F. BERTRANDIAS

Ensembles remarquables d'adèles algébriques

Mémoires de la S. M. F., tome 4 (1965)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1965__4__R3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 4, 1965, VI + 98 p.

ENSEMBLES REMARQUABLES D'ADELES ALGEBRIQUES

par Françoise BERTRANDIAS (*)

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur PISOT. Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude à son égard ; pour l'attention avec laquelle il a dirigé mes recherches, pour son aide constante dans les grandes lignes comme souvent dans les détails, je le remercie très vivement.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à Monsieur KAHANE qui a bien voulu s'intéresser à mon travail et faire partie du jury de cette thèse.

Monsieur MALLIAVIN a accepté de me proposer un second sujet et m'a guidé dans sa préparation ; je l'en remercie bien vivement, ainsi que pour l'intérêt qu'il a porté au premier sujet.

Enfin je ne saurais oublier la bienveillance que m'avait toujours témoignée Monsieur SALEM ; de plus de nombreux résultats de cette thèse (principalement le chapitre IV) sont issus directement de ses travaux et de ses cours. Aussi je tiens à exprimer ici la profonde reconnaissance que je garde à sa mémoire.

(*) Thèse Sc. math., Paris, 1965

TABLE DES MATIERES

TABLE DES NOTATIONS

INTRODUCTION

1 Rappelons la définition et les propriétés essentielles de l'ensemble S, qui est à la base de ce travail :

S désigne l'ensemble des entiers algébriques réels $\theta > 1$ dont tous les conjugués (différents de θ) ont une valeur absolue strictement inférieure à 1 (C. PISOT [1])

1.1 Cet ensemble intervient de manière remarquable dans l'étude de la répartition modulo 1 des exponentielles :on sait (J.F. KOKSMA [1]) que la suite $\{ x^n \}$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout x réel > 1. On ne connait aucun x donnant effectivement une suite équirépartie ; par contre, soit θ un élément de S ; si l'on pose :

$\theta^n = u_n + \varepsilon_n$, où u_n entier rationnel et $|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2}$

on a, pour n assez grand :

$|\varepsilon_n| < (s-1)\rho^n$ (s degré de θ , $\rho < 1$ valeur absolue maxima des conjugués de θ). Il en résulte : $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$ et donc θ est un réel > 1 pour lequel la suite θ^n n'est pas équirépartie modulo 1.

1.2 Réciproquement les éléments de S peuvent être caractérisés par des propriétés de répartition modulo 1 (C. PISOT [1])

Exemple : Soit θ un réel > 1. On suppose qu'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que : $\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n$, avec : u_n entier rationnel, et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 < \infty$.

Alors θ appartient à S.

1.3 Dans tout corps de nombres algébriques réels, il existe des nombres de S ayant le degré du corps. Cette propriété permet de caractériser les nombres algébriques réels par l'existence d'approximations rationnelles "régulièrement réparties" (C. PISOT [2]).

1.4 On rencontre également l'ensemble S en analyse de Fourier. Soit E_ξ l'ensemble parfait à rapport constant ξ du type de Cantor construit sur le segment $[0,1]$ de la droite réelle, avec $\xi < \frac{1}{2}$. E_ξ est ensemble d'unicité du groupe R/Z si et seulement si $1/\xi$ est un nombre de S. (R. SALEM [1] , R. SALEM et A. ZYGMUND [1]). (Rappelons les définitions suivantes : soit G un groupe abélien localement compact, $\hat{G}$ son groupe dual. Un ensemble E de G est ensemble de multiplicité s'il existe une fonction ϕ de $L^\infty(\hat{G})$ telle que $\phi(\gamma) \to 0$ quand $\gamma \to \infty$ dans G., ϕ n'est pas identiquement nulle, et le spectre de ϕ est porté par E. Un ensemble E est ensemble d'unicité s'il n'est pas ensemble de multiplicité).

1.5 S possède enfin la propriété remarquable suivante : S est un ensemble fermé (R. SALEM [2]). Cette propriété peut se déduire de l'étude de l'ensemble $\mathfrak{F}$ des fractions rationnelles $\phi(X) = \frac{A(X)}{Q(X)}$ qui vérifient les conditions suivantes :
(a) les polynômes A et Q ont des coefficients entiers rationnels.
(b) $\phi(X)$ possède un pôle et un seul $1/\theta$ dans le disque $|X| \leqslant 1$ de C, ce pôle est réel et vérifie $\rho \leqslant \frac{1}{\theta} < 1$
(c) $|\phi(X)| \leqslant 1$ si $|X| = 1$ dans C
(d) $Q(0) = 1$

On montre que l'ensemble $\mathfrak{F}$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme dans le disque $X \leqslant r < \rho$ de C (J. DUFRESNOY et C. PISOT [1])

2 L'analyse p-adique a permis (C. CHABAUTY [1]) de construire dans le corps Q_p des nombres p-adiques un ensemble de nombres algébriques θ possédant des propriétés analogues à celles de l'ensemble S : en particulier cet en-

semble est fermé, et on peut le caractériser par la relation $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 < \infty$ où ε_n est la "partie principale" du développement de Hensel du nombre p-adique θ^n.

D'autre part, C. PISOT([3] à [6]) a construit des ensembles de fractions rationnelles généralisant l'ensemble $\mathcal{F}$. En particulier soit $\mathcal{F}_q$ l'ensemble des fractions rationnelles $\phi(X) = \frac{A(X)}{Q(X)}$ vérifiant les conditions (a), (b), (c) du paragraphe 1.5, et la condition (d') : $Q(0) = q$, où q est un entier rationnel $\geqslant 1$, fixé.

$\mathcal{F}_q$ possède les propriétés remarquables suivantes :

$\mathcal{F}_q$ <u>est un ensemble compact pour la topologie de la convergence uniforme dans le disque</u> $|X| \leqslant r < \rho$ <u>de</u> C, <u>ainsi que pour la topologie de la convergence uniforme dans le disque</u> $|X|_p \leqslant r_p < |q|_p$ <u>de</u> Ω_p (clôture algébrique de Q_p), <u>pour tout</u> p.

Ce résultat permet de construire des ensembles fermés de nombres algébriques dans R et dans Q_p, pour tout p diviseur de q. <u>Exemple</u> : Considérons le sous ensemble de $\mathcal{F}_q$ formé des fractions rationnelles θ telles que :

$|\phi(0)| \geqslant 1$, $|\phi(0)|_p > 1$ pour tout p diviseur de q

ϕ a un pôle et un seul, $1/\theta_p$ dans le disque $|X|_p < 1$ de Ω_p, et ce pôle appartient à Q_p, pour tout p diviseur de q.

C. PISOT montre que l'ensemble des nombres θ correspondants est fermé dans R, et l'ensemble des nombres θ_p correspondants fermé dans Q_p.

Il retrouve ainsi dans le cas $q = p^r$, les ensembles de C. CHABAUTY.

3. Ces résultats récents donnaient l'idée d'une généralisation de l'ensemble S qui se situerait dans l'anneau des adèles de Q.

Cette généralisation est l'objet du travail présenté ici.

Dans le chapitre I, on rappelle la définition et un certain nombre de propriétés de l'anneau topologique V_p des adèles de Q, en particulier l'existence, pour tout élément x de V_p, d'une décomposition unique :

$x = e_p\, E(x) + \varepsilon_p(x)$, où e_p est l'élément unité de l'anneau V_p, $E(x)$ un rationnel, et $\varepsilon_p(x)$ un élément appartenant à un sous-ensemble remarquable F_p de V_p. Cette décomposition jouera le rôle de la décomposition en "partie entière" et "reste modulo 1" d'un nombre réel. Dans ce même chapitre on rappelle quelques propriétés de l'analyse harmonique dans V_p et ses sous-anneaux V_I, isomorphes algébriquement et topologiquement au produit $\prod_{p \in I} Q_p$ (I ensemble fini de valuations distinctes de Q, 0 désignant la valuation ordinaire).

Dans le chapitre II, on donne la définition des ensembles $S_I^{p'}$ qui généraliseront l'ensemble S : ce sont des ensembles d'éléments algébriques de l'anneau V_I. L'ensemble $S_I^{p'}$ possède des caractérisations analogues à celles de l'ensemble S (paragraphe 1.2), le rôle joué par le reste modulo 1 étant joué par la composante p'-adique de $\varepsilon_p(x)$.

Dans le chapitre III, on généralise la propriété de S rappelée au paragraphe 1.3 : tout anneau d'éléments algébriques de V_I contient des éléments de l'ensemble $S_I^{p'}$ ayant le degré de l'anneau et ceci permet de donner une caractérisation des éléments algébriques de V_I.

Dans le chapitre IV, on définit dans V_I des ensembles E_ξ "à rapport constant" et on leur associe des ensembles $E_\xi^{\wedge}$ d'un groupe abélien compact F_I^+ qui est isomorphe soit à un sous groupe, soit à un groupe quotient du groupe additif V_I. On généralise à ces ensembles $E_\xi^{\wedge}$ le résultat de R. SALEM (cf. paragraphe 1.4). Ce sont les ensembles S_I^{0} qui interviennent ici. Pour la démonstration, on définit des ensembles d'unicité du type "Piatecki-Shapiro" dans un groupe abélien compact et on montre que certains ensembles E_ξ sont de ce type ; d'autre part, comme dans la théorie classique, on utilise les caractérisations du chapitre II.

Dans le chapitre V, on étudie la répartition dans $(R/Z)^r$ de certaines suites vectorielles définies dans V_I, en particulier de la suite

$\{(H_p(x_p^n))_{p\in I}\}$ où x appartient à V_I ($H_p(x_p^n)$ est la "partie principale" du développement de Hensel du nombre p-adique x_p^n). On montre que cette suite est équirépartie pour presque tout x de V_I tel que $|x_p|_p > 1$ ($p \in I$). On ne connaît aucun élément x tel que la suite soit effectivement équirépartie ; par contre, si θ est élément de l'ensemble S_I^o on montre que la suite n'est pas équirépartie. Le chapitre V donne donc une généralisation des résultats classiques rappelés paragraphe 1.1.

4. De nombreux problèmes restent à résoudre concernant les ensembles $S_I^{p'}$. En particulier on ne sait pas si ces ensembles sont fermés ; cependant les résultats de C. PISOT rappelés au paragraphe 2 montrent qu'il possèdent des sous ensembles fermés remarquables.

Il faudrait également chercher s'il existe dans l'anneau V_I un ensemble d'éléments algébriques généralisant l'ensemble T des nombres de R. SALEM [3] .

Enfin, de manière plus générale, on peut se demander si une étude analogue peut être faite dans l'anneau des adèles d'un corps k de nombres algébriques, extension finie de Q.

CHAPITRE I

ANNEAU DES K-ADELES - DEFINITION - PROPRIETES

1. Définitions. Notations

1.1 Soit Q le corps des rationnels. On sait qu'une valeur absolue sur Q est équivalente soit à la valeur absolue ordinaire, qu'on notera $|\ |_o$, soit à une valeur absolue p-adique notée $|\ |_p$ et choisie telle que $|p|_p = \frac{1}{p}$. On notera P l'ensemble de toutes les valuations distinctes non équivalentes de Q : 0 désigne la valuation ordinaire, p la valuation p-adique, $R = Q_o$ le corps des réels complété de Q pour la valuation ordinaire, Q_p le corps des nombres p-adiques, complété de Q pour la valuation p-adique. Z désigne l'anneau des entiers rationnels, Z_p l'anneau des entiers p-adiques. Dans toute la suite, p désignera en général un élément quelconque de P (on pourra avoir, en particulier p = 0)

1.2 Soit I un sous ensemble fini de P contenant 0. On pose :

$$V_P^I(Q) = \prod_{p \in I} Q_p \qquad \prod_{p \in P-I} Z_p$$

(produit algébrique et topologique). $V_P^I(Q)$ est un anneau topologique localement compact.

Par définition (J. TATE [1] S. LANG [1]) l'anneau des adèles de Q est :

$$V_P(Q) = \bigcup_I V_P^I(Q)$$

où la réunion est prise pour tous les sous ensembles finis I de P contenant 0, et où la topologie est définie en prenant comme base d'ouverts les ouverts de tous les anneaux topologiques $V_P^I(Q)$.

$V_P(Q)$ est un anneau topologique localement compact.

Dans toute la suite, on le notera simplement V_P. Tout élément x de V_P peut s'écrire :

$x = (x_p)_{p \in P}$ avec x_p élément de Q_p et $|x|_p \leq 1$ sauf au plus pour un nombre fini de p. (On note $|x_p|_p = |x|_p$)

L'addition s'écrit : $x + y = (x_p + y_p)_{p \in P}$. L'élément neutre $(0)_{0 \in P}$ sera noté 0.

La multiplication s'écrit : $x\, y = (x_p\, y_p)_{p \in P}$. Il existe un élément neutre : $(1)_{p \in P}$, qui sera noté e_P.

1.3 Soit K un sous ensemble non vide, fini ou infini, de P. On appelle anneau des K adèles de Q le sous anneau topologique suivant de V_P :

$$V_K = \{x \in V_P \quad ; \quad x_p = 0 \text{ si } p \text{ n'appartient pas à } K\}$$

V_K est un anneau topologique localement compact (topologie induite par V_P dans V_K, sous ensemble fermé). V_K possède un élément neutre pour la multiplication :

$e_K = (\delta_p^K)_{p \in P}$ avec $\delta_p^K = 1$ ou 0 suivant que p élément de K ou non.

Dans la suite, on s'interessera surtout aux sous anneaux V_I de V_P, où I est un sous ensemble fini non vide de P, contenant ou non 0 (dans ce qui suit, I aura toujours cette signification).

Un anneau V_I est isomorphe au produit (algébrique et topologique) :

$\prod_{p \in I} Q_p$. Cas particulier : $I = \{ p' \}$: le sous anneau $V_{p'} = e_{p'}.Q_{p'}$ de V_P est isomorphe au corps topologique $Q_{p'}$.

V_P contient des sous anneaux isomorphes algébriquement au corps Q des rationnels : ce sont les sous anneaux :

$$Q_K = e_K.Q = \{x \in V_K \quad ; \quad x_p = r \text{ élément de } Q \text{ pour tout } p \text{ de } K\}$$

On pose $x_K = e_K . x$ pour tout x de V_P (x_K est la projection de x dans V_K).

Soit $(K_h)_{h=1,\dots,m}$ une partition de K en un nombre fini de sous ensembles K_h non vides. On a, d'une manière unique :

$$x = \sum_{h=1}^{m} y_h, \quad \text{où } x \text{ élément de } V_K,\ y_h \text{ élément de } V_{K_h}$$

(car $y_h = x_{K_h}$) . V_K est composé direct de ses sous-anneaux V_{K_h} .

On pose : $|x|_K = \operatorname{Sup}_{p \in K} |x|_p$ pour tout x de V_K .

$|x|_K$ est une pseudo valuation de l'anneau V_K, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} |x|_K = 0 \iff x = 0 \\ |x + y|_K \leqslant |x|_K + |y|_K \\ |x\, y|_K \leqslant |x|_K\, |y|_K \end{cases}$$

La topologie définie dans V_K par cette pseudo-valuation est équivalente à la topologie initiale dans le cas seulement où K est un ensemble fini I.

2. Décomposition d'Artin. Domaine fondamental

Notations : K^- désigne $K - \{0\}$ ou K suivant que 0 appartient à K ou non.

K^+ désigne K ou $K + \{0\}$ suivant que 0 appartient à K ou non.

$Z[K]$ désigne l'anneau des rationnels n'ayant en dénominateur que des facteurs p appartenant à K^- .

2.1 Définition

F_P, domaine fondamental de V_P, est le sous ensemble de V_P défini par :

$$F_P : \{x \in V_P \text{ tels que : } |x|_p < 1 \text{ si } p \text{ élément de } P^- \quad \text{et : } a \leqslant x_0 < a + 1\}$$

où a est un réel fixé.

F_P dépend de a (on pourrait le noter $F_P^{(a)}$). Dans certaines questions, on aura à préciser le choix de a (dans les chapitres II et III $a = -\frac{1}{2}$, dans le chapitre IV a = 0).

Lemme 1 (E. ARTIN [1])

<u>Soit un élément</u> x **de** V_P. <u>Il existe une décomposition unique</u> :

$$x = e_P\, E(x) + \varepsilon_P\,(x)$$

<u>où</u> $E(x)$ <u>est un rationnel et</u> $\varepsilon_P(x)$ <u>appartient au domaine fondamental</u> F_P.

<u>Démonstration</u>

On sait que tout nombre p-adique x_p possède des développements : $x_p = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n\, p^n$ ($a_n \in Z$). Le rationnel $\sum_{n=-k}^{-1} a_n\, p^n$ est défini modulo 1 : En effet, à deux suites a_n et a'_n correspondent deux rationnels dont la difference $\sum_{n=-k}^{-1} (a_n - a'_n)\, p^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a'_n - a_n)\, p^n$ est un rationnel n'ayant que le facteur p en dénominateur, et de valeur absolue p-adique $\leqslant 1$: c'est donc un entier rationnel.

On note $H_p\,(x_p)$ ce rationnel :

$$x_p = H_p\,(x_p) + \eta_p\,(x_p) \quad \text{où} \quad H_p(x_p) \in Z\,[p]\,, \quad \eta_p\,(x_p) \in Z_p$$

Si $x_p = 0$, on prendra $H_p(x_p) = 0$

(on remarque que l'application $x_p \to H_p\,(x_p\, y_p)$ où y_p élément de Q_p est un homomorphisme du groupe additif Q_p dans le groupe R/Z, et cet homomorphisme est continu car $|x_p| \leqslant |y_p|^{-1}$ entraîne : $H_p(x_p\, y_p) \equiv 0$ modulo 1 (cf. paragraphe 3 groupe dual de Q_p))

Soit un élément x de V_P. $H_p\,(x_p) = 0$ sauf au plus pour un nombre fini de p. Posons : $\bar{E}\,(x) = \sum_{p \in P^-} H_p\,(x_p)$

$$\bar{\varepsilon}_p\,(x) = x_p - \bar{E}(x) = \eta_p\,(x_p) - \sum_{\substack{p' \in P^- \\ p' \neq p}} H_{p'}\,(x_{p'}) \text{ si } p \in P^-$$

$$\bar{\varepsilon}_0\,(x) = x_0 - \bar{E}\,(x)$$

$$\bar{\varepsilon}_P\,(x) = (\,\bar{\varepsilon}_p\,(x))_{p \in P}$$

On a : $x = e_P\, \bar{E}(x) + \bar{\varepsilon}_P\,(x)$, où $\bar{E}(x)$ élément de Q

Il existe un entier n tel que $a \leqslant \bar{\varepsilon}_0(x) + n < a + 1$

En posant : $E(x) = \bar{E}(x) - n$, $\varepsilon_P(x) = \varepsilon_P\,(x) + n e_P$

on obtient la décomposition cherchée.

Cette décomposition est unique : Si $e_P E(x) + \varepsilon_P(x) = e_P\, E'(x) + \varepsilon'_P\,(x)$, le rationnel $E(x) - E'(x) = r$ vérifie : $|r|_p \leqslant 1$ si $p \in P^-$ et $|r|_0 < 1$; d'où $\prod_{p \in P} |r|_p < 1$ ce qui entraîne $r = 0$

<u>Remarque</u> : Les valeurs de $E(x)$ et $\varepsilon_P(x)$ dépendent évidemment du choix du réel a qui détermine F_P. En notant provisoirement :

$x = e_P\, E^{(a)}\,(x) + \varepsilon_P^{(a)}\,(x)$ la décomposition d'Artin, on a par exemple :

- si a entier rationnel : $\varepsilon_0^{(a)}(x) = \varepsilon_0^{(0)}(x) + a$ et donc : $\varepsilon_P^{(a)}(x) = \varepsilon_P^{(0)}(x) + a\, e_P$
- quelque soit a : $(\,\varepsilon_0^{(a)}(x)) = \varepsilon_0^{(0)}(x)$ et $((\,\varepsilon_0^{(a)}(x))) = \varepsilon_0^{(-1/2)}\,(x)$

avec les notations : pour tout réel α :

$\alpha = [\alpha] + (\,\alpha\,) = [\![\alpha]\!] + ((\alpha\,))$

où $[\;]$ et $[\![\;]\!]$ éléments de Z, $0 \leqslant (\quad) < 1$ et $-\frac{1}{2} \leqslant ((\quad)) < \frac{1}{2}$

2.2 <u>Définition</u>

F_K, <u>domaine fondamental de</u> V_K, <u>est le sous ensemble de</u> V_K <u>défini par</u> : $F_K = F_P \cap V_K$

<u>Lemme 2</u>

<u>Soit un élément</u> x <u>de</u> V_K. <u>Il existe une décomposition unique</u> :

$$x = e_K\; E(x) + \;\varepsilon_K(x)$$

<u>où</u> $E(x)$ <u>appartient à l'anneau</u> $Z\,[K]$, <u>et</u> $\varepsilon_K(x)$ <u>au domaine fondamental</u> F_K <u>avec</u>, <u>si</u> 0 <u>n'appartient pas à</u> K, <u>la condition</u> :

$$a \leqslant -\,E(x) < a + 1$$

<u>Démonstration</u>

L'existence résulte du lemme 1 : soit x un élément de V_K, on a :

$x = e_P\; E(x) + \varepsilon_P(x)$, où $E(x)$ élément de Q, $\varepsilon_P(x)$ appartient à F_P.

D'où $x = x_K = e_K\; E(x) + \varepsilon_K(x)$, où $\varepsilon_K(x) = e_K\; \varepsilon_P(x)$ appartient à F_K

Comme $E(x) \equiv \sum_{p \in P^-} H_p(x_p)$ modulo 1, $E(x)$ appartient à $Z\,[K]$.

Si 0 n'appartient pas à K, $E(x) = -\,\varepsilon_0(x)$ et donc $a \leqslant -\,E(x) < a + 1$

L'unicité se démontre comme pour le lemme 1, en utilisant la propriété :

Si r appartient à $Z\,[K]$, $\prod_{p \in K+} |r|_p < 1$ entraîne $r = 0$

3. Analyse harmonique dans V_P et V_K

3.1 Groupe dual du groupe additif V_P

Au cours de la démonstration du lemme 1, on a vu que :

$$\varepsilon_0(x) \equiv x_0 - \sum_{p \in P^-} H_p(x_p) \mod. 1 \quad (x \text{ élément de } V_P)$$

Il est clair que l'application : $x \to \exp 2i\pi\,\varepsilon_0(x\,y)$ (où y élément de V_P) est un homomorphisme continu du groupe additif V_P dans le groupe multiplicatif T des nombres complexes de module 1, c'est-à-dire est un caractère continu de V_P

J. TATE [1] montre que tout caractère continu de V_P est de la forme $x \to \exp 2i\pi\,\varepsilon_0(x\,y)$, où y élément de V_P, et que V_P est isomorphe algébriquement et topologiquement à son dual, par l'application qui fait correspondre à y le caractère précédent.

Ceci résulte en particulier de l'étude des caractères continus de Q_p : tout caractère continu de Q_p est de la forme : $x_p \to \exp 2i\pi\,H_p(x_p\,y_p)$, où y_p élément de Q_p, et Q_p est isomorphe algébriquement et topologiquement à son dual par l'application qui fait correspondre à y_p le caractère précédent (dans le cas $p = 0$, on pose $H_0(x_0) = x_0$ modulo 1 pour x_0 élément de $R = Q_0$).

La méthode de J. TATE, ou l'étude de V_K comme sous groupe additif fermé de V_P, montre la propriété analogue pour V_K : tout caractère continu de V_K est de la forme : $x \to \exp 2i\pi\,\varepsilon_0(x\,y)$, où y élément de V_K, et V_K est isomorphe algébriquement et topologiquement à son dual par l'application qui fait correspondre à y le caractère précédent.

Ceci s'applique en particulier aux anneaux V_I. Dans ce cas, le résultat se déduit immédiatement de la connaissance des caractères continus de Q_p pour tout p de I : le dual de $\prod_{p \in I} Q_p$, produit d'un nombre fini de groupes localement compacts, est isomorphe au produit $\prod_{p \in I} \hat{Q}_p$ et donc au produit $\prod_{p \in I} Q_p$ puisque $\hat{Q}_p$ dual de Q_p est isomorphe à Q_p, et l'isomorphisme est de la forme donnée ci-dessus (HEWITT - ROSS [1] 23 - 18).

3.2 Intégrale et mesure de Haar.

V_K étant un groupe additif abélien localement compact, il existe une fonctionnelle linéaire positive invariante par translation sur $C_c(V_K)$, espace des fonctions continues à support compact dans V_K, ou intégrale de Haar, et, d'après le théorème de Riesz une mesure associée ou mesure de Haar (RUDIN [1] chapitre 1). Intégrale et mesure de Haar sont uniques à une constante multiplicative près. On normalise par : mes $F_K = 1$

On notera l'intégrale de Haar : $\int_{V_K} f(x)\,d\,x \quad (f \in C_c(V_K))$

En particulier intégrale et mesure de Haar de $e_p.Q_p \sim Q_p$ sont ainsi normalisées par : mes $F_p = 1$ ($F_p = e_p Z_p$ si $p \neq 0$, $F_0 = e_0 [0, 1[$)

Un anneau V_I étant isomorphe au produit fini $\prod_{p \in I} Q_p$, on sait (HEWITT - ROSS 15 - 17 - i) que l'intégrale de Haar de V_I est proportionnelle à la fonctionnelle produit des intégrales de Haar de Q_p (p élément de I) ; les normalisations choisies entraînent l'égalité ; En particulier, soit f une fonction de $C_c(V_I)$ définie par :

$f(x) = \prod_{p \in I} f_p(x_p)$, où f_p appartient à $C_c(Q_p)$, x élément de V_I, x_p élément de Q_p.

On a : $\int_{V_I} f(x)\,d\,x = \prod_{p \in I} \int_{Q_p} f_p(x_p)\,d\,x_p$

4. Etude de quelques sous groupes et groupes quotients du groupe additif V_K

4.1 Sous groupe $e_K.\,Z[K]$

Lemme 3

Le sous anneau topologique $e_K.\,Z[K]$ de V_K est discret si 0 appartient à K, dense dans V_K si 0 n'appartient pas à K.

Démonstration

Si 0 appartient à K

Montrons que l'élément 0 de $e_K.\,Z[K]$ est isolé ;

Soit $A = \{x \in V_K \; ; \; |x|_p \leq 1$ si p élément de K^- , $|x|_0 < 1\}$

A est un ouvert de V_K contenant 0. Soit r un élément de $Z[K]$.

Si $e_K.r$ appartient à A, on a : $\prod_{p \in P} |r|_p < \prod_{p \in K} |r|_p < 1$. Donc $r = 0$

Si 0 n'appartient pas à K

Tout ouvert de V_K contient un ouvert du type suivant :

$A = \{x \in V_K \; ; \; |x - y|_p \leq p^{-n_p}$ si p élément de I, $|x|_p \leq 1$ si p élément de K-I$\}$

où I est un sous ensemble fini non vide de K, y élément de V_K, n_p entier rationnel.

Soit z l'élément de V_K défini par : $z = qy_I$, où $q = \prod_{p \in I} p^{-n_p}$

z appartient à V_I, donc E(z) appartient à Z [I] . Soit $r = \frac{1}{q} E(z)$

r appartient à Z [I] , donc à Z [K] . On a :

$$|r - y_p|_p = \left| \frac{1}{q} (z_p - \varepsilon_p(z)) - y_p \right|_p = \left| \frac{1}{q} \varepsilon_p(z) \right|_p \leq p^{-n_p} \quad \text{si p élément de I}$$

$$|r|_p = |E(z)|_p \leq 1 \quad \text{si} \quad \text{p élément de K-I}$$

Donc l'élément $e_K . r$ de $e_K . Z [K]$ appartient à l'ouvert A : Tout ouvert de V_K contient un élément de $e_K . Z [K]$. Ceci achève la démonstration du lemme.

