Astérisque

JOSEPH AYOUB

Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (II)

Astérisque, tome 315 (2007)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2007__315__1_0>

© Société mathématique de France, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ASTÉRISQUE 315

LES SIX OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK ET LE FORMALISME DES CYCLES ÉVANESCENTS DANS LE MONDE MOTIVIQUE (II)

Joseph Ayoub

Société Mathématique de France 2007
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Ayoub
LAGA, Université Paris 13, CNRS.
E-mail : ayoub@math.univ-paris13.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14-02, 14C25, 14F20, 14F35, 14F42, 18A40, 18F10, 18F20, 18F25, 18G55, 19E15.

Mots clefs. — Motifs, six opérations de Grothendieck, dualité de Verdier, cycles évanescents, $\mathbb{A}^1$-homotopie des schémas, catégories de modèles.

LES SIX OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK ET LE FORMALISME DES CYCLES ÉVANESCENTS DANS LE MONDE MOTIVIQUE (II)

Joseph Ayoub

Résumé. — Ce deuxième volume regroupe les chapitres **3** et **4** de notre étude de la fonctorialité des catégories homotopiques stables des schémas. Dans le volume précédent, nous nous sommes concentrés sur les six opérations f^*, f_*, $f_!$, $f^!$, $- \otimes -$ et $\underline{\mathsf{Hom}}(-,-)$ et leurs propriétés de constructibilité et d'exactitude.

On commence ce volume par la construction des foncteurs motifs proches Ψ_f, analogues motiviques des foncteurs cycles proches bien connus en cohomologie étale. On étend ensuite le formalisme des cycles évanescents à ces foncteurs. En particulier, on calcule l'effet du foncteur Ψ_f dans le cas où f est à réduction semi-stable. On montre aussi que les Ψ_f préservent les motifs constructibles, qu'ils commutent au produit tensoriel extérieur et aux foncteurs de dualité. On définit ensuite un opérateur de monodromie et on montre qu'il est nilpotent.

Le dernier chapitre, de nature différente des trois autres, reprend en détails la construction de la catégorie homotopique stable des S-schémas.

Abstract **(The Grothendieck six operations and the vanishing cycles formalism in the motivic world (II))**

This second volume contains chapter **3** and **4** of our study of the functoriality of the stable homotopy categories of schemes. In the previous volume, we concentrated on the six operations f^*, f_*, $f_!$, $f^!$, $- \otimes -$ and $\underline{\mathsf{Hom}}(-,-)$, their constructibility and exactness.

This volume begins with the construction of the nearby motive functors Ψ_f which are the analogue of the nearby cycles functors, well-known in étale cohomology. We then extend the vanishing cycles formalism to these functors. In particular, we compute the effect of the functor Ψ_f in the case where f has semi-stable reduction. We show also that Ψ_f preserve constructible motives and commute with external tensor product and duality. We then define a monodromy operator and prove that this operator is nilpotent.

The last chapter, which is of different nature than the previous ones, recall in full details the construction of the stable homotopy category of S-schemes.

© Astérisque 315, SMF 2007

TABLE DES MATIÈRES

3. La théorie des foncteurs cycles proches dans un cadre motivique .. 1
Introduction 1
3.1. Les systèmes de spécialisation : définition et propriétés de cohérence 3
3.2. Une technique de construction de structures de spécialisation 14
3.3. Le calcul des systèmes de spécialisation pour les schémas standards 27
3.4. Le système de spécialisation Υ 69
3.5. Le système de spécialisation Ψ 85
3.6. Le système de spécialisation logarithmique et le triangle de monodromie 93

4. La construction de 2-foncteurs homotopiques stables 139
Introduction 139
4.1. Catégories de modèles I : la théorie générale 141
4.2. Catégories de modèles II : accessibilité et localisation 174
4.3. Catégories de modèles III : les spectres symétriques 224
4.4. Des catégories de modèles de nature faisceautique 279
4.5. Le dérivateur algébrique homotopique et stable $\mathbb{SH}$ 314

Bibliographie 359

CHAPITRE 3

LA THÉORIE DES FONCTEURS CYCLES PROCHES DANS UN CADRE MOTIVIQUE

Introduction

On a vu dans le premier volume que l'on disposait dans le monde motivique du formalisme des six opérations de Grothendieck, à savoir f^*, f_*, $f_!$, $f^!$, $\otimes$ et $\underline{\mathsf{Hom}}$. Il est alors naturel de se demander si l'on dispose également de la septième opération, à savoir les foncteurs cycles proches Ψ. Le présent chapitre est consacré à la construction et à l'étude des foncteurs cycles proches motiviques. Pour rester fidèle à l'esprit de ce travail, on a évité de se restreindre aux cas des 2-foncteurs homotopiques stables **SH** ou **DM**. Malheureusement, pour définir les foncteurs Ψ, il est nécessaire de sortir de la catégorie des schémas. Ceci ne pose pas de problèmes lorsqu'on considère **SH** ou **DM** puisqu'on peut faire les constructions nécessaires au niveau des catégories de modèles. Une solution satisfaisante est de travailler dans un dérivateur algébrique plutôt que dans un 2-foncteur homotopique. Au début, le prix peut paraître cher, mais en réalité on gagne beaucoup à travailler dans une telle généralité. En effet, parmi les avantages on peut noter :

- Notre construction s'applique ainsi à la plupart des 2-foncteurs homotopiques stables connus. En particulier on peut l'appliquer en cohomologie étale, en théorie de Hodge, etc. Ceci peut être particulièrement intéressant si on s'intéresse à la compatibilité de notre définition avec les réalisations.
- Le fait de travailler dans un cadre abstrait facilite les problèmes de cohérence. Ainsi, la construction de la structure pseudo-monoïdale sur les Ψ_f se fait beaucoup plus facilement que si l'on avait travaillé avec des modèles.

Un autre point à retenir sur ce chapitre est la théorie des systèmes de spécialisation. En effet, la plupart des théorèmes importants sur les foncteurs Ψ seront plus ou moins des traductions des résultats sur des systèmes de spécialisation généraux. Faisons un bref aperçu de ce chapitre :

1- Dans la section 3.1, on introduit la notion centrale de systèmes de spécialisation. Il s'agit en gros d'une généralisation des propriétés formelles de commutation avec les

opérations f^* et f_* vérifiées par les foncteurs Ψ_f en cohomologie étale. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter la définition 3.1.1. On s'intéresse ensuite à quelques problèmes de cohérence et on définit la notion de système de spécialisation pseudo-monoïdale puis on en dérive quelques conséquences.

2- Dans la section 3.2, on décrit un procédé de construction des systèmes de spécialisation. Plus précisément, on montre comment la donnée d'un diagramme de schémas permet de construire à partir d'un système de spécialisation donné, un nouveau système de spécialisation. Là, évidement, il faut que le système de spécialisation de départ soit défini entre deux dérivateurs algébriques (voir la définition 3.2.1 pour plus de détails). Notre construction des foncteurs cycles proches sera un cas particulier de ce procédé.

3- La section 3.3 est sans doute le cœur de ce chapitre. C'est ici qu'on fera le calcul fondamental, à savoir le théorème 3.3.10, sur lequel reposent tous les résultats importants sur les systèmes de spécialisation et les foncteurs cycles proches. Pour expliquer de quoi il s'agit, on raisonne en cohomologie étale et on considère le premier cas non trivial. On se donne un schéma strictement hensélien S de point générique η et de point fermé s. Soit $f : X \longrightarrow S$ une courbe semi-stable, génériquement lisse et de fibre spéciale X_s réunion de deux branches D_1 et D_2. On voudrait calculer le complexe de faisceaux étale $\mathsf{R}\Psi_f\Lambda$. Le théorème 3.3.10, nous dit que la restriction à D_1 du complexe $\mathsf{R}\Psi_f\Lambda$ est isomorphe à $\mathsf{R}v_{1*}\Lambda$ avec v_1 l'inclusion de $D_1 - (D_1 \cap D_2)$ dans D_1. Ce résultat sera donc généralisé à n'importe quel système de spécialisation entre deux 2-foncteurs homotopiques stables avec f semi-stable à un nombre arbitraire de branches (voir le théorème 3.3.10 pour plus de détails). Comme conséquence de ce calcul, on obtient un théorème d'unicité (voir les théorèmes 3.3.4, 3.3.46 et 3.3.46) donnant un critère simple pour décider si un morphisme de systèmes de spécialisation est un isomorphisme. De même, on obtient un critère simple pour la constructibilité et la ${}^pt$-exactitude à gauche des systèmes de spécialisation (voir le théorème 3.3.6 et les corollaires 3.3.49 et 3.3.50).

4- Les sections 3.4 et 3.5 sont consacrées à la définition et à l'étude de deux systèmes de spécialisation Υ et Ψ. Les Υ_f sont appelés les foncteurs cycles proches unipotents tandis que les Ψ_f sont les foncteurs cycles proches totaux. Ce sont ceci qui jouent le rôle des foncteurs cycles proches classiques en cohomologie étale. On prouvera que Ψ_f envoie un objet constructible sur un objet constructible, qu'il commute à la dualité et au produit tensoriel extérieur.

5- On termine ce chapitre par une section consacrée à la construction d'un 2-triangle distingué de monodromie pour les foncteurs cycles proches unipotents (à coefficients rationnels) :

$$\Upsilon_?(-1)[-1] \longrightarrow \chi_? \longrightarrow \Upsilon \xrightarrow{N} \Upsilon_?(-1)$$

La flèche N est l'opérateur de monodromie pour les cycles proches unipotents. La construction de ce 2-triangle passe par un système de spécialisation auxiliaire log qu'on appellera le système de spécialisation logarithmique. Il est démontré, sous les bonnes hypothèses, que que log est isomorphe à Υ. Ainsi, la définition de log fournit une deuxième construction des cycles proches. Il est important de noter, que cette construction n'utilise pas le formalisme des dérivateurs algébriques. Par contre, on est obligé de travailler dans un 2-foncteur homotopique stable $\mathbb{Q}$-linéaire (vérifiant quelques conditions techniques supplémentaires).

3.1. Les systèmes de spécialisation : définition et propriétés de cohérence

Dans cette section, on introduit la notion de système de spécialisation entre deux 2-foncteurs homotopiques stables. On verra dans ce chapitre beaucoup d'exemples de systèmes de spécialisation. L'exemple des foncteurs cycles proches est probablement le plus intéressant. Toutefois, un grand nombre de résultats sur les cycles proches sont en fait des résultats généraux sur les systèmes de spécialisation. On verra à plusieurs reprises, comment cette généralité portera des fruits même en ce qui concerne des questions spéciales aux foncteurs cycles proches.

3.1.1. Définition et premiers exemples. — On suppose donné un diagramme de schémas noethériens admettant une famille ample de fibrés en droite :

$$\eta \xrightarrow{j} B \xleftarrow{i} \sigma \tag{1}$$

ainsi que deux 2-foncteurs homotopiques stables :

$$\mathsf{H}_1 : \mathsf{Sch}/\eta \longrightarrow \mathfrak{TR} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{H}_2 : \mathsf{Sch}/\sigma \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible (et il n'y en aura jamais !) on notera par les mêmes symboles : f^*, f_*, $f_!$ et $f^!$ les quatre opérations relativement à H_1 ou à H_2.

Définition 3.1.1. — *Un* système de spécialisation sp *(au-dessus de (B, j, i)) de H_1 vers H_2 est l'ensemble des données suivantes :*

(SPE1) : *pour chaque diagramme commutatif à carrés cartésiens :*

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_\eta"'] & X \arrow[d, "f"] & X_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "f_\sigma"] \\ \eta \arrow[r, "j"] & B & \sigma \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

d'un foncteur triangulé $\mathsf{sp}_f : \mathsf{H}_1(X_\eta) \longrightarrow \mathsf{H}_2(X_\sigma)$,

(SPE2) : *pour chaque diagramme commutatif à carrés cartésiens :*

$$
\begin{tikzcd}
X'_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g_\eta"'] & X' \arrow[d, "g"] & X'_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "g_\sigma"] \\
X_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_\eta"'] & X \arrow[d, "f"] & X_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "f_\sigma"] \\
\eta \arrow[r, "j"] & B & \sigma \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

d'un 2-morphisme :

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_f"] \arrow[d, "g_\eta^*"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_g}{\Swarrow}"] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, "g_\sigma^*"] \\
\mathsf{H}_1(X'_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ g}"'] & \mathsf{H}_2(X'_\sigma)
\end{tikzcd}
$$

tels que les conditions ci-dessous soient vérifiées.

1. *La famille des 2-morphismes α_g est compatible avec la composition verticale des diagrammes commutatifs à carrés cartésiens de base (B, j, i) de la manière évidente,* i.e., *pour tout diagramme commutatif à carrés cartésiens :*

$$
\begin{tikzcd}
X''_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "h_\eta"'] & X'' \arrow[d, "h"] & X''_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "h_\sigma"] \\
X'_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g_\eta"'] & X' \arrow[d, "g"] & X'_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "g_\sigma"] \\
X_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_\eta"'] & X \arrow[d, "f"] & X_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "f_\sigma"] \\
\eta \arrow[r, "j"] & B & \sigma \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}
$$

les composées des deux diagrammes planaires :

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_f"] \arrow[d, "g_\eta^*"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_g}{\Swarrow}"] \arrow[dd, bend right=60, "(g_\eta\circ h_\eta)^*"'] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, "g_\sigma^*"] \arrow[dd, bend left=60, "(g_\sigma\circ h_\sigma)^*"] \\
\mathsf{H}_1(X'_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ g}"'] \arrow[d, "h_\eta^*"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_h}{\Swarrow}"] \arrow[u, phantom, "\overset{(c^*)^{-1}}{\Leftarrow}"] & \mathsf{H}_2(X'_\sigma) \arrow[d, "h_\sigma^*"] \arrow[u, phantom, "\overset{c^*}{\Leftarrow}"] \\
\mathsf{H}_1(X''_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ g\circ h}"'] & \mathsf{H}_2(X''_\sigma)
\end{tikzcd}
$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_f"] \arrow[d, "(g_\eta \circ h_\eta)^*"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_{g\circ h}}{\Swarrow}"] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, "(g_\sigma \circ h_\sigma)^*"] \\
\mathsf{H}_1(X''_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ g\circ h}"'] & \mathsf{H}_2(X''_\sigma)
\end{tikzcd}$$

sont égales.

2. *Lorsque le B-morphisme g est lisse, le 2-morphisme α_g est inversible.*
3. *Notons β_g le 2-morphisme obtenu par adjonction à partir de α_g :*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X'_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ g}"] \arrow[d, "g_{\eta *}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta_g}{\Nearrow}"] & \mathsf{H}_2(X'_\sigma) \arrow[d, "g_{\sigma *}"] \\
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_f"'] & \mathsf{H}_2(X_\sigma)
\end{tikzcd}$$

Lorsque g est projectif, β_g est inversible.

Un morphisme entre deux systèmes de spécialisation sp *et* sp' *est la donnée pour tout digramme (2) d'un 2-morphisme :*

$$\mathsf{sp}_f \longrightarrow \mathsf{sp}'_f$$

compatible au sens évident avec les 2-morphismes α_g, i.e., *tel que les carrés suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
g_\sigma^* \mathsf{sp}_f \arrow[r, "\alpha_g"] \arrow[d] & \mathsf{sp}_{f\circ g} g_\eta^* \arrow[d] \\
g_\sigma^* \mathsf{sp}'_f \arrow[r, "\alpha'_g"] & \mathsf{sp}'_{f\circ g} g_\eta^*
\end{tikzcd}$$

Remarque 3.1.2. — Il n'est pas nécessaire de supposer que j est une immersion ouverte et i l'immersion fermée complémentaire. Il existe en effet des systèmes de spécialisation très intéressants avec σ le fibré normal d'un sous-schéma de B.

Remarque 3.1.3. — Souvent, mais pas toujours, les B-schémas η et σ sont quasi-projectifs et H_1 et H_2 sont les restrictions d'un même 2-foncteur homotopique stable :

$$\mathsf{H} : \mathsf{Sch}/B \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

Dans ce cas, on dit simplement que sp est un système de spécialisation au-dessus de (B, j, i) dans H.

Voici deux exemples de systèmes de spécialisation. Le premiers jouera un rôle important dans la suite. Le second, servira comme fil conducteur, pour la théorie développée :

Exemple 3.1.4. — L'exemple le plus simple de systèmes de spécialisation est le suivant. On suppose que η et σ sont des B-schémas quasi-projectifs et que H_1 et H_2 sont la restriction d'un même 2-foncteur homotopique stable défini sur Sch/B (voir la remarque 3.1.3) . On définit alors un système de spécialisation χ en associant à tout digramme (2), le foncteur triangulé $\chi_f = i^*j_*$ et en prenant pour α_g la composée de morphismes d'échange $Ex^*_* \circ Ex^{*,*}$. Ce système de spécialisation sera appelé le système de spécialisation canonique. Notons que pour vérifier les conditions de la définition 3.1.1, on utilise le théorème de changement de base pour un morphisme projectif.

Exemple 3.1.5. — L'exemple qui nous motive vient de la cohomologie étale. On prend pour $B = S$ un trait strictement hensélien, η son point générique et σ son point fermé (σ est le spectre d'un corps séparablement clos). On fixe une clôture séparable $\bar{\eta} \longrightarrow \eta$ et on note $\bar{S}$ le normalisé de S dans $\bar{\eta}$. On forme à partir du diagramme (2) le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X_{\bar{\eta}} \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d, "f_{\bar{\eta}}"'] & \bar{X} \arrow[d, "\bar{f}"] & X_\sigma \arrow[l, "\bar{i}"'] \arrow[d, "f_\sigma"] \\
\bar{\eta} \arrow[r, "\bar{j}"] & \bar{S} & \sigma \arrow[l, "\bar{i}"']
\end{tikzcd}$$

Pour tout objet A de $\mathsf{D}^b_c(X_\eta, \Lambda)$ (où Λ est un anneau fini de torsion première à la caractéristique du corps résiduel de S) on pose :

$$\Psi_f(A) = \bar{i}^* \mathsf{R}\bar{j}_*(A_{|X_{\bar{\eta}}})$$

Les foncteurs Ψ_f sont connus sous le nom de *foncteurs cycles proches.* Ils définissent un système de spécialisation sur le foncteur croisé homotopique stable $\mathsf{D}^b_c(-, \Lambda)$. On verra dans la suite comment on pourra définir un système de spécialisation sur **SH** (et **DM**) qui jouira de la plupart des bonnes propriétés des cycles proches du formalisme étale.

Notons le résultat utile suivant qui permet de construire un système de spécialisation donné à partir d'un autre :

Proposition 3.1.6. — *Gardons les notations de la définition 3.1.1. On fixe un B-schéma quasi-projectif $b : B' \longrightarrow B$ et on définit deux 2-foncteurs homotopiques stables :*

$$\mathsf{H}'_1 : \mathsf{Sch}/\eta \longrightarrow \mathfrak{TR} \qquad \textit{et} \qquad \mathsf{H}'_2 : \mathsf{Sch}/\sigma \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

tels que :

- *pour un η-schéma quasi-projectif X_1, on a $\mathsf{H}'_1(X_1) = \mathsf{H}_1(X_1 \times_B B')$ avec $X_1 \times_B B'$ muni de la structure évidente de η-schémas,*
- *pour un σ-schéma quasi-projectif X_2, on a $\mathsf{H}'_2(X_2) = \mathsf{H}_2(X_2 \times_B B')$ avec $X_2 \times_B B'$ muni de la structure évidente de σ-schémas,*

Pour tout diagramme (2), posons $\mathsf{sp}'_f = \mathsf{sp}_{b \circ f'} \circ b^*_\eta$ avec f' le pull-back de f par b. Alors sp' est naturellement un système de spécialisation au-dessus de B' de H'_1 vers H'_2.

3.1.2. Propriétés de cohérence. — Les résultats de ce paragraphe peuvent être vus comme cas particuliers de résultats concernant les morphismes de 2-foncteurs homotopiques stables. En effet, on peut voir un système de spécialisation sp comme un morphisme entre deux 2-foncteurs sur Sch/B. Ces deux 2-foncteurs associent à X/B les catégories $\mathsf{H}_1(X_\eta)$ et $\mathsf{H}_2(X_\sigma)$.

On fixe un système de spécialisation sp au-dessus de (B, j, i), de H_1 vers H_2. On garde les notations de la définition 3.1.1. Il est clair que la famille $(\beta_?)$ est compatible au sens évident avec les compositions verticales. On dispose également de cubes commutatifs ayant pour faces $\alpha_?$, $\beta_?$ et les morphismes d'échange Ex^*_*. On laissera aux lecteurs le soin de les écrire.

Lorsque le morphisme g est lisse, on obtient par adjonction à partir de α_g^{-1} un 2-morphisme :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}_1(X'_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ g}"] \arrow[d, "g_{\eta\#}"'] \arrow[dr, phantom, "\gamma_g \swarrow"] & \mathsf{H}_2(X'_\sigma) \arrow[d, "g_{\sigma\#}"] \\ \mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_f"'] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \end{tikzcd} \tag{4}$$

La famille $(\gamma_?)$ est également compatible au sens évident avec les compositions verticales et on dispose de cubes commutatifs décrivant la compatibilité avec les morphismes d'échange $Ex^*_\#$.

Lorsqu'à la place du morphisme g, on a une immersion fermée $s : Y \longrightarrow X$, on obtient à partir de β_s^{-1} un 2-morphisme ν_s :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_f"] \arrow[d, "s^!_\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\nu_s \nearrow"] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, "s^!_\sigma"] \\ \mathsf{H}_1(Y_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ s}"'] & \mathsf{H}_2(Y_\sigma) \end{tikzcd} \tag{5}$$

Bien entendu, on a les compatibilités évidentes avec la composition verticale ainsi que les morphismes d'échange $Ex^!_*$ et $Ex^{!,*}$.

Étant donné un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de type fini $\mathscr{M}$ sur le B-schéma X, on définit par les formules habituelles des morphismes de commutation avec les équivalences de Thom :

$$\omega_f : \mathsf{sp}_f \circ \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\eta) \longrightarrow \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\sigma) \circ \mathsf{sp}_f$$

(6) et

$$\omega_f : \mathsf{Th}(\mathscr{M}_\sigma) \circ \mathsf{sp}_f \longrightarrow \mathsf{sp}_f \circ \mathsf{Th}(\mathscr{M}_\eta)$$

On vérifie sans peine que ces morphismes sont compatibles aux isomorphismes de commutation avec les opérations f^* et $s^!$ (pour s une immersion fermée). On en déduit en particulier une compatibilité avec les isomorphismes de composition.

Sans savoir que ces morphismes sont inversibles, on peut déjà définir pour g lisse une face carrée (dans le mauvais sens) :

(7)
$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_f"] \arrow[d, "g^!_\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha'_g}{\swarrow}"] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, "g^!_\sigma"] \\ \mathsf{H}_1(X'_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ g}"'] & \mathsf{H}_2(X'_\sigma) \end{tikzcd}$$

en prenant la composée :

(8)
$$g^!_\sigma \mathsf{sp}_f \xrightarrow{\sim} \mathsf{Th}((\Omega_g)_\sigma) g^*_\sigma \mathsf{sp}_f \xrightarrow[\sim]{\alpha_g} \mathsf{Th}((\Omega_g)_\sigma) \mathsf{sp}_{f\circ g} g^*_\eta$$
$$\xrightarrow{\omega_{f\circ g}} \mathsf{sp}_{f\circ g} \mathsf{Th}((\Omega_g)_\sigma) g^*_\eta \xrightarrow{\sim} \mathsf{sp}_{f\circ g} g^!_\eta$$

On vérifie par la méthode habituelle que ces faces sont compatibles avec la composition verticale et les morphismes d'échange de type $Ex^{!,*}$.

Proposition 3.1.7. — *Les 2-morphismes $\omega_?$ de (6) sont inversibles.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas de l'équivalence de Thom inverse $\mathsf{Th}^{-1}(-)$. Le cas de l'équivalence de Thom $\mathsf{Th}(-)$ découle alors par adjonction. On se ramène au cas où $\mathscr{M}$ est libre en prenant un recouvrement Zariski suffisamment fin $u : U \longrightarrow X$ et en utilisant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} u^*_\sigma \mathsf{sp}_f \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\eta) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathsf{sp}_{f\circ u} u^*_\eta \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\eta) \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{sp}_{f\circ u} \mathsf{Th}^{-1}((u^*\mathscr{M})_\eta) u^*_\eta \arrow[d] \\ u^*_\sigma \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\sigma) \mathsf{sp}_f \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{Th}^{-1}((u^*\mathscr{M})_\sigma) u^*_\sigma \mathsf{sp}_f \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{Th}^{-1}((u^*\mathscr{M})_\sigma) \mathsf{sp}_{f\circ u} u^*_\eta \end{tikzcd}$$

ainsi que la conservation du foncteur u^*_η. On se ramène ensuite au cas $\mathscr{M} = \mathscr{O}_X$ en utilisant la compatibilité avec l'isomorphisme de composition des équivalences de Thom. Pour traiter ce cas particulier, on procède de la manière suivante.

On appelle $p\colon \mathbb{P}^1_X \longrightarrow X$ la projection de la droite projective relative sur X. Notons que p est lisse et projectif. On déduit alors un isomorphisme $\mathsf{sp}_f p_{\eta *} p_\eta^* \xrightarrow{\sim} p_{\sigma *} p_\sigma^* \mathsf{sp}_f$ en prenant la composée suivante :

$$\mathsf{sp}_f p_{\eta *} p_\eta^* \xrightarrow[\sim]{\beta_p} p_{\sigma *} \mathsf{sp}_{f\circ p} p_\eta^* \xrightarrow[\sim]{\alpha_p^{-1}} p_{\sigma *} p_\sigma^* \mathsf{sp}_f$$

L'idée est de déduire que le 2-morphisme de commutation $\mathsf{sp}_f \circ (-1)[-2] \longrightarrow (-1)[-1] \circ \mathsf{sp}_f$ est inversible du fait que $p_* p^* \simeq \mathrm{id} \oplus (-1)[-2]$. On note pour cela s l'immersion de la section nulle de $\mathbb{P}^1_X$ et on considère les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sp}_f \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathsf{sp}_f \arrow[d] \\
\mathsf{sp}_f p_{\eta *} p_\eta^* \arrow[r, "\beta_p"] & p_{\sigma *} \mathsf{sp}_{f\circ p} p_\eta^* & p_{\sigma *} p_\sigma^* \mathsf{sp}_f \arrow[l, "\alpha_p"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sp}_f \circ (-1)[-2] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\sim"'] & \mathsf{sp}_f \circ (-1)[-2] \arrow[rr] \arrow[d] & & (-1)[-2] \circ \mathsf{sp}_f \arrow[d] \\
\mathsf{sp}_f p_{\eta *} s_{\eta *} s_\eta^! p_\eta^* \arrow[r] \arrow[d] & p_{\sigma *} \mathsf{sp}_{f\circ p} s_{\eta *} s_\eta^! p_\eta^* \arrow[r] \arrow[d] & p_{\sigma *} s_{\sigma *} \mathsf{sp}_f s_\eta^! p_\eta^* \arrow[r] & p_{\sigma *} s_{\sigma *} s_\sigma^! \mathsf{sp}_{f\circ p} p_\eta^* \arrow[d] & p_{\sigma *} s_{\sigma *} s_\sigma^! p_\sigma^* \mathsf{sp}_f \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathsf{sp}_f p_{\eta *} p_\eta^* \arrow[r] & p_{\sigma *} \mathsf{sp}_f p_\eta^* \arrow[rr, equal] & & p_{\sigma *} \mathsf{sp}_f p_\eta^* & p_{\sigma *} p_\sigma^* \mathsf{sp}_f \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On en déduit immédiatement un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sp}_f \oplus \mathsf{sp}_f \circ (-1)[-2] \arrow[r, "\mathrm{id} \oplus c_f"] \arrow[d] & \mathsf{sp}_f \oplus (-1)[-2] \circ \mathsf{sp}_f \arrow[d] \\
\mathsf{sp}_f p_{\eta *} p_\sigma^* \arrow[r, "\sim"] & p_{\sigma *} p_\sigma^* \mathsf{sp}_f
\end{tikzcd}$$

montrant ainsi que notre morphisme ω_f est rétraction d'un isomorphisme. Ceci prouve la proposition. □

En particulier la face (7) est inversible. On notera ν_g son inverse :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_f"] \arrow[d, "g_\eta^!"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\nu_g}{\Nearrow}"] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, "g_\sigma^!"] \\
\mathsf{H}_1(X'_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ g}"'] & \mathsf{H}_2(X'_\sigma)
\end{tikzcd} \tag{9}$$

L'étape suivante, consiste à recoller les faces (5) et (9) pour obtenir les transformations naturelles ν_g avec g quasi-projectif quelconque. On factorise alors g par une immersion fermée s suivie d'une projection lisse p. On prend alors pour ν_g la composée de ν_s et ν_p modulo les isomorphismes de connexion de $\mathsf{H}^!$. Le point est de prouver l'indépendance du choix de la factorisation. On se ramène alors à prouver le résultat suivant.

***Lemme 3.1.8* (Compatibilité avec l'isomorphisme de pureté).** — *On suppose donné un triangle commutatif de B-schémas :*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "h"'] & W \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

avec t une immersion fermée et g et h lisses. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{sp}_{f\circ h} t^!_\eta g^*_\eta \arrow[r] \arrow[d, "\Pi"'] & t^!_\sigma \mathsf{sp}_{f\circ g} g^*_\eta \arrow[r, "\sim"] & t^!_\sigma g^*_\sigma \mathsf{sp}_f \arrow[d, "\Pi"] \\ \mathsf{sp}_{f\circ h} \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{N}_{t_\sigma}) h^*_\eta \arrow[r] & \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{N}_{t_\eta}) \mathsf{sp}_{f\circ h} h^*_\eta \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{N}_{t_\eta}) h^*_\sigma \mathsf{sp}_f \end{tikzcd}$$

Démonstration. — La preuve de ce lemme est complètement analogue à celle de la proposition 1.6.22. On se ramène à prouver la compatibilité correspondante avec le 2-morphisme π. Les détails sont laissés aux lecteurs. □

On a ainsi le résultat suivant :

Proposition 3.1.9. — *Il existe une unique famille de faces carrées :*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_f"] \arrow[d, "g^!_\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\nu_g}{\nearrow}"] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, "g^!_\sigma"] \\ \mathsf{H}_1(X'_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ g}"'] & \mathsf{H}_2(X'_\sigma) \end{tikzcd} \tag{10}$$

prolongeant les faces (5) et (9) et compatible à la composition verticale. De plus, les ν_g et les α_g sont compatibles à la structures d'échange $Ex^{*,!}$ dans le sens évident.

On déduit par adjonction de (10) des faces carrées :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}_1(X'_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{f\circ g}"] \arrow[d, "g_{\eta!}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu_g}{\swarrow}"] & \mathsf{H}_2(X'_\sigma) \arrow[d, "g_{\sigma!}"] \\ \mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "\mathsf{sp}_f"'] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \end{tikzcd} \tag{11}$$

De la compatibilité avec la structure d'échange $Ex^{!,*}$, on déduit en revenant à la définition du 2-morphisme $g_! \longrightarrow g_*$ le résultat suivant :

Proposition 3.1.10. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} g_{\sigma!}\mathsf{sp}_{f\circ g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{sp}_f g_{\eta!} \arrow[d] \\ g_{\sigma *}\mathsf{sp}_{f\circ g} & \mathsf{sp}_f g_{\eta *} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

En particulier, pour g projectif la face μ_g est inversible.

Retenons la conséquence suivante :

Corollaire 3.1.11. — *Le système de spécialisation* sp *est également un système de spécialisation* $\mathsf{sp}^{\mathrm{op}}$ *du 2-foncteur homotopique stable* $\mathsf{H}_1^{\mathrm{op}} = (\mathsf{G}_1^\star, \mathsf{G}_{1\star}, \mathsf{G}_{1\nabla}, \mathsf{G}_1^\nabla)$ *opposé à* H_1 *vers le 2-foncteur homotopique stable* $\mathsf{H}_2^{\mathrm{op}} = (\mathsf{G}_2^\star, \mathsf{G}_{2\star}, \mathsf{G}_{2\nabla}, \mathsf{G}_2^\nabla)$ *opposé à* H_2 *(voir la page 211 du premier volume pour la définition du 2-foncteur homotopique stable opposé).*

3.1.3. Systèmes de spécialisation monoïdaux. — Dans ce numéro, on suppose que H_1 et H_2 sont des 2-foncteurs monoïdaux homotopiques et stables. Faisons la définition suivante :

Définition 3.1.12. — *Un système de spécialisation pseudo-monoïdal de* H_1 *vers* H_2 *est la donnée :*

1. *d'un système de spécialisation* sp *de* H_1 *vers* H_2 *au sens de la définition 3.1.1,*
2. *pour chaque diagramme à carrés cartésiens (2), d'un accouplement a sur le foncteur* sp_f *faisant de lui un foncteur pseudo-monoïdal et tel que les* α_g *soient des transformations naturelles de foncteurs pseudo-monoïdaux.*

Les deux résultats simples suivants seront utiles :

Proposition 3.1.13. — *On suppose donné un système de spécialisation pseudo-monoïdal* sp *de* H_1 *vers* H_2 *et on garde les notations de la définition 3.1.1.*

1- *Soit* A_1 *un objet de* $\mathsf{H}_1(\eta)$. *On obtient un système de spécialisation* sp^{A_1} *en posant :*

$$\mathsf{sp}_f^{A_1}(-) = \mathsf{sp}_f(f_\eta^*(A_1) \otimes_{X_\eta} -)$$

2- *Soit* A_2 *un objet de* $\mathsf{H}_2(\sigma)$. *On obtient un système de spécialisation* ${}^{A_2}\mathsf{sp}$ *en posant :*

$${}^{A_2}\mathsf{sp}_f(-) = f_\sigma^* A_2 \otimes_{X_\sigma} \mathsf{sp}_f(-)$$

Démonstration. — On prendra pour α_g les composées suivantes :

$$\begin{aligned} g_\sigma^*\mathsf{sp}_f(f_\eta^*(A_1) \otimes -) &\longrightarrow \mathsf{sp}_{f\circ g}(g_\eta^*(f_\eta^* A_1) \otimes -) \\ &\longrightarrow \mathsf{sp}_{f\circ g}(g_\eta^* f_\eta^* A_1 \otimes g_\eta^*(-)) \simeq \mathsf{sp}_{f\circ g}((f\circ g)_\eta^* A_1 \otimes g_\eta^*(-)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_\sigma^*(f_\sigma^* A_2 \otimes \mathsf{sp}_f(-)) &\longrightarrow g_\sigma^* f_\sigma^* A_2 \otimes g_\sigma^*\mathsf{sp}_f(-) \\ &\longrightarrow g_\sigma^* f_\sigma^* A_2 \otimes \mathsf{sp}_{f\circ g} g_\eta^*(-) \simeq (f\circ g)_\sigma^* A_1 \otimes \mathsf{sp}_{f\circ g} g_\eta^*(-) \end{aligned}$$

La preuve de la compatibilité avec la composition verticale est laissée en exercice. Lorsque g est lisse, on voit immédiatement que ces composées sont inversibles. Pour

vérifier le troisième axiome, on remarque d'abord que les β_g sont donnés par les composées :

$$\begin{aligned}\mathsf{sp}_f(f_\eta^* A_1 \otimes g_{\eta *}(-)) &\longrightarrow \mathsf{sp}_f(g_{\eta *}(g_\eta^* f_\eta^* A_1 \otimes -)) \\ &\longrightarrow g_{\sigma *}\mathsf{sp}_{f\circ g}(g_\eta^* f_\eta^* A_1 \otimes -) \simeq g_{\sigma *}\mathsf{sp}_{f\circ g}((f\circ g)_\eta^* A_1 \otimes -)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_\sigma^* A_2 \otimes \mathsf{sp}_f g_{\eta *}(-) &\longrightarrow f_\sigma^* A_2 \otimes g_{\sigma *}\mathsf{sp}_{f\circ g}(-) \\ &\longrightarrow g_{\sigma *}(g_\sigma^* f_\sigma^* A_2 \otimes \mathsf{sp}_{f\circ g}(-)) \simeq g_{\sigma *}((f\circ g)_\eta^* A_2 \otimes \mathsf{sp}_{f\circ g}(-))\end{aligned}$$

Pour vérifier que ces composées sont bien inversibles pour g projectifs, il suffira de montrer que les morphismes structuraux des coprojecteurs $[g_\eta^*, g_{\eta *}]$ et $[g_\sigma^*, g_{\sigma *}]$ sont inversibles. C'est effectivement le cas et les projecteurs inverses sont donnés par $[g_\eta^*, g_{\eta !}]$ et $[g_\sigma^*, g_{\sigma !}]$ modulo les isomorphismes $g_{\eta !} \simeq g_{\eta *}$ et $g_{\sigma !} \simeq g_{\sigma *}$. □

On a également le résultat facile suivant dont la preuve est laissée en exercice :

Proposition 3.1.14. — *On garde les notations de la proposition 3.1.13. Soit A un objet de $\mathsf{H}_1(\eta)$. Les transformations naturelles :*

$$f_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}} A \otimes_{X_\sigma} \mathsf{sp}_f(-) \longrightarrow \mathsf{sp}_f f_\eta^* A \otimes \mathsf{sp}_f(-) \longrightarrow \mathsf{sp}_f(f_\eta^* A \otimes -)$$

définissent un morphisme de systèmes de spécialisation ${}^{\mathsf{sp}_{\mathrm{id}} A}\mathsf{sp} \longrightarrow \mathsf{sp}^A$.

Notons le résultat suivant :

Proposition 3.1.15. — *On suppose donné un système de spécialisation* sp *au-dessus de B de H_1 vers H_2. Avec les notations de la définition 3.1.1, le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
g_\sigma^* \mathsf{sp}_f A \otimes \mathsf{sp}_{f\circ g} g_\eta^! B \arrow[r] \arrow[d] & g_\sigma^* \mathsf{sp}_f A \otimes g_\sigma^! \mathsf{sp}_f B \arrow[r] & g_\sigma^!(\mathsf{sp}_f A \otimes \mathsf{sp}_f B) \arrow[r] & g_\sigma^! \mathsf{sp}_f(A \otimes B) \arrow[d, equal] \\
\mathsf{sp}_{f\circ g} g_\eta^* A \otimes \mathsf{sp}_{f\circ g} g_\eta^! B \arrow[r] & \mathsf{sp}_{f\circ g}(g_\eta^* A \otimes g_\eta^! B) \arrow[r] & \mathsf{sp}_{f\circ g} g_\eta^!(A \otimes B) \arrow[r] & g_\sigma^! \mathsf{sp}_f(A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. — On se ramène immédiatement au cas où g est lisse ou une immersion fermée.

Pour une immersion fermée s, on se ramène par adjonction à la commutation de :

$$\begin{tikzcd}
s_{\sigma *}(s_\sigma^* \mathsf{sp}_f A \otimes \mathsf{sp}_{f\circ s} B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{sp}_f A \otimes s_{\sigma *}\mathsf{sp}_{f\circ s} B \arrow[r] & \mathsf{sp}_f A \otimes \mathsf{sp}_f s_{\eta *} B \arrow[r] & \mathsf{sp}_f(A \otimes s_{\eta *} B) \arrow[d, equal] \\
s_{\sigma *}(\mathsf{sp}_{f\circ s} s_\eta^* A \otimes \mathsf{sp}_{f\circ s} B) \arrow[r] & s_{\sigma *}\mathsf{sp}_{f\circ s}(s_\eta^* A \otimes B) \arrow[r] & \mathsf{sp}_f(s_{\eta *}(s_\eta^* A \otimes B)) \arrow[r] & \mathsf{sp}_f(A \otimes s_{\eta *} B)
\end{tikzcd}$$

Cela découle immédiatement du lemme 2.1.110.

Pour g lisse, on a la formule $g^! = \mathsf{Th}(\Omega_g) g^*$. En utilisant la commutation du diagramme analogue obtenu en remplaçant $g^!$ par g^* dans le diagramme de l'énoncé,

on se ramène à une question qui concerne des équivalences de Thom. En passant aux équivalences de Thom inverses on voit qu'il faut prouver la commutation des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sp}_f A \otimes \mathsf{sp}_f \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\eta)A \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{sp}_f A \otimes \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\sigma)\mathsf{sp}_f B \arrow[r] & \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\sigma)(\mathsf{sp}_f A \otimes \mathsf{sp}_f B) \arrow[d] \\
\mathsf{sp}_f(A \otimes \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\eta)B) \arrow[r] & \mathsf{sp}_f \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\eta)(A \otimes B) \arrow[r] & \mathsf{Th}^{-1}(\mathscr{M}_\sigma)\mathsf{sp}_f(A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

En revenant à la définition de $\mathsf{Th}^{-1}(-)$, on voit qu'il suffit de prouver la commutation du diagramme de l'énoncé dans lequel on a remplacé $g^!$ par $s^!$ (avec s une immersion fermée) et p^*. Mais on a déjà traité le cas des immersions fermées. D'où le résultat annoncé. □

On supposera dans la suite que H_1 et H_2 sont tous les deux fermés à droite. On notera $\underline{\mathsf{Hom}}$ sans décorations les foncteurs homomorphismes internes. Par la définition 2.1.140, on a des transformations naturelles :

$$\mathsf{sp}_f \underline{\mathsf{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{sp}_f A, \mathsf{sp}_f B)$$

Étant donné un objet R_1 de $\mathsf{H}_1(\eta)$ et R_2 de $\mathsf{H}_2(\sigma)$ on pose :
- $\mathsf{D}_f^{R_1}(-) = \underline{\mathsf{Hom}}(-, f_\eta^! R_1)$,
- $\mathsf{D}_f^{R_2}(-) = \underline{\mathsf{Hom}}(-, f_\sigma^! R_2)$.

Proposition 3.1.16. — *Les foncteurs :*
- $\mathsf{sp}_f \circ \mathsf{D}_f^{R_1} : \mathsf{H}_1(X_\eta) \longrightarrow \mathsf{H}_2(X_\sigma)^{\mathrm{op}}$
  $\mathsf{D}_f^{R_2} \circ \mathsf{sp}_f : \mathsf{H}_1(X_\eta) \longrightarrow \mathsf{H}_2(X_\sigma)^{\mathrm{op}}$

définissent deux systèmes de spécialisation de H_1 *vers* $\mathsf{H}_2^{\mathrm{op}}$.

Démonstration. — En effet, on peut les voir comme des composées :

$$\mathsf{H}_1 \xrightarrow{\mathsf{D}^{R_1}} \mathsf{H}_1^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{sp}^{\mathrm{op}}} \mathsf{H}_2^{\mathrm{op}} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{H}_1 \xrightarrow{\mathsf{sp}} \mathsf{H}_2 \xrightarrow{\mathsf{D}^{R_2}} \mathsf{H}_2^{\mathrm{op}}$$

Les détails seront laissés aux lecteurs. □

Fixons un objet R de $\mathsf{H}_1(\eta)$. On dispose ainsi d'une transformation naturelle $\mathsf{sp}_f \circ \mathsf{D}_f^R \longrightarrow \mathsf{D}_f^{\mathsf{sp}_{\mathrm{id}} R} \circ \mathsf{sp}_f$ en prenant la composée :

$$\mathsf{sp}_f \underline{\mathsf{Hom}}(-, f_\eta^! A) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{sp}_f(-), \mathsf{sp}_f f_\eta^! R) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{sp}_f(-), f_\sigma^! \mathsf{sp}_{\mathrm{id}} R) \tag{12}$$

On a le résultat de cohérence suivant.

Proposition 3.1.17. — *Le diagramme suivant*[1] *:*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sp}_{f\circ g}\mathsf{D}^R_{f\circ g}g^*_\eta \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathsf{sp}_{f\circ g}g^!_\eta\mathsf{D}^R_f \arrow[r] & g^!_\sigma\mathsf{sp}_f\mathsf{D}^R_f \arrow[d] \\
\mathsf{D}^{\mathsf{sp}_{\mathrm{id}}R}_{f\circ g}\mathsf{sp}_{f\circ g}g^*_\eta \arrow[r] & \mathsf{D}^{\mathsf{sp}_{\mathrm{id}}R}_{f\circ g}g^*_\sigma\mathsf{sp}_f \arrow[r] & g^!_\sigma\mathsf{D}^{\mathsf{sp}_{\mathrm{id}}R}_f\mathsf{sp}_f
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. — En dégageant les isomorphismes de connexion, on se ramène immédiatement à montrer que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sp}_{f\circ g}\underline{\mathsf{Hom}}(g^*_\eta(-), g^!_\eta f^!_\eta R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{sp}_{f\circ g}g^!_\eta\underline{\mathsf{Hom}}(-, f^!_\eta R) \arrow[r] & g^!_\sigma\mathsf{sp}_f\underline{\mathsf{Hom}}(-, f^!_\eta R) \arrow[dd] \\
\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{sp}_{f\circ g}g^*_\eta(-), \mathsf{sp}_{f\circ g}g^!_\eta f^!_\eta R) \arrow[d] & & \\
\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{sp}_{f\circ g}g^*_\eta(-), g^!_\sigma\mathsf{sp}_f f^!_\eta R) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathsf{Hom}}(g^*_\sigma\mathsf{sp}_f(-), g^!_\sigma\mathsf{sp}_f f^!_\eta R) \arrow[r] \arrow[d] & g^!_\sigma\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{sp}_f(-), \mathsf{sp}_f f^!_\eta R) \arrow[d] \\
\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{sp}_{f\circ g}g^*_\eta(-), g^!_\sigma f^!_\sigma\mathsf{sp}_{\mathrm{id}}R) \arrow[r] & \underline{\mathsf{Hom}}(g^*_\sigma\mathsf{sp}_f(-), g^!_\sigma f^!_\sigma\mathsf{sp}_{\mathrm{id}}R) \arrow[r] & g^!_\sigma\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{sp}_f(-), f^!_\sigma\mathsf{sp}_{\mathrm{id}}R)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. La commutation des petits carrés en bas est triviale. La commutation du gros rectangle se démontre en utilisant la méthode de la preuve de 2.3.57. □

On a le corollaire intéressant suivant :

Corollaire 3.1.18. — *Les transformations naturelles (12) définissent un morphisme de systèmes de spécialisation :*

$$\mathsf{sp}\circ\mathsf{D}^R \longrightarrow \mathsf{D}^{\mathsf{sp}_{\mathrm{id}}R}\circ\mathsf{sp}$$

3.2. Une technique de construction de structures de spécialisation

Dans cette section, on décrira une méthode générale pour construire des systèmes de spécialisation. Cette méthode utilise le formalisme des dérivateurs algébriques homotopiques et stables. Comme application de cette construction, on obtiendra les foncteurs cycles proches à partir du système de spécialisation canonique. On suppose donné un diagramme de schémas noethériens admettant une famille ample de fibrés en droite :

$$\eta \longrightarrow B \longleftarrow \sigma$$

[1] Noter que la première flèche de la ligne inférieure n'est pas dans le mauvais sens comme on pourrait le croire à première vue. En effet, les foncteurs de dualité sont contravariants.

et deux dérivateurs algébriques :

$$\mathbb{H}_1 : \mathsf{DiaSch}/\eta \longrightarrow \mathfrak{TR} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{H}_2 : \mathsf{DiaSch}/\sigma \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

La définition suivante est une extension évidente de la définition 3.1.1 :

Définition 3.2.1. — *Un système de spécialisation* sp *(au-dessus de* (B, j, i)*) de* $\mathbb{H}_1$ *vers* $\mathbb{H}_2$ *est l'ensemble des données suivantes :*

(SPE1) : *pour chaque diagramme commutatif de* DiaSch/B *à carrés cartésiens :*

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{X}_\eta, \mathcal{J}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "(f_\eta, p_{\mathcal{J}})"'] & (\mathscr{X}, \mathcal{J}) \arrow[d, "(f, p_{\mathcal{J}})"] & (\mathscr{X}_\sigma, \mathcal{J}) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "(f_\sigma, p_{\mathcal{J}})"] \\
\eta \arrow[r, "j"] & B & \sigma \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd} \tag{13}$$

d'un foncteur triangulé $\mathsf{sp}_{(f,\mathcal{J})} : \mathbb{H}_1(\mathscr{X}_\eta, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{H}_2(\mathscr{X}_\sigma, \mathcal{J})$,

(SPE2) : *pour chaque diagramme commutatif de* DiaSch/B *à carrés cartésiens :*

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{X}'_\eta, \mathcal{J}') \arrow[r, "j"] \arrow[d, "(g_\eta, \tau)"'] & (\mathscr{X}', \mathcal{J}') \arrow[d, "(g, \tau)"] & (\mathscr{X}'_\sigma, \mathcal{J}') \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "(g_\sigma, \tau)"] \\
(\mathscr{X}_\eta, \mathcal{J}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "(f_\eta, p_{\mathcal{J}})"'] & (\mathscr{X}, \mathcal{J}) \arrow[d, "(f, p_{\mathcal{J}})"] & (\mathscr{X}_\sigma, \mathcal{J}) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "(f_\sigma, p_{\mathcal{J}})"] \\
\eta \arrow[r, "j"] & B & \sigma \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd} \tag{14}$$

d'un 2-morphisme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}_1(\mathscr{X}_\eta, \mathcal{J}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f, p_{\mathcal{J}})}"] \arrow[d, "(g_\eta, \tau)^*"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_{(g,\tau)}}{\Leftarrow}"] & \mathbb{H}_2(\mathscr{X}_\sigma, \mathscr{I}) \arrow[d, "(g_\sigma, \tau)^*"] \\
\mathbb{H}_1(\mathscr{X}'_\eta, \mathcal{J}') \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f \circ g, p_{\mathcal{J}'})}"'] & \mathbb{H}_2(\mathscr{X}'_\sigma, \mathcal{J}')
\end{tikzcd}$$

tels que les conditions ci-dessous soient vérifiées.

1. *La famille des 2-morphismes* $\alpha_{(g,\tau)}$ *est compatible avec la composition verticale des diagrammes commutatifs à carrés cartésiens de base* (B, j, i) *de la manière évidente.*
2. *Lorsque le* B*-morphisme* (g, τ) *est lisse argument par argument, le 2-morphisme* $\alpha_{(g,\tau)}$ *est inversible.*
3. *Notons* $\beta_{(g,\tau)}$ *le 2-morphisme obtenu par adjonction à partir de* $\alpha_{(g,\tau)}$*. Lorsque* (g, τ) *est projectif argument par argument, ce 2-morphisme est inversible.*

Exemple 3.2.2. — Lorsque η, et σ sont de type fini et que $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$ proviennent d'un même dérivateur algébrique homotopique et stable $\mathbb{H}$ défini sur DiaSch/B, on définit un système de spécialisation canonique χ par la formule $\chi_f = i^* j_*$.

Pour $i \in \{1,2\}$, on note $\mathsf{H}_i(-)$ le 2-foncteur homotopique et stable $\mathbb{H}_i(-,\mathbf{e})$. Dans la suite, on fixe un système de spécialisation sp de $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$. On construira à partir de sp de nouveaux systèmes de spécialisation de H_1 vers H_2.

3.2.1. La construction. Vérification des axiomes. — On se donne un diagramme de η-schémas quasi-projectifs $(\mathscr{F},\mathcal{I})$. On va définir un système de spécialisation qu'on notera $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}$ (lorsqu'il y a pas d'ambiguïté sur la catégorie d'indice $\mathcal{I}$) de H_1 vers H_2.

