

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Le théorème « $AF + BG$ » de Max Noether

Cours de l'institut Fourier, tome 14 (1979)

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1979__14__1_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE THEOREME "AF + BG" DE MAX NOETHER

Monique LEJEUNE-JALABERT

Le but de ces exposés est de montrer quelques résultats classiques sur les singularités de courbes planes (ou de courbes tracées sur une surface lisse) en utilisant la théorie de la dualité, tout particulièrement le théorème "AF + BG" de Max Noether (1870). Les notions de différentielles de lère espèce, de courbes adjointes qu'on trouve par exemple utilisées par Picard et Simart dans [9] s'introduisent très naturellement en examinant le comportement du Module dualisant de la courbe relativement au morphisme de normalisation.

Nous rappellerons d'abord l'énoncé du théorème de Noether, puis ce qu'il entend par voisinages infinitésimaux successifs d'un point sur une courbe.

THEOREME "AF + BG". - Soit C et D 2 courbes réduites dans le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ n'ayant pas de composantes irréductibles en commun. Soit $F=0$ et $G=0$ respectivement leurs équations homogènes dans $\mathbb{C}[X,Y,T]$. Soit Φ_j , $j = 1 \dots n$ les points d'intersection de C et D (i.e. ceux situés dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ainsi que dans les "voisinages infinitésimaux successifs"). Soit s_j (resp. r_j) la multiplicité de C (resp. D) au point Φ_j .

Alors l'équation homogène H d'une courbe projective plane E peut se mettre sous la forme $H = AF + BG$ si la multiplicité de E en Φ_j est supérieure ou égale à $r_j + s_j - 1$ pour tout j .

QUELQUES COMMENTAIRES.

■ Multiplicité. Soit Q un point de \mathbb{P}^2 sur C . L'anneau local de \mathbb{P}^2 en Q (vu comme espace analytique complexe) est défini ainsi : on choisit une carte affine de \mathbb{P}^2 auquel Q appartient. C'est par exemple celle où $T \neq 0$; un système de coordonnées globales sur cette carte est alors $x = X/T$, $y = Y/T$. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, Q}$ est l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage de Q sur cette carte. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, Q}$ est un anneau local, son idéal maximal $M_{\mathbb{P}^2, Q}$ étant engendré par $x - x(Q)$, $y - y(Q)$.

Si F est l'équation homogène de C , soit f l'image de F dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, Q}$. La multiplicité de C en Q est l'entier $r = \sup\{n, f \in (M_{\mathbb{P}^2, Q})^r\}$. Cet entier qui est défini ici en terme du plongement de C dans \mathbb{P}^2 dépend en fait du seul anneau local de C en Q , $\mathcal{O}_{C, Q} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, Q}/(f)$ (la multiplicité peut se définir en terme de polynôme de Hilbert-Samuel). Pour s'en donner une idée géométrique, disons que c'est aussi le nombre de points d'intersection au voisinage de Q de C avec une droite assez générale.

■ Point infiniment voisin, voisinages infinitésimaux successifs. Soit Q un point de \mathbb{P}^2 sur C . C possède un certain nombre de tangentes en Q au sens naïf. On appellera point infiniment voisin de Q dans le 1er voisinage infinitésimal, l'une quelconque de ces directions de tangente. Cette idée se formalise de la façon suivante : on construit $\pi : Z \rightarrow \mathbb{P}^2$ un morphisme propre tel que π induise un isomorphisme entre $Z - \pi^{-1}(Q)$ et $\mathbb{P}^2 - Q$ et tel que $\pi^{-1}(Q) \simeq \mathbb{P}^1(C)$ ensemble des droites passant par Q , appelé éclatement de Q dans \mathbb{P}^2 . Pour fixer les idées, supposons que Q est le point de coordonnées $x = 0$, $y = 0$ sur l'ouvert de \mathbb{P}^2 , $T \neq 0$. Explicitement $Z|_{\pi^{-1}(T \neq 0)}$ est recouvert par 2 ouverts affines U_1, U_2 chacun isomorphe à \mathbb{C}^2 , U_1 étant repéré par des coordonnées (y', x') de telle sorte que

$$x \circ \pi = x' \quad , \quad y \circ \pi = y'x' \quad ;$$

U_2 étant repéré par des coordonnées (y'', x'') de telle sorte que

$$x \circ \pi = y'' x'' , \quad y \circ \pi = y'' ;$$

les 2 ouverts se recollant en posant $y' = 1/x''$, $x' = x'' y''$. On remarque que $M_{\mathbb{Q}, \mathbb{P}^2}$ se relève à Z en un Idéal inversible engendré par x' sur U_1 et y'' sur U_2 . C'est pourquoi on désigne généralement $\pi^{-1}(\mathbb{Q})$ sous le nom de diviseur exceptionnel. On appelle alors transformée totale de C par π l'image réciproque de C par π .

Si $f(x, y)$ est l'équation de C dans la carte affine de \mathbb{P}^2 qui nous intéresse et écrivant $f = f_r + f_{r+1} + \dots$ où f_i est un polynôme homogène de degré i en x, y et où r désignant la multiplicité de C en \mathbb{Q} , $f_r \neq 0$, celle-ci est donc définie sur U_1 par

$$\begin{aligned} f_r(x', x'y') + f_{r+1}(x', x'y') + \dots &= x'^r f_r(1, y') + x'^{r+1} f_{r+1}(1, y') + \dots \\ &= x'^r [f_r(1, y') + x' f_{r+1}(1, y') + \dots] \end{aligned}$$

et définie sur U_2 par

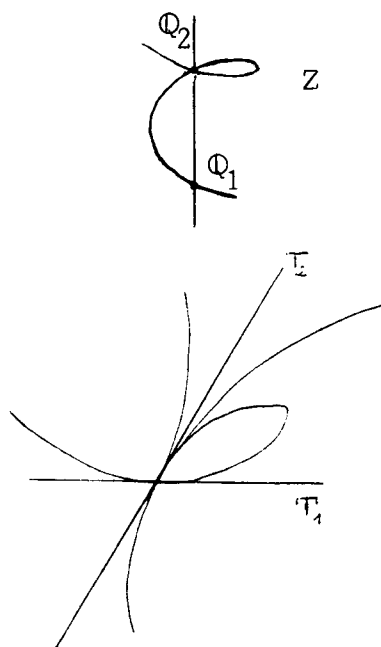
$$f_r(x'' y'', y'') + f_{r+1}(x'' y'', y'') + \dots = y''^r [f_r(x'', 1) + y'' f_{r+1}(x'', 1) + \dots] .$$

On remarque que $\pi^{-1}(C)$ est composé de 2 morceaux, r fois le diviseur exceptionnel et autre chose. C'est cet autre morceau qu'on appelle transformée stricte de C par l'éclatement π . Notons le C' . C' est donc défini sur U_1 par l'équation $f_r(1, y') + x' f_{r+1}(1, y') + \dots$, sur U_2

par l'équation $f_r(x'', 1) + y'' f_{r+1}(x'', 1) + \dots$.

Le cône des tangentes en \mathbb{Q} à C étant défini par le polynôme homogène $f_r(x, y) = 0$, on s'aperçoit donc tout de suite que C' coupe $\pi^{-1}(\mathbb{Q})$ en des points $\mathbb{Q}_1 \dots \mathbb{Q}_r$ de $\pi^{-1}(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{P}^1$ correspondant aux droites de \mathbb{C}^2 dans le cône des tangentes.

Les points $\mathbb{Q}_1, \dots, \mathbb{Q}_r$ sont alors dit les points infiniment voisins de \mathbb{Q} sur C dans le premier voisinage infinitésimal.



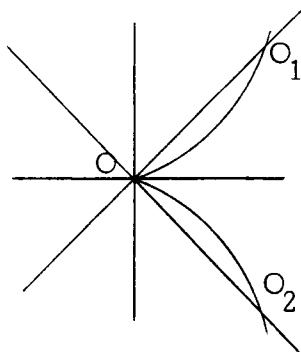
Evidemment, il se peut que parmi ces points certains soient des points singuliers de C' . Si, par exemple Q_1 est singulier, on construit au-dessus de Z un espace Z_1 en éclatant Q_1 dans Z et la transformée stricte de C' , etc... Au bout d'un nombre fini N de telles opérations, la transformée stricte $C^{(N)}$ de C ne contiendra plus de points singuliers. On dit alors qu'on a obtenu une désingularisation de C . Ce théorème a été montré pour la 1ère fois également par Max Noether. On sait par ailleurs que $C^{(N)} \rightarrow C$ est la normalisation de C . Si Q est un point de C , Q_1, \dots, Q_s les points de $C^{(N)}$ au-dessus de Q , l'anneau $\bigoplus_{i=1}^s \mathcal{O}_{C^{(N)}, Q_i}$ est la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_{C, Q}$ dans son anneau total de fractions K (localisé de $\mathcal{O}_{C, Q}$ en la partie multiplicative des éléments non diviseurs de zéro) qui se trouve être isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^s K_i$, K_i étant le corps des fractions de $\mathcal{O}_{C_i, Q}$ où $C = C_1 \cup \dots \cup C_s$ est une décomposition du germe de C en Q en ses composantes analytiquement irréductibles. C'est aussi l'ensemble des $f \in K$ qui sont bornées au voisinage de Q .

■ Points d'intersection de 2 courbes dans les voisinages infinitésimaux successifs. Soient donc C et D 2 courbes réduites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et Q un point commun à C et D . Il est possible que C et D aient également au point Q une tangente commune. S'il en est ainsi et si $Z \rightarrow \mathbb{P}^2$ est l'éclatement de Q dans \mathbb{P}^2 , les transformées strictes respectives C' et D' de C et D vont passer par le point Q_1 de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ correspondant à cette direction de droite. On dira que Q_1 est un point d'intersection de C et D dans le 1er voisinage infinitésimal.

Le théorème de désingularisation précédent appliqué à la courbe réductible $C \cup D$ permet de montrer qu'il existe un nombre fini seulement de points d'intersection de C et D dans les voisinages infinitésimaux successifs; si Q_1, \dots, Q_N désignent ces points et si on désigne par $\text{mult}_{Q_i} C$ la multiplicité du point Q_i sur la courbe transformée stricte de C dans l'espace éclaté Z_i correspondant, on a alors :

THEOREME DE BEZOUT. - degré $C \cdot$ degré $D = \sum_i \text{mult}_{Q_i} C \cdot \text{mult}_{Q_i} D$.

■ Un exemple. Considérons la courbe C définie par $F = TY^2 - X^3$ et la courbe D définie par $G = Y^2 - X^2$. C est une cubique (courbe de degré 3) ayant au point $O = (0,0,1)$ un point singulier de multiplicité 2 (cusp), non singulière ailleurs. D est une conique (courbe de degré 2) ayant au point $O = (0,0,1)$ un point singulier de multiplicité 2 (singularité ordinaire) non singulière ailleurs. C et D ont 3 points d'intersections dans \mathbb{P}^2 , $O = (0,0,1)$, $O_1 = (1,1,1)$, $O_2 = (1,-1,1)$, aucun dans des voisinages infinitésimaux.



Pour qu'une courbe E de degré N ait une équation $H = AF + BG$ où A et B sont homogènes de degré $N-3$ et $N-2$ respectivement, il est nécessaire que E passe par O, O_1, O_2 ; il est nécessaire également que E ait en O une multiplicité supérieure ou égale à 2. On va voir que cela ne suffit pas.

On va montrer qu'il existe une cubique passant par O_1, O_2 et O avec multiplicité supérieure ou égale à 2 dont l'équation H ne s'écrit pas $AF + BG$. En effet, l'équation d'une cubique passant par O avec multiplicité ≥ 2 est

$$H = a_1 X^3 + a_2 X^2 Y + a_3 X Y^2 + a_4 Y^3 + T(b_1 X^2 + b_2 X Y + b_3 Y^2).$$

Ecrire qu'elle passe par O_1 et O_2 impose les 2 conditions supplémentaires :

$$\begin{aligned} \text{et} \quad & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ & a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + b_1 - b_2 + b_3 = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des cubiques passant par O avec multiplicité ≥ 2 et O_1 et O_2 est donc un système linéaire dépendant de 5 paramètres indépendants (car \mathbb{C} est de caractéristique $\neq 2$)

$$H = a_1 X^3 + a_2 X^2 Y + a_3 X Y^2 + a_4 Y^3 + T(b_1 X^2 - (a_2 + a_4) X Y - (a_1 + a_3 + b_1) Y^2) = 0.$$

Par contre l'ensemble des cubiques d'équation

$$AF + BG = \lambda(TY^2 - X^3) + (\mu_1 X + \mu_2 Y + \mu_3 T)[Y^2 - X^2]$$

est un système linéaire contenu dans le précédent et dépendant seulement de 4 paramètres indépendants. Ils ne peuvent donc coïncider.

Par contre, le système linéaire des cubiques passant par O avec multiplicité $3 = \text{mult}_O C + \text{mult}_O D - 1$, O_1 et O_2 dépend de 2 paramètres indépendants (c'est $a_1 X^3 + a_2 X^2 Y - a_1 X Y^2 - a_2 Y^3 = 0$) de même que celui des cubiques $AF + BG$ ayant multiplicité 3 en O , c'est $(\mu_1 X + \mu_2 Y)(Y^2 - X^2)$. Ces 2 systèmes coïncident donc.

§ 1. MODULE DUALISANT

1.1. DEFINITION. - Soit X un espace analytique compact de dimension n ; un Module dualisant est la donnée d'un \mathcal{O}_X -Module cohérent ω_X et d'un isomorphisme entre les foncteurs (de la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules cohérents dans celle des \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie) $\mathcal{F} \mapsto H^n(X, \mathcal{F})^*$ et $\mathcal{F} \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X)$.

On appelle trace $\text{tr} : H^n(X, \omega_X) \rightarrow \mathbb{C}$ l'élément de $H^n(X, \omega_X)^*$ correspondant à l'identité dans $\text{Hom}(\omega_X, \omega_X)$.

1.2. Remarque. - Si ω_X^1 et ω_X^2 sont des \mathcal{O}_X -Modules cohérents apparaissant dans la donnée de 2 Modules dualisants, il existe un unique isomorphisme de \mathcal{O}_X -Modules $\varphi : \omega_X^1 \rightarrow \omega_X^2$ tel que $\text{tr}_1 = \text{tr}_2 \circ H^n(\varphi)$. En effet, φ est l'image de tr_1 dans l'isomorphisme $H^n(X, \omega_X^1)^* \rightarrow \text{Hom}(\omega_X^1, \omega_X^2)$ provenant de la structure de Module dualisant attachée à ω_X^2 .

1.2.1. Exemple. - Si X est une variété non singulière de dimension n , on se reportera à [7] pour voir comment Ω_X^n peut être équipé d'une structure de Module dualisant.

1.2.2. Exemple. - Si X est un sous-espace analytique d'une variété analytique compacte V , n désignant la dimension de V et r la codimension de X dans V , $\text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^r(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n)$ peut être équipé d'une structure de Module dualisant.

Démonstration. - Soit $p = n - r$ la dimension de X ; il s'agit de construire un isomorphisme entre les foncteurs $H^p(X, \cdot)^*$ et $\text{Hom}(\cdot, \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^r(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n))$. Soit $i : X \rightarrow V$ l'immersion (fermée) de X dans V ; on sait que pour tout \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{F} , $i_*(\mathcal{F})$ est un \mathcal{O}_V -Module cohérent et que

$$H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(V, i_*(\mathcal{F}))$$

V étant non singulière, Ω_V^n a été muni non seulement d'une structure de Module dualisant, mais donne lieu à un isomorphisme de dualité en toute dimension ;

$$H^p(V, i_*(\mathcal{F}))^* \simeq \text{Ext}^{n-p}(V; i_*(\mathcal{F}), \Omega_V^n).$$

Il s'agit donc de construire un isomorphisme entre les foncteurs $\text{Ext}^{n-p}(V; i_*(\cdot), \Omega_V^n)$ et $\text{Hom}(\cdot, \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^r(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n))$.