4.2 Sous groupe Q_K

Lemme 4

Le sous anneau topologique $Q_K = e_K . Q$ de V_K est dense dans V_K si K distinct de P.

(Si K = P, $Q_K = Z [P]$ est discret dans V_P d'après le lemme 3)

Démonstration On supposera le réel a du domaine fondamental choisi : $a = -\frac{1}{2}$

Si 0 n'appartient pas à K, le lemme 4 résulte du lemme 3 puisque

$e_K . Z [K] \subset Q_K \subset V_K$.

Si 0 appartient à K

Tout ouvert de V_K contient un ouvert du type :

$$A = \{x \in V_K \; ; \; |x - y|_p < \frac{1}{c} \text{ si p élément de } I^-$$
$$|x - y|_0 < \frac{1}{c}$$
$$|x|_p \leq 1 \text{ si p élément de K-I}\}$$

où I sous ensemble fini non vide de K contenant 0, y élément de V_K, c réel > 0

Pour tout p de I^- , soit un entier n_p tel que $p^{n_p} > c$

On pose $v = \prod_{p \in I^-} p^{n_p}$. Si K distinct de P, il existe un entier u tel que : $u > c\,v$ et $|u|_p = 1$ pour tout p élément de K

Soit $r = \frac{v}{u} E\left(\frac{u}{v} y_I\right)$. $E\left(\frac{u}{v} y_I\right)$ appartient à $Z[I]$. On a :

$$|r - y_p|_p = \left|\frac{v}{u} \varepsilon_p\left(\frac{u}{v} y_I\right)\right|_p \leq p^{-n_p} < \frac{1}{c} \quad \text{si } p \text{ élément de } I^-$$

$$|r - y_0|_0 = \left|\frac{v}{u} \varepsilon_0\left(\frac{u}{v} y_I\right)\right|_0 < \frac{1}{c}$$

$$|r|_p \leq 1 \quad \text{si } p \text{ élément de } K-I$$

$e_K r$ appartient à A : Tout ouvert contient donc un élément de Q_K, ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque Le lemme 4 montre qu'un anneau V_I est isomorphe algébriquement et topologiquement au complété de Q pour la pseudo valuation

$|r|_I = \operatorname{Sup}_{p \in I} |r|_p$ définie paragraphe 1.2 (cf. K. MAHLER [1] nombres g-adiques et g^*-adiques).

4.3 Groupe dual du groupe additif $e_K . Z[K]$, si 0 élément de K

Lemme 5.

Si 0 appartient à K le groupe dual du sous groupe discret $e_K.Z[K]$ de V_K est isomorphe, algébriquement et topologiquement, au groupe quotient. $V_K / e_K.Z[K]$, qui est compact.

Démonstration

Il suffit de démontrer que $e_K.Z[K]$ est son propre orthogonal dans V_K, car on sait (RUDIN [1] 2-1) que $\widehat{G/H^\perp} \sim \hat{H}$ (H sous groupe fermé d'un groupe G abélien localement compact).

Le sous groupe $H^\perp$ de V_K orthogonal à $e_K.Z[K]$ est défini par :

$$H^\perp = \{y \in V_K \ ; \ \varepsilon_0(x\,y) = 0 \mod 1 \text{ pour tout } x \in e_K.Z[K]\}$$

Soit y élément de V_K tel que pour tout r de $Z[K]$ on ait :

$$r\,y_0 = \sum_{p \in K^-} H_p(r\,y_p) \mod 1$$

Le choix $r = 1$ montre $y_0 = \rho$ où ρ élément de $Z[K]$

$r\rho$ appartient à $Z[K]$ entraîne : $r\rho = \sum_{p \in K^-} H_p(r\rho) \mod 1$.

D'où $\sum_{p \in K^-} H_p(r\rho) \equiv \sum_{p \in K^-} H_p(r\,y_p)$ pour tout r de $Z[K]$

Ceci entraîne : $|r(\rho - y_p)|_p \leqslant |(H_p(r(\rho - y_p))|_p \leqslant 1$

D'où $|\rho - y_p|_p \leqslant |r|_p^{-1}$ pour tout r de Z [K]

et donc $\rho = y_p$ (pour tout p de K)

L'orthogonal $H^{\perp}$ de $e_K.Z[K]$ est $e_K.Z[K]$ lui-même, ce qui achève la démonstration du lemme.

D'après la décomposition d'Artin (lemme 2) à tout élément du groupe quotient correspond un élément et un seul du domaine fondamental F_K par l'application :

$$x + e_K.Z[K] \rightarrow \varepsilon_K(x) \quad \text{où } x \text{ élément de } V_K$$

et réciproquement à tout élément de F_K ξ correspond un élément et un seul du quotient $V_K / e_K.Z[K]$: $\xi + e_K Z[K]$.

(on retrouve ainsi directement le fait que $V_K / e_K Z[K]$ est un groupe compact : en effet $e_K.Z[K]$ étant fermé dans V_K, le quotient est localement compact pour la topologie quotient ; comme F_K est compact dans V_K, $V_K / e_K.Z[K]$ est nécessairement compact).

<u>Définition</u> <u>Si</u> 0 <u>appartient à</u> K, F_K^+ <u>désigne le groupe additif isomorphe algébriquement et topologiquement au groupe quotient</u> $V_K / e_K.Z[K]$, <u>dont les éléments sont les éléments du domaine fondamental</u> F_K.

F_K^+ <u>est abélien compact</u>.

Ceci revient à dire qu'on donne à F_K, sous ensemble de V_K, une structure de groupe additif topologique, en définissant l'opération suivante :

$(\xi, \eta) \rightarrow \xi \oplus \eta$ $(\xi, \eta$ éléments de $F_K)$ où :

$\xi \oplus \eta = \xi + \eta + n$,n étant l'entier rationnel tel que :

$a \leqslant \xi_0 + \eta_0 + n < a + 1$

et en prenant comme ouverts les images, par l'application $x \rightarrow \varepsilon_K(x)$, des ouverts de V_K.

Le lemme 5 s'écrit : Si 0 appartient à K : $\hat{F}_K^+ \sim Z[K]$

σ désignera l'isomorphisme $y \rightarrow \gamma = \sigma(y)$ de $e_K.Z[K]$ dans $\hat{F}_K^+$.

(y élément de $e_K.Z[K]$). On sait que cet isomorphisme est défini par :

$$(\varepsilon_K(x), \gamma) = \exp 2i\pi\ \varepsilon_0(x\,y) \quad \text{pour tout } x \text{ de } V_K$$

$(\xi \to (\xi, \gamma)$) désigne un caractère continu de F_K^+ .

4.4 <u>Groupe dual du groupe additif compact</u> F_K^+ , <u>si</u> 0 <u>n'appartient pas à</u> K

Si 0 n'appartient pas à K, le sous ensemble F_K de V_K est un sous groupe additif compact de V_K. On l'écrira F_K^+ pour avoir la même notation que dans le cas où 0 appartient à K.

<u>Lemme 6. Si 0 n'appartient pas à K, le groupe dual du groupe compact</u> F_K^+ <u>est isomorphe au groupe quotient</u> V_K/F_K^+ , <u>lui-même isomorphe au groupe quotient</u> $Z[K]/Z$, <u>avec la topologie discrète</u>.

<u>Démonstration</u>

Soit H le sous groupe de V_K orthogonal à F_K^+: $H = \{y \in V_K$;
$\varepsilon_0(x\,y) = 0 \bmod 1$ pour tout x de $F_K^+ \}$. $\varepsilon_0(x\,y) = -\sum_{p\in K} H_p(x_p y_p) = 0$ mod 1 entraîne : $|x_p y_p|_p \leqslant 1$ si p élément de K pour tout x_p de Z_p

Ceci est réalisé si et seulement si $|y_p|_p \leqslant 1$. F_K^+ est donc son propre orthogonal dans V_K. D'où le résultat :

$$\hat{F}_K^+ \sim V_K / F_K^+$$

D'autre part, soient x et x' deux éléments de V_K .
$x-x'$ appartient à F_K si et seulement si $E(x) = E(x')$ modulo 1.
Il est clair que l'application $x + F_K^+ \to E(x) + Z$ définit un isomorphisme du groupe additif V_K / F_K^+ sur le groupe additif $Z[K]/Z$. Comme le groupe dual du groupe compact F_K^+ est discret, le lemme est démontré.
σ désignera dans ce cas l'homomorphisme du groupe additif V_K dans le groupe additif $\hat{F}_K^+$.

$$y \to \gamma = \sigma(y) \quad \text{où } y \text{ élément de } V_K \text{ et } \gamma \text{ élément de } F_K^+$$

On sait (RUDIN [1] 2.1) que cet homomorphisme est défini par :

$$(\varepsilon_K(x), \gamma) = \exp 2i\pi\ \varepsilon_0(x\,y) \quad \text{pour tout } x \text{ de } V_K.$$

5. Eléments algébriques de V_K

V_K est une algèbre sur Q, en définissant la multiplication d'un élément x de V_K par un rationnel r par :

$$r.x = (r\, x_p)_{p \in K} .$$

5.1 Définition

On appellera élément algébrique de V_K un élément algébrique sur Q de la Q algèbre V_K (N BOURBAKI [1] ch. 4 paragraphe 2 et [2] paragraphe 11, Exercice 1).

"Un élément γ de V_K est algébrique" signifie : Il existe un polynôme de $Q[X]$: $A(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

tel que : $A(\gamma) = a_0 e_K + a_1 \gamma + \dots + a_n \gamma^n = 0$

On dit que γ est racine de A dans V_K.

Remarque : " γ algébrique dans V_K" entraîne " γ_p algébrique dans Q_p pour tout p de K". La réciproque est exacte dans le cas seulement où K est un ensemble fini I.

5.2 Polynôme minimal.

Si γ est algébrique dans V_K, l'ensemble des polynômes A de $Q[X]$ tels que $A(\gamma) = 0$ est un idéal de l'anneau $Q[X]$: On appelle polynôme minimal de γ et on écrit :

$$Pm_K(\gamma ; X) = X^s + c_{s-1} X^{s-1} + \dots + c_0 \qquad (c_i \in Q)$$

le polynôme unitaire qui engendre cet idéal.

Le degré s de $Pm_K(\gamma ; X)$ est par définition le degré de γ.

On remarque que les polynômes figurant dans la décomposition de $Pm_K(\gamma ; X)$ en facteurs irréductibles sont 2 à 2 distincts. En effet, dans le cas contraire on aurait : $Pm_K(\gamma ; X) = A(X)\, B(X)^2$ où A et B appartiennent à $Q[X]$; γ serait racine du polynôme AB de $Q[X]$, ce qui est absurde.

Si K contient plus d'un élément, $Pm_K(\gamma ; X)$ n'est pas nécessairement irréductible.

Soit $(K_h)_{h=1..m}$ une partition de K en un nombre fini de sous ensembles non vides. Soit γ un élément algébrique de V_K. γ_{K_h} est un élément algébrique de V_{K_h} et $Pm_{K_h}(\gamma_{K_h} ; X)$ divise $Pm_K(\gamma ; X)$. Il en résulte :

$$Pm_K(\gamma ; X) = \underset{h=1,\dots,m}{\mathrm{p\,p\,c\,m}} \; Pm_{K_h}(\gamma_{K_h} ; X)$$

En particulier si K est un ensemble fini I :

$$Pm_I(\gamma ; X) = \underset{p \in I}{\mathrm{p\,p\,c\,m}} \; Irr(\gamma_p ; X)$$

($Irr(\gamma_p ; X)$ est le polynôme unitaire irréductible dont γ_p est racine dans Q_p).

On remarque qu'un élément γ algébrique dans V_K est algébrique dans V_p et l'on a :

$$Pm_p(\gamma ; X) = \mathrm{p\,p\,c\,m}\,\{X, Pm_K(\gamma ; X)\}$$

Un élément algébrique γ de V_K étant donné, il existe une partition $(K_h)_{h=1,\dots,m}$ de K en sous ensembles non vides telle que les polynômes $Pm_{K_h}(\gamma_{K_h} ; X)$ soient irréductibles et distincts. En effet, si l'on écrit $Pm_K(\gamma ; X) = \prod_{h=1}^{m} A_h(X)$, où les polynômes A_h sont les facteurs irréductibles distincts de $Pm_K(\gamma ; X)$, il suffit de poser : $K_h = \{p \in K \; ; \; A_h(\gamma_p) = 0\}$. Cette partition sera notée $(K_h)^{\gamma}_{h=1\dots m}$ est appelée partition de K relative à l'élément algébrique γ. On a alors :

$$Pm_K(\gamma ; X) = \prod_{h=1}^{m} Pm_{K_h}(\gamma_{K_h} ; X)$$

(où $Pm_{K_h}(\gamma_{K_h} ; X) = A_h(X)$)

<u>Notations</u> :

Ω_p désigne la cloture algébrique de Q_p ($\Omega_0 = C$).

Les racines dans Ω_p de $Pm_K(\gamma ; X)$ sont distinctes. On les notera $\gamma_p^{(i)}$ $(i = 1,\dots, s)$ pour tout p élément de P. Si p appartient à K, on pose $\gamma_p^{(1)} = \gamma_p$.

$\sum_{i=1}^{s} \gamma_p^{(i)}$ est un rationnel indépendant de p. On pose $\sum_{i=1}^{s} \gamma_p^{(i)} = -c_{s-1} = Tr_K(\gamma)$

$\prod_{i=1}^{s} \gamma_p^{(i)}$ est un rationnel indépendant de p. On pose $\prod_{i=1}^{s} \gamma_p^{(i)} = (-1)^s c_0 = Nm_K(\gamma)$

5.3 Anneaux d'éléments algébriques

Soit γ un élément algébrique de V_K. A tout polynôme A de Q [X] :

$$A(X) = r_0 + r_1 X + \dots + r_n X^n .$$

on associe l'élément α de V_K :

$$\alpha = A(\gamma) = r_0 e_K + r_1 \gamma + \dots + r_n \gamma^n .$$

L'ensemble des éléments $A(\gamma)$ de V_K, pour tout polynôme A de Q [X] , est évidemment unealgèbre sur le corps Q. On note cet ensemble $Q_K[\gamma]$

Tout élément $A(\gamma)$ peut s'écrire d'une manière unique :

$$A(\gamma) = \bar{A}(\gamma) = t_0 e_K + t_1 \gamma + \dots + t_{s-1} \gamma^{s-1} \qquad (t_i \in Q)$$

le polynôme $\bar{A}$ étant le reste de la division de A (X) par $Pm_K(\gamma ; X)$.
Par suite, comme espace vectoriel sur Q, $Q_K[\gamma]$ est de dimension s.
Tout élément $A(\gamma)$ est de degré $\leqslant$ s. Si $\alpha = A(\gamma)$ est de degré s, $e_K, \alpha, \dots, \alpha^{s-1}$ constitue une base de l'espace vectoriel $Q_K[\gamma]$.
Donc : $Q_K[\alpha] = Q_K[\gamma]$.

Etudions la structure algébrique de l'anneau $Q_K[\gamma]$.

A et B étant deux polynômes de Q [X] , $A(\gamma) = B(\gamma)$ si et seulement si $A(X) \equiv B(X) \bmod Pm_K(\gamma ; X)$. Il en résulte facilement :
l'application $A(\gamma) \rightarrow A(X) + (Pm_K(\gamma ; X))$ définit un isomorphisme de l'anneau $Q_K[\gamma]$ sur l'anneau $Q[X] / (Pm_K(\gamma ; X))$, anneau des classes résiduelles de Q [X] modulo l'idéal $(Pm_K(\gamma ; X))$.

Soit $(K_h)^{\gamma}_{h=1,\dots,m}$ la partition de K relative à l'élément algébrique γ . $Pm_K(\gamma ; X) = \prod_{h=1,\dots,m} Pm_{K_h}(\gamma_{K_h} ; X)$ est la décomposition de $Pm_K(\gamma ; X)$ en facteurs irréductibles. L'application
$A(X) + (Pm_K(\gamma ; X)) \rightarrow (A(X) + (Pm_{K_h}(\gamma_{K_h} ; X)))_{h=1,\dots,m}$ définit un isomorphisme de l'anneau $Q[X] / (Pm_K(\gamma ; X))$ sur l'anneau

$$\prod_{h=1}^{m} Q[X] / (Pm_{K_h}(\gamma K_h ; X)) \text{ (produit de m corps)}$$

Il suffit en effet de remarquer : Il existe un polynôme A(X) défini modulo $Pm_K(\gamma ; X)$, congru modulo $Pm_{K_h}(\gamma_{K_h} ; X)$ à un polynôme

$A_h(X)$, pour tout $h = 1, \ldots, m$;

A est défini par :

$$A(X) = \sum_{h=1}^{m} A_h(X)\, B_h(X) \frac{Pm_K(\gamma\, ;\, X)}{Pm_{K_h}(\gamma_{K_h}\, ;\, X)} \mod Pm_K(\gamma\, ;\, X)$$

où les B_h vérifient :

$$B_h(X) \frac{Pm_K(\gamma\, ;\, X)}{Pm_{K_h}(\gamma_{K_H}\, ;\, X)} \equiv 1 \mod Pm_{K_h}(\gamma\, ;\, X)$$

L'application $A(\gamma) \to (A(\gamma_{K_h}))_{h=1\ldots m}$ est composée de trois isomorphismes d'anneaux :

$$A(\gamma) \to A(X) + (Pm_K(\gamma\, ;\, X)) \to (A(X) + (Pm_{K_h}(\gamma_{K_h} : X)))_{h=1\ldots m} \to$$

$$\to (A(\gamma_{K_h}))_{h=1\ldots m}$$

Cette application définit donc un isomorphisme de l'anneau $Q_K[\gamma]$ sur l'anneau $\prod_{h=1}^{m} Q_{K_h}[\gamma_{K_h}]$, produit des h corps $Q_{K_h}[\gamma_{K_h}]$ de V_{K_h}

Comme V_K est composé direct de ses sous anneaux V_{K_h}, ceci peut s'exprimer de la manière suivante :

Lemme 7

Tout anneau $Q_K[\gamma]$ d'éléments algébriques de V_K est composé direct des m corps d'éléments algébriques $Q_{K_h}[\gamma_{K_h}]$ de V_{K_h}, où $(K_h)^{\gamma}_{h=1,\ldots,m}$ est la partition de K relative à l'élément algébrique γ.

D'où en particulier le résultat : $Q_K[\gamma]$ est un corps si et seulement si le polynôme minimal de γ est irréductible.

Notations

On a vu que $\gamma_p^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$ désignent les racines dans Ω_p de $Pm_K(\gamma\, ;\, X)$. Si $\alpha = A(\gamma)$ est un élément de $Q_K[\gamma]$, on écrira souvent (chapitres II, III, IV) en abrégé $\alpha_p^{(i)}$ au lieu de $A(\gamma_p^{(i)}) = r_0 + r_1 \gamma_p^{(i)} + \ldots + r_n {\gamma_p^{(i)}}^n$, s'il n'y a pas d'ambiguité (si α est de degré s, les $A(\gamma_p^{(i)})$ sont distincts, on a bien

$A(\gamma_p^{(i)}) = \alpha_p^{(i)}$ au premier sens ; dans le cas contraire, les valeurs distinctes des $A(\gamma_p^{(i)})$ sont les $\alpha_p^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, s')$ au premier sens (s' degré de α)).

CHAPITRE II

ENSEMBLES $S_I^{p'}$ - DEFINITION - CARACTERISATION

On sait que l'étude du comportement modulo 1 de $\lambda\,\theta^n$, où λ non nul est un réel bien choisi, permet de caractériser les éléments de S soit parmi les nombres algébriques, soit parmi les nombres réels (C PISOT [1]). Rappelons ces caractérisations :

<u>Caractérisation 1</u> :

<u>Soit un nombre algébrique réel</u> $\theta > 1$. θ <u>appartient à</u> S <u>si et seulement s'il existe un réel</u> $\lambda \neq 0$ <u>tel que</u> :

$$\lim_{n \to +\infty} ((\lambda\,\theta^n)) = 0$$

<u>Caractérisation 2</u>

<u>Soit un nombre réel</u> $\theta > 1$. θ <u>appartient à S si et seulement s'il existe un réel</u> $\lambda \neq 0$ <u>tel que</u> :

$$\sum_{n=1}^{N} n\,((\lambda\,\theta^n))^2 = o(N)$$

Il est intéressant pour la suite de remarquer que dans ces caractérisations on peut écrire :

$$((\lambda\,\theta^n)) = \varepsilon_0\,(\lambda\,\theta^n)$$

avec les notations du chapitre I paragraphe 2 (en identifiant R avec le sous anneau e_0. R de V_P, et en choisissant le réel $a = -\frac{1}{2}$)

Rappelons également la définition et les caractérisations des ensembles de nombres algébriques p-adiques définis par C. CHABAUTY [1] :

Soit A(X) un polynôme de la forme :

$$A(X) = p^r X^s + a_{s-1} X^{s-1} + \dots + a_0$$

où : r entier > 0, $a_i \in Z$, $a_0 \neq 0$ $|a_{s-1}|_p = 1$

Soit θ la racine de A dans Ω_p de valeur absolue p-adique > 1 (qui appartient à Q_p d'après le lemme de Hensel).

θ est élément de S_p^0 (resp. de S_p^p) si et seulement si on impose à A la condition supplémentaire : les racines de A dans C (resp. les racines de A dans Ω_p distinctes de θ) appartiennent au disque $|X| < 1$.

Ces ensembles possèdent les caractérisations suivantes (avec les notations de I. 2, le réel a = $-\frac{1}{2}$, et Q_p identifié au sous anneau $e_p.Q_p$ de V_p) :

Soit θ un élément de Q_p vérifiant : $|\theta|_p > 1$. θ appartient à S_p^0 (resp. S_p^p) si et seulement s'il existe un élément $\lambda \neq 0$ de Q_p tel que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_0 (\lambda \theta^n)^2 < \infty \quad (\text{resp. } |\varepsilon_p(\lambda \theta^n)|_p < C \rho^n$$

où C, ρ réels >0 et $\rho < 1$).

On définira (paragraphe 1) des ensembles $S_I^{p'}$ d'éléments algébriques de V_I qui généralisent l'ensemble S, ainsi que les ensembles S_p^0 et S_p^p. Ces ensembles possèdent des caractérisations analogues (paragraphe 2), le rôle joué par le reste modulo 1 dans le cas réel étant joué par une composante de l'élément $\varepsilon_p(x)$ de la décomposition d'Artin.

1. Ensembles $S_I^{p'}$ - Définition - Propriétés.

1.1 Soit p' un élément de P.

$S_I^{p'}$ est l'ensemble des éléments algébriques θ de V_I tels que $|\theta|_p > 1$ pour tout $p \in I$, et pour lesquels il existe un polynôme A de Z [X] ayant les propriétés suivantes :

- θ est racine de A dans V_I
- les racines de A dans $\Omega_{p'}$, (distinctes de $\theta_{p'}$, si $p' \in I$) appartiennent au disque $|X|_{p'} < 1$.

- les racines de A dans Ω_p, pour tout $p \in P$, (distinctes de θ_p si $p \in I$) appartiennent au disque $|X|_p \leq 1$.

1.2 Les conditions imposées au polynôme A entraînent (si A supposé primiti

$$A(X) = q\,X^n + a_{n-1}\,X^{n-1} + \dots + a_0$$

où : $|a_{n-1}|_p = 1$ pour tout $p \in I^-$, $q = \prod_{p \in I^-} p^{t_p}$ avec $t_p \geq 1$

Réciproquement, un élément θ de V_I tel que $|\theta|_p > 1$ pour tout $p \in I$, racine dans V_I d'un polynôme A de la forme ci-dessus, appartient à $S_I^{p'}$ si l'on ajoute la condition :

Les racines de A dans $\Omega_{p'}$ (distinctes de $\theta_{p'}$, si $p' \in I$) appartiennent au disque $|X|_{p'} < 1$.

On voit ainsi que l'ensemble S_0^0 coïncide dans R avec l'ensemble $S \cup (-S)$ et que les ensembles S_p^0 et S_p^p sont bien ceux qu'on a définis au début de ce chapitre.

1.3 Aucun ensemble $S_I^{p'}$ n'est vide.

$S_I^{p'}$ contient les éléments $e_I.r$ de l'anneau $e_I.Z\,[I]$, où $r = \frac{n}{q}$ vérifie :

$$q = \prod_{p \in I^-} p^{t_p} \text{ avec } t_p \geq 1$$

$$|n|_p = 1 \quad \text{si } p \in I^- \quad \text{et} \quad \left|\frac{n}{q}\right|_{p'} < 1 \quad \text{si } p' \notin I$$

$$\left|\frac{n}{q}\right|_0 > 1 \quad \text{si } 0 \in I, \quad \text{et} \quad \left|\frac{n}{q}\right|_0 < 1 \quad \text{si } 0 \notin I$$

On peut montrer que $S_I^{p'}$ contient des éléments algébriques de n'importe quel degré. Ceci sera précisé chapitre III.

1.4 Le polynôme A intervenant dans la définition est lié au polynôme minimal de θ par la relation (A supposé primitif) :

$$A(X) = q\ Pm_I\,(\theta\,;\,X)\,X^m$$

où m est l'entier défini par : $a_{m+1} \neq 0$, $a_i = 0$ si $i \leq m$. $(0 \leq m < n)$

En effet dans le cas contraire on aurait :

$$\frac{1}{q}\ A(X) = Pm_I\,(\theta\,;\,X).\,X^m.\,B(X)$$

où B est un polynôme unitaire de $Q\,[X]$, $B(0) \neq 0$, et degré de $B > 1$

Ceci entraînerait : les racines de B dans $\Omega_{p'}$, appartiennent au disque $|X|_{p'} < 1$, et dans Ω_p au disque $|X|_p \leqslant 1$. D'où $\prod_{p \in P} B(0) < 1$ et donc $B(0) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

1.5 Si $Pm_I(\theta ; X)$ n'est pas irréductible, soit $(I_h)^{\theta}_{h=1,\dots,m}$ la partition de I relative à l'élément algébrique θ (voir chapitre I paragraphe 5)

On a : $\theta = \sum_{h=1}^{m} \theta_{I_h}$ et $Pm_I(\theta ; X) = \prod_{h=1}^{m} Pm_{I_h}(\theta_{I_h} ; X)$

où les polynômes $Pm_{I_h}(\theta_{I_h} ; X)$ sont irréductibles.

$|\theta_{I_h}|_p > 1$ si $p \in I_h$; d'autre part il est clair que le polynôme $Pm_{I_h}(\theta_{I_h} ; X)$ est, à un coefficient entier q_h près, un polynôme A (au sens de 1.1) pour l'élément θ_{I_h} de V_{I_h}. Par suite :

θ_{I_h} appartient à l'ensemble $S_{I_h}^{p'}$ de V_{I_h}.

Réciproquement soit $(I_h)_{h=1,\dots,m}$ une partition de I et dans V_{I_h} soit τ_h un élément de $S_{I_h}^{p'}$ de polynôme minimal irréductible.

On pose : $\theta = \sum_{h=1}^{m} \tau_h$. Les polynômes $Pm_{I_h}(\tau_h ; X)$ sont premiers entre eux 2 à 2 (car irréductibles et distincts).

D'où : $Pm_I(\theta ; X) = \prod_{h=1}^{m} Pm_{I_h}(\tau_h ; X)$

$|\theta|_p = |\tau_h|_p > 1$ pour tout $p \in I$; d'autre part, il est clair que le polynôme $Pm_I(\theta ; X)$ est (à un coefficient entier q près) un polynôme A pour l'élément θ de V_I. Donc : θ appartient à $S_I^{p'}$.