Notons $(\pi, p_{\mathcal{I}}) : (\mathscr{F},\mathcal{I}) \longrightarrow (\eta,\mathbf{e})$ la projection structurale de notre diagramme de η-schémas. On a ainsi la factorisation évidente (voir remarque 2.4.7) :

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{F},\mathcal{I}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "(\pi,p_{\mathcal{I}})"] & (\eta,\mathcal{I}) \arrow[r, "p_{\mathcal{I}}"] & \eta
\end{tikzcd}$$

Pour tout B-schéma quasi-projectif $f : X \longrightarrow B$. on considère le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
X_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_\eta"'] & X \arrow[d, "f"] & X_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "f_\sigma"] \\
\eta \arrow[r, "j"] & B & \sigma \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

Le foncteur $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f$ à définir est un foncteur de $\mathsf{H}_1(X_\eta)$ dans $\mathsf{H}_2(X_s)$. On commence par considérer le diagramme commutatif de 1-morphismes de diagrammes de schémas :

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{F}\times_\eta X_\eta,\mathcal{I}) \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[d, "f_\eta"'] & (X_\eta,\mathcal{I}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_\eta"] \arrow[dr, "p_{\mathcal{I}}"] & (X,\mathcal{I}) \arrow[dr, "p_{\mathcal{I}}"] & (X_s,\mathcal{I}) \arrow[l, "i"'] \arrow[dr, "p_{\mathcal{I}}"] & \\
(\mathscr{F},\mathcal{I}) \arrow[r, "\pi"'] & (\eta,\mathcal{I}) \arrow[dr, "p_{\mathcal{I}}"] & X_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_\eta"] & X \arrow[d, "f"] & X_s \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "f_s"] \\
 & & \eta \arrow[r, "j"] & B & \sigma \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

Dans lesquels tous les carrés (et losanges) sont cartésiens. Suivant notre convention de noter les 1-morphismes de diagramme de schémas, la composée $p_{\mathcal{I}} \circ \pi_f$ sera notée $(\pi_f, p_{\mathcal{I}}) : (\mathscr{F}\times_\eta X_\eta,\mathcal{I}) \longrightarrow X_\eta$.

Définition 3.2.3. — *Le 1-morphisme* $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f : \mathsf{H}_1(X_\eta) \longrightarrow \mathsf{H}_2(X_s)$ *est la composée suivante :*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "(\pi_f,p_{\mathcal{I}})^*"] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F}\times_\eta X,\mathcal{I}) \arrow[r, "(\pi_f)_*"] & \mathbb{H}_1(X_\eta,\mathcal{I}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathcal{I}})}"] & \mathbb{H}_2(X_s,\mathcal{I}) \arrow[r, "(p_{\mathcal{I}})_\#"] & \mathsf{H}_2(X_s)
\end{tikzcd}$$

Remarque 3.2.4. — Il est clair que si l'on prend à la place d'un B-schéma X un diagramme de B-schémas $\mathscr{X}$, la définition précédente grade son sens. Le lecteur vérifiera même que $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}$ s'étend de cette manière en un système de spécialisation entre dérivateurs algébriques homotopiques stables. On a quand même préféré se restreindre à H_1 et H_2 pour éviter les complications au niveau des notations.

Remarque 3.2.5. — La définition de $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f$ peut paraître arbitraire. C'est peut-être bien le cas, puisqu'à la place de $p_{\mathcal{J}\#}$ on aurait pu prendre $p_{\mathcal{J}*}$ ou même tout simplement le 1-morphisme : $\mathsf{sp}_f(\pi_f, p_{\mathcal{J}})_*(\pi_f, p_{\mathcal{J}})^*$. Notons quand même que la définition choisie a la propriété de commuter aux petites sommes (du moins pour $\mathbb{SH}$) ce qui n'est pas le cas (sauf pour $\mathcal{J}$ particulier) pour les deux autres définitions. De plus, la définition choisie est celle qui donne la bonne formule dans le cas des foncteurs cycles proches.

Remarque 3.2.6. — Le lecteur attentif a sûrement remarqué qu'on s'est donné plus de structures que nécessaire. En effet, pour définir les foncteurs $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f$ on utilise uniquement la restriction de sp au 2-foncteur

$$\mathbb{H}_1 : \mathsf{Sch}/\eta \times \mathsf{Dia} \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

i.e., le système de spécialisation induit sur le 2-foncteur homotopique stable $\mathbb{H}_1(-, \mathcal{J})$ à valeurs dans $\mathbb{H}_2(-, \mathcal{J})$. En effet, le lecteur vérifiera facilement que pour ce qui sera fait dans cette section, on aurait bien pu partir d'un système de spécialisation sp entre 2-foncteurs homotopiques stable en dérivateurs[(2)]. Notons que le cas qui nous motive est celui du système de spécialisation canonique χ qui lui est définit sur $\mathbb{H}_1$ tout entier.

Le reste de la sous-section sera consacré à étendre la famille des foncteurs $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_?$ en une structure de spécialisation. Il s'agit donc de définir les faces carrées $\alpha_?$ et de vérifier les axiomes de la définition 3.1.1. Supposons donné un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
Y_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g_\eta"'] & Y \arrow[d, "g"] & Y_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "g_\sigma"] \\
X_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_\eta"'] & X \arrow[d, "f"] & X_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "f_\sigma"] \\
\eta \arrow[r, "j"] & B & \sigma \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

[(2)]La notion de 2-foncteur homotopique stable en dérivateurs est la notion évidente qui se trouve à mis-chemin entre les 2-foncteurs homotopiques stables et les dérivateurs algébriques homotopiques et stables. Ainsi un tel 2-foncteur prendra ses valeurs dans une certaine 2-catégorie de dérivateurs triangulés ou d'une façon équivalente sera défini sur des couples $(X, \mathcal{J})$.

Pour définir le 2-morphisme $\alpha_g : g_\sigma^* \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f \longrightarrow \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_{f\circ g} g_\eta^*$, on forme d'abord le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
Y_\eta \arrow[d, "g_\eta"'] & (\mathscr{F} \times_\eta Y_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[l, "(\pi_{f\circ g}, p_{\mathfrak{I}})"'] \arrow[r, "\pi_{f\circ g}"] \arrow[d, "g_\eta"] & (Y_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g_\eta"] & (Y, \mathfrak{I}) \arrow[d, "g"] & (Y_\sigma, \mathfrak{I}) \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "p_{\mathfrak{I}}"] \arrow[d, "g_\sigma"] & Y_\sigma \arrow[d, "g_\sigma"] \\
X_\eta & (\mathscr{F} \times_\eta X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[l, "(\pi_f, p_{\mathfrak{I}})"'] \arrow[r, "\pi_f"] & (X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "j"] & (X, \mathfrak{I}) & (X_\sigma, \mathfrak{I}) \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "p_{\mathfrak{I}}"] & X_\sigma
\end{tikzcd}$$

On prend alors pour α_g la composée du diagramme planaire :

(15)

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "(\pi_f, p_{\mathfrak{I}})^*"] \arrow[d, "g_\eta^*"'] \arrow[dr, phantom, "Ex^{*,*}_{\#} \swarrow \sim"] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F} \times_\eta X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "(\pi_f)_*"] \arrow[d, "g_\eta^*"'] \arrow[dr, phantom, "Ex^*_* \swarrow"] & \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f, p_{\mathfrak{I}})}"] \arrow[d, "g_\eta^*"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha_g \swarrow"] & \mathbb{H}_2(X_\sigma, \mathfrak{I}) \arrow[r, "(p_{\mathfrak{I}})_\#"] \arrow[d, "g_\sigma^*"'] \arrow[dr, phantom, "(Ex^*_\#)^{-1} \swarrow \sim"] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, "g_\sigma^*"'] \\
\mathsf{H}_1(Y_\eta) \arrow[r, "(\pi_{f\circ g}, p_{\mathfrak{I}})^*"'] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F} \times_\eta Y_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "(\pi_{f\circ g})_*"'] & \mathbb{H}_1(Y_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f\circ g, p_{\mathfrak{I}})}"'] & \mathbb{H}_2(Y_\sigma, \mathfrak{I}) \arrow[r, "(p_{\mathfrak{I}})_\#"'] & \mathsf{H}_2(Y_\sigma)
\end{tikzcd}$$

Notons que le 2-morphisme d'échange $Ex^*_\#$ est inversible par le corollaire 2.4.24 appliqué au 1-morphisme $p_{\mathfrak{I}}$ lisse argument par argument et au morphisme de $\mathfrak{I}$-diagrammes de schémas g_s. Les deux premières conditions de la définition 3.1.1 sont vérifiées.

Lemme 3.2.7

1- *La famille des 2-morphismes $\alpha_?$ est compatible à la composition verticale au sens de la définition 3.1.1.*

2- *Lorsque le morphisme g est lisse, le 2-morphisme α_g est inversible.*

Démonstration. — Pour montrer la compatibilité à la composition des carrés, on considère un troisième morphisme de S-schémas $h : Z \longrightarrow Y$. On forme alors le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
Z_\eta \arrow[d, "h_\eta"'] & (\mathscr{F} \times_\eta Z_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[l, "(\pi_{fgh}, p_{\mathfrak{I}})"'] \arrow[r, "\pi_{fgh}"] \arrow[d, "h_\eta"] & (Z_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "h_\eta"] & (Z, \mathfrak{I}) \arrow[d, "h"] & (Z_\sigma, \mathfrak{I}) \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "p_{\mathfrak{I}}"] \arrow[d, "h_\sigma"] & Z_\sigma \arrow[d, "h_\sigma"] \\
Y_\eta \arrow[d, "g_\eta"'] & (\mathscr{F} \times_\eta Y_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[l, "(\pi_{f\circ g}, p_{\mathfrak{I}})"'] \arrow[r, "\pi_{f\circ g}"] \arrow[d, "g_\eta"] & (Y_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g_\eta"] & (Y, \mathfrak{I}) \arrow[d, "g"] & (Y_\sigma, \mathfrak{I}) \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "p_{\mathfrak{I}}"] \arrow[d, "g_\sigma"] & Y_\sigma \arrow[d, "g_\sigma"] \\
X_\eta & (\mathscr{F} \times_\eta X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[l, "(\pi_f, p_{\mathfrak{I}})"'] \arrow[r, "\pi_f"] & (X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "j"] & (X, \mathfrak{I}) & (X_\sigma, \mathfrak{I}) \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "p_{\mathfrak{I}}"] & X_\sigma
\end{tikzcd}$$

Il s'agit de montrer que la composée du diagramme planaire :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "(\pi_f,p_\mathcal{J})^*"] \arrow[d, "(gh)^*_\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\sim\swarrow"] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F}\times_\eta X_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "(\pi_f)_*"] \arrow[d, "(gh)^*_\eta"] \arrow[dr, phantom, "Ex^*_*\swarrow"] & \mathbb{H}_1(X_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f,p_\mathcal{J})}"] \arrow[d, "(gh)^*_\eta"] \arrow[dr, phantom, "\alpha_{gh}\swarrow"] & \mathbb{H}_2(X_\sigma,\mathcal{J}) \arrow[r, "(p_\mathcal{J})_\#"] \arrow[d, "(gh)^*_\sigma"] \arrow[dr, phantom, "\sim\swarrow"] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, "(gh)^*_\sigma"] \\
\mathsf{H}_1(Z_\eta) \arrow[r, "(\pi_{fgh},p_\mathcal{J})^*"'] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F}\times_\eta Z_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "(\pi_{fgh})_*"'] & \mathbb{H}_1(Z_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(fgh,p_\mathcal{J})}"'] & \mathbb{H}_2(Z_\sigma,\mathcal{J}) \arrow[r, "(p_\mathcal{J})_\#"'] & \mathsf{H}_2(Z_\sigma)
\end{tikzcd}$$

coïncide avec la composée de :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "(\pi_f,p_\mathcal{J})^*"] \arrow[d, "g^*_\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\sim\swarrow"] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F}\times_\eta X_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "(\pi_f)_*"] \arrow[d, "g^*_\eta"] \arrow[dr, phantom, "Ex^*_*\swarrow"] & \mathbb{H}_1(X_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f,p_\mathcal{J})}"] \arrow[d, "g^*_\eta"] \arrow[dr, phantom, "\alpha_g\swarrow"] & \mathbb{H}_2(X_\sigma,\mathcal{J}) \arrow[r, "(p_\mathcal{J})_\#"] \arrow[d, "g^*_\sigma"] \arrow[dr, phantom, "\sim\swarrow"] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, "g^*_\sigma"] \\
\mathsf{H}_1(Y_\eta) \arrow[r, "(\pi_{fg},p_\mathcal{J})^*"] \arrow[d, "h^*_\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\sim\swarrow"] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F}\times_\eta Y_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "(\pi_{fg})_*"] \arrow[d, "h^*_\eta"] \arrow[dr, phantom, "Ex^*_*\swarrow"] & \mathbb{H}_1(Y_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(fg,p_\mathcal{J})}"] \arrow[d, "h^*_\eta"] \arrow[dr, phantom, "\alpha_h\swarrow"] & \mathbb{H}_2(Y_\sigma,\mathcal{J}) \arrow[r, "(p_\mathcal{J})_\#"] \arrow[d, "h^*_\sigma"] \arrow[dr, phantom, "\sim\swarrow"] & \mathsf{H}_2(Y_\sigma) \arrow[d, "h^*_\sigma"] \\
\mathsf{H}_1(Z_\eta) \arrow[r, "(\pi_{fgh},p_\mathcal{J})^*"'] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F}\times_\eta Z_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "(\pi_{fgh})_*"'] & \mathbb{H}_1(Z_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(fgh,p_\mathcal{J})}"'] & \mathbb{H}_2(Z_\sigma,\mathcal{J}) \arrow[r, "(p_\mathcal{J})_\#"'] & \mathsf{H}_2(Z_\sigma)
\end{tikzcd}$$

modulo les 2-isomorphismes de connexions que l'on pense. Ceci est clair étant donné que chacune des faces carrées qui composent le 2-morphisme $\alpha_?$ est compatible à la composition verticale. Le premier point du lemme est donc vrai.

Pour établir la seconde assertion, il suffit de montrer que la face du type Ex^*_* est inversible lorsque g est lisse. Ceci découle immédiatement du théorème de changement de base par un morphisme lisse. □

Il nous reste à vérifier la troisième propriété de la définition 3.1.1. Le 2-morphisme $\beta_g : \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f g_{\eta*} \longrightarrow g_{s*}\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_{f\circ g}$ obtenu à partir de α_g par adjonction est la composée :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(Y_\eta) \arrow[r, "(\pi_{f\circ g},p_\mathcal{J})^*"] \arrow[d, "g_{\eta*}"'] \arrow[dr, phantom, "Ex^*_*\nearrow"] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F}\times_\eta Y_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "(\pi_{f\circ g})_*"] \arrow[d, "g_{\eta*}"] \arrow[dr, phantom, "Ex^{*,*}_{\#}\nearrow\sim"] & \mathbb{H}_1(Y_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f\circ g,p_\mathcal{J})}"] \arrow[d, "g_{\eta*}"] \arrow[dr, phantom, "\beta_g\nearrow"] & \mathbb{H}_2(Y_\sigma,\mathcal{J}) \arrow[r, "(p_\mathcal{J})_\#"] \arrow[d, "g_{\sigma*}"] \arrow[dr, phantom, "Ex_{\#,*}\nearrow"] & \mathsf{H}_2(Y_\sigma) \arrow[d, "g_{\sigma*}"] \\
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "(\pi_f,p_\mathcal{J})^*"'] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F}\times_\eta X_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "(\pi_f)_*"'] & \mathbb{H}_1(X_\eta,\mathcal{J}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f,p_\mathcal{J})}"'] & \mathbb{H}_2(X_\sigma,\mathcal{J}) \arrow[r, "(p_\mathcal{J})_\#"'] & \mathsf{H}_2(X_\sigma)
\end{tikzcd}$$

Le morphisme d'échange $Ex_{\#,*}$ ci-dessus est obtenu *via* les adjonctions $(g^*_\sigma, g_{\sigma*})$ de l'inverse de l'isoéchange $Ex^*_\#$. C'est donc aussi l'échange obtenu à partir de l'inverse de l'isoéchange Ex^*_* *via* les adjonctions $(p_{\mathcal{J}\#}, p^*_\mathcal{J})$. On a :

Lemme 3.2.8. — *Lorsque le S-morphisme g est projectif, le 2-morphisme β_g est inversible.*

Démonstration. — En effet, la face de type Ex_*^* est inversible par le théorème de changement de base pour un morphisme projectif argument par argument. La face $Ex_{\#,*}$ est inversible puisqu'elle s'identifie à $Ex_{\#,!}^{-1}$. □

Ainsi, on a démontré le résultat suivant :

Proposition 3.2.9. — *La famille des $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}$ ainsi que celle des faces $\alpha_?$ données par la composée de (15), forment un système de spécialisation au-dessus de (B, j, i) de H_1 vers H_2.*

Notons au passage le lemme suivant :

Lemme 3.2.10. — *On suppose que les catégories $\mathsf{H}_1(-)$ et $\mathsf{H}_2(-)$ admettent les petites sommes et que H_1 est parfait pour les petites sommes. On suppose également que le foncteur $\mathsf{sp}_?$ commute aux petites sommes pour tout B-morphisme quasi-projectif f. Alors, le foncteur $(\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp})_f$ commute également aux petites sommes.*

Démonstration. — Rappelons que $(\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp})_f = (p_\mathcal{I})_\# \mathsf{sp}_{(f,p_\mathcal{I})} (\pi_f)_* (\pi_f, p_\mathcal{I})^*$. Les foncteurs $(p_\mathcal{I})_\#$ et $(\pi_f, p_\mathcal{I})^*$ sont des adjoints à gauche. Ils commutent donc aux petites sommes. Pour prouver que les foncteurs $\mathsf{sp}_{(f,p_\mathcal{I})}$ et $(\pi_f)_*$ commutent aux petites sommes, on peut le faire après application de i^* pour $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$. Ceci nous ramène immédiatement à montrer que sp_f et $\pi_f(i)_*$ commutent aux petites sommes. Ceci découle de l'énoncé. □

3.2.2. Fonctorialité par rapport aux diagrammes des schémas. — Dans cette section, on étudie la fonctorialité du système de spécialisation $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}$ par rapport au diagramme de η-schémas $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$. L'utilisation d'une image directe cohomologique $(\pi_f)_*$ et d'une image directe homologique $(p_\mathcal{I})_\#$ dans la définition de $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_?$, nous force à distinguer deux cas :

1. celui d'un morphisme de $\mathcal{I}$-diagrammes de η-schémas $(\mathscr{G}, \mathcal{I}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathcal{I})$,
2. celui d'un morphisme de diagrammes de η-schémas $(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathcal{I})$ induit par un foncteur $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ de Dia.

En effet, l'association $(\mathscr{F}, \mathcal{I}) \rightsquigarrow \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}$ sera contravariante par rapport au morphismes du premier type et covariante par rapport à ceux du second type.

3.2.2.1. Contravariance par rapport aux morphismes de $\mathcal{I}$-diagrammes. — On fixe la catégorie d'indices $\mathcal{I}$ et on garde les notations de la section précédente. On se donne un morphisme de $\mathcal{I}$-diagrammes de η-schémas :

$$u : (\mathscr{G}, \mathcal{I}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathcal{I})$$

On notera $(\pi^\mathscr{F}, p_\mathcal{I})$ et $(\pi^\mathscr{G}, p_\mathcal{I})$ les projections structurales sur η de telle sorte que $\pi^\mathscr{G} = \pi^\mathscr{F} \circ u$. On fait la définition suivante.

Définition 3.2.11. — *Soit $f : X \longrightarrow B$ un B-schémas quasi-projectif. On définit une transformation naturelle $\gamma_f^u : \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f \longrightarrow \mathscr{G} \bullet \mathsf{sp}$ par la composée du diagramme planaire :*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "(\pi_f^{\mathscr{G}}, p_{\mathfrak{I}})^*"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "Ex_*^*"] & \mathbb{H}_1(\mathscr{G} \times_\eta X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "(\pi_f^{\mathscr{G}})_*"] \arrow[d, "u_*"] \arrow[dr, phantom, "Ex_{*,*}^*"] & \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathfrak{I}})}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathbb{H}_2(X_\sigma, \mathfrak{I}) \arrow[r, "(p_{\mathfrak{I}})_\#"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, equal] \\
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "(\pi_f^{\mathscr{F}}, p_{\mathfrak{I}})^*"'] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F} \times_\eta X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "(\pi_f^{\mathscr{F}})_*"'] & \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathfrak{I}})}"'] & \mathbb{H}_2(X_\sigma, \mathfrak{I}) \arrow[r, "(p_{\mathfrak{I}})_\#"'] & \mathsf{H}_2(X_\sigma)
\end{tikzcd}$$

La première face Ex_*^* étant essentiellement la counité de l'adjonction (u^*, u_*) puisqu'elle est égale à la composée :

$$(\pi_f^{\mathscr{F}}, p_{\mathfrak{I}})^* \longrightarrow u_* u^* (\pi_f^{\mathscr{F}}, p_{\mathfrak{I}})^* \simeq u_* (\pi_f^{\mathscr{G}}, p_{\mathfrak{I}})^*$$

La proposition suivante est facile et sera laissée en exercice :

Proposition 3.2.12. — *La famille des $\gamma_?^u$ définit un morphisme de systèmes de spécialisation :*

$$\gamma^u : \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp} \longrightarrow \mathscr{G} \bullet \mathsf{sp}$$

De plus, les associations :

- $\mathscr{F} \rightsquigarrow \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}$
- $(u : \mathscr{G} \to \mathscr{F}) \rightsquigarrow (\gamma^u : \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp} \longmapsto \mathscr{G} \bullet \mathsf{sp})$

définissent un foncteur contravariant de la catégorie des $\mathfrak{I}$-diagrammes de η-schémas quasi-projectifs dans celle des systèmes de spécialisation de H_1 vers H_2.

3.2.2.2. Covariance par rapport au changement des catégories d'indices. — On se donne un $\mathfrak{I}$-diagramme de η-schémas quasi-projectifs $\mathscr{F}$ ainsi qu'un foncteur $\iota : \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{I}$ de Dia. On a alors un 1-morphisme de diagrammes de η-schémas :

$$\iota : (\mathscr{F} \circ \iota, \mathfrak{J}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathfrak{I})$$

On fait la définition suivante :

Définition 3.2.13. — *Soit $f : X \longrightarrow B$ un B-schéma quasi-projectif. On définit un 2-morphisme $\gamma_{\iota,f} : \mathscr{F}\iota \bullet \mathsf{sp}_f \longrightarrow \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f$ par la composée du diagramme planaire :*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "(\pi_f^{\mathscr{F}}, p_{\mathfrak{I}})^*"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "Ex^{*,*}"] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F} \times_\eta X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "(\pi_f^{\mathscr{F}})_*"] \arrow[d, "\iota^*"] \arrow[dr, phantom, "Ex_*^*"] & \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathfrak{I}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathfrak{I}})}"] \arrow[d, "\iota^*"] \arrow[dr, phantom, "\alpha_\iota"] & \mathbb{H}_2(X_\sigma, \mathfrak{I}) \arrow[r, "(p_{\mathfrak{I}})_\#"] \arrow[d, "\iota^*"] \arrow[dr, phantom, "Ex_\#^*"] & \mathsf{H}_2(X_\sigma) \arrow[d, equal] \\
\mathsf{H}_1(X_\eta) \arrow[r, "(\pi_f^{\mathscr{F}\iota}, p_{\mathfrak{J}})^*"'] & \mathbb{H}_1(\mathscr{F}\iota \times_\eta X_\eta, \mathfrak{J}) \arrow[r, "(\pi_f^{\mathscr{F}\iota})_*"'] & \mathbb{H}_1(X_\eta, \mathfrak{J}) \arrow[r, "\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathfrak{J}})}"'] & \mathbb{H}_2(X_\sigma, \mathfrak{J}) \arrow[r, "(p_{\mathfrak{J}})_\#"'] & \mathsf{H}_2(X_\sigma)
\end{tikzcd}$$

Notons que α_ι est bien inversible puisque ι est lisse argument par argument et que la dernière face carrée est simplement la composée :

$$p_{\mathcal{J}\#}\iota^* \longrightarrow p_{\mathcal{J}\#}\iota_\#\iota^* \longrightarrow p_{\mathcal{J}\#}$$

La proposition suivante est facile et laissée aux lecteurs :

Proposition 3.2.14. — *La famille des $\gamma_{\iota,?}$ définit un morphisme de systèmes de spécialisation :*

$$\gamma_\iota : \mathscr{F}\iota \bullet \mathsf{sp} \longrightarrow \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}$$

De plus, les associations :
- $(\iota : \mathcal{J} \to \mathcal{I}) \rightsquigarrow \mathscr{F}_\iota \bullet \mathsf{sp}$
- $(a : \mathcal{K} \to \mathcal{J}) \rightsquigarrow (\gamma_a : (\mathscr{F}\iota a) \bullet \mathsf{sp} \longmapsto \mathscr{F}\iota \bullet \mathsf{sp})$

définissent un foncteur covariant de $\mathsf{Dia}/\mathcal{I}$ dans la catégorie des systèmes de spécialisation de H_1 vers H_2.

3.2.3. Structures pseudo-monoïdales. — Dans ce paragraphe, on supposera que $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$ sont des dérivateurs algébriques monoïdaux homotopiques et stables au sens de la définition 2.4.48. On dispose donc d'une structure de catégorie monoïdale sur chacune des catégories $\mathbb{H}_i(-)$ telles que les foncteurs images inverses soient monoïdales et que certaines images directes homologiques vérifient la formule de projection.

On supposera dans la suite que le système de spécialisation sp est pseudo-monoïdal au sens analogue de celui de la définition 3.1.12. On donne alors une condition suffisante permettant de définir une structure pseudo-monoïdale sur le système de spécialisation $\mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}$. La condition est la suivante :

Hypothèse 3.2.15. — Le foncteur pseudo-comonoïdal $p_{\mathcal{I}\#}$ est comonoïdal. Plus précisément, pour tout σ-schéma quasi-projectif F et tout $(A, B) \in \mathsf{Ob}(\mathbb{H}(F, \mathcal{I}))^2$, le coaccouplement :

$$p_{\mathcal{I}\#}(A \otimes B) \xrightarrow{\sim} p_{\mathcal{I}\#}A \otimes p_{\mathcal{I}\#}B$$

est inversible.

Notons que la structure pseudo-comonoïdale sur le foncteur $p_{\mathcal{I}\#}$ provient par adjonction de celle sur le foncteur monoïdal (et donc aussi comonoïdal) $p_{\mathcal{I}}^*$.

Définition 3.2.16. — *Soit $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ un diagramme de η-schémas quasi-projectifs avec $\mathcal{I}$ vérifiant l'hypothèse 3.2.15. Soient $f : X \longrightarrow B$ un B-schéma quasi-projectif et $(A, B) \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(X_\eta))^2$.*

On définit un accouplement naturel en A et B :

$$m_f : \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f(A) \otimes_{X_\sigma} \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f(B) \longrightarrow \mathscr{F} \bullet \mathsf{sp}_f(A \otimes_{X_\eta} B)$$

en prenant la composée :

$$\begin{tikzcd}
{[(p_{\mathcal{J}})_{\#}\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathscr{F}})_*(\pi_f^{\mathscr{F}},p_{\mathcal{J}})^*A]\otimes[(p_{\mathcal{J}})_{\#}\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathscr{F}})_*(\pi_f^{\mathscr{F}},p_{\mathcal{J}})^*B]} \\
{(p_{\mathcal{J}})_{\#}([\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathscr{F}})_*(\pi_f^{\mathscr{F}},p_{\mathcal{J}})^*A]\otimes[\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathscr{F}})_*(\pi_f^{\mathscr{F}},p_{\mathcal{J}})^*B])} \arrow[u, "\sim"] \\
{(p_{\mathcal{J}})_{\#}\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}([(\pi_f^{\mathscr{F}})_*(\pi_f^{\mathscr{F}},p_{\mathcal{J}})^*A]\otimes[(\pi_f^{\mathscr{F}})_*(\pi_f^{\mathscr{F}},p_{\mathcal{J}})^*A])} \arrow[d] \\
{(p_{\mathcal{J}})_{\#}\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathscr{F}})_*[(\pi_f^{\mathscr{F}},p_{\mathcal{J}})^*A]\otimes[(\pi_f^{\mathscr{F}},p_{\mathcal{J}})^*A])} \arrow[d, "\sim"] \\
{(p_{\mathcal{J}})_{\#}\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}(\pi_f^{\mathscr{F}})_*(\pi_f^{\mathscr{F}},p_{\mathcal{J}})^*(A\otimes B)}
\end{tikzcd}$$

Muni de cet accouplement, $\mathscr{F}\bullet\mathsf{sp}_f$ *est le foncteur pseudo-monoïdal composé des foncteurs pseudo-monoïdaux :* $(\pi_f^{\mathscr{F}},p_{\mathcal{J}})^*$, $(\pi_f^{\mathscr{F}})_*$, $\mathsf{sp}_{(f,p_{\mathcal{J}})}$ *et* $p_{\mathcal{J}\#}$.

Proposition 3.2.17. — *Les foncteurs pseudo-monoïdaux* $\mathscr{F}\bullet\mathsf{sp}_?$ *définissent un système de spécialisation pseudo-monoïdal au sens de la définition 3.1.12.*

Démonstration. — En effet, toutes les faces du diagramme planaire (15) définissant les 2-morphismes

$$\alpha_g\ :\ g_\sigma^*\mathscr{F}\bullet\mathsf{sp}_f\longrightarrow\mathscr{F}\bullet\mathsf{sp}_{f\circ g}g_\eta^*$$

sont des faces dans la 2-catégorie $\mathfrak{p}\mathfrak{M}\mathfrak{ono}$. Il vient que les α_g sont bien des transformations naturelles de foncteurs pseudo-monoïdaux. C'est la seule propriété à vérifier. □

Proposition 3.2.18. — *On suppose que les catégories* $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{J}$ *vérifient l'hypothèse 3.2.15. Sous les hypothèses des définitions 3.2.11 et 3.2.13, les morphismes de systèmes de spécialisation :*

$$\mathscr{F}\bullet\mathsf{sp}\longrightarrow\mathscr{G}\bullet\mathsf{sp}\qquad\textit{et}\qquad\mathscr{F}\iota\bullet\mathsf{sp}\longrightarrow\mathscr{F}\bullet\mathsf{sp}$$

sont des morphismes de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux.

Démonstration. — Ceci découle du fait que les faces des diagrammes planaires des définitions 3.2.11 et 3.2.13 sont des faces de la 2-catégorie $\mathfrak{p}\mathfrak{M}\mathfrak{ono}$. □

3.2.4. Autour de l'hypothèse 3.2.15. — Dans cette section, on donne une condition simple sur la catégorie d'indice $\mathcal{I}$ impliquant l'hypothèse 3.2.15. Notons que l'hypothèse en question est indépendante de la situation considérée dans le paragraphe précédent. Par soucis de généralité on se place donc dans un nouveau dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable $\mathbb{H}$: $\mathsf{DiaSch}/S\longrightarrow\mathfrak{TR}$. On profite de l'occasion pour introduire l'accouplement externe.

Définition 3.2.19

1- *Supposons donné un diagramme dans* DiaSch/S *:*

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{G},\mathcal{J}) \arrow[r, "(f_2,\alpha_2)"] \arrow[d, "(f_1,\alpha_1)"'] & (\mathscr{F}_2,\mathcal{I}_2) \\ (\mathscr{F}_1,\mathcal{I}_1) & \end{tikzcd}$$

Pour $i \in \{1,2\}$ *et* $A_i \in \mathbb{H}(\mathscr{F}_i,\mathcal{I}_i)$ *on pose* $A_1 \boxtimes A_2 = (f_1,\alpha_1)^* A_1 \otimes_{\mathscr{G},\mathcal{J}} (f_2,\alpha_2)^* A_2$.

2- *Étant donné un carré commutatif de* DiaSch/S *:*

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{G},\mathcal{J}) \arrow[r, "(f_2,\alpha_2)"] \arrow[d, "(f_1,\alpha_1)"'] & (\mathscr{F}_2,\mathcal{I}_2) \arrow[d, "(g_2,\beta_2)"] \\ (\mathscr{F}_1,\mathcal{I}_1) \arrow[r, "(g_1,\beta_1)"'] & (\mathscr{E},\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

on note $(h,\gamma) = (g_1,\beta_1) \circ (f_1,\alpha_1) = (g_2,\beta_2) \circ (f_2,\alpha_2)$. *On définit un coaccouplement extérieur :*

$$(h,\gamma)_\#(A_1 \boxtimes A_2) \longrightarrow (g_1,\beta_1)_\#(A_1) \otimes_{\mathscr{E},\mathcal{H}} (g_2,\beta_2)_\#(A_2)$$

par la composée suivante :

$$\begin{tikzcd} (h,\gamma)_\#((f_1,\alpha_1)^* A_1 \otimes_{\mathscr{G},\mathcal{J}} (f_2,\alpha_2)^* A_2) \arrow[d] \\ {[(h,\gamma)_\#(f_1,\alpha_1)^* A_1]} \otimes {[(h,\gamma)_\#(f_2,\alpha_2)^* A_2]} \arrow[d] \\ {[(g_1,\beta_1)_\#(f_1,\alpha_1)_\#(f_1,\alpha_1)^* A_1]} \otimes {[(g_1,\beta_2)_\#(f_2,\alpha_2)_\#(f_2,\alpha_2)^* A_2]} \arrow[d] \\ (g_1,\beta_1)_\#(A_1) \otimes (g_2,\beta_2)_\#(A_2) \end{tikzcd}$$

La relation du coaccouplement habituel avec le coaccouplement extérieur est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.2.20. — *On suppose donné un* 1*-morphisme de diagrammes de* S*-schémas quasi-projectifs* $(f,\alpha) : (\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F},\mathcal{I})$. *On forme le carré cartésien :*

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{G} \times_{\mathscr{F}} \mathscr{G}, \mathcal{J} \times_{\mathcal{I}} \mathcal{J}) \arrow[r, "(pr_2,pr_2)"] \arrow[d, "(pr_1,pr_1)"'] & (\mathscr{G},\mathcal{J}) \arrow[d, "(f,\alpha)"] \\ (\mathscr{G},\mathcal{J}) \arrow[r, "(f,\alpha)"'] & (\mathscr{F},\mathcal{I}) \end{tikzcd}$$

et on appelle (Δ,Δ) *l'inclusion de la diagonale* $(\mathscr{G},\mathscr{J}) \longrightarrow (\mathscr{G}\times_{\mathscr{F}}\mathscr{G},\mathscr{J}\times_{\mathcal{I}}\mathscr{J})$ *et* $(p,p) = (f,\alpha)\circ(pr_i,pr_i)$ *pour* $i\in\{1,2\}$. *Pour* A *et* B *des objets de* $\mathbb{H}(\mathscr{G},\mathscr{J})$ *le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
(f,\alpha)_\#(\Delta,\Delta)^*(A\boxtimes B) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & (p,p)_\#(\Delta,\Delta)_\#(\Delta,\Delta)^*(A\boxtimes B) \arrow[r] & (p,p)_\#(A\boxtimes B) \arrow[d] \\
(f,\alpha)_\#(A\otimes B) \arrow[rr, equal] & & (f,\alpha)_\#(A\otimes B)
\end{tikzcd}$$

La condition qui assurera la validité de l'hypothèse 3.2.15 est basée sur les deux lemmes suivants. D'une part on a :

Lemme 3.2.21. — *Sous les hypothèses de la définition précédente, le coaccouplement :*

$$(h,\gamma)_\#(A_1\boxtimes A_2) \longrightarrow (g_1,\beta_1)_\#(A_1)\otimes_{\mathscr{E},\mathcal{H}}(g_2,\beta_2)_\#(A_2)$$

est inversible lorsque le 2*-morphisme de changement de base :*

$$Ex^*_\# : (f_1,\alpha_1)_\#(f_2,\alpha_2)^* \longrightarrow (g_1,\beta_1)^*(g_2,\beta_2)_\#$$

est inversible.

Démonstration. — En effet, on vérifie immédiatement que le coaccouplement qu'on a défini est donné par la composée suivante :

$$\begin{tikzcd}
(h,\gamma)_\#((f_1,\alpha_1)^*A_1\otimes_{\mathscr{G},\mathscr{J}}(f_2,\alpha_2)^*A_2) \arrow[d, "\sim"] \\
(g_1,\beta_1)_\#(f_1,\alpha_1)_\#((f_1,\alpha_1)^*A_1\otimes_{\mathscr{G},\mathscr{J}}(f_2,\alpha_2)^*A_2) \arrow[d, "\sim"] \\
(g_1,\beta_1)_\#(A_1\otimes(f_1,\alpha_1)_\#(f_2,\alpha_2)^*A_2) \arrow[d, "Ex^*_\#"] \\
(g_1,\beta_1)_\#(A_1\otimes(g_1,\beta_1)^*(g_2,\beta_2)_\#A_2 \arrow[d, "\sim"] \\
(g_1,\beta_1)_\#A_1\otimes(g_2,\beta_2)_\#A_2
\end{tikzcd}$$

D'où le lemme. □

D'autre part on a le résultat général sur les dérivateurs triangulés :

Lemme 3.2.22. — *Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur (triangulé) de domaine* Dia. *Étant données deux catégories $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de* Dia, *on forme le carré cartésien :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I} \times \mathcal{J} \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathcal{J} \arrow[d, "p_{\mathcal{J}}"] \\ \mathcal{I} \arrow[r, "p_{\mathcal{I}}"] & \mathbf{e} \end{tikzcd}$$

Le morphisme de changement de base $Ex^*_{\#}$: $pr_{1\#}pr_2^* \longrightarrow p_{\mathcal{I}}^* p_{\mathcal{J}\#}$ est inversible.

Démonstration. — On montrera que pour tout objet i de $\mathcal{I}$ le 2-morphisme :

$$i^* pr_{1\#} pr_2^* \longrightarrow i^* p_{\mathcal{I}}^* p_{\mathcal{J}\#}$$

est inversible. En appliquant l'axiome 4 de la définition 2.1.34 à la face carrée :

$$\begin{tikzcd} i\backslash\mathcal{I} \times \mathcal{J} \arrow[r, "j_{i\backslash\mathcal{I}\times\mathcal{J}}"] \arrow[d, "p_{i\backslash\mathcal{I}\times\mathcal{J}}"'] \arrow[dr, phantom, "\nearrow"] & \mathcal{I} \times \mathcal{J} \arrow[d, "pr_1"] \\ \mathbf{e} \arrow[r, "i"] & \mathcal{I} \end{tikzcd}$$

on obtient un isomorphisme d'échange $Ex^*_{\#}$: $(p_{i\backslash\mathcal{I}\times\mathcal{J}})_{\#}(j_{i\backslash\mathcal{I}\times\mathcal{J}})^* \longrightarrow i^* pr_{1\#}$. Ceci nous ramène à montrer que l'isomorphisme d'échange $Ex^*_{\#}$ associé au carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} i\backslash\mathcal{I} \times \mathcal{J} \arrow[r, "pr_2 \circ j_{i\backslash\mathcal{I}\times\mathcal{J}}"] \arrow[d, "p_{i\backslash\mathcal{I}\times\mathcal{J}}"'] & \mathcal{J} \arrow[d, "p_{\mathcal{J}}"] \\ \mathbf{e} \arrow[r, equal] & \mathbf{e} \end{tikzcd}$$

est inversible. En d'autres termes, il s'agit de montrer que le foncteur évident $i\backslash\mathcal{I} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ est filtrant au sens de la définition 2.1.50. Par la proposition 2.1.49, il suffit de montrer que pour tout $j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$ la transformation naturelle évidente $\mathsf{R}_{\#}(i\backslash(\mathcal{I} \times \mathcal{J})/j) \longrightarrow \mathrm{id}$ est inversible. Ceci est effectivement le cas puisque $i\backslash(\mathcal{I} \times \mathcal{J})/j = (i\backslash\mathcal{I}) \times (\mathcal{J}/j)$ est un produit d'une catégorie admettant un objet initial par une autre admettant un objet final (on pourra par exemple utiliser la proposition 2.1.51 en remarquant que pour $\mathcal{K}$ une petite catégorie, $p_{\mathcal{K}}$ est filtrant si et seulement si $\mathsf{R}_{\#}(\mathcal{K}) \simeq \mathrm{id}$). □

On en déduit le corollaire suivant :

Proposition 3.2.23. — *Soit X un S-schéma quasi-projectif. Étant données deux catégories $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de* Dia, *on forme le carré cartésien :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I} \times \mathcal{J} \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathcal{J} \arrow[d, "p_{\mathcal{J}}"] \\ \mathcal{I} \arrow[r, "p_{\mathcal{I}}"] & \mathbf{e} \end{tikzcd}$$

Pour tout A et B dans $\mathbb{H}(X, \mathcal{I})$ et $\mathbb{H}(X, \mathcal{J})$ respectivement, le coaccouplement extérieur :

$$(p_{\mathcal{I}\times\mathcal{J}})_{\#}(A \boxtimes B) \xrightarrow{\sim} (p_{\mathcal{I}})_{\#}A \otimes (p_{\mathcal{J}})_{\#}B$$

est inversible.

En utilisant le lemme 3.2.20 et la proposition 3.2.23, on déduit le critère simple suivant :

Proposition 3.2.24. — *Pour que $\mathcal{I}$ vérifie l'hypothèse 3.2.15, il suffit que le foncteur diagonal $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ soit filtrant.*

Exemple 3.2.25. — Voici quelques exemples de catégories vérifiant la condition de la proposition précédente :

$$\mathbf{\Delta}, \qquad \mathbb{N}^{\times} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{N}^{\times} \times \mathbf{\Delta}$$

avec $\mathbb{N}^{\times}$ l'ensemble des entiers non nuls ordonné par l'opposée de la relation de divisibilité. Ces catégories apparaîtrons dans la construction des foncteurs cycles proches.

3.3. Le calcul des systèmes de spécialisation pour les schémas standards

Les axiomes imposés dans la définition d'un système de spécialisation sp permettent dans certains cas de « calculer » le foncteur sp_f en fonction de $\mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B}$ et les quatre opérations. Pour plus de précision sur ce qu'on entend par le mot « calcul » le lecteur pourra consulter l'énoncé du théorème 3.3.10. Comme conséquence de ce « calcul » on obtiendra deux résultats intéressants à savoir les théorèmes 3.3.4 et 3.3.6. Ces résultats acquièrent leur véritable importance lorsqu'on se place au-dessus d'un trait (sous réserve de pouvoir résoudre les singularités).

3.3.1. Les B-schémas standards. Notations et énoncés des théorèmes

On se donne une base (B, j, i) comme dans 3.1.1 et deux 2-foncteurs homotopiques stables $\mathsf{H}_1 : \mathsf{Sch}/\eta \longrightarrow \mathfrak{TR}$ et $\mathsf{H}_2 : \mathsf{Sch}/\sigma \longrightarrow \mathfrak{TR}$. On supposera qu'il existe une section globale $\pi \in \Gamma(B, \mathscr{O}_B)$ qui soit nulle sur σ et inversible sur η. Ceci implique en particulier que le produit fibré $\eta \times_B \sigma$ est vide (puisque le zéro est inversible sur ce schéma). Une telle section sera fixée une fois pour toutes. On notera $B/(\pi)$ le

sous-schéma fermé de B défini par l'annulation de π. Le morphisme $i : \sigma \longrightarrow B$ se factorise par $B/(\pi)$:

$$\begin{tikzcd} \sigma \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "i"'] & B/(\pi) \arrow[d, hook] \\ & B \end{tikzcd} \tag{16}$$

et l'image de $j : \eta \longrightarrow B$ ne rencontre pas $B/(\pi)$. Voici les schémas standards dont il sera question dans la suite :

Définition 3.3.1. — *Soient k un entier naturel non nul et $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ un k-uplet dans $\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Le B-schéma π-standard à réduction semi-stable de type $\underline{a}$ est le B-schéma noté $St^B_{\underline{a}}$ et défini par :*

$$st^B_{\underline{a}} : \ St^B_{\underline{a}} = B[T_1 \ldots . T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} - \pi) \longrightarrow B$$

Lorsqu'il y a pas de confusion sur B, il nous arrivera de noter simplement $st_{\underline{a}}$ et $St_{\underline{a}}$ à la place de $st^B_{\underline{a}}$ et $St^B_{\underline{a}}$.

Pour énoncer les théorèmes, on aura également besoin des B-schémas suivants :

Définition 3.3.2

1- *Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ on pose $B_n = B[T]/(T^n - \pi)$ et on note b_n sa projection sur B. La classe de T dans $\mathcal{O}_{B_n}$ sera notée $\pi^{1/n}$. Il est clair que B_n est isomorphe à $St^B_{(n)}$.*

2- *Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $m \in \mathbb{Z}$ on pose $B_n^m = B[U, U^{-1}][T]/(T^n - U^m.\pi)$ et on note b_n^m sa projection sur B.*

Remarque 3.3.3. — Il est facile de voir que les morphismes $st^B_{\underline{a}}$ sont plats. En effet $st^B_{\underline{a}}$ peut être obtenu par changement de base de $\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_k, P]/(T_1^{a_1} \ldots T_n^{a_n} - P))$ $\longrightarrow \mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ (qui est clairement plat) par le morphisme $B \longrightarrow \mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ qui envoie P sur la section π. Par contre les B-schémas $St^B_{\underline{a}}$ ne sont en général ni lisses ni réguliers. La même remarque s'applique également aux b_n et b_n^m.

Pour un schéma X notons $\mathbb{N}^{n.i.}(X)$ l'ensemble des entiers naturels non nuls n tel que tout diviseur premier de n est *non inversible* sur X. En particulier si X est de caractéristique 0, l'ensemble $\mathbb{N}^{n.i.}(X)$ est réduit à $\{1\}$. L'un des buts de la section est de prouver les deux théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 :

Théorème 3.3.4. — *Soit $\mathsf{sp} \longrightarrow \mathsf{sp}'$ un morphisme de systèmes de spécialisation au-dessus de B de H_1 vers H_2. Soient $\underline{a}$ un k-uplet d'entiers non nuls et A un objet de $\mathsf{H}_1(\eta)$.*

1- *Supposons que le k-uplet $\underline{a}$ est constant de valeur n. Si les morphismes :*

$$\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{b_n}(b_n)^*_\eta A$$

sont inversibles, alors le morphisme $\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{a}}}(st^B_{\underline{a}})^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{st^B_{\underline{a}}}(st^B_{\underline{a}})^*_\eta A$ *est également inversible.*

2- Pour $\underline{a}$ *non forcément constant, notons* d *le p.g.c.d des entiers* a_i *et* r *le maximum des* a_i/d. *On suppose que les morphismes :*

$$\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{b_n}(b_n)^*_\eta A \qquad et \qquad \mathsf{sp}_{b^m_n}(b^m_n)^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{b^m_n}(b^m_n)^*_\eta A$$

sont inversibles pour $n = d.l$ *avec* $1 \leq l \leq r$ *et* $m = d_0.l_0$ *avec* d_0 *le plus grand diviseur de* d *appartenant à* $\mathbb{N}^{n.i.}(B)$ *et* $1 \leq l_0 \leq r$ *appartenant également à* $\mathbb{N}^{n.i}(B)$. *Alors, le morphisme* $\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{a}}}(st^B_{\underline{a}})^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{st^B_{\underline{a}}}(st^B_{\underline{a}})^*_\eta A$ *est également inversible.*

On se donne pour tout σ-schéma quasi-projectif T une sous-catégorie (pleine) $\mathsf{H}_2(T)' \subset \mathsf{H}_2(T)$ telle que l'hypothèse suivante est satisfaite :

Hypothèse 3.3.5. La sous-catégorie $\mathsf{H}_2(T)'$ est cosuspendue (voir la définition 2.1.1). Si $f : R \longrightarrow T$ est un morphisme de σ-schémas quasi-projectifs, alors :

f_* envoie $\mathsf{H}_2(R)'$ dans $\mathsf{H}_2(T)'$.

f^* envoie $\mathsf{H}_2(T)'$ dans $\mathsf{H}_2(R)'$ lorsque f est lisse.

Enfin, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ les sous-catégories $\mathsf{H}_2(T)'$ sont stables par l'opération $A \rightsquigarrow A(n)[n]$.

Un cas important où l'hypothèse 3.3.5 est vérifiée est lorsque $\mathsf{H}_2(-)'$ est un sous-2-foncteur homotopique stable de H_2. Notons que dans ce cas, les sous-catégories en question sont triangulées (et non seulement cosuspendues).

Théorème 3.3.6. *Soit* sp *un système de spécialisation au-dessus de* B *de* H_1 *vers* H_2. *Soient* $\underline{a}$ *un* k*-uplet et* A *un objet de* $\mathsf{H}_1(\eta)$.

1- On suppose que le k*-uplet* $\underline{a}$ *est constant de valeur* n. *Si les objets* $\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^*_\eta A$ *sont dans* $\mathsf{H}_2((B_n)_\sigma)'$, *alors l'objet* $\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{a}}}(st^B_{\underline{a}})^*_\eta A$ *est également dans* $\mathsf{H}_2((St_{\underline{a}})_\sigma)'$.

2- Supposons en plus de l'hypothèse 3.3.5 que les sous-catégories $\mathsf{H}_2(-)'$ *sont stables par facteurs directs. Pour* $\underline{a}$ *non forcément constant, notons* d *le p.g.c.d des entiers* a_i *et* r *le maximum des* a_i/d. *On suppose que les objets :* $\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^*_\eta A$ *et* $\mathsf{sp}_{b^m_n}(b^m_n)^*_\eta A$ *sont respectivement dans* $\mathsf{H}_2((B_n)_\sigma)'$ *et* $\mathsf{H}_2((B^m_n)_\sigma)'$, *pour* $n = d.l$ *avec* $1 \leq l \leq r$ *et* $m = d_0.l_0$ *avec* d_0 *le plus grand diviseur de* d *appartenant à* $\mathbb{N}^{n.i.}(B)$ *et* $1 \leq l_0 \leq r$ *appartenant également à* $\mathbb{N}^{n.i}(B)$. *Alors, l'objet* $\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{a}}}(st^B_{\underline{a}})^*_\eta A$ *est également dans* $\mathsf{H}_2((St_{\underline{a}})_\sigma)'$.

La version duale du théorème précédent est plus intéressante. On se donne pour tout σ-schéma quasi-projectif T une sous-catégorie (pleine) $\mathsf{H}_2(T)'' \subset \mathsf{H}_2(T)$ satisfaisant l'hypothèse duale de 3.3.5. à savoir :

Hypothèse 3.3.7. La sous-catégorie $\mathsf{H}_2(T)''$ est suspendue (voir la définition 2.1.1). Si $f : R \longrightarrow T$ est un morphisme de σ-schémas quasi-projectifs, alors :
- $f_!$ envoie $\mathsf{H}_2(R)''$ dans $\mathsf{H}_2(T)''$,
- $f^!$ envoie $\mathsf{H}_2(T)''$ dans $\mathsf{H}_2(R)''$ lorsque f est lisse.

Enfin, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ les sous-catégories $\mathsf{H}_2(T)''$ sont stables par l'opération $A \rightsquigarrow A(n)[n]$.

Remarque 3.3.8

1- Étant donnée une classe d'objets $\Lambda \subset \mathsf{H}_2(\sigma)$ quasi-stable par twist de Tate (voir la définition 2.2.17), les catégories $(\mathsf{H}_2)^{\mathsf{ct}}_{\Lambda}(-)$ vérifient les conditions de l'hypothèse 3.3.7.

2- Un autre exemple important où l'hypothèse 3.3.7 est satisfaite est le suivant. Soit $\mathscr{G}$ un ensemble d'objets de $\mathsf{H}_2(\sigma)$. On suppose que l'hypothèse 2.2.58 est vérifiée. Alors, les sous-catégories suspendues ${}^p(\mathsf{H}_2)_{\geq 0}(-)$ des objets ${}^pt$-positifs vérifient l'hypothèse 3.3.7 par la proposition 2.2.62.

Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $\mathsf{H}_i^{\mathrm{op}}$ le 2-foncteur homotopique stable opposé à H_i. On sait par le corollaire 3.1.11 que les foncteurs $\mathsf{sp}_f^{\mathrm{op}}$ induisent un système de spécialisation de $\mathsf{H}_1^{\mathrm{op}}$ vers $\mathsf{H}_2^{\mathrm{op}}$. On vérifie immédiatement que les sous-catégories $(\mathsf{H}_2(T)'')^{\mathrm{op}}$ vérifient l'hypothèse 3.3.5 relativement à $\mathsf{H}_2^{\mathrm{op}}$. Lorsqu'on applique le théorème 3.3.6 à cette situation, on obtient l'énoncé suivant :

Théorème 3.3.9. *Soit* sp *un système de spécialisation au-dessus de* B *de* H_1 *vers* H_2. *Soient* $\underline{a}$ *un* k*-uplet et* A *un objet de* $\mathsf{H}_1(\eta)$.

1- *On suppose que le* k*-uplet* $\underline{a}$ *est constant de valeur* n. *Si les objets* $\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^!_\eta A$ *sont dans* $\mathsf{H}_2((B_n)_\sigma)''$, *alors l'objet* $\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{a}}}(st^B_{\underline{a}})^!_\eta A$ *est également dans* $\mathsf{H}_2((St_{\underline{a}})_\sigma)''$.

2- *Supposons en plus de l'hypothèse 3.3.7 que les sous-catégories* $\mathsf{H}_2(-)'$ *sont stables par facteurs directs. Pour* $\underline{a}$ *non forcément constant, notons* d *le p.g.c.d des entiers* a_i *et* r *le maximum des* a_i/d. *On suppose que les objets :* $\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^!_\eta A$ *et* $\mathsf{sp}_{b_n^m}(b_n^m)^!_\eta A$ *sont respectivement dans* $\mathsf{H}_2((B_n)_\sigma)''$ *et* $\mathsf{H}_2((B_n^m)_\sigma)''$, *pour* $n = d.l$ *avec* $1 \leq l \leq r$ *et* $m = d_0.l_0$ *avec* d_0 *le plus grand diviseur de* d *appartenant à* $\mathbb{N}^{n.i.}(B)$ *et* $1 \leq l_0 \leq r$ *appartenant également à* $\mathbb{N}^{n.i}(B)$. *Alors, l'objet* $\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{a}}}(st^B_{\underline{a}})^!_\eta A$ *est également dans* $\mathsf{H}_2((St_{\underline{a}})_\sigma)''$.

Les démonstrations des deux théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 reposent sur le théorème 3.3.10. Pour l'énoncer on a besoin d'introduire des notations supplémentaires. Ces notations servirons également dans tout le reste de la section.

1- Pour tout B-schéma X, notons $X/(\pi)$ (resp. X_σ, X_η) le schéma $X \times_B B/(\pi)$ (resp. $X \times_B \sigma$, $X \times_B \eta$). Le σ-schéma X_σ est canoniquement un produit fibré : $X/(\pi) \times_{B(\pi)} \sigma$ *via* le morphisme $\sigma \longrightarrow B/(\pi)$. Ainsi $(St^B_{\underline{a}})/(\pi)$ est le sous-schéma de $St^B_{\underline{a}}$ défini par l'idéal (π) et $(St^B_{\underline{a}})_\sigma$ le produit fibré $St^B_{\underline{a}} \times_B \sigma$.

2- Pour $1 \leq i \leq k$, on notera $D^\pi_{\underline{a},i}$ le sous-schéma de $St^B_{\underline{a}}$ d'équation $(T_i = 0)$ qu'on appellera la i-ème branche de $St^B_{\underline{a}}$. Le B-schéma $D^\pi_{\underline{a},i}$ est naturellement un B/π-schéma inclus dans $(St^B_{\underline{a}})/(\pi)$. En effet, π est nul sur $D^\pi_{\underline{a},i}$ puisque $T_i = 0$ et $\pi = \prod_{j=1}^k T_j^{a_j}$ (on utilise le fait que l'entier a_i est non nul (revoir la définition 3.3.1)). Le petit calcul :

$$\begin{aligned} B[T_1, \ldots, T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} - \pi . T_i) &= B[T_1, \ldots, T_k]/(\pi, T_i) \\ &= B/(\pi)[T_1, \ldots, T_{i-1}, T_{i+1}, \ldots, T_k] \end{aligned}$$

montre que $D^\pi_{\underline{a},i}$ est isomorphe à l'espace affine de dimension $k-1$ sur $B/(\pi)$. On notera également $D_{\underline{a},i}$ le produit fibré $D^\pi_{\underline{a},i} \times_{B/(\pi)} \sigma$ (le morphisme $\sigma \longrightarrow B/(\pi)$ utilisé est le i_0 du triangle commutatif (16)). Le σ-schéma $D_{\underline{a},i}$ est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^{k-1}_\sigma$. On appellera $u^\pi_{\underline{a},i}$ et $u_{\underline{a},i}$ les inclusions de $D^\pi_{\underline{a},i}$ et $D_{\underline{a}}$ dans $(St^B_{\underline{a}})/(\pi)$ et $(St^B_{\underline{a}})_\sigma$ respectivement. On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
D_{\underline{a},i} \arrow[r, "u_{\underline{a},i}"] \arrow[d, "i_0"'] & (St^B_{\underline{a}})_\sigma \arrow[r, "(st^B_{\underline{a}})_\sigma"] \arrow[d, "i_0"] & \sigma \arrow[d, "i_0"] \\
D^\pi_{\underline{a},i} \arrow[r, "u^\pi_{\underline{a},i}"] & (St^B_{\underline{a}})/(\pi) \arrow[r] \arrow[d] & B/(\pi) \arrow[d] \\
 & St^B_{\underline{a}} \arrow[r, "st^B_{\underline{a}}"] & B
\end{tikzcd}$$

3- Plus généralement, pour $I \subset \{1, \ldots, k\}$ non vide, on posera $D^\pi_{\underline{a},I} = \bigcup_{i \in I} D^\pi_{\underline{a},i}$ et $D_{\underline{a},I} = \bigcup_{i \in I} D_{\underline{a},i}$. Évidement, $D^\pi_{\underline{a},I}$ est encore un $B/(\pi)$-schéma et $D_{\underline{a},I} = D^\pi_{\underline{a},I} \times_{B/(\pi)} \sigma$.

En notant $u^\pi_{\underline{a},I}$ et $u_{\underline{a},I}$ comme tout à l'heure, on a le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
D_{\underline{a},I} \arrow[r, "u_{\underline{a},I}"] \arrow[d, "i_0"'] & (St^B_{\underline{a}})_\sigma \arrow[r, "(st^B_{\underline{a}})_\sigma"] \arrow[d, "i_0"] & \sigma \arrow[d, "i_0"] \\
D^\pi_{\underline{a},I} \arrow[r, "u^\pi_{\underline{a},I}"] & (St^B_{\underline{a}})/(\pi) \arrow[r] \arrow[d] & B/(\pi) \arrow[d] \\
 & St^B_{\underline{a}} \arrow[r, "st^B_{\underline{a}}"] & B
\end{tikzcd}$$

On fera attention que $u^\pi_{\underline{a},\{1,\ldots,n\}}$ n'est pas en général un isomorphisme, mais seulement une immersion fermée d'idéal nilpotent.

4- On aura également besoin d'introduire pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ les ouverts $D^{\pi,0}_{\underline{a},i}$ et $D^0_{\underline{a},i}$ de $D^\pi_{\underline{a},i}$ et $D_{\underline{a},i}$ qu'on définit par $D^{?,0}_{\underline{a},i} = D^?_{\underline{a},i} \backslash D^?_{\underline{a},\{1,\ldots,k\}-\{i\}}$ pour $? \in \{\varnothing, \pi\}$. On a toujours la formule $D^0_{\underline{a},i} = D^{\pi,0}_{\underline{a},i} \times_{B/(\pi)} \sigma$.

Plus généralement si $I \subset \{1, \ldots, k\}$ et J son complémentaire, on notera $D^{\pi,0}_{\underline{a},I}$ l'ouvert de $D^\pi_{\underline{a},I}$ (et même de $D^\pi_{\underline{a},\{1,\ldots,k\}}$) égal à $D^\pi_{\underline{a},I} \backslash D^\pi_{\underline{a},J}$ (ou encore à $D^\pi_{\underline{a},\{1,\ldots,k\}} \backslash D^\pi_{\underline{a},J}$). On notera également $D^0_{\underline{a},I}$ l'ouvert de $D_{\underline{a},I}$ (et même de $D_{\underline{a},\{1,\ldots,k\}}$) égal à $D_{\underline{a},I} \backslash D_{\underline{a},J}$ (ou encore à $D_{\underline{a},\{1,\ldots,k\}} \backslash D_{\underline{a},J}$). Il est clair que dans $D^?_{\underline{a},\{1,\ldots,k\}}$ l'ouvert $D^{?,0}_{\underline{a},I}$ et le fermé $D^?_{\underline{a},J}$ sont complémentaires. On notera $v^\pi_{\underline{a},I}$ et $v_{\underline{a},I}$ les inclusions de $D^{\pi,0}_{\underline{a},I}$ et $D^0_{\underline{a},I}$ dans $D^\pi_{\underline{a},I}$ et $D_{\underline{a},I}$ respectivement. La situation se résume alors par le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
D^0_{\underline{a},I} \arrow[r, "v_{\underline{a},I}"] \arrow[d, "i_0"'] & D_{\underline{a},I} \arrow[r, "u_{\underline{a},I}"] \arrow[d, "i_0"'] & (St^B_{\underline{a}})_\sigma \arrow[r, "(st^B_{\underline{a}})_\sigma"] \arrow[d, "i_0"] & \sigma \arrow[d, "i_0"] \\
D^{\pi,0}_{\underline{a},I} \arrow[r, "v^\pi_{\underline{a},I}"] & D^\pi_{\underline{a},I} \arrow[r, "u^\pi_{\underline{a},I}"] & (St^B_{\underline{a}})/(\pi) \arrow[r] \arrow[d] & B/(\pi) \arrow[d] \\
 & & St^B_{\underline{a}} \arrow[r, "st^B_{\underline{a}}"] & B
\end{tikzcd}$$

Voici l'énoncé du « calcul des systèmes de spécialisation pour les B-schémas standards » :

Théorème 3.3.10. — *Soit* sp *une structure de spécialisation de base* B *de* H_1 *vers* H_2. *On fixe des entiers naturels non nuls* n *et* k *et on notera* $\underline{n}_k$ *le* k*-uplet constant de valeur* n. *Pour* $I \subset \{1, \ldots, k\}$ *une partie non vide, le 2-morphisme d'adjonction* $\mathrm{id} \longrightarrow v_{\underline{n}_k,I*} v^*_{\underline{n}_k,I}$ *appliqué au 1-morphisme* $u^*_{\underline{n}_k,I} \mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}} (st^B_{\underline{n}_k})^*_\eta$:

$$[u^*_{\underline{n}_k,I} \mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}} (st^B_{\underline{n}_k})^*_\eta] \xrightarrow{\sim} v_{\underline{n}_k,I*} v^*_{\underline{n}_k,I} [u^*_{\underline{n}_k,I} \mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}} (st^B_{\underline{n}_k})^*_\eta]$$

est inversible.

On obtient l'énoncé dual de 3.3.10, en appliquant le corollaire 3.1.11. On en déduit :

Théorème 3.3.11. — *On garde les notations et hypothèses du théorème 3.3.10. Le 2-morphisme* $v_{\underline{n}_k,I!} v^!_{\underline{n}_k,I} \longrightarrow \mathrm{id}$ *appliqué au 1-morphisme* $u^!_{\underline{n}_k,I} \mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}} (st^B_{\underline{n}_k})^!_\eta$:

$$v_{\underline{n}_k,I!} v^!_{\underline{n}_k,I} [u^!_{\underline{n}_k,I} \mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}} (st^B_{\underline{n}_k})^!_\eta] \xrightarrow{\sim} [u^!_{\underline{n}_k,I} \mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}} (st^B_{\underline{n}_k})^!_\eta]$$

est inversible.

Remarque 3.3.12. — Il n'est pas tout à fait clair comment l'énoncé de théorème 3.3.10 permet de « calculer » le foncteur $\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}}$. Avant d'expliquer cela, précisons tout de suite qu'on ne « calculera » pas le foncteur $\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}}$ mais plutôt ses valeurs lorsqu'on l'applique

sur des objets de $\mathsf{H}_1((St^B_{\underline{n}_k})_\eta)$ constants (voire localement constant) relativement à η, *i.e.*, des objets de la forme $(st^B_{\underline{n}_k})^*_\eta(?)$. De plus, on ne calculera pas ces valeurs mais seulement leurs restrictions aux branches $D_{\underline{n}_k.i}$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ qui recouvrent tout de même $(St^B_{\underline{n}_k})_\sigma$.

Pour simplifier, on prendra dans la suite $n = 1$ et $I = \{i\} \subset \{1, \ldots, k\}$. Dans ce cas, le B-schéma $St^B_{\underline{1}_k}$ est lisse en tout point de $D^0_{\underline{1}_k.i}$. Appelons w la projection structurale du B-schéma lisse $(St^B_{\underline{1}_k} - \cup_{j\neq i} D^\pi_{\underline{1}_k.j})$ et m son inclusion dans $St^B_{\underline{1}}$. On voit alors immédiatement que $m_\sigma = u_{\underline{1}_k.i} \circ v_{\underline{1}_k.i}$ de sorte que :

$$v^*_{\underline{1}_k.i} u^*_{\underline{1}_k.i} \mathsf{sp}_{st^B_{\underline{1}_k}} (st^B_{\underline{1}_k})^*_\eta \simeq m^*_\sigma \mathsf{sp}_{st^B_{\underline{1}_k}} (st^B_{\underline{1}_k})^*_\eta \xrightarrow{\sim} \mathsf{sp}_w m^*_\eta (st^B_{\underline{1}_k})^*_\eta \simeq \mathsf{sp}_w w^*_\eta \xleftarrow{\sim} w^*_\sigma \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B}$$

En fin de compte le théorème 3.3.10 se traduit dans ce cas par un isomorphisme $u^*_{\underline{1}_k.i} \mathsf{sp}_{st^B_{\underline{1}}} (st^B_{\underline{1}_k})_\eta \simeq v_{\underline{1}_k.i*} w^*_\sigma \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B}$.

Une bonne partie de cette section est consacrée à la preuve du théorème 3.3.10. La partie restante est consacrée aux applications de ce théorème. On y verra les preuves de 3.3.4 et 3.3.6 ainsi que des généralisations dans le cas où B est un trait (ou plus généralement de dimension 1).

3.3.2. Quelques préparations. — Le lemme simple suivant, nous sera utile :

Lemme 3.3.13. — *Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ un k-uplet d'entiers strictement positifs. Soit d un diviseur commun à tous les a_i. Il existe alors un B-morphisme canonique :*

$$st^B_{\underline{a}.d} : St^B_{\underline{a}} \longrightarrow B_d$$

qui envoie la classe de T sur la classe de $T_1^{a_1/d} \ldots T_k^{a_k/d}$. De plus, le B_d-schéma $st^B_{\underline{a}.d}$ est canoniquement isomorphe au B_d-schéma $\pi^{1/n}$-standard à réduction semi-stable de type $\underline{a}/d$:

$$St^{B_d}_{\underline{a}/d} = B_d[T_1, \ldots, T_k]/(T_1^{a_1/d} \ldots T_k^{a_k/d} - \pi^{1/d}) \longrightarrow B_d$$

avec $\underline{a}/d = (a_1/d, \ldots, a_k/d)$. (L'isomorphisme consiste à envoyer T_i sur T_i).

Démonstration. — En effet le morphisme :

$$St^B_{\underline{a}} \longrightarrow B[T]$$

qui envoie T sur le produit $T_1^{a_1/d} \ldots T_k^{a_k/d}$ se factorise par l'idéal $(T^d - \pi)$ vu la relation :

$$(T_1^{a_1/d} \ldots T_k^{a_k/d})^d = T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} = \pi$$

La seconde assertion du lemme résulte des identifications suivantes :

$$\begin{aligned}
&B_n[T_1,\dots,T_k]/(T_1^{a_1/d}\dots T_k^{a_k/d}-\pi^{1/d})\\
&\qquad = B[T]/(T^d-\pi)[T_1,\dots,T_k]/(T_1^{a_1/d}\dots T_k^{a_k/d}-T)\\
&\qquad = B[T,T_1,\dots,T_k](T_1^{a_1/d}\dots T_k^{a_k/d}-T;T^d-\pi)\\
&\qquad = B[T,T_1,\dots,T_k]/(T_1^{a_1/d}\dots T_k^{a_k/d}-T;T_1^{a_1}\dots T_k^{a_k}-\pi)\\
&\qquad = B[T_1,\dots,T_k]/(T_1^{a_1}\dots T_k^{a_k}-\pi) \quad \square
\end{aligned}$$

On utilisera à plusieurs reprises le lemme facile suivant dont la preuve est laissée en exercice :

Lemme 3.3.14. — *Soit $g : Y \longrightarrow X$ un B-morphisme entre deux B-schémas $h : Y \longrightarrow B$ et $f : X \longrightarrow B$. Soit D un sous-schéma de X_σ et $D^0 \subset D$ un ouvert de D. On notera u l'inclusion de D dans X_σ et v celle de D^0 dans D. On appelle également D', D'^0, u' et v' les pull-back par g_σ. On considère les deux 2-morphismes suivants :*

$$u^*\mathsf{sp}_f f_\eta^* \longrightarrow v_* v^* u^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* \tag{17}$$

$$u'^*\mathsf{sp}_h h_\eta^* \longrightarrow v'_* v'^* u'^* \mathsf{sp}_h h_\eta^* \tag{18}$$

On a les assertions suivantes :

1. *Si g est lisse et si (17) est un 2-isomorphisme, alors il en est de même de (18).*
2. *Si g est un recouvrement pour la topologie de Nisnévich et si (18) est un 2-isomorphisme, alors il en est de même de (17).*

Terminons ces préparations en introduisant quelques notations. Pour I une partie non vide de $\{1,\dots,k\}$, on notera $\mathcal{U}^B_{\underline{a},I}$ l'ouvert $St^B_{\underline{a}}\backslash D^\pi_{\underline{a},I}$ de $St^B_{\underline{a}}$. On pose de même. $\mathcal{V}^B_{\underline{a}} = St^B_{\underline{a}}\backslash \bigcap_{i\in\{1,\dots,k\}} D^\pi_{\underline{a},i}$. L'ouvert $\mathcal{V}^B_{\underline{a}}$ est ainsi recouvert par les $\mathcal{U}_{\underline{a},i}$ pour $1 \le i \le k$. Dans la suite, on aura l'occasion d'appliquer le lemme 3.3.14 à ce recouvrement Zariski $g : \coprod_i \mathcal{U}^B_{\underline{a},i} \longrightarrow \mathcal{V}^B_{\underline{a}}$. Notons par ailleurs que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^B_{\underline{a},I} &= B[T_1,\dots,T_k][T_i^{-1},\, i\in I]/(T_1^{a_1}\dots T_k^{a_k}-\pi)\\
&= B[T_i,T_i^{-1},\, i\in I][T_j,\, j\notin I]/\Big(\prod_{j\notin I} T_j^{a_j} - \Big(\prod_{i\in I} T_i^{-a_i}\Big).\pi\Big)
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme suivant.

Lemme 3.3.15. — *Le B-schéma $\mathcal{U}^B_{\underline{a},I}$ est canoniquement isomorphe à un $B[T_i,T_i^{-1},\, i\in I]$-schéma $(\prod_{i\in I} T_i^{-a_i}).\pi$-standard à réduction semi-stable. De plus, le schéma standard en question est de type $(a_j,\, j\notin I)$, et ses branches sont les restrictions des branches $D^\pi_{\underline{a},j}$ $(j\notin I)$ de $St^B_{\underline{a}}$.*

3.3.3. La preuve du théorème 3.3.10 : le cas I réduit à un élément

Rappelons que dans l'énoncé de 3.3.10, on a noté $\underline{n}_k$ le k-uplet constant de valeur n. À partir du lemme ci-dessous, on ne considérera que le cas $n = 1$. En effet :

Lemme 3.3.16. — *Il suffit de prouver le théorème 3.3.10 dans le cas où $n = 1$.*

Démonstration. D'après le lemme 3.3.13, on a triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} St^B_{\underline{n}_k} \arrow[r, "st^{B_n}_{\underline{1}_k}"] \arrow[dr, "st^B_{\underline{n}_k}"'] & B_n \arrow[d, "b_n"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Notons sp^n le système de spécialisation de base B_n obtenu par restriction de sp. Supposons que l'on sait résoudre le cas $n = 1$ pour tout système de spécialisation (en particulier pour sp^n). Il vient alors que le 2-morphisme suivant :

$$u^*_{\underline{1}_k,I}\mathsf{sp}^n_{st^{B_n}_{\underline{1}_k}}(st^{B_n}_{\underline{1}_k})^*_\eta \longrightarrow v_{\underline{1}_k,I*}v^*_{\underline{1}_k,I}u^*_{\underline{1}_k,I}\mathsf{sp}^n_{st^{B_n}_{k,1}}(st^{B_n}_{k,1})^*_\eta \tag{19}$$

est inversible. Mais $\mathsf{sp}^n_{st^{B_n}_{\underline{1}_k}} = \mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}}$ par définition. De même les inclusions $u_{\underline{1}_k,I}$ et $v_{\underline{1}_k,I}$ pour le B_n-schéma $st^{B_n}_{\underline{1}_k}$ sont simplement les inclusions $u_{\underline{n}_k,I}$ et $v_{\underline{n}_k,I}$ pour le B-schéma $st^B_{\underline{n}_k}$. Enfin, $(st^B_{\underline{n}_k})^*_\eta = (st^{B_n}_{\underline{1}_k})^*_\eta \circ (b_n)^*_\eta$. On obtient ainsi le 2-morphisme $u^*_{\underline{n}_k,I}\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}}(st^B_{\underline{n}_k})^*_\eta \longrightarrow v_{\underline{n}_k,I*}v^*_{\underline{n}_k,I}u^*_{\underline{n}_k,I}\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}}(st^B_{\underline{n}_k})^*_\eta$ en appliquant le 2-isomorphisme (19) au 1-morphisme $(b_n)^*_\eta$. Ceci prouve le lemme. □

Jusqu'à la fin de la preuve de 3.3.10, n sera toujours égal à 1 et on écrira alors simplement st_k, St_k, $u_{k,I}$, $v_{k,I}$, $D^?_{k,I}$, etc à la place de $st^B_{\underline{1}_k}$, $St^B_{\underline{1}_k}$, $u_{\underline{1}_k,I}$, $v_{\underline{1}_k,I}$, $D^?_{\underline{1}_k,I}$, etc. Lorsqu'on voudrait préciser la base B on la mettra en exposant.

Pour démontrer le théorème 3.3.10 dans le cas où $I = \{i\}$ est un singleton, on raisonnera par récurrence sur l'entier non nul k. Il s'agit de montrer que le 2-morphisme :

$$(\star_{k,i}) \qquad u^*_{k,i}\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta \longrightarrow v_{k,i*}v^*_{k,i}u^*_{k,i}\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta$$

est inversible. Lorsque $k = 1$, le résultat est clair.

Deux résultats préliminaires. — On fixe l'entier $k \geq 1$ et on supposera que $(\star_{k',i})$ est inversible pour tout $k' \leq k$ et $1 \leq i \leq k'$. On va prouver que $(\star_{k+1,i})$ est inversible pour $1 \leq i \leq k+1$. Le lemme suivant est une évidence :

Lemme 3.3.17. *Il suffit de prouver que $(\star_{k+1,i})$ est un 2-isomorphisme pour un seul $i \in \{1, \ldots, k+1\}$.*

Démonstration. En effet si τ est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, k+1\}$, on peut lui associer un automorphisme du B-schéma St^B_{k+1} qui consiste à envoyer T_i sur $T_{\tau^{-1}i}$. On obtient ainsi une représentation du groupe symétrique Σ_{k+1} sur St^B_{k+1}. On

voit facilement que cette représentation permute transitivement les branches. Il suffit alors (par exemple) d'appliquer le lemme 3.3.14. □

Soit O^π le sous-schéma de St_{k+1} égal à l'intersection des branches $D^\pi_{k+1.1} \cap \cdots \cap D^\pi_{k+1.k+1}$. Rappelons qu'on avait posé $\mathcal{V}^B_{\underline{1}_{k+1}} = \mathcal{V}_{k+1} = St_{k+1} \backslash O^\pi$. Notons O le pull-back de O^π par $i_0 : \sigma \longrightarrow B/(\pi)$. Évidement O est l'intersection $D_{k+1.1} \cap \cdots \cap D_{k+1.k+1}$. L'ouvert $(St_{k+1})_\sigma \backslash O$ de $(St_{k+1})_\sigma$ s'identifie naturellement au σ-schéma $(\mathcal{V}_{k+1})_\sigma$. On a le lemme :

Lemme 3.3.18. - *Soit A un objet de $\mathsf{H}_1(\eta)$. Choisissons un triangle distingué :*

$$[u^*_{k+1.i}\mathsf{sp}_{st_{k+1}}(st_{k+1})^*_\eta A] \longrightarrow v_{k+1.i*}v^*_{k+1.i}[u^*_{k+1.i}\mathsf{sp}_{st_{k+1}}(st_{k+1})^*_\eta A] \longrightarrow C_A \longrightarrow$$

L'objet C_A est à support dans O.

Démonstration. - Soit a l'inclusion de $\mathcal{V}_{k+1}$ dans St_{k+1}. On forme le diagramme commutatif suivant à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
D^0_{k+1.i} \arrow[r, "v'_{k+1.i}"] \arrow[d, equal] & D_{k+1.i}\backslash O \arrow[r, "u'_{k+1.i}"] \arrow[d, "a_i"] & (\mathcal{V}_{k+1})_\sigma \arrow[d, "a_\sigma"] \\
D^0_{k+1.i} \arrow[r, "v_{k+1.i}"] & D_{k+1.i} \arrow[r, "u_{k+1.i}"] & (St_{k+1})_\sigma
\end{tikzcd}$$

Il s'agit de montrer que $a_i^* C_A$ est nul, ou encore que le 2-morphisme :

$$a_i^* u^*_{k+1.i}\mathsf{sp}_{st_{k+1}}(st_{k+1})^*_\eta \longrightarrow a_i^* v_{k+1.i*}v^*_{k+1.i}u^*_{k+1.i}\mathsf{sp}_{st_{k+1}}(st_{k+1})^*_\eta$$

est inversible. On voit facilement (en utilisant le théorème de changement de base par un morphisme lisse) que le 2-morphisme en question est isomorphe à :

$$(u'_{k+1.i})^* a^*_\sigma \mathsf{sp}_{st_{k+1}}(st_{k+1})^*_\eta \longrightarrow (v'_{k+1.i})_*(v'_{k+1.i})^*(u'_{k+1.i})^* a^*_\sigma \mathsf{sp}_{st_{k+1}}(st_{k+1})^*_\eta$$

Par la définition 3.1.1. il en aussi isomorphe à :

$$(u'_{k+1.i})^*\mathsf{sp}_{st_{k+1}\circ a}(st_{k+1}\circ a)^*_\eta \longrightarrow (v'_{k+1.i})_*(v'_{k+1.i})^*(u'_{k+1.i})^*\mathsf{sp}_{st_{k+1}\circ a}(st_{k+1}\circ a)^*_\eta$$

Maintenant l'ouvert $\mathcal{V}_{k+1}$ est recouvert par les ouverts $\mathcal{U}_{\underline{1}_{k+1}.j}$. Par le lemme 3.3.15, l'ouvert $\mathcal{U}_{\underline{1}_{k+1}.j}$ est à réduction semi-stable standard de type $\underline{1}_k$ au-dessus de $B[T_j.T_j^{-1}]$ pour $T_j^{-1}.\pi$. On conclut alors en utilisant l'hypothèse de récurrence et le lemme 3.3.14. □

Une construction géométrique. - On considère :

$$X = \mathbb{A}^1 \times St^B_k = B[T_1.\ldots.T_k]/(T_1\ldots T_k - \pi)[T_{k+1}]$$

On a une projection canonique $pr_2 : X \longrightarrow St^B_k$. On notera $D^\pi_{X.I}$ et $D^{\pi.0}_{X.I}$ les sous-schémas de X obtenus par pull-back suivant pr_2 de $D^\pi_{k.I}$ et $D^{\pi.0}_{k.I}$. On notera également

$D_{X,I}$ et $D^0_{X,I}$ les sous-schémas de X_σ obtenus par pull-back suivant $i : \sigma \longrightarrow B$. On continue à avoir un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
D^0_{X,I} \arrow[r, "v_{X,I}"] \arrow[d, "i_0"'] & D_{X,I} \arrow[r, "u_{X,I}"] \arrow[d, "i_0"'] & X_\sigma \arrow[r, "f_\sigma"] \arrow[d, "i_0"] & \sigma \arrow[d, "i_0"] \\
D^{\pi,0}_{X,I} \arrow[r, "v^\pi_{X,I}"] & D^\pi_{X,I} \arrow[r, "u^\pi_{X,I}"] & X/(\pi) \arrow[r] \arrow[d] & B/(\pi) \arrow[d] \\
 & & X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

avec $f = st^B_k \circ pr_2$ le morphisme structural du B-schéma X. En fait, on aura surtout besoin dans la suite des sous-schémas $D_{X,i}$ et $D^0_{X,i}$. Remarquons que la seule différence de notations pour les branches de X et ceux de St_k est l'indice X ou k qui précède le numéro i de la branche $D^\pi_{X,i} \subset X$ et $D^\pi_{k,i} \subset St_k$.

On note Z^π le sous-schéma de $X = B[T_1, \dots, T_k, T_{k+1}]/(T_1 \dots T_k - \pi)$ défini par les équations $T_k = T_{k+1} = 0$. Le sous-schéma Z^π est de codimension 2 dans X, il est contenu dans $D^\pi_{X,k}$ et coupe les branches $D^\pi_{X,i}$ transversalement pour $1 \leq i \leq k-1$. La projection $pr_2 : X \longrightarrow St^B_k$ envoie Z isomorphiquement sur son image : $D^\pi_{k,k}$. On notera aussi Z le pull-back de Z^π suivant $i_0 : \sigma \longrightarrow B/(\pi)$. On a en particulier, le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & D_{X,k} \arrow[r, "u_{X,k}"] \arrow[d, "i_0"'] & X_\sigma \arrow[r, "f_\sigma"] \arrow[d, "i_0"] & \sigma \arrow[d, "i_0"] \\
Z^\pi \arrow[r] & D^\pi_{X,k} \arrow[r, "u^\pi_{X,k}"] & X/(\pi) \arrow[r] \arrow[d] & B/(\pi) \arrow[d] \\
 & & X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

On définit également les ouverts $Z^{\pi,0}$ et Z^0 de Z^π et Z respectivement comme étant les traces des ouverts $D^{\pi,0}_{X,k}$ et $D^0_{X,k}$. On obtient ainsi un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
Z^0 \arrow[r, "v_Z"] \arrow[d, "i_0"] & Z \arrow[r, "u_Z"] \arrow[d, "i_0"] & X_\sigma \arrow[d, "i_0"] \\
Z^{\pi,0} \arrow[r, "v^\pi_Z"] & Z^\pi \arrow[r, "u^\pi_Z"] & X/(\pi)
\end{tikzcd}$$

On aimerait considérer l'éclaté de Z dans X. Afin d'éviter les problèmes qui peuvent intervenir pour B très général, on optera plutôt pour le B-schéma :

$$[E_{(T_k, T_{k+1})}(\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P][T_1, \dots, T_{k+1}]/(T_1 \dots T_k - P)))] \times_{\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P])} B$$

C'est-à-dire, le pull-back de l'éclaté de l'idéal (T_k, T_{k+1}) dans le $\mathbb{Z}[P]$-schéma $\mathbb{A}^1 \times St^{\mathbb{Z}[P]}_{\underline{1}_k}$, suivant le morphisme $B \longrightarrow \mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ qui envoie P sur π. Le B-schéma

obtenu sera appelé $\tilde{X}$. On dispose d'un morphisme projectif

$$e : \tilde{X} \longrightarrow X$$

qui n'est autre que le pull-back de l'éclatement :

$$E_{(T_k, T_{k+1})}(\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P][T_1, \ldots, T_{k+1}]/(T_1 \ldots T_k - P))) \longrightarrow \mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P][T_1, \ldots, T_{k+1}]/(T_1 \ldots T_k - P))$$

On abusera et on dira que $e : \tilde{X} \longrightarrow X$ est l'éclaté de Z dans X. Remarquons que e induit un isomorphisme $\tilde{X}_\eta \simeq X_\eta$ sur la fibre générique car le centre de l'éclatement est contenu dans $X/(\pi)$ et π est inversible sur X_η. Le morphisme structural de B-schéma $f \circ e$ sera noté $\tilde{f}$. Le lemme qui suit décrit précisément le B-schéma $\tilde{X}$:

Lemme 3.3.19. — *Le B-schéma $\tilde{X}$ est recouvert par deux ouverts U_1 et U_2 affines sur B avec :*

1. $U_1 = B[T_1, \ldots, T_{k+1}]/(T_1 \ldots T_k - \pi)[T_{k+1}/T_k] \simeq B[T_1, \ldots, T_k, T'_{k+1}]/(T_1 \ldots T_k - \pi)$ *l'isomorphisme consiste à envoyer T'_{k+1} sur T_{k+1}/T_k.*
2. $U_2 = B[T_1, \ldots, T_{k+1}]/(T_1 \ldots T_k - \pi)[T_k/T_{k+1}] \simeq B[T_1, \ldots, T_{k-1}, T'_k, T_{k+1}]/(T_1 \ldots T_{k-1} T'_k T_{k+1} - \pi)$ *l'isomorphisme consiste à envoyer T'_k sur T_k/T_{k+1}.*

En particulier, U_1 est isomorphe[3] *à X et U_2 est isomorphe à St_{k+1} (en tant que B-schémas).*

Démonstration. — Par construction, on se ramène à calculer l'éclatement de l'idéal (T_k, T_{k+1}) dans le schéma :

$$\mathbb{Z}[P][T_1, \ldots, T_{k+1}]/(T_1 \ldots T_k - P)$$

Mais ce schéma est clairement isomorphe à $\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_{k+1}])$. Le calcul dans ce cas est classique. □

Pour $1 \leq i \leq k-1$, on notera $\tilde{D}_i^\pi$ le sous-schéma de $\tilde{X}$ transformé pur de $D_{X,i}^\pi$. La projection $\tilde{D}_i^\pi \longrightarrow D_{X,i}^\pi$ est canoniquement isomorphe à l'éclatement de $Z^\pi \cap D_{X,i}^\pi$ dans $D_{X,i}^\pi$. On notera également $\tilde{D}_k^\pi$ le sous-schéma de $\tilde{X}$ transformé pur du sous-schéma $D_{X,k}^\pi$. Il est facile de voir que e envoie isomorphiquement $\tilde{D}_k^\pi$ sur $D_{X,k}^\pi$. On notera finalement $E^\pi = e^{-1}(Z^\pi)$ le diviseur exceptionnel de e. On définit alors $\tilde{D}_i$ et E en prenant le pull-back suivant i_0. On pose $E^{\pi,0}$ l'ouvert de E^π égal à $E^\pi \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} \tilde{D}_i^\pi$.

[3] L'isomorphisme en question n'est pas induit par e.

De même, on pose $E^0 = E \setminus \bigcup_{1\leq i\leq k} \tilde{D}_i$. On a alors le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
E^0 \arrow[r, "v_E"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[r, "u_E"] \arrow[d, "i_0"'] & \tilde{X}_\sigma \arrow[r, "\tilde{f}_\sigma"] \arrow[d, "i_0"] & \sigma \arrow[d, "i_0"] \\
E^{\pi.0} \arrow[r, "v_E^\pi"] & E^\pi \arrow[r, "u_E^\pi"] & \tilde{X}/(\pi) \arrow[r] \arrow[d] & B/(\pi) \arrow[d] \\
 & & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"] & B
\end{tikzcd}$$

Lemme 3.3.20. – *Pour établir le cas $k+1$ de la récurrence, il suffit de prouver que le 2-morphisme :*

$$u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \longrightarrow v_{E*} v_E^* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^*$$

est inversible.

Démonstration. – Il suffit d'appliquer le lemme 3.3.14 à l'immersion ouverte $U_2 \subset \tilde{X}$. □

Formons les deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
E^{\pi.0} \arrow[r, "v_E^\pi"] \arrow[d, "p_0^\pi"'] & E^\pi \arrow[r, "u_E^\pi"] \arrow[d, "p^\pi"] & \tilde{X}/(\pi) \arrow[d, "e^\pi"] \\
Z^{\pi.0} \arrow[r, "v_Z^\pi"] & Z^\pi \arrow[r, "u_Z^\pi"] & X/(\pi)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E^0 \arrow[r, "v_E"] \arrow[d, "p_0"'] & E \arrow[r, "u_E"] \arrow[d, "p"] & \tilde{X}_\sigma \arrow[d, "e_\sigma"] \\
Z^0 \arrow[r, "v_Z"] & Z \arrow[r, "u_Z"] & X_\sigma
\end{tikzcd}$$

Le second carré dans chacun de ces deux diagrammes est cartésien. Par contre, il n'en est pas de même des premiers carrés. Le lecteur pourra facilement voir que p est la projection d'une droite projective, alors que p_0 est la projection d'une droite affine. On a le lemme suivant :

Lemme 3.3.21. – *Pour établir le cas $k+1$ de la récurrence, il suffit de prouver que le 2-morphisme :*

$$p_* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \longrightarrow p_* v_{E*} v_E^* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^*$$

est inversible.

Démonstration. On note O^π l'intersection $E^\pi \cap (\bigcap_{1\leq i\leq k} \tilde{D}_i^\pi)$ et O son pull-back. Il est clair que O^π est contenu dans l'ouvert U_2 et qu'il coïncide avec l'intersection des branches $D_{k+1,i}^\pi$ modulo l'isomorphisme $U_2 \simeq St_{k+1}$.

Soit A un objet de $\mathsf{H}(\eta)$. On choisit un triangle distingué :

$$u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* A \longrightarrow v_{E*} v_E^* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* A \longrightarrow C \longrightarrow$$

Le lemme 3.3.14 appliqué à l'inclusion de U_1 ainsi que l'hypothèse de récurrence montre que l'objet C de $\mathsf{H}_2(E)$ est à support dans $\tilde{X} - U_1$. D'autre part, le lemme 3.3.18

montre que la restriction de C à l'ouvert U_2 est supportée dans O. Ceci prouve que C est lui même à support dans O.

Étant donné que e envoie isomorphiquement O sur son image, il suffira donc de prouver que p_*C est nul. En d'autres termes il suffira de prouver que le 2-morphisme :

$$p_* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \longrightarrow p_* v_{E*} v_E^* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^*$$

est un 2-isomorphisme. C'est exactement ce qu'affirme le lemme. □

La $k+1$-ème étape de la récurrence. On est en mesure de déduire l'étape $k+1$ de la récurrence et donc de prouver le théorème 3.3.10 dans le cas où I est un singleton. Formons le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{tikzcd}
 & & p_* v_{E*} v_E^* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \\
p_* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \arrow[urr, "\eta"] \arrow[drr, "\eta"] & & v_{Z*} p_{0*} v_E^* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \arrow[u, "E.r_{**}", "\sim"'] \\
 & & v_{Z*} v_Z^* p_* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \arrow[u, "E.r_*^*", "(4)"'] \\
u_Z^* e_{\sigma*} \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \arrow[uu, "E.r_*^*", "(1)"'] \arrow[rr, "\eta"] & & v_{Z*} v_Z^* u_Z^* e_{\sigma*} \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \arrow[u, "E.r_*^*", "(1)"'] \\
u_Z^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* \arrow[u, "(2)"] \arrow[rr, "\eta", "(3)"'] & & v_{Z*} v_Z^* u_Z^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* \arrow[u, "(2)"']
\end{tikzcd}$$

Tous les sous-diagrammes de ce diagramme sont commutatifs pour des raisons triviales. Il vient que notre diagramme est commutatif. Les 2-morphismes désignés par (1) sont inversibles par le théorème de changement de base pour un morphisme projectif appliqué au carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u_E"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{X}_\sigma \arrow[d, "e_\sigma"] \\
Z \arrow[r, "u_Z"] & X_\sigma
\end{tikzcd}$$

Les 2-morphismes désignés par (2) sont inversibles car e est projectif. On voit donc que pour terminer la preuve du cas $k+1$ de la récurrence il suffit de prouver que les 2-morphismes (3) et (4) sont des 2-isomorphismes. On démontrera d'abord :

Lemme 3.3.22. – *Le 2-morphisme* (3) *est inversible.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que $u_Z^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* A$ est isomorphe à un objet du type $v_{Z*}(?)$. En effet le 2-morphisme d'unité $\mathrm{id} \longrightarrow v_{Z*}v_Z^*$ appliqué sur un objet de ce type est un isomorphisme.

Notons que puisque $n = 1$, le morphisme f est lisse au voisinage de $D_{X,i}^{\pi,0}$ pour tout $1 \leq i \leq k$. On appelle w_Z la restriction de f_σ à Z^0 et $w_{X,k}$ la restriction de f à $D_{X,k}^0$. On montrera qu'il existe un isomorphisme :

$$u_Z^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* A \simeq v_{Z*}[w_Z^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} A]$$

Pour cela, on part de l'isomorphisme $u_{X,k}^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* A \simeq v_{X,k*}[w_{X,k}^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} A]$ obtenu en composant le morphisme :

$$u_{X,k}^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* A \longrightarrow v_{X,k*} v_{X,k}^* u_{X,k}^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* A$$

avec l'isomorphisme $v_{X,k}^* u_{X.k}^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* A \simeq w_{X,k}^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} A$ (voir remarque 3.3.12). Notons que l'inversibilité s'obtient en utilisant l'hypothèse de récurrence et en appliquant le lemme 3.3.14 au morphisme lisse $pr_2 : X \longrightarrow St_k$.

Appelons s l'inclusion $Z \longrightarrow D_k$. On déduit alors un isomorphisme :

$$s^* u_{X,k}^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* \simeq s^* v_{X,k*}[w_{X,k}^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} A]$$

On a clairement $s^* u_{X,k}^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* \simeq u_Z^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* A$.

Il reste donc à voir pourquoi $s^* v_{k*}[w_k^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} A]$ est isomorphe $v_{Z*}[w_Z^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} A]$. Il suffira pour cela de construire un 2-isomorphisme entre $s^* v_{k*} w_k^*$ et $v_{Z*} w_Z^*$. En revenant aux définitions, on voit que l'inclusion $s : Z \longrightarrow D_{X,k}$ est isomorphe au-dessus de σ à l'inclusion de la section nulle $T_{k+1} = 0$ de Z dans $\mathbb{A}_Z^1$. De même pour l'inclusion $s_0 : Z^0 \longrightarrow D_{X,k}^0$. Il existe alors des rétractions r et r_0 à s et s_0 et un carré cartésien au-dessus de σ :

$$\begin{tikzcd} D_{X,k}^0 \arrow[r, "v_{X,k}"] \arrow[d, "r_0"'] & D_{X,k} \arrow[d, "r"] \\ Z^0 \arrow[r, "v_Z"] & Z \end{tikzcd}$$

Ceci donne une chaîne de 2-isomorphismes :

$$v_{X,k*} w_{X,k}^* \simeq v_{X,k*} r_0^* w_Z^* \simeq r^* v_{Z*} w_Z^*$$

Le dernier 2-isomorphisme étant donné par le théorème de changement de base par un morphisme lisse. On voit en fin de compte que $s^* v_{X,k*} w_{X,k}^*$ est 2-isomorphe à $s^* r^* v_{Z*} w_Z^* \simeq v_{Z*} w_Z^*$. Le lemme est prouvé. □

Il nous reste donc à prouver que le 2-morphisme d'échange :

$$v_Z^* p_* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \xrightarrow{Ex_*^*} p_{0*} v_E^* u_E^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^*$$

associé au carré commutatif (non cartésien) :

$$\begin{tikzcd} E^0 \arrow[r, "v_E"] \arrow[d, "p_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Z_0 \arrow[r, "v_Z"] & Z \end{tikzcd}$$

est inversible. Étant donné le diagramme commutatif de 2-morphismes :

$$\begin{tikzcd} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma *} \arrow[rr, "Ex_*^*"] \arrow[d, "\sim"'] & & p_{0*}(u_E \circ v_E)^* \arrow[d, "\sim"] \\ v_Z^* u_Z^* e_{\sigma *} \arrow[r, "(1)", "Ex_*^*"'] & v_Z^* p_* u_E^* \arrow[r, "Ex_*^*"'] & p_{0*} v_E^* u_E^* \end{tikzcd}$$

et le fait que le 2-morphisme (1) est inversible par le théorème de changement de base pour un morphisme projectif, on voit qu'il suffit de prouver que le 2-morphisme d'échange :

$$Ex_*^* : \ (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma *} \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \longrightarrow p_{0*}(u_E \circ v_E)^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^*$$

associé au carré commutatif (non cartésien) :

$$\begin{tikzcd} E^0 \arrow[r, "u_E \circ v_E"] \arrow[d, "p_0"'] & \tilde{X}_\sigma \arrow[d, "e_\sigma"] \\ Z_0 \arrow[r, "u_Z \circ v_Z"] & X_\sigma \end{tikzcd}$$

est un 2-isomorphisme.

Formons le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{tikzcd} (u_Z \circ v_Z)^* \mathsf{sp}_f f_\eta^* \arrow[rr, "(2)"] & & (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma *} \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \arrow[r, "(?)"] & p_{0*}(u_E \circ v_E)^* \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \\ (u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} \arrow[u, "(1)"] \arrow[r, "\eta"] & (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma *} e_\sigma^* f_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} \arrow[r, "\sim"] & (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma *} \tilde{f}_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} \arrow[u] \arrow[r] & p_{0*}(u_E \circ v_E)^* \tilde{f}_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} \arrow[u, "(1)"] \end{tikzcd}$$

Le carré de droite est clairement commutatif. De même le rectangle de gauche est commutatif. En effet, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} f_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathsf{sp}_f^* f_\eta^* \arrow[d] \\ e_{\sigma *} e_\sigma^* f_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} \arrow[r] & e_{\sigma *} \tilde{f}_{\sigma *} \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} \arrow[r] & e_{\sigma *} \mathsf{sp}_{\tilde{f}} \tilde{f}_\eta^* \end{tikzcd}$$

Notre diagramme est donc commutatif. D'après le lemme 3.3.14, les 2-morphismes désignés par (1) sont des 2-isomorphismes étant donné que f (resp. $\tilde{f}$) est lisse au-dessus de $Z^{\pi,0}$ (resp. $E^{\pi,0}$). Comme e est projectif, le 2-morphisme (2) est également

inversible. Il vient que pour prouver que (?) est un 2-isomorphisme, il suffira de prouver que la composée :

$$(u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} \xrightarrow{\eta} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma *} e_\sigma^* f_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B}$$
$$\xrightarrow{\sim} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma *} \tilde{f}_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B} \longrightarrow p_{0*}(u_E \circ v_E)^* \tilde{f}_\sigma^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B}$$

est un 2-isomorphisme. Il est bien sûr plus général de prouver que la composée :

$$(u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \xrightarrow{\eta} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma *} e_\sigma^* f_\sigma^* \xrightarrow{\sim} (u_\circ v_Z)^* e_{\sigma *} \tilde{f}_\sigma^* \longrightarrow p_{0*}(u_E \circ v_E)^* \tilde{f}_\sigma^*$$

est un 2-isomorphisme. Ceci est équivalent à prouver que la composée :

$$(u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \xrightarrow{\eta} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma *} e_\sigma^* f_\sigma^* \xrightarrow{Ex_*^*} p_{0*}(u_E \circ v_E)^* e_\sigma^* f_\sigma^*$$

est un 2-isomorphisme. En composant à droite par un 2-isomorphisme d'échange Ex^{**}, on se ramène au bout du compte à prouver que la composée :

$$(u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \xrightarrow{\eta} (u_Z \circ v_Z)^* e_{\sigma *} e_\sigma^* f_\sigma^* \xrightarrow{Ex_*^*} p_{0*}(u_E \circ v_E)^* e_\sigma^* f_\sigma^*$$
$$\longrightarrow p_{0*} p_0^* (u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^*$$

est inversible. Cette composée n'est autre que le 2-morphisme d'unité associé à la paire (p_0^*, p_{0*}) :

$$(u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^* \xrightarrow{\eta} p_{0*} p_0^* (u_Z \circ v_Z)^* f_\sigma^*$$

Mais on a vu que p_0 était isomorphe à la projection $\mathbb{A}^1_{Z^0} \longrightarrow Z^0$. On conclut alors en utilisant l'axiome d'homotopie. Le théorème 3.3.10 est prouvé dans le cas où I est un singleton.

3.3.4. La preuve du théorème 3.3.10 : le cas général. — Dans ce numéro on termine la preuve du théorème 3.3.10 en établissant le cas où I une partie quelconque non vide de $\{1, \ldots, k\}$.

On raisonnera par récurrence sur le cardinal $\mathrm{card}(I)$ de I. L'entier k ne jouera pas de rôle et sera fixé. Ceci nous permettra d'alléger les notations. Ainsi, on notera D_I^π, $D_I^{\pi,0}$, D_I et D_i^0 à la place de $D_{\underline{1}_k,I}^\pi$, $D_{\underline{1}_k,I}^{\pi,0}$, $D_{\underline{1}_k,I}$ et $D_{\underline{1}_k,I}^0$. De même, les immersions $u_{\underline{1}_k,I}$ et $v_{\underline{1}_k,I}$ seront simplement notées u_I et v_I. On continue à noter $st_k : St_k \longrightarrow B$ le B-schéma standard de type $\underline{1}_k$.

Au cours de la preuve, on verra apparaître le système de spécialisation canonique χ (voir l'exemple 3.1.4) auquel on lui appliquera l'hypothèse de récurrence. Il serait donc important de ne pas se restreindre à un système de spécialisation particulier.

Pour $\mathrm{card}(I) = 1$ le résultat a été prouvé (pour tous les systèmes de spécialisation). On supposera donc $\mathrm{card}(I) \geq 2$.