Soit $'\mathcal{D}^n, \cdot'$ la résolution de Dolbeault distribution de Ω_V^n . Ce n'est pas une résolution injective de Ω_V^n , mais les $'\mathcal{D}^n, \cdot'$ sont à fibres injectives et on sait que $\text{Ext}^r(V; i_*(\mathcal{F}), \Omega_V^n) = H^r(\text{Hom}(V; i_*(\mathcal{F}), '\mathcal{D}^n, \cdot'))$ pour tout \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{F} .

On remarque alors que si $i_*(\mathcal{F}) \rightarrow '\mathcal{D}^n, \cdot'$ est un morphisme, identifiant $'\mathcal{D}^n, \cdot'$ à $\text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V, '\mathcal{D}^n, \cdot')$, le morphisme $i_*(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V, '\mathcal{D}^n, \cdot')$ qu'on en déduit se factorise en fait au travers de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, '\mathcal{D}^n, \cdot')$. On vérifie que l'application $\text{Hom}(V; i_*(\mathcal{F}), '\mathcal{D}^n, \cdot') \rightarrow \text{Hom}(X; \mathcal{F}, \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, '\mathcal{D}^n, \cdot'))$ qui en découle est un isomorphisme.

$\text{Ext}^r(V; i_*(\mathcal{F}), \Omega_V^n)$ apparaît donc comme le r -ième groupe de cohomologie du complexe $\text{Hom}(X; \mathcal{F}, \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, '\mathcal{D}^n, \cdot'))$.

Pour simplifier, posons $\mathcal{J}^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{S}^{n,*})$. Le j -ième groupe de cohomologie de ce complexe, \mathbb{H}^j , n'est rien d'autre que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^j(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n)$. En effet, pour tout point x de X , le germe en x de \mathbb{H}^j est le j -ième groupe de cohomologie de \mathcal{J}_x^* qui, \mathcal{O}_X étant cohérent, s'identifie à $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{V,x}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{S}_x^{n,*})$. Mais alors $\mathcal{S}_x^{n,*}$ étant une résolution injective de $\Omega_{V,x}^n$, cette cohomologie est $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,x}}^j(\mathcal{O}_{X,x}, \Omega_{V,x}^n)$ qui est aussi le germe en x de $\text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^j(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n)$ toujours car \mathcal{O}_X est cohérent.

Maintenant, V étant non singulier, $\Omega_{V,x}^n$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{V,x}$. On sait que $\text{codim } \mathcal{O}_{X,x} = n-p = r = \inf j : \text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,x}}^j(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{V,x}) \neq 0$ [8]. Il s'ensuit que $\mathbb{H}^j = 0$, $0 \leq j \leq r-1$.

Soit $\mathcal{B}_j = \text{Im } \mathcal{J}^{j-1} \rightarrow \mathcal{J}^j$. Nous allons montrer que \mathcal{B}_j est à fibre injective, $1 \leq j \leq r$, par récurrence sur j . Puisque $\mathbb{H}^0 = 0$, $\mathcal{J}^0 \rightarrow \mathcal{J}^1$ est injectif et $\mathcal{B}_1 \simeq \mathcal{J}^0$. C'est donc vrai car $\mathcal{J}_x^0 = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{V,x}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{S}_x^{n,0})$ et $\mathcal{S}_x^{n,0}$ est injectif. Supposons \mathcal{B}_{j-1} à fibre injective. Puisque $\mathbb{H}^{j-1} = 0$, $\mathcal{J}_{j-1} = \text{Ker } \mathcal{J}^{j-1} \rightarrow \mathcal{J}^j = \mathcal{B}_{j-1}$ a la même propriété. Par définition, $0 \rightarrow \mathcal{J}_{j-1} \rightarrow \mathcal{J}^{j-1} \rightarrow \mathcal{B}_j \rightarrow 0$ est une suite exacte. $\mathcal{J}_{j-1,x}$ étant un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module injectif est facteur direct dans \mathcal{J}_x^{j-1} . On peut donc écrire $\mathcal{J}_x^{j-1} \simeq \mathcal{J}_{j-1,x} \oplus \mathcal{B}_{j,x}$, ce qui entraîne \mathcal{J}_x^{j-1} étant lui-même injectif que $\mathcal{B}_{j,x}$ l'est.

Nous allons maintenant montrer que \mathcal{F} étant un \mathcal{O}_X -Module cohérent, $H^k(X, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j)) = 0$, $\forall k \geq 1$, $1 \leq j \leq r$ par récurrence sur j ; $\mathcal{B}_1 = \mathcal{J}^0 = \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{S}^{n,0})$, $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{J}^0) \simeq \text{Hom}(i_*(\mathcal{F}), \mathcal{S}^{n,0})$; $\mathcal{S}^{n,0}$ étant fin, $\text{Hom}(i_*(\mathcal{F}), \mathcal{S}^{n,0})$ l'est aussi et sa cohomologie est nulle si $k \geq 1$.

De la suite exacte, $0 \rightarrow \mathcal{B}_{j-1} \rightarrow \mathcal{J}^{j-1} \rightarrow \mathcal{B}_j \rightarrow 0$, on déduit une suite exacte $0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{j-1}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{J}^{j-1}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{j-1})$. \mathcal{F} étant cohérent, et \mathcal{B}_{j-1} étant à fibre injective, $\text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{j-1}) = 0$.

On a donc une longue suite exacte de cohomologie :

$$H^k(X, \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{j-1})) \rightarrow H^k(X, \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j)) \rightarrow H^{k+1}(X, \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{j-1})) .$$

Le premier terme est nul pour la même raison que ci-dessus, le dernier par hypothèse de récurrence.

On en déduit que $\text{Ext}^1(X, \mathcal{F}, \mathcal{B}_j) = 0$, $1 \leq j \leq r-1$. Il existe en effet une suite spectrale pour laquelle $E_2^{p,q} = H^p(X, \text{Ext}^q(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j))$ et qui converge vers $\text{Ext}^*(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j)$. \mathcal{F} étant cohérent et \mathcal{B}_j étant à fibre injective, toujours le même argument montre que $\text{Ext}^q(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j) = 0$ si $q \geq 1$ et donc $E_2^{p,q} = 0$. Or $E_2^{p,0} = H^p(X, \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j)) = 0$ si $p \geq 1$. On a donc $E_2^{p,q} = 0$, si $p \neq 0$, $q \neq 0$, $E_2^{0,0} = \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j)$ et $\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j) = 0$ si $i \geq 1$. Des 2 suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_{r-1} \rightarrow \mathcal{I}^{r-1} \rightarrow \mathcal{B}_r \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_r \rightarrow \mathcal{L}_r \rightarrow \mathcal{H}^r \rightarrow 0$$

on en déduit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{r-1}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{r-1}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_r) & \rightarrow & \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{r-1}) \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & 0 \\ & \parallel & & & & & \\ & \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{L}_{r-1}) & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_r) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{L}_r) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{H}^r) & \rightarrow & \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{B}_r) \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

donc $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_r)$ est l'image de $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{r-1}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^r)$ et $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{H}^r)$ est le r -groupe de cohomologie de $\text{Hom}(X, \mathcal{F}, \mathcal{I}^\bullet)$. Ainsi $\text{Ext}^f(V, i_*(\mathcal{F}), \Omega_V^n)$ s'identifie à $\text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{F}, \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^f(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n))$.

1.3. DEFINITION. - Dans la situation de l'exemple 1.2.2, soit x un point de X , y_1, \dots, y_n un système de coordonnées de V au voisinage de x et supposons que l'idéal définissant X dans V au voisinage de x soit engendré par une suite régulière f_1, \dots, f_r . Le complexe de Koszul associé à cette suite fournit alors une résolution libre de $\mathcal{O}_{X,x}$ qui permet de calculer $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}^f(\mathcal{O}_{X,x}, \Omega_{V,x}^n)$. Précisément, c'est $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{V,x}}(\wedge^r \mathcal{O}_{V,x}^r, \Omega_{V,x}^n)$ modulo

$\delta(\text{Hom}_{\mathcal{O}_{V,x}}(\wedge^{r-1} \mathcal{O}_{V,x}^r, \Omega_{V,x}^n))$. Si $\omega \in \Omega_{V,x}^n$ nous noterons $\left[\begin{smallmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_r \end{smallmatrix} \right]$ l'élément de $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}^r(\mathcal{O}_{X,x}, \Omega_{V,x}^n)$ provenant de $u \in \text{Hom}(\wedge^r \mathcal{O}_{V,x}^r, \Omega_{V,x}^n)$ défini par $u(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) = \omega$.

1.4. PROPOSITION. - Toujours dans la situation de l'exemple 1.2.2, si X est non singulier, Ω_X^p et $\text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^r(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n)$ étant équipés des structures de Module dualisant décrits en 1.2.1 et 1.2.2, l'unique isomorphisme $\Omega_X^p \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^r(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n)$ commutant aux traces est celui dont le germe en x envoie $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{i_p}$ sur

$$\frac{1}{(2i\pi)^r} \left[\begin{array}{c} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p} \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r \\ f_1, \dots, f_r \end{array} \right] = \frac{(-1)^\sigma}{(2i\pi)^r} \det \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(y_{j_1}, \dots, y_{j_r})} \left[\begin{array}{c} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ f_1, \dots, f_r \end{array} \right]$$

où $\{j_1, \dots, j_r\}$ est tel que $\{i_1, \dots, i_p\} \cup \{j_1, \dots, j_r\}$ est une permutation \mathfrak{S} de $\{1 \dots n\}$ de signature σ .

L'application inverse de cet isomorphisme est appelé résidu.

Démonstration. - Il s'agit tout d'abord, revenant à la définition de la structure de Module dualisant sur Ω_X^p d'expliciter la trace, puis de la relever en une forme linéaire sur $H^p(V, i_* \Omega_X^p)$. On détermine ensuite un élément de $\text{Hom}(i_* \Omega_X^p, \mathcal{E}_V^{n, n-p})$ dont la classe dans $\text{Ext}^{n-p}(i_* \Omega_X^p, \Omega_V^n)$ lui correspond. On en déduit un élément de $\text{Hom}(i_* \Omega_X^p, \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}_V^{n, n-p}))$. Un diagramme chasing dans le double-complexe obtenu en écrivant le complexe de Koszul associé à la suite f_1, f_2, \dots, f_r pour le complexe $\mathcal{E}_V^{n, \cdot}$ permet de le transférer en un élément de $\text{Hom}(\Omega_X^p, \text{Hom}(\wedge^r \mathcal{O}_V^r, \Omega_V^n))$.

1) On sait [7] que $\mathcal{E}_X^{p,q}$ étant des \mathcal{O}_X -Modules plats, $H^p(X, \Omega_X^p)$ est le p -ième groupe de cohomologie de $\Gamma(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{E}_X^{0, \cdot})$. $\text{Hom}(\Omega_X^p, \Omega_X^p)$ est le 0-ième groupe de cohomologie de $\text{Hom}(X; \Omega_X^p, \mathcal{E}_X^{p, \cdot})$. L'accouplement provient de

$$\Gamma(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{E}_X^{0,p}) \times \text{Hom}(X; \Omega_X^p, \mathcal{E}_X^{p,0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle \sum w_X^p \otimes \eta_X^{0,p}, \varphi \rangle \mapsto \sum \langle \varphi(w_X^p), \eta_X^{0,p} \rangle.$$

L'identité de Ω_X^p correspond donc à la forme linéaire sur $H^p(X, \Omega_X^p)$ qui envoie la classe de $\sum \omega_X^p \otimes \eta_X^{0,p}$ sur $\sum \int_X \omega_X^p \wedge \eta_X^{0,p}$ où ω_X^p est vu comme section de $\mathcal{E}_X^{p,0}$.

2) $H^p(V, i_* \Omega_X^p)$ est le p-ième groupe de cohomologie de $\Gamma(V, i_* \Omega_X^p \otimes \mathcal{E}_V^{0,\cdot})$. La trace est donc la forme linéaire qui envoie la classe de $\sum \omega_X^p \otimes \eta_V^{0,p}$ sur $\int_X \omega_X^p \wedge \eta_V^{0,p} |_X$.

3) L'élément de $\text{Hom}(i_* \Omega_X^p, \mathcal{E}_V^{n,n-p})$ qui fait correspondre à ω_X^p une section de $i_* \Omega_X^p$, le courant $H^{n,n-p}(\omega_X^p)$ défini par

$$\langle H^{n,n-p}(\omega_X^p), \eta_V^{0,p} \rangle = \int_X \omega_X^p \wedge \eta_V^{0,p} |_X$$

s'envoie dans $\text{Ext}^{n-p}(i_* \Omega_X^p, \Omega_V^n)$ puis $H^p(V, i_* \Omega_X^p)^*$ sur la trace.

4) Soit x un point de X . Cet homomorphisme fait correspondre à $\omega_X^p \in \Omega_{X,x}^p$ l'élément de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{V,x}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{E}_{V,x}^{n,n-p})$ qui à $g \in \mathcal{O}_{X,x}$ fait correspondre le germe de courant $H^{n,n-p}(\omega_X^p)$ dont un représentant sur un ouvert U de V contenant x assez petit est défini par

$$\langle H, \eta_U^{0,p} \rangle = \int_{U \cap X} g \omega_X^p \wedge \eta_U^{0,p} |_X.$$

5) Considérons le double complexe :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}_{V,x}, \mathcal{E}_{V,x}^{n,0}) & \rightarrow & \dots & \text{Hom}(\Lambda^{r-1} \mathcal{O}_{V,x}^r, \mathcal{E}_{V,x}^{n,0}) & \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(\Lambda^r \mathcal{O}_{V,x}^r, \mathcal{E}_{V,x}^{n,0}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & \downarrow d'' & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}_{V,x}, \mathcal{E}_{V,x}^{n,1}) & \rightarrow & \dots & \text{Hom}(\Lambda^{r-1} \mathcal{O}_{V,x}^r, \mathcal{E}_{V,x}^{n,1}) & \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^r \mathcal{O}_{V,x}^r, \mathcal{E}_{V,x}^{n,1}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}_{V,x}, \mathcal{E}_{V,x}^{n,2}) & \rightarrow & \dots & \text{Hom}(\Lambda^{r-1} \mathcal{O}_{V,x}^r, \mathcal{E}_{V,x}^{n,2}) & \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^r \mathcal{O}_{V,x}^r, \mathcal{E}_{V,x}^{n,2}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \\ & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}_{V,x}, \mathcal{E}_{V,x}^{n,r}) & \rightarrow & \dots & \text{Hom}(\Lambda^{r-1} \mathcal{O}_{V,x}^r, \mathcal{E}_{V,x}^{n,r}) & \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^r \mathcal{O}_{V,x}^r, \mathcal{E}_{V,x}^{n,r}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \\ & & \vdots & & & \vdots & \vdots \end{array}$$

Dans ce double-complexe, les lignes n'ont de cohomologie qu'en dimension 0 car $\mathcal{S}_{V,X}^{n,k}$ est un module injectif et c'est $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{V,X}}(\mathcal{O}_{X,X}, \mathcal{S}_{V,X}^{n,k})$; les colonnes n'ont de cohomologie qu'en dimension 0 car $\Lambda^k \mathcal{O}_{V,X}$ est un $\mathcal{O}_{V,X}$ -module libre et c'est $\text{Hom}(\Lambda^k \mathcal{O}_{V,X}, \Omega_{V,X}^n)$.

Pour fixer les idées, supposons que $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p$ et soit $u \in \text{Hom}(\Lambda^r \mathcal{O}_{V,X}^r, \Omega_{V,X}^n)$ défini par $u(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r$. Nous allons voir que cet élément se transfère dans $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{V,X}}(\mathcal{O}_{X,X}, \mathcal{S}_{V,X}^{n,r})$ en l'application qui à 1 fait correspondre le courant défini par

$$(2i\pi)^r \int_X (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p) |X \wedge \eta_V^{0,p}|_X.$$

En effet, on remarque que $u = \delta v_1$ où $v_1 \in \text{Hom}(\Lambda^{r-1} \mathcal{O}_{V,X}^r, \mathcal{S}_{V,X}^{n,0})$ est tel que

$$\begin{aligned} \langle v_1(e_2 \wedge \dots \wedge e_r), \eta^{0,n} \rangle &= \langle v_1 \frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r}{f_1}, \eta^{0,n} \rangle \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|f_1| \geq \epsilon} \frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r \wedge \eta}{f_1} \end{aligned}$$

$v_1(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{r-1}}) = 0$ si j_1, \dots, j_{r-1} n'est pas une permutation de $2, \dots, r$.