Ces propriétés seront utilisées fréquemment dans les chapitres III et IV, ainsi que la propriété suivante :

Soit J un sous ensemble non vide de I et $J' = I-J$. Si θ appartient à l'ensemble $S_I^{p'}$ et θ_J à l'ensemble $S_J^{p'}$, alors $\theta_{J'}$ appartient à l'ensemble $S_{J'}^{p'}$.

On a : $\theta = \theta_J + \theta_{J'}$ et : $|\theta_{J'}|_p = |\theta_p| > 1$ si $p \in J'$.

On démontre que les polynômes $Pm_J(\theta_J ; X)$ et $Pm_{J'}(\theta_{J'} ; X)$ sont premiers entre eux en raisonnant par l'absurde comme dans 1.4.

D'où $Pm_I(\theta ; X) = Pm_J(\theta_J ; X)\, Pm_{J'}(\theta_{J'} ; X)$

Il est clair que $Pm_{J'}(\theta_{J'} ; X)$ (à un coefficient entier près) est un polynôme A pour l'élément $\theta_{J'}$ de $V_{J'}$. D'où le résultat.

1.6 <u>Si θ appartient à $S_I^{p'}$ et n entier > 0, θ^n appartient à $S_I^{p'}$</u>.

En effet, soit s le degré de $Pm_I(\theta ; X)$ et soient $\theta_p^{(i)}$ $(i=1,\dots,s)$ ses racines dans Ω_p ($\theta_p^{(1)} = \theta_p$ si $p \in I$). Quel que soit $p \in P$, les nombres ${\theta_p^{(i)}}^n$ $(i = 1,\dots s)$ sont les racines d'un polynôme B_n de $Z[X]$; ils sont nécessairement distincts car :

$$|\theta_p^{(1)}|_p^n > 1 \geqslant |\theta_p^{(i)}|_p^n \qquad (i = 2,\dots s \quad , \quad p \in I)$$

Il est clair que B_n est un polynôme A pour l'élément θ^n de V_I.

D'où le résultat. On a vu de plus que : <u>θ et θ^n ont le même degré</u>.

On aura besoin (chapitre III) de la précision supplémentaire :

Si $n' > n > 0$, $Pm_I(\theta^n ; X)$ et $Pm_I(\theta^{n'} ; X)$ <u>sont premiers entre eux</u>

Ceci se démontre en raisonnant par l'absurde comme dans 1.4.

2. <u>Caractérisations de l'ensemble $S_I^{p'}$</u>

On rappelle que dans ce chapitre le réel a de la décomposition d'Artin est choisi égal à $-\frac{1}{2}$.

2.1 Les caractérisations suivantes généralisent à l'ensemble $S_I^{p'}$ celles des ensembles S, S_p^0 et S_p^p rappelées au début du chapitre.

<u>Théorème 1</u>

<u>Soit θ un élément algébrique de V_I vérifiant</u> : $|\theta|_p > 1$ <u>pour tout</u> $p \in I$. θ <u>appartient à $S_I^{p'}$ si et seulement si il existe un élément</u> λ <u>inversible de V_I tel que</u> :

$$(1) \qquad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_{p'}(\lambda\, \theta^n) = 0$$

λ <u>est alors un élément algébrique de l'anneau $Q_I[\theta]$</u>

Théorème 2

Soit θ un élément de V_I vérifiant : $|\theta|_p > 1$ pour tout $p \in I$. θ appartient à $S_I^{p'}$ si et seulement si il existe un élément λ inversible de V_I tel que :

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{N} n\, |\varepsilon_p(\lambda\ \theta^n)|^2_{p'} = o\ (N)$$

λ est alors un élément algébrique de l'anneau $Q_I\,[\theta]$

Remarques

- Dans le théorème II, on peut remplacer la condition (2) par la condition plus forte (2') : $\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_p(\lambda\ \theta^n)|^2_{p'} < \infty$

- Si le réel a de la décomposition d'Artin est quelconque (on notera provisoirement $\varepsilon_p^{(a)}(x)$ le $\varepsilon_p(x)$ correspondant), les caractérisations précédentes ne peuvent s'exprimer simplement en fonctions des $\varepsilon_{p'}^{(a)}(\lambda\ \theta^n)$, sauf dans le cas $p' = 0$. En effet, on sait alors que :

$((\varepsilon_0^{(a)}(x))) = \varepsilon_0^{-1/2}(x)$ pour tout x de V_I

Par suite, il suffit, dans l'énoncé des théorèmes 1 et 2 (où $p' = 0$) de remplacer les conditions :

(1) par (1 a) : $\lim\limits_{n \to +\infty} ((\varepsilon_0(\lambda\ \theta^n))) = 0$

(2) par (2 a) : $\sum_{n=1}^{N} n\, ((\varepsilon_0(\lambda\ \theta^n)))^2 = o\ (N)$

ou (2') par (2' a) : $\sum_{n=1}^{\infty} ((\varepsilon_0(\lambda\ \theta^n)))^2 < \infty$

et ces conditions sont valables quel que soit a.

La condition (2'a) est équivalente à : $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \pi\, \varepsilon_0(\lambda\ \theta^n) < \infty$

(C'est sous cette forme que le théorème 2 sera utilisé dans le chapitre IV)

La démonstration des théorèmes 1 et 2 est analogue à la démonstration classique. On utilise en particulier des séries de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ et les déterminants de Kronecker D_n associés :

$D_n = \det\,(u_{h+k})$ $(0 \leqslant h,\ k \leqslant n)$. On sait que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ représente une fraction rationnelle, si et seulement si $D_n = 0$ pour n assez grand.

2.2 Théorèmes 1 et 2. Condition nécessaire. Démonstration.

La démonstration résulte immédiatement du lemme suivant :

Lemme

Soit θ un élément de $S_I^{p'}$ de degré s et λ un élément algébrique de l'anneau $Q_I[\theta]$ vérifiant les conditions suivantes :

$$|\lambda_p^{(i)}|_p \leq 1 \qquad (i=1,2,\dots,s) \qquad \text{si } p \notin I^+$$

$$|\lambda_p^{(i)}|_p \leq 1 \qquad (i=2,\dots,s) \quad \text{si } p \in I^-, \quad p \neq p'$$

$$|\lambda_0^{(i)}|_0 \leq \frac{1}{2s+1} \quad \text{si } p' \neq 0 \quad (i=1,\dots,s \text{ si } 0 \notin I \text{ et } i=2,\dots,s \text{ si } 0 \in I)$$

Alors on a :

$$E(\lambda\ \theta^n) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_p^{(i)}\ \theta_p^{(i)^n} \quad (p \in P) \quad \text{dès que } n > n_0$$

et : $|\varepsilon_p(\lambda\ \theta^n)|_{p'} \leq C\,\rho^n$ (C, ρ réels > 0, $\rho < 1$)

Démonstration du lemme

Posons $u_n = \sum_{i=1}^{s} \lambda_p^{(i)}\ \theta_p^{(i)^n}$, $(p \in P)$

u_n est un rationnel de l'anneau $Z[I]$ indépendant de p.

Si $p \in I$, $p \neq 0$: $|\lambda\ \theta^n - e_I\ u_n|_p = |\sum_{i=2}^{s} \lambda_p^{(i)}\ \theta_p^{(i)^n}|_p \leq 1$

Si $p \notin I$, $p \neq 0$: $|u_n|_p = |\sum_{i=1}^{s} \lambda_p^{(i)}\ \theta_p^{(i)^n}|_p \leq 1$

Si $p' \neq 0$ et $0 \in I$: $|\lambda\ \theta^n - e_I\ u_n|_0 = |\sum_{i=2}^{s} \lambda_p^{(i)}\ \theta_p^{(i)^n}|_0 \leq \frac{s-1}{2s+1} < \frac{1}{2}$

Si $p' \neq 0$ et $0 \notin I$: $|u_n|_0 = |\sum_{i=1}^{s} \lambda_p^{(i)}\ \theta_p^{(i)^n}|_0 \leq \frac{s}{2s+1} < \frac{1}{2}$

Si $p' \in I$ $\quad |\lambda\ \theta^n - e_I\ u_n|_{p'} \leq (s-1)\ \eta^n\ \Lambda_{p'}$, où $\eta = \sup_{i=2}^{s} |\theta_{p'}^{(i)}|_{p'} < 1$

Si $p' \notin I$ $\quad |u_n|_{p'} \leq s\ \eta^n\ \Lambda_{p'}$, où $\eta = \sup_{i=1}^{s} |\theta_{p'}^{(i)}|_{p'} < 1$

(avec $\Lambda_{p'} = \sup_i |\lambda_p^{(i)}|_{p'}$ où $i=2,\dots,s$ si $p' \in I$, $i = 1,\dots,s$ si $p' \notin I$)

Ces relations entraînent : $u_n = E(\lambda\ \theta^n)$ pour $n \geq n_0$

et : $\varepsilon_{p'}(\lambda\ \theta^n) = \lambda_{p'}\ \theta_{p'}^n - u_n$ si $p' \in I$ $(n > n_0)$

$$\varepsilon_{p'}(\lambda\ \theta^n) = -u_n \qquad \text{si } p' \notin I. \quad (n > n_0)$$

D'où le résultat annoncé ($\rho = n$, $C = s\ \Lambda_{p'}$)

Conséquence : Si θ appartient à $S_I^{p'}$, on peut trouver un élément λ inversible de V_I tel que $|\varepsilon_p'(\lambda\ \theta^n)|_{p'} < C\rho^n$

$(n > n_0)$. Il suffit de prendre un λ inversible satisfaisant aux conditions du lemme. Exemple : $\lambda = e_I$ si $p' = 0$

$$\lambda = \frac{e_I}{p'^k} \text{ si } p' \neq 0, \qquad \text{avec } p'^k > 2s + 1$$

Pour un tel λ les relations (1) et (2) des théorèmes 1 et 2 sont évidemment vérifiées.

Le lemme démontré sera utilisé par la suite, en particulier chapitre III (paragraphe 2) et chapitre IV (paragraphe 4).

2.3 Théorème 1. Condition suffisante - Démonstration.

Soit $B(X) = b_s X^s + \ldots + b_0$ un polynôme de $Z[X]$ dont θ est racine. La suite $\{\lambda\ \theta^n\}$ $(n \in N')$ vérifie la relation de récurrence :

$$b_s\ \lambda\ \theta^n + b_{s-1}\ \lambda\ \theta^{n-1} + \ldots + b_0\ \lambda\ \theta^{n-s} = 0 \qquad (n > s)$$

Posons $E(\lambda\ \theta^n) = u_n$, $\varepsilon_p'(\lambda\ \theta^n) = \eta_n$ et $\varepsilon_p(\lambda\ \theta^n) = \eta_{n,p}$ $(p \in P)$

On a : $V_n = b_s u_n + \ldots + b_0 u_{n-s} = -(b_s \eta_{n,p} + \ldots + b_0 \eta_{n-s,p})$ $(p \in P)$

Par hypothèse : $\eta_{n,p'} \to 0$ quand $n \to +\infty$

D'autre part : $|\eta_n|_p \leq 1$ pour tout $p \in P$

Il en résulte : $\prod_{p \in P} |V_n|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$

D'où, V_n étant rationnel : $V_n = 0$ pour $n > n_0$

La suite $\{u_n\}$ vérifie donc la même relation de recurrence que la suite $\{\lambda\ \theta^n\}$.

La série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ représente une fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ (on supposera P, Q premiers entre eux).

Si $p \in P-I$, $|u_n|_p \leq 1$. La série converge dans le disque $|X|_p < 1$ de Ω_p : les racines de $Q(X)$ appartiennent donc au disque $|X|_p \geq 1$.

Si $p \in I$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_p \theta_p^n X^n = \frac{\lambda_p}{1-\theta_p X} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{n,p} X^n$$

Comme $|\eta_{n,p}|_p \leq 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{n,p} X^n$ converge dans le disque $|X|_p < 1$ de Ω_p : les racines de $Q(X)$ distinctes de $1/\theta_p$ appartiennent donc au disque $|X|_p \geq 1$ (en effet comme $\lambda_p \neq 0$, $1/\theta_p$ est racine de $Q(X)$).

Si $p = p'$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{n,p'} X^n$ vérifie de plus :

$$\eta_{n,p'} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

Par suite, la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ n'a pas de pôle sur la circonférence $|X|_{p'} = 1$ de $\Omega_{p'}$, comme il résulte du lemme suivant ;

Lemme

Soit la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} W_n X^n$ $(W_n \in \Omega_{p'})$ On suppose qu'elle converge dans le disque $|X|_{p'} < 1$ et représente une fraction rationnelle $\frac{R(X)}{S(X)}$. Si $W_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, la fraction rationnelle n'a pas de pôle sur la circonférence $|X|_{p'} = 1$ de $\Omega_{p'}$.

En admettant provisoirement ce résultat, il est clair que le polynôme $Q(1/X)$ est un polynôme A (voir 1.1) pour l'élément θ de V_I : par suite θ appartient à $S_I^{p'}$.

Pour tout $p \in I$, on a : $\lambda_p = -\theta_p \frac{P(1/\theta_p)}{Q'(1/\theta_p)}$. Donc λ est élément algébrique de l'anneau $Q_I[\theta]$.

Il reste à démontrer le lemme précédent : Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'au moins un pôle $1/\alpha$ de la fraction $\frac{R(X)}{S(X)}$, sur la circonférence $|X|_{p'} = 1$. On écrira :

$$\frac{R(X)}{1-\alpha X} = \frac{R(X)}{S(X)} S_1(X) = \sum_{n=0}^{\infty} W'_n X^n$$

$$R(X) = r_t X^t + r_{t-1} X^{t-1} + \ldots + r_0$$

$$S_1(X) = s_k X^k + s_{k-1} X^{k-1} + \ldots + s_o$$

On suppose R et S premiers entre eux, d'où : $R(1/\alpha) \neq 0$

On a : $W'_n = r_0 \alpha^n + \ldots + r_t \alpha^{n-t} = \alpha^{n-t} R(1/\alpha)$ $(n \geq t)$

et $\quad W'_n = s_0 W_n + \dots + s_k W_{n-k} \quad (n \geq k)$

La première relation entraîne : $|W'_n|_p = |R(1/\alpha)|_p > 0 \qquad (n \geq t)$

et la deuxième entraîne : $\quad W'_n \to 0$ quand $n \to +\infty$

ce qui est contradictoire. Le Lemme est donc démontré.

2.4 Théorème 2. Condition suffisante - Démonstration.

2.4.1. On conserve les notations du paragraphe précédent c'est-à-dire :

$$E(\lambda\theta^n) = u_n, \quad \varepsilon_p(\lambda\theta^n) = \eta_n, \quad \varepsilon_p(\lambda\theta^n) = \eta_{n,p}$$

Soit D_n le déterminant de Kronecker attaché à la suite u_n :

$$D_n = \det(u_{h+k}) \qquad 0 \leq h,\ k \leq n$$

On se propose de chercher des majorations de $|D_n|_p$, pour tout $p \in P$, de manière à majorer le produit : $\prod_{p \in P} |D_n|_p$

Pour cela on utilisera des déterminants déduits de D_n par combinaisons linéaires entre les colonnes. On pose :

$$V_{n,p} = u_n - \theta_p\, u_{n-1} \qquad \text{si } p \in I, \qquad n \geqslant 1$$

$$V_{n,p} = u_n \qquad \text{si } p \notin I$$

Pour tout $p \in P$, on a :

$$D_n = \det(u_{h+k}) = \begin{vmatrix} u_0 & V_{1,p} & \dots & V_{n,p} \\ u_1 & V_{2,p} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & V_{n+1,p} & & V_{2n,p} \end{vmatrix}$$

C'est sous cette forme qu'on majorera $|D_n|_p$.

Les relations : $V_{n,p} = u_n - \theta_p u_{n-1} = -\eta_{p,n} + \theta_p \eta_{p,n-1}$ si $p \in I$, $n \geq 1$

$$V_{n,p} = u_n = -\eta_{p,n} \qquad \text{si } p \notin I$$

entraînent facilement $\quad |V_{n,p}|_p \leq 1 + |\theta|_p \quad$ si $p \in I$

$$|V_{n,p}|_p \leq 1 \qquad \text{si } p \notin I$$

2.4.2. Majoration de $|D_n|_p$ pour $p \neq p'$

- Si $p \neq 0$ on majore $|D_n|_p$ sur son développement, c'est-à-dire :

si $p \in I$ $\quad |D_n|_p \leq \text{Sup } |u_i|_p \quad (1+|\theta|_p)^n$

Comme $|u_n|_p = |\lambda|_p |\theta|_p^n$, on a :

(1) $\quad |D_n|_p \leq C\, T^n$

avec : $C = |\lambda|_p$, $\quad T = |\theta|_p (1+|\theta|_p)$.

Si $p \notin I$ on a évidemment :

(2) $\quad |D_n|_p \leq 1$

- Si $p = 0$

On utilise la majoration d'Hadamard :

$$|D_n|_0^2 \leq (|u_0|^2 + \dots + |u_n|^2) \prod_{i=1}^{n} (|V_{i,0}|_0^2 + \dots + |V_{i+n,0}|_0^2)$$

Si $0 \in I$ $\qquad |u_n|_0 \leq (1+|\lambda|_0)\, |\theta|_0^n$

On en déduit :

(3) $\quad |D_n|_0 \leq C \quad (n+1)^{n/2} \quad T^n$

avec $\quad C = (1+|\lambda|_0) \dfrac{|\theta|_0^2}{|\theta|_0^2 - 1}$, $\qquad T = |\theta|_0 (1+|\theta|_0)$

Si $0 \notin I$, on a :

(4) $\quad |D_n|_0 \leq (n+1)^{n+1/2}$

2.4.3. Majoration de $|D_n|_{p'}$

Par hypothèse : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n\, |\eta_{n,p'}|_{p'}^2 = o(N)$. On en déduit facilement :

$$\sum_{n=1}^{N} n\, |V_{n,p'}|_{p'}^2 = o(N)$$

- Si $p' = 0$ on utilise la majoration d'Hadamard. D'autre part,

l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique donne :

$$\prod_{i=1}^{n} (V_{i,o}^2 + \dots + V_{i+n,o}^2) \leq \left(\frac{V_{1,o}^2 + 2V_{2,o}^2 + \dots + n\,V_{n,o}^2 + n\,V_{n+1,o}^2 + \dots + V_{2n,o}^2}{n}\right)^n$$

$$< \left(2\, \frac{V_{1,o}^2 + 2\,V_{2,o}^2 + \dots + 2n\,V_{2n,o}^2}{2n}\right)^n = \left(\frac{o(n)}{n}\right)^n$$

On en déduit les majorations :

(5) $\quad |D_n|_o \leqslant (n+1)^{1/2} \left(\dfrac{o(n)}{n}\right)^{n/2}$ si $0 \notin I$

(6) $\quad |D_n|_o \leqslant C\, T^n \left(\dfrac{o(n)}{n}\right)^{n/2}$ si $0 \in I$

avec $C = (1+|\lambda|_0)^{1/2}$, $T = |\theta|_0$

- si $p' \neq 0$ on majore $|D_n|_{p'}$ sur son développement :

$$|D_n|_{p'} \leqslant \sup_{i_o,\dots i_n} \left\{ |u_{i_o-1}|_{p'} \; |V_{i_1,p'}|_{p'} \cdots |V_{i_n+n-1,p'}|_{p'} \right\}$$

$(i_o,\dots i_n)$ étant une permutation de $(1, 2,\dots, n+1)$

D'autre part :

$$n\,!\; |V_{i_1,p'}|^2_{p'} \cdots |V_{i_n+n-1,p'}|^2_{p'} \leqslant i_1|V_{i_1,p'}|^2_{p'}\; i_2|V_{i_2+1,p'}|^2_{p'} \cdots i_n|V_{i_n+n-1,p'}|^2_{p'}$$

$$\leqslant \left(\frac{i_1|V_{i_1,p'}|^2_{p'} + \dots\dots\dots + i_n|V_{i_n+n-1,p'}|^2_{p'}}{n} \right)^n$$

(en utilisant l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique). Or :

$$i_1|V_{i_1,p'}|^2_{p'} + \dots + i_n|V_{i_n+n-1,p'}|^2_{p'} \leqslant |V_{1,p'}|^2_{p'} + 2|V_{2,p'}|^2_{p'} + \dots + 2n|V_{2n,p'}|^2_{p'}$$

$$= o(2n)$$

On en déduit les majorations :

(7) $\quad |D_n|_{p'} \leqslant C\, T^n \,(n\,!)^{-1/2} \left(\dfrac{o(n)}{n}\right)^{n/2}$ si $0 \in I$

où $C = |\lambda|_{p'}$, $T = |\theta|_{p'}$

(8) $\quad |D_n|_{p'} \leqslant (n!)^{-1/2} \left(\dfrac{o(n)}{n}\right)^{n/2}$ si $0 \notin I$.

2.4.4. <u>Etude du produit</u> $\pi_n = \prod_{p \in P} |D_n|_p$

Il suffit d'envisager les différents cas possibles et d'utiliser les majorations (1),...(8) précédentes.

Si <u>$p' = 0$</u> en utilisant les majorations (1) (2) (5) si $0 \in I$, et (1) (2) (6) si $0 \notin I$, on trouve :

$$\Pi_n \leqslant C' \, T'^n \left(\frac{o(n)}{n}\right)^{n/2}$$

(C', T' réels > 0)

Il est clair que $\Pi_n < 1$ pour $n > n_o$.

<u>Si $p' \neq 0$</u>

En utilisant les majorations (1) (2) (3) (7) si $0 \in I$, $p' \in I$

(1) (2) (3) (8) si $0 \in I$, $p' \notin I$

(1) (2) (4) (8) si $0 \notin I$, $p' \notin I$

(1) (2) (4) (7) si $0 \notin I$, $p' \in I$

on trouve :

$$\Pi_n \leqslant C'' \, T''^{\,n} \, (n+1)^{n+1/2} \, n!^{-1/2} \left(\frac{o(n)}{n}\right)^{n/2}$$

(C'', T'' réels > 0)

Dans ce cas également il est clair que : $\Pi_n < 1$ pour $n > n_o$

2.4.5 Comme D_n est rationnel, la condition :

$$\Pi_n = \prod_{p \in P} |D_n|_p < 1 \qquad \text{pour } n > n_o$$

entraîne :

$$D_n = 0 \quad \text{pour } n > n_o$$

Il en résulte : la série $\sum_{n=o}^{\infty} u_n X^n$ représente une fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$. Comme on a, pour tout $p \in I$:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \lambda_p \, \theta_p^n \, X^n = \frac{\lambda_p}{1 - \theta_p X} = \sum_{n=o}^{\infty} u_n X^n - \sum_{n=o}^{\infty} \eta_{n,p} X^n$$

(où $\lambda_p \neq 0$, $|\theta_p|_p > 1$, $|\eta_{n,p}|_p \leqslant 1$).

$1/\theta_p$ est racine du polynôme $Q(X)$.

Par suite θ est élément algébrique de V_I, et il existe λ , élément inversible de V_I pour lequel : $\varepsilon_{p'}(\lambda\, \theta^n) \to 0$: on est ramené aux hypothèses du théorème 1.

Le théorème 2 est donc démontré.

CHAPITRE III

ELEMENTS ALGEBRIQUES DE V_I ET ENSEMBLES $S_I^{p'}$

Rappelons la propriété suivante de l'ensemble S (C. PISOT [2]) :
Dans tout corps de nombres algébriques réel, il existe des éléments de S ayant le degré du corps.

D'autre part, C. CHABAUTY [1] a montré que dans tout corps de nombres algébriques contenu dans Q_p, il existe des éléments de l'ensemble $S_p^o \cap S_p^p$ ayant le degré du corps.

Ces propriétés se généralisent pour les ensembles $S_I^{p'}$ en utilisant les anneaux d'éléments algébriques contenus dans V_I, qui ont été définis chapitre I paragraphe 5.

On a le résultat suivant :

Théorème

Dans tout anneau d'éléments algébriques de V_I, il existe des éléments de l'ensemble $\bigcap_{p' \in J} S_I^{p'}$ ayant le degré de l'anneau, J désignant un sous ensemble fini non vide de P.

Après la démonstration de ce résultat (paragraphe 1), on donnera, comme application, une caractérisation des éléments algébriques de V_I (paragraphe 2).

1. Démonstration du théorème.

La démonstration est analogue à celle du résultat classique : celle-ci repose sur l'emploi du théorème de Minkowski sur les formes linéaires. On aura besoin ici d'un "théorème de Minkowski" pour des formes linéaires à coefficients soit réels, soit p-adiques. (Lemme de 1.1). On étudiera dans 1.2 le cas où l'anneau d'éléments algébriques est un corps. On en déduira le résultat général dans 1.3.

1.1 Lemme. Soient :

$L_0^{(i)}(x)$ $(i=1, \dots, s)$, s formes linéaires en $x_0, \dots, x_{s-1}$, à coefficients dans R, de déterminant $\Delta_0 \neq 0$.

$L_p^{(i)}(x)$ $(i=1,\dots,s)$, s formes linéaires en $x_0,\dots,x_{s-1}$, à coefficients dans Q_p, de déterminant $\Delta_p \neq 0$.

Il existe un système $x = (x_0,\dots,x_{s-1})$ d'entiers non tous nuls, tels que :

$$|L_0^{(i)}(x)|_0 \leqslant c_i$$

$$|L_p^{(i)}(x)|_p \leqslant p^{-\lambda_{p,i}} \qquad (i=1,2,\dots,s) \quad \text{et } p \in J^-$$

si on a la relation :

$$\prod_{i=1}^{s} c_i \prod_{p \in J^-} p^{-\sigma_p} \geqslant |\Delta_0|_0 \prod_{p \in J^-} |\Delta_p|_p \qquad \text{avec } \sigma_p = \sum_{i=1}^{s} \lambda_{p,i}$$

(J sous ensemble fini de P, c_i réel > 0, $\lambda_{p,i}$ entier).

Cette propriété résulte du théorème de Minkowski et de l'évaluation du déterminant $m(G)$ du sous-réseau G de Z^s : $G = \bigcap_{p \in J^-} G_p$, où le réseau G_p est défini par :

$$|L_p^{(i)}(x)|_p \leqslant p^{-\lambda_{p,i}} \qquad (i=1,2\dots,s)$$

Melle E. LUTZ [1] démontre que :

$$m(G) = \prod_{p \in J^-} m(G_p) \qquad ([1], I, 5)$$

et

$$m(G_p) = p^{\sigma_p} |\Delta_p|_p \qquad ([1], I, 3 \text{ et } 4)$$

Le lemme s'en déduit facilement.

Remarque : On peut remplacer l'hypothèse $L_0^{(i)}(x)$ à coefficients dans R, par $L_0^{(i)}(x)$ à coefficients dans C, à condition qu'avec chaque forme figure sa conjuguée et que les 2 formes soient majorées en valeur absolue par le même coefficient c_i.

1.2 Soit $Q_I[\gamma]$ l'anneau d'éléments algébriques étudié. On choisit l'élément algébrique γ engendrant l'anneau entier algébrique.*

On supposera d'abord que $Q_I[\gamma]$ est un corps ; ceci est équivalent à : $Pm_I(\gamma ;X)$ est irréductible. Soit s le degré de $Pm_I(\gamma :X)$, et soient $\gamma_p^{(i)}$ $(i=1\ldots s)$ ses zéros dans Ω_p (avec $\gamma_p^{(1)} = \gamma_p$ si $p \in I$). $Pm_I(\gamma ;X)$ étant irréductible, tout $\gamma_p^{(i)}$ est exactement de degré s sur Q dans Ω_p.