Soit $i \in I$ et $J = I \backslash \{i\}$. La conclusion du théorème 3.3.10 est supposée vraie pour J. On dispose donc des 2-isomorphismes :

$$u_J^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \xrightarrow{\sim} v_{J*} v_J^* u_J^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \quad \text{et} \quad u_i^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \xrightarrow{\sim} v_{i*} v_i^* u_i^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$$

Notons $T = D_i \cap D_J = \cup_{j \in J}(D_i \cap D_j)$ et t son inclusion dans $(St_k)_\sigma$ ainsi que t_i (resp. t_J, t_I) son inclusion dans D_i (resp. D_J, D_I). On a ainsi un carré cartésien d'immersions fermées :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "t_J"] \arrow[d, "t_i"'] \arrow[dr, "t_I"] & D_J \arrow[d, "u_{J:I}"] \\ D_i \arrow[r, "u_{i:I}"'] & D_I \end{tikzcd}$$

Par le triangle distingué de Mayer-Vietoris associé au recouvrement fermé de D_I par D_J et D_i on déduit pour tout $A \in \mathsf{H}_1(\eta)$ un triangle distingué :

$$u_I^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \longrightarrow u_{i:I*} u_i^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \oplus u_{J:I*} u_J^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A$$
$$\longrightarrow t_{I*} t^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \longrightarrow$$

En appliquant le foncteur triangulée $v_{I*} v_I^*$ à ce triangle, on déduit un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd} u_I^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \arrow[r] \arrow[d] & u_{i:I*} u_i^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \oplus u_{J:I*} u_J^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \arrow[r] \arrow[d] & t_{I*} t^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \arrow[r] \arrow[d] & {} \\ v_{I*} v_I^* u_I^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \arrow[r] & v_{I*} v_I^* u_{i:I*} u_i^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \oplus v_{I*} v_I^* u_{J:I*} u_J^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \arrow[r] & v_{I*} v_I^* t_{I*} t^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Ainsi pour prouver que le 2-morphisme $u_I^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{I*} v_I^* u_I^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$ est inversible, il suffira de prouver que les trois 2-morphismes suivants :

$$\begin{aligned} u_{i:I*} u_i^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* &\longrightarrow v_{I*} v_I^* u_{i:I*} u_i^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \\ u_{J:I*} u_J^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* &\longrightarrow v_{I*} v_I^* u_{J:I*} u_J^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \end{aligned} \tag{20}$$

$$t_{I*} t^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{I*} v_I^* t_{I*} t^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \tag{21}$$

sont des 2-isomorphismes. On divise alors la tâche en deux étapes : une première qui traite les deux 2-morphismes (20) et une deuxième qui traite le 2-morphisme (21).

Étape 1. Les deux 2-morphismes (20). — Formons les carrés cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd} D^0_{i:I} \arrow[r, "v_{i:I}"] \arrow[d, "u^0_{i:I}"'] & D_i \arrow[d, "u_{i:I}"] \\ D^0_I \arrow[r, "v_I"] & D_I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D^0_{J:I} \arrow[r, "v_{J:I}"] \arrow[d, "u^0_{J:I}"'] & D_J \arrow[d, "u_{J:I}"] \\ D^0_I \arrow[r, "v_I"] & D_I \end{tikzcd}$$

Les 2-morphismes d'échange $Ex^*_* : v^*_I u_{i:I*} \longrightarrow u^0_{i:I*} v^*_{i:I}$ et $Ex^*_* : v^*_I u_{J:I*} \longrightarrow u^0_{J:I*} v^*_{J:I}$ sont inversibles (par le théorème de changement de base pour une immersion fermée). D'autre part, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} u_{i:I*}u^*_i \arrow[r, equal] \arrow[d] & u_{i:I*}u^*_i \arrow[d] \\ v_{I*}v^*_I u_{i:I*}u^*_i \arrow[r, "Ex^*_*", "\sim"'] & v_{I*}u^0_{i:I*}v^*_{i:I}u^*_i \arrow[r, "Ex_{*,*}", "\sim"'] & u_{i:I*}v_{i:I*}v^*_{i:I}u^*_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} u_{J:I*}u^*_J \arrow[r, equal] \arrow[d] & u_{J:I*}u^*_J \arrow[d] \\ v_{I*}v^*_I u_{J:I*}u^*_J \arrow[r, "Ex^*_*", "\sim"'] & v_{I*}u^0_{J:I*}v^*_{J:I}u^*_J \arrow[r, "Ex_{*,*}", "\sim"'] & u_{J:I*}v_{J:I*}v^*_{J:I}u^*_J \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Ceci nous ramène à prouver que les deux 2-morphismes suivants :

$$u_{i:I*}u^*_i \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta \longrightarrow u_{i:I*}v_{i:I*}v^*_{i:I}u^*_i \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta$$

et

$$u_{J:I*}u^*_J \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta \longrightarrow u_{J:I*}v_{J:I*}v^*_{J:I}u^*_J \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta$$

sont inversibles. On montrera plus précisément que les 2-morphismes :

$$[u^*_i \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta] \longrightarrow v_{i:I*}v^*_{i:I}[u^*_i \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta]$$

(22) et

$$[u^*_J \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta] \longrightarrow v_{J:I*}v^*_{J:I}[u^*_J \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta]$$

sont inversibles. Rappelons pour cela que $v_{i:I}$ (resp. $v_{J:I}$) est l'immersion de l'ouvert $D^0_{i:I} \subset D_i$ (resp. $D^0_{J:I} \subset D_J$) et que cet ouvert contient D^0_i (resp. D^0_J). Or, on sait par l'hypothèse de récurrence que si on remplace dans (22) $v_{i:I}$ (resp. $v_{J:I}$) par l'inclusion v_i (resp. v_J) de D^0_i (resp. D^0_J) dans D_i (resp. D_J) on obtient des isomorphismes. L'inversibilité des 2-morphismes (22) découle alors du lemme général (et facile) suivant :

Lemme 3.3.23. — *Soient* $\mathsf{H} : \mathsf{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{TR}$ *un 2-foncteur homotopique stable et* X *un* S*-schéma quasi-projectif. Supposons données des immersions ouvertes :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "j_U"'] & V \arrow[r, "j_V"] & X \end{tikzcd}$$

Soit A est un objet de $\mathsf{H}(X)$ pour lequel le morphisme d'unité $A \longrightarrow j_{U*}j_U^*A$ est inversible. Alors, le morphisme d'unité $A \longrightarrow j_{V*}j_V^*A$ est également inversible.

Démonstration. — En effet, appelons a l'inclusion de U dans V de tel sorte que $j_U = j_V \circ a$. Par hypothèse, on sait que A est isomorphe à $j_{U*}j_U^*A$ et donc aussi à $j_{V*}a_*a^*j_V^*A$. Ainsi pour montrer que $A \longrightarrow j_{V*}j_V^*A$ est également inversible, il suffira de prouver que :

$$[j_{V*}a_*a^*j_V^*A] \longrightarrow j_{V*}j_V^*[j_{V*}a_*a^*j_V^*A]$$

est inversible. Ceci découle immédiatement du fait que $j_{V*} \xrightarrow{\sim} j_{V*}j_V^*j_{V*}$ est un 2-isomorphisme. □

Étape 2. Le 2-morphisme (21). — Pour mettre la récurrence en marche et donc terminer la preuve du théorème 3.3.10 pour I quelconque, il nous reste à établir que le 2-morphisme :

$$t_{I*}t^*\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{I*}v_I^*t_{I*}t^*\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$$

est inversible. Considérons pour cela un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} T^0 \arrow[r, "v_T"] \arrow[d, "t_I^0"'] & T \arrow[d, "t_I"] \\ D_I^0 \arrow[r, "v_I"] & D_I \end{tikzcd}$$

Le 2-morphisme d'échange $Ex_*^* : v_I^*t_{I*} \xrightarrow{\sim} t_{I*}^0v_T^*$ est inversible par le théorème de changement de base pour une immersion fermée. D'autre part, le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} t_{I*}t^* \arrow[rr, equal] \arrow[d] & & t_{I*}t^* \arrow[d] \\ v_{I*}v_I^*t_{I*}t^* \arrow[r, "Ex_*^*", "\sim"'] & v_{I*}t_{I*}^0v_T^*t^* \arrow[r, "Ex_{**}", "\sim"'] & t_{I*}v_{T*}v_T^*t^* \end{tikzcd}$$

commute. Il est donc équivalent de prouver que le 2-morphisme $t_{I*}t^*\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow t_{I*}v_{T*}v_T^*t^*\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$ est inversible. On prouvera plus précisément que le 2-morphisme :

$$t^*\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \longrightarrow v_{T*}v_T^*t^*\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^*$$

est inversible.

Pour prouver cela, on a besoin d'introduire quelques notations. On ne restreint pas la généralité en supposant $i = k$. Pour $1 \leq j \leq k-1$, on pose $C_j = D_j \cap D_k$. On pensera aux C_j comme à des branches de D_k. Plus généralement, pour toute partie non vide $K \subset \{1, \ldots, k-1\}$, on posera $C_K = \bigcup_{j \in K} C_i$ et $C_K^0 = C_K \backslash C_{\{1,\ldots,k-1\}\backslash K}$. On

a en particulier $T = C_J$ et $T^0 = C_J^0 = T \cap D_J^0$. Factorisons l'immersion t de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} T = C_J \arrow[r, "t_k"] \arrow[dr, "t"'] & D_k \arrow[d, "u_k"] \\ & (St_k)_\sigma \end{tikzcd}$$

Il vient que $t^*\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \simeq t_k^* u_k^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* \simeq t_k^* v_{k*} p_k^* \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B}$ avec p_k la projection de D_k^0 sur σ. Le dernier isomorphisme n'est autre que celui de la remarque 3.3.12 à une notation près (à savoir p_k à la place de w_σ^*). On voit donc qu'il est suffisant de prouver que le 2-morphisme :

$$t_k^* v_{k*} p_k^* \longrightarrow v_{T*} v_T^* t_k^* v_{k*} p_k^*$$

est inversible.

L'idée est de voir ce 2-morphisme comme un cas particulier du 2-morphisme du théorème 3.3.10 avec sp remplacée par le système de spécialisation canonique.

On notera D le σ-schéma D_k jusqu'à la fin de la preuve. Par définition, D est l'espace affine de dimension $k-1$ sur σ. L'ouvert $D^0 = D_k^0$ est le complémentaire dans $D = \sigma[T_1, \ldots, T_{k-1}]$ des hyperplans C_i d'équation $T_i = 0$. On considère alors le σ-morphisme $D \longrightarrow \mathbb{A}^1_\sigma = \sigma[P]$ qui envoie P sur le produit $T_1 \ldots T_{k-1}$. Ce morphisme fait de D un $\sigma[P]$-schéma standard de type $\underline{1}_{k-1}$. On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} D^0 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q_G"'] & D \arrow[d, "q"] & D_s \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "q_s"] \\ (\mathbb{G}_m)_\sigma \arrow[r, "v"] & \mathbb{A}^1_\sigma & \sigma \arrow[l, "s"'] \end{tikzcd}$$

Ceci nous incite à poser $\chi_q = s^* v_* : \mathsf{H}_2(D^0) \longrightarrow \mathsf{H}_2(D_s)$.

Évidement la projection $p_k : D^0 = D_k^0 \longrightarrow \sigma$ se factorise par q_G se qui nous ramène à prouver que :

$$t_k^* v_{k*} q_G^* \longrightarrow v_{T*} v_T^* t_k^* v_{k*} q_G^*$$

est inversible. On a la factorisation suivante de t_k :

$$\begin{tikzcd} C_J \arrow[r, "a_J"] \arrow[dr, "t_k"'] & C_{\{1,\ldots,k-1\}} = D_s \arrow[d, "s"] \\ & D \end{tikzcd}$$

En remarquant que v_k coïncide avec v, il devient clair que notre 2-morphisme est isomorphe à :

$$a_J^*[s^* v_*] q_G^* = a_J^* \chi_q \longrightarrow v_{T*} v_T^* a_J^*[s^* v_*] q_G^* = v_{T*} v_T^* a_J^* \chi_q$$

On voit alors apparaître naturellement la structure de spécialisation canonique χ. De plus, aux notations près, le 2-morphisme qu'on considère est celui du théorème 3.3.10

dans le cas de χ pour le schémas standard $St_{k-1}^{\sigma[P]}$ et $J \subset \{1, \ldots, k-1\}$. Il vient que ce 2-morphisme est inversible puisque $\mathrm{card}(J) < \mathrm{card}(I)$.

3.3.5. Complément au théorème 3.3.10 : cas où H_1 est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparé

Dans ce numéro on supposera que H_1 est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparé. Sous cette hypothèse il est possible d'étendre le théorème 3.3.10 aux k-uplets non constants :

Théorème 3.3.24. *On suppose que H_1 est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparé. On se donne un k-uplet $\underline{a}$ (non nécessairement constant) d'entiers non nuls a_i. Soit sp une structure de spécialisation de base B. Pour tout $I \subset \{1, \ldots, k\}$, le 2-morphisme d'adjonction $1 \to v_{\underline{a},I*}v_{\underline{a},I}^*$ appliqué au 1-morphisme $u_{\underline{a},I}^*\mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_\eta^*$:*

$$[u_{\underline{a},I}^*\mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_\eta^*] \longrightarrow v_{\underline{a},I*}v_{\underline{a},I}^*[u_{\underline{a},I}^*\mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^B}(st_{\underline{a}}^B)_\eta^*]$$

est un 2-isomorphisme.

Démonstration. — Soit m le p.p.c.m. des entiers a_i et notons $d_i = m/a_i$. Considérons le B-morphisme :

$$r : St_{\underline{m}_k} = B[T_1', \ldots, T_k']/((T_1' \ldots T_k')^m - \pi) \longrightarrow St_{\underline{a}} = B[T_1, \ldots, T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} - \pi)$$

qui consiste à envoyer T_i sur $(T_i')^{d_i}$. Ce morphisme est fini et surjectif et admet une action du groupe $G = \prod_i \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$. Cette action est transitive sur les fibres géométriques. On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
D_{\underline{m}_k,I}^0 \arrow[r, "v_{\underline{m}_k,I}"] \arrow[d, "r_I^0"'] & D_{\underline{m}_k,I} \arrow[r, "u_{\underline{m}_k,I}"] \arrow[d, "r_I"'] & (St_{\underline{m}_k})_\sigma \arrow[d, "r_\sigma"] \\
D_{\underline{a},I}^0 \arrow[r, "v_{\underline{a},I}"] & D_{\underline{a},I} \arrow[r, "u_{\underline{a},I}"] & (St_{\underline{a}})_\sigma
\end{tikzcd}$$

Considérons le carré commutatif de 2-morphismes :

$$\begin{tikzcd}
r_{I*}[u_{\underline{m}_k,I}^*\mathsf{sp}_{st_{\underline{m}_k}^B}(st_{\underline{m}_k}^B)_\eta^*] \arrow[r] \arrow[d] & r_{I*}v_{\underline{m}_k,I*}v_{\underline{m}_k,I}^*[u_{\underline{m}_k,I}^*\mathsf{sp}_{st_{\underline{m}_k}^B}(st_{\underline{m}_k}^B)_\eta^*] \arrow[d] \\
[u_{\underline{a},I}^*\mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^B}r_{\eta*}(st_{\underline{m}_k}^B)_\eta^*] \arrow[r, "\star"] & v_{\underline{a},I*}v_{\underline{a},I}^*[u_{\underline{a},I}^*\mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^B}r_{\eta*}(st_{\underline{m}_k}^B)_\eta^*]
\end{tikzcd}$$

Les 2-morphismes verticaux sont des 2-isomorphismes car r est projectif. Le 2-morphisme horizontal supérieur est un 2-isomorphisme par le théorème 3.3.10. Il vient que $(\star)$ est un 2-isomorphisme. Pour terminer, il suffira de montrer que le 2-morphisme de l'énoncé est un rétracte de $(\star)$. Pour cela il suffit de montrer que $\mathrm{id}_{\mathsf{H}((St_{\underline{a}})_\eta)}$ est un facteur direct de $r_{\eta*}r_\eta^*$. On prouvera cela dans le lemme ci-dessous (qui devrait intégrer le paragraphe 2.1.7). □

Lemme 3.3.25. — *Soit* $\mathsf{H} : \mathsf{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{TR}$ *un 2-foncteur homotopique stable qu'on supposera* $\mathbb{Q}$*-linéaire et séparé. Soit* $r : X' \longrightarrow X$ *un morphisme fini surjectif dans* Sch/S *muni d'une action d'un groupe fini* G *transitive sur les fibres géométriques. L'image du projecteur :*

$$p : \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} g$$

dans $r_* r^*$ *s'identifie au foncteur identité* via *le 2-morphisme d'unité* $1 \longrightarrow r_* r^*$.

Démonstration. — Notons F l'image de $p : r_* r^* \longrightarrow r_* r^*$. On dispose d'une factorisation du 2-morphisme d'unité :

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow r_* r^*$$

Il s'agit de prouver que $1 \simeq F$. On raisonnera par récurrence noethérienne sur X. Il existe un ouvert non vide $j : U \longrightarrow X$ au-dessus duquel le morphisme r est pseudo-galoisien *i.e.* composé d'un revêtement étale galoisien suivit par un morphisme fini surjectif totalement inséparable. Par le lemme 2.1.165, on sait que : $j^* \longrightarrow j^* F$ est inversible. Si i désigne l'immersion fermée du complémentaire Z de U, on se ramène par l'axiome de localité à montrer que : $i^* \longrightarrow i^* F$. Ceci équivaut à la conclusion du lemme pour le morphisme : $Z' = X' \times_X Z \longrightarrow Z$. La récurrence noethérienne permet de conclure. □

Remarque 3.3.26. — Nous ignorons si la conclusion du théorème 3.3.10 est vraie sans hypothèses sur H pour des k-uplets non constants. La méthode qui consiste à utiliser les éclatements $e^{i,j}_{\underline{a}}$ (voir la preuve de 3.3.4 et 3.3.6) pour modifier les k-uplets ne s'applique pas aussi facilement au théorème 3.3.10.

3.3.6. La preuve des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6. — Comme on l'a déjà annoncé, la preuve des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 repose d'une manière essentielle sur le théorème 3.3.10. Étant donné que le théorème 3.3.10 concerne les k-uplets constants, on divisera la preuve de ces théorèmes en deux parties. Dans la première, on traitera le cas des k-uplets constants en se basant sur 3.3.10. Dans la seconde, on essayera de ramener par des dévissages géométriques le cas des k-uplets généraux à celui des k-uplets constants. Notons tout de suite le lemme suivant :

Lemme 3.3.27. — *Pour des entiers non nuls* n *et* k*, notons* $\underline{n}_k$ *le* k*-uplet constant de valeur* n*. Le cas* $\underline{a} = \underline{n}_k$ *du théorème 3.3.4 (resp. du théorème 3.3.6), découle du cas* $\underline{a} = \underline{1}_k$ *du même théorème.*

Démonstration. — On suppose qu'on sait résoudre le cas $\underline{a} = \underline{1}_k$ du théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) pour tout morphisme de systèmes de spécialisation (resp. pour tout système de spécialisation).

On se place alors dans la situation du théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) avec $\underline{a} = \underline{n}_k$. Par le lemme 3.3.13 on a triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} St^B_{\underline{n}_k} \arrow[r, "st^{B_n}_{\underline{1}_k}"] \arrow[dr, "st^B_{\underline{n}_k}"'] & B_n \arrow[d, "b_n"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Notons sp^n et sp'^n (resp. seulement sp^n) les systèmes (resp. le système) de spécialisation de base B_n obtenus (resp. obtenu) par restriction de sp.

Appliquons le cas $\underline{a} = \underline{1}_k$ du théorème 3.3.4 au morphisme de systèmes de spécialisation $\mathsf{sp}^n \longrightarrow \mathsf{sp}'^n$ et à l'objet $(b_n)^*_\eta A$. Remarquons pour cela que la condition de théorème 3.3.4 est satisfaite, puisque $\mathsf{sp}^n_{\mathrm{id}_{B_n}}(b_n)^*_\eta \longrightarrow \mathsf{sp}'^n_{\mathrm{id}_{B_n}}(b_n)^*_\eta$ est par définition égale à la flèche $\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{b_n}(b_n)^*_\eta A$ qu'on sait inversible. On obtient ainsi l'inversibilité de la flèche :

$$\mathsf{sp}^n_{st^{B_n}_{\underline{1}_k}}(st^{B_n}_{\underline{1}_k})^*_\eta(b_n)^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'^n_{st^{B_n}_{\underline{1}_k}}(st^{B_n}_{\underline{1}_k})^*_\eta(b_n)^*_\eta A$$

Cette flèche s'identifie à celle de l'énoncé *via* les isomorphismes de connexions $(st^{B_n}_{\underline{1}_k})^*_\eta(b_n)^*_\eta \simeq (st^B_{\underline{n}_k})^*_\eta$. Ceci établit le premier cas du lemme.

Pour ce qui concerne le théorème 3.3.6, on procède de la même manière, en appliquant le cas $\underline{1}_k$ à sp^n et l'objet $(b_n)_\eta$. On déduit alors que l'objet $\mathsf{sp}^n_{st^{B_n}_{\underline{1}_k}}(st^{B_n}_{\underline{1}_k})^*_\eta(b_n)^*_\eta A$. Mais cet objet s'identifie à $\mathsf{sp}_{st^B_{\underline{n}_k}}(st^B_{\underline{n}_k})^*_\eta$ *via* l'isomorphisme de connexion $(st^{B_n}_{\underline{1}_k})^*_\eta(b_n)^*_\eta \simeq (st^B_{\underline{n}_k})^*_\eta$. Le lemme est prouvé. □

Grâce au lemme précédent, on établira le cas des k-uplets constants en traitant uniquement le cas $\underline{a} = \underline{1}_k$. Ainsi dans les deux paragraphes qui suivent, on notera st_k, St_k, $D_{k,I}$, $u_{k,I}$ et $v_{k,I}$ à la place de $st^B_{\underline{1}_k}$, $St^B_{\underline{1}_k}$, $D_{\underline{1}_k,I}$, $u_{\underline{1}_k,I}$ et $v_{\underline{1}_k,I}$.

Le théorème 3.3.4 pour les k-uplets constants. Pour $i \in \{1,\dots,k\}$, les $D_{k,i}$ forment un recouvrement fermé de $(St_k)_\sigma$. On voit alors immédiatement que les foncteur $u^*_{k,i}$ forment un famille conservative de foncteurs. On est donc ramené à montrer que pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$, le morphisme :

$$u^*_{k,i}\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta A \longrightarrow u^*_{k,i}\mathsf{sp}'_{st_k}(st_k)^*_\eta A$$

est inversible. On considère pour cela le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} u^*_{k,i}\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta A \arrow[r] \arrow[d] & u^*_{k,i}\mathsf{sp}'_{st_k}(st_k)^*_\eta A \arrow[d] \\ v_{k,i*}v^*_{k,i}u^*_{k,i}\mathsf{sp}_{st_k}(st_k)^*_\eta A \arrow[r] & v_{k,i*}v^*_{k,i}u^*_{k,i}\mathsf{sp}'_{st_k}(st_k)^*_\eta A \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont des isomorphisme par le théorème 3.3.10. On se ramène ainsi à montrer que le 2-morphisme :

$$v_{k,i}^* u_{k,i}^* \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A \longrightarrow v_{k,i}^* u_{k,i}^* \mathsf{sp}'_{st_k}(st_k)_\eta^* A$$

est inversible. En utilisant la remarque 3.3.12, on voit immédiatement que ce morphisme est isomorphe à :

$$p_i^* \mathsf{sp}_{b_n}(b_n)_\eta^* A \longrightarrow p_i^* \mathsf{sp}'_{b_n}(b_n)_\eta^* A$$

avec p_i la projection de $D_{k,i}^0$ sur σ. Ce morphisme est un isomorphisme par hypothèse.

Le théorème 3.3.6 pour les k-uplets constants. — On aura à travailler un peu plus que pour le théorème 3.3.4. On commence par une courte digression. On considère le diagramme de σ-schémas :

$$(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_\sigma = G \xrightarrow{g} F = \mathbb{A}_\sigma^1 = \sigma[P] \xleftarrow{s} \sigma$$

et on note χ la structure de spécialisation canonique $s^* g_*$ de base $(\mathbb{A}_\sigma^1, g, s)$ dans H_2. La projection de $G = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_\sigma$ sur σ sera notée p_G. L'hypothèse 3.3.5 implique :

Lemme 3.3.28. — *Soit E un objet dans $\mathsf{H}_2(\sigma)'$. L'objet $\chi_{\mathrm{id}} p_G^* E$ appartient à $\mathsf{H}_2(\sigma)'$.*

Démonstration. — En effet, on montre facilement que $\chi_{\mathrm{id}} p_G^* E = E \oplus E(-1)[-1]$. Mais $\mathsf{H}_2(\sigma)'$ est additive, cosuspendue et stable par twist de Tate $(-1)[-1]$. Le résultat est donc clair. □

On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$, le résultat est donné par hypothèse. On suppose donc que le résultat est vrai pour $\underline{a} = \underline{1}_{k-1}$ et tout système de spécialisation, et on le prouve pour $\underline{1}_k$. En particulier, par le lemme 3.3.28, la conclusion du théorème 3.3.6 est vraie pour χ et l'objet $p_G^* A$ (avec $\underline{a} = \underline{1}_{k-1}$).

Fixons un entier $i \in \{1, \ldots, k\}$ et posons $I = \{1, \ldots, k\} - \{i\}$. On note $Z = D_{k,i} \cap D_{k,I}$ et on considère le carré cartésien d'immersions fermées :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "z_i"] \arrow[d, "z_I"'] \arrow[dr, "z"] & D_{k,i} \arrow[d, "u_{k,i}"] \\ D_{k,I} \arrow[r, "u_{k,I}"] & (St_k)_\sigma \end{tikzcd}$$

Rappelons que $v_{k,i}$ (resp. $v_{k,I}$) est l'inclusion de l'ouvert $D_{k,i} - D_{k,I}$ (resp. $D_{k,I} - D_i$) dans $D_{k,i}$ (resp. $D_{k,I}$). Notons $K = \mathsf{sp}_{st_k}(st_k)_\eta^* A$. On a un triangle distingué de Mayer-Vietoris dans $\mathsf{H}((St_k)_\sigma)$:

$$K \longrightarrow u_{k,i*} u_{k,i}^* K \oplus u_{k,I*} u_{k,I}^* K \longrightarrow z_* z^* K \longrightarrow K[+1]$$

Les catégories $\mathsf{H}_2(-)'$ étant cosuspendues et stables par les images directes cohomologiques, on se ramène à montrer que les trois objets $u_{k,i}^* K$, $u_{k,I}^* K$ et $z^* K$ sont dans $\mathsf{H}_2(-)'$. On divise la tâche en deux parties.

1- *Étape 1 : Les objets $u_{k,i}^*K$ et z^*K.* Par le théorème 3.3.10, on a un isomorphisme :

$$u_{k,i}^*K \longrightarrow v_{k,i*}v_{k,i}^*u_{k,i}^*K$$

Il suffit donc de montrer que $v_{k,i}^*u_{k,i}^*K$ est dans $\mathsf{H}_2(-)'$. Si on note w la projection sur B de l'ouvert $(St_k) - D_{k,I}^\pi$ on a par la remarque 3.3.12 un isomorphisme :

$$v_{k,i}^*u_{k,i}^*K \simeq w_\sigma^*\mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B}A$$

Le problème de $u_{k,i}^*K$ est alors réglé en invoquant la stabilité de $\mathsf{H}_2(-)'$ par les images inverses suivant des morphismes lisses.

Une autre conséquence du théorème 3.3.10 est un isomorphisme : $z^*K \simeq z_i^*v_{i*}w_\sigma E$ avec $E = \mathsf{sp}_{\mathrm{id}_B}A$. En remarquant maintenant que $w_\sigma : ((St_k) - D_{k,I}^\pi)_\sigma \longrightarrow \sigma$ est canoniquement isomorphe à la fibre générique du $\mathbb{A}_\sigma^1$-standard de type $\underline{1}_{k-1}$ on déduit immédiatement que l'objet z^*K est isomorphe à $\chi_{st_{k-1}^{\mathbb{A}_\sigma^1}}(st_{k-1}^{\mathbb{A}_\sigma^1})_\eta^*p_G^*E$. On conclut alors à l'aide du lemme 3.3.28 et de l'hypothèse de récurrence appliquée à χ.

2- *Étape 2 : L'objet $u_{k,I}^*K$.* Toujours par le théorème 3.3.10, on a un isomorphisme :

$$u_{k,I}^*K \longrightarrow v_{k,I*}v_{k,I}^*u_{k,I}^*K$$

On montrera que $v_{k,I}^*u_{k,I}^*K$ est dans $\mathsf{H}_2(-)'$. Si on note $Y = (St_k) - D_{k,i}^\pi$ et g sa projection sur B on voit immédiatement que $v_{k,I}^*u_{k,I}^*K$ est isomorphe à $\mathsf{sp}_g g_\eta^*A$. On prouvera plutôt que $\mathsf{sp}_g g_\eta^*A$ est dans $\mathsf{H}_2(Y_\sigma)'$.

On ne restreint pas la généralité si on suppose que $i \neq 1$. Le B-schéma Y est :

$$B[T_1,\dots,T_n][T_i^{-1}]/(T_1\dots T_k - \pi) \simeq B[T_1.T_2.\dots T_k][T_i^{-1}]/\Big(\prod_{j\neq 1} T_j - \pi\Big)$$

Le dernier isomorphisme étant donné par l'association $T_l \rightsquigarrow T_l$ pour $l \neq 1$ et $T_1 \rightsquigarrow T_1.T_i$ On obtient ainsi un isomorphisme entre Y et $St_{k-1} \times \mathbb{G}_m$. En particulier, on dispose d'un morphisme lisse :

$$q : Y \longrightarrow St_{k-1}$$

Il vient que : $\mathsf{sp}_g g_\eta^*A \simeq q_\sigma^*\mathsf{sp}_{st_{k-1}}(st_{k-1})_\eta^*A$. On conclut à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

Le cas des k-uplets généraux. — Dans ce paragraphe, on montre comment déduire le cas général des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 du cas particulier $\underline{a}$ constant. Rappelons qu'on avait noté B_n^m le B-schéma $B[U,U^{-1}][T]/(T^n - U^m.\pi)$ et b_n^m sa projection structurale. On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.29. — *Soit c un entier non nul. Notons $l : Q \longrightarrow B$ le B-schéma $B[R,R^{-1}]$ et ϕ la section $R^{-c}.\pi$ de $\mathcal{O}_Q$. Soient sp et sp' deux systèmes de spécialisation de base B et $A \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}_1(\eta))$. On suppose que les hypothèses du théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) sont satisfaites pour A, sp et sp' (resp. pour A et sp). Alors les*

hypothèses du théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) sont également satisfaites pour $l_\eta^* A$, $\mathsf{sp}_{|Q}$ *et* $\mathsf{sp}'_{|Q}$ *(resp. pour* $l_\eta^* A$ *et* $\mathsf{sp}_{|Q}$*) relativement à la section* ϕ.

Démonstration. — On se donne des entiers n et m avec $m \in \mathbb{N}^{n.i.}(B)$ comme dans les énoncés des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6. On considère les B-schémas :

$$q_n : \ Q_n = Q[T]/(T^n - \phi) \longrightarrow Q \longrightarrow B$$

et

$$q_n^m : \ Q_n^m = Q[U, U^{-1}][T]/(T^n - U^m.\phi) \longrightarrow Q \longrightarrow B$$

On a $Q_n = B[R, R^{-1}][T]/(T^n - \phi) = B[R, R^{-1}][T]/(T^n - R^{-c}.\pi)$. Écrivons $c = c_1.c_2$ avec c_1 inversible sur B et $c_2 \in \mathbb{N}^{n.i.}(B)$. On définit un B-morphisme f_n : $Q_n \longrightarrow B_n^{c_2} = B[U, U^{-1}][T]/(T^n - U^{c_2}.\pi)$ en envoyant T sur T et U sur R^{-c_1}. Le fait que c_1 soit inversible sur B montre que ce morphisme est un revêtement étale.

D'autre part, on a $Q_n^m = B[R, R^{-1}][U, U^{-1}][T]/(T^n - U^m.\phi) = B[R, R^{-1}][U, U^{-1}][T]/(T^n - U^m.R^{-c}.\pi)$. On note d le p.g.c.d. de m et c. Puisque d divise m, on déduit que $d \in \mathbb{N}^{n.i.}(B)$. On définit un B-morphisme $f_n^m : Q_n^m \longrightarrow B_n^d = B[U, U^{-1}][T]/(T^n - U^d.\pi)$ en envoyant T sur T et U sur $U^{m/d}.R^{-c/d}$. Montrons que ce morphisme est lisse. Pour cela, remarquons qu'il est obtenu par pull-back suivant b_n^d du B-morphisme :

$$B[U, R.U^{-1}, R^{-1}] \longrightarrow B[U, U^{-1}]$$

qui envoie U sur $U^{m_1}.R^{-c_1}$ avec $m_1 = m/d$ et $c_1 = c/d$. Ce morphisme n'est autre que le morphisme $u : \mathbb{G}_m{}^2 \longrightarrow \mathbb{G}_m$ donné par $(x, y) \rightsquigarrow x^{m_1}.y^{-c_1}$. Choisissons deux entiers a et b tel que : $a.m_1 - b.c_1 = 1$ et considérons le morphisme $v : \mathbb{G}_m{}^2 \longrightarrow \mathbb{G}_m{}^2$ donné par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} cca & c_1 \\ b & m_1 \end{smallmatrix}\right)$. On voit facilement que v est un isomorphisme et que la composée $u \circ v$ est la projection sur le second facteur de $\mathbb{G}_m$. D'où la lissité de u.

En utilisant les B-morphismes lisses f_n et f_n^m que l'on vient de construire, il est facile de prouver le lemme. En effet, pour le premier cas, il s'agit de montrer que les deux morphismes :

$$\mathsf{sp}_{q_n}(q_n)_\eta^* A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{q_n}(q_n)_\eta^* A \qquad \text{et} \qquad \mathsf{sp}_{q_n^m}(q_n^m)_\eta^* A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{q_n^m}(q_n^m)_\eta^* A$$

sont des isomorphismes. Ceci est vrai puisqu'ils sont isomorphes à :

$$(f_n)_\sigma^* \mathsf{sp}_{b_n^{c_2}}(b_n^{c_2})_\eta^* A \longrightarrow (f_n)_\sigma^* \mathsf{sp}'_{b_n^{c_2}}(b_n^{c_2})_\eta^* A$$

et

$$(f_n^m)_\sigma^* \mathsf{sp}_{b_n^d}(b_n^d)_\eta^* A \longrightarrow (f_n^m)_\sigma^* \mathsf{sp}'_{b_n^d}(b_n^d)_\eta^* A$$

Pour le cas respectif, il s'agit de montrer que $\mathsf{sp}_{q_n}(q_n)_\eta^* A$ et $\mathsf{sp}_{q_n^m}(q_n^m)_\eta^* A$ sont dans $\mathsf{H}_2((Q_n)_\sigma)'$ et $\mathsf{H}_2((Q_n^m)_\sigma)'$ respectivement. Ceci découle des isomorphismes $\mathsf{sp}_{q_n}(f_n)_\eta^* \simeq (f_n)_\sigma^* \mathsf{sp}_{b_n^{c_2}}$ et $\mathsf{sp}_{q_n^m}(f_n^m)_\eta^* \simeq (f_n^m)_\sigma^* \mathsf{sp}_{b_n^d}$ et le fait que les catégories $\mathsf{H}_2(-)'$ sont stables par les images inverses suivant des morphismes lisses. □

Soit un k-uplet $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$. Pour $1 \leq i < j \leq k$, on note $St^{i,j}_{\underline{a}}$ le B-schéma :

$$E_{(T_i,T_j)}(\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P][T_1, \ldots, T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} - P))) \times_{\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P])} B$$

obtenu en prenant le pull-back de l'éclaté de l'idéal (T_i, T_j) dans $St^{\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P])}_{\underline{a}}$ suivant le morphisme $B \longrightarrow \mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ qui envoie P sur π. Sa projection sur B sera notée $st^{i,j}_{\underline{a}}$ et le morphisme projectif $St^{i,j}_{\underline{a}} \longrightarrow St_{\underline{a}}$ sera noté $e^{i,j}_{\underline{a}}$. On abusera et on dira que $St^{i,j}_{\underline{a}}$ est l'éclaté de (T_i, T_j) dans $St_{\underline{a}}$.

Lemme 3.3.30. — *Le B-schéma $St^{i,j}_{\underline{a}}$ est recouvert par deux ouverts V_i et V_j affines sur B avec :*
1. $V_i \simeq B[T_1, \ldots, T_{i-1}, T'_i, T_{i+1}, T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_{i-1}^{a_{i-1}} T_i'^{a_i} . T_{i+1}^{a_{i+1}} \ldots T_{j-1}^{a_{j-1}} T_j^{a_i+a_j} T_{j+1}^{a_j} \ldots T_k^{a_k} - \pi)$ l'isomorphisme est donné par $T'_i \rightsquigarrow T_i/T_j$.
2. $V_j \simeq B[T_1, \ldots, T_{j-1}, T'_j, T_{j+1}, T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_{i-1}^{a_{i-1}} T_i^{a_i+a_j} T_{i+1}^{a_{i+1}} \ldots T_{j-1}^{a_{j-1}} T_j'^{a_j} T_{j+1}^{a_{j+1}} \ldots T_k^{a_k} - \pi)$ l'isomorphisme est donné par $T'_j \rightsquigarrow T_j/T_i$.

En d'autres termes, il existe un recouvrement pour la topologie de Zariski :

$$St_{\underline{a}^j_i} \coprod St_{\underline{a}^i_j} \xrightarrow{v_i \coprod v_j} St^{i,j}_{\underline{a}}$$

avec $\underline{a}^j_i$ (resp. $\underline{a}^i_j$) le k-uplet obtenu en gardant tous les a_l inchangés sauf le a_j (resp. a_i) que l'on remplace par $a_i + a_j$.

Démonstration. — Par construction, on est ramené à calculer l'éclaté de (T_i, T_j) dans le schéma

$$\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[P][T_1, \ldots, T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} - P))$$

Mais ce schéma est canoniquement isomorphe à l'espace affine $\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_k])$, puisque la variable P s'exprime en fonction des autres. Le calcul de l'éclaté dans ce cas est classique. □

Muni des lemmes 3.3.29 et 3.3.30, on est en mesure de terminer la preuve de 3.3.4 et 3.3.6. Lorsque $k = 1$ la validité des théorèmes 3.3.4 et 3.3.6 découle de leurs énoncés. On peut donc supposer $k \geq 2$. On raisonne par récurrence sur k en supposant le résultat vrai pour les schémas standards à moins de $k - 1$ branches.

Proposition 3.3.31. — *Supposons que le théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) est vrai pour le k-uplet $\underline{a}$. Alors (sous-l'hypothèse de récurrence) le théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) est vrai pour les k-uplets $\underline{a}^j_i$ et $\underline{a}^i_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq k$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que les k-uplets $\underline{a}^j_i$ et $\underline{a}^i_j$ on même p.g.c.d et même élément maximal. Il vient que les hypothèses de théorème 3.3.4 (resp. du théorème 3.3.6) sont les mêmes pour ces deux k-uplets. Ainsi on supposera ces hypothèses vérifiées et on prouvera le théorème 3.3.4 (resp. théorème 3.3.6) pour $\underline{a}^j_i$ et $\underline{a}^i_j$ d'un seul coup en se ramenant au cas de $\underline{a}$. L'outil principal pour cela est le B-schéma $st^{i,j}_{\underline{a}}$.

En effet par le lemme 3.3.30, on voit qu'il suffit de montrer que :

1. Le morphisme $\mathsf{sp}_{st^{i,j}_{\underline{a}}}(st^{i,j}_{\underline{a}})^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{st^{i,j}_{\underline{a}}}(st^{i,j}_{\underline{a}})^*_\eta A$ est un isomorphisme dans le premier cas,
2. L'objet $\mathsf{sp}_{st^{i,j}_{\underline{a}}}(st^{i,j}_{\underline{a}})^*_\eta A$ est dans $\mathsf{H}_2((St^{i,j}_{\underline{a}})_\sigma)'$ dans le cas respectif.

Notons $D^{i,j,\pi}_{\underline{a},l}$ le transformé pure de la branche $D^\pi_{\underline{a},l}$ par $e^{i,j}_{\underline{a}}$ et $E^{i,j,\pi}_{\underline{a}}$ le diviseur exceptionnel de $e^{i,j}_{\underline{a}}$. On appelle également $D^{i,j}_{\underline{a},l}$ et $E^{i,j}_{\underline{a}}$ les pull-back par i_0 : $\sigma \longrightarrow B/(\pi)$. Notons enfin pour $t \in \{i,j\}$ et $? \in \{\varnothing, \pi\}$, $O^{t,?}$ l'intersection :

$$E^{i,j,\pi}_{\underline{a}} \cap \left[\bigcap_{l \in (\{1,\ldots,k\}-\{i,j\})\cup\{t\}} D^{i,j,\pi}_{\underline{a},l} \right]$$

Le sous-schéma $O^{t,\pi}$ est envoyé isomorphiquement par $e^{i,j}_{\underline{a}}$ sur l'intersection $O^\pi_{\underline{a}} = \cap_{l\in\{1,\ldots,k\}} D^\pi_{\underline{a},l}$ des branches de $St_{\underline{a}}$. Il en est de même de O^t. On vérifie également que $O^{i,\pi}$ (resp. $O^{j,\pi}$) n'est autre que l'image de $O^\pi_{\underline{a}^j_i}$ (resp. $O^\pi_{\underline{a}^i_j}$) par v_i (resp. v_j). On traite d'abord le premier cas :

1- *Pour le théorème 3.3.4* Formons un triangle distingué de $\mathsf{H}_2((St^{i,j}_{\underline{a}})_\sigma)$:

$$\mathsf{sp}_{st^{i,j}_{\underline{a}}}(st^{i,j}_{\underline{a}})^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{st^{i,j}_{\underline{a}}}(st^{i,j}_{\underline{a}})^*_\eta A \longrightarrow C \longrightarrow$$

L'objet C est à support dans $O^i \coprod O^j$. En effet le complémentaire de $O^{i,\pi} \coprod O^{j,\pi}$ dans $St^{i,j}_{\underline{a}}$ est recouvert par deux ouverts Zariski isomorphes à $St_{\underline{a}^i_j} - O^\pi_{\underline{a}^i_j}$ et $St_{\underline{a}^j_i} - O^\pi_{\underline{a}^j_i}$. Par le lemme 3.3.15, chacun de ces deux ouverts est à son tour recouvert par des $B[U,U^{-1}]$-schémas $U^{-c}.\pi$-standard à $k-1$ branches de type un $k-1$-uplet $\underline{b}$ inclus dans $\underline{a}^j_i$ ou $\underline{a}^i_j$. En utilisant le lemme 3.3.29, on vérifie immédiatement que les hypothèses du théorème 3.3.4 sont satisfaites pour $l^*_\eta A$ et le $k-1$-uplet $\underline{b}$. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure que la restriction de C au complémentaire de $O^i \coprod O^j$ est bien nulle.

On a ainsi montré que le défaut d'isomorphie est concentré sur deux sous-schémas fermés disjoins et envoyés isomorphiquement sur leur image (commune) par $(e^{i,j}_{\underline{a}})_\sigma$. Il suffit alors de voir que la flèche :

$$(e^{i,j}_{\underline{a}})_{\sigma*}\mathsf{sp}_{st^{i,j}_{\underline{a}}}(st^{i,j}_{\underline{a}})^*_\eta A \longrightarrow (e^{i,j}_{\underline{a}})_{\sigma*}\mathsf{sp}'_{st^{i,j}_{\underline{a}}}(st^{i,j}_{\underline{a}})^*_\eta A$$

est un isomorphisme. Mais puisque $e^{i,j}_{\underline{a}}$ est projectif et induit un isomorphisme sur la fibre générique, cette flèche est isomorphe à :

$$\mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}}(st_{\underline{a}})^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{st_{\underline{a}}}(st_{\underline{a}})^*_\eta A$$

D'où la conclusion de la proposition dans le premier cas.

2- *Pour le théorème 3.3.6 :* On considère l'ouvert $w : W \longrightarrow St^{i,j}_{\underline{a}}$, complémentaire de $O^{\pi,i} \coprod O^{\pi,j}$. On montre d'abord que $w_{\sigma*}w^*_\sigma \mathsf{sp}_{st^{i,j}_{\underline{a}}}(st^{i,j}_{\underline{a}})^*_\eta A$ est dans $\mathsf{H}_2((St^{i,j}_{\underline{a}})_\sigma)'$. Puisque $\mathsf{H}_0(-)$ est stable par images directes cohomologiques, il suffit

de montrer que $w_\sigma^* \mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})_\eta^* A$ est dans $\mathsf{H}_2(W_\sigma)'$. Mais on a vu dans le paragraphe précédent que W était recouvert par des $B[U, U^{-1}]$-schémas $U^{-c}\pi$-standards à $k-1$-branches de type un $k-1$-uplet $\underline{b}$ inclus dans $\underline{a}_i^j$ ou $\underline{a}_j^i$. En utilisant le lemme 3.3.29, on vérifie comme pour le premier cas que les hypothèses du théorème 3.3.6 sont vérifiées pour le $k-1$-uplet $\underline{b}$ et l'objet $l_\eta^* A$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on déduit alors que l'objet $w_\sigma^* \mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})_\eta^* A$ est localement pour la topologie de Zariski dans $\mathsf{H}_2(-)'$. On utilise alors le lemme 3.3.32 ci-dessous pour conclure.

Choisissons ensuite un triangle distingué :

$$N \longrightarrow \mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})_\eta^* A \longrightarrow w_{\sigma *} w_\sigma^* \mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})_\eta^* A \longrightarrow N[+1] \tag{23}$$

Il suffit de montrer que N est dans $\mathsf{H}_2((St_{\underline{a}}^{i,j})_\sigma)'$ (on utilise que $\mathsf{H}_2(-)'$ est cosuspendue). Par construction N est à support dans $O^i \coprod O^j$. Si on appelle o^j et o^i les inclusions de O^j et O^i dans $(St_{\underline{a}}^{i,j})_\sigma$, il existe alors des objets N_i^j et N_j^i tel que :

$$N \simeq (o^i)_* N_i^j \oplus (o^j)_* N_j^i$$

On prouvera que les deux objets $(o_{\underline{a}_i^j})_* N_i^j$ et $(o_{\underline{a}_j^i})_* N_j^i$ sont dans $\mathsf{H}_2(-)'$ (avec $o_{\underline{a}_i^j}$ et $o_{\underline{a}_j^i}$ l'inclusion de $O_{\underline{a}_i^j} \simeq O^i$ et $O_{\underline{a}_j^i} \simeq O^j$ dans $St_{\underline{a}_i^j}$ et $St_{\underline{a}_j^i}$ respectivement).

Considérons le triangle distingué :

$$\begin{aligned}(e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *} N &\longrightarrow (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *} \mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})_\eta^* A \\ &\longrightarrow (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *} w_{\sigma *} w_\sigma^* \mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}^{i,j}}(st_{\underline{a}}^{i,j})_\eta^* A \longrightarrow (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *} N[+1]\end{aligned}$$

obtenu en appliquant le foncteur $(e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *}$ à 23. Le troisième sommet de ce triangle est un objet de $\mathsf{H}_2(-)'$ par le début de la discussion. Comme $e_{\underline{a}}^{i,j}$ est projectif et qu'il induit un isomorphisme sur la fibre générique, le deuxième sommet du triangle est isomorphe à $\mathsf{sp}_{st_{\underline{a}}}(st_{\underline{a}})_\eta^* A$. C'est donc un objet de $\mathsf{H}_2(-)'$. On déduit ainsi que l'objet $(e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *} N$ est dans $\mathsf{H}_2(-)'$ puisque cette catégorie est cosuspendue. L'objet $(e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *} N$ est la somme directe :

$$(e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *}(o^i)_* N_i^j \oplus (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *}(o^j)_* N_j^i$$

La stabilité par facteurs directs des catégories $\mathsf{H}_2(-)'$ (voir l'énoncé de théorème 3.3.6) implique alors que chacun des objets :

$$o_{\underline{a}*} N_i^j \simeq (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *}(o^i)_* N_i^j \qquad \text{et} \qquad o_{\underline{a}*} N_j^i \simeq (e_{\underline{a}}^{i,j})_{\sigma *}(o^j)_* N_j^i$$

est dans $\mathsf{H}_2(-)'$ (avec bien entendu $o_{\underline{a}}$ l'inclusion de $O_{\underline{a}}$ dans $(St_{\underline{a}})_\sigma$). Enfin, il est facile de voir que l'objet $(o_{\underline{a}_i^j})_* N_i^j$ de $\mathsf{H}_2((St_{\underline{a}_i^j})_\sigma)$ est isomorphe à $s_*(o_{\underline{a}*} N_i^j)$ avec $s : (St_{\underline{a}})_\sigma \longrightarrow (St_{\underline{a}_i^j})_\sigma$ la nil-immersion :

$$\sigma[T_1, \ldots, T_k]/T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} \longrightarrow \sigma[T_1, \ldots, T_k]/T_1^{a_1} \ldots T_{j-1}^{a_{j-1}} T_j^{a_i + a_j} T_{j+1}^{a_{j+1}} \ldots T_k^{a_k}$$

d'idéal $(T_j^{a_j})$. La même chose s'applique à $(o_j^i)_* N_j^i$. Ceci prouve le cas respectif. $\square$

Le lemme suivant à été utilisé au cours de la preuve du cas respectif de la proposition précédente :

Lemme 3.3.32. — *Soient T un σ-schéma quasi-projectif et $(j_\alpha : T_\alpha \longrightarrow T)_\alpha$ un recouvrement fini Zariski de T. Soit A un objet de $\mathsf{H}_2(T)$. On suppose que pour tous les indices α, l'objet $j_\alpha^* A$ est dans $\mathsf{H}_2(T_\alpha)'$. Alors l'objet A est dans $\mathsf{H}_2(T)'$.*

Démonstration. — Une facon économique de prouver ce lemme est d'utiliser le version duale du lemme 2.2.13. On note j_I l'immersion de l'ouvert $\cap_{\alpha\in I} T_\alpha$. La version duale de 2.2.13 concerne les operations j_{I*} et j_I^* au lieu de $j_{I\#} = j_{I!}$ et $j_I^* = j_I^!$. On déduit ainsi que l'objet A appartient à la sous-catégorie cosuspendue :

$$< \{j_{I*} j_I^* A;\ I \text{ non vide}\} >_-^{s-ct}$$

Le lemme découle alors de l'hypothèse 3.3.5 □

La proposition 3.3.31 permet de mettre en marche la récurrence sur k et donc de prouver les théorèmes 3.3.4 et 3.3.6. En effet, tout k-uplet $\underline{a}$ de p.g.c.d. d, peut-être construit à partir de $\underline{d}_k$ par applications successives du procédé : $\underline{x} \rightsquigarrow \underline{x}_i^j$ (avec i et j bien choisis).

3.3.7. Réduction semi-stable. — Dans ce paragraphe on supposera que le schéma de base B est régulier, connexe et de dimension 1. On fixe une section globale π du faisceau $\mathscr{O}_B$. On supposera que le sous-schéma $B/(\pi)$ est réduit, non vide et de dimension 0. On notera p l'exposant caractéristique de $B/(\pi)$ qu'on suppose constant pour simplifier. On commence par préciser ce que l'on entendra par la réduction semi-stable :

Définition 3.3.33

1- Soient $f : X \longrightarrow B$ un B-schéma et x un point de $X/(\pi)$. On dit que f (ou X) est à π-réduction semi-stable en x (à k-branches de type $(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{N} - \{0\})^k$) s'il existe existe un voisinage pour la topologie Nisnévich $x \longrightarrow U \longrightarrow X$ de x dans X tels que :

1. *U est un schéma régulier,*
2. *Il existe $k+1$ sections globales $t_1, \dots, t_k$ et u de $\mathscr{O}_U$ vérifiant :*
   - *u est inversible et $\pi = u.t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k} = u.\prod_{i=1}^k t_i^{a_i}$,*
   - *pour tout $1 \le i \le k$, le sous-schéma D_i de U défini par l'équation $(t_i = 0)$ est un schéma lisse sur $B/(\pi)$ et contient x (en particulier il est non vide),*
   - *la réunion des D_i forme un diviseur à croisements normaux dans le schéma U.*
3. *Soit m_0 la borne supérieure dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble des entiers m pour lesquels il existe un $v \in \mathscr{O}_U$ avec $v^{p^m} = u$. Soit $l_0 \in \mathbb{N}$ la borne supérieure des l tel que $p^{m_0+l_0}$ divise tous les a_i pour $i \in \{1, \dots, k\}$ (on conviendra exceptionnellement que 0 est la borne supérieure de l'ensemble vide). Désignons par O*

le sous-schéma de U d'équation $t_1 = \cdots = t_k = 0$. Lorsque $m_0 = \infty$ on posera $v_0 = u$, sinon on choisit[4] *$v_0 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ tel que $v_0^{p^{m_0}} = u$. Alors pour tout $l \in \{0, \ldots, l_0\}$, le $B/(\pi)$-schéma $O[v_0^{1/p^l}]$ est lisse.*

On dira que le B-schéma X est à réduction semi-stable (à moins de k-branches) lorsque en tout point x de $X/(\pi)$, il est à réduction semi-stable (à k_x branches avec $k_x \leq k$).