On remarque également que $u_1 = d'' v_1 \in \text{Hom}(\Lambda^{r-1} \mathcal{O}_{V,X}^r, \mathcal{S}_{V,X}^{n,1})$ est tel que

$$\begin{aligned} \langle u_1(e_2 \wedge \dots \wedge e_r), \eta^{0,n-1} \rangle &= \langle \text{Res} \frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r}{f_1}, \eta^{0,n-1} \rangle \\ &\stackrel{\text{def}}{=} -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|f_1| = \epsilon} \frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r \wedge \eta^{0,n-1}}{f_1} \\ &= (-1)^{p+1} (2i\pi) \int_{f_1=0} (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_r) |f_1=0 \wedge \eta^{0,n-1}|_{f_1=0} \end{aligned}$$

$u_1(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{r-1}}) = 0$ si j_1, \dots, j_{r-1} n'est pas une permutation de $2, \dots, r$.

Il suffit en effet de vérifier que si $\eta \in \mathcal{E}_{V,x}^{0,n-1}$ et est à support compact dans un voisinage assez petit de x ,

$$\begin{aligned} \langle d'' \text{vp} \left(\frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r}{f_1} \right), \eta \rangle &= \\ &= (-1)^{p+1} (2i\pi) \int_{f_1=0} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_r \big|_{f_1=0} \wedge \eta \big|_{f_1=0} . \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \langle d'' \text{vp} \left(\frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r}{f_1} \right), \eta \rangle &= - \langle \text{vp} (\quad), d'' \eta \rangle = \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|f_1| \geq \epsilon} \frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r \wedge d'' \eta}{f_1} . \end{aligned}$$

Or f_1 étant une fonction holomorphe,

$$d \left[\frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r \wedge \eta}{f_1} \right] = \frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r \wedge d'' \eta}{f_1} .$$

En utilisant le théorème de Stokes, on trouve donc

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|f_1| = \epsilon} \frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r \wedge \eta}{f_1} .$$

Le sous-espace X de V défini par f_1, \dots, f_r au voisinage de x étant non singulier de codimension r , on peut trouver un système de coordonnées sur V dont les r -premières sont f_1, \dots, f_r . Nous appellerons f_{r+1}, \dots, f_n les suivantes. On a alors en posant $f_1 = \rho e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \int_{|f_1| = \epsilon} \frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r \wedge \eta}{f_1} &= \int_0^{2\pi} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge i d\theta \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_r \wedge \eta \\ &= i \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=r+1}^n \frac{\partial y_1}{\partial f_j} df_j \right) \wedge \dots \wedge d\theta \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_r \wedge \left(\varphi_1(\dots, f_j, \bar{f}_j, \dots) d\bar{f}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{f}_n + \dots \right) \end{aligned}$$

où $\eta = \sum \varphi_k d\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{f}_k} \wedge \dots \wedge d\bar{f}_n$.

Le domaine d'intégration étant compact, et toutes les fonctions considérées C^∞ , pour calculer la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ de cette intégrale, il suffit d'invertir, c'est donc :

$$\begin{aligned}
 & i \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=r+1}^n \frac{\partial y_1}{\partial f_j} (0, f_2, \dots, f_n) df_j \right) \wedge \dots \wedge d\theta \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_r \wedge (\varphi_1(0, 0, f_2, \bar{f}_2) d\bar{f}_r \wedge \dots \wedge d\bar{f}_n + \dots) \\
 &= (-1)^p (2i\pi) \int \left(\sum_{j=r+1}^n \frac{\partial y_1}{\partial f_j} (0, f_2, \dots, f_n) df_j \right) \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_r \wedge (\varphi_1(0, 0, f_2, \bar{f}_2, \dots) d\bar{f}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{f}_r + \dots) \\
 &= (-1)^p (2i\pi) \int_{f_1=0} (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_r) |_{f_1=0} \wedge \eta |_{f_1=0}
 \end{aligned}$$

par définition de la restriction des formes à l'espace $f_1=0$.

On trouve ensuite $v_2 \in \text{Hom}(\wedge^{r-2} \mathcal{O}_{V,X}^r, \mathcal{E}_{V,X}^{n,1})$ tel que $u_1 = \delta v_2$,

$$v_2(e_3 \wedge \dots \wedge e_r) = \text{vp}(u_1/f_2)$$

c'est-à-dire

$$\langle \text{vp}(u_1/f_2), \eta^{0,n-1} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|f_2| \geq \varepsilon, f_1=0} (2i\pi) \frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_r |_{f_1=0} \wedge \eta |_{f_1=0}}{f_2}$$

$v_2(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{r-2}}) = 0$ si j_1, \dots, j_{r-2} n'est pas une permutation de $3, \dots, r$. Finalement, on trouve $u_r \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{V,X}, \mathcal{E}_{V,X}^{n,r})$ tel que

$$\langle u_r(1), \eta^{0,p} \rangle = (2i\pi)^r \int_{f_1=0, f_2=0, \dots} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p |X \wedge \eta^{0,p} |_X.$$

En comparant 4) et 5), on trouve donc le résultat annoncé.

§ 2. MODULE DUALISANT ET MORPHISME FINI

2.1. PROPOSITION. - Soit X un espace analytique compact de dimension n et soit ω_X un \mathcal{O}_X -Module cohérent équipé d'une structure de Module dualisant. Soit $\pi : Z \rightarrow X$ un morphisme fini surjectif. Alors $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)$ (vu comme \mathcal{O}_Z -Module) peut-être équipé d'une structure de Module dualisant.

Démonstration. - Il s'agit de construire un isomorphisme fonctoriel entre $\mathcal{F} \mapsto H^n(Z, \mathcal{F})^*$ et $\mathcal{F} \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X))$ où \mathcal{F} est un \mathcal{O}_Z -Module cohérent.

π étant un morphisme fini est à la fois propre et de Stein. \mathcal{F} étant un \mathcal{O}_Z -Module cohérent, $\pi_* \mathcal{F}$ est donc un \mathcal{O}_X -Module cohérent et $H^n(Z, \mathcal{F}) \simeq H^n(X, \pi_* \mathcal{F})$; ω_X étant équipé d'une structure de Module dualisant, un isomorphisme fonctoriel entre $H^n(X, \pi_* \mathcal{F})$ et $\text{Hom}(\pi_* \mathcal{F}, \omega_X)$ est donné.

Il reste donc à comparer $\text{Hom}(\pi_* \mathcal{F}, \omega_X)$ et $\text{Hom}(\mathcal{F}, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X))$. Or comment construire un homomorphisme global entre $\pi_* \mathcal{F}$ et ω_X ?

On choisit un recouvrement fini de X par des ouverts de Stein U_i et on construit des éléments de $\text{Hom}(\mathcal{F}(\pi^{-1}(U_i)), \omega_X(U_i))$ qui se recollent. On remarque alors que $\text{Hom}(\mathcal{F}(\pi^{-1}(U_i)), \omega_X(U_i))$ est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}(\mathcal{F}(\pi^{-1}(U_i)), \text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U_i)}(\pi_* \mathcal{O}_Z(U_i), \omega_X(U_i)))$. En effet si φ est un élément du premier, on peut lui faire correspondre $\tilde{\varphi}$ tel que si $f \in \mathcal{F}(\pi^{-1}(U_i))$, $\tilde{\varphi}(f)$ envoie $g \in \mathcal{O}_Z(\pi^{-1}(U_i))$ sur $\varphi(gf)$.

π étant toujours Stein, on obtient ainsi finalement un homomorphisme global entre \mathcal{F} et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)$.

2.1.1. DEFINITION. - Les hypothèses sont celles de 2.1. Si ω_Z est un \mathcal{O}_Z -Module cohérent équipé d'une structure de Module dualisant, on désignera par $\text{Tr } \pi : \pi_* \omega_Z \rightarrow \omega_X$ l'homomorphisme composé de $\pi_* \omega_Z \rightarrow \pi_*(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X))$ obtenu à partir de l'unique isomorphisme commutant à la trace et de $\pi_*(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)) \rightarrow \omega_X$.

2.2. PROPOSITION. - Soit $\pi : Z \rightarrow X$ un morphisme fini surjectif et $i : X \rightarrow V$ une immersion fermée. On suppose Z et V compacts et non singuliers. p désignant la dimension de Z et de X , n celle de V et $r = n - p$ la codimension de X dans V , Ω_Z^p et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^r(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n))$, étant équipés des structures

de Module dualisant décrits en 1.2.1, 1.2.2 et 2.1, l'unique isomorphisme $\Omega_Z^p \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^r(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n))$ commutant aux traces est celui dont le germe en $z \in Z$ où π est un isomorphisme local, y_1, \dots, y_n étant un système de coordonnées locales de V au voisinage de $i \circ \pi(z)$ et f_1, \dots, f_r étant un système de générateurs de l'idéal définissant X dans V au voisinage de $i \circ \pi(z)$, envoie $d(y_{i_1} \circ i \circ \pi) \wedge \dots \wedge d(y_{i_p} \circ i \circ \pi)$ sur le $\mathcal{O}_{X, \pi(z)}$ -homomorphisme qui à $g \in \mathcal{O}_{Z, z}$ fait correspondre :

$$\frac{(-1)^\sigma}{(2i\pi)^r} \det \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(y_{j_1}, \dots, y_{j_r})} g \circ \pi^{-1} \begin{bmatrix} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ f_1 \wedge \dots \wedge f_r \end{bmatrix}$$

où $\mathfrak{S} = (i_1 \dots i_p; j_1 \dots j_r)$.

Démonstration. - On procède comme dans 1.4. $H^p(Z, \Omega_Z^p)$ est le p -ième groupe de cohomologie de $\Gamma(Z, \Omega_Z^p \otimes \mathcal{E}_Z^{0, \cdot})$ et la trace est la forme linéaire qui envoie la classe de $\sum w_Z^p \otimes \eta_Z^{0, p}$ sur $\sum \int_Z w_Z^p \wedge \eta_Z^{0, p}$ où w_Z^p est vu comme section de $\mathcal{S}_Z^{p, 0}$.

$H^p(V, (i \circ \pi)_* \Omega_Z^p)$ est le p -ième groupe de cohomologie de $\Gamma(V, (i \circ \pi)_* \Omega_Z^p \otimes \mathcal{E}_V^{0, \cdot})$. La trace est donc la forme linéaire qui envoie la classe de $\sum w_Z^p \otimes \eta_V^{0, p}$ sur $\int_Z w_Z^p \wedge \eta_V^{0, p} \circ i \circ \pi$.

L'élément de $\text{Hom}((i \circ \pi)_* \Omega_Z^p, \mathcal{S}_V^{n, n-p})$ qu'on va faire correspondre à la trace enverra w_Z^p une section de $(i \circ \pi)_* \Omega_Z^p$ sur le courant $H^{n, n-p}_{(w_Z^p)}$ défini par

$$\langle H^{n, n-p}_{(w_Z^p)}, \eta_V^{0, p} \rangle = \int_Z w_Z^p \wedge \eta_V^{0, p} \circ i \circ \pi.$$

On en déduit ensuite un élément de $\text{Hom}(\pi_* \Omega_Z^p, \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{S}_V^{n, n-p}))$. Il associe à w_Z^p une section de $\pi_* \Omega_Z^p$ la section de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{S}_V^{n, n-p})$ qui à f section holomorphe de X sur U fait correspondre le courant sur U , $H_U^{n, n-p}_{(w_Z^p)}$ défini par $\int_{\pi^{-1}(U)} f \circ \pi w_Z^p \wedge \eta_V^{0, p} \circ i \circ \pi$.

On en déduit finalement un élément de $\text{Hom}(\Omega_Z^p, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{S}_V^{n, n-p})))$. Il associe à ω_Z^p une section de Ω_Z^p sur un ouvert de Stein de la forme $\pi^{-1}(U)$ où U est Stein sur X , la section de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{S}_V^{n, n-p}))$ qui à g section holomorphe de \mathcal{O}_Z sur $\pi^{-1}(U)$ fait correspondre la section sur U de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{S}_V^{n, n-p})$ envoyant f section de \mathcal{O}_X sur U sur le courant $H^{n, n-p}$ défini par $H(\eta_V^{0, p}) = \int_{\pi^{-1}(U)} f \circ \pi \cdot g \omega_Z^p \wedge \eta_V^{0, p} \circ i \circ \pi$.

Si donc z est un point de Z au voisinage duquel π est un isomorphisme $d(y_1 \circ i \circ \pi) \wedge \dots \wedge d(y_p \circ i \circ \pi) \in \Omega_{Z, z}^p$ est envoyé sur le $\mathcal{O}_{X, \pi(z)}$ -homomorphisme qui à $g \in \mathcal{O}_{Z, z}$ fait correspondre l'élément de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{V, i \circ \pi(z)}}(\mathcal{O}_{X, \pi(z)}, \mathcal{S}_{V, i \circ \pi(z)}^{n, n-p})$ envoyant $f \in \mathcal{O}_{X, \pi(z)}$ sur le germe de courant $H^{n, n-p}$ en $i \circ \pi(z)$ défini par

$$H(\eta_V^{0, p}) = \int_{\pi^{-1}(U)} f \circ \pi g d(y_1 \circ i \circ \pi) \wedge \dots \wedge d(y_p \circ i \circ \pi) \wedge \eta_V^{0, p} \circ i \circ \pi$$

où U est un voisinage assez petit de $\pi(z)$ dans X pour que π soit un isomorphisme au-dessus de U . D'après la formule de changement de variables dans les intégrales, c'est aussi

$$\int_U f \cdot (g \circ \pi^{-1}) d(y_1 \circ i) \wedge \dots \wedge d(y_p \circ i) \wedge \eta_V^{0, p} \circ i$$

Or nous avons montré que $\left[\begin{array}{c} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_r \\ f_1 \dots f_r \end{array} \right]$ se transfère dans $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{V, \pi(z)}}(\mathcal{O}_{X, \pi(z)}, \mathcal{S}_{V, \pi(z)}^{n, n-p})$ en l'application

$$1 \mapsto (2i\pi)^r \int_U d(y_1 \circ i) \wedge \dots \wedge d(y_p \circ i) \wedge \eta_V^{0, p} \circ i$$

d'où le résultat.

2.3. COROLLAIRE. - Dans la situation de la proposition 2.2, considérons l'application $\varphi : \Omega_X^p \rightarrow \omega_X$, obtenu par composition des morphismes canoniques $\Omega_X^p \rightarrow \pi_* \Omega_Z^p \rightarrow \pi_*(\text{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)) \rightarrow \omega_X$. Si x est un

point de X au voisinage duquel X est une intersection complète,
et si y_1, \dots, y_n est un système de coordonnées locales de V au
voisinage de $i(x)$ et f_1, \dots, f_r une suite régulière engendrant
l'idéal définissant X dans V au voisinage de x , $\Omega_{X,x}^p \rightarrow \omega_{X,x}$
est l'application qui à

$$d(y_1 \circ i) \wedge \dots \wedge d(y_i \circ i) \mapsto \frac{(-1)^\sigma}{(2i\pi)^r} \det \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(y_1, \dots, y_i)} \begin{bmatrix} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ f_1 \dots f_r \end{bmatrix} .$$

Démonstration. - Au voisinage de x , X étant intersection
complète, le calcul de ω_X par la résolution de Koszul montre que ω_X
est un \mathcal{O}_X -Module Inversible. D'autre part, le $\mathcal{O}_{X,x}$ -morphisme $\Omega_{X,x}^p \rightarrow \omega_{X,x}$
explicité ci-dessus au moyen des fonctions coordonnées se prolonge en
un $\mathcal{O}_X|U$ -morphisme ψ de $\Omega_X^p|U \rightarrow \omega_X|U$ où U est un voisinage ou-
vert de x dans X assez petit dont le germe en tout y de X au-
dessus duquel π est non ramifié coïncide avec φ_y décrit en 2.2.
 $\psi \circ \varphi : \Omega_X^p|U \rightarrow \omega_X|U$ a donc un germe nul sur un ouvert analytique partout
dense de U . $\omega_X|U$ étant isomorphe à $\mathcal{O}_X|U$, ceci entraîne que $\varphi = \psi$.