Nous allons démontrer l'existence d'un élément θ vérifiant l'ensemble des conditions suivantes. (1) (2) (3) :

(1) θ est de la forme : $\theta = \dfrac{\alpha}{\prod_{p\in I^-} p^r}$ (r entier > 0)

où α est un élément entier algébrique de $Q_I[\gamma]$ de la forme :

$$\alpha = x_0\, e_I + x_1\, \gamma + \ldots + x_{s-1}\, \gamma^{s-1} \qquad (x_i \in Z)$$

Pour tout $p \in P$, on pose :

$$\alpha_p^{(i)} = x_0 + x_1\, \gamma_p^{(i)} + \ldots + x_{s-1}\, {\gamma_p^{(i)}}^{s-1} = \Lambda(\gamma_p^{(i)}, x)$$

Si $p \in I$ on a : $\alpha_p = \alpha_p^{(1)} = \Lambda(\gamma_p^{(1)}, x) = \Lambda(\gamma_p, x)$

(2) Pour tout $p \in I$ les inégalités suivantes sont vérifiées :

(A_p) $(p \neq 0)$ $|\alpha_p|_p > p^{-r}$ $|\alpha_p^{(i)}|_p \leq p^{-(r+1)}$ $(i=2,\ldots,s)$

(A_0) (si $0 \in I$) $|\alpha_0|_0 > \prod_{p\in I^-} p^r$ $|\alpha_0^{(i)}|_0 \leq \eta \prod_{p\in I^-} p^r$ $(i=2,\ldots,s)$

(3) Pour tout $p \in I \cup J \cup \{0\} - I$ (c'est-à-dire $p \in J$, $p \notin I$, et $p = 0$ si $0 \notin I$), les inégalités suivantes sont vérifiées :

(B_p) $(p \neq 0)$ $|\alpha_p^{(i)}|_p \leq p^{-1}$ $(i=1,2,\ldots,s)$

(B_0) (si $0 \notin I$) $|\alpha_0^{(i)}|_0 \leq \eta \prod_{p\in I^-} p^r$ $(i=1,2,\ldots,s)$

où η désigne un nombre réel : $0 < \eta < 1$.

Tout élément θ vérifiant l'ensemble des conditions (1) (2) (3) est un élément de degré s de l'ensemble $\bigcap_{p'\in J} S_I^{p'}$:

En effet, pour tout $p \in I$, les conditions (A_p) entraînent que le nombre algébrique α_p est exactement de degré s sur Q. Par suite, l'élément algébrique α de V_I est exactement de degré s : pour tout $p \in I$, les $\alpha_p^{(i)}$ $(i=1,\ldots,s)$

---

* c'est-à-dire : $Pm_I(\gamma ; X)$ appartient à $Z[X]$

sont les racines, distinctes, dans Ω_p du polynôme Pm_I (α ;X). Le système des conditions (A_p) ($p \in I^-$) (B_p) ($p \in J^-$, $p \notin I$) et (A_0) ou (B_0) suivant que $0 \in I$ ou non, entraîne facilement pour le polynôme Pm_I (θ ;X) les propriétés suivantes : les racines de Pm_I (θ ;X) dans Ω_p (distinctes de θ_p si $p \in I$) appartiennent au disque : $|x|_p < 1$ pour tout $p \in I \cup J \cup \{0\}$ et au disque : $|x|_p \leq 1$ pour tout $p \in P$; la racine θ_p dans Ω_p ($p \in I$) appartient à Q_p et vérifie : $|\theta_p|_p > 1$.

Un élément θ vérifiant les conditions (1) (2) (3) est donc bien un élément de degré s de l'ensemble $\bigcap_{p' \in J} S_I^{p'}$ (il appartient même à l'ensemble $\bigcap_{p' \in I \cup J \cup \{0\}} S_I^{p'}$).

<u>Le lemme du paragraphe 1.1., permet de démontrer qu'un tel élément θ existe.</u>

Les formes linéaires Λ ($\gamma_p^{(i)}$, x) sont à coefficients dans Ω_p et non dans Q_p (sauf si $p \in I$ et i=1).

Pour appliquer le lemme, il faut se ramener à des majorations de valeurs absolues de formes linéaires à coefficients dans C ou dans Q_p.

<u>Si $p \notin I$,</u> les inégalités $|x_j|_p \leq p^{-1}$ (j=0,...s-1) entraîneront

$$|\Lambda(\gamma_p^{(i)}, x)|_p \leq p^{-1}$$

c'est-à-dire la condition (B_p). On posera donc :

(4) $\quad L_p^{(i)}(x) = x_{i-1}$ et $\lambda_{p,i} = 1 \qquad (i=1,\ldots,s).$

<u>Si $p \in I$ et $p \neq 0$</u> $\quad \gamma_p^{(i)}$ est algébrique de degré s, sur Q, mais de degré $\leq s-1$ sur Q_p, puisque $Pm_I(\gamma, X)$ a une racine γ_p dans Q_p, c'est-à-dire

$$\gamma_p^{(i)^{s-1}} = c_{s-2,p}\, \gamma_p^{(i)^{s-2}} + \ldots + c_{0,p} \quad (\text{où } c_{h,p} \in Q_p \text{ et } |c_{h,p}|_p \leq 1).$$

On a :

$$\Lambda(\gamma_p^{(i)}, x) = x_0 + c_{0,p}\, x_{s-1} + \ldots + (x_{s-2} + c_{s-2,p}\, x_{s-1})\, \gamma_p^{(i)^{s-2}}$$

Les inégalités

$$|x_j + c_{j,p}\, x_{s-1}|_p \leq p^{-(r+1)} \qquad (j = 0,\ldots, s-2)$$

entraîneront

$$|(\Lambda_p^{(i)}, x)|_p \leqslant p^{-(r+1)}$$

c'est-à-dire les s - 1 dernières égalités de la condition (A_p). On posera donc :

(5) $$L_p^{(i)}(x) = x_{i-2} + c_{i-2,p}\, x_{s-1} \qquad (i = 2,\dots,s)$$

et

$$\lambda_{p,i} = r + 1$$

Les formes $\Lambda(\gamma_0^{(i)}, x)$ sont à coefficients dans C, 2 à 2 conjuguées. On posera donc simplement :

$$L_0^{(i)}(x) = \Lambda(\gamma_0^{(i)}, x) \qquad (i=1,2,\dots,s)$$

et, lorsqu'on a affaire à des majorations, c'est-à-dire pour i=2,...,s (si $0 \in I$) et i=1,2,...,s ($0 \notin I$), on posera :

$$c_i = \eta \prod_{p \in I^-} p^r .$$

Restent les formes $\Lambda_p(\gamma_p, x)$ $(p \in I)$ pour lesquelles les conditions A_p imposent des minorations en valeur absolue. Or la formule du produit des valuations appliquée au rationnel :

$$\prod_{i=1}^{s} \Lambda(\gamma_p^{(i)}, x) = \prod_{i=1}^{s} \alpha_p^{(i)}$$

(rationnel indépendant de p, non nul si $x \neq (0,\dots,0)$ car dans Ω_p tout $\gamma_p^{(i)}$ est exactement de degré s sur Q - ici intervient l'hypothèse $Q_I[\gamma]$ est un corps) donne :

$$\prod_{p \in I^+} \prod_{i=1}^{s} |\Lambda(\gamma_p^{(i)}, x|_p \geqslant 1.$$

D'où pour tout $p' \in I^+$:

(6) $$|\Lambda(\gamma_{p'}, x)|_{p'} \geqslant \left(\prod_{i=2}^{s} |\Lambda(\gamma_{p'}^{(i)}, x)|_{p'} \prod_{\substack{p \in I^+ \\ p \neq p'}} |\Lambda(\gamma_p^{(i)}, x)|_p \right)^{-1}$$

c'est-à-dire une minoration de $|\Lambda(\gamma_{p'}, x)|_{p'}$ en fonction des majorations en valeur absolue de toutes les formes :

$$\Lambda(\gamma_p^{(i)}, x) \quad , \quad (p \in I^+, \ \gamma_p^{(i)} \neq \gamma_p)$$

et en particulier de majorations en valeur absolue des formes $\Lambda(\gamma_p, x)$ $(p \in I, p \neq p')$.

On posera donc :

(7) $$L_p^{(1)}(x) = \Lambda(\gamma_p, x) \qquad (p \in I).$$

Le choix des majorations correspondantes :

$$p^{-\lambda_{p,1}} \quad \text{et} \quad c_1 \qquad\qquad (\text{si } 0 \in I)$$

est assez arbitraire pourvu évidemment qu'on les choisisse supérieures aux minorations des conditions A_p. On prendra

$$c_1 = \prod_{p \in I^-} p^{2r} \quad (\text{si } 0 \in I) \qquad \text{et} \quad \lambda_{p,1} = [r/2] \qquad (p \in I^-)$$

On peut alors appliquer le lemme aux formes linéaires $L_p^{(i)}$ définies à partir des formes $\Lambda(\gamma_p^{(i)}, x)$ par les conditions (4) (5), (7) et aux $\lambda_{p,i}$ et c_i associés. En effet, on démontre aisément que les déterminants correspondants Δ_0 et Δ_p sont $\neq 0$.

Le reste de la démonstration consiste en la recherche d'un réel η $(0 < \eta < 1)$ et d'un entier positif r tels que l'inégalité du lemme soit vérifiée et que le 2ème membre de (6) soit supérieur à p'^{-r} (pour $p' \in I^-$) et supérieur à $\prod_{p \in I^-} p^r$ (pour $p' = 0$ si $0 \in I$).

On trouve les conditions suivantes :

<u>Si $0 \in I$:</u>

$$\begin{cases} \eta^{s-1}\, a^{2r-[r/2]} \geq a^{s-1}\, b^s\, |\Delta_0|_0 \displaystyle\prod_{p \in I^-} |\Delta_p|_p \\[2ex] \eta^{-(s-1)}\, a^{-2r+[r/2]} \left(\displaystyle\inf_{p \in I^-} p\right)^{r-[r/2]} > a^{-(s-1)} \end{cases}$$

<u>Si $0 \notin I$:</u>

$$\begin{cases} \eta^{s}\, a^{r-[r/2]} \geq b^s\, |\Delta_0|_0 \displaystyle\prod_{p \in I} |\Delta_p|_p \\[2ex] \eta^{-s}\, a^{r-[r/2]} \left(\displaystyle\inf_{p \in I} p\right)^{r-[r/2]} > a^{s-1} \end{cases}$$

$$(\text{où } a = \prod_{p \in I^-} p \quad \text{et} \quad b = \prod_{\substack{p \in J^- \\ p \notin I}} p).$$

Il est possible de choisir $\eta(r)$ tel que, <u>pour</u> r <u>assez grand</u>, ces inégalités soient vérifiées. On peut définir η par exemple par :

$$\eta^{s-1}\, a^{2r-[r/2]} = \left(\inf_{p\in I^-} p\right)^{r/3} \qquad \text{si } (0)\in I,$$

$$\eta^{s}\, a^{r-[r/2]} = \left(\inf_{p\subset I} p\right)^{r/3} \qquad \text{si } (0)\notin I.$$

On a donc construit un élément θ de $Q_I[\gamma]$ vérifiant les conditions (1) (2) (3).

Le théorème est démontré dans le cas particulier où $Q_I[\gamma]$ est un corps.

1.3 Cas général : Le polynôme $Pm_I(\gamma\,;X)$ n'est pas irréductible. Soit $(I_h)^{\gamma}_{h=1,2,\dots,m}$ la partition de I relative à l'élément algébrique γ (chapitre I, paragraphe 5). Soit s_h le degré du corps $Q_{I_h}[\gamma_{I_h}]$ $\left(s=\sum_{h=1}^{m} s_h\right)$.

Soit θ_h un élément algébrique de $Q_{I_h}[\gamma_{I_h}]$, de degré s_h, appartenant à l'ensemble $\bigcap_{p'\in J} S_{I_h}^{p'}$ (un tel élément existe d'après 1.2). Les éléments θ_h^n $(n\le N')$ sont des éléments de degré s_h de $\bigcap_{p'\in J} S_{I_h}^{p'}$, et leurs polynômes minimaux sont premiers entre eux deux à deux (chapitre II, paragraphe 1).

On peut choisir un système $(n_1,\dots,n_m)$ d'entiers positifs tels que les polynômes $Pm_{I_h}(\theta_h^{n_h}\,;X)$ $(h=1,\dots,m)$ soient premiers entre eux 2 à 2.

Soit $\theta=\sum_{h=1}^{m}\theta_h^{n_h}$. θ appartient à $\bigcap_{p'\in J} S_I^{p'}$ (chapitre II paragraphe 1) et au corps $Q_I[\gamma]$ (chapitre I paragraphe 5).

D'autre part :

$$Pm_I(\theta\,,X) = \operatorname*{ppcm}_{h=1,\dots,m} Pm_{I_h}(\theta_{I_h}\,,X)$$

Il en résulte : θ est de degré s. Ceci achève la démonstration du théorème.

2.- Une caractérisation des éléments algébriques de V_I

On sait que les nombres algébriques réels peuvent être caractérisés par l'existence d'approximations rationnelles "régulièrement réparties" (C. PISOT[2])

Cette propriété se généralise aux éléments algébriques de V_I (le rôle de Z étant joué par le sous anneau $e_I.Z[I]$ de V_I.

On a le résultat suivant :

Proposition - Un élément α de V_I est algébrique si et seulement s'il existe deux suites infinies $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ de rationnels de l'anneau $Z[I]$ telles que, pour tout $n \in N'$:

$$|v_n \alpha - u_n e_I|_I < c\rho^n$$

$$|v_{n+1} e_I - v_n \theta|_I < c\rho^n$$

et éventuellement, si $0 \notin I$:

$$|u_n|_0 < c\rho^n$$

$$|v_{n+1}|_0 < c\rho^n$$

où ρ et c sont des réels : $0 < \rho < 1$, $0 < c$, et θ un éléments de V_I tel que $|\theta|_p > 1$ $(p \in I)$.

Le degré s de α vérifie l'inégalité :

$$s - 1 \leq \frac{1}{\eta\, c(I^+)}$$

où $c(I^+)$ est le nombre d'éléments de I^+ et η le réel > 0 défini par :

$$\rho = \left(\prod_{p \in I} |\theta|_p\right)^{-\eta}$$

Démonstration

Elle utilise le théorème du paragraphe 1, pour le cas $J = I^+$ et la caractérisation suivante de l'ensemble $\bigcap_{p' \in I^+} S_I^{p'}$, qui se déduit immédiatement des propriétés de l'ensemble $S_I^{p'}$ étudiées chapitre II (Théorème 2 et lemme du paragraphe 2.2).

Soit θ un élément de V_I tel que $|\theta|_p > 1$ $(p \in I)$. appartient à $\bigcap_{p' \in I^+} S_I^{p'}$ si et seulement s'il existe un élément inversible λ de V_I, tel que :

$$\sup_{p' \in I^+} |\varepsilon_{p'}(\lambda\, \theta^n)|_{p'} < c\rho^n$$

$(n > n_0$, c réel > 0, ρ réel : $0 < \rho < 1)$.

λ <u>est alors un élément algébrique de</u> $Q_I[\theta]$.

Dans le cas où $\theta \in \bigcap_{p' \in I^+} S_I^{p'}$, on peut choisir pour λ tout élément entier algébrique de $Q_I[\theta]$, et l'on a (pour $n > n_0$) :

$$E(\lambda\, \theta^n) = Tr_I(\lambda\, \theta^n) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_p^{(i)}\ \theta_p^{(i)n} \qquad \text{(pour tout } p \in \mathbf{P}).$$

$$\varepsilon_p(\lambda\, \theta^n) = -\sum_{i=2}^{s} \lambda_p^{(i)}\ \theta_p^{(i)n} \qquad (p \in I)$$

$$= -E(\lambda\, \theta^n) \qquad (p \notin I).$$

<u>Principe de la démonstration</u>.- Elle est analogue à la démonstration classique. Si α est algébrique, on écrit $\alpha = \lambda/\mu$, où λ et μ sont 2 éléments entiers algébriques de $Q_I[\alpha]$, et on prend pour θ un élément de $\bigcap_{p' \in I^+} S_I^{p'}$ appartenant à $Q_I[\alpha]$. Les rationnels : $u_n = E(\lambda\, \theta^n)$, $v_n = E(\mu\, \theta^n)$ remplissent les conditions énoncées pour $n > n_0$. Réciproquement, s'il existe deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ vérifiant les conditions de la proposition, on montre que :

$$\frac{e_I . v_n}{\theta^n} \to \mu$$

$$\text{et} \quad \sup_{p' \in I^+} |\varepsilon_{p'}(\mu\, \theta^n)|_{p'} < K\rho^n.$$

D'où il résulte : θ appartient à l'ensemble $\bigcap_{p' \in I^+} S_I^{p'}$, et μ est un élément algébrique de $Q_I[\theta]$.

Par un raisonnement analogue, on montre que $\frac{e_I . u_n}{\theta^n} \to \lambda$, et que λ est un élément algébrique de $Q_I[\theta]$. On en déduit facilement $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$; α est un élément algébrique de $Q_I[\theta]$.

L'inégalité vérifiée par le degré s de α résulte de la formule du produit des valuations appliquée au rationnel $Nm_I(\theta)$.

CHAPITRE IV

ENSEMBLES E_ξ A RAPPORT CONSTANT DANS V_I

Dans ce chapitre, on se propose de généraliser pour l'ensemble S_I^0 de V_I la propriété suivante de l'ensemble S :

Soit E_ξ l'ensemble parfait symétrique à rapport constant ξ du segment (0, 1) (avec $0 < \xi < \frac{1}{2}$, $\xi \in R$) ; l'ensemble E_ξ est un ensemble d'unicité, si et seulement si $\theta = \frac{1}{\xi}$ appartient à l'ensemble S.

(R. SALEM [1] , R. SALEM-A. ZYGMUND [1] , J.P. KAHANE-R. SALEM [1] ch. V et VI)

La démonstration sera parallèle à la démonstration classique dont elle doit reprendre toutes les étapes pour les généraliser ; ceci entraîne quelques longueurs, que le lecteur voudra bien excuser.

Le plan adopté est le suivant :

1. Rappel des définitions des ensembles U et M d'un groupe abélien compact. Construction d'une classe d'ensembles U, généralisant les ensembles de Pjatecki-Shapiro ;
2. Définition de l'ensemble E_ξ de V_I , et de l'ensemble $E_\xi^\sim$ associé du groupe abélien compact F_I^+. Définition et étude d'une mesure μ portée par E_ξ et d'une mesure associée $\mu^\sim$ portée par $E_\xi^\sim$;
3. Recherche des ensembles $E_\xi^\sim$ qui sont des ensembles M ;
4. Recherche des ensembles $E_\xi^\sim$ qui sont des ensembles de U ;
5. Définition d'un ensemble E_ξ dans V_K, où K est un sous-ensemble infini de P. Cas des ensembles U.

1. Ensembles U et M dans un groupe abélien compact.

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe abélien compact (non discret) et Γ son groupe dual, qui est donc un groupe abélien discret (non compact). On note x un élément de G, γ un élément de Γ, $x \to (x,\gamma)$ un caractère continu de G. T désigne le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

1.1. Définitions.

Un ensemble E de G est dit ensemble de multiplicité (ensemble M) s'il existe une mesure μ (non nulle) de M(G), portée par E, dont la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ vérifie :

$$\hat{\mu}(\gamma) \to 0 \quad \text{quand } \gamma \to \infty \text{ dans } \Gamma ,$$

(ensemble M au sens strict), ou s'il existe une fonction ϕ (non nulle) de $L^\infty(\Gamma)$, dont le spectre est porté par E, telle que :

$$\phi(\gamma) \to 0 \quad \text{quand } \gamma \to \infty \quad \text{dans } \Gamma$$

(ensemble M au sens large).

Un ensemble qui n'est pas ensemble de multiplicité est dit ensemble d'unicité (ensemble U).

Remarques.- Un ensemble M au sens strict est bien un ensemble M au sens large : en effet, μ étant la mesure portée par l'ensemble telle que $\hat{\mu}(\gamma) \to 0$ quand $\gamma \to \infty$, on peut prendre $\phi = \hat{\mu}$, car $|\hat{\mu}(\gamma)|$ est borné dans Γ , et le spectre de $\hat{\mu}$ est identique au support de μ (RUDIN [1] 7.8.5.).-

Dans le cas G = R/Z, on retrouve des propriétés caractéristiques des ensembles U et M classiques, mais non leur définition initiale, qui résulte d'une étude de l'unicité du développement trigonométrique.

1.2. Exemples.-

Tout ensemble borélien E de G , de mesure de Haar positive, est un ensemble de multiplicité au sens strict. En effet, soit χ_E la fonction caractéristique de E dans G : $\chi_E \in L^1(G)$, et donc $\hat{\chi}_E \in C_0(\Gamma)$ (RUDIN [1] 1.2.4 (a)).

Soit μ la mesure de M(G) engendrée par χ_E (c'est-à-dire définie par :

$$\mu(A) = \int_A \chi_E(x)\, dx,$$

pour tout ensemble borélien A de G). μ est non nulle, portée par E, et telle que :

$$\lim_{\gamma \to \infty} \hat{\mu}(\gamma) = 0$$

<u>Tout ensemble</u> E <u>de</u> G <u>formé d'un nombre fini d'éléments</u> $(x_1, \dots, x_m)$ <u>est ensemble d'unicité</u>. En effet, toute fonction $\phi \in L^\infty(\Gamma)$, dont le spectre est porté par E, est de la forme (RUDIN [1] ,7.8.3 (e)) :

$$\phi(\gamma) = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i, \gamma) \quad (c_i \in C).$$

D'autre part, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un élément $\gamma \neq 0$ de Γ tel que

$$\sup_{i=1,2,\dots,m} |(x_i, \gamma) - 1| < \varepsilon \quad \text{(HEWITT-ROSS [1] (26.4)).}$$

Il en résulte l'existence d'une suite $\{\gamma_k\}$ $(k \in N')$ de Γ , tendant vers l'infini telle que :

$$\lim_{k \to +\infty} (x_i, \gamma_k) = 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

Soit $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $\phi(\gamma_0) \neq 0$; on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \phi(\gamma_0 + \gamma_k) = \phi(\gamma_0) .$$

Donc $\phi(\gamma)$ ne tend pas vers zéro quand $\gamma \to \infty$: E est un ensemble U.

1.3.- Pour montrer qu'un ensemble E est ensemble M, il suffit de trouver <u>une</u> fonction ϕ de $L^\infty(\Gamma)$, de spectre porté par E, non nulle, avec :

$$\lim_{\gamma \to \infty} \phi(\gamma) = 0$$

Pour montrer qu'un ensemble E est ensemble U, il faut montrer qu'aucune fonction ϕ non nulle ne possède les propriétés précédentes ; on utilisera par la suite le critère suivant :

Proposition 1.- <u>Pour qu'un ensemble</u> E <u>soit ensemble d'unicité, il suffit qu'on puisse lui associer une suite infinie</u> $\{\lambda_k\}$ $(k \in N')$ <u>de fonctions définies sur</u> G <u>ayant les propriétés suivantes</u> :

1°) <u>le support de</u> λ_k <u>est disjoint de</u> E ;

2°) λ_k <u>appartient à</u> $A(G)$ (c'est-à-dire,

$$\lambda_k(x) = \int_\Gamma \hat{\lambda}_k(\gamma)\,(x,\gamma)\,d\gamma ,$$

où $\hat{\lambda}_k$ appartient à $L^1(\Gamma)$) <u>et vérifie</u> :

$$\|\hat{\lambda}_k\|_1 = \int_\Gamma |\hat{\lambda}_k(\gamma)|\,d\gamma < B \text{ \underline{indépendant} de } k ;$$

3°) $\lim\limits_{k\to+\infty} \hat{\lambda}_k(\gamma) = 0$ si $\gamma \neq 0$

$\lim\limits_{k\to+\infty} \hat{\lambda}_k(0) = \ell \neq 0.$

<u>Démonstration.-</u> Soit $\phi \in L^\infty(\Gamma)$, non nulle, de spectre porté par E, et telle que $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \phi(\gamma) = 0$. Le support de λ_k étant disjoint de E, on a (RUDIN [1] 7.8.3(b))

$$\hat{\lambda}_k * \phi = 0 ,$$

c'est-à-dire :

$$\hat{\lambda}_k * \phi(\delta) = \int_\Gamma \hat{\lambda}_k(\delta-\gamma)\,\phi(\gamma)\,d\gamma = 0 \quad \text{pour tout } \delta \in \Gamma .$$

Ceci peut s'écrire, U désignant un compact de Γ ne contenant pas δ :

$$\hat{\lambda}_k(0)\,\phi(\delta) + \sum_{\gamma\notin U} \hat{\lambda}_k(\delta-\gamma)\,\phi(\gamma) + \sum_{\gamma\in U} \hat{\lambda}_k(\delta-\gamma)\,\phi(\gamma) = 0$$

Comme $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \phi(\gamma) = 0$ et $\|\hat{\lambda}_k\|_1 < B$, on peut trouver un compact U de Γ tel que :

$$\Big|\sum_{\gamma\notin U} \hat{\lambda}_k(\delta-\gamma)\,\phi(\gamma)\Big| \leq B \sup_{\gamma\notin U} |\phi(\gamma)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \hat{\lambda}_k(\delta-\gamma) = 0$ si $\delta \neq \gamma$, il existe un entier K tel que (U étant fixé) pour tout $k \geq K$, on ait

$$\Big|\sum_{\gamma\in U} \hat{\lambda}_k(\delta-\gamma)\,\phi(\gamma)\Big| \leq \sup_{\gamma\in U} |\hat{\lambda}_k(\delta-\gamma)| \sum_{\gamma\in U} |\phi(\gamma)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Par suite, pour $k \geq K$:

$$|\hat{\lambda}_k(0)\,\phi(\delta)| < \varepsilon .$$

D'où, comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \hat{\lambda}_k(0) = \ell \neq 0$, $\phi(\delta) = 0$ pour tout $\delta \in \Gamma$. Ceci est contraire à l'hypothèse : ϕ non nulle. La proposition 1 est donc démontrée.

1.4. <u>Ensembles de Pjatecki-Shapiro.</u>

On se propose de définir dans G des ensembles généralisant les ensembles de Pjatecki -Shapiro de R.

Définition 1.- Soit une suite d'éléments de Γ^s (s entier ≥ 1) :

$$\{((\lambda_k^{(i)})_{i=1,\dots,s})\} \quad (k \in N') .$$

On dira qu'une telle suite est normale si, quel que soit l'élément $((n_i)_{i=1,2,\dots,s})$ de Z^s, la suite :

$$\{\sum_{i=1}^{s} n_i \gamma_k^{(i)}\} \quad (k \in N')$$

tend vers l'infini dans Γ.

Définition 2.- Un ensemble E non vide de G est dit ensemble de Pjatecki - Shapiro de dimension s (ou ensemble de type $H^{(s)}$), s'il existe :

1°) un ouvert Δ non vide du tore T^s,

2° une suite normale $\{((\gamma_k^{(i)})_{i=1,\dots,s})\}$ $(k \in N')$ de Γ^s,

tels que, quel que soit $k \in N'$, l'ensemble des éléments de T^s :

$$((x, \gamma_k^{(i)})_{i=1,\dots,s}) \quad \text{où } x \text{ élément de } E,$$

soit disjoint de Δ.

Remarques.- On vérifie facilement que, dans le cas $G = R/Z$, on retrouve les ensembles de Pjatecki -Shapiro classiques. Les ensembles de type $H^{(1)}$ (noté H) généralisent les ensembles de Rajchman.

Tout sous-ensemble non vide d'un ensemble de type $H^{(s)}$ est un ensemble de type $H^{(s)}$.

