COURS DE L'INSTITUT FOURIER

L. BOUTET DE MONVEL

Opérateurs elliptiques

Cours de l'institut Fourier, tome 11 (1975-1976)
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1975-1976__11__1_0>

J'ai essentiellement repris le rapport , en détaillant les démonstraions qui n'y étaient qu'esquissées . Les §1.4 , 3.7 , 4.5 et 4.6 ne figuraient pas dans le rapport (4.6 n'est pas en forme) ; en revanche je n'ai pas repris le §5 du rapport . Il faudrait rajouter (au §4.1) un théorème de dualité entre homologies de D et ${}^tD$ (que j'ai oublié) . Je n'ai pas démontré la régularité analytique des solutions d'une équation elliptique à coefficients analytiques ; c'est un résultat important , mais qui coute plus cher (voir rapport dans le cas des opérateurs à coefficients constants)

Je n'ai pas eu le courage de faire le point sur ce dont on a besoin de théorie des distributions ; c'est assez peu de toute façon , et avec quelques galipettes , on pourrait peut-être s'en passer complètement . Il faut en tout cas la définition , la réflexivité , la correspondance noyau opérateur (on n'a pas besoin de la réciproque (th. de Schwartz) car tous les opérateurs introduits ont un noyau , défini par une intégrale oscillante); on n'a pas besoin de la nucléarité ; elle est plutôt avantageusement remplacée par des considérations sur la décroissance rapide de la transformée de Fourier , qui équivalent à la nucléarité , et sont utiles de toute façon . Il faut évidemment la définition de la transformation de Fourier , dans les espaces et ' de Schwartz ; aussi la formule de réciprocité (qui ne couterait pas cher au §2) - en tout cas , sauf et ' , il y a tout ce qu'il faut dans TS .

La preuve présentée au §3.2 est un peu artificielle ; une autre preuve , plus systématique , repose sur la méthode de la phase stationnaire , qui permet de prouver qu'une expression de la forme $e^{ix.y}$ a(x-y , +) dy d est une amplitude , et d'en trouver un développement asymptotique . Quoiqu'un peu plus lourde , c'est la méthode qui s'adapte immédiatement pour l'étude des opérateurs de Hörmander .

Enfin j'ai introduit une classe un peu plus restreinte d'amplitudes , avec laquelle le symbole est plus facile à définir et à manier que dans le rapport .

§0 Notations et préliminaires

1. L'espace numérique R^n sera toujours muni de sa structure euclidienne et de sa mesure de Lebesgue canoniques . Si $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_n)$ sont deux vecteurs , le produit scalaire et la norme sont notés

$$x.y = \sum x_j \, y_j$$

$$|x| = (x.x)^{\frac{1}{2}} \; .$$

La mesure de Lebesgue , notée dx , est l'unique mesure invariante par translation qui charge de la masse 1 le cube unité $[0,1]^n$.

Un multi-indice est une suite $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ d'entiers positifs (le nombre n sera toujours clair d'après le contexte , et nous ne l'inclurons pas dans la notation) . Si α est un multi-indice , et x un vecteur de R^n , on pose

$$|\alpha| = {}_1 + \cdot\cdot \quad {}_n$$

$$\alpha! = {}_1! \cdot\cdot \quad {}_n!$$

$$x^\alpha = {}_1 \cdot\cdot \; x_n$$

$$(\partial/\partial x)^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdot\cdot \; (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$$

de sorte que , par exemple , si f est une fonction de classe C^N sur R^n , la formule de Taylor s'écrit

$$f(y) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} (\partial/\partial x)^\alpha f(x) \quad (y-x)^\alpha \quad + \; O(|y-x|^N)$$

2. Distributions

Soit X un ouvert de R^n . On note $C^\infty(X)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur X . On le munit de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de leurs dérivées , qui en fait un espace de Fréchet (nucléaire) . Si (X_k) est une suite croissante de parties compactes de X dont les intérieurs recouvrent X (par exemple : X_k est l'ensemble des $x \in X$

tels que $|x| \leqslant k$, et que la distance de x à la frontière de X soit $\geqslant 1/k$) , les seminormes

$$p_k(f) = \sup_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ x \in X_k}} \left|(\partial/\partial x)^\alpha f(x)\right|$$

forment une suite fondamentale de seminormes .

Rappelons que $X \mapsto C^\infty(X)$ est un faisceau de fonctions sur R^n . Si $f \in C^\infty(X)$, le support de f est le plus petit fermé supp f en dehors duquel f est nulle .

On note $C_o^\infty(X)$ le sous-espace des fonctions à support compact de $C^\infty(X)$. On le munit de la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle l'application de multiplication $f \mapsto fg$ est continue : $C^\infty(X) \to C_o^\infty(X)$ pour toute $g \in C_o^\infty(X)$ (c'est encore un espace nucléaire , mais ce n'est plus un Fréchet) .

$C^{-\infty}(X)$ désigne le dual de $C_o^\infty(X)$; ses éléments sont les fonctions généralisées , ou distributions . On identifie $C^\infty(X)$ à un sous-espace de $C^{-\infty}(X)$ par l'application qui à $f \in C^\infty(X)$ associe la forme linéaire sur $C_o^\infty(X)$:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

Si U est un ouvert de X , on a une application de restriction canonique : $C^{-\infty}(X) \to C^{-\infty}(U)$, qui à $f \in C^{-\infty}(X)$ associe la restriction de f à $C_o^\infty(U) \subset C_o^\infty(X)$. Rappelons que $U \mapsto C^{-\infty}(U)$ est un faisceau (d'espaces vectoriels) sur R^n . Si $f \in C^{-\infty}(X)$, le support de f est le plus petit fermé supp f tel que la restriction de f au complémentaire de supp f soit nulle .

$C_o^{-\infty}(X)$ désigne le sous-espace des distributions à support compact de $C^{-\infty}(X)$; il s'identifie au dual de $C^\infty(X)$.

(On munit habituellement $C^{-\infty}(X)$ et $C_o^{-\infty}(X)$ de la topologie forte , qui coïncide avec la topologie de Mackey car les parties bornées de $C^\infty(X)$ ou de $C_o^\infty(X)$ sont relativement compactes ; les quatre espaces $C^\infty(X)$, $C_o^\infty(X)$, $C^{-\infty}(X)$, $C_o^{-\infty}(X)$ sont reflexifs) .

3. Transformation de Fourier

On note $\mathcal{S}(R^n)$ l'espace des fonctions f de classe C^∞ sur R^n telles que pour tous multi-indices α, β, $x^\alpha(\partial/\partial x)^\beta f$ soit bornée (f est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées). On le munit de la topologie définie par la suite de semi-normes

$$p_k(f) = \sup_{\substack{|\alpha+\beta|\leq k \\ x\in R^n}} |x^\alpha (\partial/\partial x)^\beta f(x)|$$

qui en fait un espace de Fréchet (nucléaire)

$\mathcal{S}'(R^n)$ désigne le dual fort de $\mathcal{S}(R^n)$.

Si $f \in \mathcal{S}(R^n)$, la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix.\xi} f(x)\, dx$$

La transformation de Fourier est un automorphisme de $\mathcal{S}$ et se prolonge continument en un automorphisme de $\mathcal{S}'$. L'isomorphisme inverse est donné par la formule

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

valable par exemple si $\hat{f}$ est intégrable et f continue.

Plus généralement, si X est un ouvert de R^m, on note $S^{-\infty}(X\times R^n)$ l'espace des fonctions f de classe C^∞ sur $X\times R^n$ telles que pour tout compact $K\subset X$ et tous multi-indices α,β,γ, $(\partial/\partial x)^\alpha y^\beta (\partial/\partial y)^\gamma f$ soit bornée sur $K\times R^n$. La transformation de Fourier partielle :

$$f \longmapsto \hat{f}(x,\eta) = \int e^{-iy.\eta} f(x,y)\, dy$$

est un automorphisme de $S^{-\infty}(X\ R^n)$.

Rappelons enfin que si f est une distribution à support compact sur R^n, f est tempérée ; $\hat{f}$ est une fonction C^∞ (qui se prolonge en une fonction analytique entière) donnée par la formule

$$\hat{f}(\xi) = \langle f, e^{ix.\xi}\rangle$$

$\hat{f}$ et chacune de ses dérivées est dominée par une puissance de $(1+|\xi|)$.

4. Notations concernant les variétés

Toutes les variétés seront de dimension finie supposées séparées , dénombrables à l'infini , et de classe C^∞. Les fibrés vectoriels sont aussi supposés C^∞ (et la dimension de la fibre finie !)

Si X est une variété , TX désigne son fibré tangent , et T^*X son fibré cotangent . $C^\infty(X)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ numériques (à valeurs complexes) sur X ; c'est un espace de Fréchet (comme il devrait résulter de VAR §2 n°3) . $C_0^\infty(X)$ est le sous-espace des fonctions C^∞ à support compact , et sa topologie est définie comme au n°2 . Plus généralement , si E est un fibré vectoriel sur X , $C^\infty(X,E)$ est l'espace de Fréchet dès sections C^∞ de E , et $C_0^\infty(X,E)$ le sous-espace des sections C^∞ à support compact (sa topologie est à nouveau définie comme au n°2) .

$C_0^\infty(X)$ et $C^\infty(X)$ ne sont pas canoniquement en dualité , car la dualité définie par la mesure de Lebesgue au n°2 n'est pas invariante par changement de coordonnées . On note Ω $|\omega|$ le fibré vectoriel réel dont les sections sont les formes tordues de degré maximum sur X : $C_0^\infty(X,\Omega)$ s'identifie donc à l'espace des mesures à support compact et de densité C^∞ sur X , et est de façon canonique en dualité avec $C^\infty(X)$. Enfin $C^{-\infty}(X)$ désigne le dual de $C_0^\infty(X,\Omega)$, de sorte que $C^\infty(X)$ s'identifie à un sous espace de $C^{-\infty}(X)$; plus généralement si E est un fibré vectoriel sur X , on note $C^{-\infty}(X,E)$ le dual de $C_0^\infty(X,E'\otimes\Omega)$ (où E' désigne le dual de E); $C^\infty(X,E)$ s'identifie canoniquement à un sous espace de $C^{-\infty}(X,E)$. Les éléments de $C^{-\infty}(X,E)$ sont les sections généralisées , ou sections à coefficients distributions , de E . $C_0^{-\infty}(X)$, resp. $C_0^{-\infty}(X,E)$ désigne le sous espace de $C^{-\infty}(X)$, resp. $C^{-\infty}(X,E)$, des sections généralisées à support compact ; il s'identifie au dual de $C^\infty(X,\Omega)$, resp. $C^\infty(X,E'\otimes\Omega)$. Soit L un sous-esp de $C^{-\infty}$,

~~On dit qu'un sous-espace $L\subset C^{-\infty}(X)$~~ est localisable si on a $\varphi.L\subset L$ pour toute ~~$\varphi\in C_0^\infty(X)$~~ . On note alors $L_{loc}\subset C^{-\infty}(X)$ l'ensemble des distributions $f\in C^{-\infty}(X)$ telles que $\varphi f\in L$ pour toute $\varphi\in C_0^\infty(X)$, et L_{comp} l'ensemble des distributions à support compact de L ou L_{loc} . Plus maréchalement généralement si E est un fibré vectoriel sur X , on pose $L_{loc}(X,E) = L_{loc}.C^\infty(X,E)\subset C^{-\infty}(X,E)$; ses éléments sont les sections à coefficients dans L_{loc} de E .

5. Opérateurs pseudo-différentiels - préliminaires

d'un e.v. V / Choisir une base quand il le faut mais pas avant.

Soit X un ouvert de R^n, et soit A un opérateur linéaire continu : $C^\infty(X) \to C^\infty(X)$. Pour $\xi \in R^n V^*$, posons

$$a(x,\xi) = e^{-ix.\xi} A(e^{i\cancel{x}.\xi}) \qquad A_y(e^{iy.\xi})$$

e_ξ est la fct $x \mapsto e^{ix.\xi}$

($e^{ix.\xi}$ étant considéré comme élément de $C^\infty(X)$).