2.4. COROLLAIRE. - Soit X un espace analytique compact de dimen-
sion p et $i : X \rightarrow V$ une immersion fermée dans un espace non
singulier de dimension n . Soit $\pi : Z \rightarrow X$ la normalisation de X .
On suppose Z non singulier.

Soit x un point de X au voisinage duquel X est une intersec-
tion complète. Soit \mathcal{J} l'Idéal jacobien de X au voisinage de x
(c'est-à-dire y_1, \dots, y_n étant un système de coordonnées de V au
voisinage de x et f_1, \dots, f_r une suite régulière définissant X ,
l'idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$ engendré par les r -mineurs de la matrice $(\partial f / \partial y)$).
Soit $\mathcal{C} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_X)$ le conducteur de π (π étant biméro-
morphe, c'est un \mathcal{O}_X -Idéal). Soit $\mathcal{D} = \text{Im}(\pi^* \Omega_X^p \otimes_{\mathcal{O}_Z} (\Omega_Z^p)^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_Z)$.

Alors il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que :

$$\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Z|_{\pi^{-1}(U)} = \mathcal{D}|_{\pi^{-1}(U)} \cdot \mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_Z|_{\pi^{-1}(U)} .$$

Démonstration. - Considérons les applications canoniques

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi^* \Omega_X^p & \longrightarrow & \pi^* \pi_* \Omega_Z^p & \longrightarrow & \Omega_Z^p \\
 & & \downarrow & & \searrow \\
 & & \pi^* \pi_* (\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \pi^* (\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)) & \longrightarrow & \pi^* \omega_X
 \end{array}$$

Ici l'application $\pi^* \pi_* \Omega_Z^p \rightarrow \Omega_Z^p$ est surjective. En effet, si α est un germe de section de Ω_Z^p au voisinage de $z_0 \in Z$, on peut la prolonger en une section sur un voisinage de $\pi^{-1}(\pi(z_0))$ qui est un nombre fini de points z_0, z_1, \dots, z_s en la prolongeant par 0 au voisinage de z_1, \dots, z_s .

Pour voir qu'il existe $\Omega_Z^p \rightarrow \pi^* \omega_X$ rendant le diagramme commutatif, il suffit de remarquer que si α est une section de Ω_Z^p sur un voisinage de $z_0 \cup \dots \cup z_s$ nulle au voisinage de z_0 , l'application $\pi_* \Omega_Z^p \rightarrow \omega_X$ envoie le germe de α en 0 voisin de $\pi(z_0)$ sur la composante irréductible de X au voisinage de $\pi(z_0)$ dont la normalisation est un ouvert de Z contenant z_0 sur 0. α s'envoie donc dans $\pi^*(\omega_X)$ en une section nulle au voisinage de z_0 et donc aussi en z_0 puisque $\pi^*(\omega_X)$ est \mathcal{O}_Z -inversible.

Pour simplifier les notations, nous noterons encore X un voisinage de x en tous points duquel X est intersection complète.

Nous allons maintenant calculer l'image de $\pi^* \Omega_X^p \rightarrow \pi^* \omega_X$ de 2 façons. D'une part dans 2.3, on a donné une description directe de $\Omega_X^p \rightarrow \omega_X$. On constate que l'image est $\mathcal{J} \cdot \omega_X$. L'image de $\pi^* \Omega_X^p \rightarrow \pi^* \omega_X$ est donc $\mathcal{J} \cdot \pi^* \omega_X$. D'autre part, l'image de $\pi^* \Omega_X^p \rightarrow \Omega_Z^p$ est $\mathcal{B} \cdot \Omega_Z^p$ par définition de \mathcal{B} . De plus, ω_X étant un \mathcal{O}_X -Module Inversible $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)$ vu comme \mathcal{O}_X -Module est isomorphe à $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X = \mathcal{C} \otimes \omega_X$ et son image dans ω_X est $\mathcal{C} \cdot \omega_X$

$\pi^* \pi_* \Omega_Z^p \rightarrow \Omega_Z^p$ étant surjectif, l'image de Ω_Z^p dans $\pi^* \omega_X$ est donc $\mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_Z \cdot \pi^* \omega_X$ et celle de $\mathcal{B} \cdot \Omega_Z^p$, $\mathcal{B} \cdot \mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_Z \pi^* \omega_X$. On a donc finalement $\mathcal{B} \cdot \mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_Z \pi^* \omega_X = \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Z \cdot \pi^* \omega_X$ et $\pi^* \omega_X$ étant inversible $\mathcal{B} \cdot \mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_Z = \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Z$.

2.5. COROLLAIRE. - Description analytique du conducteur : les hypothèses sont celles de 2.4. Au voisinage de x , les germes de p-différentielles méromorphes sur X qui se remontent sur Z en une p-différentielle holomorphe au voisinage de $\pi^{-1}(x)$ sont ceux de la

$$\text{forme } a \frac{dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}}{\frac{\partial(f_1 \dots f_r)}{\partial(y_{j_1} \dots y_{j_r})}} \text{ où } \{i_1, \dots, i_p\} \cup \{j_1, \dots, j_r\} = \{1, \dots, n\} \text{ et } a \in \mathbb{C}_x.$$

On dit que ces différentielles sont de 1ère espèce.

Démonstration. - Soit K l'anneau total de fractions de $\mathcal{O}_{X,x}$. Les germes de p-différentielles méromorphes sur X sont les éléments de $\Omega_{X,x}^p \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K$. Soit z_1, \dots, z_s les points de Z au-dessus de x et soit K_i le corps des fractions de \mathcal{O}_{Z,z_i} . On sait que $K = \bigoplus K_i$. Un élément de $\Omega_{X,x}^p \otimes K$ aboutit dans Ω_{Z,z_i}^p si et seulement dans $\omega_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K_i$ il aboutit dans $\text{Im} : \Omega_{Z,z_i}^p \rightarrow (\pi^* \omega_X)_{z_i}$ c'est-à-dire $(\mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_Z)_{z_i} (\pi^* \omega_X)_{z_i}$ puisque $\Omega_Z^p \rightarrow \pi^* \omega_X$ est injectif.

Un tel élément s'écrit $dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p} \otimes h$ où $h = \bigoplus h_i$, $h_i \in K_i$.

Dans $\omega_{X,x} \otimes K_i$ il s'envoie sur $\frac{1}{(2i\pi)^r} \frac{\partial(f_1 \dots f_r)}{\partial(y_{j_1} \dots y_{j_r})} \left[\frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n}{f_1 \dots f_r} \right] \otimes h_i$ et

ceci appartient à $(\mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_Z)_{z_i} \omega_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Z,z_i}$ si et seulement si

$$h_i \frac{\partial(f_1 \dots f_r)}{\partial(y_{j_1} \dots y_{j_r})} \in (\mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_Z)_{z_i}. \text{ Or } \mathbb{C}_x = \bigoplus (\mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_Z)_{z_i}. \text{ Donc } h \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(y_{j_1}, \dots, y_{j_r})} \in \mathbb{C}_x.$$

2.6. COROLLAIRE. - Les hypothèses sont celles de 2.3. Il existe un morphisme injectif de \mathcal{O}_X -Modules $C_X : \omega_X \rightarrow \pi_* \mathcal{B}_Z^{p,0}$ rendant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \mathcal{O}_Z^p & \xrightarrow{\text{Tr } \pi} & \omega_X \\ \downarrow & \searrow C_X & \\ \pi_* \mathcal{B}_Z^{p,0} & & \end{array} .$$

Ce morphisme envoie $\left[\begin{array}{c} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ f_1, \dots, f_r \end{array} \right]$ sur $(-1)^\sigma (2i\pi)^r \text{vp} \frac{dy_{i_1} \circ i \circ \pi \wedge \dots \wedge dy_{i_p} \circ i \circ \pi}{\det \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(y_{j_1}, \dots, y_{j_r})}}$

où $\{i_1, \dots, i_p\} \cup \{j_1, \dots, j_r\} = \{1, \dots, n\}$.

Démonstration. - Nous avons vu que $\omega_X = \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^r(\mathcal{O}_X, \Omega_V^n)$ est le r -ième groupe de cohomologie de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{B}_V^{n, \cdot})$. Soit \mathfrak{L}_r les r -cycles de ce complexe. Il existe un morphisme naturel de \mathcal{O}_X -Modules : $\pi_* \mathcal{B}_Z^{p,i} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{B}_V^{n,i+r})$. Si U est un ouvert de X et si $H^{p,i}$ est un (p,i) courant sur $\pi^{-1}(U)$, on lui associe l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X|U$ dans $\mathcal{B}_V^{n,i+r}|U$ qui à section de \mathcal{O}_X sur V ouvert inclus dans U associe $G_V^{n,i+r}$ tel que

$$\langle G_V^{n,i+r}, \eta_V^{0,p-i} \rangle = \langle H^{p,i}, f \circ \pi \cdot \eta^{0,p-i} \circ \pi \rangle$$

où $\eta_V^{0,p-i}$ est une forme $(0,p-i)$ à support compacte dans V . π étant fini, π_* est exact et $\pi_* \mathcal{O}_Z^p$ est le 0-cycle du complexe $\pi_* \mathcal{B}_Z^{p, \cdot}$. Il s'envoie donc naturellement dans \mathfrak{L}_r et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \mathcal{O}_Z^p & \longrightarrow & \mathfrak{L}_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_* \mathcal{B}_Z^{p,0} & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{B}_V^{n,r}) \end{array} .$$

Le calcul fait en 2.2 montre par ailleurs que l'application $\pi_* \mathcal{O}_Z^p \rightarrow \omega_X$ obtenu en composant la flèche $\pi_* \mathcal{O}_Z^p \rightarrow \mathfrak{L}_r$ ainsi obtenu avec la projection de \mathfrak{L}_r sur ω_X n'est rien d'autre que $\text{Tr } \pi$.

Nous avons montré d'autre part que l'application

$$\Omega_X^p \rightarrow \pi_* \Omega_Z^p \xrightarrow{\text{Tr } \pi} \omega_X \text{ envoie } d(y_{i_1} \circ i) \wedge \dots \wedge d(y_{i_p} \circ i) \text{ sur}$$

$$\frac{(-1)^\sigma}{(2i\pi)^r} \det \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(y_{j_1}, \dots, y_{j_r})} \begin{bmatrix} dy_1 \dots dy_n \\ f_1 \dots f_r \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

L'application $\Omega_X^p \rightarrow \pi_* \Omega_Z^p \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_Z^{p,0}$ envoie $d(y_{i_1} \circ i) \wedge \dots \wedge d(y_{i_p} \circ i)$ sur le courant H sur U petit voisinage de x qui à $\eta_Z^{0,p}(0,p)$ forme C^∞ à support compact dans $\pi^{-1}(U)$ associe

$$\langle H, \eta_Z^{0,p} \rangle = \int_{\pi^{-1}(U)} d(y_{i_1} \circ i \circ \pi) \wedge \dots \wedge d(y_{i_p} \circ i \circ \pi) \wedge \eta_Z^{0,p}$$

ω_X étant un \mathcal{O}_X -Module inversible, on déterminera donc un \mathcal{O}_X -morphisme

$\omega_X \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_Z^{p,0}$ faisant commuter le diagramme indiqué en envoyant

$$\begin{bmatrix} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ f_1, \dots, f_r \end{bmatrix} \text{ sur le courant } (-1)^\sigma (2i\pi)^r \text{ vp } \frac{dy_{i_1} \circ i \circ \pi \wedge \dots \wedge dy_{i_p} \circ i \circ \pi}{\det \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(y_{j_1}, \dots, y_{j_r})} \circ i \circ \pi} \text{ qui}$$

envoie par définition $\eta_Z^{0,p}$ sur

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi^{-1}(U)} \frac{dy_{i_1} \circ i \circ \pi \wedge \dots \wedge dy_{i_p} \circ i \circ \pi \wedge \eta_Z^{0,p}}{\det \frac{\partial(f_1 \dots f_r)}{\partial(y_{j_1} \dots y_{j_r})} \circ i \circ \pi} \quad .$$

$$|\det \frac{\partial(f_1 \dots f_r)}{\partial(y_{j_1} \dots y_{j_r})}| \geq \varepsilon$$

§ 3. APPLICATIONS AUX COURBES REDUITES SUR UNE SURFACE NON SINGULIERE

Les conditions d'applications de 2.4 et de 2.5 sont en particulier satisfaites si X est une courbe dans V surface non singulière et $Z \rightarrow X$ sa normalisation.

3.1. PROPOSITION. - Désignant par Δ la multiplicité en x de l'idéal jacobien de X , par c la multiplicité en x du conducteur C , n la multiplicité de l'idéal maximal et r le nombre de composantes analytiquement irréductibles de X en x

$$\Delta = c + n - r .$$

Démonstration. - Soit z_1, \dots, z_s les points de Z au-dessus de x . Si I est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -idéal sa multiplicité est égale à la somme des multiplicités des $I \cdot \mathcal{O}_{Z,z_i}$. De 2.4, on tire que

$$\Delta = \sum \text{mult}_{z_i} (\mathcal{J} \cdot C \cdot \mathcal{O}_Z)_{z_i} = \sum \text{mult}_{z_i} (\mathcal{J}_{z_i} \cdot C \cdot \mathcal{O}_{Z,z_i}) .$$

Or l'image de $\Omega_{X,x}^1 \otimes \mathcal{O}_{Z,z_i} \rightarrow \Omega_{Z,z_i}^1$ est \mathcal{J}_{z_i} et a pour multiplicité $n_i - 1$ où n_i est la multiplicité de la composante irréductible X_i se relevant par z_i . Soit $c_i = \text{mult } C \mathcal{O}_{Z,z_i}$ dans \mathcal{O}_{Z,z_i} , on a $c = \sum c_i$ et

$$\Delta = \sum n_i - 1 + c_i = c + n - r .$$

3.2. PROPOSITION. - Soit X une courbe réduite dans V surface non singulière, x un point de X et $\pi : X_1 \rightarrow X$ l'éclatement de x . Soit x_1, \dots, x_s les points de X_1 au-dessus de x . On considère $\text{Tr } \pi : \pi_* \omega_{X_1} \rightarrow \omega_X$. Soit (y_1, y_2) un système de coordonnées locales de V au voisinage de x et f une équation locale de X . On suppose l'axe des y_2 non tangent à X . Soit $p : W \rightarrow V$ l'éclatement de x . Y_1, Y_2 un système de coordonnées de W dans un voisinage de $p^{-1}(x)$ tel que $y_1 \circ p = Y_1$ et $y_2 \circ p = Y_1 Y_2$. Soit $(0, \alpha_1) \dots (0, \alpha_s)$ les coordonnées de x_1, \dots, x_s . Dans ce voisinage, si n est la multiplicité de X en x , X_1 est défini par $f_1(Y_1, Y_2) = \frac{1}{Y_1^n} f(Y_1, Y_1 Y_2)$.

Identifions enfin comme dans 1.3, $\omega_{X,x} = \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{O}_X, \Omega_V^2)_x$ au $\mathcal{O}_{X,x}$ -module libre engendré par $\begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix}$ et $\omega_{X_1, x_i} = \text{Ext}_{\mathcal{O}_W}^1(\mathcal{O}_{X_1}, \Omega_W^2)_{x_i}$ au

\mathcal{O}_{X_1, x_i} -module libre engendré par $\begin{bmatrix} dY_1 \wedge dY_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$.