2- On dit que f (ou X) est globalement à réduction semi-stable en x (à k-branches de type $(a_1, \ldots, a_k) \in (\mathbb{N} - \{0\})^k$) lorsqu'il est possible de choisir U un voisinage Zariski ouvert de x. Dans ce cas, il y a k diviseurs de X qui passent par x. On définit de même la notion de B-schéma globalement à réduction semi-stable.

Exemple 3.3.34. — D'après notre définition, un B-schéma X avec $X/(\pi)$ vide est à π-réduction semi-stable.

Remarque 3.3.35. — La troisième condition dans la définition précédente a été imposée dans le but d'avoir la proposition 3.3.39. Cette condition peut paraître compliquée, mais devient simple dans beaucoup de situations :

- Lorsque $B/(\pi)$ est de caractéristique nulle, cette condition est automatique. En effet, $m_0 = \infty$ et $l_0 = 0$. Il suffit donc de vérifier que O est lisse. On sait que O est régulier puisque $X/(\pi)$ est un diviseur à croisements normaux. Mais sur un corps de caractéristique nulle tout schéma régulier est lisse.
- Supposons que $p \geq 2$. Lorsque les a_i sont premiers à p ou plus généralement lorsque u admet des racines p^m-ème pour m plus grand que la valuation p-adique des a_i, cette condition se réduit à la lissité de O. En effet, dans ce cas on a $l_0 = 0$.
- Supposons que $p \geq 2$ et que $B/(\pi)$ est somme de corps parfaits. Cette condition est vérifiée si O est de dimension 0. En effet dans ce cas, tous les $O[v_0^{1/p^l}]$ sont étales sur $B/(\pi)$.

Remarque 3.3.36. — Notre définition diffère de la définition classique. Classiquement un B-schéma X est à réduction semi-stable si localement pour la topologie étale, X est lisse au-dessus d'un B-schéma de la forme :

$$B[T_1, \ldots, T_k]/(T_1 \ldots T_k - \pi)$$

Cette définition est suffisante en cohomologie étale pour les besoins de la théorie des cycles évanescents. Elle est insuffisante dans le contexte motivique où l'on dispose uniquement de la localité pour la topologie de Nisnévich.

[4] Le choix de v_0 n'est pas important. En effet seul la restriction de v_0 à O interviendra dans la suite. Cette restriction est indépendante de ce choix puisque sur O il n'y a pas de racines p-ème de l'unité non triviales (on utilise que O est réduit).

Si X est un B-schéma globalement à réduction semi-stable, le diviseur libre $X/(\pi)$ est sommes de diviseurs lisses irréductibles :

$$[X/(\pi)] = m_1.[D_1] + \cdots + m_r[D_r]$$

avec m_j des entiers strictement positifs. Les m_j sont en général différents des a_i, étant donné que les a_i décrivent une information locale dépendante d'un point x alors que les m_j décrivent une situation globale, mais il est facile de voir que la suite des a_i est toujours contenue dans celle des m_j. Les diviseurs D_i seront appelés les branches connexes (ou irréductibles) du S-schéma X et l'entier m_i sera appelé la multiplicité de D_i. Plus généralement on appellera branche de X tout diviseur *lisse* de X contenu dans $X/(\pi)$. Ainsi une branche de X est forcément une réunion disjointe de branches irréductibles. Nous dirons qu'une branche D de X est de multiplicité constante m si toutes ses branches irréductibles sont de multiplicité m. Enfin, on dira que la branche D est simple si elle est de multiplicité 1. Notons le lemme :

Lemme 3.3.37. — *Soient $f : X \longrightarrow B$ un B-schéma et x un point de $X/(\pi)$. On suppose que X est à π-réduction semi-stable de type $(a_1, \ldots, a_k)$ au point x. On se donne un point géométrique : $\bar{x} \longrightarrow X$ au-dessus de x. Lorsque $B/(\pi)$ est de caractéristique positive, on supposera que p ne divise pas tous les a_i. Il existe alors un voisinage étale de $\bar{x}$ dans X :*

$$\bar{x} \longrightarrow U \longrightarrow X$$

et un B-morphisme lisse :

$$U \longrightarrow B[T_1 \ldots T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} - \pi)$$

qui envoie $\bar{x}$ sur le point $o = (T_1 = \cdots = T_k = 0)$. De plus si les a_i sont premiers entre eux (resp. et si en plus f est globalement à réduction semi-stable) on peut choisir U un voisinage Nisnévich de x (resp. un voisinage ouvert de x).

Démonstration. — Quitte à remplacer X par un voisinage Nisnévich (ou Zariski lorsque X est globalement à réduction semi-stable en x) de x on peut supposer qu'il existe $k+1$ sections globales $t_1, \ldots, t_k$ et u de $\mathscr{O}_X$ vérifiant les hypothèses de la définition 3.3.33. En particulier $\pi = u.t_1^{a_1} \ldots t_k^{a_k}$. On note d le plus grand diviseur commun des entiers a_i, et on prend pour U le X-schéma :

$$U = X[\xi]/(\xi^d - u) \longrightarrow X$$

Comme u est inversible et que p ne divise pas d, il s'agit bien d'un morphisme étale (c'est même un revêtement étale). Remarquons également que lorsque les a_i sont premiers entre eux, on a : $U = X$. Puisque $\bar{x}$ est le spectre d'un corps séparablement clos il existe une factorisation de $\bar{x} \longrightarrow X$:

$$\bar{x} \longrightarrow U \longrightarrow X$$

Il nous reste à construire un morphisme lisse vers un schéma standard. Pour cela, on choisit un k-uplet d'entiers relatifs k_i tel que :

$$\sum_{i=1}^{k} k_i a_i = k_1 a_1 + \cdots + k_k a_k = d$$

et on considère le B-morphisme :

$$p_0 : U \longrightarrow B[T_1, \ldots T_k]$$

défini au niveaux des algèbres par l'association : $T_i \rightsquigarrow \xi^{k_i}.t_i$. En remarquant que :

$$\pi = u.t_1^{a_1} \ldots t_k^{a_k} = \xi^d.t_1^{a_1} \ldots t_k^{a_k} = \prod_{i=1}^{k} (\xi^{k_i}.t_i)^{a_i}$$

On voit que p_0 se factorise d'une manière unique par :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "p"'] \arrow[rr, bend left, "p_0"] & B[T_1, \ldots, T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} - \pi) \arrow[r, hook] & B[T_1, \ldots, T_k] \end{tikzcd}$$

Le fait que p envoie $\bar{x}$ sur le point o de coordonnées $(0, \ldots, 0)$ est évident. Il reste à prouver que p est lisse au voisinage de x. Le fait que l'équation $t_1 \ldots t_k = 0$ définit un diviseur à croisements normaux assure que la suite $(\xi^{k_1}.t_1, \ldots, \xi^{k_k}.t_k)$ est une suite régulière au voisinage de x et donc que p est plat au voisinage de x. D'autre part comme $p^{-1}(o)$ est égal au sous-schéma $t_1 = \ldots t_k = 0$. Ce dernier est lisse au voisinage de x par la troisième condition de la définition 3.3.33. Le lemme est prouvé. □

Voici une réciproque partielle au lemme précédent :

Lemme 3.3.38. — *Soient $f : X \longrightarrow B$ un B-schéma avec X régulier et $\bar{x}$ un point géométrique de X au-dessus de x. On suppose qu'il existe un voisinage étale U de $\bar{x}$ et un B-morphisme lisse :*

$$U \longrightarrow B[T_1, \ldots T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} - \pi)$$

qui envoie $\bar{x}$ sur le point $o = (T_1 = \cdots = T_k = 0)$. On suppose également qu'il existe k diviseurs irréductibles de X contenus dans X_σ et passant par x. Le B-schéma X est alors globalement à réduction semi-stable au sens de la définition 3.3.33.

Démonstration. — Quitte à remplacer X par un voisinage ouvert assez petit de x on peut trouver k sections globales $t_1, \ldots, t_k$ de $\mathcal{O}_X$ définissant les k diviseurs irréductibles passant par x de l'énoncé. Soit D_i le diviseur de X définit par l'équation $t_i = 0$ et D_i' l'image inverse de D_i dans U. Les D_i sont distincts et passent par x. Quitte à remplacer U par un voisinage ouvert de $\bar{x}$ on peut supposer que U_σ est la réunion des D_i' et que ces derniers sont irréductibles. Il vient que l'image inverse par :

$$p : U \longrightarrow B[T_1, \ldots T_k]/(T_1^{a_1} \ldots T_k^{a_k} - \pi)$$

de $(T_i = 0)$ est l'un des D'_j. Quitte à réindexer les t_i, on peut supposer que $p^{-1}(T_i = 0) = D'_i$. En d'autre termes T_i est envoyé sur $t_i^{e_i}.u_i$ avec u_i inversible sur U. Comme p est lisse, les entiers e_i sont forcément égaux à 1. En particulier, on a la relation suivante dans $\mathscr{O}_U$:

$$\pi = \prod_i (t_i.u_i)^{a_i} = \Big(\prod_i t_i^{a_i}\Big).\Big(\prod_i u_i^{a_i}\Big)$$

Si $u = (\prod_i u_i^{a_i})^{-1}$ on a alors : $\prod_i t_i^{a_i} = u.\pi$. De plus, quitte à remplacer X par un voisinage Zariski de x on peut supposer que les D_i sont lisses et que leur réunion est un diviseur à croisement normaux étant donné que c'est le cas dans U. Ainsi pour prouver la deuxième condition de la définition 3.3.33. il suffit de montrer que $u \in \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$ est en fait dans $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ (quitte peut-être à rétrécir X). En effet si on rétrécit X le morphisme $U \longrightarrow X$ devient fidèlement plat. Mais l'image inverse du $\mathscr{O}_X$-module $(\pi, \prod t_i^{a_i})/(\pi)$ est nulle sur U. Ce qui prouve que $\mathscr{O}_X.\prod t_i^{a_1} \subset \mathscr{O}_X.\pi$.

Enfin, la troisième condition de 3.3.33 est stable par morphisme lisse. On se ramène aussitôt à la vérifier pour un schéma standard au point de l'intersection des branches. C'est un cas particulier de la troisième situation considérée dans la remarque 3.3.35. □

Le lemme 3.3.37 n'est pas très utile pour l'étude des systèmes de spécialisation au-dessus des B-schémas π-standards puisqu'il donne une information locale pour la topologie étale. Heureusement, on dispose d'un résultat légèrement plus faible mais local pour la topologie de Nisnévich. Ce résultat ramènera beaucoup de questions sur les B-schémas à réduction semi-stable à des questions sur les B-schémas standards :

Proposition 3.3.39. — *Soit X un B-schéma à réduction semi-stable (resp. globalement à réduction semi-stable) de type $\underline{a}$ en un point x. On peut trouver un voisinage Nisnévich (resp. Zariski) W de $x[R, R^{-1}]$ dans $X[R, R^{-1}]$ pour lequel il existe :*

- *un B-morphisme lisse $W \longrightarrow St_{\underline{b}}^B$ avec $\underline{b}$ l'uplet obtenu de $\underline{a}$ en rajoutant l'entier p^m.*
- *un B-morphisme lisse $W \longrightarrow St_{\underline{a}}^{B[V,V^{-1}]}$ avec $St_{\underline{a}}^{B[V,V^{-1}]}$ le $B[V, V^{-1}]$-schéma $V^{-p^m}.\pi$-standard.*

avec m un certain entier plus petit que la valuation p-adique du p.g.c.d des a_i.

Démonstration. — La première propriété de W découle de la seconde. Pour cela, il suffit de remarquer l'existence d'une B-immersion ouverte :

$$St_{\underline{a}}^{B'} \longrightarrow St_{\underline{b}}^B$$

avec $\underline{b}$ le $k+1$-uplet obtenu à partir de $\underline{a}$ en ajoutant la valeur p^m à la $k+1$-ème place. Le morphisme étant bien entendu celui qui envoie T_i sur T_i pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ et T_{k+1} sur V. On cherchera donc un voisinage W ayant la seconde propriété.

La question est évidement locale pour la topologie de Nisnévich (resp. Zariski) en $x \in X$. Quitte à remplacer X par un voisinage Nisnévich (resp. Zariski) de x, on peut supposer qu'il existe $k+1$ sections globales $t_1, \ldots, t_k$ et u de $\mathscr{O}_X$ vérifiant les conditions de la définition 3.3.33. On garde alors les notations de 3.3.33 et on notera D_i la branche d'équation $t_i = 0$.

Quitte à permuter les indices, on peut supposer que $v_p(a_1)$ est minimal parmi les $v_p(a_i)$. On se donne un couple $(m, v) \in \mathbb{N} \times \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ avec m maximal tel que $u = v^{p^m}$ et $m \leq v_p(a_1)$. Appelons a'_1 l'entier a_1/p^m. On notera O l'intersection des D_i. On montrera qu'un certain voisinage ouvert de $O[R, R^{-1}]$ dans $X[R, R^{-1}]$ est lisse au-dessus d'un $B[V, V^{-1}]$-schéma standard de l'énoncé. On notera dans la suite $X' = X[R, R^{-1}]$. On définit les sections $v', t'_1, \ldots, t'_k$ de $\Gamma(X', \mathscr{O}_{X'})$ par :

- $v' = v.R^{a'_1}$ et $t'_1 = R^{-1}.t_1$,
- $t'_i = t_i$ pour $i \in \{2, \ldots, k\}$.

de telle sorte qu'on a encore la relation $\pi = v'^{p^m}.\prod_{i=1}^k t_i'^{a_i}$ avec v' inversible. Remarquons également que le sous-schéma D'_i défini par l'équation $t'_i = 0$ est isomorphe à $D_i[R, R^{-1}]$ et est en particulier lisse. L'intersection des D'_i sera notée O' et est isomorphe à $O[R, R^{-1}]$.

Notons également B' le B-schéma $B[V, V^{-1}]$ muni de la section $V^{-p^m}.\pi$. On définit un B-morphisme de schémas $f : X' \longrightarrow B'$ par l'association $V \rightsquigarrow v'$. Le morphisme f est plat. En effet, il se factorise de la manière suivante :

$$X[R, R^{-1}] \xrightarrow{(1)} X[U, U^{-1}] \xrightarrow{(2)} B[V, V^{-1}]$$

le morphisme (1) envoie U sur $R^{a'_1}$ et le morphisme (2) envoie V sur $U.v$. Le morphisme (1) est clairement plat. Il suffit donc de prouver que (2) est plat. Mais ceci est clair, puisque en composant à gauche par l'automorphisme de $X[U, U^{-1}]$ qui consiste à envoyer U sur $U.v^{-1}$, on obtient simplement la projection sur le second facteur de $X \times_B (\mathbb{G}\mathrm{m}_B)$.

Considérons d'autre part le B'-schéma $V^{-p^m}.\pi$-standard $St_{\underline{a}}^{B'} = B'[T_1, \ldots, T_k]/(\prod_{i=1}^k T_i^{a_k} - V^{-p^m}.\pi)$. On définit le B'-morphisme de l'énoncé :

$$g : X' \longrightarrow St_{\underline{a}}^{B'}$$

en envoyant T_i sur t'_i. Il faut montrer que g est lisse au voisinage de O'. Remarquons d'abord que g est plat au voisinage de O'. Il suffit donc de prouver que le pull-back de g suivant l'inclusion de $O_{\underline{a}}^{B'} \subset St_{\underline{a}}^{B'}$ est lisse. Le pull-back en question s'identifie simplement à :

$$g_0 : O[R, R^{-1}] \longrightarrow B/(\pi)[V, V^{-1}]$$

qui consiste à envoyer V sur $R^{a'_1}.v$. Ce morphisme étant à son tour plat, on se ramène à prouver que ses fibres sont lisses. On ne restreint pas la généralité à remplacer $B/(\pi)$ par la clôture algébrique k d'un de ses points. Si s est un point fermé de

$\mathsf{Spec}(k[V,V^{-1}]) = (\mathbb{G}_m)_k$ correspondant à une section non nulle s de k, la fibre de g_0 en s est simplement le k-schéma :

$$(O \times_{B/(\pi)} k)[R,R^{-1}]/(R^{a'_1}.v - s) = O_k[R]/((R.s^{-1/a_1})^{a'_1} - v^{-1}) = O_k[v^{1/a'_1}]$$

On utilise le fait que dans k, la section s admet des racines quelconques. La lissité de g au voisinage de O' découlera donc de la lissité du k-schéma $O_k[v^{1/a'_1}]$. Écrivons $a'_1 = p^l.b$ avec $l = v_p(a'_1)$ (et b premier à p). Étant donné que l'extraction d'une racine b-ème d'une section inversible induit une revêtement étale de k-schéma, on se ramène à montrer que $O_k[v^{1/p^l}]$ est k-lisse. Ceci découle immédiatement de la troisième condition de la définition 3.3.33 affirmant que $O[v^{1/p^l}]$ est lisse sur $B/(\pi)$. □

Notons également la conséquence suivante de la résolution des singularités en caractéristique nulle :

Proposition 3.3.40. — *On suppose que B est un schéma d'égal caractéristique nulle. Soit X un B-schéma quasi-projectif. Il existe un éclatement $e : X' \longrightarrow X$ avec X' un B-schéma semi-stable. De plus, si X_η est un schéma régulier, on peut choisir le centre de l'éclatement dans le sous-schéma $X/(\pi)$.*

Démonstration. — En effet, en égal caractéristique zéro, la troisième condition de la définition 3.3.33 découle automatiquement des deux premières. Pour les deux premières, il suffit d'appliquer la deuxième partie de 2.1.166 avec le diviseur $X/(\pi)$. □

Remarque 3.3.41. — En caractéristique positive, même en admettant la résolution des singularités, la conclusion de la proposition 3.3.40 est fausse déjà pour les B-schémas finis. Le problème vient de la troisième condition de la définition 3.3.33.

Pour des résultats à « coefficients rationnels » le résultat suivant dû à De Jong remplace efficacement la proposition 3.3.40 :

Proposition 3.3.42. — *Supposons pour simplifier que $B/(\pi)$ est le spectre d'un corps. Soit X un B-schéma quasi-projectif. Il existe un carré commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "e"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

de schémas, vérifiant les propriétés suivantes :
- *e est une altération,*
- *B' est un schéma normal, quasi-fini et plat sur B avec $B'/(\pi)$ non vide,*
- *X' est un B'-schéma à réduction semi-stable de type $(1,\dots,1)$ en tout ses points (relativement à n'importe quel choix d'uniformisante π' de B').*

3.3.8. Application aux systèmes de spécialisation sur une base de dimension 1. — On suppose donné un système de spécialisation sp de H_1 vers H_2 au-dessus de :

$$\eta \xrightarrow{j} B \xleftarrow{i} \sigma$$

avec B un schéma régulier de dimension 1. On fixe $\pi \in \Gamma(\mathscr{O}_B)$ une section globale telle que :

- $B/(\pi)$ est non vide, régulier et de dimension 0.
- π est inversible sur η et nul sur σ.

En particulier, on dispose d'une factorisation :

$$\begin{tikzcd} \sigma \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "i"'] & B/(\pi) \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

Le but de cette sous-section est d'étendre les théorèmes 3.3.10, 3.3.4 et 3.3.6 aux B-schémas semi-stables généraux voire à tous les B-schémas sous certaines hypothèses. Nous utiliserons le lemme trivial suivant :

Lemme 3.3.43. — *Soit* $\mathsf{H} : \mathsf{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{TR}$ *un 2-foncteur homotopique stable. Soit* X *un* S*-schéma et* $A \in \mathsf{H}(X)$*. Notons* p *la projection de* $X \times \mathbb{G}_m$ *sur* X*. Le foncteur* p^* *est conservatif.*

Démonstration. — En effet si $s : X \longrightarrow X \times \mathbb{G}_m$ est la section unité on a $s^*p^* = \mathrm{id}$. □

On a la généralisation suivante des théorèmes 3.3.10 et 3.3.24 :

Théorème 3.3.44. – *Soient* $f : X \longrightarrow B$ *un* B*-schéma à* π*-réduction semi-stable et* D *une branche de* X_s *de multiplicité* m*. Appelons* D^0 *l'ouvert de* D *complémentaire de la réunion des traces des autres branches de* X*. On note* u *l'inclusion de* D *dans* X_s *et* v *l'inclusion de* D^0 *dans* D*. On suppose également l'une des deux conditions suivantes satisfaites :*

- *Toute branche irréductible rencontrant* D *est de multiplicité* m*,*
- H *est* $\mathbb{Q}$*-linéaire et séparé.*

Alors le 2-morphisme d'adjonction $1 \longrightarrow v_*v^*$ *évalué en* $u^*\mathsf{sp}_f f_\eta^*$ *:*

$$[u^*\mathsf{sp}_f f_\eta^*] \xrightarrow{\sim} v_*v^*[u^*\mathsf{sp}_f f_\eta^*]$$

est inversible.

Démonstration. — Montrons d'abord qu'il suffit de montrer le théorème pour f' : $X' = X \times \mathbb{G}_m \longrightarrow B$ et la branche $D' = D \times \mathbb{G}_m$. Notons p la projection de $Y \times \mathbb{G}_m$

sur Y pour un schéma Y quelconque. On a un carré commutatif de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} p^*[u^*\mathsf{sp}_f f_\eta^*] & \longrightarrow & p^*v_*v^*[u^*\mathsf{sp}_f f_\eta^*] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [u'^*\mathsf{sp}_{f'} f_\eta'^*] & \longrightarrow & v'_*v'^*[u'^*\mathsf{sp}_{f'} f_\eta'^*] \end{array}$$

Les flèches verticales sont des isomorphismes puisque p est lisse. Ainsi, si le 2-morphisme horizontal inférieur est un isomorphisme, il en est de même du 2-morphisme horizontal supérieur. On pourra alors conclure à l'aide du lemme 3.3.43.

Ceci dit, par la proposition 3.3.39 on sait qu'au voisinage de tout point de D', le B-schéma X' est lisse au-dessus d'un B-schéma standard. Lorsque H est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparé, ceci permet de conclure par le théorème 3.3.24.

Supposons que toutes les branches irréductibles qui rencontrent D sont de multiplicité m. Quitte à remplacer X par un voisinage de D, on peut supposer que X est semi-stable de type $\underline{m}_k$ en tout ses point (k pouvant varier d'un point à l'autre). On sait par la proposition 3.3.39 que X' est localement lisse au-dessus d'un $B' = B[V, V^{-1}]$-schéma $V^{-p^m}.\pi$-standard $St^{B'}_{\underline{n}_k}$. On déduit alors le résultat en appliquant le théorème 3.3.10 à $\mathsf{sp}_{|B'}$. □

On généralise de la même manière le théorème 3.3.4 :

Théorème 3.3.45. – *Soit* $\mathsf{sp} \longrightarrow \mathsf{sp}'$ *un morphisme de systèmes de spécialisation au-dessus de* B. *Soient* A *un objet de* $\mathsf{H}(\eta)$ *et* $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. *On suppose pour tout entiers naturels* n *et* m *inférieurs à* N *avec* m *une puissance de* p, *les morphismes :*

$$\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{b_n}(b_n)^*_\eta A \quad \text{et} \quad \mathsf{sp}_{b_n^m}(b_n^m)^*_\eta A \longrightarrow \mathsf{sp}'_{b_n^m}(b_n^m)^*_\eta A$$

sont des isomorphismes.

Soit $f : X \longrightarrow B$ *un* B*-schéma semi-stable tel que localement pour la topologie de Nisnévich toute branche lisse de* X *est de multiplicité inférieure à* N. *Alors le morphisme :* $\mathsf{sp}_f f_\eta^* A \longrightarrow \mathsf{sp}'_f f_\eta^* A$ *est aussi un isomorphisme.*

Démonstration. – On se ramène immédiatement à démontrer le théorème pour le schéma $X' = X[R, R^{-1}]$. Par la proposition 3.3.39, ce schéma est localement lisse au-dessus de B-schémas π-standard de type $\underline{b}$ avec $b_i \leq N$. On conclut à l'aide de 3.3.4. □

En égale caractéristique nulle, on déduit le résultat suivant :

Théorème 3.3.46. – *On suppose que* B *est d'égal caractéristique nulle et que* η *est un ouvert de* B. *On suppose donnée une classe* $\Lambda_1 \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}_1(\eta))$ *quasi-stable par twist de Tate. Soit* $\mathsf{sp} \longrightarrow \mathsf{sp}'$ *un morphisme de systèmes de spécialisation au-dessus de* B.

On suppose que pour tout $A \in \Lambda_1$ et $n \in \mathbb{N}$, les morphismes :

$$\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^*_\eta A \xrightarrow{\sim} \mathsf{sp}'_{b_n}(b_n)^*_\eta A \quad \text{et} \quad \mathsf{sp}_{b^1_n}(b^1_n)^*_\eta A \xrightarrow{\sim} \mathsf{sp}'_{b^1_n}(b^1_n)^*_\eta A$$

sont des isomorphismes. Alors pour tout B-schéma quasi-projectif $f : X \longrightarrow B$, et tout $M \in \mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_{1,\Lambda_1}(X_\eta)$ le morphisme :

$$\mathsf{sp}_f(M) \xrightarrow{\sim} \mathsf{sp}'_f(M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Il suffit bien sûr de traiter le cas où M est dans un système de générateurs de la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directes $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_{1,\Lambda_1}(X_\eta)$. Cette catégorie est engendrée par les objets de la forme $g_{\eta *}A_{X'_\eta}(n)$ avec :

- $g : X' \longrightarrow X$ un morphisme projectif.
- X' un B-schéma régulier à réduction semi-stable.
- $A \in \Lambda$ et n un entier naturel.

Ceci découle en effet de la proposition 2.2.27. Pour s'en convaincre, on peut poser $\mathsf{H} : \mathsf{Sch}/B \longrightarrow \mathfrak{TM}$ le 2-foncteur qui à X/B associe $\mathsf{H}(X) = \mathsf{H}_1(X_\eta)$. On vérifie, en utilisant le fait que j est une immersion ouverte que $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_{\Lambda_1}(X) = \mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_{1,\Lambda_1}(X_\eta)$ pour tout B-schéma X. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.2.27 à X muni du sous-schéma $T = X/(\pi)$ et d'utiliser le fait qu'en caractéristique nulle la troisième condition de la définition 3.3.33 est vide.

Ceci dit, il est alors facile de prouver le théorème. On fixe un des générateurs $g_{\eta *}A_{X'_\eta}(n)$. On a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sp}_f g_{\eta *}A_{X'}(n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{sp}'_f g_{\eta *}A_{X'}(n) \arrow[d] \\
g_{\sigma *}\mathsf{sp}_{f\circ g}A_{X'}(n) \arrow[r] & g_{\sigma *}\mathsf{sp}'_{f\circ g}A_{X'}(n)
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont des isomorphismes car g est projectif. On voit donc qu'il suffit de prouver que la flèche : $\mathsf{sp}_{f\circ g}A_{X'}(n) \longrightarrow \mathsf{sp}'_{f\circ g}A_{X'}(n)$ est un isomorphisme. Ceci découle du théorème 3.3.45. □

Lorsque B n'est pas de caractéristique zéro, la preuve du théorème précédent ne s'adapte pas même en supposant la résolution des singularités. Le problème vient des branches ayant des multiplicités divisibles par p. Ceci suggère une version à coefficients rationnels du théorème précédent. En effet on a :

Théorème 3.3.47. — *On suppose que η est un ouvert de B et que H_1 est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparé. On suppose donnée une classe $\Lambda_1 \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}_1(\eta))$ quasi-stable par twist de Tate. Soit $\mathsf{sp} \longrightarrow \mathsf{sp}'$ un morphisme de systèmes de spécialisation au-dessus de B. On*

suppose que pour tout $A \in \Lambda_1$ et tout B-schéma B' fini plat et régulier, le morphisme :

$$\mathsf{sp}_{B'}(A_{B'_\eta}) \longrightarrow \mathsf{sp}'_{B'}(A_{B'_\eta})$$

est un isomorphisme. Alors pour tout B-schéma quasi-projectif $f : X \longrightarrow B$, et tout $M \in \mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_{1,\Lambda_1}(X_\eta)$ le morphisme :

$$\mathsf{sp}_f(M) \longrightarrow \mathsf{sp}'_f(M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La sous-catégorie triangulée stable par facteurs directes $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X)$ est engendrée par les objets de la forme $g_{\eta *}A_{X'_\eta}(n)$ avec :

- $g : X' \longrightarrow X$ un morphisme projectif,
- X' un B'-schéma régulier à réduction semi-stable de type $(1, \dots, 1)$ avec B'/B fini, normal et plat.
- $A \in \Lambda$ et n un entier naturel.

Pour s'en convaincre, on peut utiliser la même astuce que dans la preuve de 3.3.46, consistant à introduire le 2-foncteur H défini sur les B-schémas par $\mathsf{H}(X) = \mathsf{H}_1(X_\eta)$. Il suffit ensuite de modifier légèrement la preuve du cas respectif de la proposition 2.2.27. La modification consiste essentiellement à prendre $e : \bar{X} \longrightarrow X$ avec en plus $\bar{X}$ à réduction semi-stable de type $(1, \dots, 1)$ au-dessus d'un B-schéma B' fini, normal et plat. Ceci étant possible par le théorème de De Jong. Pour le reste de la démonstration, on raisonne exactement comme pour le théorème 3.3.46. □

On a également des généralisations du théorème 3.3.6. On suppose donnée pour tout σ-schéma T une sous-catégorie $\mathsf{H}_2(T)' \subset \mathsf{H}_2(T)$ vérifiant l'hypothèse 3.3.5 et stable par facteurs directs. On a :

Théorème 3.3.48. — *Soit sp un système de spécialisation au-dessus de B de H_1 vers h_2. Soit A un objet de $\mathsf{H}_1(\eta)$ et $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On suppose que les objets $\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^*_\eta A$ et $\mathsf{sp}_{b_n^m}(b_n^m)^*_\eta A$ sont dans $\mathsf{H}_2(-)'$ pour tout entiers naturels n et m plus petits que N avec m une puissance de p.*

Soit $f : X \longrightarrow B$ un B-schéma globalement à π-réduction semi-stable tel que localement pour la topologie Nisnévich la multiplicité de chaque branche lisse de X est plus petite que N. Alors l'objet $\mathsf{sp}_f f^*_\eta A$ est dans $\mathsf{H}_2(X_\sigma)'$.

Démonstration. — Notons $X'' = X \times_B \mathbb{P}^1_B$. Le schéma schéma X'' peut-être recouvert par des $X' = X \times_B \mathbb{G}\mathrm{m}_B$. On sait que X est globalement à réduction semi-stable. La proposition 3.3.39 nous dit alors que le B-schéma X' est localement pour la topologie de Zariski lisse au-dessus d'un schéma standard de type $\underline{b}$ avec $b_i \leq N$. Mais la propriété d'appartenir à $\mathsf{H}_2(-)'$ est locale pour la topologie de Zariski (voir le lemme 3.3.32). On déduit que la conclusion du théorème est vraie pour le B-schéma X''.

Il s'agit donc de passer de X'' à X. Notons $p : X'' \longrightarrow X$ la projection sur le premier facteur. On sait que l'objet $\mathsf{sp}_{f\circ p}(f\circ p)^*_\eta A$ est dans $\mathsf{H}_2(-)'$. Par la stabilité de $\mathsf{H}_2(-)'$ par image directe cohomologique, on déduit que l'objet $p_{\sigma *}\mathsf{sp}_{f\circ p}(f\circ p)^*_\eta A$ est dans $\mathsf{H}_2(-)'$. Comme p est projectif, on déduit la chaîne d'isomorphismes :

$$p_{\sigma *}\mathsf{sp}_{f\circ p}(f\circ p)^*_\eta A \simeq \mathsf{sp}_f p_{\eta *} p^*_\eta f^*_\eta A \simeq \mathsf{sp}_f f^*_\eta A \oplus \mathsf{sp}_f f^*_\eta A(-1)[-2]$$

On conclut en invoquant la stabilité de $\mathsf{H}_2(-)'$ par passage aux facteurs directs. □

On notera deux corollaires en égale caractéristique nulle :

Corollaire 3.3.49. — *On suppose que B est d'égale caractéristique nulle et que η est un ouvert de B. En plus de l'hypothèse 3.3.5 et la stabilité par facteurs directs, on supposera que les $h_2(-)'$ sont des sous-catégories triangulées. Soit $\Lambda_1 \subset \mathsf{H}_1(\eta)$ une classe quasi-pure. On suppose finalement que les objets $\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^*_\eta A$ et $\mathsf{sp}_{b^1_n}(b^1_n)^*_\eta A$ sont dans $\mathsf{H}_2(-)'$ pour tout $A \in \Lambda_1$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout B-schémas quasi-projectif $f : X \longrightarrow B$ et tout objet M de $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_{1,\Lambda_1}(X_\eta)$, l'objet $\mathsf{sp}_f(M)$ est dans $\mathsf{H}_2(X_\sigma)'$.*

Démonstration. — Étant donné que $\mathsf{H}_2(X_\sigma)$ est une sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs, il suffira de vérifier l'assertion pour M variant dans un système de générateurs de la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directes $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_{1,\Lambda_1}(X_\eta)$. On peut donc supposer M de la forme $g_{\eta *}A_{X'_\eta}(n)$ avec :

- $g : X' \longrightarrow X$ un morphisme projectif.
- X' un B-schéma régulier globalement à réduction semi-stable[5],
- $A \in \Lambda$ et n un entier naturel.

Comme g est projectif, on dispose d'un isomorphisme :

$$\mathsf{sp}_f g_{\eta *}A_{X'_\eta}(n) \simeq g_{\sigma *}\mathsf{sp}_{f\circ g}(f\circ g)^*_\eta A(n)$$

La stabilité des $\mathsf{H}_2(-)'$ par images directes cohomologiques et twist de Tate, nous ramène à montrer que $\mathsf{sp}_{g\circ f}(g\circ f)^*_\eta A$ est dans $\mathsf{H}_2(X'_\sigma)'$. Ceci découle du théorème 3.3.48 et du fait que X' est à réduction semi-stable. □

Pour le second corollaire, on utilisera plutôt la variante duale de 3.3.48. Ainsi, on supposera donnée pour tout σ-schéma quasi-projectif T une sous-catégorie $\mathsf{H}_2(T)'' \subset \mathsf{H}_2(T)$ vérifiant l'hypothèse 3.3.7. On a :

Corollaire 3.3.50. — *Soit sp un système de spécialisation au-dessus de B de H_1 vers H_2 et $\mathscr{G}_1$ un ensemble d'objets $\mathsf{H}_1(\eta)$. On suppose les conditions suivantes satisfaites :*

- *B est d'égal caractéristique nulle et η est un ouvert de B.*
- *Le 2-foncteur H_2 admet des petites sommes et en plus de l'hypothèse 3.3.7, les sous-catégories $\mathsf{H}_2(-)''$ sont stables par petites sommes et par passage aux facteurs directes,*

[5] En effet la résolution des singularités utilisée dans la preuve de 2.2.27, fournit des B-schémas globalement à réduction semi-stable.

- *Le 2-foncteur* H_1 *et l'ensemble* $\mathscr{G}_1$ *vérifient l'hypothèse 2.2.58. De plus, les foncteur* $\mathsf{sp}_?$ *commutent aux petites sommes,*
- *L'ensemble* $\mathscr{G}_1$ *est faiblement* ${}^p t$*-pure au sens de la définition 2.2.67.*

Supposons que les objets $\mathsf{sp}_{b_n}(b_n)^*_\eta A$ *et* $\mathsf{sp}_{b^1_n}(b^1_n)^*_\eta A$ *sont dans* $\mathsf{H}_2(-)'$ *pour tous les entiers naturels* n*. Alors pour tout* B*-schéma quasi-projectif* $f : X \longrightarrow B$ *le foncteur* sp_f *envoie la sous-catégorie* ${}^p(\mathsf{H}_1)_{\geq 0}(X_\eta)$ *dans* $\mathsf{H}_2(X_\sigma)''$*.*

Démonstration. — La sous-catégorie $\mathsf{H}_2(X_\sigma)''$ étant suspendue et stable par petite sommes il suffira de prouver le corollaire pour un ensemble de générateurs de la sous-catégorie suspendue avec petites sommes ${}^p(\mathsf{H}_1)_{\geq 0}(X_\eta)$. Par la proposition 2.2.69, un tel ensemble est donné par les objets de la forme $g_{\eta!}g^!_\eta f^!_\eta A(n)[n]$ avec :

- $g : X' \longrightarrow X$ un morphisme projectif avec X' un B-schéma globalement à réduction semi-stable,
- $A \in \mathscr{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Comme g est projectif, on a un isomorphisme :

$$\mathsf{sp}_f g_{\eta!} g^!_\eta f^!_\eta A(n)[n] \simeq g_{\sigma!}\mathsf{sp}_{f\circ g}(f \circ g)^!_\eta A(n)[n]$$

La stabilité des $\mathsf{H}_2(-)''$ par les opérations images directes à supports compacts, nous ramène à prouver que $\mathsf{sp}_{f\circ g}(f \circ g)^!_\eta A$ est dans $\mathsf{H}_2(X'_\sigma)''$. Ceci découle du fait que X' est globalement à réduction semi-stable et la version duale de 3.3.48. Le corollaire est prouvé. □

Remarque 3.3.51. — Le résultat précédent est particulièrement intéressant lorsque les catégories $\mathsf{H}_2(-)''$ sont les catégories d'objets ${}^p t$-positifs ${}^p(\mathsf{H}_2)_{\geq 0}(-)$ de la t-structure perverse engendrée par un ensemble $\mathscr{G}_2$. Le corollaire 3.3.50 fournit alors un critère simple de ${}^p t$-positivité des foncteur sp_f.

3.4. Le système de spécialisation Υ

Soit S un schéma de base. On se donne un dérivateur algébrique homotopique et stable :

$$\mathbb{H} : \mathsf{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

On notera H le 2-foncteur homotopique stable donné par $\mathsf{H}(X) = \mathbb{H}(X, \mathbf{e})$ pour tout S-schémas quasi-projectif X.

Dans cette section, on va construire un système de spécialisation Υ de base $\mathbb{A}^1_S$ sur H. Ce système de spécialisation constitue une première approximation de la théorie des cycles évanescents. Il présente même quelques avantages sur cette dernière du moins lorsqu'on travaille avec des coefficients rationnels (et si le schéma de base S est un corps).

3.4.1. Le schéma cosimplicial $(\mathscr{A}, \mathbf{\Delta})$. — Le système de spécialisation Υ s'obtient à partir du système de spécialisation canonique χ par application de la construction 3.2.3 à un certain diagramme de $\mathbb{G}_m$-schémas bien choisi. Ce paragraphe est consacré à l'introduction dudit diagramme.

Rappelons que $\mathbf{\Delta}$ désigne la catégorie des ordinaux finis. Les objets de $\mathbf{\Delta}$ sont les catégories directes :

$$\underline{\mathbf{n}} = \{0 \to 1 \to \cdots \to n\}$$

Les morphismes de $\mathbf{\Delta}$ sont les foncteurs. Si $\mathcal{C}$ est un catégorie, on note $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{C}$ la catégorie des foncteurs covariants : $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$. Les objets de $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{C}$ sont appelés les objets simpliciaux de $\mathcal{C}$. De même, on note $\mathbf{\Delta}\mathcal{C}$ la catégorie des foncteurs covariants : $\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}$. Les objets de $\mathbf{\Delta}\mathcal{C}$ sont appelés les objets cosimpliciaux de $\mathcal{C}$. Ainsi, un schéma cosimplicial est un diagramme de schémas dont la catégorie d'indices est $\mathbf{\Delta}$.

La catégorie $\mathbf{\Delta}$ admet une présentation explicite en termes de générateurs et relations. En effet, elle est engendrée par deux types de flèches d^i et s^j :

- Pour $0 \leq i \leq n+1$, le foncteur $d^i : \underline{\mathbf{n}} \longmapsto \underline{\mathbf{n+1}}$ est caractérisé par la propriété d'être injectif sur les objets et d'éviter l'objet i de $\underline{\mathbf{n+1}}$.
- Pour $0 \leq j \leq n-1$, le foncteur $s^j : \underline{\mathbf{n}} \longmapsto \underline{\mathbf{n-1}}$ est caractérisé par la propriété d'être surjectif sur les objets et de confondre les objets j et $j+1$ de $\underline{\mathbf{n}}$.

Ainsi, un objet simplicial ou cosimplicial est déterminé par l'action des d^i et s^j. La construction suivante est bien connue :

Lemme 3.4.1

A- *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des produits directes finis. Supposons donné un diagramme dans $\mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{24}$$

Il existe un objet cosimplicial $U\tilde{\times}_B V : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}$ défini par :

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $U\tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{n}}) = U \times B \times \cdots \times B \times V$ (le nombre de facteurs B étant n),*
2. *Fixons un entier $n \in \mathbb{N}$. Soient X un objet de $\mathcal{C}$, $u \in \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(X, U)$, $v \in \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(X, V)$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$ des X-points à valeurs dans U, V et B respectivement. L'action des d^i et s^j sur les foncteurs de points est donnée par les formules suivantes :*
   (a) *$d^0 : \underline{\mathbf{n}} \longmapsto \underline{\mathbf{n+1}}$ agit par : $d^0(u, b_1, \ldots, b_n, v) = (u, f(u), b_1, \ldots, b_n, v)$,*
   (b) *$d^i : \underline{\mathbf{n}} \longmapsto \underline{\mathbf{n+1}}$ agit par : $d^i(u, b_1, \ldots, b_n, v) = (u, b_1, \ldots, b_i, b_i, \ldots, b_n, v)$ pour $1 \leq i \leq n$,*
   (c) *$d^{n+1} : \underline{\mathbf{n}} \longmapsto \underline{\mathbf{n+1}}$ agit par : $d^{n+1}(u, b_1, \ldots, b_n, v) = (u, , b_1, \ldots, b_n, g(v), v)$,*

(d) $s^j : \underline{\mathbf{n}} \longmapsto \underline{\mathbf{n-1}}$ *agit par :* $s^j(u, b_1, \ldots, b_n, v) = (u, b_1, \ldots, \widehat{b_{j+1}}, \ldots, b_n, v)$ *pour* $0 \leq j \leq n-1$.

De plus, cette construction s'étend en un foncteur : $\downarrow\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{\Delta}\mathcal{C}$ *de la catégorie des diagrammes de type* (24) *dans* $\mathcal{C}$ *dans celle est objets cosimpliciaux de* $\mathcal{C}$.

B- *Gardons les notations ci-dessus. Supposons en plus que la flèche* f *est inversible. Le morphisme d'objets cosimpliciaux* $pr_2 : U\tilde{\times}_B V \longrightarrow V$ *est une équivalence d'homotopie (cosimpliciale).*

Démonstration. — La vérification du fait que les formules du **A** définissent bien un objet cosimplicial dans $\mathcal{C}$ est classique. Le lecteur pourra consulter [**BK72**]. On démontre uniquement la partie **B**. L'inverse à homotopie près de $pr_2 : U\tilde{\times}_B V \longrightarrow V$ est donné par un morphisme $s : V \longrightarrow U\tilde{\times}_B V$ défini au niveau de $\underline{\mathbf{n}}$ par :

$$s(v) = (f^{-1}g(v), g(v), \ldots, g(v), v)$$

Pour tout X-point v de V. Il est en effet clair que $pr_2 \circ s$ est l'identité. Montrons que $s \circ pr_2$ est cohomotope à l'identité de $U\tilde{\times}_B V$. En termes explicites, il s'agit de définir pour toute flèche $l : \underline{\mathbf{n}} \longmapsto \underline{\mathbf{1}}$ un morphisme :

$$h_l : U\tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{n}}) \longrightarrow U\tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{n}})$$

tel que :

- $h_0 = s \circ pr_2(\underline{\mathbf{n}})$ et $h_1 = \mathrm{id}_{U\tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{n}})}$ (où l'on a noté 0 et 1 pour désigner les applications constantes vers $\underline{\mathbf{1}}$ de valeurs respectivement 0 et 1).
- Pour toute suite : $\underline{\mathbf{m}} \xmapsto{a} \underline{\mathbf{n}} \xmapsto{l} \underline{\mathbf{1}}$, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} U\tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{m}}) \arrow[r, "h_{l\circ a}"] \arrow[d, "a"'] & U\tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{m}}) \arrow[d, "a"] \\ U\tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{n}}) \arrow[r, "h_l"] & U\tilde{\times}_B V(\underline{\mathbf{n}}) \end{tikzcd}$$

On définit notre homotopie sur les X-points par :

- Pour l'application constante $0 : \underline{\mathbf{n}} \longmapsto \underline{\mathbf{1}}$, on prendra $h_0 : (u, b_1, \ldots, b_n, v) \longmapsto (f^{-1}g(v), g(v), \ldots, g(v), v)$.
- Pour $1 \leq i \leq n$, notons $l_i : \underline{\mathbf{n}} \longmapsto \underline{\mathbf{1}}$ l'application croissante tel que $l_i(i-1) = 0$ et $l_i(i) = 1$. On prendra $h_{l_i} : (u, b_1, \ldots, b_n, v) \longmapsto (f^{-1}(b_i), b_i, \ldots, b_i, b_{i+1}, \ldots, b_n, v)$,
- Pour l'application constante $1 : \underline{\mathbf{n}} \longmapsto \underline{\mathbf{1}}$, on prendra $h_1 : (u, b_1, \ldots, b_n, v) \longmapsto (u, b_1, \ldots, b_n, v)$,

Il est facile de vérifier que ces données définissent bien une cohomotopie entre $s \circ pr_2$ et $\mathrm{id}_{U\tilde{\times}_B V}$. □

Remarque 3.4.2. — Comme pour le produit fibré habituel, on dispose de deux projections dans $\mathbf{\Delta}\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} U\tilde{\times}_B V \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & V \\ U & \end{tikzcd}$$

avec bien entendu, les objets U et V considérés comme des objets cosimpliciaux constants. Par contre, le carré :

$$\begin{tikzcd} U\tilde{\times}_B V \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & V \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

n'est pas commutatif en général.

Remarque 3.4.3. — L'objet cosimplicial $U\tilde{\times}_B V$ peut-être considéré comme le bon modèle du point de vue homotopique de l'espace des lacets de B ayant la première extrémité dans U et la deuxième dans V.

Définition 3.4.4. — *On définit le S-schéma cosimplicial $\mathscr{A}_S$, en appliquant le lemme 3.4.1 au diagramme de S-schémas suivant :*

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "1"] \\ \mathbb{G}m_S \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{G}m_S \end{tikzcd}$$

Ainsi on a : $\mathscr{A}_S(\underline{\mathbf{n}}) = (\mathbb{G}m_S \tilde{\times}_{\mathbb{G}m_S} S)(\underline{\mathbf{n}}) = (\mathbb{G}m)_S^{n+1}$.

Le S-schéma cosimplicial $\mathscr{A}_S$ sera des fois considéré comme un diagramme de S-schémas indicé par $\mathbf{\Delta}$. Il sera alors noté $(\mathscr{A}_S, \mathbf{\Delta})$. La seconde partie du lemme 3.4.1, nous dit que :

Corollaire 3.4.5. — *Le morphisme d'objets cosimpliciaux :*

$$pr_2 : \mathscr{A}_S = \mathbb{G}m_S \tilde{\times}_{\mathbb{G}m_S} S \longrightarrow S$$

est une équivalence d'homotopie cosimpliciale.

Le corollaire 3.4.5 dit que du point de vue homotopique, l'espace cosimplicial $(\mathcal{A}, \mathbf{\Delta})$ est contractile. Cet espace ne devient intéressant que lorsque que l'on considère la projection sur le premier facteur :

Définition 3.4.6. — *La projection sur le premier facteur* $pr_1 : \mathbb{G}m_S \tilde{\times}_{\mathbb{G}m_S} S \longrightarrow \mathbb{G}m_S$ *induit un morphisme de diagrammes de S-schémas :*

$$\theta : (\mathscr{A}_S, \mathbf{\Delta}) \longrightarrow (\mathbb{G}m_S, \mathbf{\Delta})$$

Le 1-morphisme θ sera appelé la classe fondamentale motivique.

Remarque 3.4.7. — Pour un topologue, l'espace cosimplicial $\mathbb{G}_{m_S} \tilde{\times}_{\mathbb{G}_{m_S}} S$ est un modèle pour l'espace des « chemins » sur $\mathbb{G}_{m_S}$ dont la première extrémité est libre et la seconde égale à la section unité. Ceci donne une explication informelle du fait que $\mathscr{A}_S$ est cosimplicialement contractile. De plus, la classe fondamentale θ joue le rôle du morphisme « évaluation de la première extrémité d'un chemin ». Ceci fait de $\mathscr{A}_S$ une sorte de revêtement universel de $\mathbb{G}_m$.

Cette interprétation, qui nous a été expliquée par Markus Spitzweck, est venue après notre construction des foncteurs cycles proches qui à la base était inspirée par des travaux de Rapoport-Zink. Son intérêt, est de donner une justification topologique à notre définition des foncteurs Υ.

3.4.2. Définition de Υ. Normalisation. — Rappelons qu'on s'est donné un dérivateur algébrique homotopique et stable $\mathbb{H} : \mathsf{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{TR}$. Cette donnée sera utilisée dans cette section et la suivante pour construire des systèmes de spécialisation dans le 2-foncteur homotopique stable $\mathsf{H}(-) = \mathbb{H}(-, \mathbf{e})$. Ces systèmes de spécialisation seront définis au-dessus de la base $(\mathbb{A}^1_S, j, i)$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_{m_S} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "q"'] & \mathbb{A}^1_S \arrow[d, "p"] & S \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, equal] \\ & S & \end{tikzcd} \tag{25}$$

Ceci ne constitue pas une vraie restriction, puisque chaque fois qu'on se donne un S-schéma quasi-projectif T muni d'une section $\pi \in \Gamma(T, \mathscr{O}_T)$, on en déduira des systèmes de spécialisation au-dessus de T par restriction suivant le morphisme $T \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$ qui envoie l'indéterminée sur π. Ainsi, nos systèmes de spécialisation se définissent au-dessus des bases très générales. Ceci dit, la plupart des résultats importants seront prouvés sous l'hypothèse que S est le spectre d'un corps de caractéristique nulle. Dans la suite, il nous arrivera d'adopter les notations suivantes :

$$B = \mathbb{A}^1_S, \qquad \eta = \mathbb{G}_{m_S}, \qquad \sigma = i(S) \qquad \text{et} \qquad \eta \xrightarrow{j} B \xleftarrow{i} \sigma$$

Ceci aura l'avantage d'alléger les notations et de faciliter la traduction des résultats établis dans les sections précédentes.