Si $f \in C_o^\infty(X) \subset C_o(R^n)$, $\hat{f}$ est bien définie et on a

$$f = \cancel{(2\pi)^{-n}} \cdot \int e^{ix.\xi}_{e_\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi \qquad f = \int e_\xi \hat{f}(\xi) d\xi$$

L'intégrale peut être considérée comme intégrale convergente à valeurs dans $C^\infty(X)$. Par linéarité et continuité on a donc

(INT VIII) $A(e^\xi)$ $f(x) =$

$$Af = (2\pi)^{-n} \int A(e^{ix.\xi})\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \,/\, (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} a(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

La fonction $a(x,\xi)$ est une fonction C^∞ sur $X \times R^n$ (parceque $\xi \to e_\xi$ est une application $C^\infty : R^n \to C^\infty(X)$). Elle jouit en outre de la propriété suivante :

(0.1) Pour tout compact $K \subset X$ il existe des nombres positifs C et N tels qu'on ait

$$|a(x,\xi)| \leq C\,(1+|\xi|)^N \qquad \text{pour } x \in K,\ \xi \in R^n.$$

En effet comme A est un opérateur linéaire continu, $p(f) = \sup_{x \in K} |Af(x)|$ est une seminorme continue sur $C^\infty(X)$, donc il existe un compact $L \subset X$ et des nombres c, N tels que pour $f \in C^\infty(X)$ on ait

$$p(f) \leq c \sup_{|\alpha| \leq N,\ x \in L} |(\partial/\partial x)^\alpha f(x)|$$

On a donc, avec une constante C convenable : $p(e^{ix.\xi}) \leq C(1+|\xi|)^N$ puisque $(\partial/\partial x)^\alpha e^{ix.\xi} = (i\xi)^\alpha e^{ix.\xi}$, et $e^{ix.\xi}$ est de module 1. L'assertion (0.1) en résulte aussitôt.

Chaque dérivée de $a(x,\xi)$ vérifie encore (0.1) ; celà résulte par récurrence du fait que $\partial a/\partial x_j$ (resp. $\partial a/\partial \xi_j$) correspond au commutateur $[\partial/\partial x_j, A]$ (resp. $-i[x_j, A]$), puisqu'on a

$$\partial a/\partial x_j = e^{-ix.\xi}(-i\xi_j\, A(e^{ix.\xi}) + (\partial/\partial x_j) A(e^{ix.\xi}))$$

et $i\xi_j\, e^{ix.\xi} = (\frac{\partial}{\partial x_j})\, e^{ix.\xi}$ ... (resp. calcul analogue)

Inversement si $a(x,\xi)$ est une fonction continue sur $X\times R^n$ qui vérifie (0.1) , on lui associe un opérateur $A = a(x,D)$ défini par

$$(0.2)\quad a(x,D)\, f = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi}\, a(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \qquad \text{si} \quad f \in C_0^\infty(X)$$

C'est un opérateur continu : $C_0^\infty(X) \to C(X)$; il est continu $C_0^\infty(X) \to C^\infty(X)$ si chaque dérivée de a par rapport à x vérifie (0.1) ; il se prolonge en un opérateur continu : $C_0^{-\infty}(X) \to C^\infty(X)$ si $a \in S^{-\infty}(X\times R^n)$ (avec la notation du n°3)

Si S est un ensemble de fonctions vérifiant (0.1) , on notera OPS l'ensemble des opérateurs $a(x,D)$ pour $a \in S$. Ainsi si S est l'ensemble des polynômes de ξ à coefficients fonctions C^∞ de x , OPS est l'ensemble des opérateurs différentiels à coefficients C^∞ (car il résulte de la formule de réciprocité de Fourier qu'on a $a(x,D) = \mathrm{Id}$ si $a = 1$, d'où , en dérivant sous le signe $a(x,D) = (i\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$ si $a = \xi^\alpha$).

Nous appellerons amplitudes les fonctions satisfaisant à (0.1) . Les opérateurs pseudo-différentiels correspondent aux amplitudes décrites au §1 . Pour l'étude des opérateurs elliptiques , on n'a pas besoin d'autres amplitudes que celles du §1 ; pour d'autres problèmes , il peut être utile au contraire d'introduire des ensembles d'amplitudes plus grands (par exemple pour étudier les opérateurs hypo-elliptiques) , ou plus petits (par exemple pour étudier l'analyticité des solutions d'une équation aux dérivées partielles) .

En pratique il sera commode de reporter dans la formule (0.2) la définition de la transformée de Fourier de f :

$$(0.2)\text{bis}\quad Af(x) = \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\, a(x,\xi)\, f(y)\, dy\, d\xi$$

où pour l'instant l'intégrale est définie en intégrant d'abord par rapport à y , puis par rapport à ξ . On peut alors généraliser en remplaçant la fonction $a(x,\xi)$ par une fonction convenable $a(x,y,\xi)$ sur $X\times X\times R^n$. Comme on verra , ceci n'introduit pas vraiment d'opérateurs nouveaux , mais donne une grande souplesse dans le maniment des opérateurs pseudo-différentiels .

Le §2 donne une présentation systématique d'intégrales telles que (0.2)bis , qui en rend l'utilisation très commode .

§1 Amplitudes

1. Définitions

On appelle cône C^∞ tout fibré principal C^∞ (séparé, dénombrable à l'infini) de groupe $R_+^\times$ (groupe multiplicatif des nombres réels positifs).

Soit U un cône. La base de U est la variété $X = U/R_+^*$. U est isomorphe au cône trivial $X \times R_+$; se donner un isomorphisme de U sur $X \times R_+$ revient à se donner une fonction $r : U \to R_+$ (la deuxième projection) homogène de degré 1 ($r(\lambda u) = \lambda\, r(u)$ pour $\lambda > 0$) (de telles fonctions existent localement, donc aussi globalement comme on voit en utilisant une partition de l'unité sur X).

(1.1) Définition.- Soit $m \in \mathbb{R}$. On note $S^m(U)$ l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(U)$ telles que, avec $a_\lambda(u) = a(\lambda u)$, l'ensemble des $\lambda^{-m} a_\lambda$, $\lambda \geq 1$, soit borné dans $C^\infty(U)$.

(1.1)bis Si X est une variété, E un fibré vectoriel réel sur X, on notera aussi $S^m(E)$ l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(E)$ dont la restriction au cône $E - 0_E$ appartient à S^m (0_E désigne par abus la section nulle de E) : on impose donc ~~en plus~~ que a soit C^∞ au voisinage de la section nulle.

(1.2) Plus généralement, si U est un cône, et E un R_+^*-fibré vectoriel sur U, $S^m(U,E)$ désigne l'ensemble des sections C^∞ a de E telles que l'ensemble des $\lambda^{-m} a_\lambda$, $\lambda \geq 1$, soit borné dans $C^\infty(U,E)$ (où on a posé $a_\lambda(u) = H_\lambda^{-1}\, a(\lambda u)$, $H_\lambda v$ désignant le résultat de l'opération définie par $\lambda \in R_+$ sur $v \in E$)

(1.3) Exemple : on dit qu'une fonction numérique a sur U est homogène de degré m si on a $a(\lambda u) = \lambda^m a(u)$. Si a est somme finie de fonctions homogènes de degré $\leq m$, on a $a \in S^m(U)$

On munit $S^m(U)$ de la topologie définie comme suit : si (p_k) est une suite fondamentale de semi-normes de $C^\infty(U)$, la suite (P_k) définie par

$$P_k(a) = \sup_{\lambda \geq 1} \lambda^{-m} p_k(a_\lambda)$$

est une suite fondamentale de seminormes de $S^m(U)$.

(1.4) <u>Proposition</u>.- $S^m(U)$ <u>est un espace de Fréchet</u> .

Tout d'abord $S^m(U)$ est métrisable puisque sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes (EVT ...) , et que l'inclusion $S^m(U) \subset C^\infty(U)$ est continue , donc $S^m(U)$ est séparé .

Remarquons maintenant que si p est une semi-norme continue sur $C\,(U)$, et $T \geqslant 1$, la seminorme

$$p^T(f) = \sup_{1 \leqslant \lambda \leqslant T} \lambda^{-m} p(f_\lambda)$$

est continue sur $C^\infty(U)$ (l'ensemble des homothéties de rapport λ , $1 \leqslant \lambda \leqslant T$ est un ensemble compact de difféomorphismes de U) .

Soit alors (a_j) une suite de Cauchy de $S^m(U)$. Alors pour tout k la suite $\lambda^{-m}p_k((a_i-a_j)_\lambda)$ tend vers 0 pour $i,j \to \infty$, uniformément pour $\lambda \geqslant 1$. Faisant $\lambda = 1$, on voit que (a_j) est une suite de Cauchy de $C^\infty(U)$, donc (a_j) tend vers une limite $a \in C^\infty(U)$ pour $j \to \infty$. En outre pour tout k $\lambda^{-m}p_k((a_j)_\lambda)$ est uniformément borné pour $j \geqslant 1$, $\lambda \geqslant 1$; à la limite on voit que $\lambda^{-m}p_k(a_\lambda)$ est borné pour $\lambda \geqslant 1$, d'où $a \in S^m(U)$. Enfin , toujours en passant à la limite , on voit que $\lambda^{-m}p_k((a_j-a)_\lambda)$ tend vers 0 pour $j \to \infty$, uniformément pour $\lambda \geqslant 1$, donc (a_j) tend vers a dans $S^m(U)$. $S^m(U)$ est donc complet , et ceci prouve la proposition.

(1.5) On a évidemment $S^m \subset S^{m'}$ si $m \leqslant m'$.

On pose
$$S^{-\infty}(U) = \bigcap S^m(U)$$
$$S^{\infty}(U) = \bigcup S^m(U)$$

(la notation $S^{-\infty}$ est cohérente avec celle du §0 , n°3)

$S^{-\infty}$ est muni de la topologie limite projective , qui en fait un espace de Fréchet ; S^∞ est muni de la topologie limite inductive (ce n'est pas un espace de Fréchet) : dire qu'une application linéaire de S^∞ dans un espace localement convexe est continue revient donc à dire que sa restriction à S^m est continue pour tout m .

Soit P un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur U . On dit que P est ~~homogène de degré k~~ isobare de poids k ~~(par rapport~~ aux homothéties) si on a $P(a)_\lambda = \lambda^k P(a_\lambda)$ pour toute $a \in C^\infty(U)$. Ainsi sur le cône $R^n \times R_+$ les opérateurs homogènes de degré k sont les opérateurs de la forme

$$P = \sum r^{k+j} a_{\alpha,j}(\partial/\partial x)^{\alpha} (\partial/\partial r)^{j}$$

où les coefficients $a_{\alpha,j}$ sont C^{∞}, homogènes de degré 0

(1.6) Proposition.- Si P est un opérateur différentiel à coefficients C^{∞}, homogène de degré k sur U, P ~~est~~ continu : $S^{m}(U) \to S^{m+k}(U)$

Celà résulte immédiatement du fait qu'on a $\lambda^{-m-k}P(a)_{\lambda} = P(\lambda^{-m}a_{\lambda})$

(1.7) Proposition.- Le produit $(a,b) \mapsto ab$ ~~est~~ bilinéaire continu : $S^{m} \times S^{m'} \to S^{m+m'}$.

Celà résulte aussitôt de ce qu'on a $\lambda^{-m-m'}(ab)_{\lambda} = (\lambda^{-m}a_{\lambda})(\lambda^{-m'}b_{\lambda})$

(1.8) Proposition.- Soit $F : U \to U'$ un morphisme de cônes (ie. F est C^{∞}, et $F(\lambda u) = \lambda F(u)$ pour $\lambda > 0$). Alors la composition $a \mapsto a_{\circ}F$ est continue : $S^{m}(U') \to S^{m}(U)$.

Celà résulte du fait que la composition $a \mapsto a_{\circ}F$ est continue $C^{\infty}(U') \to C^{\infty}(U)$ et qu'on a $(a_{\circ}F)_{\lambda} = a_{\lambda\circ}F$.

(1.9) Proposition.- Soit G une fonction C^{∞} $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Alors la composition $a \mapsto G_{\circ}a$ est continue (non linéaire) : $S^{o} \to S^{o}$.

En effet la composition $a \mapsto G_{\circ}a$ est continue dans $C^{\infty}(U)$, et on a $(G_{\circ}a)_{\lambda} = G_{\circ}a_{\lambda}$. Plus généralement si $a \in S^{o}$, et si G est définie et C^{∞} au voisinage de l'adhérence de l'image de a, on a $G_{\circ}a \in S^{o}$, car il existe une fonction C^{∞} G_{1} définie dans $\mathbb{C}$ entier, qui coïncide avec G sur l'image de a. Ainsi si $a \in S^{o}$ et si on a $|a| \geq \varepsilon > 0$, on a $1/a \in S^{o}$.

2. Approximations

(1.10) Soit U un cône, ~~qu'on identifie à $X \times R_{+}$ au moyen d'une fonction $r > 0$, C^{∞}, homogène de degré 1~~. On dit qu'une partie V de U est voisinage de l'infini si elle contient une partie ouverte V' telle que pour tout $u \in U$ il existe $\lambda_0 \in R_{+}$ tel que $\lambda u \in V'$ pour $\lambda > \lambda_0$ de façon équivalente : il existe une fonction $c > 0$, continue et homogène de degré 0 telle que $r(u) > c(u)$ implique $u \in V$.