Si le groupe G est d'ordre borné (et donc également Γ d'ordre borné), il n'existe pas de suite normale dans Γ^s : quels que soient les $\gamma_k^{(i)}(i=1,\dots,s)$

$$\sum_{i=1}^{s} q\, \gamma_k^{(i)} = 0 \quad (q \text{ ordre de } \Gamma) ;$$

on ne peut donc pas définir d'ensemble de type $H^{(s)}$.

On sait qu'il existe des ensembles de type $H^{(s)}$ dans $G = R/Z$ ($\sim F_0^+$). On verra dans la suite (paragraphe 4) qu'il existe des ensembles de type $H^{(s)}$ dans $G = F_I^+$.

1.5 On sait que, sur la droite réelle, tout ensemble de type $H^{(s)}$ est un ensemble U. Ce résultat se généralise :

Théorème 1.- Dans G groupe abélien compact, tout ensemble de type $H^{(s)}$ est ensemble d'unicité.

Démonstration.- Soit E un ensemble de type $H^{(s)}$. Nous allons construire une suite de fonctions $\{\lambda_k\}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.
L'ouvert Δ du tore T^s contient un ouvert qui est le produit de s intervalles ouverts non vides $\Delta^{(i)}$ $(i=1,\dots,s)$ de T.
Il existe (RUDIN 1.6.4) une fonction $f^{(i)}$ appartenant à A(T), c'est-à-dire donnée par :

$$f^{(i)}(z) = \sum_{n\in Z} a_n^{(i)} z^n \quad (z \in T)$$

avec : $\sum_{n\in Z} |a_n^{(i)}| < \infty$, telle que : $f^{(i)}(z) = 0$ à l'extérieur d'un ouvert $\Delta'^{(i)}$ non vide de T et :

$$\int_T f^{(i)}(z)\, dz = a_0^{(i)} > 0.$$

L'ouvert $\Delta^{(i)}$ étant un intervalle $]u_i, v_i[$ de T, on prendra comme ouvert $\Delta'^{(i)}$ un intervalle ouvert $]u_i', v_i'[$ contenu dans $\Delta^{(i)}$ avec $u_i' \neq u_i$, $v_i' \neq v_i$.
Par suite, le support de $f^{(i)}$ est contenu dans $\Delta^{(i)}$.
A tout élément $\gamma_k^{(i)}$ (donné par la suite normale associée à E), on associe une fonction $\lambda_k^{(i)}$ de A(G), définie par :

$$\lambda_k^{(i)} = f^{(i)} \circ [\gamma_k^{(i)}]$$

(où $[\gamma_k^{(i)}]$ désigne l'application $x \to (x, \gamma_k^{(i)})$ de G dans T), c'est-à-dire

$$\lambda_k^{(i)}(x) = f^{(i)}((x, \gamma_k^{(i)})) = \sum_{n\in Z} a_n(x, n\gamma_k^{(i)}) .$$

$\lambda_k^{(i)}$ appartient à A(G), car on peut écrire :

$$\lambda_k^{(i)}(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{\lambda}_k^{(i)}(\gamma)\,(x, \gamma) \quad \text{où} \quad \hat{\lambda}_k^{(i)}(\gamma) = \sum_{n\in Z, n\gamma_k^{(i)}=\gamma} a_n^{(i)} .$$

D'où

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{\lambda}_k^{(i)}(\gamma)| \leq \sum_{n\in Z} |a_n^{(i)}| < \infty .$$

Posons :

$$\lambda_k = \prod_{i=1}^{s} \lambda_k^{(i)} .$$

La fonction λ_k appartient évidemment à A(G). On a :

$$\lambda_k(x) = \prod_{i=1}^{s} \sum_{n\in Z} a_n^{(i)} (x, n\gamma_k^{(i)}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{\lambda}_k(\gamma)\,(x, \gamma),$$

avec :

$$\hat{\lambda}_k(\gamma) = \sum_{\substack{n_i \in Z \\ n_1 \gamma_k^{(1)} + \ldots + n_s \gamma_k^{(s)} = \gamma}} a_{n_1}^{(1)} \ldots a_{n_s}^{(s)}$$

On en déduit :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{\lambda}_k(\gamma)| \leq \prod_{i=1}^{s} \sum_{n \in Z} |a_n^{(i)}| = B < \infty ,$$

où B est indépendant de K.

Si $x \in E$, $((x, \gamma_k^{(i)})_{i=1,\ldots,s})$ n'appartient pas à l'ouvert Δ ; il existe donc un indice i_0, $1 \leq i_0 \leq s$, pour lequel $(x, \gamma_k^{(i_0)})$ n'appartient pas à $\Delta^{(i_0)}$. Ceci entraîne que <u>le support de λ_k</u> <u>est disjoint de</u> E. En effet, il est évident que λ_k s'annule sur tout élément de E; d'autre part, supposons qu'il existe une suite $\{x_n\}$ $(n \in N')$ d'éléments de G tendant vers un élément x de E et tels que $\lambda_k(x_n) \neq 0$.

$\lambda_k(x_n) \neq 0$ entraîne $(x_n , \gamma_k^{(i)}) \in \Delta'^{(i)}$ pour tout $i = 1, 2,\ldots,s$

Comme x appartient à E,

$(x , \gamma_k^{(i_0)}) \notin \Delta^{(i_0)}$ pour un indice i_0, $1 \leq i_0 \leq s$;

or :

$$x_n \to x \quad \text{entraîne} \quad (x_n , \gamma_k^{(i_0)}) \to (x , \gamma_k^{(i_0)}) ,$$

mais ceci est incompatible avec les 2 propriétés précédentes puisqu'on choisi l'ouvert $\Delta'^{(i_0)} =]u'_{i_0} , v'_{I_0}[$ contenu dans $\Delta^{(i_0)} =]u_{i_0}, v_{i_0}[$ avec $u'_{i_0} \neq u_{i_0}$ et $v'_{i_0} = v_{i_0}$. Aucun élément de E n'appartient donc au support de λ_k.

Etudions le comportement de $\hat{\lambda}_k(\gamma)$, γ étant fixé, quand $k \to +\infty$.

$$\hat{\lambda}_k(\gamma) = \sum_{\substack{n_i \in Z \\ n_1 \gamma_k^{(1)} + \ldots + n_s \gamma_k^{(s)} = \gamma}} a_{n_1}^{(1)} \ldots a_{n_s}^{(s)}$$

La suite $\{(\gamma_k^{(i)})_{i=1,\ldots,s}\}$ est normale ; donc, si $n_1 \ldots n_s$ sont fixés tels que $(n_1,\dots,n_s) \neq (0,\dots,0)$,

$$n_1\,\gamma_k^{(1)} + \dots + n_s\,\gamma_k^{(s)} \to \infty \quad \text{quand } k \to +\infty .$$

Soit N un entier positif. γ étant fixé dans Γ, il existe un entier $K = K(N, \gamma)$ dépendant de N et de γ tel que :

$$n_1\,\gamma_k^{(1)} + \dots + n_s\,\gamma_k^{(s)} \neq \gamma ,$$

pour tout $k > K$ et pour tout système $(n_i)_{i=1,\dots,s}$ avec $0 \leqslant |n_i| < N$.
Donc, si $k \geqslant K$ et $\gamma \neq 0$,

$$\hat{\lambda}_k(\gamma) = \sum_{\substack{n_i \in Z \\ n_1\gamma_k^{(1)} + \dots + n_s\gamma_k^{(s)} = \gamma}}^{(N)} a_n^{(1)} \dots a_n^{(s)}$$

où la sommation est prise sur l'ensemble des systèmes (n_i) tels que $|n_{i_0}| > N$ pour un indice i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant s$.

Si $\gamma = 0$ et $k \geqslant K$, on a :

$$\hat{\lambda}_k(0) = a_0^{(1)} \dots a_0^{(s)} + \sum_{\substack{n_i \in Z \\ n_1\gamma_k^{(1)} + \dots + n_s\gamma_k^{(s)} = 0}} a_n^{(1)} \dots a_n^{(s)} .$$

On notera :

$$r_N^{(i)} = \sum_{\substack{n \in Z \\ |n| > N}} |a_n^{(i)}| , \quad B^{(i)} = \sum_{n \in Z} |a_n^{(i)}| \quad \text{et} \quad B = \prod_{i=1}^{s} B^{(i)} .$$

On voit facilement que, pour $k \geqslant K$,

$$\Bigg| \sum_{\substack{n_i \in Z \\ n_1\gamma_k^{(1)} + \dots + n_s\gamma_k^{(s)} = \gamma}}^{(N)} a_{n_1}^{(1)} \dots a_{n_s}^{(s)} \Bigg| \leqslant \sum_{i=1}^{s} r_N^{(i)} \frac{B}{B^{(i)}} .$$

Quand $N \to \infty$, $r_N^{(i)} \to \infty$. On peut donc choisir N tel que :

$$\sum_{i=1}^{s} r_N^{(i)} \frac{B}{B^{(i)}} < \varepsilon$$

Il en résulte le choix de $K = K(N, \gamma)$ tel que, si $k \geqslant K$,

$$|\hat{\lambda}_k(\gamma)| < \varepsilon \qquad \text{si } \gamma \neq 0 ,$$

et

$$|\hat{\lambda}_k(0) - a_0^{(1)} \ldots a_0^{(s)}| < \varepsilon \quad \text{si } \gamma = 0$$

D'où

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{\lambda}_k(\gamma) = 0 \qquad \text{si } \gamma \neq 0 ,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{\lambda}_k(0) = a_0^{(1)} \ldots a_0^{(s)} \neq 0 \quad (\text{par construction des } f^{(i)}) .$$

La suite $\{\lambda_k\}$ vérifie donc les conditions de la proposition 1 : E est un ensemble U.

2. Ensemble à rapport constant dans V_I .

On se propose de définir, dans V_I, un ensemble généralisant les ensembles parfaits à rapport constant de la droite réelle.

2.1 Définition.

Dans la suite (à l'exception du paragraphe 5), ξ désignera un élément de V_I tel que :

$$0 < |\xi|_p < 1 \qquad \text{pour tout } p \in I^-$$

et

$$0 < \xi_0 < 1 \qquad \text{si } 0 \in I.$$

On pose :

$$E_\xi = \{x \in V_I \ ; \quad x=(e_I-\xi)(\delta_0 e_I + \delta_1 \xi + \ldots + \delta_n \xi^n + \ldots); \quad \delta_n = 0 \text{ ou } 1\}$$

(d'après le choix de ξ , toute série $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \xi^n$, avec $\delta_n = 0$ ou 1, converge).

Pour tout x de E_ξ , on a :

$$|x|_p \leq 1 \qquad \text{si } p \in I^- ,$$

et

$$0 \leq x_0 < 1 \quad \text{si } 0 \in I \quad \text{et} \quad x \neq e_I .$$

Donc, si $0 \notin I$: E_ξ , et si $0 \in I$: $E_\xi - (e_I)$, sont contenus dans le domaine fondamental F_I de V_I (défini chapitre I paragraphe 2.2) :

$$F_I = \{x \in V_I \ ; \quad 0 \leq |x|_p \leq 1 \ \text{ si } \ p \in I^- \ \text{ et } \ a \leq x_0 < a + 1 \ \text{ si } \ 0 \in I\} ,$$

si l'on a choisi le réel $a = 0$. Dans la suite, on supposera $a = 0$.

Notons $x(\delta_n)$ un élément de E_ξ. Soient $x(\delta_n)$ et $x(\delta'_n)$ tels que : $\delta_n = \delta'_n$ si $0 \leq n \leq k-1$, et $\delta_k < \delta'_k$; on a :

$$|x(\delta_n) - x(\delta'_n)|_p = |\xi|_p^k , \ (p \in I^-)$$

et, si $0 \in I$,

$$x_0(\delta_n) \leq x_0(\delta'_n) \leq x_0(\delta_n) + \xi_0^k .$$

Donc, si I^- n'est pas vide, à 2 systèmes δ_n distincts correspondent 2 éléments distincts de E_ξ ; E_ξ a la puissance du continu. Dans le cas $I = \{0\}$ on sait que, si $0 < \xi < \frac{1}{2}$, à 2 systèmes δ_n distincts correspondent 2 points distincts ; la situation est différente si $\frac{1}{2} \leq \xi < 1$: on laissera ce cas de côté.

Notons $x_k(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1})$, ou en abrégé x_k, les éléments de E_ξ définis par :

$$x_k(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}) = x(\delta_n) \quad \text{avec} \quad \delta_n = 0 \quad \text{si } n \geq k.$$

E_ξ est contenu dans le compact $E_\xi^{(k)}$ défini par

$$E_\xi^{(k)} = \{x \in V_I \quad ; \exists\, x_k(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1})$$

tel que

$$|x - x_k|_p \leq |\xi|_p^k, \ \forall p \in I^-, \text{ et } x_{k,0} \leq x \leq x_{k,0} + \xi_0^k \text{ si } 0 \in I\} .$$

Comme un élément appartenant à tous les $E_\xi^{(k)}$ est nécessairement un élément de E_ξ, on a :

$$E_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_\xi^{(k)}$$

D'autre part,

$$\text{mes } E_\xi^{(k)} = \Big(\prod_{p \in I} |\xi|_p\Big)^k \times 2^k .$$

<u>Conséquence</u>.- Si $\prod_{p \in I} |\xi|_p < \frac{1}{2}$, E_ξ <u>est de mesure nulle</u>.

<u>Remarque</u>.- Le cas $\prod_{p \in I} |\xi|_p = \frac{1}{2}$ se produit si :

- ou bien $I = \{0\}$ et $\xi = \frac{1}{2}$, d'où $E_\xi = [0 , 1]$,
- ou bien $I = \{2\}$, $|\xi|_2 = \frac{1}{2}$, d'où $E_\xi = Z_2$.

Dans chacun de ces cas, mes $E_\xi = 1$.

2.2 Définition d'une mesure μ portée par E_ξ .

On se propose de définir une mesure μ portée par E_ξ et appartenant à $M(V_I)$.

Soit μ_k la mesure ponctuelle obtenue en attribuant la masse $1/2^k$ à chacun des 2^k éléments $x(\delta_0,\ldots,\delta_{k-1})$ de E_ξ .

Lemme.- La suite des mesures $\{\mu_k\}$ $(k \in N')$ converge au sens de la convergence faible* vers une mesure $\mu \in M(V_I)$, dont le support est E_ξ

Démonstration.- Soit $f \in C_0(V_I)$ (fonction continue à valeurs complexes et s'annulant à l'infini). Posons :

$$I_K(f) = \int_{V_I} f\, d\mu_k \, .$$

Montrons que la suite $\{I_k(f)\}$ $(k \in N')$ est convergente. On a :

$$I_k(f) - I_h(f) = \frac{1}{2^k} \sum_{\delta_0,\ldots,\delta_{k-1}} f(x_k(\delta_0,\ldots\delta_{k-1})) - \frac{1}{2^h} \sum_{\delta_0,\ldots,\delta_{h-1}} f(x_h(\delta_0,\ldots,\delta_{h-1}))$$

$$= \frac{1}{2^k} \sum_{\delta_0,\ldots,\delta_{h-1}} \left(\sum_{\delta_h,\ldots,\delta_{k-1}} f(x_k) - 2^{k-h} f(x_h) \right) ,$$

en supposant $k > h$.

f est uniformément continue sur $\overline{F}_I$, c'est-à-dire qu'il existe une application ϕ de N' dans R^+ , avec $\lim_{h\to+\infty} \phi(h) = 0$, pour laquelle

$$|x - x'|_I \leqslant |\xi|_I^h \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leqslant \phi(h) \qquad (x \text{ et } x' \in \overline{F}_I).$$

On a donc :

$$|I_k(f) - I_h(f)| \leqslant \frac{1}{2^k} \sum_{\delta_0,\ldots,\delta_{h-1}} 2^{k-h}\, \phi(h) \leqslant \phi(h).$$

Par suite, $\{I_k(f)\}$ converge. La limite, qu'on notera $I(f)$, est une fonctionnelle linéaire bornée sur $C_0(V_I)$. D'après le théorème de Riesz, il existe donc une mesure unique μ de $M(V_I)$ telle que

$$I(f) = \int_{V_I} f\, d\mu \, .$$

La mesure μ est portée par E_ξ : en effet, étant donnés un ouvert quelconque

Ω ne rencontrant pas E_ξ , et une fonction f de support contenu dans Ω , $I_k(f) = 0$ quel que soit k, et donc :

$$I(f) = 0.$$

Par contre, si l'ouvert Ω rencontre E_ξ , on peut trouver des fonctions f à support dans Ω , telles que :

$$I_k(f) \neq 0 \quad \text{et} \quad I(f) \neq 0.$$

2.3. Transformée de Fourier de la mesure μ .

Par définition, la transformée de Fourier d'une mesure $\mu \in M(V_I)$ est donnée par :

$$\hat{\mu}(y) = \int_{V_I} \exp(-2i\pi\varepsilon_0(xy))\, d\mu(x),$$

où $y \in V_I$ puisque (chapitre I, paragraphe 3.1) tous les caractères continus de V_I sont donnés par :

$$x \to \exp(2i\pi\varepsilon_0(xy)) \qquad \text{où} \quad y \in V_I$$

μ étant limite faible* des μ_k, on a :

$$\hat{\mu}(y) = \lim_{k\to\infty} \hat{\mu}_k(y)$$

Or,

$$\hat{\mu}_k(y) = \frac{1}{2^k} \sum_{\delta_i=0 \text{ ou } 1} \exp(-2i\pi\varepsilon_0(y(e_I - \xi)(e_I\,\delta_0 + \ldots + \delta_{k-1}\,\xi^{k-1}))$$

D'où $\hat{\mu}_k(y) = \dfrac{1}{2^k} \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (1 + \exp(-2i\pi\varepsilon_0(y(e_I - \xi)\,\xi^j)))$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} \exp(-i\pi\varepsilon_0(y(e_I - \xi)\,\xi^j)).\cos\pi\,\varepsilon_0(y(e_I - \xi)\,\xi^j).$$

D'où,

$$\hat{\mu}(y) = \exp(-i\pi\varepsilon_0(y)) \prod_{j=0}^{\infty} \cos\pi\,\varepsilon_0(y(e_I - \xi)\,\xi^j),$$

ce qui entraîne :

$$|\hat{\mu}(y)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos\pi\varepsilon_0(y(e_I - \xi)\,\xi^j)| .$$

Cette expression, qui généralise l'expression trouvée dans le cas classique, servira de base à l'étude du paragraphe 3 (ensembles M).

2.4 <u>Ensemble</u> $E_\xi^\sim$ <u>et mesure</u> $\mu^\sim$.

E_ξ est un ensemble du groupe V_I, qui est seulement localement compact. Pour les questions d'unicité et de multiplicité, on va se ramener à un ensemble du groupe compact F_I^+, de même que, pour les ensembles de la droite réelle, on se ramène, explicitement ou non, dans cette théorie, à des ensembles du groupe compact R/Z ($\sim F_0^+$).

2.4.1. Rappelons les résultats suivants (chapitre I paragraphe 4.3 et 4.4). F_I^+ désigne le groupe obtenu en donnant une structure de groupe additif au domaine fondamental F_I. On a :

$$F_I^+ \sim \prod_{p\in I} Z_p \qquad \text{si } 0 \notin I,$$

$$F_I^+ \sim V_I \,/\, e_I\, Z[I] \qquad \text{si } 0 \in I.$$

F_I^+, muni de la topologie

- de sous-groupe de V_I si $0 \notin I$,
- de sous-quotient de V_I si $0 \in I$,

est un groupe compact. Son dual $\hat{F}_I^+$ est discret et on a :

$$\hat{F}_I^+ \sim V_I \,/\, F_I^+ \sim Z[I]\,/Z \qquad \text{si } 0 \notin I,$$

$$\hat{F}_I^+ \sim Z[I] \qquad \text{si } 0 \in I.$$

Exemples :

$I = \{p\}$ $(p \neq 0)$, $F_p = Z_p$, $F_p^+ \sim Z_p$, $\hat{F}_p^+ \sim Q_p/Z_p \sim Z[p]\,/Z$,

$I = \{0\}$ $F_0 = [0\ ,\ 1[$, $F_0^+ \sim R/Z$, $\hat{F}_0^+ \sim Z$.

<u>Définition</u>.- $E_\xi^\sim$ <u>est l'ensemble de</u> F_I^+, <u>image de l'ensemble</u> E_ξ <u>de</u> V_I <u>par l'application</u> $x \to \varepsilon_I(x)$ <u>de</u> V_I <u>dans</u> F_I^+ .

On remarque que $E_\xi^\sim$ coïncide avec E_ξ si $0 \notin I$, avec $E_\xi - \{e_I\}$ si $0 \in I$.

$E_\xi^\sim$ <u>est un ensemble parfait de</u> F_I^+ :

- si $0 \notin I$, parce que E_ξ et $E_\xi^\sim$ coïncident, et que les topologies de F_I^+ et de F_I comme sous-ensembles de V_I coïncident ;
- si $0 \in I$, parce que l'application $x \to \varepsilon_I(x)$ est alors l'homomorphisme

canonique de V_I dans son groupe quotient F_I^+.
Dans la suite de cet exposé, on se propose de chercher dans quels cas $E_\xi^\sim$ est ensemble U ou ensemble M.

2.4.2.- On définit une mesure $\mu^\sim$ associée à la mesure μ portée par E_ξ par l'application $x \to \varepsilon_I(x)$, de la manière suivante :
Soit $f \in C_0(F_I^+)$; l'application

$$f \to \int_{V_I} f(\varepsilon_I(x))\, d\mu(x)$$

est une fonctionnelle linéaire bornée sur $C_0(F_I^+)$; il existe donc une mesure unique $\mu^\sim$ M(F_I^+) telle que :

$$\int_{V_I} f(\varepsilon_I(x))\, d\mu(x) = \int_{F_I^+} f\, d\mu^\sim \qquad (f \in C_0(F_I^+)).$$

La mesure $\mu^\sim$ est portée par $E_\xi^\sim$: en effet, soient Ω un ouvert de F_I^+ ne rencontrant pas $E_\xi^\sim$, et $f \in C(F_I^+)$ de support contenu dans Ω ; $f(\varepsilon_I(x))$, qui appartient à $C(V_I)$, à son support contenu dans $\varepsilon_I^{-1}(\Omega)$ (ouvert de V_I qui a Ω pour image dans l'application $x \to \varepsilon_I(x)$) ; comme μ est porté par E_ξ et comme $\varepsilon_I^{-1}(\Omega)$ ne rencontre pas E_ξ, on a :

$$\int_{F_I^+} f\, d\mu = \int_{V_I} f(\varepsilon_I(x))\, d\mu(x) = 0.$$

2.4.3. Soit γ un élément de $\hat{F}_I^+$. On a :

$$\hat{\mu}^\sim(\gamma) = \int_{F_I^+} (-x\,,\,\gamma)\, d\mu^\sim(x) = \int_{V_I} (-\varepsilon_I(x)\,,\,\gamma)\, d\mu(x)\ ;$$

on sait que (chapitre I paragraphes 4.3 et 4.4) :

$$(\varepsilon_I(x)\,,\,\gamma) \equiv \exp(2i\pi\varepsilon_0(xy)),$$

où $y \in e_I\, Z(I)$ si $0 \in I$, et $y \in V_I$ si $0 \notin I$, et on désigne par σ l'application $y \to \gamma = \sigma(y)$ ainsi définie (σ est un isomorphisme de $e_I Z(I)$ dans $\hat{F}_I^+$ si $0 \in I$, et un homomorphisme de V_I sur $\hat{F}_I^+$ si $0 \notin I$). On a donc :

$$\hat{\mu}^\sim(\gamma) = \hat{\mu}(y) \quad \text{pour } \gamma = \sigma(y).$$

Cette relation est fondamentale pour la suite (paragraphe 3).

2.4.4. On aura besoin, dans les paragraphes 3 et 4, de la propriété suivante :

Lemme.- Soient $\{\gamma_k\}$ $(k\in N')$ une suite infinie d'éléments de $\hat{F}_I^+$ et $\{y_k\}$ $(k\in N')$ une suite d'éléments de V_I tels que $\gamma_k = \sigma(y_k)$ pour tout $k\in N'$.

$\gamma_k \to \infty$ dans $\hat{F}_I^+$ si et seulement si $y_k \to \infty$ dans V_I.

Démonstration.- $\hat{F}_I^+$ est discret ; $\gamma_k \to \infty$ signifie : pour k assez grand, γ_k est en dehors de tout compact, c'est-à-dire de tout ensemble fini de $\hat{F}_I^+$, fixé.

$y_k \to \infty$ dans V_I est équivalent à $|y_k|_I \to +\infty$ (car I sous-ensemble fini de P).

Si $0\in I$: $y_k \in e_I\, Z[I]$, c'est-à-dire :

$$y_k = e_I \frac{m_k}{\prod_{p\in I^-} p^{h_{k,p}}} .$$

$|y_k|_I \to +\infty$ si et seulement si :

$$\sup \{|m_k|_0 \, , \sup_{p\in I^-} h_{k,p}\} \to +\infty ,$$

ce qui est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que $y_k \to \infty$ dans le groupe discret $e_I\, Z[I]$.

Si $0 \notin I$: y_k est défini modulo F_I par $\gamma_k = \sigma(y_k)$, γ_k donné. Ceci peut s'exprimer ainsi :

$$\sigma(y_k) = \sigma(y_k') \Longleftrightarrow E(y_k) \equiv E(y_k') \mod 1$$

(on retrouve le fait que $F_I^+ \sim Z[I]/Z$). Or,

$$E(y_k) = \frac{m}{\prod_{p\in I} p^{h_{k,p}}} \quad \text{avec} \quad |m|_p = 1 \quad (p\in I) \text{ et } \sup_{p\in I} h_{k,p} \geq 1 \text{ si } \sigma(y_k) \neq 0 .$$

On a :

$$|y_k|_I = |e_I\, E(y_k)|_I = \sup_{p\in I} p^{h_{k,p}}$$

$|y_k|_I \to +\infty$ si et seulement si :

$$\sup_{p\in I} h_{k,p} \to +\infty ,$$

ce qui est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que $E(y_k) \bmod 1 \to \infty$ dans le groupe discret $Z[I]/Z$.

3. Ensembles $E_\xi^\sim$ et ensembles M.

Dans ce paragraphe, on va montrer que, pour certains ξ , $E_\xi^\sim$ est ensemble M du groupe F_I^+ .

Méthode employée : elle consiste à montrer que

$$\lim_{\gamma\to\infty} \hat{\mu}^\sim(\gamma) = 0$$

où $\hat{\mu}^\sim$ est la mesure portée par $E_\xi^\sim$ définie dans le paragraphe précédent. Pour cela, on étudie le comportement de $\hat{\mu}(y)$ quand $y \to \infty$ dans V_I. On en déduit la propriété cherchée pour $\hat{\mu}^\sim$, grâce aux résultats des paragraphes 2.4.3 et 2.4.4.

3.1. On démontrera d'abord le résultat suivant :

Proposition 2.- Soit $\xi \in V_I$ défini comme dans le paragraphe 2.1. Soit μ la mesure portée par E_ξ (définie § 2.2). On note $\theta = \frac{1}{\xi}$.

Supposons : $\hat{\mu}(y) \not\longrightarrow 0$ quand $y \to \infty$ dans V_I .

Alors il existe un sous-ensemble (non vide) J de I tel que : θ_J appartient à S_J^0, le polynôme minimal de θ_J est irréductible, et l'on a :

$$\prod_{p\in J} |\theta|_p > 2.$$

L'expression "polynôme minimal de θ_J" est employée à la place de "polynôme minimal de l'élément algébrique θ_J relatif à V_J (chapitre I paragraphe 5.2). On notera ce polynôme : $Pm(\theta_J ; X)$ (au lieu de $Pm_J(\theta_J ; X)$)

On démontrera la proposition 2 sous la forme équivalente :

Proposition 2 bis. Supposons : $\hat{\mu}(y) \not\longrightarrow 0$ quand $y \to \infty$ dans V_I .

