèse de récurrence, P'[resp. P''] représente le foncteur de Picard de type G' [resp. G/G'] de X, et on a $\pi''(P'') = \mathcal{C}^{\circ}(X,G'') \supset \mathcal{D}$.

Notons Γ_o le sous-groupe algébrique de P'' réduit à l'élément neutre. Construisons par récurrence une suite croissante (Γ_n) de sous-groupes algébriques de P'' de la manière suivante : Γ_n étant construit, soit $\delta_{n+1} \in \mathcal{D}$, et notons Γ_{n+1} le sous-groupe algébrique de P'' engendré par Γ_{n+1} et $\pi''^{-1}(\delta_{n+1})$; de plus si $\pi''(\Gamma_n) \not\supset \mathcal{D}$, nous supposerons qu'on a choisi $\delta_{n+1} \notin \pi''(\Gamma_n)$.

Montrons par récurrence que Γ_n est inclus dans un sous-groupe algébrique connexe Γ'_n de P'' tel que $\pi''(\Gamma'_n) \subset \mathcal{D}$. C'est clair si $n = 0$. Supposons donc que $\pi''(\Gamma'_n) \subset \mathcal{D}$. Notons π''_n la restriction de π'' à Γ'_n. Puisque $\delta_{n+1} \in \mathcal{C}(X,p)(\mathcal{C}^{\circ}(X,G))$, il existe une variété Y, un élément g de $A(Y, \mathcal{C}(X,G)$ et deux points y_o et y_1 de Y tels que $g(y_o) = 0$ et $\mathcal{C}(X,p)(g(g_1)) = \delta_{n+1}$. Posons $h = \mathcal{C}(X,p) \circ g$; alors $h(y_o) = 0$, $h(y_1) = \delta_{n+1}$, et il est clair que $h(Y) \subset \mathcal{D}$. D'après (I,5.14) l'application $\pi''_n \times (-h)$ appartient à $A(\Gamma'_n \times Y,$ $\mathcal{C}(X,G'' \times G''))$. Puisque G'' est commutatif, le morphisme $\mu : G'' \times G'' \to G''$ qui définit la structure de groupe de G'' est un homomorphisme de groupes, donc

$$\mathcal{C}(X,\mu) \circ (\pi''_n \times (-h)) \in A(\Gamma'_n \times Y, \mathcal{C}(X,G'')) .$$

Posons :

$$B = \pi''^{-1}([\mathcal{C}(X,\mu) \circ (\pi''_n \times (-f))] (\Gamma'_n \times Y)) .$$

Puisque $h(y_o) = 0$ et $\pi''_n(0) = 0$, Γ_{n+1} est inclus dans le sous-groupe algébrique Γ'_{n+1} de P'' engendré par B. Or, puisque $\Gamma'_n \times Y$ est irréductible et que $0 \in B$ un résultat classique (1) dit que Γ'_{n+1} est connexe et n'est autre que le sous-groupe (au sens de la théorie des groupes) engendré par B. Or, puisque $h(Y) \subset \mathcal{D}$, et $\pi''(\Gamma'_n) \subset \mathcal{D}$, on a $\pi''(B) \subset \mathcal{D}$, donc $\pi''(\Gamma'_{n+1}) \subset \mathcal{D}$, comme annoncé.

---

(1) Voir par exemple ([4] exposé n°3, Théorème 2) ou Michel DEMAZURE et Alexandre GROTHENDIECK : Séminaire de Géométrie algébrique 1963-64. Schémas en groupes, fascicule 2a, exposé VI_B, remarque 7.2 (vi) et sa proposition 7.4.

D'autre part, si $\pi''(\Gamma_n) \not\subset \mathcal{D}$, on a $\Gamma_{n+1} \neq \Gamma_n$ par construction, donc $\dim \Gamma_{n+1} > \dim \Gamma_n$. Posons $d_n = \dim \Gamma_n$, puisque pour tout n, on a $d_n < \dim G''$, la suite (d_n) ne peut être strictement croissante, donc il existe N tel que $\pi''(\Gamma_N) = \mathcal{D}$, donc $\pi''(\Gamma'_N) = \mathcal{D}$ ce qui montre que $\pi''^{-1}(\mathcal{D})$ est un sous-groupe algébrique connexe de P'', qu'on notera P''_o. Notons π''_o la restriction de π'' à P''_o.