Nous dirons qu'une partie V de U est saturée si on a $\lambda V \subset V$ pour $\lambda \geq 1$. Si V est un ouvert saturé de U , on note encore $S^m(V)$ l'espace des fonctions $a \in C^\infty(V)$ telles que l'ensemble des $\lambda^{-m} a_\lambda | V$ soit borné dans $C^\infty(V)$. Par abus de langage nous dirons qu'une fonction a est de classe S^m au voisinage de l'infini s'il existe un voisinage ouvert saturé de l'infini V tel que a soit défini dans V et qu'on ait $a|V \in S^m(V)$.

Soit V un voisinage ouvert de l'infini , saturé . Il existe une fonction $\chi \in C^\infty(U)$ nulle au voisinage de $\complement V$, et égale à 1 au voisinage de l'infini . On a alors $\chi \in S^0(U)$, et si $a \in S^m(V)$, la fonction a' qui est égale à χa dans V , et à 0 hors de V, appartient à $S^m(U)$. Ainsi si a est de classe S^m au voisinage de l'infini , il existe une fonction $a' \in S^m(U)$ qui coïncide avec a au voisinage de l'infini .

(Remarquons que si $a \in C^\infty(U)$, on a $a \in S^m(U)$ si et seulement si la restriction de a à V est de classe S^m, ~~si~~ où V est n'importe quel voisinage de l'infini , ~~ouvert~~ et saturé ; la condition $a \in S^m$ dépend uniquement du comportement de a à l'infini).

Soient f et g deux fonctions continues sur U . Nous dirons que f domine g au voisinage de l'infini et nous écrirons

(1.11) $g \lesssim f$

si pour tout cône $U' \subset U$ de base compacte , il existe un nombre $C > 0$ tel que $g \leq Cf$ au voisinage de l'infini dans U'

Par exemple si $a \in S^m(u)$, on a toujours $|a| \lesssim r^m$.

si $m \in \mathbb{R}$

(1.12) Exemple.- On dit qu'une ~~amplitude~~ fonction $a \in S^m(U)$ est elliptique de degré m si on a $r^m \lesssim |a|$. Alors $1/a$ est de classe S^{-m} au voisinage de l'infini . (il y a alors 1 seul m [illegible])

En effet il est immédiat que $r^{-m}a$ est elliptique de degré 0 si a est elliptique de degré m , et il suffit donc de prouver l'assertion pour $m = 0$. Dans ce cas , pour tout cône $U' \subset U$ ouvert de base relativement compacte , il existe un voisinage ouvert saturé de l'infini V dans U' et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que $|a| \geq \varepsilon$ dans V. On a alors $1/a \in S^0(V)$ en vertu de la proposition (1.9) et de la remarque qui suit la démonstration de cette proposition .

En particulier un polynôme

$$a = \sum_{0}^{m} a_j \, r^j$$

où les a_j sont C^{∞}, homogènes de degré 0, est elliptique de degré m si et seulement si a_m ne s'annule pas (est inversible) ; ~~et~~ $1/a$ est alors de classe S^{-m}, elliptique, au voisinage de l'infini.

(1.13) Une partie B de $S^m(U)$ est bornée si l'ensemble des $\lambda^{-m} a_\lambda$, $\lambda \geqslant 1$, $a \in B$, est borné dans $C^{\infty}(U)$ (ceci est une condition nécéssaire et suffisante pour que, avec les notations de (1.4), les semi-normes $\lambda^{-m} p_k(a_\lambda)$ soient uniformément bornées pour $\lambda \geqslant 1$ et $a \in B$, donc que les seminormes $P_k(a)$ soient uniformément bornées pour $a \in B$).

<u>Proposition</u>.- <u>Soit</u> B <u>une partie de</u> $S^m(U)$. <u>On suppose que</u> $\lambda^{-m} a_\lambda$ <u>tend vers</u> 0 quand $\lambda \to \infty$ <u>dans</u> $C^{\infty}(U)$, <u>uniformément pour</u> $a \in B$. <u>Alors</u> B <u>est relativement compacte dans</u> $S^m(U)$, <u>et sur</u> B <u>la topologie de la convergence simple, ou de</u> C^{∞}, <u>coïncide avec celle de</u> S^m.

En particulier une partie bornée de $S^{m'}$ est relativement compacte dans S^m si $m' \leqslant m$.

(La condition de la proposition n'est évidemment pas nécessaire pour que B soit rel. compacte : elle n'est pas vérifiée pour la partie à un élément : $\{r\} \subset S^1$)

Si B satisfait à la condition de la proposition, B est bornée donc précompacte dans C^{∞} (rappelons que les parties fermées bornées de C^{∞} sont compactes ; celà résulte du théorème d'Ascoli). Il suffit donc de montrer que les structures uniformes de C^{∞} et de S^m induisent la même structure uniforme sur B. Or soit p une semi-norme continue sur C^{∞}. Nous avons vu que la semi-norme

$$p^T(f) = \sup_{1 \leqslant \lambda \leqslant T} \lambda^{-m} p(f_\lambda)$$

est continue sur C^{∞} pour tout $T \geqslant 1$ (cf.(1.4)). Il résulte de l'hypothèse faite sur B que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T \geqslant 1$ tel que pour $a \in B$ et $\lambda \geqslant T$ on ait $\lambda^{-m} p(a_\lambda) \leqslant \varepsilon/2$. Alors pour tous $a, b \in B$, $p^T(a-b) \leqslant \varepsilon$ implique $\sup_{\lambda \geqslant 1} \lambda^{-m} p((a-b)_\lambda) \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, avec les notations de (1.4), les écarts définis par les semi-normes p_k^T ($T \geqslant 1$, $k=1,2,..$) et les écarts définis par les semi-normes P_k définissent la même structure uniforme sur B. Ceci achève la démonstration.

(1.14) Lemme.- Soit $\chi \in C^{\infty}(U)$ une fonction nulle au voisinage de 0, égale à 1 au voisinage de l'infini . Posons $\chi_{\lambda}(u) = \chi(\lambda u)$.

(i) l'ensemble des $1 - \chi_{\lambda}$, $\lambda \in R_{+}$, est borné dans $S^{0}(U)$

(ii) l'ensemble des $\lambda^{-m}\chi_{\lambda}$, $\lambda \in R_{+}$, est borné dans $S^{m}(U)$ si $m \geqslant 0$.

En effet comme on a $\lambda^{-m}(\mu^{-m}\chi_{\mu})_{\lambda} = (\lambda\mu)^{-m}\chi_{\lambda\mu}$, il suffit de prouver que pour $m \geqslant 0$, l'ensemble des $\lambda^{-m}\chi_{\lambda}$, $\lambda \in R_{+}$, est borné dans $C^{\infty}(U)$ (alors l'ensemble des $1 - \chi_{\lambda}$ est aussi borné dans $C^{\infty}(U)$ et dans $S^{0}(U)$). Or χ_{λ} tend vers 1 dans $C^{\infty}(U)$ pour $\lambda \to +\infty$, donc l'ensemble des $\lambda^{-m}\chi_{\lambda}$, $\lambda \geqslant 1$, est borné dans $C^{\infty}(U)$ si $m \leqslant 0$. D'autre part , puisque χ est nulle au voisinage de 0 , pour tout compact $K \subset U$, χ_{λ} est nulle dans K pour λ assez petit , de sorte que , pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble des $\lambda^{-m}\chi_{\lambda}$, $\lambda \leqslant 1$, est borné dans $C^{\infty}(U)$. CQFD

(1.15) Corollaire.- $S^{-\infty}$ est dense dans S^{∞} . Plus précisément l'adhérence de $S^{-\infty}$ dans S^{m} contient $S^{m'}$ pour tout $m' < m$.

En effet , si $a \in S^{m'}$, l'ensemble des $(1 - \chi_{\lambda})a$ est borné dans $S^{m'}$ puisque l'ensemble des $(1 - \chi_{\lambda})$ est borné dans S^{0} . Comme $(1 - \chi_{\lambda})$ est nulle au voisinage de l'infini , on a $(1 - \chi_{\lambda})a \in S^{-\infty}$. Et comme $(1 - \chi_{\lambda})$ tend vers 1 quand $\lambda \to 0$, $(1 - \chi_{\lambda})a$ tend simplement vers a , donc tend vers a dans S^{m} si $m > m'$.

(1.16) Remarque.- $C_{0}(U)$ est dense dans $S^{-\infty}(U)$, donc aussi dans $S^{\infty}(U)$. Ainsi pour prouver qu'une application linéaire $I : C_{0}^{\infty}(U) \to E$ (où E est un espace localement convexe complet) se prolonge continument à $S^{\infty}(U)$, il suffit de prouver que pour tout m , I est continue pour la topologie induite sur $C_{0}^{\infty}(U)$ par celle de S^{m}.

3. Sommes asymptotiques

(1.17) Définition.- Soit (a_k) une suite de $S^{\infty}(U)$, et $a \in S^{\infty}(U)$. On dit que a est somme asymptotique des a_k et on écrit $a \sim \sum a_k$ s'il existe une suite (m_N) tendant vers $-\infty$ telle que

$$a - \sum_{0}^{N-1} a_k \in S^{m_N} \quad \text{pour tout entier } N \geqslant 0 .$$

(Autrement dit , la série $\sum a_k$ converge vers a pour la topologie associée à la filtration de S^∞ par les S^m .)

a_k de classe S

(1.18) <u>Théorème</u>.- <u>Soit</u> $a_k \in S^{m_k}(U)$ <u>une suite d~~e symboles~~ amplitudes ; on</u> <u>suppose</u> m_k - <u>quand</u> k . <u>Il existe</u> $a \in S^\infty$ <u>tel que</u> $a \sim \sum a_k$.

(Autrement dit , la topologie associée à la filtration de S^∞ par les S^m est complète . Notons toutefois que cette topologie n'est pas séparée car $\bigcap S^m = S^{-\infty}$ n'est pas nul .)

Quitte au besoin à regrouper des termes , on peut supposer $m_k > m_{k+1}$. Posons $a_{k,n} = \chi_{1/n}\, a_k$, où χ_λ est la fonction ~~du~~ lemme (1.14) . Comme $n\, \chi_{1/n}$ est une suite bornée dans S^1_1 ; $a_{k,n}$ tend vers 0 dans $S^{m_{k+1}}$ quand $n \to \infty$. Et comme $a_k - a_{k,n} \in S^{-\infty}$ pour tout n ($a_k - a_{k,n}$ est nul au voisinage de l'infini) , le théorème résultera du lemme suivant , qui montre qu'il existe une suite n_k telle que la série $a = \sum^\infty a_{k,n_k}$ converge dans $S_\infty(U)$, et que pour tout entier N on ait $a - \sum_{k \leq N} a_{k,n_k} \in S^{m_N+1}$, donc $a - \sum_{k<N} a_k \in S^{m_{N+1}}$:

<u>Lemme</u>.- Soit F_k une suite décroissante d'espaces de Fréchet (ie. $F_k \supset F_{k+1}$, et la topologie de F_{k+1} est plus fine que la topologie induite par celle de F_k). Pour tout k , soit $(a_{k,n})$ $(n=1,2,\dots)$ une suite d'éléments de F_k qui tend vers 0 quand $n \to \infty$. Il existe une suite n_k telle que pour tout N , la série $\sum_{k>N} a_{k,n_k}$ converge dans F_N .

En effet , pour tout k soit p^k_n une suite fondamentale de seminormes de F_k . Choisissons n_k de sorte que pour tout $m \leq k$ et tout $\ell \leq k$, on ait $p^\ell_m(a_{k,n_k}) \leq 2^{-k}$: ceci est possible puisque $a_{k,n}$ tend vers 0 dans F_k , que pour $\ell \leq k$, les seminormes p^ℓ_m sont continues sur F_k , et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'inégalités à satisfaire .

Alors , pour tous n , N , la série $\sum_{k>N} p^N_n(a_{k,n_k})$ converge puisque $p^N_n(a_{k,n_k}) \leq 2^{-k}$ si $k \geq \sup(n,N)$. Le lemme est démontré.

4. Autres espaces d'amplitudes .

Comme in a signalé dans l'introduction , il peut être utile de considérer d'autres amplitudes que celles introduites ci-dessus . Dnas cette direction , la théorie est loin d'être achvée , et je me contenterai de donner quelques exemples .

a. L'espace SH^m

Soit m un entier . On note SH^m le sous-espace de S^m formé des amplitudes a qui admettent un développement asymptotique en fonctions homogènes de degré entier :

$$a \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{m-k} \qquad a_k$$

où a_{m-k} est homogène de degré $m-k$. Un tel développement asymptotique est unique : si $a \sim 0$ (ie. $a \in S^{-\infty}$) , on a $a_{m-k} = 0$ pour tout k (en effet si k_1 est le premier entier tel que a_{m-k_1} ne soit pas identiquement nul , et si u est un point tel que $a_{m-k_1}(u) \neq 0$, on a $|a| \gtrsim r^{m-k_1}$ dans un voisinage conique de u , donc a ne peut pas être de degré $-\infty$).