Alors il existe un sous-ensemble (non vide) J de I tel que θ_J appartient à S_J^0, θ et J ne vérifiant aucune des 3 conditions suivantes :

(a) $J = \{0\}$ $\theta_0 = 2$

(b) $J = \{2\}$ $|\theta|_2 = 2$

(c) $J = \{0, 2\}$, $\theta_0 = 2$, $|\theta|_2 = 2$.

Les propositions 2 et 2 bis sont équivalentes ; en effet, si, pour un sous-ensemble J de I, $\theta_J \in S_J^0$, et si l'on n'a aucun des 3 cas (a), (b), (c),

- ou bien $Pm(\theta_J ; X)$ est irréductible, et alors $\prod_{p\in J} |\theta|_p = 2$ ne peut se produire, puisqu'on a exclus (a) et (b),
- ou bien $Pm(\theta_J ; X)$ est réductible ; il existe alors une partition $J = J' + J''$ telle que $\theta_J = \theta_{J'} + \theta_{J''}$, $\theta_{J'} \in S^0_{J'}$, $\theta_{J''} \in S^0_{J''}$, et $Pm(\theta_{J'} ; X)$ irréductible.

S'il existe dans J un élément $p \neq 0$ et 2, on peut imposer à J' de contenir p : donc $\prod_{p\in J'} |\theta|_p \geq p > 2$, et J' satisfait aux conditions de la proposition 2 ; si $J = \{0 , 2\}$, on a $\theta_J = \theta_{(0)} + \theta_{(2)}$ où $\theta_{(0)} \in S^0_0$ et $\theta_{(2)} \in S^0_2$; $Pm(\theta_0 ; X)$ et $Pm(\theta_2 ; X)$ sont irréductibles, dont soit $\{0\}$ soit $\{2\}$, peut jouer le rôle de l'ensemble J' précédent, puisque le cas (c) est exclus.

Réciproquement, s'il existe J tel que $\theta_J \in S^0_J$, $Pm(\theta_J ; X)$ irréductible, et $\prod_{p\in J} |\theta|_p > 2$, on ne peut évidemment avoir aucun des cas (a), (b), (c).

L'équivalence des propositions 2 et 2 bis est donc démontrée.

3.2 Proposition 2 bis. Démonstration.

Supposons que $\hat{\mu}(y) \not\to 0$: il existe une suite $\{y_k\}$ $(k \in N')$ d'éléments de V_I tels que :

$$y_k \to \infty \quad \text{et} \quad |\hat{\mu}(y_k)| \geq \delta > 0.$$

Soit I' l'ensemble des indices p de I tels que $|y_k|_p \to \infty$. On notera : $I = I' + I''$ (I' est non vide, car I est un sous-ensemble fini de P).

Si $p \in I'$, il existe un entier $m_{k,p}$ tel que :

$$|\theta|_p^{m_{k,p}} \leq |y_k|_p < |\theta|_p^{m_{k,p}+1}$$

et on a :

$$m_{k,p} \to +\infty .$$

En prenant au besoin une sous-suite en k, on peut supposer que, pour tout $p \in I'$, la suite $\{m_{k,p}\}$ est strictement croissante et qu'il existe un indice $p' \in I'$ tel que :

$$m_k = m_{k,p'} \geq m_{k,p} \qquad \text{pour tout } p \in I'.$$

Il en résulte, en posant $\lambda_k = y_k\, \theta^{-m_k}$,

$$(1)\quad \begin{cases} 1 \leq |\lambda_k|_{p'} < |\theta|_{p'} \\ |\lambda_k|_p < |\theta|_p & \text{si } p \in I' \\ |\lambda_k|_p < C\, |\theta|_p^{-m_k} & \text{si } p \in I'' \end{cases}$$

où C est une constante réelle > 0 indépendante de p et de k.

On peut donc extraire une sous-suite en k telle que $\lambda_k \to \lambda$, où $\lambda \in V_I$ et $|\lambda|_{p'} \geqslant 1$, ce qui entraîne $\lambda_{p'} \neq 0$.

Soit J le sous-ensemble de I défini par :

$$J = \{p \in I \;;\; \lambda_p \neq 0\}\,.$$

On a évidemment

$$\{p'\} \subset J \subset I'.$$

L'expression de $\hat{\mu}(y)$ a été donnée dans 2.3. On trouve :

$$(2)\qquad |\hat{\mu}(y_k)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi\varepsilon_0(\lambda_k(e_I - \xi)\, \theta^{m_k - j})|\,.$$

On notera $\lambda_k\, e_{I'} = \lambda_{k,I'}$ et $\lambda_k\, e_{I''} = \lambda_{k,I''}$. On a

$$\varepsilon_0(\lambda_k(e_I - \xi)\, \theta^{m_k-j}) = \varepsilon_0(\lambda_{k,I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\, \theta^{m_k-j}) + \varepsilon_0(\lambda_{k,I''}(e_{I''} - \xi_{I''})\, \theta_{I''}^{m_k-j}) \bmod 1$$

$$\equiv \qquad \alpha_j \qquad + \qquad \beta_j \qquad \bmod 1.$$

D'après (1),

$$|\lambda_{k,I''}(e_{I''} - \xi_{I''})\, \theta^{m_k-j}|_p < C\, |\theta|_p^{-j}\, |1 - \xi_p|_p \qquad (p \in I'').$$

Donc, si

$$j \geqslant \sup_{p \in I''} \frac{\log C |1 - \xi_p|_p}{\log |\theta|_p}$$

On a

$$H_p(\lambda_{k,p}(1 - \xi_p)\, \theta_p^{m_k-j}) = 0 \qquad \text{pour tout } p \in I''^{-},$$

d'où

$$\beta_j = \lambda_{k,0}(1 - \xi_0)\, \theta_0^{m_k-j} \bmod 1 \qquad \text{si } 0 \in I'',$$

ou

$$\beta_j = 0 \qquad\qquad \text{si } 0 \notin I'' .$$

Dans tous les cas, on pourra poser :

(3) $$|((\beta_j))| \leqslant \frac{1}{4}\rho^j \qquad \text{pour } j \geqslant N,$$

où ρ est un réel : $0 \leqslant \rho < 1$ ($\rho = 0$ si $0 \notin I''$, et $\rho = |\theta|_0$ si $0 \in I''$)

et N un entier ne dépendant que de C et de θ.

Par hypothèse,

$$\prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi(\alpha_j + \beta_j)| \geqslant \delta > 0 ;$$

on en déduit, à l'aide de (3),

(4) $$\sum_{j=N}^{+\infty} \sin^2 \pi\alpha_j \leqslant \delta'$$ (ou δ' ne dépend que de δ et de N).

En effet, en utilisant l'inégalité : $1 + x \leqslant \exp x$, on voit que :

$$\prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi(\alpha_j + \beta_j) > \delta \Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \sin^2 \pi(\alpha_j + \beta_j) \leqslant \log \frac{1}{\delta^2} ;$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}\sin^2 \pi\alpha_j &\leqslant \sin^2 \pi(\alpha_j + \beta_j) + \sin^2 \pi\beta_j + |\sin 2\pi\beta_j| \\ &\leqslant \sin^2 \pi(\alpha_j + \beta_j) + \pi^2 |((\beta_j))|^2 + 2\pi |((\beta_j))| \qquad \text{pour } j \geqslant N \\ &\leqslant \sin^2 \pi(\alpha_j + \beta_j) + \frac{3\pi}{2}\rho^j \qquad \text{pour } j \geqslant N ;\end{aligned}$$

d'où (4); avec $\delta' = \log \dfrac{1}{\delta^2} + \dfrac{3\pi}{2} \dfrac{\rho^N}{1-\rho}$.

(4) entraîne

$$\sum_{j=N}^{m_k} \sin^2 \pi\alpha_j \leqslant \delta' \qquad \text{pour tout } m_k > N :$$

or, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=N}^{m_k} \sin^2 \pi\alpha_j &= \sum_{j=n}^{m_k} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_{k,I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\, \theta_{I'}^{m_k - j}) \\ &= \sum_{q=0}^{m_k - N} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_{k,I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\, \theta_{I'}^{q}) ;\end{aligned}$$

donc, quels que soient h et k tels que $h < k$ et $N < m_h$,

$$\sum_{q=0}^{m_h-N} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_{k,I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\,\theta_{I'}^q) \leqslant \delta' \;;$$

d'où, h étant fixé et k tendant vers l'infini, on obtient

$$\sum_{q=0}^{m_h-N} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_{I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\,\theta_{I'}^q) \leqslant \delta' .$$

Ceci étant vrai quel que soit h tel que $N < m_h$, on a

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_{I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\,\theta_{I'}^q) \leqslant \delta' ,$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_J(e_J - \xi_J)\,\theta_J^q) \leqslant \delta' ,$$

où λ_J est un élément inversible de V_J. Par suite, θ_J est un élément de l'ensemble S_J^0 (Chapitre II, Théorème 2).

Supposons que θ_J et J vérifient l'une des conditions (a), (b), (c).

Cas (a) : $J = \{0\}$, $\theta_0 = 2$.

Par hypothèse, $|\lambda_k|_p \to 0$ pour tout $p \in I^-$. Par suite, il existe un entier K tel que, si $k \geqslant K$, $|\lambda_k(e_I - \xi)\,\theta^{m_k}|_p \leqslant 1$.

(2) entraîne :

$$|\hat{\mu}(y_k)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi\lambda_{k,0}\,(1 - \xi_0)\,\theta_0^{m_k-j}| \qquad (k \geqslant K)$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} \left|\cos \pi\lambda_{k,0}\,\frac{1}{2^{-m_k+j+1}}\right| \qquad (k \geqslant K)$$

$$= \left|\frac{\sin\pi\, 2^{m_k}\,\lambda_{k,0}}{\pi\, 2^{m_k}\,\lambda_{k,0}}\right|$$

Quand $k \to \infty$, $\lambda_{k,0} \to \lambda_0 \neq 0$ par hypothèse ; donc, $|2^{m_k}\,\lambda_{k,0}| \to +\infty$.

Il en résulte $|\hat{\mu}(y_k)| \to 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse : le cas (a) est donc à exclure.

Cas (b) : $J = \{2\}$, $|\theta|_2 = 2$, $\theta_2 \in S_2^0$ par hypothèse.

(Exemples : si θ_2 est de degré 1 : $\theta_2 = \pm \frac{1}{2}$;

si θ_2 est de degré 2 : θ est racine d'un des 2 polynômes $2x^2 \pm x + 1$.)

Dans ce cas, $|\lambda_k|_p \to 0$ pour tout $p \in I - \{2\}$. Il existe un entier K tel que, si $k \geqslant K$,

$$|\lambda_k(e_I - \xi)\, \theta^{m_k}|_p \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } p \in I^- - \{2\} .$$

(2) entraîne :

$$|\hat{\mu}(y_k)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi\, (\lambda_{k,0}(1 - \xi_0)\, \theta_0^{m_k - j} + H_2(\lambda_{k,2}(1 - \xi_2)\, \theta_2^{m_k - j}))| \quad (k \geqslant K).$$

(1) entraîne $1 \leqslant |\lambda_k|_2 < 2$ pour k assez grand. On supposera K choisi tel que ceci soit réalisé dès que $k \geqslant K$. On a donc :

$$|\lambda_{k,2}(1 - \xi_2)\, \theta_2^{m_k - j}|_2 = 2^{m_k - j} \qquad (k \geqslant K) ,$$

d'où

$$H_2(\lambda_{k,2}(1 - \xi_2)\, \theta_2^{-1}) = \frac{1}{2} \quad ;$$

en posant :

$$\eta_k = 2\pi \lambda_{k,0}(1 - \xi_0)\, \theta_0 ,$$

on a :

$$|\hat{\mu}(y_k)| \leqslant |\cos(\tfrac{\pi}{2} + \eta_k)| \qquad (k \geqslant K) ;$$

or $\eta_k \to 0$ quand $k \to \infty$, donc $|\hat{\mu}(y_k)| \to 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le cas (b) est à exclure.

<u>Cas (c)</u> : $J = \{0 , 2\}$, $\theta_0 = 2$, $|\theta|_2 = 2$.

Comme $\theta_J \in S_J^0$ et $\theta_0 \in S_0^0$, $\theta_2 \in S_2^0$.

Dans ce cas, $\lambda_{k,p} \to 0$ pour tout $p \in I^- - \{2\}$. Il existe un entier K tel que, si $k \geqslant K$,

$$|\lambda_k(e_I - \xi)\, \theta^{m_k}|_p \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } p \in I^- - \{2\} .$$

D'autre part, $\lambda_{k,0} \to \lambda_0 \neq 0$ et $\lambda_{k,2} \to \lambda_2 \neq 0$. On a

$$|\lambda_0|_0 < 2 \ , \quad |\lambda_2|_2 < 2.$$

On pose :

$$|\lambda_2|_2 = 2^{-h} \quad (h \geqslant 0).$$

On suppose K tel que, si $k \geqslant K$,

$$|\lambda_{k,2}|_2 = |\lambda_2|_2 = 2^{-h} .$$

(2) entraîne, pour $k \geqslant K$,

$$|\hat{\mu}(y_k)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi \, (\lambda_{k,0}(1 - \xi_0) \, \theta_0^{m_k - j} + H_2(\lambda_{k,2}(1 - \xi_2) \, \theta_2^{m_k - j}))|$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi \, (\lambda_{k,0} \, 2^{m_k - j - 1} + 2^{m_k - j - h})|$$

$$= \left| \frac{\sin(\pi \, 2^{m_k}(\lambda_{k,0} + 2^{1-h}))}{\pi \, 2^{m_k} \, (\lambda_{k,0} + 2^{1-h})} \right|$$

Quand $k \to + \infty$,

$$\lambda_{k,0} \to \lambda_0 \neq 0 \qquad \text{donc} \qquad |2^{m_k} \, (\lambda_{k,0} + 2^{1-h})| \to + \infty .$$

Par suite, $|\hat{\mu}(y_k)| \to 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le cas (c) est à exclure.

La proposition 2 bis est donc démontrée.

3.3 La proposition 2 va permettre de montrer que, sous certaines hypothèses, la mesure $\mu^\sim$ portée par l'ensemble $E_\xi^\sim$ est telle que :

$$\hat{\mu}^\sim(\gamma) \to 0 \quad \text{quand} \quad \gamma \to \infty \text{ dans } \hat{F}_I^+$$

En effet, on a vu (paragraphe 2.4.3) que :

$$\hat{\mu}^\sim(\gamma) = \hat{\mu}(y) \qquad \text{pour } \gamma = \sigma \, (y)$$

(où σ est un isomorphisme du sous anneau $e_I.Z\,[I]$ de V_I sur $\hat{F}_I^+$ si $0 \in I$, un homomorphisme de V_I sur $\hat{F}_I^+$ si $0 \notin I$).

D'autre part, (paragraphe 2.4.4.) on sait que :

$\gamma \to \infty$ dans F_I^+ si et seulement si $y \to \infty$ dans V_I.

Par suite, " $\hat{\mu}(y) \to 0$ quand $y \to \infty$ dans V_I" entraîne" $\hat{\mu}^\sim(\gamma) \to 0$ quand $\gamma \to \infty$ dans $\hat{F}_I^+$ ".

La proposition 2 entraîne donc le résultat suivant :

Théorème 2.- Soient $\xi \in V_I$ défini comme dans 2.1, E_ξ et $E_\xi^\sim$ définis comme dans 2.1 et 2.4. On note $\frac{1}{\xi} = \theta$.

On suppose qu'il n'existe pas de sous-ensemble (non vide) J de I tel que θ_J appartienne à S_J^0, le polynôme minimal de θ_J soit irréductible, et l'on ait :

$$\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2 .$$

Alors $E_\xi^\sim$ est ensemble de multiplicité au sens strict du groupe abélien compact F_I^+.

Remarque.- Comme cas particulier du théorème 2, on retrouve le fait que, si $I = \{0\}$, $\theta_0 = 2$, ou, si $I = \{2\}$, $|\theta|_2 = 2$; alors $E_\xi^\sim$ est ensemble M. Dans chacun de ces cas, on a vu (2.1) que $E_\xi^\sim = F_I$. $E_\xi^\sim$ a donc une mesure de Haar positive, et par suite (1.2) est ensemble M.

4. Ensembles $E_\xi^\sim$ et ensembles U.

4.1.- La méthode employée pour trouver les ensembles $E_\xi^\sim$ qui sont des ensembles U consiste à montrer que, pour ξ bien choisi, $E_\xi^\sim$ est un ensemble de Pjatecki-Shapiro du groupe F_I^+, et à utiliser le théorème 1 (paragraphe 1.5). De manière précise, on a :

Proposition 3.- Soient $\xi \in V_I$ défini comme dans 2.1, $E_\xi^\sim$ défini comme dans 2.4. On note $\frac{1}{\xi} = \theta$.

Supposons qu'il existe un sous-ensemble non vide J de I tel que : θ_J appartienne à S_J^0, le polynôme minimal de θ_J soit irréductible et de degré s, et l'on ait :

$$\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2.$$

Alors, $E_\xi^\sim$ est un ensemble de type $H^{(s)}$ du groupe abélien compact F_I^+.

La démonstration de ce résultat sera donnée dans le paragraphe suivant.

Comme conséquence du théorème 1 et de la proposition 3, on a :

Théorème 3.- ξ est un élément de V_I défini comme dans 2.1, $E_\xi^{\sim}$ est défini comme dans 2.4. On note $\frac{1}{\xi} = \theta$.

S'il existe un sous-ensemble non vide J de I tel que : θ_J appartienne à S_J^0, ait un polynôme minimal irréductible, et vérifie $\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2$, alors $E_\xi^{\sim}$ est ensemble d'unicité du groupe F_I^+.

Les théorèmes 2 et 3 montrent que tout ensemble $E_\xi^{\sim}$ est de "nature" connue, ce qu'on peut exprimer par le théorème suivant, qui généralise le théorème classique rappelé au début de ce chapitre.

Théorème 4.- ξ, $E_\xi^{\sim}$ sont définis comme dans 2.1 et 2.4. On note $\frac{1}{\xi} = \theta$

$E_\xi^{\sim}$ est ensemble d'unicité du groupe F_I^+ si, et seulement si, il existe un sous-ensemble non vide J de I tel que θ_J appartienne à S_J^0, ait un polynôme minimal irréductible, et vérifie $\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2$.

4.2 Démonstration de la proposition 3.

Dans une première partie (2.1), on cherchera une suite $\{(y_k^{(i)})_{i=1,..,s}\}$ $(k \in N')$ de V_I^s, tendant vers l'infini, telle que, quel que soit $k \in N'$, l'ensemble des éléments de T^s,

$$((\exp(2i\pi\varepsilon_0(xy_k^{(i)})))_{i=1,..,s}) \quad \text{avec } x \in E_\xi ,$$

soit disjoint d'un ouvert Δ non vide.

Ceci équivaut à la condition : $((\varepsilon_0(xy_k^{(i)}))_{i=1,..,s})$ n'appartient pas à un ouvert Ω non vide de $(R/Z)^s$ quels que soient $k \in N'$ et $x \in E_\xi$, l'ouvert Ω se déduisant de l'ouvert Δ.

On montrera qu'il est possible de trouver une suite vérifiant ces conditions de la forme :

$$y_k^{(1)} = \lambda\theta_J^k , \ldots, y_k^{(s)} = \lambda\theta_J^{k+s-1} ,$$

où λ appartient, dans V_J à l'anneau d'éléments algébriques $Q_J[\theta_J]$.

Dans la deuxième partie de la démonstration (4.2.2), on déduira de la suite $\{(y_k^{(i)})_{i=1,2,..s}\}$ une suite $\{(\gamma_k^{(i)})_{i=1.2....s}$ formant une suite normale dans F_I^+ et telle que, quel que soit $k \in N'$, l'ensemble des éléments de T^s,

$$((x, \gamma_k^{(i)})_{i=1,..,s}) \qquad \text{avec } x \in E_\xi^\sim,$$

soit disjoint d'un ouvert non vide Δ' de T^s.

4.2.1.- Soit λ un élément de $Q_J[\theta_J]$; $Pm(\theta_J\,;X)$ étant irréductible $Q_J[\theta_J]$ est un corps (chapitre I paragraphe 5). Par suite, si $\lambda \neq 0$ dans V_J, $\lambda_p \neq 0$ pour tout $p \in J$ (de plus le polynôme $Pm_J(\lambda\,;X) = Pm(\lambda\,;X)$ est irréductible).

Soit : $\qquad |\theta|_p = p^{t_p} \quad (p \in I^-,\ t_p \geqslant 1).$

On impose à l'élément λ de $Q_J[\theta_J]$ les conditions :

$$(1)\quad \begin{cases} |\lambda|_p \leqslant p^{ht_p} \quad (h \geqslant 1) \quad |\lambda_p^{(i)}|_p \leqslant 1 \quad (i=2,\dots,s) \text{ pour tout } p \in J^- \\ (\prod_{p \in J^-} p^{ht_p})\lambda \text{ , élément entier algébrique.} \end{cases}$$

Soit $x \in E_\xi$. On a :

$$\varepsilon_0(\lambda\theta_J^k x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_0(\delta_n\, \lambda\theta_J^k(e_J - \xi_J)\,\xi_J^n) \bmod 1,$$

$$\varepsilon_0(\delta_n\lambda(e_J - \xi_J)\,\theta_J^{k-n}) \equiv \delta_n\lambda_0(1-\xi_0)\,\theta_0^{k-n} - \delta_n E(\lambda(e_J-\xi_J)\,\theta_J^{k-n}) \bmod 1 \quad \text{si } 0 \in J$$

$$\equiv -\delta_n\, E(\lambda(e_J - \xi_J)\,\theta_J^{k-n}) \qquad \text{si } 0 \notin J\ ;$$

Or $|\lambda(e_J - \xi_J)\,\theta_J^{k-n}|_p \leqslant p^{(h+k-n)t_p}$, $\quad (p \in J^-)$;

d'où, si $n \geqslant h+k$: $E(\lambda(e_J - \xi_J)\,\theta_J^{k-n}) \equiv 0 \bmod 1$.

On a donc :

$$(2)\qquad \varepsilon_0(\lambda\theta_J^k x) \equiv P_k + Q_k + R_k \quad \bmod 1,$$

avec

$$P_k(x) = \varepsilon_0(\lambda(e_J - \xi_J)\,(\delta_0\,\theta_J^k + \dots + \delta_{k-1}\,\theta_J)),$$

$$Q_k(x) = \varepsilon_0(\lambda(e_J - \xi_J)\,(\delta_k + \delta_{k+1}\,\xi_J + \dots + \delta_{k+h-1}\,\xi_J^{h-1})),$$

$$R_k(x) = 0 \qquad (\text{si } 0 \notin J),$$

$$R_k(x) = \lambda_0(1 - \xi_0)\ \xi_0^h\ (\ \delta_{k+h} + \dots + \delta_{k+h+j}\ \ \xi_0^j + \dots) \qquad \text{si } 0 \in J).$$

Si h est fixé, quel que soit k, $Q_k(x)$ n'a que 2^h valeurs possibles.

$R_k(x)$ est majoré en valeur absolue par :

(3) $$|R_k(x)| \leq |\lambda_0^{(1)}|_0\ \rho^h \qquad \text{où } 0 \leq \rho < 1$$

($\rho = 0$ si $0 \notin J$, et $\rho = \xi_0$ si $0 \in J$).

Pour évaluer P_k, on fait intervenir les racines $\theta_p^{(i)}$ de $Pm(\ \theta_J\ ;\ X)$ dans Ω_p et $\lambda_p^{(i)}$ de $Pm(\lambda\ ;\ x)$ dans Ω_p. (Notations précisées chapitre I paragraphe 5). La remarque essentielle est la suivante :

(cf. chapitre II paragraphe 2.2)

$$u_m = \sum_{i=1}^{s} (1 - \xi_p^{(i)})\ \lambda_p^{(i)}\ \theta_p^{(i)^m}$$

est un rationnel indépendant de p ; il appartient à l'anneau $Z\,[J^-]$. Si $p \in J^-$:

$$|u_m - \lambda(e_J - \xi_J)\ \theta_J^m\ |_p = |\sum_{i=2}^{s} (1 - \xi_p^{(i)})\ \lambda_p^{(i)}\ \theta_p^{(i)^m}|_p \leq 1\ ;$$

on en déduit :

$$u_m \equiv E(\lambda(e_J - \xi_J)\ \theta_J^m) \quad \text{mod } 1 \quad ,$$

d'où

$$\varepsilon_0(\lambda(e_J - \xi_J)\ \theta_J^m) \equiv - \sum_{i=2}^{s} \lambda_0^{(i)}\ (1 - \xi_0^{(i)})\ \theta_0^{(i)^m} \quad \text{mod } 1 \quad \text{si } 0 \in J,$$

$$\equiv - \sum_{i=1}^{s} \lambda_0^{(i)} (1 - \xi_0^{(i)})\ \theta_0^{(i)^m} \quad \text{mod } 1 \quad \text{si } 0 \notin J\ ;$$

On en déduit :

$$P_k(x) \equiv - \sum_{i=2}^{s} \lambda_0^{(i)}\ (1 - \xi_0^{(i)})(\ \delta_0\ \theta_0^{(i)^k} + \dots + \delta_{k-1}\ \theta_0^{(i)}) \quad \text{mod } 1 \quad \text{si } 0 \in J,$$

$$\equiv - \sum_{i=1}^{s} \lambda_0^{(i)} (1 - \xi_0^{(i)})\ (\ \delta_0\ \theta_0^{(i)^k} + \dots + \delta_{k-1}\ \theta_0^{(i)}) \text{ mod } 1 \quad \text{si } 0 \notin J,$$

d'où, comme $|\theta_0^{(i)}|_0 < 1$ par hypothèse ($\theta_J \in S_J^0$),

$$|((P_k))| \leq \sum_{i=2}^{s} |\lambda_0^{(i)}|_0\ \frac{1 + |\theta_0^{(i)}|_0}{1 - |\theta_0^{(i)}|_0} \qquad \text{si } 0 \in J,$$

$$|((P_k))| \leqslant \sum_{i=1}^{s} |\lambda_0^{(i)}|_0 \frac{1 + |\theta_0^{(i)}|_0}{1 - |\theta_0^{(i)}|_0} \quad \text{si } 0 \notin J.$$

Supposons que λ et θ vérifient la condition

$$(4) \qquad |\lambda_0^{(i)}|_0 < \frac{1 - |\theta_0^{(i)}|_0}{1 + |\theta_0^{(i)}|_0} \frac{\sigma}{s.2^{h/s}} \qquad (\sigma \text{ réel} > 0) ;$$

cela entraîne

$$|((P_k))| < \frac{s-1}{s} \frac{\sigma}{2^{h/s}} \qquad \text{si } 0 \in J,$$

$$|((P_k))| < \frac{\sigma}{2^{h/s}} \qquad \text{si } 0 \notin J.$$

Supposons d'autre part que h vérifie

$$(5) \qquad |\lambda_0^{(1)}|_0 \; |\xi_0|^h < \frac{1}{s} \frac{\sigma}{2^{h/s}} \qquad \text{si } 0 \in J ;$$

cela entraîne

$$|R_k| < \frac{1}{s} \frac{\sigma}{2^{h/s}} \qquad \text{(d'après (3))} .$$

Si (4) et (5) sont vérifiées, on aura :

$$(6) \qquad |((P_k + R_k))| < \frac{\sigma}{2^{h/s}}$$

Désignons par $M_k(x)$ et par $O_k(x)$ les éléments suivants de $(R/Z)^s$:

$$M_k(x) = (\varepsilon_0(\lambda\theta_J^k x) , \dots , \varepsilon_0(\lambda\theta_J^{k+s-1} x)),$$

$$O_k(x) = (Q_k(x), \dots, Q_{k+s-1}(x)).$$

En revenant à la définition de $Q_k(x)$, on voit que $O_k(x)$ a exactement 2^{h+s-1} valeurs possibles pour $x \in E_\xi$. Comme $M_k(x)$ appartient au "cube" de $(R/Z)^s$ de centre $O_k(x)$ et de côté $2 \sup_{0 \leq i \leq s-1} |(P_{k+i} + Q_{k+i}))|$, qui est majoré par $\frac{2\sigma}{2^{h/s}}$ d'après (6)) , tout $M_k(x)$ ($x \in E_\xi$) appartient donc à la réunion de ces 2^{h+s-1} "cubes" dont le volume total est majoré par :

$$2^{h+s-1} \frac{2^s \sigma^s}{2^h} = \frac{1}{2} (4 \sigma)^s .$$

Si l'on peut choisir $\sigma = \frac{1}{4}$ par exemple, ce volume sera $\leqslant \frac{1}{2}$: $(R/Z)^s$ contiendra donc un ouvert Ω sans point $M_k(x)$.