Notre point de départ, sera le système de spécialisation canonique χ dans $\mathbb{H}$:

Définition 3.4.8. — *Avec les notations de la définition 3.2.3, on appellera Υ le système de spécialisation $\mathscr{A}_S \bullet \chi$ où $\mathscr{A}_S$ est vu comme un diagramme de $\mathbb{G}_{m_S}$-schémas* via *la classe fondamentale $(\theta, p_{\mathbf{\Delta}})$: $(\mathscr{A}_S, \mathbf{\Delta}) \longrightarrow (\mathbb{G}_{m_S}, \mathbf{e})$. Les foncteurs Υ_f seront appelés les foncteurs cycles proches unipotents.*

Rappelons que pour un B-schéma $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$, on a noté θ_f le pull-back de θ suivant f_η. Ainsi on a :

$$\Upsilon_f = (p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}\chi_{(f,p_{\mathbf{\Delta}})}(\theta_f)_*(\theta_f, p_{\mathbf{\Delta}})^*$$

Remarquons que $\mathscr{A}_S(\mathbf{e}) = \mathbb{G}\mathrm{m}_S$ et que $\theta(\mathbf{e})$ est l'identité. Par la définition 3.2.13, le foncteur $\underline{\mathbf{0}} : \mathbf{e} \longrightarrow \mathbf{\Delta}$ induit un morphisme de systèmes de spécialisation $\chi \longrightarrow \Upsilon$. Rappelons qu'au niveau de f, ce morphisme est donné par la composée :

$$\begin{aligned}\chi_f &\xrightarrow{\sim} \chi_f\underline{\mathbf{0}}^*(\theta_f, p_{\mathbf{\Delta}})^* \xrightarrow{\sim} \chi_f\underline{\mathbf{0}}^*(\theta_f)_*(\theta_f, p_{\mathbf{\Delta}})^* \\ &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathbf{0}}^*\chi_{(f,p_{\mathbf{\Delta}})}(\theta_f)_*(\theta_f, p_{\mathbf{\Delta}})^* \longrightarrow (p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}\chi_{(f,p_{\mathbf{\Delta}})}(\theta_f)_*(\theta_f, p_{\mathbf{\Delta}})^*\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera $e_n : \mathbb{A}^1_S \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$ le morphisme élévation à la puissance n-ème. Remarquons que e_n est isomorphe au B-schéma $b_n : B_n \longrightarrow B$ (voir la définition 3.3.2). Le résultat suivant est à la base de toutes les propriétés spéciales aux systèmes de spécialisation Υ et Ψ (voir la section suivante).

Proposition 3.4.9

1- *Avec les notations du diagramme (25), la composée des 2-morphismes suivants :*

$$1 \xrightarrow{\sim} i^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{\mathrm{id}}q^* \longrightarrow \Upsilon_{\mathrm{id}}q^*$$

est un 2-isomorphisme.

2- *Supposons que le 2-foncteur* H *est* $\mathbb{Q}$*-linéaire et séparé. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^\times$, *la composée des 2-morphismes suivants :*

$$1 \longrightarrow i^*(e_n)^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*(e_n)^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{e_n}(e_n)^*_\eta q^* \longrightarrow \Upsilon_{e_n}(e_n)^*_\eta q^*$$

est un 2-isomorphisme.

Pour prouver cette proposition, on aura besoin de quelques préliminaires. Soit $(\pi, p_{\mathcal{I}}) : (\mathscr{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow (\mathbb{G}\mathrm{m}_S, \mathbf{e})$ un morphisme de diagrammes de S-schémas quasi-projectifs. On suppose donné un objet $o \in \mathcal{I}$ tel que $\pi(o) : \mathscr{F}(o) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{m}_S$ est un isomorphisme. Ceci permet de définir un morphisme : $\chi \longrightarrow \mathscr{F} \bullet \chi$ de systèmes de spécialisation. On définit d'autre part une transformation naturelle $q_* \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}$ par la composée :

$$q_* \xrightarrow{\sim} p_*j_* \longrightarrow p_*i_*i^*j_* \xrightarrow{\sim} i^*j_* = \chi_{\mathrm{id}}$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
i^*p^* & \longrightarrow & i^*j_*j^*p^* & \longrightarrow & \chi_{\mathrm{id}}q^* & \overset{\sim}{\longleftarrow} & o^*\chi_{(\mathrm{id},p_{\mathcal{J}})}(\pi)_*(\pi,p_{\mathcal{J}})^*q^* & \longrightarrow & (p_{\mathcal{J}})_{\#}\chi_{(\mathrm{id},p_{\mathcal{J}})}(\pi)_*(\pi,p_{\mathcal{J}})^*q^* \\
\uparrow & & (1) & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
1 & & \longrightarrow & & q_*q^* & \overset{\sim}{\longleftarrow} & o^*(q,\mathrm{id}_{\mathcal{J}})_*(\pi)_*(\pi,p_{\mathcal{J}})^*q^* & \longrightarrow & (p_{\mathcal{J}})_{\#}(q,\mathrm{id}_{\mathcal{J}})_*(\pi)_*(\pi,p_{\mathcal{J}})^*q^* \\
 & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & & & o^*(q\circ\pi)_*(q\circ\pi)^*(p_{\mathcal{J}})^* & \longrightarrow & (p_{\mathcal{J}})_{\#}(q\circ\pi)_*(q\circ\pi)^*(p_{\mathcal{J}})^* \\
 & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & & & o^*(p_{\mathcal{J}})^* & \longrightarrow & (p_{\mathcal{J}})_{\#}(p_{\mathcal{J}})^*
\end{array}$$

(avec une flèche courbe $1 \longrightarrow o^*(p_{\mathcal{J}})^*$)

Ce diagramme est commutatif. En effet, tous ses sous-diagrammes, à part (1), sont trivialement commutatifs. La commutation du sous diagramme (1) est laissée en exercice. On a ainsi le lemme suivant :

Lemme 3.4.10. — *Pour que la composée :*

$$1 \longrightarrow i^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*p^* \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}q^* \longrightarrow (\mathscr{F}\bullet\chi)_{\mathrm{id}}q^*$$

soit un 2-isomorphisme, il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

1. *Le 2-morphisme de counité :* $(p_{\mathcal{J}})_{\#}(p_{\mathcal{J}})^* \longrightarrow 1$ *est inversible,*
2. *Le 2-morphisme d'unité :* $(p_{\mathcal{J}})^* \longrightarrow (q\circ\pi)_*(q\circ\pi)^*(p_{\mathcal{J}})^*$ *devient un isomorphisme après application de* $(p_{\mathcal{J}})_{\#}$,
3. *Pour tout* $a \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$, *le morphisme* $\pi(a) : \mathscr{F}(a) \longrightarrow \mathbb{G}_{m_S}$ *est isomorphe au pull-back d'un S-schéma* via *la projection* $q : \mathbb{G}_{m_S} \longrightarrow S$.

Démonstration. — En utilisant le diagramme commutatif ci-dessus, on se ramène à montrer que le composée :

$$\begin{aligned}1 \simeq o^*(p_{\mathcal{J}})^* \longrightarrow (p_{\mathcal{J}})_{\#}(p_{\mathcal{J}})^* \longrightarrow (p_{\mathcal{J}})_{\#}(q\pi)_*(q\pi)^*(p_{\mathcal{J}})^* \simeq (p_{\mathcal{J}})_{\#}(q,\mathrm{id}_{\mathcal{J}})_*(\pi,p_{\mathcal{J}})^*q^* \\ \longrightarrow (p_{\mathcal{J}})_{\#}\chi_{(\mathrm{id},p_{\mathcal{J}})}(\pi,p_{\mathcal{J}})^*q^*\end{aligned}$$

est inversible. Il suffit donc de prouver que les trois flèches suivantes sont inversibles :

1. Le 2-morphisme $1 \simeq o^*(p_{\mathcal{J}})^* \longrightarrow (p_{\mathcal{J}})_{\#}(p_{\mathcal{J}})^*$,
2. Le 2-morphisme $(p_{\mathcal{J}})_{\#}(p_{\mathcal{J}})^* \longrightarrow (p_{\mathcal{J}})_{\#}(q\pi)_*(q\pi)^*(p_{\mathcal{J}})^*$,
3. Le 2-morphisme $(q,\mathrm{id}_{\mathcal{J}})_*(\pi)_*(\pi,p_{\mathcal{J}})^*q^* \longrightarrow \chi_{(\mathrm{id},p_{\mathcal{J}})}(\pi)_*(\pi,p_{\mathcal{J}})^*q^*$.

On prouvera que ces 2-morphismes sont inversibles en utilisant les conditions de l'énoncé. Il est clair que la condition *2* est simplement une reformulation du fait que le second 2-morphisme ci-dessus est inversible. Pour le premier 2-morphisme, il

suffira de remarquer que la composée $1 \simeq o^*(p_{\mathcal{J}})^* \longrightarrow (p_{\mathcal{J}})_\#(p_{\mathcal{J}})^*$ est une section du morphisme de counité $(p_{\mathcal{J}})_\#(p_{\mathcal{J}})^* \longrightarrow 1$. Pour terminer, il reste à prouver que :

$$a^*(q, \mathrm{id}_{\mathcal{J}})_*(\pi)_*(\pi, p_{\mathcal{J}})^* q^* \longrightarrow a^* \chi_{(\mathrm{id}, p_{\mathcal{J}})}(\pi)_*(\pi, p_{\mathcal{J}})^* q^*$$

est inversible pour tout $a \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$. On se ramène immédiatement à montrer que les 2-morphismes :

$$q_* \pi(a)_* \pi(a)^* q^* \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}} \pi(a)_* \pi(a)^* q^*$$

sont inversibles. On sait qu'il existe un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(a) \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "\pi(a)"'] & Y_a \arrow[d, "f_a"] \\ \mathbb{G}\mathrm{m}_S \arrow[r, "q"] & S \end{tikzcd}$$

En appliquant le théorème de changement de base par un morphisme lisse, on se ramène immédiatement à montrer que le 2-morphisme :

$$q_* q^* f_{a*} f_a^* \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}} q^* f_{a*} f_a^*$$

est inversible. Ceci découle donc de l'inversibilité de :

$$q_* q^* \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}} q^*$$

Pour démontrer cela, le plus simple est de considérer le morphismes de 2-triangles distingués :

$$\begin{tikzcd} p_* i_* i^! p^* \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d] & p_* p^* \arrow[r] \arrow[d] & p_* j_* j^* p^* \arrow[r] \arrow[d] & p_* i_* i^! p^* [+1] \arrow[d, "\sim"] \\ p_* i_* i^! p^* \arrow[r] & p_* i_* i^* p^* \arrow[r] & p_* i_* i^* j_* j^* p^* \arrow[r] & p_* i_* i^! p^* [+1] \end{tikzcd}$$

avec p la projection de la droite affine (voir le diagramme (25)) Ceci nous ramène à montrer que $p_* p^* \longrightarrow p_* i_* i^* p^* \simeq 1$ est inversible. Il suffit alors de remarquer que ce 2-morphisme est une rétraction au 2-morphisme d'unité $1 \longrightarrow p_* p^*$ qui est inversible par l'axiome d'homotopie. □

Le lemme ci-dessous et plus précisément son corollaire, jouera un rôle clef dans la preuve de la proposition 3.4.9 :

Lemme 3.4.11. — *On suppose donnés deux morphismes de S-schémas cosimpliciaux :*

$$f_0, f_1 : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}$$

On notera $(\pi^{\mathscr{F}}, p_{\mathbf{\Delta}})$ et $(\pi^{\mathscr{G}}, p_{\mathbf{\Delta}})$ les projections respectives de $(\mathscr{F}, \mathbf{\Delta})$ et $(\mathscr{G}, \mathbf{\Delta})$ sur $(S, \mathbf{e})$. On suppose que f_0 est cosimplicialement cohomotope à f_1. Alors pour tout

objet A de $\mathbb{H}(S, \mathbf{\Delta})$ les deux flèches :

$$(\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})^*A \longrightarrow (\pi^{\mathscr{F}})_* f_{0*} f_0^* (\pi^{\mathscr{F}})^* A \xrightarrow{\sim} (\pi^{\mathscr{G}})_*(\pi^{\mathscr{G}})^* A$$

$$(\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})^*A \longrightarrow (\pi^{\mathscr{F}})_* f_{1*} f_1^* (\pi^{\mathscr{F}})^* A \xrightarrow{\sim} (\pi^{\mathscr{G}})_*(\pi^{\mathscr{G}})^* A$$

sont simplicialement homotopes au sens de la définition 2.1.56 dans $\mathbb{H}(S, \mathbf{\Delta})$.

Démonstration. — Notons $q : \mathbf{\Delta}/\underline{\mathbf{1}} \longrightarrow \mathbf{\Delta}$ la projection canonique et $s_i : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{\Delta}/\underline{\mathbf{1}}$ les sections habituelles. Dire que f_1 et f_2 sont cosimplicialement cohomotopes, équivaut à dire qu'il existe un morphisme de diagrammes de S-schémas :

$$(h, \mathrm{id}_{\mathbf{\Delta}/\underline{\mathbf{1}}}) : (\mathscr{G} \circ q, \mathbf{\Delta}/\underline{\mathbf{1}}) \longrightarrow (\mathscr{F} \circ q, \mathbf{\Delta}/\underline{\mathbf{1}})$$

qui se restreint à f_i suivant s_i.

Notons $\pi'^{\mathscr{F}}$ et $\pi'^{\mathscr{G}}$ les projections de $\mathscr{F} \circ q$ et $\mathscr{G} \circ q$ sur $(S, \mathbf{\Delta}/\underline{\mathbf{1}})$. On en déduit un 2-morphisme :

$$q^*(\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})^*A \xrightarrow{\sim} (\pi'^{\mathscr{F}})_*(\pi'^{\mathscr{F}})^* q^* A \longrightarrow (\pi'^{\mathscr{F}})_* h_* h^* (\pi'^{\mathscr{F}})^* q^* A$$
$$\xrightarrow{\sim} (\pi'^{\mathscr{G}})_*(\pi'^{\mathscr{G}})^* q^* A \xleftarrow{\sim} q^*(\pi^{\mathscr{G}})_*(\pi^{\mathscr{G}})^* A$$

Par adjonction, ce 2-morphisme fournit une flèche :

$$q_\# q^*(\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})^* A \longrightarrow (\pi^{\mathscr{G}})_*(\pi^{\mathscr{G}})^* A$$

On vérifie aisément que cette flèche fournit bien une homotopie au sens de 2.1.56 entre les deux flèches de l'énoncé. □

Corollaire 3.4.12. — *Soit $f : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}$ un morphisme de S-schémas cosimpliciaux. On notera $(\pi^{\mathscr{F}}, p_{\mathbf{\Delta}})$ et $(\pi^{\mathscr{G}}, p_{\mathbf{\Delta}})$ les projections respectives de $(\mathscr{F}, \mathbf{\Delta})$ et $(\mathscr{G}, \mathbf{\Delta})$ sur $(S, \mathbf{e})$. Supposons que f est une équivalence d'homotopie cosimpliciale. Alors la composée :*

$$(\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})^* \longrightarrow (\pi^{\mathscr{F}})_* f_* f^* (\pi^{\mathscr{F}})^* \xrightarrow{\sim} (\pi^{\mathscr{G}})_*(\pi^{\mathscr{G}})^*$$

est un 2-isomorphisme après application de $(p_{\mathbf{\Delta}})_\#$.

Démonstration. — Soit $g : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un inverse à homotopie près de f. La composée :

$$(\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})_* \longrightarrow (\pi^{\mathscr{F}})_* f_* f^* (\pi^{\mathscr{F}})_* \longrightarrow (\pi^{\mathscr{G}})_*(\pi^{\mathscr{G}})_*$$
$$\longrightarrow (\pi^{\mathscr{G}})_* g_* g^* (\pi^{\mathscr{G}})_* \longrightarrow (\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})_*$$

est clairement égale à :

$$(\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})^* \longrightarrow (\pi^{\mathscr{F}})_*(f \circ g)_*(f \circ g)^*(\pi^{\mathscr{F}})_*$$

Mais $(f \circ g)$ est cohomotope à l'identité de $\mathscr{F}$. Il vient par le lemme 3.4.11 et la proposition 2.1.57 que la composée :

$$(p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}(\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})_* \longrightarrow (p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}(\pi^{\mathscr{G}})_*(\pi^{\mathscr{G}})_* \longrightarrow (p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}(\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})_*$$

vaut l'identité. Pour prouver que l'autre composée, à savoir :

$$(p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}(\pi^{\mathscr{G}})_*(\pi^{\mathscr{G}})_* \longrightarrow (p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}(\pi^{\mathscr{F}})_*(\pi^{\mathscr{F}})_* \longrightarrow (p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}(\pi^{\mathscr{G}})_*(\pi^{\mathscr{G}})_*$$

vaut l'identité, il suffit d'inverser les rôles de f et g dans le raisonnement précédent. □

On est en mesure de prouver la proposition 3.4.9 :

Démonstration. — Rappelons que $\Upsilon_{e_n} = (p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}\chi_{e_n}(\theta_{e_n})_*(\theta_{e_n}, p_{\mathbf{\Delta}})^*$. Le foncteur $\chi_{e_n} : \mathsf{H}(\mathbb{G}\mathrm{m}_S) \longrightarrow \mathsf{H}(S)$ est égal à $\chi_{\mathrm{id}} : \mathsf{H}(\mathbb{G}\mathrm{m}_S) \longrightarrow \mathsf{H}(S)$. Notons $\mathscr{A}_n$ le $\mathbb{G}\mathrm{m}_S$-schéma simplicial obtenu par pull-back de $\mathscr{A}$ suivant e_n. Il vient que $\Upsilon_{e_n} = (\mathscr{A}_n \bullet \chi)_{\mathrm{id}}$. De plus, le morphisme $\chi_{e_n} \longrightarrow \Upsilon_{e_n}$ s'identifie au morphisme $\chi_{\mathrm{id}} \longrightarrow (\mathscr{A}_n \bullet \chi)_{\mathrm{id}}$ induit par l'objet $\underline{\mathbf{0}}$. En appliquant le lemme 3.4.10 à $\mathscr{F} = \mathscr{A}_n$, on voit que pour prouver la proposition 3.4.9, il suffit de vérifier les points :

1. Le 2-morphisme de counité : $(p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}(p_{\mathbf{\Delta}})^* \longrightarrow 1$ est inversible,
2. Le 2-morphisme d'unité : $(p_{\mathbf{\Delta}})^* \longrightarrow (q \circ \theta_{e_n})_*(q \circ \theta_{e_n})^*(p_{\mathbf{\Delta}})^*$ devient un isomorphisme après application de $(p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}$,
3. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, le morphisme $\theta_{e_n}(\underline{\mathbf{r}}) : \mathscr{A}_n(\underline{\mathbf{r}}) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{m}_S$ est isomorphe au pull-back d'un S-schéma *via* la projection $q : \mathbb{G}\mathrm{m}_S \longrightarrow S$.

La première condition découle de la proposition 2.1.41 et du fait que $\mathbf{\Delta}$ admet un objet final. La troisième condition est également vérifiée puisque $\mathscr{A}_n(\underline{\mathbf{r}}) = \mathbb{G}\mathrm{m}_S^{r+1}$ et $\theta_{e_n}(\underline{\mathbf{r}})$ est simplement la projection sur le premier facteur. Il reste à vérifier la seconde condition.

Supposons d'abord que $n = 1$. Le morphisme d'unité $1 \longrightarrow (q \circ \theta)_*(q \circ \theta)^*$ coïncide avec celui du corollaire 3.4.12 appliqué au morphisme de S-schémas cosimpliciaux :

$$(q \circ \theta) : (\mathscr{A}, \mathbf{\Delta}) \longrightarrow (S, \mathbf{\Delta})$$

Ce morphisme est une équivalence d'homotopie cosimpliciale par le corollaire 3.4.12. Il vient que : $1 \longrightarrow (q \circ \theta)_*(q \circ \theta)^*$ devient un 2-isomorphisme après application de $(p_{\mathbf{\Delta}})_{\#}$. La première partie de la proposition 3.4.9 est ainsi prouvée.

Dans la suite, on supposera que n est un entier non nul et que H est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparé. Remarquons d'abord que le schéma cosimplicial $\mathscr{A}_n$ s'obtient *via* le lemme 3.4.1 appliqué au diagramme :

$$\mathbb{G}\mathrm{m}_S \xrightarrow{(e_n)_\eta} \mathbb{G}\mathrm{m}_S \xleftarrow{1} S$$

On dispose donc d'un morphisme de S-schémas cosimpliciaux $r_n : \mathscr{A}_n \longrightarrow \mathscr{A}$ déduit du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}\mathrm{m}_S \arrow[r, "(e_n)_\eta"] \arrow[d, "(e_n)_\eta"'] & \mathbb{G}\mathrm{m}_S \arrow[d, equal] & S \arrow[l, "1"'] \arrow[d, equal] \\
\mathbb{G}\mathrm{m}_S \arrow[r, equal] & \mathbb{G}\mathrm{m}_S & S \arrow[l, "1"']
\end{tikzcd}$$

Remarquons au passage que $r_n(\underline{\mathbf{m}}) : \mathbb{G}\mathrm{m}_S^{m+1} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{m}_S^{m+1}$ est donné par : $(x_0, \ldots, x_m) \rightsquigarrow (x_0^n, x_1, \ldots, x_m)$.

Revenons, à notre problème. L'égalité $(\theta_n \circ q) = (\theta \circ q) \circ r_n$ induit une factorisation du 2-morphisme d'unité $1 \longrightarrow (\theta_n \circ q)_*(\theta_n \circ q)^*$:

$$1 \longrightarrow (\theta \circ q)_*(\theta \circ q)^* \xrightarrow{(1)} (\theta \circ q)_* r_{n*} r_n^*(\theta \circ q)^* = (\theta_n \circ q)_*(\theta_n \circ q)^*$$

En utilisant le cas $n = 1$, on voit qu'il suffira de prouver que la flèche (1) est un isomorphisme. Ceci se vérifie objet par objet. Ainsi, on est finalement ramené à prouver que pour tout $m \in N$, la flèche :

$$(\theta(\underline{\mathbf{m}}) \circ q)_*(\theta(\underline{\mathbf{m}}) \circ q)^* \xrightarrow{(1)} (\theta(\underline{\mathbf{m}}) \circ q)_* r_n(\underline{\mathbf{m}})_* r_n(\underline{\mathbf{m}})^*(\theta(\underline{\mathbf{m}}) \circ q)^*$$

est inversible. Il est facile de voir que ceci est un cas particulier du lemme ci-dessous. □

Lemme 3.4.13. — *Soit X un S-schéma quasi-projectif. Notons q la projection évidente : $\mathbb{G}m_S \times_S X \longrightarrow X$ et e_n (au lieu de $(e_n)_\eta$) le X-morphisme $\mathbb{G}m_S \times_S X \longrightarrow \mathbb{G}m_S \times_S X$ qui consiste à élever le premier facteur à la puissance n. Si H est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparé, alors le 2-morphisme :*

$$q_* q^* \longrightarrow q_* e_{n*} e_n^* q^* \longrightarrow q_* q^*$$

est un 2-isomorphisme.

Démonstration. — Il suffit bien évidement de traiter le cas $X = S$. On continue à utiliser les notations du diagramme (25). Considérons le diagramme commutatif à carrés cartésiens (à nil-immersion près) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}\mathrm{m}_S \arrow[r, "j"] \arrow[d, "e_n"'] & \mathbb{A}^1_S \arrow[d, "e_n"] & S \arrow[l, "i"'] \arrow[d, equal] \\
\mathbb{G}\mathrm{m}_S \arrow[r, "j"] & \mathbb{A}^1_S & S \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

Notons $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ le groupe de Galois du revêtement étale $e_n : \mathbb{G}_{m_S} \longrightarrow \mathbb{G}_{m_S}$. Ce groupe agit également sur le morphisme $e_n : \mathbb{A}^1_S \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$. On a un morphisme de 2-triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
p_*i_*i^!p^* \arrow[r] \arrow[d] & p_*p^* \arrow[r] \arrow[d] & p_*j_*j^*p^* \arrow[r] \arrow[d] & p_*i_*i^!p^*[+1] \arrow[d] \\
p_*e_{n*}i_*i^!e_n^*p^* \arrow[r] & p_*e_{n*}e_n^*p^* \arrow[r] & p_*j_*e_{n*}e_n^*j^*p^* \arrow[r] & p_*e_{n*}i_*i^!e_n^*p^*[+1]
\end{tikzcd}$$

Le groupe G agit sur le triangle inférieur. Étant donné que H est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparé, on déduit que la deuxième et troisième flèche verticale identifient la source à la partie invariante sous G du but. On en déduit que c'est également le cas pour la première flèche.

Pour prouver le lemme, il suffit de prouver que les deux flèches :

$$i^!p^* \xrightarrow{Ex^{*,!}} i^!e_n^*p^* \qquad \text{et} \qquad p_*p^* \longrightarrow p_*e_{n*}e_n^*p^*$$

sont inversibles. L'inversibilité de la seconde flèche découle facilement de l'axiome d'homotopie.

Pour prouver l'inversibilité de la première flèche, on doit passer par une méthode indirecte. On prouvera en effet que G agit trivialement sur $i^!e_n^*p^* \simeq i^!e_{n*}e_n^*p^*$. On peut décrire cette action sur $i^!e_n^*p^* \simeq i^!p^*$ de la manière suivante. Si ξ est un élément de G, on a un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathbb{A}^1_S \arrow[d, "\xi"] \\
S \arrow[r, "i"] & \mathbb{A}^1_S
\end{tikzcd}$$

L'action de ξ est donnée par la composée : $i^!p^* \xrightarrow{Ex^{*,!}} i^!\xi^*p^* \xrightarrow{\sim} i^!p^*$. On prouvera que cette composée est l'identité. Pour cela on invoque le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
i^!p^! \arrow[r] \arrow[rr, bend left, equal] \arrow[d, equal] & i^!\xi^!p^! \arrow[r] \arrow[d, equal] & i^!p^! \arrow[d, equal] \\
i^!\mathsf{Th}(\Omega_p)p^* \arrow[r] \arrow[d] & i^!\xi^*\mathsf{Th}(\Omega_p)p^* \arrow[r] \arrow[d] & i^!\mathsf{Th}(\Omega_p)p^* \arrow[d] \\
\mathsf{Th}(\mathscr{O}_S)i^!p^* \arrow[r] & \mathsf{Th}(\mathscr{O}_S)i^!\xi^*p^* \arrow[r] & \mathsf{Th}(\mathscr{O}_S)i^!p^*
\end{tikzcd}$$

Le résultat est maintenant clair. □

Remarque 3.4.14. — La conclusion de la seconde partie de la proposition 3.4.9 est fausse à coefficients entiers. En effet soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique du corps de base k. Supposons que H est le foncteur croisé qui à un k-schéma X associe la catégorie dérivée des faisceaux de $\mathbb{Z}/\ell$-modules sur le petit site étale de X. On va montrer que l'objet $\Upsilon_{e_n}\mathbb{Z}/\ell$ est isomorphe à :

$$\oplus_{r\in\mathbb{N}}(\mathbb{Z}/\ell(-r)[-r]\oplus\mathbb{Z}/\ell(-r-1)[-r-1])$$

dés que ℓ divise n. En effet, comme conséquence de la preuve de la proposition 3.4.9, le complexe $\Upsilon_{e_n}(\mathbb{Z}/\ell)$ s'identifie au complexe total associé au complexe simplicial :

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\mathscr{A}\times_{e_n}\mathbb{G}\mathrm{m},\mathbb{Z}/\ell)$$

Il est bien connu que la réalisation étale de $(\mathbb{G}\mathrm{m})^{r+1}$ est canoniquement isomorphe à :

$$(\mathbb{Z}/\ell\oplus\mathbb{Z}/\ell(1)[1])^{\otimes r}$$

De plus la réalisation de la diagonale $\mathbb{G}\mathrm{m}\longrightarrow\mathbb{G}\mathrm{m}\times\mathbb{G}\mathrm{m}$ est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}:\ \mathbb{Z}/\ell\oplus\mathbb{Z}/\ell(1)[1]\longrightarrow\mathbb{Z}/\ell\oplus\mathbb{Z}/\ell(1)[1]\oplus\mathbb{Z}/\ell(1)[1]\oplus\mathbb{Z}/\ell(2)[2]$$

Tandis que la réalisation de $(x.x^n):\ \mathbb{G}\mathrm{m}\longrightarrow\mathbb{G}\mathrm{m}\times\mathbb{G}\mathrm{m}$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&n&0\end{pmatrix}:\ \mathbb{Z}/\ell\oplus\mathbb{Z}/\ell(1)[1]\longrightarrow\mathbb{Z}/\ell\oplus\mathbb{Z}/\ell(1)[1]\oplus\mathbb{Z}/\ell(1)[1]\oplus\mathbb{Z}/\ell(2)[2]$$

Avec ces formules, on voit que lorsqu'on passe au complexe normalisé de la réalisation de $\mathscr{A}\times_{\mathbb{G}\mathrm{m},e_\ell}\mathbb{G}\mathrm{m}$ on trouve le complexe

$$\begin{aligned}[\ \ldots\longrightarrow 0\longrightarrow\mathbb{Z}/\ell\oplus\mathbb{Z}/\ell(1)[1]\longrightarrow\mathbb{Z}/\ell(1)[1]\oplus\mathbb{Z}/\ell(2)[2]\\ \longrightarrow\ldots\longrightarrow\mathbb{Z}/\ell(r)[r]\oplus\mathbb{Z}/\ell(r+1)[r+1]\longrightarrow\ldots\ ]\end{aligned}$$

Avec $\mathbb{Z}/\ell\oplus\mathbb{Z}/\ell(1)[1]$ placé en degré zéro et les différentielles données par :

$$\begin{pmatrix}0&n\\0&0\end{pmatrix}:\ \mathbb{Z}/\ell(r)[r]\oplus\mathbb{Z}/\ell(r+1)[r+1]\longrightarrow\mathbb{Z}/\ell(r+1)[r+1]\oplus\mathbb{Z}/\ell(r+2)[r+2]$$

Ainsi, pour n divisible par ℓ, les différentielles deviennent nulles et on obtient la formule annoncée pour $\Upsilon_{e_n}(\mathbb{Z}/\ell)$ après passage au dual.

Ce calcul montre que la structure de spécialisation Υ ne donne pas toujours des motifs raisonnables : ainsi $\Upsilon_f(A)$ peut ne pas être de type fini même si A l'était. Ce phénomène disparaît lorsqu'on passe aux coefficients rationnels du moins lorsque S est le spectre d'un corps de caractéristique nulle.

Notons e_n^m le $\mathbb{A}^1_S$-schéma $B_n^m = \mathbb{A}^1_S[P][U,U^{-1}]/(P^n - U^m.\pi) \longrightarrow \mathbb{A}^1_S = B$. Avec les notations de 3.3.2, $b_n^m = e_n^m$. On a dans le même esprit :

Corollaire 3.4.15. — *Supposons que le 2-foncteur* H *est* $\mathbb{Q}$*-linéaire et séparé. Pour tout* $n, m \in \mathbb{N}^\times$*, la composée des 2-morphismes suivants :*

$$(e_n^m)^*_\sigma \longrightarrow i^*(e_n^m)^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*(e_n^m)^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{e_n^m}(e_n^m)^*_\eta q^* \longrightarrow \Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)^*_\eta q^*$$

est un 2-isomorphisme.

Démonstration. — Considérons le revêtement pseudo-galoisien de groupe $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$r : B_n[V,V^{-1}] \longrightarrow B_n^m$$

donné par : $U \rightsquigarrow V^n$ et $P \rightsquigarrow V^m.\pi^{1/n}$. Il s'agit bien d'un revêtement pseudo-galoisien à cause du petit calcul suivant :

$$\begin{aligned} B_n^m[V]/(V^n - U) &\simeq B[P][U,U^{-1}][V]/(V^n - U.P^n - U^m.\pi) \\ &\simeq B[P][V,V^{-1}]/((P.V^{-m})^n - \pi) \simeq B_n[V,V^{-1}] \end{aligned}$$

On sait par le lemme 2.1.165 que le foncteur $(b_n^m)^*_\eta$ est un facteur direct de $r_{\eta*}r^*_\eta(b_n^m)^*_\eta$. Il suffit donc de montrer que la composée suivante :

$$i^*r_*r^*(e_n^m)^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*r_*r^*(e_n^m)^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{e_n^m}r_{\eta*}r^*_\eta(e_n^m)^*_\eta q^* \longrightarrow \Upsilon_{e_n^m}r_{\eta*}r^*_\eta(e_n^m)^*_\eta q^*$$

est inversible. Comme r est fini, on voit immédiatement que cette composée est isomorphe à :

$$r_{\sigma*}i^*r^*(e_n^m)^*p^* \longrightarrow r_{\sigma*}i^*j_*j^*r^*(e_n^m)^*p^* \xrightarrow{\sim} r_{\sigma*}\chi_{e_n^m}r^*_\eta(e_n^m)^*_\eta q^* \longrightarrow r_{\sigma*}\Upsilon_{e_n^m}r^*_\eta(e_n^m)^*_\eta q^*$$

Ceci nous ramène à traiter la question analogue pour le B-schéma $B_n[V,V^{-1}]$. Il est facile de conclure en utilisant la proposition 3.4.9 et le fait que le B-schéma $B_n[V,V^{-1}]$ est lisse au-dessus de B_n. □

On termine cette sous-section par une discussion sur la structure monoïdale. Supposons que $\mathbb{H}$ est un dérivateur algébrique monoïdal, homotopique et stable. On sait par la proposition 3.2.17 que Υ est naturellement un système de spécialisation pseudo-monoïdal. De plus, le morphisme $\chi \longrightarrow \Upsilon$ est un morphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux. On note le résultat simple suivant :

Proposition 3.4.16. — *On garde les notations de la proposition 3.4.9 ainsi que du corollaire 3.4.15. Soient* A *et* B *des objets de* $\mathsf{H}(S)$*. Alors :*

1- *L'accouplement :* $\Upsilon_{\mathrm{id}}q^*A \otimes_S \Upsilon_{\mathrm{id}}q^*B \longrightarrow \Upsilon_{\mathrm{id}}q^*(A \otimes_S B)$ *est un isomorphisme.*

2- Supposons que H *est* $\mathbb{Q}$*-linéaire et séparé. Les accouplements :*

$$\Upsilon_{e_n}(e_n)^*_\eta q^* A \otimes_S \Upsilon_{e_n}(e_n)^*_\eta q^* B \longrightarrow \Upsilon_{e_n}(e_n)^*_\eta q^*(A \otimes_S B)$$

$$\Upsilon_{e_n^m}(e_n^* m)^*_\eta q^* A \otimes_{(B_n^m)_\sigma} \Upsilon_{e_n^m}(e_n^* m)^*_\eta q^* B \longrightarrow \Upsilon_{e_n^m}(e_n^* m)^*_\eta q^*(A \otimes_S B)$$

sont des isomorphismes pour $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Démonstration. — Ceci découle immédiatement du fait que les composées dans la proposition 3.4.9 et son corollaire 3.4.15 sont des transformations naturelles de foncteurs pseudo-monoïdaux. □

3.4.3. Étude de Υ au-dessus d'un corps de caractéristique nulle. — On supposera dans ce paragraphe que la base S est le spectre d'un corps k de caractéristique nulle. L'hypothèse : H est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparée sera essentielle dans la suite. Le théorème suivant sera appelé le théorème de type finitude des cycles proches unipotents :

Théorème 3.4.17. — *On suppose que* H *est* $\mathbb{Q}$*-linéaire et séparé. Soit* $\Lambda \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$ *une classe d'objets quasi-stable par twist de Tate. Alors pour tout* $\mathbb{A}^1_k$*-schéma quasi-projectif* $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ *, le foncteur* Υ_f *envoie la sous-catégorie* $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X_\eta)$ *dans* $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X_\sigma)$.

Démonstration. — On applique le corollaire 3.3.49 à $\mathsf{H}'_2 = (\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda)_{|\mathsf{Sch}/\sigma}$ et à la classe d'objets de $\mathsf{H}(\eta)$ formée des q^*A avec $A \in \Lambda$. Ceci nous ramène immédiatement à vérifier que pour $A \in \Lambda$ les objets $\Upsilon_{e_n}(e_n)^*_\eta q^* A$ et $\Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)^*_\eta q^* A$ sont Λ-constructibles quelque soient les entiers non nuls n et m. Ceci découle immédiatement de la proposition 3.4.9 et son corollaire 3.4.15. □

On a également un théorème de ${}^p t$-positivité :

Théorème 3.4.18. — *On suppose toujours de* H *est* $\mathbb{Q}$*-linéaire et séparé. On se donne un ensemble d'objets* $\mathscr{G} \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$. *On suppose en plus que l'hypothèse 2.2.58 est vérifiée. Alors pour tout* $\mathbb{A}^1_k$*-schéma* $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ *, le foncteur* $\Upsilon_f[-1]$ *est* ${}^p t$*-positif.*

Démonstration. — Par le lemme 3.2.10, les foncteurs $\Upsilon_?$ commutent aux petites sommes. On appliquera le corollaire 3.3.50 au système de spécialisation $\Upsilon[-1]$, $\mathsf{H}''_2 = ({}^p\mathsf{H}_{\geq 0})_{|\mathsf{Sch}/\sigma}$ et à l'ensemble d'objets de $\mathsf{H}(\eta)$ qui sont de la forme $q^! A$ avec $A \in \mathscr{G}$.

Il suffit donc de vérifier que les objets $\Upsilon_{e_n}(e_n)^!_\eta q^! A[-1]$ et $\Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)^!_\eta q^! A[-1]$ sont ${}^p t$-positifs quelque soit les entiers non nuls n et m. En utilisant la proposition 3.4.9 et son corollaire 3.4.15 on obtient des isomorphismes :

$$\Upsilon_{e_n}(e_n)^!_\eta q^! A[-1] \simeq \Upsilon_{e_n}(e_n)^*_\eta q^* A(1)[1] \simeq A(1)[1]$$

$$\Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)^!_\eta q^! A[-1] \simeq \Upsilon_{e_n^m}(e_n^m)^*_\eta q^* A(2)[3] \simeq (e_n^m)^*_\sigma A(2)[3] \simeq (e_n^m)^!_\sigma A(1)[1]$$

étant donné que $(e_n)_\eta$ et $(e_n^m)_\eta$ sont lisses de fibré normal trivial et que à nil-immersion près $(e_n)_\sigma$ et $(e_n^m)_\sigma$ sont également lisses de fibrés normal trivial. Le résultat découle alors du fait que l'objet $A(1)[1]$ est bien ${}^pt$-positif dans $\mathsf{H}(\sigma)$. □

Notons le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.19. — *Sous les hypothèses et conditions du théorème précédent, le foncteur* $\Upsilon_{\mathrm{id}} : \mathsf{H}(\mathbb{G}_{m_k}) \longrightarrow \mathsf{H}(k)$ *est t-positif.*

Démonstration. — En effet, par les théorèmes 2.2.82 et 2.2.86 on a l'inclusion $\mathsf{H}_{\geq 1}(\mathbb{G}_{m_k}) \subset {}^p\mathsf{H}_{\geq 0}(\mathbb{G}_{m_k})$ et l'égalité $\mathsf{H}_{\geq 0}(\sigma) = {}^p\mathsf{H}_{\geq 0}(\sigma)$. Ainsi si $E \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(\mathbb{G}_{m_k}))$ est t-positif, alors $A[+1]$ est ${}^pt$-positif et $\Upsilon_{\mathrm{id}}(A[+1])[-1] \simeq \Upsilon_{\mathrm{id}}A$ est ${}^pt$-positif (par le théorème 3.4.18) donc t-positif. □

Supposons maintenant que $\mathbb{H}$ est un dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable et que le 2-foncteur H est fermé à droite. On notera simplement $\underline{\mathsf{Hom}}(-,-)$ à la place de $\underline{\mathsf{Hom}}_d(-,-)$ les bifoncteurs homomorphismes internes que l'on supposera triangulés en les deux variables. On a le théorème suivant :

Théorème 3.4.20. — *Soit* $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ *un* $\mathbb{A}^1_k$*-schéma quasi-projectif. On fixe un objet* R *de* $\mathsf{H}(k)$. *On définit les opérateurs de dualités* $\mathsf{D}_\eta : \mathsf{H}(X_\eta) \longrightarrow \mathsf{H}(X_\eta)^{\mathrm{op}}$ *et* $\mathsf{D}_\sigma : \mathsf{H}(X_\sigma) \longrightarrow \mathsf{H}(X_\sigma)^{\mathrm{op}}$ *par les formules :*

$$\mathsf{D}_\eta(-) = \underline{\mathsf{Hom}}(-, f_\eta^! q^* R) \qquad \text{et} \qquad \mathsf{D}_\sigma(-) = \underline{\mathsf{Hom}}(-, f_\sigma^! R)$$

On définit un morphisme de commutation à la dualité : $\Upsilon_f \mathsf{D}_\eta \longrightarrow \mathsf{D}_\sigma \Upsilon_f$ *en prenant la composée :*

$$\Upsilon_f \mathsf{D}_\eta = \Upsilon_f \mathsf{D}_f^{q^* R} \longrightarrow \mathsf{D}_f^{\Upsilon_{\mathrm{id}} q^* R} \Upsilon_f \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}_f^R \Upsilon_f = \mathsf{D}_\sigma \Upsilon_f$$

avec les notations de la proposition 3.1.16, du corollaire 3.1.18. Pour toute classe d'objets $\Lambda \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$ *et tout objet* E *de* $\mathsf{H}^{\mathrm{ct}}_\Lambda(X_\eta)$ *le morphisme :*

$$\Upsilon_f \mathsf{D}_\eta(E) \longrightarrow \mathsf{D}_\sigma \Upsilon_f(E)$$

est inversible.

Démonstration. — Il suffit bien évidement de considérer le cas $\Lambda = \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$. On adopte les notations de 3.1.16 et 3.1.18. On montrera que le morphisme : $\Upsilon_f \mathsf{D}_f^{q^* R}(E) \longrightarrow \mathsf{D}_f^{\Upsilon_{\mathrm{id}} q^* R} \Upsilon_f(E)$ est inversible. Par le corollaire 3.1.18, on sait que le morphisme en question est sous-jacent à un morphisme de systèmes de spécialisation :

$$\Upsilon \mathsf{D}^{q^* R} \longrightarrow \mathsf{D}^{\Upsilon_{\mathrm{id}} q^* R} \Upsilon$$

Ainsi, en appliquant le théorème 3.3.46, on voit qu'il suffit de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$, les morphismes :

$$\Upsilon_{e_n} \mathsf{D}_{e_n}^{q^* R}((e_n)_\eta^* q^* A) \longrightarrow \mathsf{D}_{e_n}^{\Upsilon_{\mathrm{id}} q^* R} \Upsilon_{e_n}((e_n)_\eta^* q^* A)$$

et

$$\Upsilon_{e_n^1}\mathsf{D}_{e_n^1}^{q^*R}((e_n^1)_\eta^* q^*A) \longrightarrow \mathsf{D}_{e_n^1}^{\Upsilon_{\mathrm{id}}q^*R}\Upsilon_{e_n^1}((e_n^1)_\eta^* q^*A)$$

sont inversibles. On considérera uniquement le premier morphisme, le second se traite exactement de la même façon. Par définition, le morphisme en question est obtenu par adjonction de l'accouplement :

$$\begin{aligned}\Upsilon_{e_n}\mathsf{D}_{e_n}^{q^*R}((e_n)_\eta^* q^*A) \otimes \Upsilon_{e_n}((e_n)_\eta^* q^*A) &\longrightarrow \Upsilon_{e_n}\mathsf{D}_{e_n}^{q^*R}((e_n)_\eta^* q^*A) \otimes ((e_n)_\eta^* q^*A)\\ &\longrightarrow \Upsilon_{e_n}((e_n)_\eta^* q^*R) \simeq \Upsilon_{\mathrm{id}}q^*R\end{aligned}$$

Remarquons que $D_{e_n}^{q^*R}((e_n)_\eta^* q^*A) = \underline{\mathsf{Hom}}(((e_n)_\eta^* q^*A), (e_n)_\eta^! q^*R) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(((e_n)_\eta^* q^*A), (e_n)_\eta^* q^*R) \simeq (e_n)_\eta^* q^* \underline{\mathsf{Hom}}(A, R)$ puisque $(e_n)_\eta$ est étale et que q est lisse. On se ramène donc à étudier l'accouplement :

$$\begin{aligned}\Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^* q^* \underline{\mathsf{Hom}}(A, R) \otimes \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^* q^* A &\longrightarrow \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^* q^*(\underline{\mathsf{Hom}}(A, R) \otimes A)\\ &\longrightarrow \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^* q^* R\end{aligned}$$

Par la proposition 3.4.9, on dispose d'un isomorphisme de foncteurs pseudo-monoïdaux $1 \simeq \Upsilon_{e_n}(e_n)_\eta^* q^*$. Il vient que l'accouplement ci-dessus est isomorphe à l'accouplement évident : $\underline{\mathsf{Hom}}(A, R) \otimes A \longrightarrow R$. Cet accouplement fournit par adjonction l'isomorphisme identité : $\underline{\mathsf{Hom}}(A, R) = \underline{\mathsf{Hom}}(A, R)$. Le théorème est prouvé. □

3.5. Le système de spécialisation Ψ

Dans ce numéro, on donne la définition des foncteurs cycles proches dans le cadre d'un 2-foncteur homotopique stable. La définition des foncteurs Ψ est une variation de la définition de Υ qui tient en compte le coté discret du groupe fondamental motivique de $\mathbb{G}_m$ à savoir les revêtements étales finis. On se place de nouveau au-dessus d'un schéma de base général S.

3.5.1. Le diagramme de schémas ($\mathscr{R}, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times$). — Sauf mention du contraire le symbole $\mathbb{N}^\times$ désignera la catégorie directe associée à l'ensemble des entiers naturels non nuls ordonné par l'opposé de la relation de divisibilité. Les objets de $\mathbb{N}^\times$ (à la différence de ceux de $\mathbf{\Delta}$) seront simplement notés $n, m, r, \ldots$. L'existence d'une flèche $m \to n$ signifie donc que n divise m.

Définition 3.5.1. — *Le diagramme de S-schémas ($\mathscr{E}, \mathbb{N}^\times$) est donné par le foncteur $\mathscr{E} : \mathbb{N}^\times \longrightarrow \mathsf{Sch}/S$ qui :*

- *à un entier n associe toujours le schéma $\mathbb{G}_{mS}$,*
- *à une flèche $m \longmapsto n$ associe le morphisme $(.)^{\frac{m}{n}} : \mathbb{G}_{mS} \longrightarrow \mathbb{G}_{mS}$ élévation à la puissance $\frac{m}{n}$.*

Remarque 3.5.2. — On dispose d'un morphisme évident de diagrammes de schémas $e : (\mathscr{E}, \mathbb{N}^\times) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{m}$ On peut penser à e comme étant le revêtement étale universel de $\mathbb{G}\mathrm{m}$.

Pour obtenir les foncteurs cycles proches totaux, il faut utiliser un revêtement de $\mathbb{G}\mathrm{m}$ qui soit plus fin que le revêtement étale universel $\mathscr{E}/\mathbb{G}\mathrm{m}$ ainsi que le revêtement universel unipotent $\mathscr{A}/\mathbb{G}\mathrm{m}$:

Définition 3.5.3. — *On définit un objet cosimplicial $\mathscr{R}$ en $\mathbb{N}^\times$-diagrammes de S-schéma en appliquant le lemme 3.4.1 au diagramme de* DiaSch/S *:*

$$(\mathscr{E}, \mathbb{N}^\times) = (\mathscr{E}, \mathbb{N}^\times) \xleftarrow{1} (S. \mathbb{N}^\times)$$

On peut voir $\mathscr{R}$ comme un diagramme de S-schémas indicé par la catégorie $\mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times$.

On définit un morphisme de diagrammes de S-schémas :

$$(\theta^{\mathscr{R}}, p_{\mathbf{\Delta}\times\mathbb{N}^\times}) : (\mathscr{R}, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{m}_S$$

en prenant la composée : $(\mathscr{R}, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times) \longrightarrow (\mathscr{E}. \mathbb{N}^\times) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{m}_S$. On notera dorénavant $(\theta^{\mathscr{A}}, p_{\mathbf{\Delta}})$ le morphisme $\mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{m}_S$. Les deux lemmes ci-dessous résument quelques propriétés évidentes de $\mathscr{R}$:

Lemme 3.5.4. — *Soit $\tau_n : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times$ le foncteur qui envoie l'objet $\underline{\mathbf{r}}$ sur $(\underline{\mathbf{r}}, n)$. On a :*

1. *Le diagramme de S-schémas $(\mathscr{R} \circ \tau_n, \mathbf{\Delta})$ s'identifie canoniquement à $(\mathscr{A}, \mathbf{\Delta})$.*
2. *On a un carré commutatif de morphismes de diagrammes de S-schémas :*

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{A}, \mathbf{\Delta}) \arrow[r, "\tau_n"] \arrow[d, "\theta^{\mathscr{A}}"'] & (\mathscr{R}. \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times) \arrow[d, "\theta^{\mathscr{R}}"] \\
\mathbb{G}m_S \arrow[r, "e_n"] & \mathbb{G}m_S
\end{tikzcd}$$

où e_n désigne l'élévation à la puissance n.

Dans le même esprit, on a :

Lemme 3.5.5. — *Soit $\kappa_n : (\mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times) \longrightarrow (\mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times)$ le foncteur qui envoie l'objet $(\underline{\mathbf{r}}, m)$ sur $(\underline{\mathbf{r}}, m.n)$. On a :*

1. *Le diagramme de S-schémas $(\mathscr{R} \circ \kappa_n. \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times)$ s'identifie canoniquement à $(\mathscr{R}, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times)$.*
2. *Gardons les notations ci-dessus. Pour tout entier non nul l, le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{A}, \mathbf{\Delta}) \arrow[r, "\tau_l"] \arrow[d, equal] & (\mathscr{R}, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times) \arrow[r, "\theta^{\mathscr{R}}"] \arrow[d, "\kappa_n"] & \mathbb{G}m_S \arrow[d, "e_n"] \\
(\mathscr{A}, \mathbf{\Delta}) \arrow[r, "\tau_{ln}"] & (\mathscr{R}. \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times) \arrow[r, "\theta^{\mathscr{R}}"] & \mathbb{G}m_S
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

3.5.2. Définition de Ψ. Normalisation. — Voici la définition des foncteurs cycles proches :

Définition 3.5.6

1- Avec les notations de 3.2.3, on appelle Ψ le système de spécialisation $\mathscr{R} \bullet \chi$. Les foncteurs Ψ_f seront appelés les foncteurs cycles proches (totaux).

2- On appelle également Υ^n le système de spécialisation $(\mathscr{R} \circ \tau_n) \bullet \chi$. On dispose alors de morphismes de systèmes de spécialisation :

$$\tau_n : \Upsilon^n \longrightarrow \Psi$$

3- On appelle finalement Ψ^n le système de spécialisation $(\mathscr{R} \circ \kappa_n) \bullet \chi$. Par la définition 3.2.13 on dispose alors d'un carré commutatif de systèmes de spécialisation :

$$\begin{tikzcd} \Upsilon^{ln} \arrow[r, "\tau_l"] \arrow[d, equal] & \Psi^n \arrow[d, "\kappa_n"] \\ \Upsilon^{ln} \arrow[r] & \Psi \end{tikzcd}$$

Remarque 3.5.7. — Le système de spécialisation Υ^1 s'identifie canoniquement au système de spécialisation Υ considère dans la section 3.4. Par construction, on dispose de morphismes de systèmes de spécialisation $\Upsilon^n \longrightarrow \Upsilon^{nl}$ et Ψ est la $\mathbb{N}^\times$-colimite des Υ^n (en un sens que l'on peut facilement formaliser).