C'est avec cette classe d'amplitudes que le calcul symbolique se décrit le plus commodément . De plus , bon nombre de propriétés des opérateurs différentiels s'énoncent de façon plus agréable pour les opérateurs pseudo-différentiels correspondant à cette classe.

b. L'espace S^m_ρ

Soit U un cône , et m , ρ deux nombres réels ~~entiers~~ . On note $S^m_\rho(U)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur U telles que pour tous champs de vecteurs (dérivations) X_1 , .. X_k à coefficients C^∞, ~~homogènes de degré 0~~ bornés ou bornés sur U , on ait

$$|X_1 \ldots X_k\, a| \lesssim r^{m+k(1-\rho)}$$

En fait cet ensemble n'est intéressant que pour $0 < \rho \leq 1$, et ne produit des opérateurs qui ont des propriétés analogues à celles des opérateurs pseudo-différentiels décrits plus loin (calcul symbolique , continuité L^2) que pour $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$.

Exercice : pour $\rho = 1$, on a $S^m_\rho = S^m$.

[c. Espace $S_{\phi}^{\Lambda}(\mathbb{R}^n)$

On se donne d'abord une famille de métriques euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$: $|u|_x = |\phi_x u|$, indexée par les points $x \in R^n$.

On dit que cette famille est régulière si elle satisfait à la condition suivante :

(i) Pour tout $R > 0$, il existe $C \geqslant 1$ tel que $|x-y|_x \leqslant R$ implique $1/C \leqslant |u|_x/|u|_y \leqslant C$ pour $u \in R^n - 0$.

Soit ϕ une famille régulière de métriques sur R^n . On dit qu'une fonction $\Lambda > 0$ sur R^n est un poids adapté à ϕ si elle satisfait à la condition suivante :

(ii) Pour tout $R > 0$, il existe $C \geqslant 1$ tel que $|x-y|_x < R$ implique $1/C \leqslant \Lambda(x)/\Lambda(y) \leqslant C$.

On dit de plus que Λ est tempérée s'il existe des nombres C et N tels que

$$1/C\ (1+|x|)^{-N} \leqslant \Lambda(x) \leqslant C\ (1+|x|)^N \qquad \text{pour tout } x \in R^n .$$

Soit ϕ une famille régulière de métriques sur R^n , Λ un poids tempéré , adapté à ϕ . On note S_{ϕ}^{Λ} l'ensemble des fonctions $a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ telles que l'ensemble des fonctions

$$y \mapsto \Lambda(x)^{-1} a(x+\phi_x^{-1} y) \quad , \quad x \in R^n$$

soit borné dans $C^{\infty}(R^n)$.

Avec cette définition , il est aisé de démontrer les analogues des résultats des sections 1. et 2. ; il y a plusieurs notions utiles de développement asymptotique , que je ne décrirai pas .

Pratiquement tous les ensembles d'amplitudes que j'ai vu servir se décrivent en ces termes . En revanche , pour que les opérateurs pseudo-différentiels correspondant à ces classes aient des propriétés raisonables , R.Beals impose en outre des conditions sur ϕ et Λ qui me paraissent désagréables et peu naturelles , et je ne pense pas que la théorie ait atteint son terme .

d. Amplitudes analytiques

Soit U un cône analytique réel . On appelle voisinage complexe de U toute variété analytique complexe U_c conique (ie. R_+ y opère , et l'application $R_+ \times U_c \longrightarrow U_c$ est analytique réelle , partiellement holomorphe par rapport à la deuxième variable) de même dimension (sur $\mathbb{C}$) que U , muni d'une anti-involution τ (ie. τ est un automorphisme de cône , antiholomorphe , et $\tau^2 = Id$) dont U soit le cône des points fixes .

On dit qu'une amplitude a est analytique de degré m s'il existe un voisinage conique U_c de U et un prolongement holomorphe $\tilde{a} \in S^m(U_c)$ de a (il résulte de la formule de Cauchy qu'il suffit qu'on ait $|b| \leqslant r^m$ pour qu'on ait $b \in S^m(U_c)$, si b est holomorphe) .

Pour les amplitudes analytiques , il convient de modifier la notion de développement asymptotique . Je me contenterai de décrire le cas particulier le plus utile :

- On dit qu'une série formelle $\sum a_k$ de fonctions sur U est un symbole analytique formel de degré m si a_k est homogène de degré $m-k$, et s'il existe un voisinage complexe conique U_c de U tel que les a_k se prolongent toutes en fonctions holomorphes sur U_c et satisfont à la condition suivante :

(SAF) Pour tout compact K de U_c il existe une constante $A > 0$ telle qu'on ait $|a_k| \leqslant k!\ A^{k+1}$ pour tout k, sur K .

On dit qu'une amplitude analytique a est asymptotiquement somme des a_k et on écrit $a \sim \sum a_k$ s'il existe un voisinage conique U_c de U dans lequel a et les a_k soient tous holomorphes , tel que

Pour tout cône $U' \subset U_c$, de base relativement compacte , il existe un nombre $A > 0$ tel que pour tout entier N on ait

$$\Big| a - \sum_{k<N} a_k \Big| \leqslant N!\ A^{N+1}\ r^{m-N}$$

(Il est vrai , mais non trivial , que si a_k est un symbole formel analytique de degré m , il existe une amplitude analytique a qui est asymptotiquement somme des a_k) .

Soit U un sous cône ouvert du cône $R^n \times (R^n - \{0\})$ (où les homothéties sont définies par $\lambda.(x,\xi) = (x,\lambda\xi)$) . Si $a = \sum a_k$ et $b = \sum b_k$ sont deux symboles analytiques formels sur U , on définit le composé :

$$a \circ b = \sum_{k,l,\alpha} \frac{i^{-\alpha}}{\alpha !} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} a_k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} b_l$$

(il convient de regrouper dans cette somme les termes homogènes de même degré) . La loi de composition provient de la loi de composition des opérateurs pseudo-différentiels , comme on verra . L'ensemble des symboles analytiques formels est ainsi muni d'une structure d'algèbre associative . On montre qu'on définit ainsi un faisceau cohérent d'algèbres .]

§2. Intégrale oscillante.

(2.1) Définition.- Soit U un cône. On appelle phase sur U une fonction réelle $\varphi \in C^\infty(U)$, homogène de degré 1, sans point critique.

Soit U un cône. Soit $d\mu$ une mesure de densité C^∞ sur U, nulle au voisinage de 0 et hors d'un sous-cône à base compacte de U, homogène de degré 0 au voisinage de l'infini ($d\mu$ servira à la fois à intégrer et à tronquer) / Choisir φ pour toujours [illegible] pour toute.
Soit φ une phase sur U

(2.2) Théorème.- L'intégrale $a \mapsto \int_U e^{i\varphi}\, a\, d\mu$ se prolonge continument à $S^\infty(U)$.

On appelle intégrale oscillante ce prolongement. On le notera encore $\int e^{i\varphi}\, a\, d\mu$. Pour démontrer le théorème, on effectue un certain nombre d'intégrations par parties.

(2.3) Lemme.- Il existe un opérateur différentiel L à coefficients C^∞, ~~homogène de degré~~ [illegible] de poids -1 ~~par rapport aux homothéties~~, tel que $L(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$

En effet, si $U = X \times R_+$, où X est ouvert de R^n, on peut prendre

$$L = (1/if)\left(\sum_1^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} + r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

où f est la fonction C^∞, homogène de degré $+2$:

$$f = \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2$$

Dire que φ n'a pas de point critique revient à dire que f ne s'annule jamais.

On passe de là au cas général grâce à une partition de l'unité sur la base de U.

Prouvons le théorème. Soit L comme dans le lemme (2.3). Le transposé formel ${}^tL$ opère sur les mesures de densité C^∞. Il est homogène de degré -1, donc $({}^tL)^k$ est continu $S^m(U,\Omega) \to S^{m-k}(U,\Omega)$ pour tout $m \in R$ et pour tout entier $k \geq 0$. (Rappelons que Ω est un fibré dont les sections s'identifient naturellement aux mesures ;

c'est un $\mathbb{R}_+$ - fibré, et nous avons utilisé la notation de (1.2).)

L'hypothèse sur le degré et le support de $d\mu$ implique alors que $({}^tL)^k(a\,d\mu)$ est (absolument) intégrable si $a \in S^m$ avec $m-k < 0$, et l'intégrale $a \mapsto \int e^{i\varphi}\,({}^tL)^k\,(a\,d\mu)$ est alors continue sur S^m. (Si $U = X \times \mathbb{R}_+$, où X est ouvert de $\mathbb{R}^n$, dire que $d\mu$ est homogène de degré 0 au voisinage de l'infini revient à dire que, au voisinage de l'infini, $d\mu$ est de la forme $r^{-1}\,\omega(x)\,dx\,dr$ où $\omega(x)$ est une fonction C^∞ sur X.)

Or si a est de support compact, on a, par définition de ${}^tL$

$$\int e^{i\varphi}\,a\,d\mu = \int L^k e^{i\varphi}\,a\,d\mu = \int e^{i\varphi}\,({}^tL)^k(a\,d\mu) .$$

Comme k est arbitraire, pour tout m, l'intégrale $a \mapsto \int e^{i\varphi}\,a\,d\mu$ est continue sur $C_0^\infty(U)$ pour la topologie induite par celle de S^m. Elle se prolonge donc continument à $S^{-\infty}$ (cf. (1.15)). Ceci démontre le théorème. En outre, si χ_λ est défini comme dans le lemme (1.14) et si $a \in S^\infty$, $(1-\chi_\varepsilon)\,a$ tend vers a dans S^∞ si $\varepsilon \to 0$, et on a donc

$$(2.4) \qquad \int e^{i\varphi}\,a\,d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \int e^{i\varphi}\,(1-\chi_\varepsilon)\,a\,d\mu$$

où l'intégrale qui figure au deuxième membre de cette égalité est l'intégrale usuelle des mesures à support compact.

2. Propriétés

La plupart des manipulations usuelles sur l'intégrale convergente se prolongent de façon naturelle à l'intégrale oscillante. En particulier

(2.5) (Changement de variables) Si χ est un isomorphisme de cônes on a $\int e^{i\varphi}\,a\,d\mu = \int e^{i\varphi\circ\chi}\,\chi^*(a\,d\mu)$.

En coordonnées locales : si χ est un difféomorphisme du cône $X \times (\mathbb{R}^M - \{0\})$ sur le cône $Y \times (\mathbb{R}^N - \{0\})$, où X (resp. Y) est ouvert de $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{R}^n$), homogène de degré 1, si φ est une phase sur $Y \times (\mathbb{R}^N - \{0\})$, et $a \in S\,(Y \times \mathbb{R}^N)$ est nul hors de l'image réciproque d'un compact de Y, on a

$$\iint_{Y\times\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(y,\eta)}\,a(y,\eta)\,dy\,d\eta = \iint_{X\times\mathbb{R}^M} e^{i\varphi\circ\chi(x,\xi)}\,a\circ\chi(x,\xi)\,|\det \chi'(x,\xi)|\,dx\,d\xi$$

(ici il n'est pas nécessaire de supposer a nul au voisinage de $Y \times \{0\}$).

(2.6) (Dérivation sous le signe somme)

Soit U un cône , X une vatiété , φ une phase sur le cône $X \times U$ telle que la différentielle partielle $d_U\varphi$ ne s'annule jamais , et $a \in S^{m}(X \times U)$. Soit enfin $d\mu$ ér φ une mesure sur U , comme au n°1 .

<u>Proposition</u>.- <u>La fonction</u> $x \mapsto \int_U e^{i\varphi(x,u)}\, a(x,u)\, d\mu(u)$ <u>est</u> C^{∞} <u>sur</u> X.

Remarquons d'abord qu'il résulte du théorème usuel de dérivation sous le signe somme que l'application $a \mapsto F(a) = \int_U e^{i\varphi}\, a\, d\mu$ est continue $C_o(X \times U) \to C^{\infty}(X)$, et du théorème usuel de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre qu'elle se prolonge continument $S^m(X \times U) \to C(X)$ si $m < 0$.

Dans la preuve du lemme(2.2) , on peut introduire des paramètres : il existe un champ de vecteurs vertical L, à coefficients C^{∞} sur $X \times U$, homogène de degré -1 , tel que $L(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$. On a alors pour tout k

$$\int_U e^{i\varphi(x,u)}\, a(x,u)\, d\mu(u) = \int_U e^{i\varphi(x,u)}\, ({}^tL)^k(a(x,u)\, d\mu(u)) \quad \text{si } a \in C_o^{\infty}$$

de sorte que l'application $a \mapsto F$ est continue $C_o^{\infty}(X \times U) \to C(X)$ lorsqu'on munit $C_o^{\infty}(X \times U)$ de la topologie induite par celle de S^m , pour tout m , donc qu'elle se prolonge continument $S^{\infty}(X \times U) \to C(X)$.