Soient T une variété et $f \in A(T, \mathcal{C}^{\circ}(X,G))$. Alors d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un morphisme et un seul ϕ'' de T dans P'' tel que $\mathcal{C}(X,p)\circ f = \pi''\circ\phi''$. Comme $\mathcal{C}(X,p)(f(T)) \subset \mathcal{D}$, ϕ'' est en fait un morphisme de T dans P''_o. Puisque $\pi''_o(P''_o) \subset \mathcal{C}(X,p)(\mathcal{C}(X,G))$, il résulte de (VIII,4.8) qu'il existe $\rho \in A(P''_o, \mathcal{C}(X,G))$ tel que $\mathcal{C}(X,p)\circ\rho = \pi''_o$. Il est clair que puisque $\pi''_o(0) = 0$, on peut supposer que $\rho(0) = 0$, donc que $\rho \in A(P''_o, \mathcal{C}^{\circ}(X,G))$. Puisque π''_o est bijectif, ρ définit une application $\sigma : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}^{\circ}(X,G)$ telle que $\mathcal{C}^{\circ}(X,p)\circ\sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\circ}(X,G'')}$.

Alors $\rho\circ\phi'' \in A(T, \mathcal{C}(X,G))$ et $\mathcal{C}(X,p)\circ\rho\circ\phi'' = \mathcal{C}(X,p)\circ f$. Donc (V,3.7) $f - \rho\circ\phi''$ est de la forme $\mathcal{C}(X,i)\circ f'$, où $f' \in A(T, \mathcal{C}(X,G'))$. Puisque G' est isomorphe à G_a, d'après (VIII,3.2.), il existe un morphisme et un seul $\phi' : T \to P'$ tel que $f' = \pi'\circ\phi'$.

Notons P la variété produit $P' \times P''_o$. La donnée de σ définit une application bijective $j : \mathcal{C}(X,G') \times \mathcal{C}^{\circ}(X,G'') \to \mathcal{C}^{\circ}(X,G)$. Puisque π' et π''_o sont bijectifs, on en déduit une application bijective $\pi = j\circ(\pi' \times \pi''_o) : P \to \mathcal{C}^{\circ}(X,G)$.

Alors on a $\pi\circ(\phi',\phi'') = j\circ(f',\pi''_o\circ\phi'') = f'+\sigma\circ\pi''_o\circ\phi'' = f'+\rho\circ\phi'' = f$, et l'unicité du morphisme ψ tel que $\pi\circ\psi = f$ provient de l'unicité des morphismes ϕ' et ϕ''. Donc P représente le foncteur de Picard de type G de X. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence, et (VIII,3.2), $d' = \dim P' = \dim_K(H^1(X,\mathcal{O}_X))$ et $d'' = \dim P''_o \leq \dim P'' \leq (\dim G-1) \times \dim_K(H^1(X,\mathcal{O}_X))$ d'où $d = \dim P \leq \dim G \times \dim_K H^1(X,\mathcal{O}_X)$.

Enfin d'après l'hypothèse de récurrence, P' et P'' sont linéaires unipotents, donc P''_o aussi, si bien que P' et P''_o sont, en tant que variétés, isomorphes à $G_a^{d'}$ et $G_a^{d''}$, donc P est isomorphe à G_a^d, c'est donc la variété sous-jacente à un groupe linéaire unipotent (2.2.)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{C}(X,G') \arrow[r, "\mathcal{C}(X,i)"] \arrow[dr] & \mathcal{C}^{c}(X,G) \arrow[r, "\mathcal{C}(X,p)"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "\sigma"] \arrow[dl] \\
& & \mathcal{C}(X,G') \times \mathcal{C}(X,G'') \arrow[u, "j"] & \\
& P' \arrow[uu, "\pi'"] \arrow[r] & P \arrow[u, "(\pi' \times \pi''_o)"] & P''_o \arrow[l] \arrow[uu, "\pi''_o"'] \\
& & T \arrow[ul, "\phi'"] \arrow[u, "(\phi', \phi'')"] \arrow[ur, "\phi''"'] \arrow[uuu, bend left, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Corollaire 2.4. - Soient X une variété complète, G un groupe algébrique linéaire commutatif, T une variété, $f : T \to \mathcal{C}(X,G)$ une application telle que pour tout $t \in T$, il existe un ouvert U_t de T contenant t, et un revêtement non ramifié (V_t, h_t) de U_t tel que l'application $f \circ h_t : V_t \to \mathcal{C}(X,G)$ soit une famille algébrique. Alors f est une famille algébrique.