Le germe en x de $\text{Tr } \pi : \oplus \omega_{X_1, x_i} \rightarrow \omega_{X, x}$ est l'application
qui à

$$\oplus h_i \begin{bmatrix} dY_1 \wedge dY_2 \\ f_1 \end{bmatrix} \mapsto y_1^{n-1} (\oplus h_i) \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix}$$

où $\oplus h_i \in \oplus \mathcal{O}_{X_1, x_i} \subset \oplus K_i = K$ anneau total de fractions de $\mathcal{O}_{X, x}$.

Démonstration. - Soit $\pi_1 : Z \rightarrow X_1$ la normalisation de X_1 et soit $n = \pi_1 \circ \pi$. Les hypothèses de 2.1 sont satisfaites avec π_1 , π et n . Les morphismes traces respectant les structures de Module dualisant, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} n_* \Omega_Z^1 & \xrightarrow{\pi_* (\text{Tr } \pi_1)} & \pi_* (\omega_{X_1}) \\ & \searrow \text{Tr } n & \downarrow \text{Tr } \pi \\ & & \omega_X \end{array}$$

est commutatif.

D'autre part, on a un diagramme commutatif évident :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_X^1 & \xrightarrow{d\pi} & \pi_* \Omega_{X_1}^1 \\ \downarrow & \swarrow & \\ n_* \Omega_Z^1 & & \end{array}$$

et Z étant à la fois la normalisation de X et de X_1 , la proposition 2.3 décrit explicitement $\varphi : \Omega_X^1 \rightarrow n_* \Omega_Z^1 \xrightarrow{\text{Tr } n} \omega_X$ et

$$\varphi_1 : \Omega_{X_1}^1 \rightarrow \pi_{1*} \Omega_Z^1 \xrightarrow{\text{Tr } \pi_1} \omega_{X_1}$$

donc

$$\pi_* \varphi_1 : \pi_* \Omega_{X_1}^1 \rightarrow n_* \Omega_Z^1 \rightarrow \pi_* \omega_{X_1}.$$

On obtient donc $\varphi = \text{Tr } \pi \circ \pi_* \varphi_1 \circ d\pi$, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\varphi_x(dy_1) &= \frac{\partial f}{\partial y_2} \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix} \\ &= (\text{Tr } \pi)_x \circ (\pi_* \varphi_1)_x \bigoplus_{j=1}^s dY_1 = (\text{Tr } \pi)_x \left[\bigoplus_{j=1}^s \frac{\partial F_1}{\partial Z_{2j}} \begin{bmatrix} dY_1 \wedge dZ_{2j} \\ F_1 \end{bmatrix} \right]\end{aligned}$$

où $Z_{2j} = Y_2 - \alpha_j$ et Y_1, Z_{2j} est un système de coordonnées sur W au voisinage de x_j et $F_1(Y_1, Z_{2j}) = f_1(Y_1, \alpha_j + Z_{2j})$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial Z_{2j}}(Y_1, Z_{2j}) &= \frac{\partial}{\partial Z_{2j}} \left[\frac{1}{Y_1^n} f(Y_1, Y_1(\alpha_j + Z_{2j})) \right] \\ &= \frac{1}{Y_1^n} Y_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_2}(Y_1, Y_1(\alpha_2 + Z_{2j})) = \frac{1}{Y_1^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y_2}(Y_1, Y_1(\alpha_2 + Z_{2j})) \\ &= \left\{ \left[\frac{1}{Y_1^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y_2}(y_1, y_2) \right] \circ \pi \right\}_{x_j}.\end{aligned}$$

De la définition de la structure de $\mathcal{O}_{X,x}$ -module de $(\pi_* \omega_{X_1})_x = \bigoplus \omega_{X_1, x_j}$, on tire que

$$\bigoplus_{j=1}^s \frac{\partial F_1}{\partial Z_{2j}} \begin{bmatrix} dY_1 \wedge dZ_{2j} \\ F_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Y_1^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y_2}(y_1, y_2) \cdot \bigoplus_{j=1}^s \begin{bmatrix} dY_1 \wedge dY_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

et $(\text{Tr } \pi)_x$ étant $\mathcal{O}_{X,x}$ -linéaire, on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{Y_1^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y_2}(y_1, y_2) (\text{Tr } \pi)_x \bigoplus_{j=1}^s \begin{bmatrix} dY_1 \wedge dY_2 \\ f_1 \end{bmatrix}.$$

ω_X étant localement libre de rang 1 et X étant réduite, $\frac{\partial f}{\partial y_2}(y_1, y_2)$ n'est pas diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_{X,x}$ et donc

$$(\text{Tr } \pi)_x \bigoplus_{j=1}^s \begin{bmatrix} dY_1 \wedge dY_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = Y_1^{n-1} \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix}.$$

Nous remarquons maintenant comme en 2.4 que

$\pi^* \text{Tr } \pi : \pi^* \pi_* \omega_X \rightarrow \pi^* \omega_X$ se factorise au travers de l'application canonique

$\pi^* \pi_* \omega_{X_1} \rightarrow \omega_{X_1}$ (toujours parce que ω_{X_1} et ω_X sont inversibles) et

on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_* \omega_{X_1} & \xrightarrow{\quad} & \pi_* \pi^* \pi_* \omega_{X_1} & \xrightarrow{\quad} & \pi_* \omega_{X_1} \\
 \text{Tr } \pi \downarrow & & \pi_* \pi^* \text{Tr } \pi \downarrow & & \swarrow \\
 \omega_X & \xrightarrow{\quad} & \pi_* \pi^* \omega_X & &
 \end{array}$$

où la composée des 2 flèches horizontales du haut est l'identité. Le diagramme $\pi^* \pi_* \omega_{X_1} \rightarrow \omega_X$ est aussi commutatif ; l'élément

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^* \pi_* \omega_{X_1} & \xrightarrow{\quad} & \omega_X \\
 \downarrow & \swarrow & \\
 \pi_* \omega_X & &
 \end{array}$$

$\left\{ \bigoplus_{j=1}^s \begin{bmatrix} dY_1 \wedge dY_2 \\ f_1 \end{bmatrix} \right\} \otimes 1$ de $(\pi^* \pi_* \omega_{X_1})_{x_i} \simeq (\bigoplus_j \omega_{X_1, x_j}) \otimes_{\mathcal{O}_{X, x}} \mathcal{O}_{X_1, x_i}$ s'envoie

sur $\begin{bmatrix} dY_1 \wedge dY_2 \\ f_1 \end{bmatrix} \in \omega_{X_1, x_i}$, il s'envoie sur $y_1^{n-1} \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix} \otimes 1$ dans

$(\pi^* \omega_X)_{x_i} = \omega_{X, x} \otimes \mathcal{O}_{X_1, x_i}$. L'application $\omega_{X_1, x_i} \rightarrow \omega_{X, x} \otimes \mathcal{O}_{X_1, x_i}$ est

donc celle qui envoie $\begin{bmatrix} dY_1 \wedge dY_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix} \otimes (y_1 \circ \pi)^{n-1}$. Si donc

$\bigoplus_j h_j \begin{bmatrix} dY_1 \wedge dY_2 \\ f_1 \end{bmatrix} \in (\pi_* \omega_{X_1})_x$, l'injection canonique de $\omega_X \rightarrow \pi_* \pi^* \omega_X$

envoie son image par $\text{Tr } \pi$ sur $\bigoplus_j (y_1 \circ \pi)^{n-1} h_j \otimes \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix}$ dans

$(\pi_* \pi^* \omega_X)_x = (\bigoplus_j \mathcal{O}_{X_1, x_j}) \otimes_{\mathcal{O}_{X, x}} \omega_{X, x}$. Cet élément appartient donc en

fait à $\omega_{X, x}$ i.e. $\bigoplus_j (y_1 \circ \pi)^{n-1} h_j \in \mathcal{O}_{X, x}$ ce qui était le résultat annoncé.

3.3. COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{C}_1 = \text{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_{X_1}, \mathcal{O}_X)$ le conducteur de π_1
 (vu comme un \mathcal{O}_X -Idéal : $\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{O}_{X_1} = M^{n-1} \cdot \mathcal{O}_{X_1}$ où M est l'idéal
 maximal de X en x . $\mathcal{C}_1 = \pi_*(M^{n-1} \mathcal{O}_{X_1})$.

Démonstration. - L'image de ω_{X_1} dans $\pi^* \omega_X$ est $\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{O}_{X_1} \cdot \pi^* \omega_{X_1}$.

En effet, $\pi^* \pi_* \omega_{X_1} \rightarrow \omega_{X_1}$ étant surjectif, c'est la même que celle de

$\pi^* \pi_* \omega_{X_1} \rightarrow \pi^* \omega_X$. Or $\pi_* \omega_X \simeq \mathcal{C}_1 \otimes \omega_X$ et son image dans ω_X est

$c_1 \cdot \omega_X$. Or nous venons de voir que $\omega_{X_1, x_i} \rightarrow \omega_{X, x} \otimes \mathcal{O}_{X_1, x_i}$ envoie

$\begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$ sur $(y_1 \circ \pi)^{n-1} \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix}$. On constate donc que

$c_1 \cdot \mathcal{O}_{X_1, x_i} = (y_1 \circ \pi)^{n-1} \mathcal{O}_{X_1, x_i}$. Or y_1 est l'équation locale du diviseur exceptionnel sur X_1 . $[y_1 \circ \pi] \mathcal{O}_{X_1, x_i} = M \cdot \mathcal{O}_{X_1, x_i}$. De même $c_1 \omega_{X, x}$ est l'image de $(\text{Tr } \pi)_x$. Or $(\pi_* M^{n-1} \mathcal{O}_{X_1})_x = \oplus y_1^{n-1} \mathcal{O}_{X_1, x}$.

3.4. COROLLAIRE. - $\ell g(\pi_* \mathcal{O}_{X_1})_x / c_{1x} = \ell g \oplus \mathcal{O}_{X_1, x_i} / c_1 = n(n-1)$.

Démonstration. - On a vu que $c_1 = \pi_*(M^{n-1} \mathcal{O}_X)$. On a donc à calculer

$$\begin{aligned} \ell g \oplus \mathcal{O}_{X_1, x_i} / \oplus y_1^{n-1} \cdot \mathcal{O}_{X_1, x_i} &= \ell g \oplus_i (\mathcal{O}_{X_1, x_i} / y_1^{n-1} \mathcal{O}_{X_1, x_i}) \\ &= \sum_i \text{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_1, x_i} / y_1^{n-1} \mathcal{O}_{X_1, x_i}. \end{aligned}$$

Or, si E désigne le diviseur exceptionnel $p^{-1}(x)$ sur W défini par y_1 en x_i , on a justement

$$\text{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_1, x_i} / y_1^{n-1} \cdot \mathcal{O}_{X_1, x_i} = (n-1)(E, X_1)_{x_i}.$$

On vérifie que $(E, X_1)_{x_i}$ est égale à la somme des multiplicités des composantes analytiquement irréductibles de X se relevant par x_i et donc $(E, X_1) = \sum_{x_i} (E, X_1)_{x_i} = n$. D'où

$$\ell g(\pi_* \mathcal{O}_{X_1})_x / c_{1x} = n(n-1).$$

3.5. Remarque. - Si X est une courbe réduite sur une surface non singulière, Le dans [6] et Teissier dans [13] démontrent le théorème 2.5 relatif à la description analytique du conducteur en construisant une déformation de X au-dessus de \mathbb{C} ayant la propriété d'avoir une résolution simultanée très faible et telle que la fibre générique n'ait que des singularités ordinaires.

§ 4. LE THEOREME DE GORENSTEIN

4.1. THEOREME. - Soit X une courbe réduite dans V surface compacte non singulière et soit $\omega_X = \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\mathcal{O}_X, \Omega_V^2)$ son Module dualisant. Il existe un isomorphisme entre les foncteurs (de la catégorie des \mathcal{O}_X -Modules cohérents dans celle des \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie) $\mathcal{F} \rightarrow H^0(X, \mathcal{F})^*$ et $\mathcal{F} \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \omega_X)$.

Démonstration. - Nous allons tout d'abord montrer :

4.1.1. LEMME. - $\text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^2(\mathcal{O}_X, \Omega_V^2) = 0$.

\mathcal{O}_X étant un \mathcal{O}_V -Module cohérent, le germe en x de ce Module est $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{V,x}}^2(\mathcal{O}_{X,x}, \Omega_{V,x}^2)$. Soit f une équation locale de X au voisinage de x et considérons

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{V,x} \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{V,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow 0$$

la résolution de Koszul de $\mathcal{O}_{X,x}$. Ext^2 est le 2e groupe de cohomologie du complexe

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{V,x}}(\mathcal{O}_{V,x}, \Omega_{V,x}^2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{V,x}}(\mathcal{O}_{V,x}, \Omega_{V,x}^2) \rightarrow 0 \dots$$

donc 0.

Revenons au théorème 4.1. Soit $i : X \rightarrow V$ l'immersion de X dans V ; \mathcal{F} étant \mathcal{O}_X -cohérent $i_*(\mathcal{F})$ est un \mathcal{O}_V -Module cohérent, et on sait que $H^0(X, \mathcal{F}) = H^0(V, i_*(\mathcal{F}))$. D'autre part, on sait qu'on a un isomorphisme entre $H^0(V, i_*(\mathcal{F}))^*$ et $\text{Ext}^2(V, i_*(\mathcal{F}), \Omega_V^2)$. Il s'agit donc de construire un isomorphisme entre les foncteurs $\text{Ext}^2(V, i_*(\cdot), \Omega_V^2)$ et $\text{Ext}^1(\cdot, \omega_X)$.

Comme en 1.2.2, soit $\mathcal{D}^{2,\cdot}$ la résolution de Dolbeault distribution de Ω_V^2 . Bien que $\mathcal{D}^{2,\cdot}$ soit seulement à fibre injective, on a montré que $\text{Ext}^2(V, i_*(\mathcal{F}), \Omega_V^2) = H^2(\text{Hom}(V; i_*(\mathcal{F}), \mathcal{D}^{2,\cdot}))$ pour tout \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{F} . D'autre part i étant Stein

$\text{Hom}(V; i_*(\mathcal{F}), \mathcal{B}_V^2, \cdot) = \text{Hom}(X; \mathcal{F}, \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{B}_V^2, \cdot))$ comme on a déjà vu en 1.2.2 et 2.1.

Pour simplifier, posons $\mathcal{J} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{B}_V^2, \cdot)$ vu comme \mathcal{O}_X -Module. Comme en 1.2.2, \mathcal{O}_X étant cohérent, le i -ième groupe de cohomologie \mathcal{H}^i de ce complexe est $\text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{B}_V^2)$. On a donc en particulier $\mathcal{H}^1 = \omega_X$ et $\mathcal{H}^2 = 0$. Soit $\mathcal{L}_1 = \text{Ker } \mathcal{J}^1 \rightarrow \mathcal{J}^2$. Puisque $\mathcal{H}^2 = \mathcal{J}_2 / \text{Im } \mathcal{J}_2 = 0$, la suite :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{J}^1 \rightarrow \mathcal{J}^2 \rightarrow 0$$

est exacte.

Par définition, de Ext , nous en déduisons une suite exacte

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{J}^1) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{J}^2) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{L}_1) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{J}^1).$$

Le même argument de suite spectrale utilisant que \mathcal{B}^2, \cdot est fin et à fibre injective montre que $\text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{J}^1) = 0$.

Posant maintenant $\mathcal{B}_1 = \text{Im } \mathcal{J}^0 \rightarrow \mathcal{J}^1$ et considérant la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{H}^1 = \omega_X \rightarrow 0$$

on en déduit que

$$\text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{B}_1) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{L}_1) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{H}^1) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{F}, \mathcal{B}_1).$$

Il suffit maintenant de se rappeler qu'on a montré (1.2.2) puisque $\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{B}_1) = 0$ si $i \geq 1$.

4.2. COROLLAIRE. - Soit F un $\mathcal{O}_{X,x}$ -Module de longueur finie, F^* et $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}^1(F, \omega_{X,x})$ sont isomorphes.

Démonstration. - On applique 4.1 avec le module cohérent $\mathcal{F}_x = F$ et $\mathcal{F}_y = 0$, $y \neq x$.