Enfin si P est un opérateur différentiel sur X , à coefficients C^{∞} , et si P_φ désigne l'opérateur (~~vertical~~) sur $X \times U$: $P_\varphi = e^{-i\varphi} P e^{i\varphi}$ on a $P\, F(a) = F(P_\varphi a)$ pour $a \in C_o(X \times U)$. Or si P est de degré inférieur à k , P est somme d'opérateurs (~~homogènes de~~ degré $\leqslant k$ ~~(par rapport aux homothaties)~~ sur $X \times U$. P_φ est donc continu $S^m \to S^{m+k}$ pour tout m . Il s'ensuit que l'application $a \mapsto P\, F(a)$ est continue $C_o^{\infty}(X \times U) \to C(X)$ lorsqu'on munit $C_o^{\infty}(X \times U)$ de la topologie induite par celle de S^m , pour tout m , donc qu'elle se prolonge continument $S^{\infty}(X \times U) \to C(X)$. Ceci implique bien que $a \mapsto F(a)$ est continu $S^{\infty}(X \times U) \to C^{\infty}(X)$, et démontre la proposition.

3. <u>Distributions définies par une intégrale oscillante</u>

Soit X un ouvert de R^n , et soit φ une phase sur $X \times (R^N - \{0\})$ A tout $a \in S^{\infty}(X \times R^N)$ on associe la distribution $T_{a,\varphi}$ définie par l'intégrale oscillante .

$$(2.6) \quad \langle T_{a,\varphi}, u \rangle = \int e^{i\varphi(x,\theta)}\, a(x,\theta)\, u(x)\, dx\, d\theta$$

Dans la suite de ce n° , nous supposons pour simplifier que toutes les amplitudes qui interviennent sont nulles au voisinage de $\theta = 0$ (ce n'est en fait pas indispensable : exercice - si $a \in C^{\infty}(X \times R^N)$ est nul pour $|\theta| \geqslant 1$, $T_{a,\varphi}$ est une fonction C^{∞})

On note $L^m(X)$ l'ensemble des distributions $T_{a,\varphi}$, avec $a \in S^m(X \times R^N)$ (nul au voisinage de $\theta = 0$) . On note $L^{\infty}(X)$ la réunion des L^m_{φ} .

Si $T \in L^{\infty}_{\varphi}$, et si (T_k) est une suite de L^{∞}_{φ} , on écrit $T \sim \sum T_k$ s'il existe une suite (m_k) tendant vers $-\infty$ telle que $T - \sum\limits_{j<k} T_j$ appartienne à L^{m_k} . Il résulte du théorème(1.18) que pour toute suite $T_k \in L^{m_k}$, où (m_k) est une suite tendant vers $-\infty$ de nombres réels , il existe $T \in L^{\infty}_{\varphi}$ telle que $T \sim \sum T_k$.

Si $m < -N$, $T_{a,\varphi}$ est en fait la fonction continue définie par l'intégrale absolument convergente

$$(2.9) \quad T_{a,\varphi}(x) = \int_{R^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\, a(x,\theta)\, dy$$

(2.10) Soit P un opérateur différentiel de degré $\leqslant k$, à coefficients C^{∞} sur X . Alors $P\, L^m \subset L^{m+k}$.

En effet si P désigne l'opérateur $e^{-i\varphi} P\, e^{i\varphi}$ sur $X \times R^N$, on a $P\,T_{a,\varphi} = T_{P_{\varphi}a,\varphi}$ (c'est vrai si $a \in C^{\infty}_o(X \times R^N)$, donc aussi à la limite si $a \in S^{\infty}(X \times R^N)$ - le fait que les coefficients de P_{φ} , comme φ , ne sont pas C^{∞} au voisinage de $\theta = 0$ ne gêne pas puisqu'on suppose a nul au voisinage de $\theta = 0$) . Or on a $(\partial/\partial x_j)_{\varphi} = \partial/\partial x_j + i\, \partial\varphi/\partial x_j$, et $\partial\varphi/\partial x_j$ est ~~homogène de degré~~ 1 . Par récurrence sur k , il en résulte que P_{φ} est somme d'opérateurs ~~homogènes de degré~~ $\leqslant k$ (~~par rapport aux homothéties~~) , donc $P_{\varphi} a \in S^{m+k}$ si $a \in S^m$.

Par suite $T_{a,\varphi}$ est une fonction de classe C^k si $a \in S^m$ avec $m < -N-k$. En particulier $T_{a,\varphi}$ est une fonction C^{∞} si $a \in S^{-\infty}$.

Inversement toute fonction $f \in C^{\infty}(X)$ est de la forme $T_{a,\varphi}$ avec $a \in S^{-\infty}$: on peut par exemple choisir $a(x,\theta) = e^{-i\varphi(x,\theta)} \chi(\theta)\, f(x)$ où $\chi \in C_o(R^N)$ est nulle au voisinage de 0 , et $\int \chi(\theta)\, d\theta = 1$.

On a donc

$$(2.11) \quad C^{\infty}(X) = \bigcap L^m_{\varphi}(X)$$

Si la différentielle partielle $d_t\varphi$ ne s'annule jamais, il résulte de (2.6) que toute distribution $T_{a,\varphi}$ est une fonction C^∞. Dans le cas général, soit C_φ le cône des zéros de la différentielle partielle $d_t\varphi$, et soit S_φ la projection de C_φ sur X (S_φ est fermé dans X, car C_φ est un cône fermé dans $X \times (R^N - \{0\})$, et la projection $X \times S^{N-1} \to X$ est propre)

(2.12) <u>Proposition</u>.- <u>Avec les notations ci-dessus, toute distribution</u> $T \in L^\infty_\varphi$ <u>est</u> C^∞ <u>en dehors de</u> S_φ.

(Tout ceci se généralise aisément au cas où X est une variété ; on peut aussi remplacer $X \times R^N$ par une submersion C^∞ $U \to X$, homogène de degré 0, où U désigne un cône C^∞.)

3. <u>Opérateurs définis par des intégrales oscillantes</u>

Soient X et Y deux ouverts d'espaces numériques (plus généralement des variétés), φ une phase sur $X \times Y \times R^N$, et $a \in S^m(X \times Y \times R^N)$. On note $L_{a,\varphi}$ l'opérateur de noyau $T_{a,\varphi}$: c'est l'opérateur continu $C^\infty_o(Y) \to C^{-\infty}(X)$ défini par

$$\langle L_{a,\varphi}u \, , \, v\rangle = \langle u \, , {}^tL_{a,\varphi}v\rangle = \iiint e^{i\varphi(x,y,t)}a(x,y,t)u(y)v(x)\,dx\,dy\,dt$$

Si pour tout $x \in X$ (resp. $y \in Y$), la fonction $(y,t) \mapsto \varphi(x,y,t)$ (resp. $(x,t) \mapsto \varphi(x,y,t)$) est une phase (autrement dit si la différentielle partielle $d_{y,t}\varphi$ (resp. $d_{x,t}\varphi$) ne s'annule jamais) (2.6) montre que $L_{a,\varphi}$ est continu $C^\infty_o(Y) \to C^\infty(X)$, et on a

$$L_{a,\varphi}u(x) = \int e^{i\varphi(x,y,t)}\, a(x,y,t)\, u(y)\, dy\, dt$$

(resp. ${}^tL_{a,\varphi}$ est continu $C^\infty_o(X) \to C^\infty(Y)$, donc $L_{a,\varphi}$ se prolonge en un opérateur continu $C^{-\infty}_o(Y) \to C^{-\infty}(X)$).

Si ces deux conditions sont vérifiées (ie. $d_{xt}\varphi$ et $d_{yt}\varphi$ ne s'annulent jamais), $L_{a,\varphi}$ est continu $C^\infty_o(Y) \to C^\infty(X)$, se prolonge continument $C^{-\infty}_o(Y) \to C^{-\infty}(X)$, et on a, avec la notation de (2.12)

(2.13) <u>Proposition</u>.- <u>Pour toute</u> $f \in C^{-\infty}_o(Y)$, <u>on a</u>

$$\text{supp sing } L_{a,\varphi} f \subset S_\varphi(\text{supp sing } f)$$

On a posé , si K est un compact de Y , $S_\varphi(K) = pr_X(S_\varphi \cap pr_Y^{-1} K)$.
Soit en effet $x \notin S_\varphi$(supp sing f) et montrons que $L_{a,\varphi} f$ est C^∞ au voisinage de x : on peut décomposer $f = f_o + f_1$, avec $f_o \in C_o^\infty(Y)$ et $f_1 \in C_o^{-\infty}(Y)$ de support assez voisin de supp sing f pour qu'on ait $x \notin S_\varphi(\mathrm{supp}\ f_1)$. Alors $L_{a,\varphi} f_o$ est C^∞ , comme f_o , et $L_{a,\varphi} f_1$ est C^∞ au voisinage de x car le noyau de $L_{a,\varphi}$ est C^∞ au voisinage de $\{x\} \times \mathrm{supp}\ f_1$ (un opérateur de noyau C^∞ est continu $C_o^{-\infty} \to C^\infty$) .

<u>Remarque</u> : ce qui fait marcher l'intégrale oscillante , c'est que les amplitudes qu'on intègre varient peu à l'infini : les dérivées d'ordre élevé de ces amplitudes sont très petites . Les constructions ci dessus se font tout aussi bien avec des amplitudes $a \in S_\rho^m$, pourvu qu'on ait $\rho > 0$ (alors on a , avec la notation du lemme(2.3) $({}^tL)^k(a\ d\mu) \in S^{m-k\rho}$ si $a \in S^m$ se sorte que $({}^tL)^k(a\ d\mu)$ est intégrable pour k assez grand).

§3 Opérateurs pseudo-différentiels

1. Définitions

(3.1) Soit X un ouvert de R^n. Soit $a \in S^m(X \times X \times R^n)$. On note L_a l'opérateur défini par l'intégrale oscillante

$$L_a f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a(x,y,\xi) f(y)\, dy\, d\xi$$

Ici la phase est $\varphi(x,y,\xi) = \langle x-y,\xi\rangle$. Elle est linéaire en ξ donc C^∞ au voisinage de $\xi = 0$, et il n'est plus nécessaire de supposer a nul au voisinage de $\xi = 0$ comme au §2. Les différentielles partielles $d_x\varphi = \xi$, $d_y\varphi = -\xi$ ne s'annulent jamais pour $\xi \neq 0$; en outre on a $d_\xi\varphi = x - y$, donc S_φ est la diagonale de $X \times X$. On a donc, en vertu du §2, n°4

(3.2) L_a est continu $C_o^\infty(X) \to C^\infty(X)$, se prolonge continument $C_c^{-\infty}(X) \to C^{-\infty}(X)$, et diminue le support singulier.

Le transposé de L_a est $L_{a(y,x,-\xi)}$ et l'adjoint de L_a est $L_{\bar{a}(y,x,\xi)}$.

(3.3) Définition.- On note $OPS^m(X)$ l'ensemble des opérateurs L_a, avec $a \in S^m(X \times X \times R^n)$. Les éléments de OPS^m sont les opérateurs pseudo-différentiels (opd.) de degré m.

(3.4) Si $A, A_o, A_1, \dots$ sont des opd., on écrit $A \sim \sum A_k$ s'il existe une suite (m_k) tendant vers $-\infty$ telle que $A - \sum_{j<k} A_j \in OPS^{m_k}$.

Il résulte de (1.18) que si $A_k \in OPS^{m_k}$ est une suite d'opd., où (m_k) est une suite qui tend vers $-\infty$, il existe un opd. A tel que $A \sim \sum A_k$.

Il résulte de (2.11) que $\bigcap OPS^m$ est l'ensemble des opérateurs à noyau C^∞, donc continus : $C_o^{-\infty} \to C^\infty$. On écrit $A \sim 0$ si le noyau de A est une fonction C^∞.

(3.5) Définition.- On dit qu'un opérateur $A : C_o^\infty(X) \to C^{-\infty}(X)$ est propre si les restrictions au support du noyau de A des deux projections $X \times X \to X$ sont propres.

Ainsi A est propre si pour tout compact $K \subset X$, il existe un compact $L \subset X$ tle que pour toute $f \in C_0^\infty(X)$ Af soit nulle hors de L si f est nulle hors de K , et Af soit nulle dans K si f est nulle dans L . Par exemple L_a est propre s'il existe un ensemble fermé $F \subset X \times X$ tel que les deux projections $F \to X$ soient propres , et que $a(x,y,\xi)$ soit nul pour $(x,y) \notin F$.