Ce résultat a déjà été démontré dans le cas où T est normale (VI,1.3) et (V,3.3.). Soit (P,π) la variété de Picard de type G de X. D'après (2.3) il existe un morphisme $\phi_t : V_t \to P$, tel que $\pi \circ \phi_t = f \circ h_t - f(t)$. Puisque $\pi \circ \phi_t$ est invariant pour tout automorphisme du revêtement (V_t, h_t), il existe [6] un morphisme $\psi_t : U_t \to P$ tel que $\psi_t \circ h_t = \phi_t$. On a donc $f \circ h_t - f(t) = \pi \circ \psi_t \circ h_t$, d'où, puisque h_t est surjectif, $f|U_t - f(t) = \pi \circ \psi_t$, ce qui montre que la restriction de f à U_t est une famille algébrique. Donc (V,3.3), f est une famille algébrique.

Corollaire 2.5. - Soient X et Y deux variétés complètes $f : X \to Y$ un morphisme G un groupe algébrique linéaire commutatif, P et P' les variétés de Picard de type G de X et de Y respectivement. A f correspond de façon canonique un morphisme $P' \to P$.

Notons (f,G) l'application de $\mathcal{C}(Y,G) \to \mathcal{C}(X,G)$ qui à $\Delta \in \mathcal{C}(Y,G)$ fait correspondre $\Delta \circ f \in \mathcal{C}(X,G)$. Soit $\pi' : P' \to \mathcal{C}(Y,G)$ l'homomorphisme algébrique canonique. Alors $\mathcal{C}(f,G) \circ \pi'$ est une famille algébrique, car si Δ' est une classe de définition de π', $\Delta' \circ (f \times id_P)$ est une classe de définition de $\mathcal{C}(f,G) \circ \pi'$. Donc (2.3) il existe un morphisme $f : P' \to P$ tel que, si $\pi : P \to \mathcal{C}(X,G)$ est l'homomorphisme canonique, on ait $\pi \circ \phi = \mathcal{C}(f,G) \circ \pi'$, C.Q.F.D.

3. Changements de groupes.

Proposition 3.1. - Soient G et G' deux groupes algébriques linéaires commutatifs et $\phi : G \to G'$ un homomorphisme de groupes algébriques, X une variété semi-complète telle que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ soit un K-espace vectoriel de dimension finie, (P, π) [resp. (P', π')] la variété de Picard de type G [resp. G'] de X. Alors il existe un homomorphisme de groupes algébriques et un seul $\phi^* : P \to P'$ tel que $\pi' \circ \phi^* = \mathcal{C}(X, \phi) \circ \pi$.

D'après (V,3.6), $\mathcal{C}(X,i) \circ \pi$ est un homomorphisme algébrique de P dans $\mathcal{C}(X,G')$, il lui correspond donc un morphisme et un seul $\phi^* : P \to P'$ tel que $\pi' \circ \phi^* = \mathcal{C}(X, \phi) \circ \pi$.

On déduit de (3.1) et (2.5) que la variété de Picard de type G de X est un bifoncteur covariant en G et contravariant en X de la catégorie des groupes algébriques linéaires commutatifs et de la catégorie des variétés complètes dans celle des groupes algébriques commutatifs connexes.

Proposition 3.2. - Soient G un groupe algébrique linéaire commutatif G' un sous-groupe G, X une variété semi-complète telle que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ soit un espace vectoriel de dimension finie sur K, (P, π) [resp. (P', π')] la variété de Picard de type G [resp. G'] de X. Alors si on note $i : G' \to G$ l'immersion canonique, il existe un morphisme $j : P' \to P$ et un seul tel que $\pi \circ j = \mathcal{C}(X,i) \circ \pi'$, et j est un isomorphisme de P' sur un sous-groupe algébrique de P.