Lemme 3.5.8. — *Pour tout entier non nul n, le morphisme de systèmes de spécialisation $\Psi^n \longrightarrow \Psi$ est inversible.*

Démonstration. — Ceci découle immédiatement de la définition et du fait que le foncteur $- \times n : \mathbb{N}^\times \longrightarrow \mathbb{N}^\times$ est filtrant au sens de la définition 2.1.50. □

Soit n un entier non nul. Étant donné un S-morphisme quasi-projectif $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$, on définit $f_n : X_n \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$ comme étant le pull-back de f suivant $e_n : \mathbb{A}^1_S \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$. On appellera alors $e_n : X_n \longrightarrow X$ le B-morphisme évident. On dispose d'un isomorphisme canonique de diagrammes de X-schémas :

$$(\mathscr{R}, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times) \times_{\mathbb{G}\mathrm{m}_S} X_n \longrightarrow (\mathscr{R} \circ \kappa_n, \mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times) \times_{\mathbb{G}\mathrm{m}_S} X$$

On déduit alors immédiatement un isomorphisme : $\Psi^n_f \xrightarrow{\sim} \Psi_{f_n}(e_n)^*_\eta$. Par la proposition 3.1.6, les 1-morphismes $\Psi_{f_n}(e_n)^*_\eta$ s'organisent en un système de spécialisation qu'on notera $e_n \bullet \Psi$.

La même discussion s'applique à Υ. Ainsi pour tout n, on a $e_n \bullet \Upsilon \simeq \Upsilon^n$. On déduit :

Proposition 3.5.9. — *Il existe un isomorphisme de systèmes de spécialisation :* $\Psi \longrightarrow e_n \bullet \Psi$.

Lorsque $\mathbb{H}$ est un dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable, le système de spécialisation Ψ est également pseudo-monoïdal. On vérifie aisément que l'isomorphisme $\Psi \longrightarrow e_n \bullet \Psi$ est un morphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux.

On a le résultat de normalisation suivant :

Lemme 3.5.10. — *Avec les notations du diagramme (25), la composée des 2-morphismes suivants :*

$$1 \xrightarrow{\sim} i^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{\mathrm{id}}q^* \longrightarrow \Psi_{\mathrm{id}}q^*$$

est un 2-isomorphisme. En d'autres termes le 2-morphisme $\Upsilon_{\mathrm{id}}q^* \longrightarrow \Psi_{\mathrm{id}}q^*$ *est inversible.*

Démonstration. — Par la remarque 3.5.7. Ψ est la colimite des Υ^n. Il suffira donc de prouver que les morphismes :

$$\Upsilon_{\mathrm{id}}q^* \longrightarrow \Upsilon^n_{\mathrm{id}}q^* \simeq \Upsilon_{\mathrm{id}}(e_n)^*_\eta q^*$$

sont des isomorphismes. Remarquons pour cela, qu'on a un digramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \chi_{\mathrm{id}}q^* \arrow[r] \arrow[d] & \Upsilon_{\mathrm{id}}q^* \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & \chi_{\mathrm{id}}(e_n)^*_\eta q^* \arrow[r] & \Upsilon_{\mathrm{id}}(e_n)^*_\eta q^*
\end{tikzcd}$$

On déduit alors le résultat recherché en utilisant la proposition 3.4.9 qui assure que les deux composées horizontales du diagramme ci-dessus sont des isomorphismes. □

Remarque 3.5.11. — On fera attention que dans la preuve ci-dessus, on a utilisé le foncteur $\Upsilon_{\mathrm{id}}(e_n)^*_\eta$ et non $\Upsilon_{e_n}(e_n)^*_\eta$. En effet, la composée :

$$1 \longrightarrow \chi_{e_n}(e_n)^*_\eta q^* \longrightarrow \Upsilon_{e_n}(e_n)^*_\eta q^*$$

n'est pas inversible en général (voir la remarque 3.4.14).

On peut alors déduire le résultat de normalisation suivant :

Proposition 3.5.12

1- *Soit n un entier inversible sur S. On note c_n le S-schéma* $S[T]/(T^n - 1) \longrightarrow S$. *Il existe un isomorphisme canonique :* $\Psi_{e_n}(e_n)^*_\eta q^* \simeq c_{n*}c_n^*$.

2- Soient n et m des entiers inversibles sur S. On note c_n^m le morphisme étale de S-schémas :

$$S[U,U^{-1}]/(Q^n - U^m) \longrightarrow S[U,U^{-1}]$$

Il existe un isomorphisme canonique : $\Psi_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^* q^* \simeq (c_n^m)_*(c_n^m)^*(e_n^m)_\sigma^*$.

Démonstration. — Notons f l'un des morphismes e_n ou e_n^m. Vu la proposition 3.5.9, on peut remplacer f par f_n. Remarquons alors les faits suivants :

- Le $\mathbb{A}_S^1$-schéma $(e_n)_n$ est donné par :

$$(B_n)_n = S[P,\pi]/P^n - \pi^n \longrightarrow S[\pi]$$

  On définit alors un morphisme de $\mathbb{A}_S^1$-schémas :

$$u:\ S[\pi][T^n - 1] \longrightarrow S[\pi,P]/(P^n - \pi^n)$$

  qui consiste à envoyer P sur $T.\pi$. Il est claire que u est fini, qu'il induit un isomorphisme sur la fibre générique et que sa fibre spéciale est égale à c_n (à une nil-immersion près). De plus, le $\mathbb{A}_S^1$-schéma $S[\pi][T^n - 1]$ est lisse (en fait étale).
- Le $\mathbb{A}_S^1$-schémas $(e_n^m)_n$ est donné par :

$$(B_n^m)_n = S[\pi,U,U^{-1}][P]/(P^n - U^m.\pi^n) \longrightarrow S[\pi]$$

  On définit alors un morphisme de $\mathbb{A}_S^1$-schémas :

$$v:\ S[\pi,U,U^{-1}][Q]/(Q^n - U^m) \longrightarrow S[\pi,U,U^{-1}][P]/(P^n - U^m.\pi^n)$$

  qui consiste à envoyer P sur $Q^{-1}.\pi$. Il est clair que v est fini, qu'il induit un isomorphisme sur sa fibre générique et que sa fibre spéciale est donnée par c_n^m à une nil-immersion près. De plus, le $\mathbb{A}_S^1$-schéma $S[\pi,U,U^{-1}][Q]/(Q^n - U^m)$ est lisse.

On déduit alors que :

$$\Psi_{(e_n)_n\circ u}((e_n)_n \circ u)_\eta^* q^* \simeq ((e_n)_n \circ u)_\sigma^* \quad \text{et} \quad \Psi_{(e_n^m)_n\circ v}((e_n^m)_n \circ v)_\eta^* q^* \simeq ((e_n^m)_n \circ v)_\sigma^*$$

Le résultat découle immédiatement du fait que $u_{\sigma *}\Psi_{(e_n)_n\circ u} \simeq \Psi_{(e_n)_n}$ et $v_{\sigma *}\Psi_{(e_n^m)_n\circ v} \simeq \Psi_{(e_n^m)_n}$. □

Remarque 3.5.13. — La technique utilisée dans la preuve ci-dessus sera utilisée plusieurs fois dans la suite. Par exemple, elle permettra de réduire les conditions à vérifier pour la validité du théorème 3.3.46 au seul cas du B-schéma identité.

3.5.3. Étude de Ψ au-dessus d'un corps de caractéristique nulle. — Dans cette sous-section le schéma de base S sera le spectre d'un corps k de caractéristique nulle. On établira pour Ψ les analogues des théorèmes de constructibilité et de ${}^pt$-positivité pour Υ. Contrairement au cas de Υ ces analogues sont valables à coefficients entiers. C'est là, l'un des principaux avantages de Ψ sur Υ.

Théorème 3.5.14. — *Soit $\Lambda \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$ une classe d'objets quasi-stable par twist de Tate. Alors pour tout $\mathbb{A}^1_k$-schéma quasi-projectif $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$, le foncteur Ψ_f envoie la sous-catégorie $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X_\eta)$ dans $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X_\sigma)$.*

Démonstration. — On applique le corollaire 3.3.49 à $\mathsf{H}'_2 = (\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda)_{|\mathsf{Sch}/\sigma}$ et à la classe d'objets de $\mathsf{H}(\eta)$ formée des q^*A avec $A \in \Lambda$. Ceci nous ramène immédiatement à vérifier que pour $A \in \Lambda$ les objets $\Psi_{e_n}(e_n)^*_\eta q^*A$ et $\Psi_{e_n^m}(e_n^m)^*_\eta q^*A$ sont Λ-constructibles quelque soit les entiers non nuls n et m. Ceci découle immédiatement de la proposition 3.5.12. □

On a également un théorème de ${}^pt$-positivité :

Théorème 3.5.15. — *On se donne un ensemble d'objets $\mathscr{G} \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$. On suppose en plus de l'hypothèse 2.2.58 est vérifiée. Alors pour tout $\mathbb{A}^1_k$-schéma $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$, le foncteur $\Psi_f[-1]$ est ${}^pt$-positif.*

Démonstration. — Par le lemme 3.2.10, les foncteurs $\Psi_?$ commutent aux petites sommes. On appliquera le corollaire 3.3.50 au système de spécialisation $\Psi[-1]$, $\mathsf{H}''_2 = ({}^p\mathsf{H}_{\geq 0})_{|\mathsf{Sch}/\sigma}$ et à l'ensemble d'objets de $\mathsf{H}(\eta)$ qui sont de la forme $q^!A$ avec $A \in \mathscr{G}$.

Il suffit donc de vérifier que les objets $\Psi_{e_n}(e_n)^!_\eta q^!A[-1]$ et $\Psi_{e_n^m}(e_n^m)^!_\eta q^!A[-1]$ sont ${}^pt$-positifs quelque soient les entiers non nuls n et m. En utilisant la proposition 3.5.12 on obtient des isomorphismes :

$$\Psi_{e_n}(e_n)^!_\eta q^!A[-1] \simeq \Psi_{e_n}(e_n)^*_\eta q^*A(1)[1] \simeq c_{n*}c_n^*A(1)[1] \simeq c_{n!}c_n^!A(1)[1]$$

$$\begin{aligned}\Psi_{e_n^m}(e_n^m)^!_\eta q^!A[-1] \simeq \Psi_{e_n^m}(e_n^m)^*_\eta q^*A(2)[3] &\simeq (c_n^m)_*(c_n^m)^*(e_n^m)^*_\sigma A(2)[3] \\ &\simeq (c_n^m)_!(c_n^m)^!(e_n^m)^!_\sigma A(1)[1]\end{aligned}$$

étant donné que $(e_n)_\eta$ et $(e_n^m)_\eta$ sont lisses de fibré normal trivial et que à nil-immersion près $(e_n)_\sigma$ et $(e_n^m)_\sigma$ sont également lisses de fibrés normal trivial. Le résultat découle alors du fait que l'objet $A(1)[1]$ est bien ${}^pt$-positif dans $\mathsf{H}(\sigma)$. □

Notons le corollaire suivant :

Corollaire 3.5.16. — *Sous les hypothèses et conditions du théorème précédent, le foncteur $\Psi_{\mathrm{id}} : \mathsf{H}(\mathbb{G}m_k) \longrightarrow \mathsf{H}(k)$ est t-positif.*

Démonstration. — En effet, par les théorème 2.2.82 et 2.2.86 on a l'inclusion $\mathsf{H}_{\geq 1}(\mathbb{G}m_k) \subset {}^p\mathsf{H}_{\geq 0}(\mathbb{G}m_k)$ et l'égalité $\mathsf{H}_{\geq 0}(\sigma) = {}^p\mathsf{H}_{\geq 0}(\sigma)$. Ainsi si $E \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(\mathbb{G}m_k))$ est t-positif, alors $A[+1]$ est ${}^pt$-positif et $\Psi_{\mathrm{id}}(A[+1])[-1] \simeq \Psi_{\mathrm{id}}A$ est ${}^pt$-positif (par le théorème ci-dessus) donc t-positif. □

Supposons dans la suite que $\mathbb{H}$ est un dérivateur algébrique monoïdal, homotopique et stable. Le système de spécialisation Ψ est donc naturellement un système de spécialisation pseudo-monoïdal et le morphisme $\Upsilon \longrightarrow \Psi$ respecte les accouplements.

Une des propriétés qu'ont les foncteurs cycles proches totaux et que n'ont pas les foncteurs cycles proches unipotents (même à coefficients rationnels) est :

Théorème 3.5.17. — *(Commutation au produit extérieur) On se donne une classe d'objets Λ dans $\mathsf{H}(k)$. Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ et $g : Y \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ deux $\mathbb{A}^1_k$-schémas. Soient $A \in \mathsf{H}(X_\eta)$ et $B \in \mathsf{H}(Y_\eta)$ deux objets Λ-constructibles. Le morphisme canonique de $\mathsf{H}(X_\sigma \times_\sigma Y_\sigma)$:*

$$\Psi_f(A) \boxtimes \Psi_g(B) \longrightarrow \Psi_{f \times_{\mathbb{A}^1_k} g}(A \boxtimes B)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas $\Lambda = \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$. Fixons d'abord le k-schéma X et l'objet A et faisons varier Y et B. En combinant les propositions 3.1.6 3.1.13, on obtient deux systèmes de spécialisation $\Psi^{X_\eta, A}$ et $\Psi^{X_\sigma, \Psi_f(A)}$ de $\mathsf{H}_{|\mathsf{Sch}/\eta}$ vers le 2-foncteur homotopique stable H_{X_σ} défini sur Sch/σ par $\mathsf{H}_{X_\sigma}(T) = \mathsf{H}(X_\sigma \times_k T)$. Ces systèmes de spécialisation sont donnés par :

- $\Psi_g^{X_\eta, A}(-) = \Psi_{f \times g}(A \boxtimes -)$,
- $\Psi_g^{X_\sigma, \Psi_f(A)}(-) = \Psi_f(A) \boxtimes \Psi_g(-)$.

Le morphisme de l'énoncé défini un morphisme de systèmes de spécialisation. Ainsi par le théorème 3.3.46, il suffit de considérer les cas : $g = e_n$ ou $g = e_n^m$ et $B = (e_n)_\eta^* q^* D$ ou $B = (e_n^m)_\eta^* q^* D$ avec $D \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$. Comme pour la preuve de la proposition 3.5.12, on a la liberté de remplacer g par g_n. Il est également facile (en utilisant la formule de projection pour les images directes projectives cohomologiques) de se ramener à $g = e_n \circ u$ et $g = e_n^m \circ v$ (avec les notations de la preuve de la proposition 3.5.12). Mais dans ces cas, g est lisse. Ceci prouve qu'il suffit de prendre $g = \mathrm{id}$ et $B = q^* D$.

Par symétrie, on peut également supposer que $f = \mathrm{id}$ et $A = q^* C$. Il suffit donc de prouver que l'accouplement :

$$\Psi_{\mathrm{id}} q^* C \otimes \Psi_{\mathrm{id}} q^* D \longrightarrow \Psi_{\mathrm{id}} q^*(C \otimes D)$$

est inversible. Ceci est vrai par la proposition 3.5.12 qui affirme que le foncteur pseudo-monoïdal $\Psi_{\mathrm{id}} q^*$ est isomorphe au foncteur pseudo-monoïdal identité. □

Corollaire 3.5.18. — *Gardons les notations du théorème précédent. On suppose que H admet les petites sommes, qu'il est parfait pour elles et qu'il est engendré par la base. Alors l'accouplement extérieur :*

$$\Psi_f(A) \boxtimes \Psi_g(B) \longrightarrow \Psi_{f \times_B g}(A \boxtimes B)$$

est un isomorphisme pour tout $(A, B) \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(X_\eta)) \times \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(Y_\eta))$.

Démonstration. — En effet, sous ces conditions, les foncteur Ψ_f ainsi que le produit tensoriel commutent aux petites sommes. □

Le cas $f = g = \mathrm{id}$ est particulièrement intéressant :

Corollaire 3.5.19. — *Sous les hypothèses du corollaire précédent, le foncteur* $\Psi_{\mathrm{id}} : \mathsf{H}(\eta) \longrightarrow \mathsf{H}(s)$ *est monoïdal.*

Supposons en plus que le 2-foncteur H est fermé à droite. On notera simplement $\underline{\mathsf{Hom}}(-,-)$ à la place de $\underline{\mathsf{Hom}}_d(-,-)$ les bifoncteurs homomorphismes internes qu'on supposera triangulés en les deux variables. On a le théorème suivant :

Théorème 3.5.20. — *Soit* $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ *un* $\mathbb{A}^1_k$*-schéma quasi-projectif. On fixe un objet* R *de* $\mathsf{H}(k)$*. On définit les opérateurs de dualités* $\mathsf{D}_\eta : \mathsf{H}(X_\eta) \longrightarrow \mathsf{H}(X_\eta)^{\mathrm{op}}$ *et* $\mathsf{D}_\sigma : \mathsf{H}(X_\sigma) \longrightarrow \mathsf{H}(X_\sigma)^{\mathrm{op}}$ *par les formules :*

$$\mathsf{D}_\eta(-) = \underline{\mathsf{Hom}}(-, f_\eta^! q^* R) \qquad \text{et} \qquad \mathsf{D}_\sigma(-) = \underline{\mathsf{Hom}}(-, f_\sigma^! R)$$

On définit un morphisme de commutation à la dualité : $\Psi_f \mathsf{D}_\eta \longrightarrow \mathsf{D}_\sigma \Psi_f$ *en prenant la composée :*

$$\Psi_f \mathsf{D}_\eta = \Psi_f \mathsf{D}_f^{q^* R} \longrightarrow \mathsf{D}_f^{\Psi_{\mathrm{id}} q^* R} \Psi_f \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}_f^R \Psi_f = \mathsf{D}_\sigma \Psi_f$$

avec les notations de la proposition 3.1.16 et du corollaire 3.1.18. Pour toute classe d'objets $\Lambda \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$ *et tout objet* E *de* $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X_\eta)$ *le morphisme :*

$$\Psi_f \mathsf{D}_\eta(E) \longrightarrow \mathsf{D}_\sigma \Psi_f(E)$$

est inversible.

Démonstration. — Il suffit bien évidement de considérer le cas $\Lambda = \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$. On adopte les notations de la proposition 3.1.16. On montrera que le morphisme : $\Psi_f \mathsf{D}_f^{q^* R}(E) \longrightarrow \mathsf{D}_f^{\Psi_{\mathrm{id}} q^* R} \Psi_f(E)$ est inversible. Par le corollaire 3.1.18, on sait que le morphisme en question est sous-jacent à un morphisme de systèmes de spécialisation :

$$\Psi \mathsf{D}^{q^* R} \longrightarrow \mathsf{D}^{\Psi_{\mathrm{id}} q^* R} \Psi$$

En appliquant le théorème 3.3.46, on se ramène à traiter le cas $f = e_n$ ou $f = e_n^m$ et $E = q^*(e_n)_\eta^* q^* F$ ou $E = q^*(e_n^m)_\eta^* q^* F$ pour $F \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$. On dispose d'un diagramme commutatif de systèmes de spécialisation :

$$\begin{tikzcd}
\Psi \circ \mathsf{D}^{q^* R} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathsf{D}^{\Psi_{\mathrm{id}} q^* R} \circ \Psi \\
(e_n \bullet \Psi) \circ \mathsf{D}^{q^* R} \arrow[r] & \mathsf{D}^{(e_n \bullet \Psi)_{\mathrm{id}} q^* R} \circ (e_n \bullet \Psi) \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Ceci nous permettra de remplacer e_n et e_n^m par $(e_n)_n$ et $(e_n^m)_n$. En utilisant la commutation avec la dualité des images directes cohomologiques par des morphismes projectifs, on se ramène même à supposer que f est égal à $(e_n)_n \circ u$ ou $(e_n^m)_n \circ v$ (avec les notations de la preuve de la proposition 3.5.12). Mais alors f est lisse, ce qui nous ramène en fin de compte à $f = \mathrm{id}$. Pour traiter ce cas, on procède comme pour la preuve du théorème 3.4.20.

Par définition, le morphisme en question est obtenu par adjonction de l'accouplement :

$$\Psi_{\mathrm{id}}\mathsf{D}_{\mathrm{id}}^{q^*R}(q^*A)\otimes\Psi_{\mathrm{id}}(q^*A)\longrightarrow\Psi_{\mathrm{id}}\mathsf{D}_{\mathrm{id}}^{q^*R}(q^*A)\otimes(q^*A)\longrightarrow\Psi_{\mathrm{id}}(q^*R)$$

Remarquons que $D_{\mathrm{id}}^{q^*R}(q^*A)=\underline{\mathsf{Hom}}(q^*A,q^*R)\simeq q^*\underline{\mathsf{Hom}}(A,R)$ puisque q est lisse. On se ramène donc à étudier l'accouplement :

$$\Psi_{\mathrm{id}}q^*\underline{\mathsf{Hom}}(A,R)\otimes\Psi_{\mathrm{id}}q^*A\longrightarrow\Psi_{\mathrm{id}}q^*(\underline{\mathsf{Hom}}(A,R)\otimes A)\longrightarrow\Psi_{\mathrm{id}}q^*R$$

Par la proposition 3.5.12, on dispose d'un isomorphisme de foncteurs pseudo-monoïdaux $\mathrm{Id}\simeq\Psi_{\mathrm{id}}q^*$. Il vient que l'accouplement ci-dessus est isomorphe à l'accouplement évident : $\underline{\mathsf{Hom}}(A,R)\otimes A\longrightarrow R$. Cet accouplement fournit par adjonction l'isomorphisme identité : $\underline{\mathsf{Hom}}(A,R)=\underline{\mathsf{Hom}}(A,R)$. Le théorème est prouvé. □

3.6. Le système de spécialisation logarithmique et le triangle de monodromie

Le but de cette section est de construire un 2-triangle de systèmes de spécialisation :

$$\Upsilon(-1)[-1]\longrightarrow\chi\longrightarrow\Upsilon\xrightarrow{N}\Upsilon(-1) \tag{26}$$

qu'on appellera le triangle de monodromie. La transformation naturelle N jouera le rôle de l'opérateur de monodromie, bien connu dans les situations classiques. Pour mener à bien notre construction, on va devoir supposer que H est $\mathbb{Q}$-linéaire, ainsi que d'autres conditions techniques. Toutefois, ces conditions sont vérifiées pour les 2-foncteurs homotopiques stables $\mathbf{DM}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbf{SH}_{\mathbb{Q}}$ (lorsque le corps de base n'est pas ordonnable). On aura besoin d'introduire un système de spécialisation auxiliaire log. Pour le construire, quelques préliminaires sont nécessaires :

3.6.1. Préliminaires. — Le système de spécialisation log sera construit à partir de χ en prenant pour $\mathsf{log}_f(-)$ le foncteur $\chi_f(-\otimes f_\eta^*\mathscr{L}og)$ avec $\mathscr{L}og$ un objet $\mathsf{H}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ bien choisi qu'on appellera le logarithme. Cet objet, ou plutôt son dual considéré comme un pro-objet, est bien connu. Il intervient par exemple dans la construction des polylogarithmes (voir [**BD94**] et [**Wil97**]). Notons que classiquement, le logarithme a été considéré dans les catégories de réalisations (faisceaux ℓ-adiques, modules de Hodge, etc) pour lesquels on dispose de t-structures motiviques. Ceci facilite la construction puisqu'on est ramené à raisonner dans le coeur motivique qui est une catégorie abélienne tensorielle. Étant donné que l'existence d'une t-structure motivique pour $\mathbf{DM}_{\mathbb{Q}}$ est l'un des problèmes ouverts les plus difficiles dans la théorie des motifs, une construction directe basée sur des techniques triangulées s'impose. Le but de ces préliminaires est de formaliser la construction de l'objet $\mathscr{L}og$ dans le cadre d'une catégorie triangulée (par opposition au cadre abélien).

On se donne une catégorie monoïdale triangulée $(\mathcal{T}, \otimes)$ symétrique et unitaire au sens de 2.1.148. On supposera que $\mathcal{T}$ est $\mathbb{Q}$-linéaire et pseudo-abélienne et on notera $\mathbb{1}$ son objet unité. Étant donné un objet A de $\mathcal{T}$, on déduit des représentations de l'algèbre du groupe symétrique $\mathbb{Q}[\Sigma_n]$ sur $A^{\otimes n}$ par la méthode usuelle. Étant donné un projecteur p de $\mathbb{Q}[\Sigma_n]$ on peut donc parler de l'image $\mathsf{Image}(p : A^{\otimes n})$ de p dans $A^{\otimes n}$. Lorsque $p = \frac{1}{n!}\sum_{g\in\Sigma_n} g$ (resp. $p = \frac{1}{n!}\sum_{g\in\Sigma_n} \mathrm{sign}(g).g$) on notera cette image par $\mathsf{Sym}^n A$ (resp. $\mathsf{Alt}^n A$).

On supposera donné un triangle distingué de $\mathcal{T}$:

$$\nu \xrightarrow{a} \mathscr{E} \xrightarrow{b} \lambda \xrightarrow{c} \nu[+1] \tag{27}$$

tel que les conditions de l'hypothèse suivante sont vérifiées :

Hypothèse 3.6.1

1- Les objets ν et λ sont inversibles et les objets $\mathsf{Alt}^2\nu$ et $\mathsf{Alt}^2\lambda$ sont nuls,

2- Les groupes d'homomorphismes $\hom_{\mathcal{T}}(\nu^{\otimes n}, \lambda^{\otimes n}[k])$ sont nuls pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $k \in \{-1, 0\}$.

3- Le groupe d'homomorphisme $\hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu)$ est nul. L'annulateur dans $\mathrm{end}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1})$ de l'élément $c \in \hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu[+1])$ est réduit à l'idéal nul.

Remarque 3.6.2. — Les données ci-dessus sont autoduales. En effet, dans $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$, le triangle distingué :

$$\nu' \xrightarrow{a'} \mathscr{E}' \xrightarrow{b'} \lambda' \xrightarrow{c'} \nu'[+1]$$

avec $\nu' = \lambda$, $\lambda' = \nu$, $a' = b^{\mathrm{op}}$, $b' = a^{\mathrm{op}}$ et $c' = -(c[-1])^{\mathrm{op}}$ vérifie bien les conditions de l'hypothèse 3.6.1. Ceci permettra d'effectuer des raisonnements par dualité dans la suite.

Les trois lemmes suivants seront utilisés au cours de la preuve de la proposition 3.6.6. Ils sont des conséquences directes de l'hypothèse 3.6.1 :

Lemme 3.6.3. — *Le triangle distingué (27) n'admet pas d'endomorphismes non triviaux induisant l'identité sur $\mathscr{E}$. En particulier, une flèche $\alpha : \nu \longrightarrow \nu$ rendant commutatif le carré :*

$$\begin{tikzcd} \nu \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathscr{E} \arrow[d, equal] \\ \nu \arrow[r, "a"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

est forcément l'identité de ν. De même, une flèche $\beta : \lambda \longrightarrow \lambda$ rendant commutatif le carré :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & \lambda \arrow[d, "\beta"] \\ \mathscr{E} \arrow[r, "b"] & \lambda \end{tikzcd}$$

est forcément l'identité de λ.

Démonstration. — On se donne un endomorphisme du triangle distingué (27) :

$$\begin{tikzcd}
\nu \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathscr{E} \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & \lambda \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \nu[+1] \arrow[d, "\alpha"] \\
\nu \arrow[r, "a"] & \mathscr{E} \arrow[r, "b"] & \lambda \arrow[r] & \nu[+1]
\end{tikzcd}$$

En retranchant à cet endomorphisme, l'automorphisme identité, on obtient l'endomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
\nu \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha - \mathrm{id}"'] & \mathscr{E} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "0"] & \lambda \arrow[r] \arrow[d, "\beta - \mathrm{id}"] & \nu[+1] \arrow[d, "\alpha - \mathrm{id}"] \\
\nu \arrow[r, "a"] & \mathscr{E} \arrow[r, "b"] & \lambda \arrow[r] & \nu[+1]
\end{tikzcd}$$

On prouvera que $\alpha - \mathrm{id} = 0$ et $\beta - \mathrm{id} = 0$. Par dualité (voir la remarque 3.6.2) il suffit de traiter uniquement la première égalité. En remarquant que la composée :

$$\nu \xrightarrow{\alpha - \mathrm{id}} \nu \xrightarrow{a} \mathscr{E}$$

est nulle, on déduit une factorisation :

$$\begin{tikzcd}
 & \nu \arrow[d, "\alpha - \mathrm{id}"] \arrow[dl, dotted] \\
\lambda[-1] \arrow[r] & \nu
\end{tikzcd}$$

Mais par l'hypothèse $\hom_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda[-1]) = 0$. D'où le résultat. □

Lemme 3.6.4. — *On a les annulations suivantes :* $\hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathscr{E}) = 0$, $\hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E}, \nu) = 0$. *On a également les deux chaînes d'isomorphismes :*

$$\hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \hom_{\mathcal{T}}(\nu, \mathscr{E}) \xleftarrow{\sim} \hom_{\mathcal{T}}(\nu, \nu) \simeq \mathrm{end}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1})$$

$$\hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E}, \lambda) \xleftarrow{\sim} \hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \lambda) \simeq \mathrm{end}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1})$$

Démonstration. — Montrons d'abord que $\hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathscr{E}) = 0$. Pour cela, on écrit les premiers termes de la suite exacte longue associée au triangle (27) :

$$\hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathscr{E}) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \lambda) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu[+1])$$

Par hypothèse, on a : $\hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu) = 0$. Il reste à prouver que : $\hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \lambda) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \nu[+1])$ est injectif. Cet homomorphisme envoie l'identité de λ sur le morphisme connectant c du triangle (27). C'est également un morphisme de $\mathrm{end}(\mathbb{1})$-module. Étant donné que λ est inversible, $\mathrm{end}(\lambda)$ est un $\mathrm{end}(\mathbb{1})$-module libre de rang 1 engendré par id_λ. Il vient par la troisième condition de l'hypothèse 3.6.1 que l'homomorphisme qui nous préoccupe est bien injectif. Par dualité (voir la remarque 3.6.2) on obtient également l'annulation de $\hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E}, \nu)$.

Passons aux chaînes d'isomorphismes. Notons tout de suite que la seconde chaîne s'obtient à partir de la première par dualité (voir remarque 3.6.2). Considérons l'homomorphisme :

$$\hom_{\mathcal{T}}(\nu, \nu) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\nu, \mathscr{E}) \tag{28}$$

Écrivons les premiers termes de la suite exacte longue associée au triangle (27) :

$$\hom_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda[-1]) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\nu, \nu) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\nu, \mathscr{E}) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda)$$

Par hypothèse, $\hom_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda) = \hom_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda[-1]) = 0$. Il vient que l'homomorphisme (28) est bien inversible. En particulier, $\hom_{\mathcal{T}}(\nu, \mathscr{E})$ est un $\mathrm{end}(\mathbb{1})$-module libre de rang 1 engendré par a.

Pour terminer, il nous reste à traiter l'homomorphisme :

$$\hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\nu, \mathscr{E}) \tag{29}$$

Écrivons les premiers termes de la suite exacte longue associée au triangle (27) :

$$\hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathscr{E}) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\nu, \mathscr{E})$$

On a vu que $\hom_{\mathcal{T}}(\lambda, \mathscr{E}) = 0$. Ceci montre que (29) est injectif. Montrons qu'il est également surjectif. Remarquons pour cela, que l'identité de $\mathscr{E}$ est envoyée sur a par cet homomorphisme. La surjectivité découle alors du fait que (29) est un morphisme de $\mathrm{end}(\mathbb{1})$-modules et que $\hom_{\mathcal{T}}(\nu, \mathscr{E})$ est engendré par a en tant que $\mathrm{end}(\mathbb{1})$-module. □

Lemme 3.6.5. - *On a* $\hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E} \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda) = 0$ *et* $\hom_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \nu[+1], \mathscr{E} \otimes \lambda) = 0$.

Démonstration. - Pour $\hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E} \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda)$ il suffit de considérer la suite exacte :

$$\hom_{\mathcal{T}}(\lambda \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E} \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda)$$

Par dualité, on a l'annulation de $\hom_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \nu[+1], \mathscr{E} \otimes \lambda)$. □

La proposition suivante jouera un rôle important dans la suite, notamment dans la construction des triangles distingués du théorème 3.6.10 :

Proposition 3.6.6. - *Il existe un unique morphisme* $l : \mathsf{Alt}^2(\mathscr{E}) \longrightarrow \nu \otimes \lambda$ *rendant commutatif le carré suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r, "l"] \arrow[d] & \nu \otimes \lambda \arrow[d, "a \otimes \mathrm{id}"] \\ \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b"] & \mathscr{E} \otimes \lambda \end{tikzcd} \tag{30}$$

De même, il existe un unique morphisme $k : \nu \otimes \lambda \longrightarrow \mathsf{Alt}^2\mathscr{E}$ *rendant commutatif le carré suivant :*

$$\begin{tikzcd} \nu \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "a \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes b"'] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[d] \\ \nu \otimes \lambda \arrow[r, "k"] & \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \end{tikzcd} \tag{31}$$

De plus les morphismes l *et* k *sont des isomorphismes tels que :* $l \circ k = \frac{1}{2}\mathrm{id}_{\nu\otimes\lambda}$ *et* $k \circ l = \frac{1}{2}\mathrm{id}_{\mathsf{Alt}^2\mathscr{E}}$.

Démonstration. — On divise la preuve en plusieurs étapes. On montre d'abord l'existence de l et k. Ensuite, on prouve la relation $2l \circ k = \mathrm{id}$. On utilisera ceci pour construire un triangle distingué de la forme :

$$\nu \otimes \nu \longrightarrow \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \longrightarrow \nu \otimes \nu[+1] \tag{32}$$

pour lequel on explicitera l'action du groupe symétrique $\Sigma_2 = \{+1, -1\}$. On montrera que l est inversible en passant au facteur direct alterné de ce triangle distingué. La dernière étape est consacrée à l'unicité de l et k.

Étape 1. Construction de l *et de* k. — La composée :

$$\mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes b} \mathscr{E} \otimes \lambda \xrightarrow{b \otimes \mathrm{id}} \lambda \otimes \lambda$$

est nulle. En effet, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Alt}^2\lambda \arrow[d] \\ \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{E} \otimes \lambda \arrow[r] & \lambda \otimes \lambda \end{tikzcd}$$

et l'objet $\mathsf{Alt}^2\lambda$ est nul. En utilisant le triangle distingué : $\nu\otimes\lambda \longrightarrow \mathscr{E}\otimes\lambda \longrightarrow \lambda\otimes\lambda \longrightarrow$, on déduit une flèche l : $\mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \longrightarrow \nu \otimes \lambda$ faisant commuter le carré :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r, dotted, "l"] \arrow[d] & \nu \otimes \lambda \arrow[d, "a \otimes \mathrm{id}"] \\ \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b"] & \mathscr{E} \otimes \lambda \end{tikzcd}$$

On procède de même pour construire une flèche k. La composée :

$$\nu \otimes \nu \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes a} \nu \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Alt}^2\mathscr{E}$$

est nulle. En effet, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \nu \otimes \nu \arrow[r] \arrow[d] & \nu \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[d] \\ \mathsf{Alt}^2\nu \arrow[rr] & & \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \end{tikzcd}$$

et l'objet $\mathsf{Alt}^2\nu$ est nul. En utilisant le triangle distingué : $\nu\otimes\lambda \longrightarrow \mathscr{E}\otimes\lambda \longrightarrow \lambda\otimes\lambda \longrightarrow$, on déduit une flèche k : $\nu\otimes\lambda \longrightarrow \mathsf{Alt}^2\mathscr{E}$ faisant commuter le carré :

$$\begin{tikzcd}
\nu\otimes\mathscr{E} \arrow[r, "a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes b"'] & \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \arrow[d] \\
\nu\otimes\lambda \arrow[r, dotted, "k"] & \mathsf{Alt}^2\mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

On a ainsi montré l'existence des flèches l et k de l'énoncé.

Étape 2. La relation $2l\circ k = \mathrm{id}_{\nu\otimes\lambda}$. — Formons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\nu\otimes\mathscr{E} \arrow[r, "a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes b"'] & \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \arrow[d] & & \\
\nu\otimes\lambda \arrow[r, "k"] & \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r, "l"] \arrow[d] & \nu\otimes\lambda \arrow[d, "a\otimes\mathrm{id}"] \\
& \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes b"] & \mathscr{E}\otimes\lambda
\end{tikzcd}$$

On déduit que les deux composées suivantes sont égales :

$$\nu\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes b} \nu\otimes\lambda \xrightarrow{l\circ k} \nu\otimes\lambda \xrightarrow{a\otimes\mathrm{id}} \mathscr{E}\circ\lambda \tag{33}$$

$$\nu\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{a\otimes\mathrm{id}} \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{\frac{1}{2}(\mathrm{id}-\tau)} \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes b} \mathscr{E}\circ\lambda \tag{34}$$

Nous affirmons que la composée : $\nu\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{a\otimes\mathrm{id}} \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes b} \mathscr{E}\circ\lambda$ est nulle. En effet cette composée est clairement égale à celle de :

$$\nu\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}\otimes\nu \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes a} \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes b} \mathscr{E}\otimes\lambda$$

et la composée $b\circ a$ est nulle puisque le triangle (27) est distingué. Nous déduisons de cela que la composée de (33) est égale à celle de :

$$\nu\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{a\otimes\mathrm{id}} \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{\frac{1}{2}\mathrm{id}} \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes b} \mathscr{E}\otimes\lambda$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\nu\otimes\mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes b"] \arrow[d, "a\otimes\mathrm{id}"'] & \nu\otimes\lambda \arrow[r, "2l\circ k"] & \nu\otimes\lambda \arrow[d, "a\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes b"'] & & \mathscr{E}\otimes\lambda
\end{tikzcd}$$

D'autre part, le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} \nu \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b"] \arrow[d, "a \otimes \mathrm{id}"'] & \nu \otimes \lambda \arrow[d, "a \otimes \mathrm{id}"] \\ \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b"] & \mathscr{E} \otimes \lambda \end{tikzcd}$$

est trivialement commutatif. On en déduit que la composée suivante :

$$\nu \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes b} \nu \otimes \lambda \xrightarrow{2l \circ k - \mathrm{id}} \nu \otimes \lambda \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} \mathscr{E} \otimes \lambda$$

est nulle. En utilisant le triangle distingué : $\nu \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \nu \otimes \lambda \longrightarrow \nu \otimes \nu[+1] \longrightarrow$, on déduit l'existence d'une flèche $\nu \otimes \nu[+1] \longrightarrow \mathscr{E} \otimes \lambda$ rendant commutatif le carré :

$$\begin{tikzcd} \nu \otimes \lambda \arrow[r, "2l \circ k - \mathrm{id}"] \arrow[d] & \nu \otimes \lambda \arrow[d, "a \otimes \mathrm{id}"] \\ \nu \otimes \nu[+1] \arrow[r, dotted] & \mathscr{E} \otimes \lambda \end{tikzcd}$$

Par le lemme 3.6.5, on a $\hom_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \nu[+1], \mathscr{E} \otimes \lambda) = 0$. Il vient immédiatement que le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} \nu \otimes \lambda \arrow[r, "a \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "2l \circ k"'] & \mathscr{E} \otimes \lambda \arrow[d, equal] \\ \nu \otimes \lambda \arrow[r, "a \otimes \mathrm{id}"] & \mathscr{E} \otimes \lambda \end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme λ est un objet inversible, on peut appliquer le lemme 3.6.3 pour conclure que $2l \circ k = \mathrm{id}$.

Étape 3. Le triangle distingué (32). — Dans cette étape on construit le triangle distingué annoncé au début de la démonstration. On introduit le morphisme m : $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \nu \otimes \lambda$ défini par la composée :

$$m : \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Alt}^2 \mathscr{E} \xrightarrow{2l} \nu \otimes \lambda$$

Le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \nu \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b"] \arrow[d, "a \otimes \mathrm{id}"'] & \nu \otimes \lambda \arrow[d, equal] \\ \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "m"] & \nu \otimes \lambda \end{tikzcd}$$

En effet, on peut le factoriser de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} \nu \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b"] \arrow[d, "a \otimes \mathrm{id}"'] & \nu \otimes \lambda \arrow[d, "k"] \arrow[dr, equal] & \\ \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Alt}^2 \mathscr{E} \arrow[r, "2l"] & \nu \otimes \lambda \end{tikzcd}$$

En utilisant que $b \circ a = 0$, on déduit immédiatement un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\nu \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "a \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes b"'] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[d, "\binom{m}{b \otimes \mathrm{id}}"] \\
\nu \otimes \lambda \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{0}"] & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E})
\end{tikzcd}$$

qu'on complète en un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\nu \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "a \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes b"'] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "b \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\binom{m}{b \otimes \mathrm{id}}"] & \lambda \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "c \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\gamma"] & \nu \otimes \mathscr{E}[+1] \arrow[d, "a \otimes \mathrm{id}"] \\
\nu \otimes \lambda \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{0}"] & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \arrow[r, "(0, \mathrm{id})"] & \lambda \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "0"] & \nu \otimes \lambda
\end{tikzcd}$$

Nous affirmons que la flèche γ dans le diagramme ci-dessus est l'identité. En effet, on voit immédiatement que la composée suivante :

$$\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{b \otimes \mathrm{id}} \lambda \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{\gamma - \mathrm{id}_{\lambda \otimes \mathscr{E}}} \lambda \otimes \mathscr{E}$$

est nulle. En utilisant le triangle distingué : $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \lambda \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \nu \otimes \mathscr{E}[+1] \longrightarrow$, on voit que la flèche $\gamma - \mathrm{id}$ se factorise de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
\lambda \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\gamma - \mathrm{id}"] \arrow[d, "c \otimes \mathrm{id}"'] & \lambda \otimes \mathscr{E} \\
\nu \otimes \mathscr{E}[+1] \arrow[ur, dotted, "d"'] &
\end{tikzcd}$$

On dispose d'une suite exacte :

$$\hom_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \mathscr{E}[+1], \lambda \otimes \nu) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \mathscr{E}[+1], \lambda \otimes \mathscr{E}) \longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \mathscr{E}[+1], \lambda \otimes \lambda)$$

Par le lemme 3.6.5, on sait que $\hom_{\mathcal{T}}(\nu \otimes \mathscr{E}[+1], \lambda \otimes \lambda) = 0$. Il vient que le premier homomorphisme est surjectif. Il existe donc une flèche $e : \nu \otimes \mathscr{E}[+1] \longrightarrow \lambda \otimes \nu$ qui factorise d. On dispose ainsi d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\lambda \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\gamma - \mathrm{id}"] \arrow[d, "c \otimes \mathrm{id}"'] & \lambda \otimes \mathscr{E} \\
\nu \otimes \mathscr{E}[+1] \arrow[ur, "d"'] \arrow[r, dotted, "e"'] & \lambda \otimes \nu \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes a"']
\end{tikzcd}$$

La relation $\gamma = \mathrm{id}$ découle alors du fait que $\hom_{\mathcal{T}}(\lambda \otimes \mathscr{E}, \lambda \otimes \nu) \simeq \hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E}, \nu) = 0$ (voir le lemme 3.6.4).

Ainsi, on dispose d'un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\nu \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "a \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes b"'] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "b \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\binom{m}{b \otimes \mathrm{id}}"] & \lambda \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "c \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & \nu \otimes \mathscr{E}[+1] \arrow[d, "a \otimes \mathrm{id}"] \\
\nu \otimes \lambda \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{0}"] & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \arrow[r, "(0, \mathrm{id})"] & \lambda \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "0"] & \nu \otimes \lambda
\end{tikzcd}$$

En appliquant l'axiome de l'octaèdre, on déduit l'existence d'un triangle distingué :

$$\nu \otimes \nu \xrightarrow{a \otimes a} \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{\binom{m}{b \otimes \mathrm{id}}} (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \longrightarrow \nu \otimes \nu[+1] \tag{35}$$

C'est le triangle distingué recherché.

Étape 4. L'action de Σ_2 sur (35). — On cherche à utiliser le triangle distingué (35) pour mieux comprendre l'action de Σ_2 sur $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ afin de pouvoir identifier $\mathsf{Alt}^2\mathscr{E}$ avec $\nu \otimes \lambda$. On notera τ la permutation des facteurs. On peut compléter le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\lambda \otimes \lambda \arrow[r, "a \otimes a"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[d, "\tau"] \\
\lambda \otimes \lambda \arrow[r, "a \otimes a"] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

en un isomorphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\nu \otimes \nu \arrow[r, "a \otimes a"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\binom{m}{b \otimes \mathrm{id}}"] \arrow[d, "\tau"] & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \arrow[r] \arrow[d, "u = \binom{x\ y}{z\ t}"] & \nu \otimes \nu[+1] \arrow[d, "\tau"] \\
\nu \otimes \nu \arrow[r, "a \otimes a"] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\binom{m}{b \otimes \mathrm{id}}"] & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \arrow[r] & \nu \otimes \nu[+1]
\end{tikzcd}$$

On va calculer la matrice de l'isomorphisme u. Remarquons tout de suite que $y = 0$ étant donné que $\hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E}, \nu) = 0$ (voir le lemme 3.6.4) et que λ est inversible. Notre matrice est donc triangulée inférieure et on peut former le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\binom{m}{b \otimes \mathrm{id}}"] \arrow[d, "\tau"] & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \arrow[r, "(\mathrm{id}, 0)"] \arrow[d, "u = \binom{x\ 0}{z\ t}"] & \nu \otimes \lambda \arrow[d, "x"] \\
\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\binom{m}{b \otimes \mathrm{id}}"] & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \arrow[r, "(\mathrm{id}, 0)"] & \nu \otimes \lambda
\end{tikzcd}$$

La composée des flèches horizontales est égale à m et donc à la composée : $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \xrightarrow{2l} \nu \otimes \lambda$. Étant donné que $2l$ admet une section (donnée par k) on déduit que $x = -\mathrm{id}_{\nu \otimes \lambda}$ du fait que τ agit par $-\mathrm{id}$ sur $\mathsf{Alt}^2\mathscr{E}$.

Montrons que $t = \mathrm{id}_{\lambda \otimes \mathscr{E}}$. Par le lemme 3.6.4 (et du fait que λ est inversible), il existe un unique $t' : \lambda \otimes \lambda \longrightarrow \lambda \otimes \lambda$ tel que le carré suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\lambda \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b"] \arrow[d, "t"'] & \lambda \otimes \lambda \arrow[d, "t'"] \\
\lambda \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b"] & \lambda \otimes \lambda
\end{tikzcd}$$

De plus, pour montrer que $t = \mathrm{id}$, il suffit de montrer que $t' = \mathrm{id}$, ce que l'on fera. Nous affirmons que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \lambda \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \lambda \otimes \lambda \arrow[d, "t'"] \\
(\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \arrow[r] & \lambda \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \lambda \otimes \lambda
\end{tikzcd}$$

En effet, il faut vérifier que la composée :

$$\nu \otimes \lambda \xrightarrow{z} \lambda \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \lambda \otimes \lambda$$

est nulle. Ceci est vrai étant donné que λ est inversible et que $\hom_{\mathcal{T}}(\nu, \lambda) = 0$. Il vient que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & \lambda \otimes \lambda \arrow[d, "t'"] \\
\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \lambda \otimes \lambda
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathsf{Alt}^2 \lambda = 0$, le carré suivant est également commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & \lambda \otimes \lambda \arrow[d, equal] \\
\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \lambda \otimes \lambda
\end{tikzcd}$$

Comme τ est un isomorphisme, on déduit que la composée :

$$\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \lambda \otimes \lambda \xrightarrow{\mathrm{id} - t'} \lambda \otimes \lambda$$

est nulle. Par dualité, on dispose d'un triangle distingué analogue à (35), à savoir :

$$(\nu \otimes \lambda) \oplus \mathscr{E} \otimes \nu \longrightarrow \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \lambda \otimes \lambda \longrightarrow$$

Il vient que $\mathrm{id} - t'$ se factorise par $((\nu \otimes \lambda) \oplus (\mathscr{E} \otimes \nu))[+1]$. Ainsi pour montrer que $t' = \mathrm{id}$, il suffira de montrer que : $\hom_{\mathcal{T}}(\nu[+1], \lambda) = 0$ et $\hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{E} \otimes \nu[+1], \lambda \otimes \lambda) = 0$. Ceci est vrai par l'hypothèse 3.6.1 et le lemme 3.6.5.

Il reste à déterminer la flèche z : $\nu \otimes \lambda \longrightarrow \lambda \otimes \mathscr{E}$. Pour cela, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Alt}^2 \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "-\mathrm{id}"'] \arrow[rr, bend left, "v"] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \arrow[d, "u"] \\
\mathsf{Alt}^2 \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "v"'] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E})
\end{tikzcd}$$

Calculons la composée v des deux flèches horizontales du diagramme ci-dessus. Sur le facteur $\nu \otimes \lambda$, la flèche v est donnée par :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "m"'] & \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r, "2l"] & \nu\otimes\lambda \end{tikzcd}$$

Elle est donc simplement égale à $2l$. Pour décrire la composante de v qui correspond au facteur $\lambda \otimes \mathscr{E}$, on considère de diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "-\mathrm{id}"'] & \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \arrow[r, "b\otimes\mathrm{id}"] & \lambda\otimes\mathscr{E} \\ \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[dr, "l"'] & \mathscr{E}\otimes\mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes b"] \arrow[u, "\tau"] & \mathscr{E}\otimes\lambda \arrow[u, "\tau"'] \\ & \nu\otimes\lambda \arrow[ur, "a\otimes\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

Ceci montre que cette composante est donnée par : $-\tau \circ (a \otimes \mathrm{id}) \circ l$. On a ainsi montré que v est donné par la matrice :

$$v = \begin{pmatrix} 2l \\ -\tau \circ (a \otimes \mathrm{id}) \circ l \end{pmatrix}$$

La relation $u \circ v = -v$ se traduit alors par :

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{id} & 0 \\ z & \mathrm{id} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2l \\ -\tau \circ (a \otimes \mathrm{id}) \circ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2l \\ \tau \circ (a \otimes \mathrm{id}) \circ l \end{pmatrix}$$

Ce qui donne la relation : $2z \circ l - \tau \circ (a \otimes \mathrm{id}) \circ l = \tau \circ (a \otimes \mathrm{id}) \circ l$, ou encore $(z - \tau \circ (a \otimes \mathrm{id})) \circ l = 0$. La flèche l admettant une section (à savoir $2k$), on déduit finalement que $z = \tau \circ (a \otimes \mathrm{id})$.

En fin de compte, on a :

$$u = \begin{pmatrix} -\mathrm{id} & 0 \\ \tau \circ (a \otimes \mathrm{id}) & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

Étape 5. Les flèches l et k sont inversibles. — Vu la relation $2l \circ k = \mathrm{id}$, il suffit de montrer que l est inversible.

D'après l'étape précédente, on dispose d'une action de Σ_2 sur le triangle distingué (35) donnée par l'involution qui sur les deux premiers sommets agit par τ et sur le troisième sommet agit par u (vérifier que $u^2 = \mathrm{id}$).

On déduit alors un projecteur de (35), donné par $\frac{1}{2}(\mathrm{id} - \tau)$ sur les deux premiers sommets et par :

$$q = \frac{1}{2}(\mathrm{id} - u) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \frac{1}{2}\tau \circ (a \otimes \mathrm{id}) & 0 \end{pmatrix}$$

sur le troisième sommet. En passant aux images de projecteurs, on obtient un triangle distingué :

$$0 \longrightarrow \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Image}(q : (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E})) \longrightarrow 0[+1]$$

Ce qui montre en particulier que la composée :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "v"] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & (\nu \otimes \lambda) \oplus (\lambda \otimes \mathscr{E}) \end{tikzcd}$$

admet une rétraction. Mais on a vu que v se factorise par $l : \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \longrightarrow \nu \otimes \lambda$. Ceci montre que l admet une rétraction. Il vient que la flèche l est inversible puisqu'elle admet également une section (à savoir $2k$).