Si A est un opd. propre , il est continu $C_0^\infty \to C_0^\infty$ et $C_0^{-\infty} \to C_0^{-\infty}$ et se prolonge continument $C^\infty \to C^\infty$ et $C^{-\infty} \to C^{-\infty}$ (A transforme somme localement finie en somme localement finie) .

Il existe des voisinages fermés F de la diagonale de $X \times X$ tels que les deux projections $F \to X$ soient propres (par exemple , l'ensemble des couples (x,y) tels que $|x-y| \leq \varepsilon$ $\inf(\varepsilon, \frac{1}{2}d(x,\complement X), \frac{1}{2}d(y,\complement X))$ ~~et que les distances de x et y à la frontière de X soit $\leq \varepsilon$~~ , où ε est un nombre > 0) ~~Si F est un tel voisinage ; il existe un~~e fonction C^∞ , $\chi(x,y)$, nulle hors de F , et égale à 1 au voisinage de la diagonale . Alors, pour tout $a \in S^m(X \times X \times R^n)$, $L_{\chi a}$ est un opd. propre , et $L_{a-\chi a}$ est un opérateur à noyau C^∞ puisque le noyau de $L_{a-\chi a}$ est nul au voisinage de la diagonale , et est ~~de toute façon~~ C^∞ en dehors de la diagonale d'après (2.12) . On a donc prouvé :

(3.6) <u>Proposition</u>.- <u>Pour tout opd</u>. $A \in OPS^m(X)$, <u>il existe un opd. propre</u> A' <u>tel que</u> $A - A' \sim 0$. $A \sim A'$

(3.7) <u>Exemple</u> .- Soit $a \in S^m(X \times R^n)$. L'opérateur $a(x,D)$ défini par

$$a(x,D)f = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} \; a(x,\xi) \, \hat{f}(\xi) \, d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a(x,\xi) \, f(y) \, dy \, d\xi$$

est un opd. de degré m (la deuxième intégrale est l'intégrale oscillante ; pour toute $f \in C_0^\infty(X)$, l'égalité est vraie pour $a \in S^{-\infty}$ car les deux intégrales sont alors absolument convergentes de sorte que l'égalité résulte de la définition de $\hat{f}$; elle reste vraie pour tout $a \in S^\infty$ par passage à la limite).

Comme on a vu au §0 , si a est le polynôme $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ où k est un entier positif , et $a_\alpha \in C^\infty(X)$ pour $|\alpha| \leq k$

(donc $a \in S^k(X \times R^n)$ d'après (1.3)) , $a(x,D)$ est l'opérateur différentiel de degré $\leq k$: $\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$. Les opérateurs différentiels à coefficients C^∞ sont donc des opd. .

2. Symbole total

Nous montrons maintenant que les opd. sont essentiellement tous de la forme $a(x,D)$ (avec $a \in S^\infty(X \times R^n)$).

(3.2) Proposition.- (i) Soit A un opd. de degré $\leq m$ sur X. Il existe $a \in S^m(X \times R^n)$ tel que $A \sim a(x,D)$.

En particulier

(ii) si A est propre , et si on pose $a(x,\xi) = e^{-ix.\xi} A(e^{ix.\xi})$, on a $a \in S^m(X \times R^n)$ et $A = a(x,D)$.

Une telle amplitude a est unique mod. $S^{-\infty}$:

(iii) Si $a(x,D) \sim 0$, on a $a \sim 0$.

(iv) Si $A = L_b$ avec $b \in S^m(X \times X \times R^n)$, on a $A \sim a(x,D)$ si

$$a(x,\xi) \sim \sum_\alpha i^{-|\alpha|}/\alpha! \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha b(x,y,\xi) \Big|_{y=x}$$

(Remarquons que $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha$ est homogène de degré $-|\alpha|$, donc $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha b \in S^{m-|\alpha|}$ d'après (1-6))

Démontrons d'abord (iv) , qui implique (i) . Comme on a

$$(y-x)^\alpha \quad e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \quad = \quad i^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha e^{i\langle x-y,\xi\rangle}$$

on voit , en intégrant par parties dans la formule de définition (3.1) qu'on a $L_{(y-x)^\alpha a} = i^{-|\alpha|} L_{\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha a}$.

D'autre part si $a \in S^m(X \times X \times R^n)$ est nul à l'ordre k sur la diagonale de $X \times X$, on a $a = \sum_{|\alpha|=k} (y-x)^\alpha a_\alpha$, avec $a_\alpha \in S^m(X \times X \times R^n)$, par exemple

$$a_\alpha(x,y,\xi) = k/\alpha! \int_0^1 (1-t)^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha a(x,x+t(y-x),\xi)\, dt$$

Donc $L_a = i^{-k} \sum_{|\alpha|=k} L_{\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha a_\alpha}$ est en fait un opd. de degré $m-k$.

(iv) résulte alors de ceci , et de la formule de Taylor , qui montre que pour tout k , $a - \sum_{|\alpha|<k} (y-x)^\alpha a_\alpha(x,\xi) \in S^m$ est nul à l'ordre k sur la diagonale , si on pose

$$a_\alpha(x,\xi) = 1/\alpha! \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha a(x,y,\xi) \Big|_{y=x}$$

Soit maintenant A un opd. propre, de degré m, et soit $b \in S^m(X \times R^n)$ tel que $A \sim b(x,D)$

Soit $S(x,z) \in C^{-\infty}(X \times R^n)$ la transformée de Fourier inverse en ξ de $b(x,\xi)$. Le noyau de $b(x,D)$ est donc la restriction à $X \times X$ de $S(x,x-y)$ (en effet c'est vrai si $m < -n$, car alors le noyau de $b(x,D)$ est la fonction continue, somme de l'intégrale convergente $(2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y,\xi\rangle} b(x,\xi)\, d\xi$; par passage à la limite dans $S^{-\infty}$, on voit que c'est encore vrai pour tout m).

On a $S|_{X \times (R^n - \{0\})} \in S^{-\infty}(X \times (R^n - \{0\}))$. En effet si α, β, γ sont trois multi-indices, avec $|\alpha| > m + n + |\beta|$, la distribution $z^\alpha (\frac{\partial}{\partial z})^\beta (\frac{\partial}{\partial x})^\gamma S$ est une fonction continue, bornée au dessus de tout compact de X, puisque sa transformée de Fourier en z est $i^{|\beta| - |\alpha|} (\frac{\partial}{\partial \xi})^\alpha \xi^\beta (\frac{\partial}{\partial x})^\gamma b(x,\xi) \in S^{m-|\alpha|+|\beta|}$, et est donc intégrable en ξ, uniformément quand x parcourt un compact de X.}

Soit alors $a(x,\xi) = e^{-ix.\xi} A(e^{ix.\xi})$ (où comme au §0, on considère, pour tout ξ, $e^{ix.\xi}$ comme élément de $C^\infty(X)$), et soit $T(x,z)$ la transformée de Fourier inverse en ξ de $a(x,\xi)$. Comme on a (§0, n°5) $A = a(x,D)$, le noyau de A est la restriction à $X \times X$ de $T(x,x-y)$,

Soit $\tilde{A}$ l'extension de A à $C^\infty(R^n)$ définie par $\tilde{A}(f) = A(f|X)$. On a encore $a(x,\xi) = e^{-ix.\xi}|_X \tilde{A}(e^{ix.\xi})$ (où $e^{ix.\xi}$ est maintenant considéré comme élément de $C^\infty(R^n)$). Pour toute $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, on a $\varphi = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$, d'où, comme au §0, $\tilde{A}\varphi = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} a(x,\xi) \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$. Par suite, comme ci-dessus, le noyau de $\tilde{A}$ est $T(x,x-y)$.

Comme A est propre, pour tout compact $K \subset X$, il existe un compact $L \subset X$ tel que si $f \in C^\infty(R^n)$ est nulle dans L, Af soit nul dans K ; pour $x \in K$, le support de la distribution $T(x,x-y)$, considérée comme distribution de y, est donc contenu dans L, et celui de la distribution $T(x,z)$, considérée comme distribution de z, est contenu dans $x - L \subset K - L$. Ainsi $T(x,z)$ est nulle au voisinage de $z = \infty$.

Comme on a $A \sim b(x,D)$, $T(x,x-y) - S(x,x-y)$ est C^∞ dans $X \times X$. Il est aussi C^∞ en dehors de la diagonale dans $X \times R^n$ (pour S, celà résulte de ce qui précède ; d'autre part $T(x,x-y)$ est C^∞ hors de la diagonale dans $X \times X$, puisque c'est le noyau d'un opd., et il est nul, donc C^∞ au voisinage de $X \times (R^n - X)$ d'après ce qui précède) . Comme $S|_{X\times(\mathbb{R}^n-\{0\})} \in S^{-\infty}(X\times(\mathbb{R}^n-\{0\}))$, on a donc $a - S \in S^{-\infty}(X\times\mathbb{R}^n)$, donc aussi $a - b \in S^{-\infty}(X\times\mathbb{R}^n)$, et finalement $a \in S^m(X\times\mathbb{R}^n)$, ce qui démontre (ii) . En outre si $A = 0$, on a $a = 0$ donc $b \sim 0$, ce qui démontre (iii) , et achève la démonstration de la proposition .

(Avec les notations ci-dessus , le symbole total de A est la classe de a mod. $S^{-\infty}$.)

4. Composés et transposés

(3.9) Proposition.- Si A est un opd. (de degré $\leq m$) l'adjoint A^* est un opd. Si $A \sim a(x,D)$ on a $A^* \sim \sum i^{-|\alpha|}/\alpha! \ \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha \bar{a}\right)(x,D)$

En effet si $A = L_{a(x,y,\xi)}$, on a $A^* = L_{\bar{a}(y,x,\xi)}$.
En particulier l'adjoint de $a(x,D)$ est $L_{\bar{a}(y,\xi)}$,et la deuxième assertion résulte de ((3.8)(iv)) .

De même le transposé ${}^tA$ est un opd. ; si $A \sim a(x,D)$ on a ${}^tA \sim \sum i^{|\alpha|}/\alpha! \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha a\ (x,-D)$.

(3.10) Proposition.- Si A et B sont deux opd. ~~de degrés~~ respectifs $\leq m$ et $\leq m'$, et si A ou B est propre , $A \circ B$ est un opd. de degré $\leq m + m'$.
Si $A \sim a(x,D)$ et $B \sim b(x,D)$, on a $A \circ B \sim c(x,D)$, avec

$$c(x,\xi) \sim \sum i^{-|\alpha|}/\alpha! \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha a \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha b$$

En effet comme $A \circ B \sim 0$ si $A \sim 0$ ou $B \sim 0$, on peut d'après (3.6) supposer que A et B sont propres tous les deux . On peut en outre , d'après (3.8)(ii) et (3.9) supposer $A = a(x,D)$ avec $a(x,\xi) = e^{-ix.\xi} A(e^{ix.\xi})$, et $B = L_{b(y,\xi)}$, avec $\bar{b}(x,\xi) = e^{-ix.\xi} B^*(e^{ix.\xi})$

On a alors

$$Bf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y,\xi\rangle} b(y,\xi)\ f(y)\ dy\ d\xi$$

d'où , comme au §0 ,

$$AB f = (2\pi)^{-n} \int A(e^{ix.\xi})\ e^{-iy.\xi}\ b(y,\xi)\ f(y)\ dy\ d\xi \quad =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a(x,\xi)\ b(y,\xi)\ f(y)\ dy\ d\xi$$

(l'égalité est vraie si $m' < -n$, car alors la première intégrale , comme l'intégrale définissant B , peuvent être considérées comme intégrales convergentes à valeurs dans C^∞ ; par passage à la limite dans $S^{-\infty}$, on voit que c'est vrai pour tout m' .)

Comme on a $a(x,\xi)\, b(y,\xi) \in S^{m+m'}(X \times X \times R^n)$ d'après (1.6) , (1.7) ceci démontre la première assertion .

Pour la deuxième assertion , on remarque que d'après (3.8)(iv)) et (3.9) , il existe des coefficients universels $c_{\alpha\beta}$ (indépendants de a et b) tels que

$$c(x,\xi) \sim \sum c_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha a \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha b$$

Or la deuxième assertion est vraie lorsque A et B sont des opérateurs différentiels , comme il résulte aisément de la formule de Leibniz (alors en fait , tous les termes du développement asymptotique sont nuls sauf un nombre fini , et on a des égalités) . Elle est donc vraie dans tous les cas .

4. Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété.

Soient X , X' deux ouverts de R^n , et χ un difféomorphisme de X sur X' . Soit $A \in OPS^m(X')$, et soit A_χ l'image inverse de A par χ ($A_\chi f = A(f \circ \chi^{-1}) \circ \chi$) .