4.3. COROLLAIRE. - Soit $\pi : X_1 \rightarrow X$ un morphisme fini induisant un isomorphisme de $X_1 - \pi^{-1}(x) \rightarrow X - x$. Soit $\mathcal{C}_1 = \text{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_{X_1}, \mathcal{O}_X)$ le conducteur de π (vu comme un \mathcal{O}_X -Idéal) .

$$\text{lg } \mathcal{O}_{X,x} / \mathcal{C}_1, x = \text{lg} [\pi_* \mathcal{O}_{X_1} / \mathcal{O}_X]_x = \text{rg}_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) - \text{rg}_{\mathbb{C}} H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) .$$

Démonstration. - On considère d'abord la suite exacte de \mathcal{O}_X -Modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X / \mathcal{C}_1 \rightarrow 0 .$$

En tensorisant par ω_X qui est un \mathcal{O}_X -Module inversible, on obtient encore une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X \rightarrow \omega_X \rightarrow \mathcal{O}_X / \mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X \rightarrow 0 .$$

Par définition de $\text{Tr } \pi$ (2.1.1), cette suite s'identifie à :

$$0 \rightarrow \pi_* \omega_{X_1} \xrightarrow{\text{Tr } \pi} \omega_X \rightarrow \mathcal{O}_X / \mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X \rightarrow 0 .$$

On en déduit une longue suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \pi_* \omega_{X_1}) &\xrightarrow{H^0(\text{Tr } \pi)} H^0(X, \omega_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X / \mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(X, \pi_* \omega_{X_1}) \xrightarrow{H^1(\text{Tr } \pi)} H^1(X, \omega_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X / \mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X) \end{aligned}$$

π étant Stein,

$$\begin{aligned} H^0(X, \pi_* \omega_{X_1}) &= H^0(X_1, \omega_{X_1}) = \text{Ext}^0(\mathcal{O}_{X_1}, \omega_{X_1}) \\ H^1(X, \pi_* \omega_{X_1}) &= H^1(X_1, \omega_{X_1}) = \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{X_1}, \omega_{X_1}) . \end{aligned}$$

De même,

$$H^0(X, \omega_X) = \text{Ext}^0(\mathcal{O}_X, \omega_X) \quad \text{et} \quad H^1(X, \omega_X) = \text{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \omega_X) .$$

Par dualité (1.1 et 4.1)

$$\begin{aligned} \text{Ext}^0(\mathcal{O}_X, \omega_X) &\simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)^* \quad , \quad \text{Ext}^0(\mathcal{O}_{X_1}, \omega_{X_1}) \simeq H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1})^* \quad , \\ \text{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \omega_X) &\simeq H^0(X, \mathcal{O}_X)^* \quad \text{et} \quad \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{X_1}, \omega_{X_1}) \simeq H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1})^* . \end{aligned}$$

La longue suite exacte devient donc :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1})^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)^* \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X) \rightarrow \\ \rightarrow H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1})^* \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X)^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X) \end{aligned}$$

On constate enfin que $\mathcal{O}_X/\mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X$ est un \mathcal{O}_X -Module de support x ;

ceci entraîne que $H^0(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X) = (\mathcal{O}_X/\mathcal{C}_1)_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \omega_{X,x}$,

$H^1(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{C}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X) = 0$. Toutes les flèches étant compatibles à la dualité, celles obtenues dans la dernière suite exacte sont les flèches canoniques.

On sait que $H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) = \mathbb{C} = H^0(X, \mathcal{O}_X)$.

$H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1})^* \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X)^* \rightarrow 0$ étant exacte, cette flèche est un isomorphisme.

Enfin, $\omega_{X,x}$ étant isomorphe à $\mathcal{O}_{X,x}$, on en déduit :

$$\lg \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{C}_1 x = \text{rg}_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) - \text{rg}_{\mathbb{C}} H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) .$$

On considère maintenant la suite exacte de \mathcal{O}_X -Modules

$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{X_1} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{X_1}/\mathcal{O}_X \rightarrow 0$ et on en déduit une longue suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X, \pi_* \mathcal{O}_{X_1}) \rightarrow H^0(X, \pi_* \mathcal{O}_{X_1}/\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X, \pi_* \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \pi_* \mathcal{O}_{X_1}/\mathcal{O}_X) . \end{aligned}$$

Comme ci-dessus, $H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{C}$, $H^0(X, \pi_* \mathcal{O}_{X_1}) = H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \simeq \mathbb{C}$ et

la flèche étant injective est surjective. De même, $\pi_* \mathcal{O}_{X_1}/\mathcal{O}_X$ étant

concentré en x , $H^0(X, \pi_* \mathcal{O}_{X_1}/\mathcal{O}_X) = \lg[\pi_* \mathcal{O}_{X_1}/\mathcal{O}_X]_x$, $H^1(X, \pi_* \mathcal{O}_{X_1}/\mathcal{O}_X) = 0$.

Alors

$$\lg[\pi_* \mathcal{O}_{X_1}/\mathcal{O}_X]_x = \text{rg}_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) - \text{rg}_{\mathbb{C}} H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) .$$

4.4. COROLLAIRE. - Soit $\pi : X_1 \rightarrow X$ l'éclatement de x , C_1 le
conducteur de π , n la multiplicité de X en x .

$$\ell g \mathcal{O}_{X,x} / C_{1,x} = \ell g (\pi_* \mathcal{O}_{X_1} / \mathcal{O}_X)_x = \operatorname{rg}_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) - \operatorname{rg}_{\mathbb{C}} H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démonstration. - C'est une conséquence immédiate de 3.3, 4.3
et de l'additivité de la longueur.

4.5. COROLLAIRE. - $C_1 = M_{X,x}^{n-1}$.

Démonstration. - De 3.2 et 3.3, on déduit tout de suite que
 $M_{X,x}^{n-1} \rightarrow C_1$. En effet, soit $h \in M_{X,x}^{n-1}$ et soit, en utilisant les nota-
tions de 3.2, h_i le germe de $h \circ \pi$ en x_i . Puisque $h \in M_{X,x}^{n-1}$ et
que $M_{X,x}$ se relève en un diviseur engendré au voisinage de x_i par
 y_1 , il existe $g_i \in \mathcal{O}_{X_1, x_i}$ tel que $h_i = y_1^{n-1} g_i$. D'après 3.2

$$\operatorname{Tr} \pi(\oplus g_i) \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = y_1^{n-1} (\oplus g_i) \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix}.$$

Or l'image de $(\operatorname{Tr} \pi)_x$ est $C_{1,x}$; donc $h \in C_{1,x}$. Il suffit donc de
montrer que $\ell g \mathcal{O}_{X,x} / M_{X,x}^{n-1} = n(n-1)/2$. Or

$$\ell g \mathcal{O}_{X,x} / M_{X,x}^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2} \ell g M_{X,x}^i / M_{X,x}^{i+1}.$$

Soit $\operatorname{gr}_x X = \oplus M^i / M^{i+1}$; on sait que

$$\operatorname{gr}_x X = \mathbb{C}[y_1, y_2] / (y_2 - \alpha_1 y_1)^{n_1} \dots (y_2 - \alpha_s y_s)^{n_s}$$

où α_i sont les pentes des tangentes à X en x et $n = \sum n_i$. On a

$$\begin{aligned} \text{donc } \ell g \mathcal{O}_{X,x} / M_{X,x}^{n-1} &= \# \text{ monômes } y_1^\alpha y_2^\beta, \alpha + \beta \leq n-2 \\ &= \binom{n-2+2}{2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

4.6. COROLLAIRE. - Soit X une courbe sur une surface non singulière
et soit $\pi : Z \rightarrow X$ sa normalisation. Soit C le conducteur de π .
Soit x un point de X , n la multiplicité de X en x et soit
 x_i , $i = 1 \dots r$ les points infiniment voisins de x . Soit n_i

la multiplicité de X en x_i . (cf. Introduction)

$$\delta_x = \ell g(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X)_x = \ell g \mathcal{O}_{X,x} / \mathcal{C}_x = \sum_{i=0}^r \frac{n_i(n_i-1)}{2}$$

$$\sum_{x \in \text{Sing} X} \delta_x = \text{rg}_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) - \text{rg}_{\mathbb{C}} H^1(Z, \mathcal{O}_Z) .$$

Démonstration. - Par récurrence sur le nombre d'éclatements de points à faire pour désingulariser X , la première suite d'égalités est une conséquence immédiate de 4.4, 4.3 et de l'additivité des longueurs.

De même, la 2e suite est conséquence immédiate 4.3.

§5. LE THEOREME AF+BG DE MAX NOETHER

5.1. DEFINITION. - Soit X une courbe réduite dans une surface lisse compacte V . Soit $n : Z \rightarrow X$ la normalisation de X et soit $\mathcal{C} = \text{Hom}(n_* \mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_X)$ le \mathcal{O}_X -Idéal conducteur. Soit \mathcal{E} le \mathcal{O}_V -Idéal relevant \mathcal{C} dans \mathcal{O}_V . Soit D un diviseur effectif dans V . On dit que D est une adjointe de X si l'Idéal $\mathcal{O}_V(-D)$ est inclus dans \mathcal{E} .

5.2. THEOREME. - Caractérisation géométrique des adjointes : les données sont celles de 5.1. Soit x_1, \dots, x_r les points singuliers de X dans V . Soit n_i la multiplicité de X en x_i . Soit $\pi : V_1 \rightarrow V$ l'éclatement des points x_1, \dots, x_r dans V et $E_i = \pi^{-1}(x_i)$ la composante irréductible du diviseur exceptionnel au-dessus de x_i , $i = 1 \dots r$. X_1 (resp. D_1) désigne la transformée stricte de X (resp. D) . D est une adjointe de X si et seulement si :

- 1) $\text{mult}_{x_i} D \geq n_i - 1$, $i = 1 \dots r$,
- 2) le diviseur effectif $D^{(1)} = \sum_{i=1}^r [\text{mult}_{x_i} D - (n_i - 1)] E_i + D_1$ est une adjointe de X_1 .

Démonstration. - $n : Z \rightarrow X$ se factorise au travers de $p = \pi|_{X_1} : X_1 \rightarrow X$. Soit $n = p_1 \circ p$ et p_1 est la normalisation de X_1 . Soit $C_1 = \text{Hom}(p_* \mathcal{O}_{X_1}, \mathcal{O}_X)$ le conducteur de p et $C_2 = \text{Hom}(p_{1*} \mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_{X_1})$ celui de p_1 .

Considérons par exemple x_1 et soit (y_1, y_2) un système de coordonnées locales sur V au voisinage de x_1 , tel que $y_1 = 0$ ne soit pas tangente à X . Soit $H \in \mathcal{O}_{V, x_1}$ une équation locale de D en x_1 et h son image dans $\mathcal{O}_{X, x}$. Nous allons montrer que $h \in C_{x_1}$ est équivalent à

- i) $h \in M_{X, x_1}^{n_1-1}$
- ii) $(h \circ p / y_1^{n_1-1})_{\xi} \in C_{2, \xi} , \forall \xi \in X_1 , p(\xi) = x_1$.

En effet, si $h \in C_{x_1}$, il est a fortiori dans C_{1, x_1} . Or d'après 4.5, $C_{1, x_1} = M_{X, x_1}^{n_1-1}$. Comme $M_{X, x_1} \mathcal{O}_{X_1, \xi} = y_1^{n_1-1} \mathcal{O}_{X_1, \xi}$, on en déduit que $(h \circ p / y_1^{n_1-1})_{\xi} \in \mathcal{O}_{X_1, \xi}$. Or, on a les inclusions :

$$\mathcal{O}_{X, x_1} \hookrightarrow \bigoplus_{\xi, p(\xi)=x_1} \mathcal{O}_{X_1, \xi} \hookrightarrow (n_* \mathcal{O}_Z)_{x_1}.$$

Puisque $h \in C_{x_1}$, $h \cdot (n_* \mathcal{O}_Z)_{x_1} \hookrightarrow C_{x_1} \mathcal{O}_{X, x_1} \subset C_{1, x_1} \mathcal{O}_{X, x_1} = M_{X, x_1}^{n_1-1} \mathcal{O}_{X, x_1}$ et $\bigoplus_{\xi} (h \circ p)_{\xi} \cdot \bigoplus_{\xi} (p_{1*} \mathcal{O}_Z)_{\xi} \hookrightarrow y_1^{n_1-1} \bigoplus_{\xi} \mathcal{O}_{X_1, \xi}$. Cette dernière ligne signifie que $(h \circ p / y_1^{n_1-1})_{\xi} \in C_{2, \xi} , \forall \xi , p(\xi) = x_1$.

Réciproquement, si i) et ii) sont satisfaits :

$$\bigoplus_{\xi} (h \circ p)_{\xi} \cdot \bigoplus_{\xi} (p_{1*} \mathcal{O}_Z)_{\xi} \hookrightarrow y_1^{n_1-1} \bigoplus_{\xi} \mathcal{O}_{X_1, \xi} = C_{1, x_1} \bigoplus_{\xi} \mathcal{O}_{X_1, \xi} = C_{1, x_1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X, x_1}.$$

Mais ceci se lit encore :

$$h(n_* \mathcal{O}_Z)_{x_1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X, x_1}$$

donc $h \in C_{x_1}$.

Ceci montre que D est une adjointe si et seulement si

1') $h_{x_i} \in M_{X, x_i}^{n_i-1}$, $\forall i = 1 \dots r$ où h_{x_i} est l'image dans \mathcal{O}_{X, x_i} d'une équation locale H_{x_i} de D en x_i

et

2') $(h_{x_i} \circ p/y_{1i}^{n_i-1})_{\xi} \in \mathbb{C}_{2,5}$, $\forall \xi \in X_1$, $p(\xi) = x_i$, $\forall i = 1 \dots r$ où (y_{1i}, y_{2i}) est un système de coordonnées locales sur V au voisinage de x_i tel que $y_{1i} = 0$ ne soit pas tangent à X en x_i .

Or X passant par x_i avec la multiplicité n_i , 1') est équivalent à 1). Dans ces conditions, l'équation de la transformée stricte de D au voisinage de ξ s'envoyant sur x_i est $H_0 \pi / y_{1i}^{\text{mult}_{x_i} D}$. L'équation du diviseur effectif $D^{(1)}$ est donc $H_0 \pi / y_{1i}^{n_i-1}$ et son image dans $\mathcal{O}_{X_1, \xi}$ est $h_0 p / y_{1i}^{n_i-1}$. Par hypothèse de récurrence 2') est donc équivalent à 2).

5.3. Remarque. - On ne peut pas dans la condition 2) remplacer $D^{(1)}$ par D_1 , autrement dit la multiplicité de D_1 en un point singulier de X_1 de multiplicité n peut être plus petite que $n-1$, comme le montre l'exemple suivant : dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, X est la courbe $Y_1^7 + Y_2^3 Y_0^4 + Y_2^7 = 0$; D la courbe $Y_1^4 + Y_2^3 Y_0^3 = 0$ est adjointe. En effet, X n'a qu'un seul point singulier $x = (1, 0, 0)$. D ne doit donc vérifier de condition qu'en ce point. On a

$$\mathcal{O}_{X, x} = \mathbb{C}\{y_1, y_2\} / y_1^7 + y_2^7 + y_2^3 \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z, x} \simeq \mathbb{C}\{u\}$$

où $y_1 = u^3(-1-u^{28})^{1/7}$, $y_2 = u^7$.

Le conducteur $\mathcal{C}_x \cdot \mathcal{O}_{Z, x} = u^{12} \mathbb{C}\{u\}$. On a donc y_1^4 et y_2^3 dans \mathcal{C}_x donc aussi $y_1^4 + y_2^3$. Or $\text{mult}_x X = 3$, $\text{mult}_x D = 3 \geq 3-1$. Mais la transformée stricte X_1 de l'éclatement de x dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ a un point singulier x_1 de multiplicité 3, tandis que D_1 a un point singulier en x_1 de multiplicité $1 < 3-1$. Par contre $D^{(1)} = E + D_1$ passe par x_1 avec multiplicité 2.