D'après (I,5.8) et (VIII,1.8) on peut supposer G et G' connexes.

D'après (I,5.12), $\mathcal{C}(X,i)$ est un homomorphisme injectif de $\mathcal{C}(X,G')$ dans $\mathcal{C}(X,G)$.

Soit Δ une classe de définition de l'homomorphisme algébrique π', alors $i \circ \Delta$ est une classe de définition de $\mathcal{C}(X,i) \circ \pi'$, qui est donc un homomorphisme algébrique. Il existe donc un homomorphisme et un seul de groupes algébriques $j : P' \to P$ tel que $\pi \circ j = \mathcal{C}(X,i) \circ \pi'$. Puisque $\mathcal{C}(X,i)$ et π' sont injectifs, il en est de même de j.

Notons $\overline{P}'$ l'image de j ; c'est un sous-groupe fermé de P ([8] exp.10, p.01) et j se factorise à travers l'immersion canonique $\overline{P}' \to P$ au moyen d'un revêtement radiciel $h : P' \to \overline{P}'$. Notons $\overline{\pi}'$ l'application de $\overline{P}'$ dans $\mathcal{C}(X,G')$ telle que $\overline{\pi}' \circ h = \pi'$. Il est clair que $\overline{\pi}'$ est un homomorphisme de groupes. D'après (VI,2.4) en raisonnant par récurrence sur la hauteur de h, on voit que pour montrer que $\overline{\pi}'$ est un homomorphisme algébrique, il suffit de montrer que, pour tout vecteur L tangent à P' tel que $dh(L) = 0$, on a $< \pi', L > = 0$.

Il résulte de (III,1.10) que $< i\circ\pi, L > = di\circ < \pi, L >$, donc $< \mathcal{C}(X,i)\circ\pi', L > = < \mathcal{C}(X,di)\circ < \pi', L >$. D'après ce qui a été vu au début de la démonstration, puisque di est injectif, il en est de même de $\mathcal{C}(X,di)$. Il nous suffit donc de montrer que pour tout $L \in \mathbb{T}^{P'}$ tel que $dh(L) = 0$, on a $< \mathcal{C}(X,i)\circ\pi', L > = 0$. Or $\mathcal{C}(X,i)\circ\pi' = \pi\circ j$. Or si $dh(L) = 0$, on a (puisque j se factorise à travers h), $dj(L) = 0$. Or (V,4.4), $< \pi\circ j, L > = < \pi, dj(L) >$, donc pour tout $j \in \mathbb{T}^{P'}$ tel que $dh(L) = 0$, on a $< \pi\circ j, L > = 0$. Alors $\bar{\pi}'$ provient d'un morphisme $\bar{P}' \to P'$, puisque P est la variété de Picard de type G' de X , donc h est un isomorphisme, C.Q.F.D.

4. Cas d'un groupe commutatif quelconque.

Soient X une variété complète, G un groupe algébrique commutatif, L son sous-groupe linéaire connexe maximal, P la variété de Picard de type L de X. Si G° est extension triviale de G°/L par L, il résulte de (VIII,1,10) que $\mathcal{C}^\circ(X,G^\circ/L) = 0$, donc $\mathcal{C}^\circ(X,G) = \mathcal{C}^\circ(X,L)$, ce qui montre que P représente le foncteur de Picard de type G de X.

Cependant, si G° n'est pas extension triviale de G°/L par L, le foncteur de Picard de type G de X n'est pas toujours représentable, comme le montre le contre-exemple suivant.

Proposition 4.1. - Soit A une variété abélienne définie sur un corps K de caractéristique 0, et soit G une extension non triviale de A par le groupe additif G_a ; alors le foncteur de Picard de type G de A n'est pas représentable.

Remarquons d'abord que si $\dim A \neq 0$, $H^1(A,\mathcal{O}_A) \neq 0$ ([19],VII,n°21,Th.10), donc il existe un élément non nul $c \in H^1(A,\mathcal{O}_A)$ et ([19],VII,n°17,Th.7) cet élément c définit une extension non triviale G de A par G_a.