(3.11) Proposition.- Avec les notations ci-dessus , A_χ est un opd. Si $A \sim a(x,D)$ et $A_\chi \sim a_\chi(x,D)$, on a $a_\chi(x,\xi) - a(\chi x, {}^t\chi'^{-1}\xi) \in S^{m-1}$.

Supposons $A = L_a$, avec $a \in S^m(X \times X \times R^n)$. On a donc

$$Af(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\, a(x,y,\xi)\, f(y)\, dy\, d\xi$$

On a alors

$$A_\chi f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle\chi x-\chi y,\xi\rangle}\, a(\chi x,\chi y,\xi)\, |\det \chi'(y)|\, f(y)\, dy\, d\xi$$

Le théorème de division des fonctions C^∞ montre qu'il existe une fonction C^∞ $M : X \times X \to L(R^n)$ telle que $\chi x - \chi y = M(x,y)(x-y)$ (par exemple $M(x,y) = \int_0^1 \chi'(x+t(y-x))\, dt$). On a alors $M(x,x) = \chi'(x)$ de sorte que M est inversible au voisinage de la diagonale de $X \times X$

Donc si supp f est assez petit , et x assez voisin de supp f pour que $M(x,y)$ soit inversible au voisinage de $\{x\}\times$ supp f , on a

$$A_\chi f(x) = \int e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a(\chi x, \chi y, {}^tM^{-1}(x,y).\xi)\ |\det {}^tM(x,y)|^{-1} |\det \chi'(y)|\ f(y)\ dy\, d\xi$$

Comme ~~de toute façon~~ par ailleurs le noyau de A est C^∞ hors de la diagonale , il résulte de (1.7) et (1.6) que A est un opd. de degré m .

Pour la deuxième assertion , il suffit de remarquer qu'on a $a(x,\xi) = a(x,x,\xi)$ mod. S^{m-1} , et , puisque $M(x,x) = \chi'(x)$ (donc les deux déterminants ci-dessus sont égaux pour $x = y$) $a_\chi(x,\xi) = a(\chi x, \chi x, {}^t\chi'(x)^{-1}.\xi)$.

Si X est un ouvert de R^n , E et F deux fibrés vectoriels sur X , nous dirons qu'un opérateur $A : C_0^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$ est un opd. de degré m , de type E,F si pour toute section C^∞ u de E et toute section C^∞ v de F' , l'opérateur $\varphi \mapsto v.A(\varphi u)$ est un opd. de degré m (si $E = X\times \mathbb{C}^N$ et $F = X \times \mathbb{C}^{N'}$ sont des fibrés triviaux , il revient au même de dire que les coefficients de la matrice de A sont des opd. de degré m , d'après (3.10) , dans le cas où A ou B est la multiplication par une fonction C^∞)

Ceci justifie la définition suivante :

(3.12) Définition.- <u>Soient</u> X <u>une variété</u> , E <u>et</u> F <u>deux fibrés vectoriels sur</u> X . <u>On dit qu'un opérateur</u> $A : C_0^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$ <u>est un opd. de degré</u> (classique) <u>m , de type</u> E , F <u>si le noyau de</u> A <u>est</u> C^∞ <u>en dehors de la diagonale , et si pour toute</u> ~~immersion ouverte~~ carte $\chi : Y \to X$, <u>où</u> Y <u>est ouvert d'un espace numérique , l'image réciproque</u> A_χ <u>de</u> A <u>par</u> χ <u>est un opd</u>. (de type χ^*E , χ^*F)

Un tel opérateur se prolonge continument $C_0^{-\infty}(X,E) \to C^{-\infty}(X,F)$. On notera $OPS^m(X,E,F)$ l'ensemble (l'esp. vect.) des opd. de degré m , de type E, F . Si $E = F = X\times\mathbb{C}$, on notera simplement $OPS^m(X)$ cet ensemble (opd. de degré m sur X) .

Comme plus haut , on a une notion d'opérateur propre . Si A est un opd. propre , de type E , F , il est continu $C_0^\infty(X,E) \to C_0^\infty(X,F)$ et $C_0^{-\infty}(X,E) \to C_0^{-\infty}(X,F)$ et se prolonge continument $C^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$ et $C^{-\infty}(X,E) \to C^{-\infty}(X,F)$. . Par exemple , un opérateur différentiel de type E, F est un opd. propre .

5. Calcul symbolique

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $OPSH^m(X) \subset OPS^m(X)$ l'ensemble des opd. de la forme L_a, avec $a \in SH^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ (§1, n°5.a) un opd. $A \in OPSH^\infty$ sera dit régulier (?). Comme $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \xi})^\beta a$ est homogène de degré entier en ξ si a l'est, toutes les constructions et assertions ci dessus restent valables quand on travaille avec des amplitudes de SH^∞. En particulier un opd. A est régulier si et seulement si son symbole total est somme asymptotique de fonctions C^∞, homogènes de degrés entiers (tendant vers $-\infty$) de ξ, et A est équivalent à un opd. régulier propre. $OPSH^\infty$ est une classe d'opd. stable par adjonction, transposition, composition, changement de variables, etc...

(3.13) Définition.- Soit $A \sim a(x,D)$ un opd. régulier de degré $\leq m$, où a est somme asymptotique de fonctions homogènes : $a \sim \sum a_{m-k}$. On appelle symbole de A, et on note $\sigma_m(A)$* le premier terme a_m ; c'est une fonction C^∞, homogène de degré m en ξ sur $X \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$

Il résulte de (3.9), (3.10) qu'on a

$$(3.14) \quad \sigma_{A^*} = \overline{\sigma_A}$$

si B est un deuxième opd. régulier, de degré m', et si A ou B est propre

$$(3.15) \quad \sigma_{m+m'}(A \circ B) = \sigma_m(A) \ \sigma_{m'}(B)$$

On a donc $\sigma_{m+m'}(A \circ B) = \sigma_{m+m'}(B \circ A)$, de sorte que le crochet $[A,B] = A \circ B - B \circ A$ est en fait de degré $\leq m+m'-1$. En examinant les termes correspondant aux multi-indices de longueur 1 dans le développement asymptotique de la proposition (3.10), on voit qu'on a

$$(3.16) \quad \sigma_{m+m'-1}([A,B]) = \frac{1}{i} \{\sigma_m(A), \sigma_{m'}(B)\}$$

où le crochet de Poisson $\{f,g\}$ est défini par

$$(3.17) \quad \{f,g\} = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}$$

* ou σ_A s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le degré

Si X' est un autre ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\chi : X' \to X$ un difféomorphisme, on a, avec les notations du n°3, d'après (3.11)

$$\sigma_{A_\chi}(x,\xi) = \sigma_A(\chi x, {}^t\chi'^{-1}(x).\xi)$$

Le symbole se transforme donc comme une fonction sur le fibré cotangent.

Soit maintenant X une variété, E et F deux fibrés vectoriels sur X. On dit qu'un opd. A de degré $\leq m$, de type E, F est régulier si pour toute immersion ouverte $\chi : Y \to X$, où Y est ouvert d'un espace numérique, et toutes trivialisations $\phi : \chi^* E \to X \times \mathbb{C}^N$ et $\psi : \chi^* F \to X \times \mathbb{C}^N$, les coefficients de l'opérateur $\psi \circ A_\chi \phi^{-1}$ sont des opd. réguliers. Le symbole de A est alors l'unique section C^∞, homogène de degré m, $a : T^*X - \{0\} \to L(E,F)$ telle que, avec les notations ci-dessus, les coefficients de la matrice de $\psi \circ \chi^* a \circ \phi^{-1}$ soient les symboles des coefficients de la matrice de $\psi \circ A_\chi \phi^{-1}$, pour tous les choix possibles de Y, χ, ϕ, ψ ($\chi^* a : T^*Y - \{0\} \to L(\chi^* E, \chi^* F)$ désignant l'image inverse de a par χ); qu'une telle section existe résulte aisément des remarques qui précèdent. On le note encore $\sigma_m(A)$, ou σ_A s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le degré. †

Les assertions ci-dessus se généralisent comme suit : si A (resp. B) est un opd. régulier de type E, F (resp. F, G), de degré m (resp. m'), et si A ou B est propre, on a

$$(3.18) \qquad \sigma_{m+m'}(B \circ A) = \sigma_{m'}(B) \cdot \sigma_m(A)$$

(où le produit dans le membre de droite est défini par la loi de composition naturelle : $L(F,G) \times L(E,F) \to L(E,G)$).

Si E et F sont munis de métriques hermitiennes C^∞, et X d'une mesure ω de densité C^∞ strictement positive, l'adjoint A^* de A est défini par la formule

$$\int_X (u|A^* v)_E \,\omega = \int_X (Au|v)_F \,\omega \quad \text{pour} \quad u \in C_0^\infty(X,E) \;, \quad v \in C_0^\infty(X,F)$$

C'est un opd. régulier, de type F, E si A est un opd. régulier de type E, F, et on a

$$(3.19) \qquad \sigma(A^*) = \sigma(A)^*$$

† Toute section C^∞, homogène de degré m $T^*X - 0 \to L(E,F)$ est le symbole d'un opd. régulier de degré m $E \to F$; c'est immédiat si X est ouvert de $\mathbb{R}^n$, et E, F sont triviaux, et le cas général en résulte par partition de l'unité.

(où l'adjonction $L(E,F) \to L(F,E)$ est définie au moyen des métriques choisies sur E et F) .

En effet ceci résulte immédiatement de (3.14) si X est ouvert de $\mathbb{R}^n$, $E = X \times \mathbb{C}^M$, $F = X \times \mathbb{C}^N$, où $\mathbb{C}^M$ et $\mathbb{C}^N$ sont munis des métriques hermitiennes canoniques , et ω est la mesure de Lebesgue . Si , toutes choses égales par ailleurs , on a $\omega = \lambda\, dx$ avec $\lambda \in C^\infty(X)$, $\lambda > 0$, l'adjoint est $A^*_\lambda = \lambda^{-1} A^* \lambda$ (A^* désignant l'adjoint pour la mesure de Lebesgue) ; or on a $\sigma(\lambda^{-1} A \lambda) = \sigma(A)$. Le cas général en résulte aussitôt car , avec les notations ci-dessus on peut choisir Φ et Ψ isométriques , et χ transforme de toute façon la mesure choisie sur X en une mesure de la forme $\lambda\, dx$.

Si X est une variété , la 1-forme fondamentale de T^*X est l'unique forme ω_1 sur T^*X telle que pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(X)$ on ait $p^*(d\varphi) = d(\varphi \circ p) = \omega_1 \circ d\varphi$ où p désigne la projection $T^*X \to X$ et dans le trpoisième membre , on a composé les formes comme des sections $X \to T^*X$, et $T^*X \to T^*T^*X$. En coordonnées locales $\omega_1 = \sum \xi_j\, dx_j$. La 2-forme fondamentale de T^*X est $\omega_2 = d\omega_1$. En coordonnées locales $\omega_2 = \sum d\xi_j \wedge dx_j$. Elle est non dégénérée , ferméee , et T^*X est ainsi canoniquement muni d'une structure symplectique . Le crochet
gμ ωα γ ρ α λ
de Poisson des fonctions sur T^*X est alors défini par $\{f,g\} = \omega_2^{-1}(df,dg)$ si on interprête ω_2 comme forme bilinéaire alternée sur TT^*X , et si ω_2^{-1} désigne la forme inverse , sur T^*T^*X. Avec cette définition du crochet de Poisson , la formule (3.17) est encore vraie pour deux opd. réguliers , scalaires (ie. de type $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$) sur une variété .

On a enfin le résultat suivant (qui pourrait servir de définition du symbole)

(3.20) <u>Proposition</u>.- <u>Soit</u> A <u>un opd. régulier de type</u> E , F <u>sur une variété</u> X . <u>Soit</u> $u \in C_0^\infty(X,E)$ <u>une section , et</u> $\varphi \in C^\infty(X)$ <u>une fonction réelle , telle que</u> $d\varphi$ <u>ne s'annule pas sur le support de</u> u. <u>On a alors</u> $e^{-\lambda i \varphi} A(e^{\lambda i \varphi} u) = \lambda^m \sigma_A(d\varphi).u + O(\lambda^{m-1})$ <u>pour</u> $\lambda \to +\infty$, uniformément sur tout compact .