Il faut donc démontrer qu'il existe un entier $h \geq 1$ et un élément λ du corps $Q_J [\theta_J]$ tel que les conditions (1), (4), et (5) soient vérifiées avec $\sigma = \frac{1}{4}$.

On pose :

$$\alpha = (\prod_{p \in J^-} p^{ht_p})\lambda \quad .$$

Soit ω un entier algébrique de $Q_J [\theta_J]$ engendrant le corps. Le problème aura une solution si on trouve un élément entier algébrique α de $Q_J [\theta_J]$ donné par :

$$\alpha = x_0 e_J + x_1 \omega + \dots + x_s \omega^{s-1} \quad ,$$

où $(x_0,\dots,x_s) \neq (0, \dots , 0)$ dans Z^s et vérifiant les conditions suivantes :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} |\alpha|_p < 1 \qquad (p \in J^-), \\ |\alpha_p^{(i)}|_p \leq p^{-ht_p} \quad (p \in J^- , 2 \leq i \leq s) , \\ |\alpha_0^{(i)}|_0 \leq \dfrac{1 - |\theta_0^{(i)}|_0}{1 + |\theta_0^{(i)}|_0} (\prod_{p \in J} p^{ht_p}) \dfrac{1}{s.2^{(h/s)+2}} \\ \qquad\qquad (2 \leq i \leq s \text{ si } 0 \notin J, 1 \leq i \leq s \text{ si } 0 \in J), \\ |\alpha|_0 \leq (\prod_{p \in J} p^{ht_p})\, \theta_0^h \dfrac{1}{s.2^{(h/s)+2}} \qquad \text{si } 0 \in J. \end{array} \right.$$

Le système (7) est un système d'inéquations portant sur des valeurs absolues p-adiques de formes linéaires en $x_0,\dots,x_{s-1}$, à coefficients dans Ω_p. A tout $p \in J$ correspondent s formes linéaires. Soit Δ_p leur déterminant (Δ_p ne dépend que de ω et de p).

D'après un "théorème de Minkowski" (chapitre III paragraphe 1.1), il existe un élément $(x_0,\dots,x_{s-1})$ de $Z^s \neq (0,\dots,0)$ et satisfaisant aux conditions (7), si l'on a la relation :

$$(\prod_{p \in J^-} p^{-t_p})^{(s-1)h} \prod_{i=1}^{s} (\frac{1 - |\theta_0^{(i)}|_0}{1 + |\theta_0^{(i)}|_0} (\prod_{p \in J^-} p^{t_p})^h \frac{1}{s.2^{(h/s)+2}}) \geq \prod_{p \in J}^{s} \Delta_p \text{ si } 0 \notin J$$

$$\Big(\prod_{p\in J^-} p^{-t_p}\Big)^{(s-1)h} \prod_{i=2}^{s}\Big(\frac{1-|\theta_0^{(i)}|_0}{1+|\theta_0^{(i)}|_0}\Big(\prod_{p\in J^-} p^{t_p}\Big)^h \frac{1}{s\,2^{(h/s)+2}}\Big)\Big(\prod_{p\in J} p^{t_p}\Big)^h \frac{\theta_0^h}{s\,2^{(h/s)+2}}$$

$$\geq \prod_{p\in J} \Delta_p \text{ si } 0 \in J.$$

Comme $|\theta|_p = p^{t_p}$ $(p \in I)$, ceci s'écrit dans les 2 cas :

(8) $$\Big(\prod_{p\in J} |\theta|_p\Big)^h 2^{-h} \geq K,$$

où K est une constante ne dépendant que de ω et de θ. (8) est vérifiée pour h assez grand si $\prod_{p\in J} |\theta|_p > 2$. Ceci achève la première partie de la démonstration.

4.2.2. On a trouvé une suite

$$((y_k^{(i)})_{i=1,..,s}) \text{ de } V_I^{\,s} \qquad (y_k^{(i)} = \lambda\theta_J^{k+i-1}),$$

telle qu'il existe un ouvert non vide Ω de $(R/Z)^s$ qui ne contient aucun des éléments

$$M_k(x) = ((\varepsilon_0(y_k^{(i)}\,x))_{i=1,..,s}) \qquad \text{quels que soient } k \in N' \text{ et } x \in E_\xi .$$

On se propose d'en déduire une suite $((\gamma_k^{(i)})_{i=1,...,s})$ normale dans F_I^+, telle qu'il existe un ouvert non vide Δ' de T^s, qui ne contienne aucun élément $((x,\gamma_k^{(i)})_{i=1,..,s})$ quels que soient $k \in N'$ et $x \in E_\xi^{*}$. On désigne par Δ l'ouvert non vide de T^s tel que $((\exp(2i\pi\varepsilon_0(y_k^{(i)}\,x)))_{i=1,...,s})$ n'appartienne pas à Δ, quels que soient $k \in N'$ et $x \in E_\xi$ (Δ se déduit de Ω).

Posons :

$$\gamma_k^{(i)} = \sigma(e_I.E(y_k^{(i)})).$$

Comme $e_I.E(y_k^{(i)})$ appartient à $e_I\, Z[I]$, l'application σ est bien définie en $e_I.E(y_k^{(i)})$.

Pour tout $x \in F_I$, on a :

$$(x\ ,\ \gamma_k^{(i)}) = \exp(2i\pi\varepsilon_0(xE(y_k^{(i)})))\ ;$$

or, pour tout $y \in V_I$, et tout $x \in F_I$,

$$\varepsilon_0(xE(y)) = \varepsilon_0(xy - x\varepsilon_I(y)) \equiv \varepsilon_0(xy) - \varepsilon_0(x\varepsilon_I(y)) \mod 1$$

$$\equiv \varepsilon_0(xy) - x_0\ \varepsilon_0(y) \mod 1\ ;$$

on a donc

$$(x\ ,\ \gamma_k^{(i)}) = \exp(2i\pi(\varepsilon_0(xy_k^{(i)}) - x_0\ \varepsilon_0(y_k^{(i)})))\ ,$$

d'où

$$|(x\ ,\ \gamma_k^{(i)}) - \exp(2i\pi\varepsilon_0(xy_k^{(i)}))| \leq 2\pi\ |((x_0\varepsilon_0(y_k^{(i)})))| \leq 2\pi|((\varepsilon_0(y_k^{(i)})))|\ ;$$

comme $\theta_J \in S_J^0$, et comme λ est élément de $Q_J\ [\theta_J]$ tel que : $|\lambda_p^{(i)}|_p \leq 1$ pour tout $p \in J^-$ $(2 \leq i \leq s)$ et $(\prod_{p\in J^-} p^{ht_p})\ \lambda$ entier algébrique, on a

$$|((\varepsilon_0(\lambda\theta_J^n)))| < \gamma\rho^n \qquad \text{(chapitre II paragraphe 2.2.)}$$

où γ, ρ réels > 0 et $\rho < 1$. Ceci entraîne :

$$|\exp(2i\pi\varepsilon_0(xE(y_k^{(i)}))) - \exp\ (2i\pi\varepsilon_0(xy_k^{(i)}))| < 2\pi\gamma\rho^{\ k}\ ,$$

pour tout $k \in N'$, $x \in E_\xi$. On peut trouver un ouvert non vide Δ' de T^s tel que $\overline{\Delta'} \subset \Delta$. $((\exp(2i\pi\varepsilon_0(xy_k^{(i)})))_{i=1,..,s})$ n'appartient pas à Δ, quels que soient $k \in N'$, $x \in E_\xi$. Par suite, pour $k \geq K$ (où K ne dépend que de γ, ρ et Δ'),

$$((\exp(2i\pi\varepsilon_0(xE(y_k^{(i)})))_{i=1,...,s})) = ((x\ ,\ \gamma_k^{(i)})_{i=1,..,s})$$

n'appartient pas à Δ', quels que soient $k \in N'$, $k \geq K$, et $x \in \tilde{E_\xi}$. On a donc le résultat cherché, en numérotant la suite $\{k\}$ à partir de K.

Il reste à montrer que la suite $((\gamma_k^{(i)})_{i=1,..,s})$ est normale dans F_I^+. Soit $(n_1,\ldots,n_s)$ un élément de $Z^s \neq (0,\ldots,0)$. On a :

$$e_J(n_1E(y_k^{(1)}) + \ldots + n_sE(y_k^{(s)})) = e_J(n_1E(\lambda\theta_J^k) + \ldots + n_sE(\lambda\theta_J^{k+s-1}))$$

$$= \lambda\theta_J^k(n_1e_J + \ldots + n_s\theta_J^{s-1}) + n_1\varepsilon_J(\lambda\theta_J^k) + \ldots + n_s\varepsilon_J(\lambda\theta_J^{k+s-1})$$

d'où :

$$|e_J(n_1E(y_k^{(1)}+..+n_s\ E(y_k^{(s)})) - (\lambda\theta_J^k(n_1e_J+..+n_s\ \theta_J^{s-1}))|_J \leqslant |n_1|_J+..+|n_s|_J.$$

Or, $\lambda(n_1\ e_J + \dots + n_s\ \theta_J^{s-1}) \neq 0$, car le polynôme minimal de θ_J étant irréductible, quel que soit $p \in J$: $n_1 + \dots + n_s\ \theta_p^{s-1} \neq 0$ et $\lambda_p \neq 0$. Par suite,

$$n_1E(y_k^{(1)}) + \dots + n_s\ E(y_k^{(s)}) \to \infty \quad \text{dans } Z\,[I] \quad \text{quand } k \to \infty \ ,$$

et donc (2.4.4.) :

$$n_1\ \gamma_k^{(1)} + \dots + n_s\ \gamma_k^{(s)} \to \infty \quad \text{dans } \hat{F}_I^+ \ .$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.

4.3. Ensembles E_ξ de Rajchman.

La proposition 3 montre que, si $\theta_J \in S_J^0$, si $Pm(\theta_J\ ; X)$ est irréductible et de degré s, et si $\prod_{p\in J} |\theta|_J > 2$, $E_\xi^\sim$ est de type $H^{(s)}$. On peut se demander si E_ξ ne peut être, dans ces conditions, de type $H^{(n)}$ avec $n < s$. La réponse à cette question est affirmative, comme le montrent certains résultats de la théorie classique. D'autres exemples sont donnés par le lemme suivant.

Lemme.- S'il existe un sous-ensemble non vide J de I tel que : $\theta_J \in S_J^0$, ait un polynôme minimal irréductible de degré s, et vérifie $\prod_{p\in J} |\theta|_p > 2^s$, alors $E_\xi^\sim$ est de type H.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 4. Dans les inégalités (4), (5), (6), (7) on remplace la quantité $2^{h/s}$ par 2^h. Le "théorème de Minkowski" montre que le système (7) est résoluble dans le cas $\prod_{p\in J} |\theta|_p > 2^s$; on étudie alors la répartition dans R/Z de $M_k(x) = \varepsilon_0(\lambda\theta_J^k\ x)$ et de $Q_k(x) = Q_k(x)$, et on montre qu'il existe un ouvert Ω de R/Z libre d'éléments $M_k(x)$ pour tout $k \in N'$, $x \in E_\xi$.

Remarque.- Si $0 \notin J$ et $|N(\theta)|_0^{-1} > 2^s$, on se trouve dans les conditions du lemme, car :

$$1 \leqslant |N(\theta)|_0 \prod_{p\in J} |N(\theta)|_p \leqslant |N(\theta)|_0 \prod_{p\in J} |\theta|_p \ ,$$

donc $E_\xi^\sim$ est de type H.

5.- <u>Ensemble</u> E_ξ <u>dans</u> V_K, <u>où</u> K <u>peut être infini.</u>

Dans l'étude ci-dessus (paragraphe 4) concernant les ensembles $E_\xi^\sim$, qui sont ensembles U, l'hypothèse "I est un sous-ensemble fini de P" n'est pas intervenue ; on a seulement utilisé le fait que J, sous-ensemble de I, était fini. D'autre part, on n'a pas utilisé la propriété $|\xi|_p > 0$ pour $p \in I - J$.

Ces remarques, et le théorème 3, amènent aux définitions et au résultat suivant :

<u>Définitions</u>.- K est un sous-ensemble non vide, fini ou non, de P. ξ est un élément de V_K vérifiant :

$$0 \leqslant |\xi|_p < 1 \qquad \text{si } p \in K^-$$

et

$$0 \leqslant \xi_0 < 1 \qquad \text{si } 0 \in K.$$

E_ξ est l'ensemble des éléments x de V_K de la forme :

$$x = (e_K - \xi)\,(\delta_0\, e_K + \delta_1 \xi + \dots + \delta_n\, \xi^n + \dots) \qquad (\delta_n = 0 \text{ ou } 1),$$

et $E_\xi^\sim$ est l'ensemble du groupe compact F_K^+ qui se déduit de E_ξ par l'application $x \to \varepsilon_K(x)$ de V_K dans F_K^+.

Théorème 6.- <u>Supposons qu'il existe un sous-ensemble fini non vide</u> J <u>de</u> K <u>tel que</u> $\xi_p \neq 0$ <u>si</u> $p \in J$, <u>et si l'on pose</u> $\frac{1}{\xi_J} = \theta_J$, θ_J <u>appartient à</u> S_J^0, <u>le polynôme minimal de</u> θ_J <u>est irréductible, et</u> $\prod_{p\in J} |\theta|_p > 2$. <u>Alors</u> $E_\xi^{\sim}$ <u>est ensemble</u> U <u>du groupe</u> F_K^+.

Ce résultat donne des exemples d'ensembles d'unicité du groupe compact F_K^+, dual du groupe discret $Z[K]$ si $0 \in K$, et du groupe discret $Z[K]/Z$ si $0 \notin K$. En particulier, pour K = P, on obtient ainsi des ensembles U du groupe F_P^+, dual du groupe discret Q.

Par contre, la méthode employée (paragraphe 3) pour l'étude des ensembles

E_ξ , qui sont des ensembles M, ne s'applique pas au cas où I serait un ensemble K infini. On peut définir de manière analogue une mesure μ portée par E_ξ , sa transformée de Fourier $\hat{\mu}(y)$ est donnée par la même expression (paragraphe 2.3), mais si l'on a une suite y_k tendant vers l'infini, dans V_K, l'ensemble I' des p tels que $|y_k|_p \to \infty$ n'est pas nécessairement un ensemble fini et non vide de K comme dans 3.2.

La question reste donc posée de savoir quels sont les ensembles E_ξ^2 de F_K^+ qui sont des ensembles M, lorsque K est un sous-ensemble infini de P.

CHAPITRE V

THEOREME DE KOKSMA DANS V_I

Le but de ce chapitre est de démontrer un analogue dans V_I du théorème de Koksma sur la répartition modulo 1 ; ce théorème démontre une propriété métrique d'équirépartition modulo 1 dans R, dont voici un des énoncés (non le plus général, cf. J F KOKSMA [1]).

THEOREME DE KOKSMA.- a et b désignent deux réels, avec a < b. Soit $\{f_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ une suite d'applications continues et dérivables de $[a,b]$ dans R, telles que, pour tout couple m, n $(m, n \in N)$ avec $m \neq n$, l'application $f'_m - f'_n$ soit monotone sur $[a,b]$ et vérifie :

$$|f'_m(x) - f'_n(x)| > K > 0, \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

(K indépendant de m, n, x).

Alors la suite $\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ est équirépartie dans R modulo 1 pour presque tout x de $[a,b]$.

Il en résulte immédiatement :

COROLLAIRE 1 La suite $\{x\,\theta^n\}$ $(\theta \in R,\ |\theta| > 1)$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout x de R.

COROLLAIRE 2 La suite $\{\lambda x^n\}$ $(\lambda \in R,\ \lambda \neq 0)$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout x de R tel que $|x| > 1$.

Dans sa démonstration, KOKSMA utilise le théorème de Weyl, qui donne une caractérisation des suites équiréparties : $\{u_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ désigne une suite de réels ; $\{u_n\}$ est équirépartie modulo 1, si et seulement si, pour tout $k \neq 0$ de Z.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp 2i\pi k u_n = 0.$$

Les corollaires 1 et 2 du théorème de Koksma sont en relation avec les éléments de l'ensemble S comme on l'a déjà signalé (introduction) :

Si θ est un élément de S, pour tout x entier algébrique du corps $Q(\theta)$,

$$x\theta^n \to 0 \quad \text{modulo 1 quand } n \to +\infty \;;$$

un tel x appartient donc à l'"ensemble de mesure nulle" du corollaire 1. Dans le corollaire 2, si $\lambda = 1$ et si x est un élément de S,

$$x^n \to 0 \quad \text{modulo } 1 \text{ quand } n \to +\infty\;;$$

S est donc contenu dans l'"ensemble de mesure nulle" du corollaire 2, dans le cas $\lambda = 1$.

Dans ce chapitre, on se propose l'étude de la <u>généralisation suivante du théorème de Koksma</u> :

c(I) désigne le nombre d'éléments de I (fini par hypothèse). L'application $H_p : x_p \to H_p(x_p)$ définit un homomorphisme continu du groupe additif Q_p dans R/Z (voir chapitre I. 2.1 et 3.1; rappelons que $H_0(x_0) \equiv x_0$ modulo 1).

L'application $H : x \to H(x) = (H_p(x_p))_{p\in I}$ définit évidemment un homomorphisme continu du groupe additif V_I dans $(R/Z)^{c(I)}$.

Soit alors $\{f_{n,p}\}$ une suite d'applications de Q_p dans lui-même (pour tout p élément de I), et f_n l'application $x \to f_n(x) = (f_{n,p}(x_p))_{p\in I}$ qui est une application de V_I dans lui-même.

On considère <u>l'application composée des applications f_n</u> et H :

$H \circ f_n$: $x \to H\circ f_n(x) = (H_p(f_{n,p}(x)))_{p\in I}$

$H \circ f_n$ est une application de V_I dans $(R/Z)^{c(I)}$.

On se propose de donner des conditions suffisantes pour que la suite $\{H \circ f_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ soit équirépartie dans $(R/Z)^{c(I)}$ pour presque tout x d'un domaine D à préciser de V_I ("presque tout" au sens de la mesure de Haar de V_I).

Dans le paragraphe 1, on donnera quelques résultats sur l'intégration dans Q_p et dans V_I.

Dans le paragraphe 2, on traitera le cas $V_I = Q_p$ (c'est-à-dire $I = (p)$) , et, dans le paragraphe 3, le cas général.

1.- Intégration dans Q_p et dans V_I.-

1.1 On a rappelé (chapitre I paragraphe 3) quels sont les caractères continus des groupes additifs Q_p et V_I et d'autre part quelle est la normalisation choisie de la mesure de Haar de ces groupes.

Tout caractère continu de Q_p s'écrit : $x \to \exp 2i\pi H_p(x\,y)$, où y appartient à Q_p. Cette application définit également un caractère continu du sous groupe Z_p de Q_p, et, comme $\hat{Z}_p \sim Q_p/Z_p$, deux telles applications définissent le même caractère sur Z_p si et seulement si $y \equiv y'$ modulo Z_p.
En particulier, on obtient le caractère égal à 1 si et seulement si $|y|_p \leq 1$.
Conséquence : L'intégrale sur un groupe compact d'un caractère étant égale à 0 ou 1 suivant que ce caractère est différent de 1 ou non,

on a :

$$\int_{Z_p} \exp\,(2i\pi\, H_p(xy))\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } |y|_p > 1 \\ 1 & \text{si } |y|_p \leq 1\,. \end{cases}$$

Il est intéressant de donner une démonstration élémentaire de ce résultat.
On peut supposer $y = mp^{-k}$, avec $k \geq 1$ et $|m|_p = 1$ (le cas $|y|_p \leq 1$ est évident). Le disque Z_p est recouvert par p^k disques disjoints de rayon p^{-k} , centrés aux points $0, 1, \ldots, p^k - 1$. Comme :

$$|x - x'|_p \leq p^{-k} \Longrightarrow H_p(xy) = H_p(x'y),$$

l'intégrale est égale à la somme finie :

$$p^{-k}\sum_{n=0}^{p^k-1}\exp(2i\pi\, H_p\,(nmp^{-k})) = p^{-k}\sum_{n=0}^{p^k-1}\exp(2i\pi\, nmp^{-k}) = 0$$

De la relation (1), on va déduire le résultat suivant :

Lemme 1. <u>Soit</u> Φ <u>une application isométrique de</u> Z_p <u>dans lui-même c'est-à-dire telle que, quels que soient</u> x, y <u>dans</u> Z_p, <u>on ait</u> :

$$|\Phi(x) - \Phi(y)|_p = |x - y|_p\ .$$

On a :

$$\int_{Z_p}\exp(2i\pi\, H_p\,(y\,\Phi(x)))\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } |y|_p > 1 \\ 1 & \text{si } |y|_p \leq 1. \end{cases}$$

<u>Démonstration.</u>- Le cas $|y|_p \leq 1$ étant évident, on va supposer $y = mp^{-k}$, avec $|m|_p = 1$ et $k \geq 1$. Considérons le recouvrement de Z_p par les p^k disques de rayon p^{-k}. Comme :

$$|x - x'|_p \leq p^{-k} \Longrightarrow |\Phi(x) - \Phi(x')|_p \leq p^{-k} \Longrightarrow H_p\,(y\,\Phi(x)) = H_p\,(y\,\Phi(x')),$$

l'intégrale est égale à la somme finie :

$$p^{-k}\sum_{n=0}^{p^k-1}\exp(2i\pi\, H_p(y\,\Phi(n))).$$

Or $n \neq n' \Longrightarrow |\Phi(n) - \Phi(n')| = |n - n'|_p \geq p^{-k}$. Les $\Phi(n)$ $(n=0,1,\dots p^k-1)$ sont donc incongrus modulo p^k ; comme ils sont au nombre de p^k, ils constituent un système complet de représentants de $Z_p/p^k Z_p$. Par suite, il existe une permutation $(j_n)_{n=0,\dots,p^k-1}$ de $(0,1,\dots, p^k-1)$ telle que

$$|\Phi(n) - j_n|_p \leq p^{-k}\ .$$

Il en résulte :

$$p^{-k}\sum_{n=0}^{p^k-1}\exp(2i\pi\, H_p(y\,\Phi(n))) = p^{-k}\sum_{n=0}^{p^k-1}\exp(2i\pi\, H_p(yn))$$

$$= \int_{Z_p}\exp(2i\pi\, H_p(yx))\,dx.$$

D'où le résultat.

1.2 Un théorème métrique.- La propriété suivante se déduit d'une propriété générale de toute fonctionnelle linéaire non négative sur l'espace $\mathcal{C}(X, C)$ des fonctions continues à valeurs complexes, définies sur un espace topologique compact X (HEWITT-ROSS [1] 11-27).

Lemme 2.- *Soient* X *un compact de* G, groupe abélien localement compact, *et* $\{h_n\}$ $(n=1,2,\dots)$ *une suite d'applications non négatives de* $\mathcal{C}(X, C)$ telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} I(h_n) = 0, \text{ où } I(h_n) = \int_X h_n(x)\,dx \quad \text{(intégrale de Haar).}$$

Soit $\{n_k\}$ $(k=1,2,\dots)$ *une suite croissante d'entiers positifs tels que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(h_{n_k}) < +\infty .$$

Il en résulte :

$$\lim_{k \to +\infty} h_{n_k}(x) = 0 \quad \textit{presque partout dans } X$$

(c'est-à-dire sauf pour x appartenant à un sous-ensemble de X ayant une mesure de Haar nulle).

Dans la suite, on appliquera le lemme 2 au cas : $G = Q_p^+$, et $G = V_I^+$ (le cas $G = R^+$ de cette propriété est utilisé dans la démonstration du théorème de Koksma classique).

2.- *Equirépartition d'une suite d'applications de* Q_p *dans* R/Z

2.1 On se propose de démontrer les résultats suivants :

Théorème 1.- D *désigne un disque de* Q_p. *Soit* $\{f_n\}$ $(n=1,2,\dots)$ *une suite d'applications continues de* D *dans* Q_p. *Pour tout couple* (m,n) *d'entiers positifs, on note* $F_{m,n}$ *l'application* $f_m - f_n$. K *désigne un sous-ensemble de* $N^* \times N^*$ *(ensemble des couples d'entiers positifs) contenant les couples* (m,n) *tels que* $m = n$, *et* K_N *désigne le nombre d'éléments* (m,n) *de* K *tels que* : $\sup(m,n) \leq N$

On suppose les deux conditions suivantes vérifiées :

(1) Si $(m,n) \notin K$, quels que soient x et $y \in D$:

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\Lambda_{m,n}} |x - y|_p$$

où $\Lambda_{m,n} \in Z$ et vérifie $\Lambda_{m,n} \to +\infty$ quand $\sup(m,n) \to +\infty$.

(2) Il existe une suite croissante N_k $(k=1,2,\dots)$ d'entiers positifs tels que :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{N_{k+1}}{N_k} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{K_{N_k}}{N_k^2} < +\infty .$$

<u>Alors la suite</u> $\{H_p(f_n(x))\}$ $(n=1,2,\dots)$ <u>est équirépartie dans</u> R/Z <u>pour presque tout</u> x de D.

(On peut démontrer que la condition 2 est équivalente à la condition suivante :

$$\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{K_N}{N^3} < +\infty . \qquad)$$

Théorème 1 bis.- <u>Dans l'énoncé du théorème 1 on peut remplacer la condition</u> (1) <u>par la condition plus faible</u> (1 bis) (*) :

(1 bis) Si $(m,n) \notin K$, il existe une partition :

$$D = \bigcup_{j=1}^{J(m,n)} D^j_{m,n}$$

du disque D en un nombre fini $J(m,n)$ de disques disjoints $D^j_{m,n}$, de rayon $p^{h^j_{m,n}}$, tels que, quels que soient x et $y \in D^j_{m,n}$:

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\Lambda^j_{m,n}} |x-y|_p$$

où $\Lambda^j_{m,n} \in Z$, et

$$\operatorname*{Inf}_{j=1,\dots,J(m,n)} (\Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n}) \to +\infty \text{ quand } \sup(m,n) \to +\infty .$$

Corollaires du théorème 1.

(1) <u>La suite</u> $\{H_p(x\,\theta^n)\}$ $(\theta \in Q_p,\ |\theta|_p > 1)$ <u>est équirépartie dans</u> R/Z <u>pour presque tout</u> x de Q_p.

(2) <u>La suite</u> $\{H_p(\lambda\, x^n)\}$ $(\lambda \in Q_p,\ \lambda \neq 0)$ <u>est équirépartie dans</u> R/Z <u>pour presque tout</u> x de Q_p <u>tel que</u> $|x|_p > 1$.