Notons $i : G_a \to G$ l'immersion canonique. Soit (P,π) la variété de Picard de type G de A. Supposons que le foncteur de Picard de type G de A soit représentable par une variété Q, et soit $\chi : Q \to \mathcal{C}(A,G)$ la famille algébrique canonique. Il résulte de (2.2) que (Q,X) est la variété de Picard de type G de A et que χ est injectif. Comme $\mathcal{C}(A,i)\circ\pi$ est un homomorphisme algébrique, il existe un homomorphisme de groupes algébriques $f : P \to Q$ tel que $\mathcal{C}(A,i)\circ\pi = \chi\circ f$. Comme χ est injectif, $\operatorname{Ker} \mathcal{C}(A,i)\circ\pi$ est égal à $\operatorname{Ker} f$, c'est donc un sous-groupe fermé de P.

Posons alors $P' = P/N$, où $N = \operatorname{Ker} \mathcal{C}(A,i)\circ\pi$. Notons $\pi' : P' \to \mathcal{C}(A,G)$ l'homomorphisme déduit de π par passage aux quotients. Remarquons que P est un espace affine, et que, puisque K est de caractéristique nulle, le sous-groupe algèbrique N de P est un sous-espace affine de P, si bien que l'homomorphisme canonique $q : P \to P'$ admet une section régulière ρ. Alors $\pi' = \mathcal{C}(A,i)\circ\pi\circ\rho$ est une famille algébrique, donc un homomorphisme algébrique.

Notons $\tilde{\pi} : \mathbb{T}_0^P \to \mathcal{C}(A,\mathbb{T}_0^{G_a})$ (où 0 désigne les éléments neutres de nos groupes) l'application $\ell \rightsquigarrow \langle \pi, \ell \rangle$. Soit Δ une classe de définition de π' ; notons $\tilde{\pi}' : \mathbb{T}_0^{P'} \to \mathcal{C}(A,\mathbb{T}_0^G)$ l'application qui à $\ell \in \mathbb{T}_0^{P'}$ fait correspondre l'élément $\langle \Delta, \ell' \rangle$ de $\mathcal{C}(A,\mathbb{T}_0^G)$. Remarquons que, par construction, $\pi'\circ q = \mathcal{C}(A,i)\circ\pi$, donc $\Delta\circ q$ est une classe de définition de $\mathcal{C}(A,i)\circ\pi$. Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{T}_0^P$, d'après (III,1.9), on a $\langle \Delta, dq(\ell) \rangle = \langle \Delta\circ q, \ell \rangle$ si bien que ((V,4.1) et (V,4.6))

$\tilde{\pi}'\circ dq(\ell) = <\Delta\circ q, \ell> = <\mathcal{C}(X,i)\circ\pi, \ell> = \mathcal{C}(X,di)(<\pi, \ell>) = \mathcal{C}(X,di)\circ\tilde{\pi}(\ell)$

donc $\tilde{\pi}'\circ dq = (X,i)\circ\tilde{\pi}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_0^P & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathcal{C}(A, \mathbb{T}_0^{G_a}) \\ {\scriptstyle dq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}(A,di)} \\ \mathbb{T}_0^{P'} & \longrightarrow & \mathcal{C}(A, \mathbb{T}_0^{G}) \end{array}$$

Or, comme i est une immersion, di est une immersion ; et puisque les groupes $\mathbb{T}_0^{G_a}$ et $\mathbb{T}_0^{G}$ sont linéaires, $\mathcal{C}(X,di)$ est injectif (I,5.12) ; d'autre part $\tilde{\pi}$ est injectif (VIII,2.3), donc $\pi'\circ dq$ est injectif, si bien que dq est injectif. Donc N est un sous-groupe discret de P . Mais puisque N est un sous-espace affine de P , c'est que N est nul. Puisque π est bijectif (VIII,2.2), $\mathrm{Ker}\ \mathcal{C}(A,i) = \pi(N) = 0$.