Soit V un voisinage ouvert de supp u dans lequel $d\varphi$ ne s'annule pas , et W un ouvert de X disjoint de supp u .

l'opérateur $f \mapsto A(fu)$ se prolonge continument : $C^{-\infty}(V) \to C^{\infty}(W,F)$. Or il existe un champ de vecteurs C^{∞} sur V, L, tel que $L\varphi = -i\varphi$ (par exemple $L = -i\,|\mathrm{grad}\,\varphi|^{2}\,\mathrm{grad}\,\varphi$ où $\mathrm{grad}\,\varphi$ désigne le champ de vecteurs associé à $d\varphi$ pour un choix d'une métrique C^{∞} sur TX). On a alors pour tout entier k $L^{k}e^{\lambda i\varphi} = \lambda^{k}e^{\lambda i\varphi}$. Comme la famille $e^{\lambda i\varphi}$, $\lambda \geq 0$ est bornée dans $C(V)$, donc aussi dans $C^{-\infty}(V)$, la famille $\lambda^{k}e^{\lambda i\varphi}$ est bornée dans $C^{-\infty}(V)$ pour tout k, et la famille $\lambda^{k}A(e^{\lambda i\varphi}u)$ est bornée dans W, uniformément sur tout compact, pour tout k. Ceci démontre la proposition en dehors de supp u.

D'autre part, quitte à remplacer u par une somme finie de sections de petit support, on peut supposer le support de u aussi petit que l'on veut. Quitte alors à remplacer X par un voisinage ouvert convenable de supp u, et à choisir convenablement un système de coordonnées sur X, on est ramené au cas où X est ouvert de $\mathbb{R}^{n}$, où E et F sont triviaux, et où φ est linéaire, par exemple $\varphi = x_1$, sur X. Dans ce cas la proposition résulte de (3.8)(ii) et (iv), qui montre que $e^{-ix.\xi}A(e^{ix.\xi}u) \in SH^{m}$, et que le terme dominant est $\sigma_A(x,\xi).u(x)$. Ceci achève la démonstration.

(+)

Remarque.- Les constructions et assertions des n°1-4 sont encore valables pour les opd. de la classe OPS_{ρ}^{m} (correspondant aux amplitudes $a \in S_{\rho}^{m}$), pour $\rho > \frac{1}{2}$. Alors les développements asymptotiques de (3.8),(3.9),(3.10) convergent encore (les degrés des amplitudes qui y figurent tendent vers $-\infty$). Les résultats du n°4 sont encore valables, à condition d'interprêter le symbole de $A \in OPS_{\rho}^{m}$ comme une classe de fonctions $a \in S_{\rho}^{m}$ mod. $S_{\rho}^{m+1-2\rho}$ sur $T^{*}X$. (dans la formule (3.17) pour les commutateurs, il faut remplacer $\sigma_{m+m'-1}$ par $\sigma_{m+m'+1-2\rho}$.)

(+) Si A est un opérateur différentiel de degré m, $e^{-\lambda i\varphi}A(e^{\lambda i\varphi}u)$ est un polynôme de degré m en λ, de terme dominant $\lambda^{m}\sigma_A(d\varphi).u$; ceci est encore vrai, bien sûr, si φ n'est pas réelle, et si $d\varphi$ peut s'annuler sur supp u.

6. Continuité L^2 des opérateurs pseudo-différentiels.

(3.21) Théorème.- Soit A un opd. de degré 0. Alors A est continu $L^2_{comp} \to L^2_{loc}$.

Il s'agit de montrer que, pour toutes $u, v \in C_0^\infty$, l'opérateur $f \to uA(vf)$ est continu dans L^2. On peut donc supposer que le support du noyau de A est compact.

Lemme.- Soient X un ouvert de R^n, et $A = a(x;D)$ un opd. propre de degré 0. On suppose qu'il existe deux nombres $M, \mathcal{E} > 0$ tels que $|a(x,\xi)| \leq M^2 - \varepsilon$. Alors il existe un opd. B propre, de degré 0, tel que $A^*A + B^*B \sim M^2\, Id$.

Preuve du lemme : il résulte de (1.9) que $b_o(x,\xi) = (M^2 - |a(x,\xi)|^2)^{\frac{1}{2}}$ est dans S^0, donc il existe un opd. propre $B_o \sim b_o(x,D)$.

Il suffit alors de prendre $B \sim \sum_0^\infty B_k$, où B_k est un opd. propre de degré $-k$, construit par récurrence de sorte que $R_k = A^*A + (\sum_0^{k-1} B_j)^* (\sum_0^{k-1} B_j) - M^2\, Id$ soit de degré $\leq -k$ pour tout k.

La construction est déja faite pour $k = 1$ ($A^*A + B^*B - M^2\, Id$ est de degré -1 d'après (3.9), (3.10)). Supposons la faite jusqu'au rang $k-1$. Notons que b_o est réel, elliptique de degré 0 (cf. (1.12)) (en fait $1/b_o \in S^0$ d'après (1.9)). Posons $b_k = -\frac{1}{2} r_k / b_o$ où $R_k = r_k(x,D)$, et soit B_k un opd. propre, $B_k \sim b_k(x,D)$. Comme R_k ~~est autoadjoint~~, de degré $-k$, on a $r_k - \overline{r_k} \in S^{-k-1}$, et finalement, d'après (3.9), (3.10), on a $R_k + B_k^*B_o + B_o^*B_k \in OPS^{-k-1}$ et $R_{k+1} - R_k - B_k^*B_o - B_o^*B_k = (\sum_0^{k-1} B_j^*)B_k + B_k^*(\sum_0^{k-1} B_j) \in OPS^{-k-1}$, ce qui démontre le lemme.

Fin de la preuve du théorème : Si le support du noyau de A est compact, on a $A = a(x,D)$ où $a \in S^0$ est nul pour x hors d'un compact convenable, donc a est borné, et le lemme s'applique à A. Soit alors B un opd. propre de degré 0 tel que $A^*A + B^*B = M^2\, Id + R$ où R est un opérateur à noyau C^∞. Alors si $f \in C_0^\infty$, on a

$$\int |Af|^2 \leq \int |Af|^2 + \int |Bf|^2 = \int (A^*A + B^*B)f.f = M^2 \int |f|^2 + \int Rf.f$$

Comme R est évidemment continu $L^2_{comp} \to L^2_{loc}$ le théorème en résulte aussitôt.

7. Noyau des opd. réguliers .

Soit a une fonction continue sur $R^n - \{0\}$, homogène de degré s. Posons

$$m_\alpha(a) = \int_{S^{n-1}} x^\alpha \, a(x) \, d\sigma$$

où S^{n-1} désigne la sphère unité de R^n , et $d\sigma$ son élément de volume usuel (moment sphérique d'ordre α de a).

On a alors

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} x^\alpha \, a(x) \, dx = \begin{cases} m_\alpha(a) \; \varepsilon^{s+n+} & \text{si} \quad s+n+|\alpha| \neq 0 \\ -m_\alpha(a) \; \operatorname{Log} \varepsilon & \text{si} \quad s+n+|\alpha| = 0 \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$. On a alors

$$\varphi = \sum_{|\alpha| \leq -s-n} \varphi^{(\alpha)}(0) \; x^\alpha/\alpha! + O(|x|^{s+n+\rho}) \text{ , avec } \rho > 0 .$$

Par suite la quantité

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} a\varphi - \sum_{|\alpha| < -s-n} \frac{1}{\alpha!} \varphi^{(\alpha)}(0) \; m_\alpha(a) \; \varepsilon^{s+n+|\alpha|} + \sum_{|\alpha| = -s-n} \frac{1}{\alpha!} \varphi^{(\alpha)}(0) \; m_\alpha(a) \operatorname{Log} \varepsilon$$

a une limite pour $\varepsilon \to 0$. On note pf a la distribution sur R^n telle que $\langle \text{pf } a, \varphi \rangle$ soit égale à la limite pour $\varepsilon \to 0$ de l'expression ci-dessus pour toute $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$.

(7.22)Proposition.- Soit a une fonction C^∞ , homogène de degré s sur $R^n - \{0\}$. Alors il existe une fonction b , C^∞ , homogène de degré -s-n sur $R^n - \{0\}$, et , si s est entier ≥ 0 (resp. entier $\leq -n$) un polynôme R homogène de degré s (resp. -s-n) tels que la transformée de Fourier de pf a soit de la forme

$\widehat{\text{pf } a} = \text{pf } b$ si s n'est pas entier ≥ 0 ou $\leq -n$

$\widehat{\text{pf } a} = \text{pf } b + R(\frac{c}{\partial x})\delta$ si s est entier ≥ 0

$\widehat{\text{pf } a} = \text{pf } b + R(x) \operatorname{Log}|x|$ si s est entier $\leq -n$.

Posons pour abréger $T = \mathrm{pf}\ a$. Observons pour commencer que $\hat{T}$ est C^∞ en dehors de 0 . En effet si $\chi \in C_0^\infty(R^n)$ est égale à 1 au voisinage de 0 , χT est à support compact, donc $\widehat{\chi T}$ est C^∞ , et $(1-\chi)T$ est C^∞ au voisinage de 0 , donc $(1-\chi)T \in S'$, donc la transformée de Fourier de $(1-\chi)T$ est C^∞ en dehors de 0 (cf. preuve de la proposition(3.8) , p. 27) , ainsi que $\hat{T} = \widehat{\chi T} + \widehat{(1-\chi)T}$.

On a $\langle T(\lambda x),\varphi\rangle = \lambda^{-n}\langle T,\varphi(x/\lambda)\rangle$. Remplaçant φ par $\varphi(x/\lambda)$ et ξ par $\lambda\xi$ dans la définition de $\langle \mathrm{pf}\ a,\varphi\rangle$, on en déduit aussitôt

$$\langle T(\lambda x),\varphi\rangle = \lambda^s\langle T,\varphi\rangle + \lambda^s \mathrm{Log}\,\lambda \sum_{|\alpha|=-n-s} \frac{1}{\alpha!} m_\alpha(a)\, \varphi^{(\alpha)}(0)$$

autrement dit

$$T(\lambda x) = \lambda^s\, T(x) + (-1)^{-n-s} \lambda^s \mathrm{Log}\,\lambda \sum_{|\alpha|=-n-s} \frac{1}{\alpha!}\, m_\alpha(a)\, \delta^{(\alpha)}$$

d'où

$$\hat{T}(\lambda\xi) = \lambda^{-n-s}\, \hat{T}(\xi) + \lambda^{-n-s}\mathrm{Log}\,\lambda \sum_{|\alpha|=-n-s} \frac{1}{\alpha!} m_\alpha(a)\, (i\xi)^\alpha$$

Or si on pose $T_\alpha(\xi) = \xi^\alpha \mathrm{Log}|\xi|$, on a , comme on vérifie immédiatement $T_\alpha(\lambda\xi) = \lambda^{|\alpha|}T_\alpha(\xi) + \lambda^{|\alpha|}\mathrm{Log}\,\lambda\ \xi^\alpha$. Par suite

$$\hat{T} - \sum_{|\alpha|=-n-s} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\, m_\alpha(a)\, T_\alpha$$

est homogène de degré $-n-s$, et C^∞ en dehors de 0 . Enfin toute distribution homogène de degré $-n-s$, portée par l'origine , est nulle si s n'est pas entier positif , ou de la forme $P(\frac{\partial}{\partial x})\delta$ où P est un polynôme homogène de degré s si $-n-s$ est entier ≥ 0 . La proposition(3.22) en résulte aussitôt .

La proposition (3.22) se généralise aisément en une proposition décrivant la transformée de Fourier partielle en ξ d'une fonction $a(x,\xi)$ C^∞ sur $X\times(R^n-\{0\})$, homogène en ξ , si X est une variété .

Soit maintenant X un ouvert de R^n , et $A \sim a(x,D)$ un opd. régulier sur X . Soit $a\sim\sum a_{m-k}$ le développement asymptotique de a , où a_{m-k} est homogène de degré $m-k$ en ξ . Soit enfin, pour $k \geq -m-n$, $b_k(x,z)$ la transformée de Fourier inverse en z de la distribution pf. $a_{m-k}(x,\xi)$. C'est donc une distribution de la forme

$$b_k(x,z) = \text{pf } b'_k(x,z) + \sum_{|\alpha|=-n-k} c_\alpha(x)\,\delta^{(\alpha)}(z) \qquad \text{si } k \leq -n$$

$$b_k(x,z) = \text{pf } b'_k(x,z) \qquad \text{si } k \text{ est entier }, -n < k < 0$$

$$b_k(x,z) = b'_k(x,z) + \sum_{|\alpha|=k} c'_\alpha(x)\, z^\alpha \operatorname{Log}|z| \qquad \text{si } k \geq 0$$

où $b'_k(x,z)$ est C^∞ sur $X \times (R^n-\{0\})$, homogène de degré k en z et les c_α , c'_α sont des fonctions C^∞ sur X .

En outre si $T(x,y)$ est le noyau de A , pour tout entier N la distribution

$$T(x,y) - \sum_{k \leq N} b_k(x,x-y)$$

est une fonction de classe C^N sur $X \times X$ (en effet b_k est de classe C^N si $k > N$, et de toute façon la différence ci-dessus est de classe $C^{N'}$ où N' tend vers $+\infty$ quand $N \to +\infty$) .