<u>Remarques</u> :

<u>1° Si θ est un élément de l'ensemble S^0_p, et si x est un élément algébrique</u>

(*) à la suite d'une remarque de Y. AMICE

α du corps $Q(\theta)$ tel que :

- $p^a\,\alpha$ soit entier algébrique $(a \in Z)$,
- tous les conjugués de α (dans Ω_p) aient une valeur absolue p-adique ≤ 1,

alors (cf. le lemme chapitre II, paragraphe 2.2)

$$H_p(\alpha\,\theta^n) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty .$$

Pour les nombres p-adiques x de cette forme, la suite $\{H_p(x\,\theta^n)\}$ n'est donc pas équirépartie : un tel x appartient à l'"ensemble mesure nulle" du corollaire 1.

2° Si $\lambda = 1$, et si x est un élément de S_p^0,

$$H_p(\lambda\,x^n) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty ,$$

la suite $\{H_p(x^n)\}$ n'est donc pas équirépartie : un tel x appartient à l'"ensemble de mesure nulle" du corollaire 2.

2.2. Démonstration des théorèmes 1 et 1 bis.- On utilise les sommes de Weyl relatives à la suite $\{H_p(f_n(x))\}$:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp\,(2i\pi\,kH_p(f_n(x))) \qquad (k \in Z,\quad k \neq 0).$$

D'où ($|\ |$ désigne la valeur absolue dans C) :

$$|\sigma_N(x)|^2 = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{1\leq m<n\leq N} \cos\,(2\pi\,kH_p(F_{m,n}(x))).$$

Posons $I_N = \int_D |\sigma_N(x)|^2\,dx$. On a :

$$I_N = \frac{\text{mes } D}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{1\leq m<n\leq N} i_{m,n}$$

où $i_{m,n} = \int_D \cos\,(2\pi\,kH_p(F_{m,n}(x)))\,dx$,

et mes $D = p^h$ $(h \in Z,\ p^h$ étant le rayon du disque $D)$.

Pour tout couple (m,n) :

$$|i_{m,n}| \leq \text{mes } D = p^h$$

Soit un couple (m,n) n'appartenant pas à l'ensemble exceptionnel K, et supposons que l'application $F_{m,n}$ vérifie la condition (1 bis). Notons :

$$i^j_{m,n} = \int_{D^j_{m,n}} \cos(2\pi\, kH_p(F_{m,n}(x)))\, dx.$$

On a :

$$i_{m,n} = \sum_{j=1}^{J(m,n)} i^j_{m,n} \ .$$

Soit $x^j_{m,n}$ un centre du disque $D^j_{m,n}$ c'est-à-dire :

$$D^j_{m,n} = \{x : |x - x^j_{m,n}|_p \leq p^{h^j_{m,n}}\} \ .$$

On pose :

$$x = x^j_{m,n} + p^{-h^j_{m,n}}\,\xi$$

et

$$F_{m,n}(x^j_{m,n} + p^{-h^j_{m,n}}\,\xi)\ p^{\Lambda^j_{m,n}+h^j_{m,n}} = \Phi^j_{m,n}(\xi) \ .$$

La condition (1 bis) entraîne, pour tout ξ, $\eta \in \mathbf{Z}_p$,

$$|\Phi^j_{m,n}(\xi) - \Phi^j_{m,n}(\eta)|_p = |\xi - \eta|_p \ .$$

L'application $\Phi^j_{m,n}$ est donc isométrique dans Z_p. Or :

$$i^j_{m,n} = p^{h^j_{m,n}} \int_{Z_p} \cos(2\pi\, kH_p(p^{-\Lambda^j_{m,n}-h^j_{m,n}}\,\Phi(\xi)))\, d\xi$$

$$= p^{h^j_{m,n}} \int_{Z_p} \cos(2\pi\, H_p(kp^{-\Lambda^j_{m,n}-h^j_{m,n}}\,\Phi(\xi)))\, d\xi \ .$$

Il résulte du lemme 1 (paragraphe 1.3) que l'intégrale :

$$\int_{Z_p} \exp(2i\pi\, H_p(kp^{-\Lambda^j_{m,n}-h^j_{m,n}}\,\Phi(\xi)))\, d\xi$$

est égale à 0 si $\Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n} - \chi \geq 1$, et égale à 1 dans le cas contraire (on note $|k|_p = p^{-\chi}$). D'où le même résultat pour l'intégrale $i^j_{m,n}$.

Par suite, si $\Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n} - \chi \geq 1$, $i^j_{m,n} = 0$.

Par hypothèse :

$$\operatorname*{Inf}_{j=1,\dots,J(m,n)} \Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n} \to +\infty \text{ quand } \sup(m,n) \to +\infty$$

c'est-à-dire : $\exists$ un entier $\nu(\chi)$ tel que :

$$\sup(m,n) > \nu(\chi) \Longrightarrow \operatorname*{Inf}_{j=1,\dots,J(m,n)} \Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n} \geqslant 1 + \chi .$$

L'inégalité précédente est donc vérifiée pour tout couple (m,n) non dans K, sauf éventuellement pour les couples tels que $\sup(m,n) \leqslant \nu(\chi)$: le nombre de ces couples est majoré par $\nu(\chi)^2$.

On a donc $i^j_{m,n} = 0$ pour tout $j=1,2,\dots, J(m,n)$ (et par suite $i_{m,n} = 0$) pour tout couple (m,n) non dans K, sauf peut-être pour $\nu(\chi)^2$ d'entre eux. Il en résulte :

$$I_N \leqslant \text{mes } D\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2}\left(\nu(\chi)^2 + K_N\right)\right).$$

C'est-à-dire, puisque $K_N \geqslant N$:

$$I_N = O\left(\frac{K_N}{N^2}\right).$$

Considérons la suite $\{N_k\}$ de la condition (2). On a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_{N_k} < +\infty .$$

D'où en utilisant le lemme 2 (paragraphe 1.2) avec $G = Q_p^+$:

$$\lim_{k\to\infty} |\sigma_{N_k}(x)|^2 = 0 \quad \text{pour presque tout } x \text{ de } D.$$

Soit N un entier positif quelconque. Il existe un entier k, et un seul, tel que :

$$N_k \leqslant N < N_{k+1}$$

$$\sigma_N(x) = \frac{N_k}{N}\sigma_{N_k}(x) + \frac{1}{N}\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \exp\left(2i\pi\, kH_p\left(F_{m,n}(x)\right)\right).$$

D'où :

$$\left|\sigma_N(x) - \frac{N_k}{N}\sigma_{N_k}(x)\right| \leqslant \frac{N_{k+1} - N_k}{N} \leqslant \frac{N_{k+1}}{N_k} - 1$$

$$|\sigma_N(x)| \leqslant \frac{N_k}{N}|\sigma_{N_k}(x)| + \left|\frac{N_{k+1}}{N_k} - 1\right| \leqslant |\sigma_{N_k}(x)| + \left|\frac{N_{k+1}}{N_k} - 1\right| .$$

D'après la condition (2) :

$$\left|\frac{N_{k+1}}{N_k} - 1\right| \to 0 \quad \text{quand } k \to +\infty .$$

Si x est tel que $|\sigma_{N_k}(x)| \to 0$ quand $k \to +\infty$, quel que soit N :

$$|\sigma_N(x)| \to 0 \quad \text{quand } N \to +\infty .$$

Par suite, $|\sigma_N(x)| \to 0$ quand $N \to +\infty$ presque partout dans D. Le théorème 1 bis, est donc démontré.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il suffit de remarquer que la condition (1) est un cas particulier de la condition (1 bis) :

$$J(m,n) = 1 \qquad h^j_{m,n} = h \qquad \Lambda^j_{m,n} = \Lambda_{m,n} \quad .$$

2.3 Démonstration des corollaires du théorème 1.- Le corollaire 1 est immédiat : en effet, si l'on pose $f_n(x) = x\,\theta^n$, on a :

$$F_{m,n}(x) = x(\theta^m - \theta^n) ,$$

d'où, si $m \neq n$:

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = |\theta^m - \theta^n|_p \quad \forall x, y \in Q_p$$

où $|\theta^m - \theta^n|_p = p^{k \sup(m,n)}$ (si $|\theta|_p = p^k$). La condition (1) est donc vérifiée. L'ensemble K se compose uniquement des couples (m,n) tels que $m=n$; c'est-à-dire $K_N = N$.

Pour démontrer le corollaire 2, on pose $f_n(x) = \lambda x^n$. Soit D un disque quelconque de rayon 1, non contenu dans Z_p. Soit p^k ($k \geq 1$) la valeur absolue p-adique des points de D. Soit $y - x = p\alpha$, où $|\alpha|_p \leq 1$. On a, si $x \neq y$:

$$\frac{y^n - x^n}{y - x} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} x^{n-\ell}\, p^{\ell-1}\, \alpha^{\ell-1} .$$

On pose : $|n|_p = p^{-\nu}$, $|\ell|_p = p^{-\lambda}$, $|m|_p = p^{-\mu}$. De la relation :

$$\left|\binom{n}{\ell}\right|_p = p^{-P} \quad \text{avec} \quad P = \sum_{i=1}^{\infty} [\frac{n}{p^i}] - [\frac{\ell}{p^i}] - [\frac{n-\ell}{p^i}],$$

résulte :

$$\left|\binom{n}{\ell}\right|_p \leq p^{-(\nu-\lambda)} \quad \text{si } \nu > \lambda .$$

On a donc, dans tous les cas,

$$|\binom{n}{\ell}|_p \leqslant p^{-(\nu-\lambda)} \quad .$$

Comme $p^\lambda \leqslant \ell \Longrightarrow \lambda \leqslant \frac{\log \ell}{\log p} \leqslant \frac{\log \ell}{\log 2} \leqslant 2\ell - 3$ pour $\ell \geqslant 2$, on a :

$$|\binom{n}{\ell}|_p \leqslant p^{-\nu+2\ell-3} \quad \text{pour } \ell \geqslant 2.$$

Donc

$$|\binom{n}{\ell} x^{n-\ell} p^{\ell-1} \alpha^{\ell-1}|_p \leqslant p^{-\nu+\ell-2+(n-\ell)k} = p^{(n-1)k-\nu-(\ell-1)(k-1)-1}$$

or

$$|\binom{n}{1} x^{n-1}|_p = p^{(n-1)k-\nu} \quad .$$

Comme $\ell \geqslant 2$, $k \geqslant 1$, il résulte :

$$|\binom{n}{\ell} x^{n-\ell} p^{\ell-1} \alpha^{\ell-1}|_p < |\binom{n}{1} x^{n-1}|_p \qquad (2 \leqslant \ell \leqslant n).$$

D'où, pour tout couple x, $y \in D$ avec $x \neq y$:

$$|\frac{y^n - x^n}{y - x}|_p = |nx^{n-1}|_p = p^{(n-1)k-\nu} \quad .$$

De même

$$|\frac{y^m - x^m}{y - x}|_p = |mx^{m-1}|_p = p^{(m-1)k-\mu} \quad .$$

Donc, si $(n-1)k - \nu \neq (m-1)k - \mu$, et $x \neq y$ dans D :

$$|\frac{F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)}{x - y}|_p = |\frac{y^m - x^m}{y - x} - \frac{y^n - x^n}{y - x}|_p = p^{\Lambda_{m,n}}$$

où $\Lambda_{m,n} = \sup\{(n-1)k - \nu, (m-1)k - \mu\}$. Ceci entraîne :

$$\Lambda_{m,n} \geqslant \sup\{(n-1)k - \frac{\log n}{\log p}, (m-1)k - \frac{\log m}{\log p}\} .$$

La condition (1) du théorème 1 est donc vérifiée.

L'ensemble exceptionnel K est constitué d'une part des couples (m,n) tels que $m=n$, d'autre part des couples (m,n) tels que :

$$nk - \nu = mk - \mu$$

c'est-à-dire $k(n-m) = \nu - \mu$.

Supposons $n > m$, et $|\nu - \mu|_p = p^{-r}$. On a :

$$\nu - \mu = k\ell p^r \qquad (\text{où } |\ell|_p = 1)$$

$$n-m = \ell p^r$$

On en déduit successivement : $\nu > r$, $\mu \geqslant r$, puis $\mu = r$. A une valeur de $\nu - \mu$ correspond donc une seule valeur de μ et une seule valeur de ν. Or ν étant fixé, il existe $\sigma(\nu)$ entiers n', tels que $n = n'p^{\nu} \leqslant N$ et $|n'|_p = 1$,
et l'on a :

$$\sigma(\nu) \leqslant \left[\frac{N}{p^{\nu}}\right].$$

$\nu - \mu$ et n étant fixés, le seul choix possible pour m est : $n - \ell p^r$. Le nombre de couples (m,n) $(m < n)$ tels que $k(n-m) = \nu - \mu$, est donc majoré par :

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{\log N}{\log p}} \sigma(\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{N}{p^{\nu}}\right] < \frac{N}{p-1}.$$

Par suite :

$$K_N < N + 2\,\frac{N}{p-1}$$

$$K_N = O(N)$$

La condition (2) du théorème 1 est donc vérifiée.

3. __Equirépartition d'une suite d'applications de__ V_I __dans__ $(R/Z)^{c(I)}$.

3.1 __Dans le paragraphe__ 3, on étudiera __l'équirépartition dans__ $(R/Z)^r$ (r __entier__ $\geqslant 1$, __dans la suite__ $r = c(I)$) __de suites vectorielles__. On rappelle la définition suivante : La suite vectorielle $\{(u_{n,1},\ldots,u_{n,r})\}$ $(n=1,2,\ldots)$ $(u_{n,i} \in R/Z)$ est équirépartie dans $(R/Z)^r$ si, et seulement si, quels que soient les $2r$ réels α_i, β_i avec $0 \leqslant \alpha_i < \beta_i \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\nu(\alpha_i, \beta_i, N)}{N} = \prod_{i=1}^{r} (\beta_i - \alpha_i),$$

où $\nu(\alpha_i, \beta_i, N)$ est le nombre de termes de la suite vectorielle $\{(u_{n,i})\}$ vérifiant :

$$n \leqslant N \quad \text{et} \quad u_{n,i} \in [\alpha_i, \beta_i[\bmod 1 \quad (i=1,\ldots,r).$$

Une caractérisation des suites vectorielles équiréparties dans $(R/Z)^r$

est donnée par le théorème de Weyl (CIGLER-HELMBERG [1]) :

$\{(u_{n,1},\ldots,u_{n,r})\}$ est équirépartie dans $(R/Z)^r$ si, et seulement si, pour tout système $(k_1,\ldots,k_r)$ d'entiers $\neq (0,\ldots,0)$,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi (k_1 u_{n,1} + \ldots + k_r u_{n,r})) = 0$$

Remarques.

1°) Si la suite vectorielle $\{(u_{n,i})_{i=1,\ldots,r}\}$ $(n = 1,2,\ldots)$ est équirépartie dans $(R/Z)^r$, alors la suite de réels $\{\nu_1 u_{n,1} + \ldots + \nu_r u_{n,r}\}$ $(n=1,2,\ldots)$, où $(\nu_1,\ldots,\nu_r)$ est un système d'entiers $\neq(0,\ldots,0)$, est équirépartie dans R/Z (comme on le voit en utilisant le critère de Weyl dans le cas $r = 1$).

2°) Le fait que la suite de réels $\{u_{n,i}\}$ $(n=1,2,\ldots)$ soit équirépartie dans R/Z, pour tout $i=1,2,\ldots,r$, n'entraîne pas que la suite vectorielle $\{(u_{n,i})_{i=1,\ldots,r}\}$ $(n=1,2,\ldots)$ soit équirépartie dans $(R/Z)^r$.

3.2 On se propose de démontrer les résultats suivants :

Théorème 2.- Soient D un compact de V_I défini par :

$$D = \{x \in V_I \quad : \quad x_p \in D_p, \quad p \in I\}$$

où D_p est un disque de Q_p si $p \neq 0$, et, dans le cas où $0 \in I$, D_0 un segment $[a,b]$ de R.

Soit pour tout $p \in I$, une suite $\{f_{n,p}\}$ $(n=1,2,\ldots)$ d'applications continues de D_p dans Q_p vérifiant les conditions du théorème 1 (ou 1 bis) si $p \neq 0$ (l'ensemble K sera noté K_p et K_N noté $K_{N,p}$), et les conditions du théorème de Koksma si $p = 0$:

Alors la suite vectorielle $\{(H_p(f_{n,p}(x_p))_{p\in I}\}$ $(n=1,2,\ldots)$ est équirépartie dans $(R/Z)^{c(I)}$ pour presque tout x de D.

Corollaires du théorème 2.

(1) La suite vectorielle $\{(H_p(x_p\ \theta_p^n))_{p\in I}\}$ $(n=1,2,\ldots)$ (où $\theta_p \in Q_p$, $|\theta_p|_p > 1$ pour tout $p \in I$) est équirépartie dans $(R/Z)^{c(I)}$ pour presque tout x de V_I.

(2) <u>La suite vectorielle</u> $\{(H_p(\lambda_p x_p^n))_{p\in I}\}$ $(n=1,2,\ldots)$ (où $\lambda_p \in Q_p$, $\lambda_p \neq 0$, <u>pour tout</u> $p \in I$) <u>est équirépartie dans</u> $(R/Z)^{c(I)}$ <u>pour presque tout</u> x <u>de</u> V_I <u>tel que</u> :

$$\inf_{p\in I} |x_p|_p > 1 \quad .$$

<u>Remarques.</u>

1° Si θ est un élément de S_I^0, et si x est un élément algébrique α de l'anneau $Q_I[\theta]$ tel que α vérifie les conditions :

$$\begin{cases} |\alpha_p^{(i)}|_p < 1 & (i=1,2,\ldots,s) \text{ si } p \notin I \\ |\alpha_p^{(i)}|_p < 1 & (i=2,3,\ldots,s) \text{ si } p \in I^- \end{cases}$$

Alors (lemme chapitre II paragraphe 2.2) :

$$\varepsilon_0(\alpha\,\theta^n) \to 0 \quad \text{modulo 1 quand } n \to +\infty .$$

Or (chapitre I paragraphe 2.1) :

$$\varepsilon_0(\alpha\,\theta^n) \equiv H_0(\alpha_0\,\theta_0^n) - \sum_{p\in I^-} H_p(\alpha_p\,\theta_p^n) \quad \text{modulo 1 si } 0 \in I$$

$$\equiv - \sum_{p\in I^-} H_p(\alpha_p\,\theta_p^n) \qquad \text{modulo 1 si } 0 \notin I$$

La suite $\{(H_p(\alpha\,\theta^n))_{p\in I}\}$ n'est donc pas équirépartie dans $(R/Z)^{c(I)}$ d'après la remarque 1 paragraphe 3.1 : un tel $x = \alpha$ appartient donc à l'"ensemble mesure nulle" du corollaire 1.

2°) Si x est un élément de S_I^0, on a (Théorème 1 ou 2 chapitre II)

$$\varepsilon_0(x^n) \to 0 \quad \text{modulo 1 quand } n \to +\infty .$$

Il en résulte, comme ci-dessus ; la suite vectorielle $\{(H_p(x_p^n))_{p\in I}\}$ n'est pas équirépartie dans $(R/Z)^{c(I)}$: un tel x appartient donc à l'"ensemble de mesure nulle" du corollaire 2.

3.3 <u>Démonstration du théorème 2.</u>- On utilise les sommes de Weyl relatives à la suite vectorielle $\{(H_p(f_{n,p}(x_p))_{p\in I}\}$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp\Big(2i\pi \sum_{p\in I} k_p H_p(f_{n,p}(x_p))\Big) \quad (k_p \in Z \text{ et } (k_p)_{p\in I} \neq (0,\ldots,0))$$

D'où, en notant $F_{m,n,p} = f_{m,p} - f_{n,p}$:

$$|\sigma_N(x)|^2 = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq m < n \leq N} \cos(2\pi \sum_{p \in I} k_p H_p(F_{m,n,p}(x_p))).$$

On pose :

$$I_N = \int_D |\sigma_N(x)|^2 \, dx.$$

D'où

$$I_N = \frac{\text{mes } D}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq m < n \leq N} i_{m,n}$$

avec

$$i_{m,n} = \int_D \cos(2\pi \sum_{p \in I} k_p H_p(F_{m,n,p}(x_p)))\, dx = \int_D \cos(2\pi \sum_{p \in I} H_p(k_p F_{m,n,p}(x_p)))\, dx.$$

Pour tout couple m, n :

$$i_{m,n} \leq \text{mes } D$$

on notera

$$\mathfrak{J}_{m,n} = \int_D \exp(2i\pi \sum_{p \in I} H_p(k_p F_{m,n,p}(x_p)))\, dx.$$

On a (chapitre I paragraphe 3.2)

$$\mathfrak{J}_{m,n} = \prod_{p \in I} \int_{D_p} \exp(2i\pi H_p(k_p F_{m,n,p}(x_p)))\, dx_p \quad .$$

Comme $(k_p)_{p \in I} \neq (0,\dots,0)$, il existe un indice p de I tel que $k_p \neq 0$.

<u>1er cas $p \neq 0$.</u> - Si $(m,n) \notin K_p$:

$$\int_{D_p} \exp(2i\pi H_p(k_p F_{m,n,p}(x_p)))\, dx_p = 0$$

sauf au plus pour $\nu(\chi_p)^2$ couples (m,n) (cf. § 2.2). Pour les mêmes couples (m,n) on a $\mathfrak{J}_{m,n} = 0$ et donc $i_{m,n} = 0$. Il en résulte :

$$I_N \leq \text{mes } D \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2}(\nu_p(\chi_p)^2 + K_{N,p})\right).$$

D'où

$$I_N = O\left(\frac{1}{N^2} K_{N,p}\right) \quad .$$

La démonstration s'achève comme celle du théorème 1 bis, puisqu'on peut appliquer le lemme 2 au groupe $G = V_I$.

2e cas $p = 0$. En utilisant, comme dans la démonstration du théorème de Koksma le 2e théorème de la moyenne, on trouve :

$$\left|\int_{D_0} \cos(2\pi\, k_0\, F_{m,n,0}(x_0))\, dx_0\right| \leq \frac{1}{\pi|k_0|} \max\left\{\frac{1}{F'_{m,n,0}(a)},\ \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)}\right\}$$

De même :

$$\left|\int_{D_0} \sin(2\pi\, k_0\, F_{m,n,0}(x_0))\, dx_0\right| \leq \frac{1}{\pi|k_0|} \max\left\{\frac{1}{F'_{m,n,0}(a)},\ \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)}\right\}.$$

D'où

$$\left|\int_{D_0} \exp(2i\pi\, k_0\, F_{m,n,0}(x_0))\, dx_0\right| \leq \frac{1}{\pi|k_0|} \max\left\{\frac{1}{F'_{m,n,0}(a)},\ \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)}\right\}$$

et

$$|i_{m,n}| \leq |\mathfrak{I}_{m,n}| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi|k_0|}\left(\prod_{p\in I^-} \text{mes } D_p\right) \max\left\{\frac{1}{F'_{m,n,0}(a)},\ \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)}\right\}.$$

Il en résulte, comme dans la démonstration de Koksma :

$$I_N \leq \frac{\text{mes } D}{N} + \frac{\sqrt{2}}{\pi|k|}\left(\prod_{p\in I^-} \text{mes } D_p\right) A_N$$

où $A_N \leq \frac{2}{N}(1 + \log N)$.

Soit $N_k = k^2$ $(k=1,2,\ldots)$. La série de terme général I_{N_k} converge. Il suffit alors d'appliquer le lemme 2, paragraphe 1.2 au groupe $G = V_I$: il en résulte :

$$|\sigma_{N_k}(x)| \to 0 \quad \text{quand } K \to \infty \quad \text{pour presque tout } x \text{ de } D.$$

La démonstration s'achève comme dans les cas déjà traités.

BIBLIOGRAPHIE

E. ARTIN [1] Algebraic numbers and algebraic functions.- Princeton, Princeton University, 1951 (multigraphié).

F. BERTRANDIAS [1] Sur une caractérisation de certains ensembles de nombres algébriques C.R. Acad. Sc. Paris t.258, 1964 p.1666-1668.

[2] Caractérisation des ensembles S_q par la répartition modulo 1 en p-adique, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 17, 1963/64 n° 11, 20 p.

[3] Eléments algébriques de l'algèbre $V_E(Q)$, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des Nombres, t.5, 1963/1964 n° 19, 15 p.

[4] Théorème de Koksma en p-adique, Séminaire Delange-Pisot Théorie des Nombres, t. 6, 1964/65 n° 3, 16 p.

[5] Ensembles d'unicité dans des produits de corps p-adiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des Nombres, t. 6 1964/65 n° 9,37 p.

N. BOURBAKI [1] Algèbre, Chapitres 4-5, 2e édition - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind. 1102 ; Bourbaki, 11).

[2] Algèbre, Chapitre 8. Paris, Hermann, 1958 (Act.scient. et ind. 1261 ; Bourbaki, 23).

C. CHABAUTY [1] Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques C.R. Acad. Sc. Paris t 231, 1950, p.465-466

J. CIGLER und G. HELMBERG [1] Neuere Entwicklungen in der Theorie der Gleichverteilung, Jahr. Deutsch. Math. Vereinig. t. 64, 1962 p. 1-50

J. DUFRESNOY et C. PISOT [1] Etudes de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé de nombres algébriques Ann Scient Ec Norm Sup t 72 1955 p. 69-92.-

E. HEWITT and K.A. ROSS [1] Abstract harmonic analysis. Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 115).

J.P. KAHANE et R. SALEM [1] Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

J.F.KOKSMA [1] Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins, Compositio Mathematica, t.2, 1935, p. 250-258.

S. LANG [1] Algebraic numbers (Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1964).

E. LUTZ [1] Sur les approximations diophantiennes linéaires P-adiques. Paris, Hermann, 1955 (Act.scient. et ind., 1224 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 12).

K. MAHLER [1] Lectures on diophantine approximations, Part 1. Ann Arbor, University of Notre-Dame, 1961.

C. PISOT [1] La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann reale Scuola Sup Pisa Serie 2, t 7, 1938, p.205-248.

[2] Sur quelques approximations rationnelles caractéristiques des nombres algébriques, C.R. Acad Sc Paris t 206, 1938; p. 1862-1864.

[3] Ensembles fermés de nombres algébriques et familles normales de fractions rationnelles, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 1418-1419.

[4] Familles normales de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Séminaire Dubreil-Pisot Algébre et Théorie des nombres, t. 16 1962/63, n° 14, 12 p.

[5] Une famille normale de fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 4 1962/63, n° 7, 6 p.

[6] Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques. Ann Scien Ec Norm Sup 3e série, t 81, 1964, p. 165-188.

W. RUDIN [1] Fourier analysis on groups. New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12).

R. SALEM [1] Sets of uniqueness and sets of multiplicity, Trans. Amer. Math. Soc. t 54, 1943, p. 218-228 ; t 56, 1944 p. 32-49.

[2] A remarkable class of algebraic integers, Duke Math J t 11 1944, p. 103-108.

[3] Power series with integral coefficients, Duke Math. J, t 12, 1945, p. 153-172.

[4] Algebraic numbers and Fourier analysis. Boston, D.C. Heath and Company, 1963 (Heath Mathematical Monographs).

R. SALEM et A. ZYMUND [1] Sur un théorème de Piatecki-Shapiro, C.R. Acad Sc Paris, t 240, 1955, p. 2040-2042.

J. TATE [1] Fourier Analysis in number field and Hecke's Zeta Function (Dissertation - Princeton 1950).

Joseph FLOCH, Maître-Imprimeur à Mayenne - 9-2-1966 - n°2506