5.4. THEOREME "AF+BG". - Soit C et D 2 courbes réduites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ n'ayant pas de composantes irréductibles en commun. Soit F et G respectivement leur équation homogène dans $\mathbb{C}[Y_0, Y_1, Y_2]$. Soit $m = \deg F$, $n = \deg G$. Soit x_j , $j = 1 \dots p$ les points d'intersection de C et D (i.e. ceux situés dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ainsi que dans les "voisinages infinitésimaux successifs"). Soit s_j (resp. r_j) la multiplicité de C (resp. D) au point x_j . Alors l'équation homogène H d'une courbe projective plane E peut se mettre sous la forme $H = AF + BG$ si la multiplicité de E en x_j est supérieure ou égale à $r_j + s_j - 1$ pour tout j .

Démonstration. - Soit x un point de C. Soit f_x , (resp. g_x) (resp. h_x) l'image de F (resp. G) (resp. H) dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x}$.

Nous allons montrer d'abord que les conditions numériques locales sur les multiplicités entraînent que $h_x = a_x f_x + b_x g_x$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x}$ avec $a_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x}$, $b_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x}$ dépendant de x .

En effet, soit \tilde{h}_x (resp. \tilde{g}_x) l'image de h_x (resp. g_x) dans $\mathcal{O}_{C, x}$. Si x est un point de C qui n'appartient pas à D, \tilde{g}_x est une unité dans $\mathcal{O}_{C, x}$ et $\tilde{h}_x / \tilde{g}_x \in \mathcal{O}_{C, x}$, donc il existe a_x et $b_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x}$ tels que $h_x = a_x f_x + b_x g_x$. Si x est un point de $C \cap D$, \tilde{g}_x ne s'annulant pas sur toute une composante irréductible locale de C en x , $\tilde{h}_x / \tilde{g}_x \in \text{Tot } \mathcal{O}_{C, x}$. Nous allons montrer que la condition i) E passe par tout point d'intersection x_j de C et D dans un voisinage infinitésimal de x avec une multiplicité supérieure ou égale à $s_j + r_j - 1$ entraîne ii) $\tilde{b}_x = \tilde{h}_x / \tilde{g}_x \in \mathcal{O}_{C, x}$ par récurrence sur le nombre d'éclatements à faire pour séparer C et D.

Soit $\pi : Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ l'éclatement de x dans \mathbb{P}^2 et soit C_1 (resp. D_1) la transformée stricte de C (resp. D). Soit $p : C_1 \rightarrow C$ la restriction de π à C_1 . Soit x_1, \dots, x_k les points de $p^{-1}(x)$ sur D_1 , y_1, \dots, y_h les autres.

Par hypothèse de récurrence, i) entraîne i') "E passe par

$x \in C \cap D$ avec une multiplicité $\geq s+r-1$ où $s = \text{mult}_x C$, $r = \text{mult}_x D$ et h_{1,x_i} (resp. f_{1,x_i}) (resp. g_{1,x_i}) désignant une équation de E_1 (resp. C_1) (resp. D_1) au voisinage de x_i , $\tilde{b}_{1,x_i} = \tilde{h}_{1,x_i} / \tilde{g}_{1,x_i}$ est dans \mathcal{O}_{C_1,x_i} , $\forall i = 1 \dots k$.

Par définition de la multiplicité, $g_x \in M_{\mathbb{P}^2,x}^r$ et i' entraîne que $h_x \in M_{\mathbb{P}^2,x}^{r+s-1}$. Par définition de la transformée stricte, $(g_x \circ \pi)_{x_i} = y_1^r g_{1,x_i}$ et $(h_x \circ \pi)_{x_i} = y_1^t h_{1,x_i}$ où $t \geq r+s-1$ et y_1 est une équation locale du diviseur exceptionnel sur Z au voisinage de x_i . Toujours d'après i') $(\tilde{b}_x \circ p)_{x_i} = \frac{\tilde{h}_x \circ p}{\tilde{g}_x \circ p} = (y_1 | C_1)^{t-r} \tilde{b}_{1,x_i} \in M_{C,x}^{s-1} \cdot \mathcal{O}_{C_1,x_i}$, $i = 1 \dots k$, puisque $t-r \geq s-1$ et que $M_{C,x} \cdot \mathcal{O}_{C_1,x_i} = y_1 | C_1 \cdot \mathcal{O}_{C_1,x_i}$. De même $(\tilde{b}_x \circ p)_{y_i} \in M_{C,x}^{s-1} \cdot \mathcal{O}_{C_1,y_i}$, $i = 1 \dots h$ car la transformée stricte de D ne passant pas par y_i , $(g_x \circ \pi)_{y_i} = y_1^r \cdot g_{1,y_i}$ où $g_{1,y_i} \in \mathcal{O}_{Z,y_i}$ est une unité. D'après 3.3, on en déduit que $\tilde{b}_x \in \mathcal{C}_{1x}$ le germe en x du conducteur de p donc que $\tilde{b}_x \in \mathcal{O}_{C,x}$ et il existe $a_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,x}$ et $b_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,x}$ tel que $h_x = a_x f_x + b_x g_x$.

Il reste donc maintenant à globaliser. Soit \mathcal{J} le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ -Idéal cohérent défini par $\mathcal{J}_x = (f_x, g_x) \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,x}$. Soit d le degré de E . Il est certainement supérieur ou égal à m et n . En effet,

$$(E, C) = dm \geq \sum_j \text{mult}_{x_j} E \cdot \text{mult}_{x_j} C \geq (r_j + s_j - 1) \cdot s_j \geq \sum_j r_j \cdot s_j = (D, C) = mn$$

Soit $d = m + m_1 = n + n_1$ et $r = m_1 - n = n_1 - m$. Soit $\mathcal{J}(d) = \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$.

On peut globaliser les complexes de Koszul locaux. On obtient une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n_1) \rightarrow \mathcal{J}(d) \rightarrow 0$$

les applications étant définis par :

$$\begin{aligned} \phi &\mapsto \phi G, -\phi F \quad \text{où } \phi \text{ est une section de } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r) \\ (A, B) &\mapsto AF + BG \quad \text{où } A \text{ (resp. } B) \text{ est une section de } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m_1) \end{aligned}$$

(resp. n_1) et F et G sont des sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$). Supposons que H soit l'équation d'une courbe E passant par x_j avec une multiplicité $\geq r_j + s_j - 1$ pour tout j . Nous avons montré que h_x est une section de \mathcal{J} au voisinage de tout x autrement dit que $H \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(d))$. La suite

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m_1)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n_1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(d)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r))$$

étant exacte et le calcul explicite de la cohomologie de l'espace projectif montrant que $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r)) = 0$, la première flèche est en fait surjective. Il existe donc $A \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m_1))$ (resp $B \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n_1))$) tel que $H = AF + BG$.

APPENDICE 1. SUR LE THEOREME DE GORENSTEIN

Nous avons montré au §4 que si X est une courbe plane ω_X désignant son Module dualisant, pour tout \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{F} , on a un isomorphisme entre $H^0(X, \mathcal{F})^*$ et $\text{Ext}^1(\mathcal{F}, \omega_X)$.

Soit $\pi : Z \rightarrow X$ la normalisation de X et soit $\mathcal{F} = \pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X$. C'est un \mathcal{O}_X -Module cohérent concentré aux points singuliers. Si x est un tel point et désignant par \mathcal{O} l'anneau local de X en x , par $\bar{\mathcal{O}}_i$ le germe en x de $\pi_* \mathcal{O}_Z$, par ω le germe en x de ω_X , on en déduit l'existence d'un accouplement parfait :

$$\bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i / \mathcal{O} \times \text{Ext}^1(\bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i / \mathcal{O}, \omega) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Nous allons expliciter cet accouplement.

6.1. LEMME. - $\text{Ext}^1(\bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i / \mathcal{O}, \omega) \simeq \omega / \bigoplus_i \Omega_{Z_i}^1$ où $\bigoplus_i \Omega_{Z_i}^1$ est le germe en x de $\pi_* \Omega_Z^1$ et où $\pi_* \Omega_Z^1$ s'envoie dans ω_X par $\text{Tr } \pi$.

Démonstration. - On considère la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i \rightarrow \bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i / \mathcal{O} \rightarrow 0 .$$

On en déduit une suite exacte :

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i, \omega) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \omega) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(\bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i / \mathcal{O}, \omega) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(\bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i, \omega) .$$

D'après 2.1 et 2.1.1, ce n'est rien d'autre que :

$$\bigoplus_i \Omega_{Z_i}^1 \xrightarrow{\mathrm{Tr} \pi} \omega \rightarrow \mathrm{Ext}^1(\bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i / \mathcal{O}, \omega) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(\bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i, \omega) .$$

Il suffit donc de voir que $\mathrm{Ext}^1(\bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i, \omega) = 0$. $\pi_* \mathcal{O}_Z$ étant un \mathcal{O}_X -Module cohérent, c'est le germe en x de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)$. De la suite spectrale reliant les Ext locaux aux Ext globaux, on extraie ([3] , corollaire 7.3.5) une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathrm{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X) \rightarrow H^0(X, \mathrm{Ext}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)) \rightarrow \\ \rightarrow H^2(X, \mathrm{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)) .$$

Le premier terme s'identifie à $H^1(X, \pi_* \Omega_Z^1) \simeq H^1(Z, \Omega_Z^1)$ d'après 2.1.

Z étant non singulier $H^1(Z, \Omega_Z^1) \simeq H^0(Z, \mathcal{O}_Z)^*$ par dualité

$H^0(Z, \mathcal{O}_Z)^* \simeq H^0(X, \pi_* \mathcal{O}_Z)^* \simeq \mathrm{Ext}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)$ encore par dualité (4.1). La première flèche étant injective, est donc en fait un isomorphisme.

$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)$ est concentré aux points singuliers de x . Ces sections globales s'identifient à la somme directe des germes de sections de Ext aux points singuliers. Enfin

$$H^2(X, \mathrm{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_Z, \omega_X)) = H^2(X, \pi_* \Omega_Z^1) = H^2(Z, \Omega_Z^1) = 0 .$$

D'où

$$\bigoplus_i \Omega_{Z_i}^1 \xrightarrow{\mathrm{Tr} \pi} \omega \rightarrow \mathrm{Ext}^1(\bigoplus_i \bar{\mathcal{O}}_i / \mathcal{O}, \omega) \rightarrow 0$$

est exacte.

6.2. THEOREME. - L'application

$$(\pi_* \mathcal{O}_Z)_x / \mathcal{O}_{X,x} \times \omega_{X,x} / (\pi_* \Omega_Z^1)_x \rightarrow \mathbb{C}$$

qui à g germe de section de \mathcal{O}_Z au voisinage de $\pi^{-1}(x)$, ω germe de section de ω_X au voisinage de x fait correspondre

$$\langle d''C_X(w), \tilde{g} \rangle$$

où \tilde{g} est une fonction sur $Z \subset \mathbb{C}^\infty$ à support compact prolongeant g , est un accouplement parfait (cf. 2.6).

Si (y_1, y_2) un système de coordonnées du plan ambiant au voisinage de x et si f est une équation locale de X en x , particulier

$$\langle d''C_X\left(\left[\begin{smallmatrix} dy_1 \\ f \end{smallmatrix} \wedge dy_2 \right]\right), \tilde{g} \rangle = 2i\pi \langle \text{Res} \frac{d(y_1 \circ i \circ \pi)}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi}, \tilde{g} \rangle = 4\pi^2 \sum \text{res}_{x_i} \frac{gd(y_1 \circ i \circ \pi)}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi}.$$

Démonstration. - Rappelons (4.1.1) que posant $\mathcal{I}^0 = \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}_V^{2,2})$, on a les suites exactes $0 \rightarrow \mathcal{I}^0 \rightarrow \mathcal{I}_1 \rightarrow \omega_X \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}^1 \rightarrow \mathcal{I}^2 \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X, \mathcal{I}^1) &\rightarrow \text{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X, \mathcal{I}^2) \rightarrow \text{Ext}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X, \mathcal{I}_1) \rightarrow 0 \\ &\quad \parallel \\ &\quad \text{Ext}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X, \omega_X). \end{aligned}$$

L'accouplement parfait entre $H^0(X, \pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X)$ et $\text{Ext}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X, \omega_X)$ envoyant le couple (classe g section de \mathcal{O}_Z sur un voisinage de $\pi^{-1}(x)$, classe de φ germe d'application de $i_* \pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{I}_V^{2,2}$) sur $\langle \varphi(g), \tilde{1} \rangle$. Il faut bien sûr comparer le calcul de $\text{Ext}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X, \omega_X)$ en dérivant à droite comme ci-dessus avec celui de 6.1 en dérivant à gauche. Pour cela, on construit un double complexe de $\mathcal{O}_{X,x}$ -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_{Z,x}, \mathcal{I}_x^1) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{I}_x^1) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_{Z,x}, \mathcal{I}_x^2) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{I}_x^2) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

et $\text{Ext}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X, \omega_X) \simeq \text{Ext}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_X, \mathcal{I}_1)$ y apparaît comme conoyau de la flèche noyau.

Soit ω un germe de section de ω_X au voisinage de x et son

image dans $\text{Ext}^1(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_{X,w_X})$ calculé par 6.1. Nous avons montré (2.6) l'existence d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_1 & \xrightarrow{\quad} & w_X \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{J}^1 = \text{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_X, \mathcal{B}_V^{2,1}) & & \end{array}$$

w s'envoie donc sur l'application qui à $h \in \mathcal{O}_{X,x}$ fait correspondre $H_x^{2,1}(h) \in \mathcal{B}_{V,x}^{2,1}$ défini par $\langle H_x^{2,1}(h), \eta_V^{0,1} \rangle = \langle C_X(hw), \eta_V^{0,1} \circ \pi \rangle$. On constate que l'application $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{J}_x^1) \simeq \mathcal{J}_x^1$ que cet élément définit, se relève en une application $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\pi_* \mathcal{O}_{Z,x}, \mathcal{J}_x^1)$ qui envoie g germe de section de \mathcal{O}_Z sur un voisinage de $\pi^{-1}(x)$ sur l'élément $G_w^{2,1}(g)$ de $\mathcal{B}_{V,x}^{2,1}$ défini par

$$\langle G_w^{2,1}(g), \eta_V^{0,1} \rangle = \langle gC_X(w), \eta_V^{0,1} \circ \pi \rangle.$$

Ceci s'envoie dans $\text{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_{Z,x}, \mathcal{J}_x^2)$. À g germe de section de \mathcal{O}_Z sur un voisinage de $\pi^{-1}(x)$, on fait correspondre $d''G_w^{2,1}(g)$

$$\langle d''G_w^{2,1}(g), \eta_V^{0,0} \rangle = \langle gd''C_X(w), \eta_V^{0,0} \circ \pi \rangle$$

car g est holomorphe.

L'accouplement envoie donc $\langle g, w \rangle$ sur $\langle d''G_w^{2,1}(g), \tilde{I} \rangle = \langle d''C_X(w), \tilde{g} \rangle$.

Ceci donne précisément si $w = \begin{bmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{bmatrix}$, puisque $C_X(w) = (2i\pi)vp \frac{dy_1 \circ i \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi}$

$d''C_X(w) = (2\pi)^2 \text{res} \frac{dy_1 \circ i \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi}$. En effet

$$\langle d''C_X(w), \tilde{g} \rangle = (-2i\pi) \langle vp \frac{dy_1 \circ i \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi}, d''\tilde{g} \rangle$$

$$= (2i\pi) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\left| \frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi \right| \geq \epsilon} \frac{dy_1 \circ i \circ \pi \wedge d''\tilde{g}}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi}$$

$$\begin{aligned}
 \langle d''C_X(w), \tilde{g} \rangle &= (2i\pi) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\left| \frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi \right| \geq \epsilon} d \left[\tilde{g} \frac{dy_1 \circ i \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi} \right] \\
 &= (2i\pi) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\left| \frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi \right| = \epsilon} \frac{\tilde{g} dy_1 \circ i \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi} \\
 &= (2i\pi) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\left| \frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi \right| = \epsilon} \frac{g dy_1 \circ i \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi} = 4\pi^2 \sum_{x_i} \text{res} \frac{g dy_1 \circ i \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi}
 \end{aligned}$$

où ici résidu est le résidu habituel d'une forme méromorphe à 1 variable.