D'après (I,5.4), puisque $\mathcal{C}(A,i)$ est injectif, si on note $p : G \to A$ l'homomorphisme canonique, on a $\mathrm{Ker}\ \mathcal{P}(A,P) \subset \mathrm{Im}\ \mathcal{P}(A,i)$. D'après ([16]), il existe une section rationnelle σ de p . Posons $D = \mathrm{div}_G\ \sigma$. Puisque $p\circ\sigma = \mathrm{id}_G$, il est clair que $p\circ D = 0$. Donc il existe un diviseur principal $D' = \mathrm{div}_G\ \phi$ tel que $i\circ D' = D$. Donc $\sigma-\phi$ est une application régulière σ' de A dans G telle que $p\circ\sigma' = p\circ\sigma - p\circ\phi = p\circ\sigma = \mathrm{id}_G$ si bien que p admet une section régulière σ' , ce qui entraine ([19]VII,n°15,Th.5 et n°5, prop.5) que G est une extension triviale de A par G_a , contrairement à l'hypothèse, C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL.- Groupes linéaires algébriques. Annals of Math. série 2, t. 64, 1956, pp. 20-82, théorème 9.1.

[2] H. CARTAN, S. EILENBERG.- Homological Algebra. Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] P. CARTIER.- Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique. Bull. Soc. Math. France, t. 86, 1958, pp. 177-252 (Thèse Sc. math. Paris 1958), chap. 4, §1.

[4] C. CHEVALLEY.- Séminaire E.N.S. (1ère année). Classification des groupes de Lie algébriques, t.1. 1956-58, n° 4.

[5] C. CHEVALLEY.- Fondements de la Géométrie algébrique. Paris ; secrétariat Mathématique 1958, multigraphié.

[6] C. CHEVALLEY.- Séminaire E.N.S. (2ème année). Anneaux de Chow et applications, 1958, n° 1.

[7] C. CHEVALLEY.- Théorie des groupes de Lie. tIII, Paris, Hermann 1955 (Act. Scient. et Ind. 1226, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago IV) chap. V n° 3, prop. 11.

[8] C. CHEVALLEY.- Séminaire E.N.S. (3ème année). Variétés de Picard. 1958-59.

[9] C. CHEVALLEY.- La variété de Picard. Amer. J. of Math. t.82, 1960, pp.435-490.

[10] J. FRENKEL.- Cohomologie non abélienne et espaces fibrés. Bull. Soc. Math. France, t.85, 1957, pp. 135-220 (Thèse Sc. Math. Paris 1956).

[11] R. GODEMENT.- Topologie algébrique et theorie des faisceaux. Paris, Hermann 1958 (Act. Scient. et Ind. 1252, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 13).

[12] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNE.- Eléments de géométrie algébrique. Publ. Math. I.H.E.S. n° 8 et 11, Paris 1961.

[13] H. HIRONAKA.- Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Annals of Math. série 2, t. 79, 1964, pp. 109-326.

[14] J.P. MURRE.- On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups. Publ. Maht. I.H.E.S. , n° 23, Paris 1964.

[15] M. ROSENLICHT.- Generalized Jacobian varieties. Annals of Math. série 2, t.59 1954, pp. 505-530, theorem 13.

[16] M. ROSENLICHT.- Some basic theorems on algebraic groups. Amer. J. of Math. t. 78, 1956, pp. 401-443, theorem 10.

[17] J.P. SERRE.- Faisceaux algébriques cohérents. Annals of Math. série 2, t. 61, 1955, pp. 197-278.

[18] J.P. SERRE.- Sur la cohomologie des variétés algébriques. J. Math. pures et appl. série 9, t. 36, 1957, pp. 1-16.

[19] J.P. SERRE.- Groupes algébriques et corps de classes. Cours au Collège de France, 1957. Paris, Hermann 1959. (Act. Scient. et ind. 1264, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago VII).

[20] J.P. SERRE.- Corps locaux. Paris, Hermann 1962 (Act. Scient. et Ind. 1296, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago VIII).

[21] C.S. SESHADRI.- Variété de Picard d'une variété complète. Annali di mat. pura ed applicata, série 4, t. 57, 1962, pp. 117-142.

[22] A. WEIL.- Sur les critères d'équivalence en géométrie algébrique. Math. Annalen, t. 128, 1954,

[23] A. WEIL.- Fibre spaces in algebraic geometry. (Notes rédigées par A. Wallace 1952). Univ. of Chicago, Dept of Math. 1955 (multigraphié).

[24] A. WEIL.- Variétés abéliennes et courbes algébriques. Paris, Hermann 1948 (Act. Scient. et Ind. 1064, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 8) n° 15, théorème 6.