6.3. COROLLAIRE. - Supposons que X soit analytiquement irréductible en x . Soit Γ le semi-groupe des valuations des éléments de $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow (\pi_* \mathcal{O}_Z)_x \simeq \mathbb{C}\{t\}$. Soit c la multiplicité de l'idéal conducteur. Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq a \leq c-1$. Parmi a et $c-1-a$ l'un des deux et un seul des 2 est dans Γ .

Démonstration. - Soit a tel que $0 \leq a \leq c-1$ et supposons que $a \in \Gamma$. Il existe $h(y_1, y_2)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$ tel que $v(h(y_1, y_2) \circ i \circ \pi) = a$ et considérons $h \left[\frac{dy_1 \wedge dy_2}{f} \right] \in \omega_{X,x}$. Soit maintenant $g \in \mathbb{C}\{t\}$

$$\langle g, h \left[\frac{dy_1 \wedge dy_2}{f} \right] \rangle = 4\pi^2 \text{res} \frac{gh dy_1 \circ i \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi}.$$

Supposons que $y_1 = 0$ ne soit pas tangente à X en x ; alors d'après 3.1, $\Delta = c+n-1$ où Δ est la multiplicité de l'idéal jacobien $J \circ i$ et n la multiplicité de X en x . $y_1 = 0$ étant transversal, $\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi$ engendre $J \circ i \circ \pi$. On a donc

$$dy_1 \circ i \circ \pi = nt^{n-1} dt, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi = t^\Delta V(t) \quad \text{où } V \text{ est une unité}$$

et

$$\langle g, h \left[\frac{dy_1 \wedge dy_2}{f} \right] \rangle = 4\pi^2 \text{res} \{ n g t^{-c} V(t)^{-1} dt \}.$$

On remarque alors que

$$v(ght^{-c}V(t)^{-1}) = v(g) + a - c .$$

Supposons que $v(g) = c - 1 - a$. Ceci donne finalement $c - 1 - a + a - c = -1$ et

$$\langle g, h \left[\begin{smallmatrix} dy_1 \\ f \end{smallmatrix} \wedge dy_2 \right] \rangle = 4\pi^2 \lambda \quad \text{où } \lambda \neq 0 , \quad ght^{-c}V(t)^{-1} = \lambda t^{-1} + \dots .$$

En particulier dès que $v(g) = c - 1 - a$, la classe de g dans $\mathcal{O}_{X,X}$ ne peut être nulle. Ceci signifie exactement que $c - 1 - a \notin \Gamma$. Puisque $\ell g(\pi_* \mathcal{O}_Z)_X / \mathcal{O}_{X,X} = \frac{1}{2} \ell g(\pi_* \mathcal{O}_Z)_X / \mathbb{C}$, entre a et $c - 1 - a$ il y a donc l'un des deux dans Γ .

APPENDICE 2. SUR LA FORMULE D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soit X une courbe dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et soit $p : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une projection. Nous noterons encore p par abus de langage la restriction de p à X et nous supposerons que c'est un morphisme fini. Comme toujours, soit $\pi : Z \rightarrow X$ la normalisation de X . D'après 2.1, $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}((p \circ \pi)_* \mathcal{O}_Z, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1)$ est un Module dualisant sur Z et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(p_* \mathcal{O}_X, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1)$ est un Module dualisant sur X . Il existe donc un unique isomorphisme commutant aux traces :

$$\begin{aligned} \Omega_Z^1 &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}((p \circ \pi)_* \mathcal{O}_Z, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1) \\ \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}^1(\mathcal{O}_X, \Omega_{\mathbb{P}^2}^2) &\simeq \omega_X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(p_* \mathcal{O}_X, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1) \end{aligned}$$

ainsi que des morphismes Traces et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (p \circ \pi)_* \Omega_Z^1 & \xrightarrow{p_*(\text{Tr } \pi)} & p_* \omega_X \\ & \searrow & \downarrow \text{Tr } \pi \\ & & \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \end{array}$$

Le même calcul que celui effectué en 1.4 et 2.2 montre que si ω_Z^1 est une section de $(p \circ \pi)_* \Omega_Z^1$ sur un voisinage de $x \in \mathbb{P}^1$, on lui associe un germe de courant $H^{1,0} \in \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}^{1,0}$ défini par

$$\langle H, \eta_{\mathbb{P}^1}^{0,1} \rangle = \int_{\pi^{-1}(p^{-1}(U))} \omega_Z^1 \wedge \eta_{\mathbb{P}^1}^{0,1} \circ p \circ \pi.$$

Si $h \left[\frac{dy_1 \wedge dy_2}{f} \right] \in (p_* \omega_X)_x$, on lui associe le germe de courant $H^{1,0} \in \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}^{1,0}$ défini par

$$1/2i\pi \langle H, \eta_{\mathbb{P}^1}^{0,1} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi^{-1}(p^{-1}(U))} h \circ \pi \cdot \frac{d(y_1 \circ \pi)}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi} \wedge \eta_{\mathbb{P}^1}^{0,1} \circ p \circ \pi \Big|_{\left| \frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi \right| \geq \varepsilon}.$$

Ce courant est en fait une 1 forme-holomorphe sur \mathbb{P}^1 . Pour s'en apercevoir, il suffit puisque

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}^{1,0} \xrightarrow{d''} \mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}^{1,1} \rightarrow 0$$

est une suite exacte, que $d''H = 0$. Or

$$\begin{aligned} \langle d''H, \eta_{\mathbb{P}^1}^{0,0} \rangle &= 4\pi^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\left(\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi \right) = \varepsilon} h \circ \pi \cdot \frac{dy_1 \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi} \wedge \eta_{\mathbb{P}^1}^{0,0} \circ p \circ \pi \\ &= 4\pi^2 \sum \eta(x) \operatorname{res}_{x_i} \left(\frac{h \circ \pi \, dy_1 \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi} \right) \end{aligned}$$

où $\pi^{-1}(x) = \{ \dots, x_i, \dots \}$.

Or justement (6.2), ceci est nul car $h \in \mathcal{O}_{X,x}$. Mais nous allons en fait à l'aide de la formule d'interpolation de Lagrange déterminer de quelle forme différentielle il s'agit.

$\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathbb{C}\{y_1\}[y_2]$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,x} \simeq \mathbb{C}\{y_1\}$ module libre de type fini. Soit n son rang. Identifions \mathcal{O}_{Z,x_i} à $\mathbb{C}\{t_i\}$. On peut supposer les uniformisantes choisies en sorte que $y_1 \circ \pi = \bigoplus_i t_i^{n_i}$, $\sum n_i = n$ et $y_2 \circ \pi = \bigoplus_i \varphi_i(t_i)$. Posons $k = \text{ppcm } n_i$, $k_i = k/n_i$. On a un diagramme

commutatif entre germes d'espaces analytiques :

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{1 \dots n} (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\tilde{r}} & \coprod (Z, x_i) \\
 \downarrow f & & \downarrow \pi \\
 (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{r} & (\mathbb{P}^1, x) \\
 & & \downarrow p \\
 & & (X, x)
 \end{array}
 \quad \text{défini par } y_1 \circ r = u^k$$

$$u \circ f = \bigoplus_{\substack{i=1 \dots s \\ 1 \leq j \leq n_i}} v_{ij}$$

$$(\bigoplus_i t_i) \circ \tilde{r} = \bigoplus_{ij} \varepsilon_i^j v_{ij}^{k_i}$$

où ε_i est une racine primitive n_i -ième de 1.

Si $f(y_1, y_2) \in \mathbb{C}\{y_1, y_2\}$ est une équation locale de la courbe X en x qui soit un polynôme de Weierstrass de degré n en y_2 , on a

$$f(y_1, Y) = \prod_{i,j} (Y - \varphi_i(\varepsilon_i^j y_1^{1/n_i}))$$

Si maintenant $h \in \mathcal{O}_{X,x}$ comme ci-dessus, il existe $h(y_1, Y) \in \mathbb{C}\{y_1\}[Y]$ de degré $\leq n-1$ tel que $h = \text{cl } h(y_1, y_2) \text{ mod } (f)$. On a alors dans $\mathbb{C}\{y_1^{1/k}\}[Y]$

$$h(y_1, Y) = \sum_{i,j} \frac{h(y_1, \varphi_i(\varepsilon_i^j y_1^{1/n_i})) f(y_1, Y)}{\frac{\partial f}{\partial y_2}(y_1, \varphi_i(\varepsilon_i^j y_1^{1/n_i})) [Y - \varphi_i(\varepsilon_i^j y_1^{1/n_i})]}$$

c'est la formule d'interpolation de Lagrange.

Identifions dans les 2 membres le coefficient du terme en Y^{n-1} . Dans le premier membre, désignons le par $b_1(y_1)$. Dans le deuxième membre, c'est $\sum_{i,j} \frac{h(y_1, \varphi_i(\varepsilon_i^j y_1^{1/n_i}))}{\frac{\partial f}{\partial y_2}(y_1, \varphi_i(\varepsilon_i^j y_1^{1/n_i}))}$. Au voisinage de x , r est un revêtement de degré k . Si $\eta^{0,1}$ est une $0,1$ forme sur \mathbb{P}^1 à support compact dans un petit voisinage U de x , on a donc

$$\begin{aligned}
 \int_U b_1(y_1) dy_1 \wedge \eta^{0,1} &= 1/k \int_{r^{-1}(U)} b_1(y_1) r^* d(y_1 \circ r) \wedge \eta^{0,1} \circ r \\
 &= 1/k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r^{-1}(U)} \sum_{i,j} \frac{h(u^k, \varphi_i(\varepsilon_i^j u^{k_i}))}{\frac{\partial f}{\partial y_2}(u^k, \varphi_i(\varepsilon_i^j u^{k_i}))} d(y_1 \circ r) \wedge \eta^{0,1} \circ r \\
 &\quad |u| \geq \varepsilon
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_U b_1(y_1) dy_1 \wedge \eta^{0,1} &= \\ &= \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{\tilde{r}^{-1}(r^{-1}(U)) \\ |v_{ij}| \geq \varepsilon}} \frac{h \circ \pi \circ \tilde{r}}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ \pi \circ \tilde{r}} d(y_1 \circ p \circ \pi \circ \tilde{r}) \wedge \eta^{0,1} \circ p \circ \pi \circ \tilde{r}. \end{aligned} \quad (*)$$

En effet $y_1 \circ \pi \circ \tilde{r} = \oplus v_{ij}^k$, $y_2 \circ \pi \circ \tilde{r} = \oplus \varphi_i(\mathcal{E}_i^j v_{ij}^{k_i})$. Or

$$\langle H, \eta^{0,1} \rangle = (2i\pi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{\pi^{-1}(p^{-1}(U)) \\ |\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi| \geq \varepsilon}} \frac{h \circ \pi}{\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi} d(y_1 \circ \pi) \wedge \eta^{0,1} \circ p \circ \pi$$

π étant la normalisation de X , on peut considérer que U est assez petit pour que $\pi^{-1}(p^{-1}(U)) = \cup V_i$ où V_i voisinage ouvert de x_i et $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Alors

$$\langle H, \eta^{0,1} \rangle = (2i\pi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i \int_{\substack{V_i \\ |\frac{\partial f}{\partial y_2} \circ i \circ \pi| \geq \varepsilon}} \frac{h(t_i^{n_i}, \varphi_i(t_i))}{\frac{\partial f}{\partial y_2}(t_i^{n_i}, \varphi_i(t_i))} d(t_i^{n_i}) \wedge \eta^{0,1} \circ p \circ \pi.$$

Au-dessus de V_i , n_i exemplaires de \mathbb{C} se projettent par \tilde{r} , et la restriction de \tilde{r} à chacun de ces exemplaires est un revêtement d'ordre k_i

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \frac{h(t_i^{n_i}, \varphi_i(t_i))}{\frac{\partial f}{\partial y_2}(t_i^{n_i}, \varphi_i(t_i))} d(t_i^{n_i}) \wedge \eta^{0,1} \circ p \circ \pi &= \\ &= \frac{1}{k_i} \int_{V_{ij}} \frac{h(v_{ij}^k, \varphi_i(\mathcal{E}_i^j v_{ij}^{k_i}))}{\frac{\partial f}{\partial y_2}(v_{ij}^k, \varphi_i(\mathcal{E}_i^j v_{ij}^{k_i}))} d(v_{ij}^k) \wedge \eta^{0,1} \circ p \circ \pi \circ \tilde{r} \end{aligned}$$

où V_{ij} est la trace de $\tilde{r}^{-1}(V_i)$ sur le j^e exemplaire de \mathbb{C} qui se projette sur V_i . Au total, on a donc :

$$\langle H, \eta^{0,1} \rangle = (2i\pi) \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{f^{-1}(r^{-1}(U))} \frac{h \circ \pi \circ \tilde{r}}{\left| \frac{\partial f}{\partial y_2} \circ \pi \circ \tilde{r} \right|} d(y_1 \circ p \circ \pi \circ \tilde{r}) \wedge \eta^{0,1} \circ p \circ \pi \circ \tilde{r} \quad (**)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_2} \circ \pi \circ \tilde{r} \right| \geq \varepsilon$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_2} \circ \pi \circ \tilde{r} \right|_{\mathbb{C}_{ij}} = v_{ij}^{s_{ij}} T_{ij}(v_{ij}) \quad \text{où} \quad T_{ij}(0) \neq 0.$$

Par conséquent, les limites des 2 \int dans (*) et (**) sont les mêmes et

$$\langle H, \eta^{0,1} \rangle = (2i\pi) \langle b_1(y_1) dy_1, \eta^{0,1} \rangle.$$

Donc

$$H = (2i\pi) b_1(y_1) dy_1.$$

Si $h \in \mathcal{O}_{X,x}$, $b_1(y)$ est la trace de $h \in \mathbb{C}\{y_1\}[y_2]$ sur $\mathbb{C}\{y_1\}$ par définition. On a donc finalement :

$$\text{Tr } h \left[\begin{smallmatrix} dy_1 \wedge dy_2 \\ f \end{smallmatrix} \right] = (2i\pi) (\text{tr } h) dy_1.$$

REFERENCES

- [1] S.S. ABHYANKAR - Historical ramblings in algebraic geometry and related algebra. American Mathematical monthly. Vol. 83, n° 6 (1976).
- [2] F. ELZEIN - Complexe dualisant et applications. Thèse Université Paris 7 (1977). Bull. Soc. Math. mémoire n° 58.
- [3] R. GODEMENT - Théorie des faisceaux. Hermann.
- [4] P. GRIFFITHS, J. HARRIS - Principles of algebraic geometry. A Wiley Interscience.
- [5] M. HERRERA, D. LIBERMANN - Residues and principal values on complex spaces. Math. Ann. 194, 259-294 (1971).
- [6] LÊ-DŨNG TRÁNG - Surfaces with smooth normalization : proceedings of Algebraic Geometry meeting at Sapporo (1975).

- [7] B. MALGRANGE - Exposé n° 246, Séminaire Bourbaki, Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.
- [8] B. MALGRANGE - Séminaire "Opérateurs différentiels et pseudodifférentiels" fascicule 4 : caractérisation homologique de la dimension. (75) Grenoble.
- [9] E. PICARD, G. SIMART - Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Chelsea.
- [10] R. PIENE - Ideals associated to a desingularisation. Report n° 14 (1978), Institut Mittag Leffler.
- [11] J.P. RAMIS et G. RUGET - Résidus et dualité. Inventiones Math. 26, 89-138 (1974).
- [12] L. SZPIRO - The theory of the adjoint system.
- [13] B. TEISSIER, M. MERLE - Conditions d'adjonction d'après Duval : séminaire sur les singularités des surfaces 1976-77 (Demazure, Pinkham, Teissier) Ecole Polytechnique.

(janvier 1979)