Étape 6. Unicité de l et k. — Il est facile à ce stade de prouver l'unicité de l et k. En effet, soit $l' : \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \longrightarrow \nu \otimes \lambda$ une autre flèche rendant commutatif le premier carré de l'énoncé. On a : $2l' \circ k = 2l \circ k = \mathrm{id}$. Comme k est inversible, on a forcément : $l' = \frac{1}{2}k^{-1} = l$. Le même raisonnement s'applique pour montrer l'unicité de k. □

Notons le corollaire suivant :

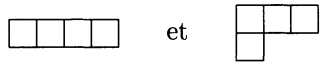
Corollaire 3.6.7. — *Supposons que la catégorie monoïdale $\mathcal{T}$ est fermée et que le bifoncteur $\underline{\mathsf{Hom}}(-,-)$ est triangulé en les deux variables. On a alors $\mathsf{Alt}^3\mathscr{E} = 0$. En d'autres termes, $\mathscr{E}$ est pair de dimension 2 au sens de Kimura (voir* [**Kim05**] *et* [**AK02**]*).*

Démonstration. — Montrons d'abord que $\mathsf{Alt}^2(\nu \otimes \lambda) = 0$. Ceci équivaut à dire que la permutation des facteurs τ agit par l'identité sur $(\nu \otimes \lambda)^{\otimes 2}$. Pour cela il suffit de remarquer que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (\nu \otimes \lambda) \otimes (\nu \otimes \lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & \nu \otimes (\lambda \otimes \nu) \otimes \lambda \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"] & \nu \otimes (\nu \otimes \lambda) \otimes \lambda \arrow[r] & (\nu \otimes \nu) \otimes \lambda \otimes \lambda) \arrow[d, "\tau \otimes \tau"] \\ (\nu \otimes \lambda) \otimes (\nu \otimes \lambda) \arrow[r] & \nu \otimes (\lambda \otimes \nu) \otimes \lambda \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"] & \nu \otimes (\nu \otimes \lambda) \otimes \lambda \arrow[r] & (\nu \otimes \nu) \otimes \lambda \otimes \lambda) \end{tikzcd}$$

est commutatif étant donné que τ agit par l'identité sur $\nu^{\otimes 2}$ et $\lambda^{\otimes 2}$.

On sait, par la proposition 3.6.6, que $\mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \simeq \nu \otimes \lambda$. Il vient que $\mathsf{Alt}^2(\mathsf{Alt}^2\mathscr{E}) = 0$. On déduit que $\mathscr{E}$ est tué par les foncteurs de Schur correspondant au diagrammes de Young suivants :



Il vient immédiatement que $(\mathsf{Alt}^3\mathscr{E})^{\otimes 2} = 0$. Les objets ν et λ étant inversibles, ils admettent des duaux forts au sens de [**AK02**]. Comme $\mathcal{T}$ est fermée, un objet A admet $\underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathbb{1})$ pour dual fort si et seulement si le morphisme évident :

$$\underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathbb{1}) \otimes - \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(A, -)$$

est inversible. Ceci montre que la propriété d'avoir un dual fort est stable par extensions (au sens triangulé). On déduit alors que l'objet $\mathsf{Alt}^3\mathscr{E}$ admet un dual fort. L'égalité $(\mathsf{Alt}^3\mathscr{E})^{\otimes 2} = 0$ implique alors que $\mathsf{Alt}^3\mathscr{E}$ est nul d'après Kimura (voir [**Kim05**] ou plutôt la généralisation du résultat de Kimura dans [**AK02**]). □

Dans le reste de cette sous-section, supposera que $\mathsf{Alt}^3\mathscr{E} = 0$ (ce qui est le cas si $(\mathcal{T}, \otimes)$ est fermée et que le bifoncteur $\underline{\mathsf{Hom}}(-,-)$ est triangulé par rapport aux deux variables). On s'intéressera aux objets $\mathsf{Sym}^n\mathscr{E}$. On a la conséquence suivante du corollaire 3.6.7 :

Corollaire 3.6.8. — *Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux morphismes évidents :*

$$\mathsf{Sym}^{n+1}\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}^{\otimes n+1} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}^{\otimes n} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$$

$$\mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}^{\otimes n-1} \otimes (\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}^{\otimes n} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$$

induisent un isomorphisme $\mathsf{Sym}^{n+1}\mathscr{E} \oplus (\mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{Sym}^n\mathscr{E}) \otimes \mathscr{E}$.

Le carré commutatif (30) de la proposition 3.6.6 se généralise aux cas des $\mathsf{Sym}^n\mathscr{E}$ de la manière suivante :

Lemme 3.6.9. — *Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, le carré suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes l", "\sim"'] \arrow[d] & \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes (\nu \otimes \lambda) \arrow[d] \\
\mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "b"] & \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \lambda
\end{tikzcd}$$

où la flèche $\mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \nu \otimes \lambda \longrightarrow \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \lambda$ *est la flèche évidente déduite de* $a : \nu \longrightarrow \mathscr{E}$.

Démonstration. — En effet, on a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}^{\otimes n-1} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathscr{E}^{\otimes n-1}(\nu \otimes \lambda) \arrow[d] \\
\mathscr{E}^{\otimes n} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{E}^{\otimes n} \otimes \lambda
\end{tikzcd}$$

obtenu à partir du premier carré de la proposition 3.6.6 en tensorisant partout par $\mathscr{E}^{\otimes n-1}$. Le groupe symétrique Σ_{n-1} agit sur les objets de ce carré et les flèches sont Σ_{n-1}-équivariantes. Le groupe symétrique Σ_n agit sur les deux objets $\mathscr{E}^n \otimes \mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^n \otimes \lambda$ et la flèche horizontale inférieure est Σ_n-équivariante. Ainsi, en passant au plus gros quotient sur lequel Σ_{n-1} ou Σ_n agit trivialement, on obtient le carré de l'énoncé. □

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. On définit une flèche

$$a_{m,n} : \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m+n}\mathscr{E}$$

à partir de $(\mathrm{id}^{\otimes m} \otimes a^{\otimes n}) : \mathscr{E}^{\otimes m} \otimes \nu^{\otimes n} \longrightarrow \mathscr{E}^{m+n}$ en passant aux plus grands quotients invariants par l'action des groupes symétriques Σ_m et Σ_{n+m}. Dualement, on définit une flèche :

$$b_{m.n} : \mathsf{Sym}^{m+n}\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes n}$$

à partir de $(\mathrm{id}^{\otimes m} \otimes b^{\otimes n}) : \mathscr{E}^{\otimes m+n} \longrightarrow \mathscr{E}^{\otimes n} \otimes \lambda^{\otimes n}$ en passant aux plus grands sous-objets invariants par l'action des groupes symétriques Σ_m et Σ_{n+m}.

Le théorème suivant décrit la structure des objets $\mathsf{Sym}^m\mathscr{E}$:

Théorème 3.6.10

1- *Soient $(m,n) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2$. Il existe un unique triangle distingué :*

$$\begin{aligned}(36)\qquad \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} &\xrightarrow{a_{m-1,n}} \mathsf{Sym}^{m+n-1}\mathscr{E} \\ &\xrightarrow{b_{n-1,m}} \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n}[+1]\end{aligned}$$

2- *Pour $(m,n,r) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2 \times \mathbb{N}$, les deux diagrammes suivants sont des morphismes de triangles distingués :*

$$\begin{tikzcd}
\nu^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes a_{m-1,n}"] \arrow[d, "\tau \otimes \mathrm{id}"'] & \nu^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{m+n-1}\mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b_{n-1,m}"] \arrow[d, "(a_{m+n-1,r}) \circ \tau"] & \nu^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \arrow[r] \arrow[d, "((a_{n-1,r}) \circ \tau) \otimes \mathrm{id}"] & {} \\
\mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n+r} \arrow[r, "a_{m-1,n+r}"] & \mathsf{Sym}^{n+m+r-1}\mathscr{E} \arrow[r, "b_{n+r-1,m}"] & \mathsf{Sym}^{n+r-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sym}^{m+r-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \arrow[r, "a_{m+r-1,n}"] \arrow[d, "(\tau \circ b_{m-1,r}) \otimes \mathrm{id}"'] & \mathsf{Sym}^{m+n+r-1}\mathscr{E} \arrow[r, "b_{n-1,m+r}"] \arrow[d, "b_{m+n-1,r}"] & \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r} \arrow[r] \arrow[d, "\tau \otimes \mathrm{id}"] & {} \\
\lambda^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes a_{m-1,n}"] & \lambda^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{m+n-1}\mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b_{n-1,m}"] & \lambda^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

3- *Pour $(m,n,r) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2 \times \mathbb{N}$ et $k \in \{-1,0\}$, on a l'annulation suivante :*

$$\hom_{\mathcal{T}}(\mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n+r}, \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k]) = 0$$

Démonstration. — On divise la démonstration en plusieurs étapes. On commence par un cas particulier de la partie ***1*** du théorème. On l'utilise pour montrer le résultat d'annulation de la partie ***3***. On reprend ensuite la partie ***1*** et on termine par une preuve de la partie ***2***.

Étape 1. — On commence par construire les triangles distingués (36) lorsque l'un des deux entiers m et n est égal à 1. Par dualité (voir la remarque 3.6.2), il suffit de traiter le cas $n = 1$. Dans ce cas, le triangle (36) que l'on cherche à construire s'écrit :

$$\mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m}\mathscr{E} \longrightarrow \lambda^{\otimes m} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E}[+1]$$

Lorsque $m = 1$, il s'agit du triangle distingué (27). Supposons le triangle distingué construit pour $m \geq 1$ et construisons le pour $m + 1$.

On a un triangle distingué évident :

$$\mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \nu \longrightarrow \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \lambda \longrightarrow \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \nu[+1]$$

obtenu en tensorisant le triangle distingué (27) par $\mathsf{Sym}^m\mathscr{E}$. En utilisant le lemme 3.6.9, on déduit facilement un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu \otimes \lambda \arrow[r] \arrow[d] & 0[+1] \arrow[d] \\
\mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \nu \arrow[r] & \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \lambda \arrow[r] & \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \nu[+1]
\end{tikzcd}$$

Le cône de la première flèche verticale non nulle est $\mathsf{Sym}^{m+1}\mathscr{E}$. Le cône de la seconde flèche verticale non nulle est $\lambda^m \otimes \lambda$ par l'hypothèse de récurrence. En appliquant l'axiome de l'octaèdre, on déduit du corollaire 3.6.8 le triangle recherché.

Étape 2. — Montrons que le groupe $\hom_{\mathcal{T}}(\mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n+r}, \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k])$ est nul pour $(m, n, r) \in (\mathbb{N}-\{0\})^2 \times \mathbb{N}$ et $k \in \{-1, 0\}$. On raisonnera par récurrence sur (n, m). Lorsque $(n, m) = 1$, l'annulation recherchée est donnée dans l'hypothèse 3.6.1. On supposera donc que l'un des entiers n et m est strictement supérieur à 1. Par dualité, on peut supposer que $m > 1$, ce que l'on fera dans la suite. Le cas $(1, m)$ des triangles (36), fournit la suite exacte (que l'on écrit verticalement pour des raisons de place) :

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{T}}(\mathsf{Sym}^{m-2} \otimes \lambda \otimes \nu^{\otimes n+r}, \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k]) \arrow[d] \arrow[r, equal] & \hom_{\mathcal{T}}(\mathsf{Sym}^{m-2} \otimes \otimes \nu^{\otimes n+r} \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1+r}[k]) = 0 \\
\hom_{\mathcal{T}}(\mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n+r}, \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k]) \arrow[d] & \\
\hom_{\mathcal{T}}(\nu^{\otimes m+n+r}, \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k]) \arrow[r, equal] & \hom_{\mathcal{T}}(\mathsf{Sym}^{1-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n+(m+r)}, \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m+r}[k]) = 0
\end{tikzcd}$$

D'où l'annulation recherchée.

Étape 3. — On peut maintenant achever la preuve de la partie ***1*** du théorème. On suppose que le triangle distingué (36) est construit pour tous les couples strictement inférieurs à (m, n) et on le construira pour (m, n). On peut supposer que m, $n \geq 2$. On adoptera la convention : $\mathsf{Sym}^{-1}\mathscr{E} = 0$.

Considérons le diagramme suivant :

(37)

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sym}^{m-3}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(i)}"] & \mathsf{Sym}^{m+n-3}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(ii)}"] & \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-2} \otimes \nu \otimes \lambda \arrow[d] \\
\mathsf{Sym}^{m-2}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{m+n-2}\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

avec les carrés (i) et (ii) construits de la manière suivante. Le carré (i) est la composée verticale des carrés suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sym}^{m-3}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Sym}^{m+n-3}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^{\mathscr{E}} \arrow[d] \\
\mathsf{Sym}^{m-3}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Sym}^{m+n-3}\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[d] \\
\mathsf{Sym}^{m-2}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{m+n-2}\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

En particulier, il est commutatif. Le carré (ii) est la composée horizontale des carrés suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sym}^{m+n-3}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes l", "\sim"'] \arrow[d] & \mathsf{Sym}^{m+n-3}\mathscr{E} \otimes \nu \otimes \lambda \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-2} \otimes \nu \otimes \lambda \arrow[d] \\
\mathsf{Sym}^{m+n-2}\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{m+n-2}\mathscr{E} \otimes \lambda \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

Ainsi, le diagramme (37) est commutatif. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on voit que les lignes horizontales de (37) s'étendent naturellement en des triangles distingués. On va montrer que (37) définit alors un morphisme de triangles distingués. Pour cela, on part du carré commutatif (ii) de (37) qu'on complète en un morphisme de triangles distingués :

(38)

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sym}^{m-3}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(i}'\text{)}"] & \mathsf{Sym}^{m+n-3}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(ii)}"] & \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-2} \otimes \nu \otimes \lambda \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\mathsf{Sym}^{m-2}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{m+n-2}\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathscr{E} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

On va montrer que le carré (i′) est forcément égal à (i), ce qui revient à dire que les deux flèches :

$$\mathsf{Sym}^{m-3}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m-2}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathscr{E}$$

de (i) et (i′) sont égales. On notera ϵ la différence de ces deux flèches. En utilisant le triangle distingué inférieur de (38) on déduit que ϵ se factorise par $\mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathscr{E}[-1]$. Mais le groupe :

$$\hom_{\mathcal{T}}(\mathsf{Sym}^{m-3}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E}, \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathscr{E}[-1])$$

est nul d'après la deuxième étape puisqu'il s'insère dans une suite exacte :

$$\begin{array}{c}
\hom_{\mathcal{T}}(\mathsf{Sym}^{m-3}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E}, \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \nu[-1]) \\
\downarrow \\
\hom_{\mathcal{T}}(\mathsf{Sym}^{m-3}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E}, \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \mathscr{E}[-1]) \\
\downarrow \\
\hom_{\mathcal{T}}(\mathsf{Sym}^{m-3}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E}, \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m-1} \otimes \lambda[-1])
\end{array}$$

(on utilise que : $\mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \simeq \nu \otimes \lambda$).

Enfin, les cônes des trois premières flèches verticales de (38) sont respectivement : $\mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n}$, $\mathsf{Sym}^{m+n-1}\mathscr{E}$ et $\mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m}$. Ainsi, en appliquant l'axiome de l'octaèdre à (38), on obtient un triangle distingué de la forme annoncée.

Étape 4. — Montrons la partie **2** de l'énoncé. Notons que cela prouvera l'unicité des triangles (en prenant $r = 0$ et en l'appliquant à deux triangles distingués de la forme (36)). Il suffira par dualité de traiter le premier diagramme de **2**.

On part du carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\nu^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{m+n-1}\mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b_{n-1,m}"] \arrow[d, "(a_{m+n-1,r}) \circ \tau"'] & \nu^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \arrow[d, "((a_{n-1,r}) \circ \tau) \otimes \mathrm{id}"] \\
\mathsf{Sym}^{n+m+r-1}\mathscr{E} \arrow[r, "b_{n+r-1,m}"] & \mathsf{Sym}^{n+r-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m}
\end{tikzcd}$$

qu'on complète en un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\nu^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes a_{m-1,n}"] \arrow[d, "\tau \otimes \mathrm{id} + \epsilon"'] & \nu^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{m+n-1}\mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes b_{n-1,m}"] \arrow[d, "(a_{m+n-1,r}) \circ \tau"] & \nu^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \arrow[r] \arrow[d, "((a_{n-1,r}) \circ \tau) \otimes \mathrm{id}"] & {} \\
\mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n+r} \arrow[r, "a_{m-1,n+r}"] & \mathsf{Sym}^{n+m+r-1}\mathscr{E} \arrow[r, "b_{n+r-1,m}"] & \mathsf{Sym}^{n+r-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

avec ϵ une flèche exprimant la différence avec la flèche canonique. Il s'agit de montrer que $\epsilon = 0$. Pour cela, on remarque que ϵ se factorise par l'objet $\mathsf{Sym}^{n+r-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m}[-1]$. Mais le groupe :

$$\hom_{\mathcal{T}}(\nu^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \nu^{\otimes n}, \mathsf{Sym}^{n+r-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m}[-1])$$

est nul par la seconde étape de la démonstration. Le théorème est prouvé. □

On aurait également besoin de comprendre la structure de l'objet $\mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E}$. Pour cela, on dispose du résultat suivant qui généralise le corollaire 3.6.8 :

Proposition 3.6.11. — *Soient $(m, n) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2$. On définit des flèches*

$$p_{m,n} : \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m+n}\mathscr{E}$$

et

$$q_{m,n} : \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E}$$

de la manière suivante. Pour $p_{m,n}$ on prend simplement la composée :

$$\mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}^{\otimes m} \otimes \mathscr{E}^{\otimes n} = \mathscr{E}^{m+n} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m+n}\mathscr{E}$$

Pour $q_{m,n}$ on prend la composée :

$$\begin{array}{c} \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}^{\otimes m} \otimes \mathscr{E}^{\otimes n} = (\mathscr{E}^{\otimes m-1} \otimes \mathscr{E}) \otimes (\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}^{\otimes n-1}) \\ \Big\| \\ \mathscr{E}^{\otimes m-1} \otimes (\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}) \otimes \mathscr{E}^{\otimes n-1} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \end{array}$$

Alors le morphisme :

$$\begin{pmatrix} p_{m,n} \\ q_{m,n} \end{pmatrix} : \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m+n}\mathscr{E} \oplus (\mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur $\min(n,m)$. Lorsque ce minimum vaut 1, le résultat découle du corollaire 3.6.8. Supposons que le formule est vrai pour le couple (n,m). On tensorise le tout par $\mathscr{E}$ pour obtenir l'isomorphisme :

$$\mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} (\mathsf{Sym}^{m+n}\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}) \oplus (\mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \mathscr{E})$$

Ce qui donne l'isomorphisme :

$$\begin{array}{c} \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes (\mathsf{Sym}^{n+1}\mathscr{E} \oplus \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{n-2}\mathscr{E}) \\ \Big\downarrow \sim \\ (\mathsf{Sym}^{m+n+1}\mathscr{E} \oplus \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{m+n-1}\mathscr{E}) \\ \oplus [(\mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E}) \oplus ((\mathsf{Alt}^2\mathscr{E})^2 \otimes \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{n-2}\mathscr{E})] \end{array} \tag{39}$$

On retrouve facilement le morphisme :

$$\mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{n+1}\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Sym}^{m+n+1}\mathscr{E} \oplus \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E}$$

comme facteur direct de l'isomorphisme (39). □

Corollaire 3.6.12. — *Soit $(n,r) \in (\mathbb{N} - \{0\}) \otimes \mathbb{N}$. On a un isomorphismes canonique :*

$$\mathsf{Sym}^{n+r}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \oplus_{i=0}^n (\mathsf{Alt}^2\mathscr{E})^{\otimes i} \otimes \mathsf{Sym}^{2(n-i)+r}\mathscr{E}$$

Lemme 3.6.13. — *Pour $(m,n) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2$, on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} & \xrightarrow[\sim]{l} & \mathsf{Sym}^{m-1} \otimes \nu \otimes \lambda \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow a \otimes \tau \\ \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes b} & \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda \end{array}$$

Démonstration. — La preuve de ce lemme se fait exactement comme celle du lemme 3.6.9. □

D'ici la fin des préliminaires, on supposera $\nu = \mathbb{1}$ (l'objet unité de $\mathcal{T}$). On notera alors $a_m : \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m+1}\mathscr{E}$ la composée :

$$\mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{a_{m,1}} \mathsf{Sym}^{m+1}\mathscr{E}$$

On considérera ainsi la suite $(\mathsf{Sym}^m\mathscr{E})_{m\in\mathbb{N}}$ comme un ind-objet de $\mathcal{T}$ indicé par la catégorie $\mathbb{N} = \{0 \to 1 \to \cdots \to n \to n+1 \to \ldots\}$. Le théorème 3.6.10 fournit également un ind-triangle distingué :

$$\mathbb{1} \longrightarrow \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m-1} \otimes \lambda \longrightarrow \mathbb{1}[+1] \tag{40}$$

où les flèches du système inductif sont données par les morphismes de triangles :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Sym}^{m-1} \otimes \lambda \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}[+1] \arrow[d, equal] \\
\mathbb{1} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{m+1}\mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^m \otimes \lambda \arrow[r] & \mathbb{1}[+1]
\end{tikzcd}$$

On est bien sûr tenté de considérer la colimite de ces systèmes inductifs. Pour cela, on supposera que $\mathcal{T}$ admet les petites sommes et que le bifoncteur $- \otimes -$ y commute. On *fixe* alors une colimite homotopique $\mathscr{C}$ des $\mathsf{Sym}^k\mathscr{E}$. On verra que cette colimite homotopique est définie à un unique isomorphisme près. On introduit la définition suivante :

Définition 3.6.14. — *Soit B_n un système inductif d'objets de $\mathcal{T}$ indicés par $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{B}$ une colimite homotopique des B_n. Soit F un objet de $\mathcal{T}$ et $\epsilon \in \hom_{\mathcal{T}}(\mathscr{B}, F)$. Nous dirons que ϵ est une flèche fantôme (par rapport au système inductif $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la composée : $B_n \longrightarrow \mathscr{B} \xrightarrow{\epsilon} F$ est nulle.*

On a le lemme facile suivant :

Lemme 3.6.15. — *Gardons les hypothèses et les notations de la définition 3.6.14. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la flèche : $B_n \longrightarrow B_{n+1}$ admet une rétraction, alors toute flèche fantôme ϵ est nulle.*

Démonstration. — On pose $C_0 = B_0$ et pour tout $n \geq 1$, on choisit un facteur direct C_n de B_n supplémentaire à B_{n-1}. Ainsi notre système inductif devient isomorphe au système inductif évident $(\oplus_{i=0}^n C_i)_{n\in\mathbb{N}}$. Une colimite homotopique de ce système est alors une colimite catégorique : elle est canoniquement isomorphe à $\oplus_{i\in\mathbb{N}} C_i$. Il est alors clair que les flèches fantômes sont nuls dans ce cas. □

Nous allons donner un critère pour qu'une flèche fantôme de source $\mathscr{C}$ soit nulle. Ce critère est basé sur le lemme suivant.

Lemme 3.6.16

1- *Pour tout $(n,r) \in \mathbb{N}^2$ la flèche :*

$$\mathsf{Sym}^{n+r}\mathscr{E} \otimes \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Sym}^n \otimes \lambda^{\otimes r} \otimes \mathscr{C}$$

obtenue en tensorisant la flèche canonique par $\mathscr{C}$ admet une section.

2- *De même, la flèche :*

$$\mathsf{Sym}^r\mathscr{E} \otimes \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{n+r}\mathscr{E} \otimes \mathscr{C}$$

obtenue en tensorisant la flèche canonique par $\mathscr{C}$ admet une rétraction.

Démonstration. — Étant donnés les triangles distingués :

$$\mathsf{Sym}^{m-1}\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m+n-1}\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{n-1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes m} \longrightarrow$$

on voit que les parties **1** et **2** sont équivalentes. On s'intéressera donc uniquement à la première partie. On raisonne par récurrence sur r. Pour $r = 0$, il y a rien à prouver. Supposons que $r > 0$. On a un triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sym}^{n+r}\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathsf{Sym}^{n+1}\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes r-1} \arrow[d] \\
& \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \lambda^{\otimes r}
\end{tikzcd}$$

Par l'hypothèse de récurrence, on voit qu'il suffit de construire une section à :

$$\mathsf{Sym}^{n+1}\mathscr{E} \otimes \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \lambda \otimes \mathscr{C}$$

En d'autre termes, le cas général découle par récurrence du cas $r = 1$.

Pour traiter le cas $r = 1$, on utilise le triangle distingué :

$$\mathbb{1} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{n+1}\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \lambda \longrightarrow$$

qui nous ramène en fin de compte à la construction d'une rétraction de :

$$\mathbb{1} \otimes \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathscr{C}$$

pour $m \in \mathbb{N}$. Pour faire cela, on considère les flèches canoniques :

$$\mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m+n}\mathscr{E}$$

En passant à la limite suivant $n \in \mathbb{N}$, on obtient une flèche : $\mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$. En remarquant que la composée :

$$\mathbb{1} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^m\mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m+n}\mathscr{E}$$

s'identifie au morphisme canonique : $\mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{m+n}\mathscr{E}$, on déduit que la composée :

$$\mathbb{1} \otimes \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Sym}^m\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$$

n'est autre que l'isomorphisme canonique. Le lemme est ainsi démontré. □

Pour énoncer notre critère, on a besoin d'introduire la terminologie suivante :

Définition 3.6.17. — *Soit* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ *une catégorie monoïdale unitaire.*

1- *On appellera objet unitaire de* $\mathcal{C}$*, un couple* (X, x) *avec* X *un objet de* $\mathcal{C}$ *et* $x : \mathbb{1} \longrightarrow X$ *une flèche de* $\mathcal{C}$*.*

2- *Étant donné un objet unitaire* (X, x)*. On appelle* X*-module (resp.* X*-module faible) à droite un couple* (M, p) *formé d'un objet* M *de* $\mathcal{C}$ *et d'une flèche* $p : M \otimes X \longrightarrow M$ *tel que la composée :*

$$M \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes x} M \otimes X \xrightarrow{p} M$$

est l'identité de M *(resp. est un isomorphisme).*

Pour $r \in \mathbb{N}$, l'objet $\mathscr{C}^{\otimes r}$ est une colimite homotopique du système $((\mathsf{Sym}^n \mathscr{E})^{\otimes r})_{n \in \mathbb{N}}$. Voici notre critère d'annulation des flèches fantômes relativement à cette colimite :

Proposition 3.6.18. — *Soient* (X, x) *un objet unitaire de* $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbb{1})$ *et* (M, p) *un* X*-module faiblement unitaire à droite. On suppose qu'il existe une factorisation de l'unité de* X *de la manière suivante :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "x"] \arrow[d, "u"'] & X \\ \mathscr{C} \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

avec u *le morphisme évident. Alors, toute flèche fantôme (relativement au système* $((\mathsf{Sym}^n \mathscr{E})^{\otimes r})_{n \in \mathbb{N}}$*) de* $\mathscr{C}^{\otimes r}$ *vers* M *est nulle.*

Démonstration. — En effet, soit $\epsilon : \mathscr{C}^{\otimes r} \longrightarrow M$ une flèche fantôme. Considérons la flèche :

$$\epsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C}^{\otimes r} \otimes \mathscr{C} \longrightarrow M \otimes \mathscr{C}$$

étant donné que les flèches : $(\mathsf{Sym}^n \mathscr{E})^{\otimes r} \otimes \mathscr{C} \longrightarrow (\mathsf{Sym}^n \mathscr{E})^{\otimes r} \otimes \mathscr{C}$ admettent des rétractions (ce qui découle immédiatement du lemme 3.6.16), on déduit que $\epsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ est nul.

Étant donné que le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^{\otimes r} \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "\epsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] & \mathscr{C}^{\otimes r} \otimes \mathscr{C} \arrow[d, "\epsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{C}}"] \\ M \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "(2)"] & M \otimes \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

est commutatif, on voit qu'il suffit de montrer que les flèches horizontales admettent des rétractions. Une rétraction de (1) est donnée par la colimite des :

$$(\mathsf{Sym}^n \mathscr{E})^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \longrightarrow (\mathsf{Sym}^n \mathscr{E})^{\otimes r-1} \otimes \mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n \mathscr{E}$$
$$\longrightarrow (\mathsf{Sym}^n \mathscr{E})^{\otimes r} \otimes \mathsf{Sym}^{2n} \mathscr{E}$$

Pour définir une rétraction de (2) on compose à droite par $M \otimes \mathscr{C} \longrightarrow M \otimes X$. On est ainsi ramené à trouver une rétraction de :

$$M \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes x} M \otimes X$$

Ceci est clairement possible étant donné que $p \circ (\mathrm{id} \otimes x)$ est un isomorphisme. La proposition est démontrée. □

Étant donné une catégorie monoïdale symétrique unitaire, on a les notions habituelles d'algèbres (associatives, commutatives, unitaires). Comme application de la proposition précédente, on obtient :

Corollaire 3.6.19. — *La colimite $\mathscr{C}$ des $\mathsf{Sym}^n \mathscr{E}$ est définie à un unique isomorphisme près. Elle est canoniquement munie d'une structure d'algèbre commutative et unitaire. De plus étant donnée une algèbre commutative unitaire $\mathscr{U}$ et une factorisation :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{U} \\ \mathscr{E} \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme d'algèbres unitaires $f : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{U}$ prolongeant f_1.

Démonstration. — Montrons d'abord que $\mathscr{C}$ est défini à un unique isomorphisme près. Soit $\mathscr{C}'$ une autre colimite homotopique de $(\mathsf{Sym}^n \mathscr{E})_{n \in \mathbb{N}}$. Étant donné que la colimite est unique à un isomorphisme près, on dispose d'un isomorphisme $\mathscr{C} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}'$ rendant commutatifs les carrés :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{C} \arrow[d, "\sim"] \\ \mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{C}' \end{tikzcd}$$

Soient i_1 et i_2 deux tels isomorphismes, et appelons $\epsilon = i_2 - i_1 : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ leur différence. Il est clair que ϵ est une flèche fantôme. Pour montrer que ϵ est nulle, il suffit d'appliquer la proposition précédente avec :

- $(X, x) = (\mathscr{C}', u')$ où $u' : \mathbb{1} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est le morphisme canonique,
- $M = \mathscr{C}'$ et $p : \mathscr{C}' \otimes \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}'$ la colimite des : $\mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{2n} \mathscr{E}$.

D'où l'unicité de $\mathscr{C}$ à un unique isomorphisme près.

Pour définir une structure d'algèbre unitaire sur $\mathscr{C}$, on prend la colimite des $\mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{2n} \mathscr{E}$ qu'on notera $\mathrm{m} : \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ ainsi que le morphisme évident $u : \mathbb{1} \longrightarrow \mathscr{C}$. Pour montrer que m est associatif, on considère la différence ϵ' des deux flèches possibles :

$$\mathscr{C}^{\otimes 3} \longrightarrow \mathscr{C}$$

auquel on applique la proposition précédente avec $(X, x) = (\mathscr{C}, \mathbb{1})$ et $(M, p) = (\mathscr{C}, \mathrm{m})$. On est ainsi ramené à l'associativité du produit :

$$(\mathsf{Sym}^n \mathscr{E})^{\otimes 3} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{3n} \mathscr{E}$$

Ce qui est clair. On fait de même pour prouver la commutativité et le fait que u est une unité pour m.

On s'intéresse maintenant à la dernière partie de l'énoncé. On construit d'abord l'extension f. Pour tout $n \geq 1$, la composée :

$$\mathscr{E}^{\otimes n} \xrightarrow{f_1^{\otimes n}} \mathscr{U}^{\otimes n} \xrightarrow{\text{multiplication}} \mathscr{U}$$

est Σ_n-équivariante. Elle passe ainsi au plus grand quotient Σ_n-invariant de $\mathscr{E}^{\otimes n}$ et fournit des flèches :

$$f_n : \mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{U}$$

On vérifie immédiatement que les carrés suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \otimes \mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "f_n \otimes f_n"'] & \mathsf{Sym}^{2n} \mathscr{E} \arrow[d, "f_{2n}"] \\
\mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \arrow[r] & \mathscr{U}
\end{tikzcd}$$

De plus la famille des f_n est l'unique extension de f_1 ayant cette propriété et les triangles suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sym}^n \mathscr{E} \arrow[r, "a_n"] \arrow[dr, "f_n"'] & \mathsf{Sym}^{n+1} \mathscr{E} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\
& \mathscr{U}
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs. En passant à la limite suivant n, on obtient alors un morphisme :

$$f : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{U}$$

Soit f' un autre tel morphisme. On pose $\epsilon'' = f - f'$. C'est clairement une flèche fantôme par l'unicité des f_n. On voit alors qu'il est nul, en lui appliquant la proposition 3.6.18 avec $X = \mathscr{U}$ et $M = \mathscr{U}$. D'où l'unicité de f. La preuve que f est un morphisme d'algèbres unitaires se fait de la même façon. □

Définition 3.6.20. — *La colimite homotopique de* $(\mathsf{Sym}^n \mathscr{E})_{n \in \mathbb{N}}$ *bien définie à un unique isomorphisme près sera noté* $\mathsf{Sym}^\infty \mathscr{E}$. *C'est naturellement une algèbre commutatif unitaire.*

Notons également le corollaire suivant :

Corollaire 3.6.21. — *Supposons que l'objet unité* $\mathbb{1}$ *est compact. Il existe un* unique *triangle distingué :*

$$\mathbb{1} \longrightarrow \mathsf{Sym}^\infty \mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^\infty \mathscr{E} \otimes \lambda \longrightarrow \mathbb{1}[+1]$$

tel que les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{Sym}^{n+1}\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Sym}^{n}\mathscr{E} \otimes \lambda \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}[+1] \arrow[d, equal] \\
\mathbb{1} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \otimes \lambda \arrow[r] & \mathbb{1}[+1]
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Démonstration. — L'existence s'obtient en prenant la colimite du ind-triangle distingué (40). Il s'agit de montrer l'unicité de ce triangle. On commence par l'unicité de $\mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \longrightarrow \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \otimes \lambda$.

Pour cela, on se donne deux tels morphismes et on note ϵ leur différence. C'est bien une flèche fantôme. On montre qu'elle est nulle en lui appliquant la proposition 3.6.18 avec $X = \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E}$ et $M = \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \otimes \lambda$.

Montrons l'unicité du morphisme connectant $\mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \otimes \lambda \longrightarrow \mathbb{1}[+1]$. Par construction de la colimite homotopique, on dispose d'une suite exacte :

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}[+1], \oplus_n \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \lambda) &\longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}[+1], \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \otimes \lambda) \\
&\longrightarrow \hom_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}[+1], \oplus_n \mathsf{Sym}^n\mathscr{E} \otimes \lambda[+1])
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{1}$ est compact, ceci montre que $\hom_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}[+1], \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \otimes \lambda) = 0$.

Deux triangles distingués ayant la même forme que celui de l'énoncé sont isomorphes :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \otimes \lambda \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \mathbb{1}[+1] \arrow[d, equal] \\
\mathbb{1} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \arrow[r] & \mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \otimes \lambda \arrow[r] & \mathbb{1}[+1]
\end{tikzcd}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que la flèche u est l'identité. Mais $u - \mathrm{id}$ se factorise par une flèche de $\mathbb{1}[+1]$ vers $\mathsf{Sym}^{\infty}\mathscr{E} \otimes \lambda$. □

3.6.2. Le logarithme de $\mathsf{H}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$. — Soit k un corps de base. On se donne un 2-foncteur homotopique stable H défini sur Sch/k. Rappelons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "q"'] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "p"] & \sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, equal] \\
& \mathsf{Spec}(k) &
\end{tikzcd}$$

On fait la définition suivante :

Définition 3.6.22. — *La transformation naturelle de Kummer, est le 2-morphisme*

$$e_K : \mathrm{id}_{\mathsf{H}(\mathbb{G}m)}(-1)[-1] \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{H}(\mathbb{G}m)}$$

entre les foncteurs identiques de $\mathsf{H}(\mathbb{G}m)$ *(la source étant convenablement twistée et décalée) définie de la manière suivante. On considère le triangle commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}m \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, equal] & \mathbb{G}m \times_k \mathbb{G}m \arrow[d, "pr_1"] \\ & \mathbb{G}m \end{tikzcd} \tag{41}$$

avec pr_1 *la projection sur le premier facteur. On prend alors pour* e_K *la composée :*

$$\mathrm{id}_{\mathsf{H}(\mathbb{G}m)}(-1)[-1] \longrightarrow pr_{1*}pr_1^* \longrightarrow pr_{1*}\Delta_*\Delta^*pr_1^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathsf{H}(\mathbb{G}m)}$$

où la première flèche est celle déduite de l'identification canonique : $pr_{1*}pr_1^* \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{H}(\mathbb{G}m)} \oplus \mathrm{id}_{\mathsf{H}(\mathbb{G}m)}(-1)[-1]$.

On est surtout intéressé par le 2-morphisme e_K appliqué au foncteur q^* :

$$e_K q^* : \ q^*(-1)[-1] \longrightarrow pr_{1*}pr_1^*q^* \longrightarrow pr_{1*}\Delta_*\Delta^*pr_1^*q^* \xrightarrow{\sim} q^*$$

Les deux lemmes suivants décrivent l'image directe par q_* de ce 2-morphisme :

Lemme 3.6.23. – *La composée suivante :*

$$q_*q^*(-1)[-1] \xrightarrow{q_*e_Kq^*} q_*q^* \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}$$

où la seconde flèche est celle induite par l'identification canonique $q_*q^* \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)} \oplus \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1]$. *est nulle.*

Démonstration. – Notons $i_1 : \mathsf{Spec}(k) \longrightarrow \mathbb{G}m_k$ la section unité de $\mathbb{G}m$. On a un diagramme commutatif de k-schémas :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Spec}(k) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathbb{G}m \arrow[d, "\mathrm{id} \times i_1"] \\ \mathbb{G}m \arrow[r, "\Delta"] & \mathbb{G}m \times \mathbb{G}m \end{tikzcd}$$

Le 2-morphisme $q_*q^* \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}$ de l'énoncé s'identifie à :

$$q_*q^* \longrightarrow q_*i_{1*}i_1^*q^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}$$

D'autre part, il est clair que le morphisme canonique $\mathrm{id}_{\mathsf{H}(\mathbb{G}m)}(-1)[-1] \longrightarrow pr_{1*}pr_1^*$ utilisé dans la définition de e_K est le noyau du 2-morphisme scindé :

$$pr_{1*}pr_1^* \longrightarrow pr_{1*}(\mathrm{id} \times i_1)_*(\mathrm{id} \times i_1)^*pr_1^* \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{H}(\mathbb{G}m)}$$

Le résultat découle alors du diagramme commutatif de 2-morphisme suivant :

$$\begin{tikzcd}
pr_{1*}pr_1^* \arrow[r] \arrow[d] & pr_{1*}\Delta_*\Delta^*pr_1^* \arrow[r] & pr_{1*}\Delta_*i_{1*}i_1^*\Delta^*pr_1^* \arrow[d, "\sim"] \\
pr_{1*}(\mathrm{id}\times i_1)_*(\mathrm{id}\times i_1)^*pr_1^* \arrow[r] & pr_{1*}(\mathrm{id}\times i_1)_*i_{1*}i_1^*(\mathrm{id}\times i_1)^*pr_1^* \arrow[r, "\sim"] & pr_{1*}(i_1\times i_1)_*(i_1\times i_1)^*pr_1
\end{tikzcd}$$

auquel on applique q_* à gauche et q^* à droite. □

Lemme 3.6.24. — *On a un carré commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1] \arrow[r, equal] \arrow[d, "(1)"'] & \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1] \arrow[d, "(2)"] \\
q_*q^*(-1)[-1] \arrow[r, "q_*e_Kq^*"] & q_*q^*
\end{tikzcd}$$

avec (1) *le morphisme d'unité et* (2) *celui déduit de l'identification canonique* $q_*q^* \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)} \oplus \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1]$.

Démonstration. — Par le lemme précédent, on dispose d'une unique factorisation de $q_*e_Kq^*$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1] \arrow[d] \\
q_*q^*(-1)[-1] \arrow[r, "q_*e_Kq^*"] \arrow[ur, dotted] & q_*q^*
\end{tikzcd}$$

Ainsi pour prouver le lemme, il suffit de montrer que la composée :

$$\mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1] \longrightarrow q_*q^*(-1)[-1] \xrightarrow{q_*e_Kq^*} q_*q^* \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1]$$

est égale à l'identité. Considérons d'abord le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & \mathbb{G}_m \times_k \mathbb{G}_m \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "j\times\mathrm{id}"] & \mathbb{G}_m \arrow[d, "j"] \\
\mathbb{G}_m \arrow[r, "\Delta'"] & \mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{G}_m \arrow[r, "pr'_1"] & \mathbb{A}^1_k
\end{tikzcd}$$

On déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & p_*p^*(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d] & p_*pr'_{1*}pr'^*_1p^* \arrow[r] \arrow[d] & p_*pr'_{1*}\Delta'_*\Delta'^*pr'^*_1p^* \arrow[r] & q_*q^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1] \arrow[d, equal] \\
\mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1] \arrow[r] & q_*q^*(-1)[-1] \arrow[r] & q_*pr_{1*}pr_1^*q^* \arrow[r] & q_*pr_{1*}\Delta_*\Delta^*pr_1^*q^* \arrow[r] & q_*q^* \arrow[r] & \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1]
\end{tikzcd}$$

Ce qui nous ramène à démontrer que la composée de la ligne supérieure du diagramme précédent est égale à l'identité.

Considérons maintenant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\Delta'"'] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "\Delta''"] & \mathsf{Spec}(k) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "i"] \\
\mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m \arrow[r, "\mathrm{id} \times j"] \arrow[dr, "pr'_1"'] & \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "pr''_1"] & \mathbb{A}^1 \arrow[l, "\mathrm{id} \times i"'] \arrow[dl, equal] \\
& \mathbb{A}^1 &
\end{tikzcd}$$

La flèche canonique $q_*q^* \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1]$ est définie par la composée :

$$q_*q^* \xrightarrow{\sim} p_*j_*j^*p^* \longrightarrow p_*i_*i^!p^*[+1] \simeq i^!p^*[+1]$$

De même la flèche canonique $p_*pr'_{1*}pr'^*_1p^* \longrightarrow p_*p^*(-1)[-1]$ est définie par la composée :

$$\begin{aligned}
p_*pr'_{1*}pr'^*_1p^* &\longrightarrow p_*pr''_{1*}(\mathrm{id} \times j)_*(\mathrm{id} \times j)^*pr''^*_1p^* \\
&\longrightarrow p_*pr''_{1*}(\mathrm{id} \times i)_*(\mathrm{id} \times i)^!pr''^*_1p^* \simeq p_*(\mathrm{id} \times i)^!pr''^*_1p^*
\end{aligned}$$

Mais on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
p_*pr'_{1*}pr'^*_1p^* \arrow[r] \arrow[d] & p_*pr''_{1*}(\mathrm{id} \times j)_*(\mathrm{id} \times j)^*pr''^*_1p^* \arrow[r] & p_*pr''_{1*}(\mathrm{id} \times i)_*(\mathrm{id} \times i)^!pr''^*_1p^* \arrow[d] \\
q_*q^* \arrow[r, "\sim"] & p_*j_*j^*p^* \arrow[r] & p_*i_*i^!p^*[+1]
\end{tikzcd}$$

du fait de la compatibilité du morphisme connectant du triangle de localité avec les morphismes de changement de base (voir la sous-section 1.4.7). Ceci termine la preuve du lemme. □

Le résultat suivant est un corollaire immédiat des lemmes 3.6.23 et 3.6.24 :

Corollaire 3.6.25. — *La flèche* $q_*e_Kq^* : q_*q^*(-1)[-1] \longrightarrow q_*q^*$ *est donnée, modulo les identifications canoniques, par une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id} & t \end{pmatrix} : \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1] \oplus \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-2)[-2] \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)} \oplus \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1]$$

avec $t : \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-2)[-2] \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{H}(k)}(-1)[-1]$ *une certaine transformation naturelle qu'on ne précisera pas.*

Dans la suite, on supposera que le 2-foncteur homotopique stable H est muni d'une structure monoïdale symétrique unitaire. Pour un k-schéma quasi-projectif X, on notera $\otimes_X$ et $\mathbb{1}_X$ le produit tensoriel et l'objet unité de $\mathsf{H}(X)$. Lorsqu'on supposera que $(\mathsf{H}(X), \otimes_X)$ est fermée, on notera comme d'habitude $\underline{\mathsf{Hom}}_X(-,-)$ le bifoncteur

homomorphismes internes. Sauf mention du contraire, on supposera les conditions de l'hypothèse suivante vérifiées :

Hypothèse 3.6.26

1- Le 2-foncteur homotopique stable admet les petites sommes et il est parfait pour elles. Il est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparé. Les catégories monoïdales $\mathsf{H}(-)$ sont fermées et leur objet unité est compact.

2- Les groupes de morphismes suivants sont nuls :
- $\hom_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1}(m), \mathbb{1}[n]) = 0$ pour $n \in \{-2, -1, 0\}$ et $m \in \mathbb{N} - \{0\}$,
- $\hom_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(1)) = 0$.

3- L'objet $\mathsf{Alt}^2(\mathbb{1}_k(1))$ est nul. En d'autres termes, $\mathbb{1}_k(1)$ est pair de dimension 1 au sens de Kimura [**Kim05**].

En appliquant la transformation naturelle de Kummer à l'objet unité de $\mathsf{H}(\mathbb{G}_m)$, on obtient une flèche $e_K : \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}$. Notons le lemme suivant :

Lemme 3.6.27. — *L'annulateur dans* $\mathrm{end}_{\mathsf{H}(\mathbb{G}_m)}(\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m})$ *de la flèche* e_K *est l'idéal nul.*

Démonstration. — En effet, $\hom_{\mathsf{H}(\mathbb{G}_m)}(\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}, \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}) = \hom_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1}, q_*\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}) = \hom_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1} \oplus, \mathbb{1}(-1)[-1]) = \hom_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1})$. Il suffit donc de prouver que l'annulateur de e_K dans $\mathrm{end}_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1})$ est nul. Pour cela, il suffit de remarquer que q_*e_K contient comme facteur direct l'identité de $\mathbb{1}(-1)[-1]$. □

Vu le lemme précédent, on voit que l'hypothèse 3.6.26 implique l'hypothèse 3.6.1 de la sous-section précédente avec $\nu = \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}$ et $\lambda = \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)$. Dans la suite, on utilisera librement les résultats établis dans cette sous-section.

Lemme 3.6.28. — *Il existe, à un unique isomorphisme près, un triangle distingué :*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \xrightarrow{e_K} \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \longrightarrow \mathscr{K} \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1) \tag{42}$$

L'objet $\mathscr{K}$ *ainsi défini, est connu sous le nom du torseur de Kummer.*

Démonstration. — Complétons la flèche $e_K : \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}$ en un triangle distingué comme dans l'énoncé. Il s'agit de montrer que le triangle ainsi obtenu, n'admet pas d'endomorphismes non triviaux induisant l'identité sur $\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1]$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}$.

Pour cela, on choisit un tel endomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \arrow[r, "e_K"] \arrow[d, equal] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{K} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}+\epsilon"] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)[-1] \arrow[r, "e_K"] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m} \arrow[r] & \mathscr{K} \arrow[r] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-1)
\end{tikzcd}$$

L'endomorphisme ϵ se factorise par une flèche $\mathbb{1}(-1) \longrightarrow \mathscr{K}$. Mais par le lemme 3.6.4, on voit qu'une telle flèche est forcément nulle. D'où le résultat. □

Définition 3.6.29. — *Le logarithme* $\mathscr{L}og^\vee = \mathsf{Sym}^\infty \mathscr{K}$ *est la colimite homotopique de l'ind-objet* $(\mathscr{L}og_n^\vee)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathsf{H}(\mathbb{G}m)$ *donné par* $\mathscr{L}og_n^\vee = \mathsf{Sym}^n(\mathscr{K})$. *Par le corollaire 3.6.19, le logarithme est unique à un unique isomorphisme près. De plus, il est naturellement muni d'une structure d'algèbre associative, commutative et unitaire.*

On dispose également d'un triangle distingué canonique :

$$\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1] \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{G}m} \longrightarrow \mathscr{L}og^\vee \longrightarrow \mathscr{L}og^\vee(-1) \tag{43}$$

Ce triangle est à la base du 2-triangle distingué de monodromie. On aura besoin du lemme clef suivant :

Lemme 3.6.30. — *Rappelons que l'on note* q *la projection structurale du* k*-schéma* $\mathbb{G}m$. *On a des triangles distingués canoniques dans* $\mathsf{H}(k)$ *:*

$$\mathbb{1}(-n-1) \xrightarrow{0} \mathbb{1} \xrightarrow{a} q_*\mathscr{L}og_n^\vee \xrightarrow{b} \mathbb{1}(-n-1)[-1] \tag{44}$$

avec a *et* b *donnés respectivement par les composées suivantes :*

$$\mathbb{1} \longrightarrow q_*\mathbb{1}_{\mathbb{G}m} \longrightarrow q_*\mathscr{L}og_n^\vee \quad \text{et} \quad q_*\mathscr{L}og_n^\vee \longrightarrow q_*\mathbb{1}_{\mathbb{G}m}(-n) \longrightarrow \mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

De plus les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}(-n-1) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[d, "0"] \\
\mathbb{1}(-n-2) \arrow[r, "0"] & \mathbb{1} \arrow[r] & q_*\mathscr{L}og_{n+1}^\vee \arrow[r] & \mathbb{1}(-n-2)[-1]
\end{tikzcd} \tag{45}$$

sont des morphismes de triangles distingués.

Démonstration. — Notons qu'une fois les triangles distingués (44) construits, il est clair que le diagramme (45) est un morphisme de triangles distingués. En effet, il suffit de compléter le carré commutatif au centre et d'utiliser le fait que $\hom_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1}(-n-1), \mathbb{1}(-n-2)) = \hom_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(-1)) = 0$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on choisit deux triangles distingués :

$$\mathbb{1} \xrightarrow{a} q_*\mathscr{L}og_m^\vee \longrightarrow C_m \longrightarrow$$

et

$$N_m \longrightarrow q_*\mathscr{L}og_m^\vee \xrightarrow{b} \mathbb{1}(-m-1)[-1] \longrightarrow$$

Dans la suite, on raisonnera par récurrence sur n. Lorsque $n = 0$, le résultat découle de l'identification $q_*\mathbb{1} \simeq \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(-1)[-1]$. On supposera alors $n > 0$. On divise l'argument en trois étapes. On commence par une réduction :

Étape 1. Une réduction. — Nous affirmons que pour prouver le lemme au rang n, il suffit de montrer que :

1. C_n est isomorphe à $\mathbb{1}(-n-1)[-1]$,
2. N_n est isomorphe à $\mathbb{1}$.

Cette étape est consacrée à la preuve de cette affirmation. On dispose donc de deux triangles distingués :

$$\mathbb{1} \xrightarrow{a} q_*\mathscr{L}og_n^\vee \xrightarrow{b'} \mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow$$

et

$$\mathbb{1} \xrightarrow{a'} q_*\mathscr{L}og_n^\vee \xrightarrow{b} \mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow$$

Étant donné que $\hom_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(-n-1)[-1]) = 0$, on voit que les deux composées :

$$\mathbb{1} \xrightarrow{a} q_*\mathscr{L}og_n^\vee \xrightarrow{b} \mathbb{1}(-n-1)[-1] \quad \text{et} \quad \mathbb{1} \xrightarrow{a'} q_*\mathscr{L}og_n^\vee \xrightarrow{b'} \mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

sont nulles. Il existe alors des flèches rendant commutatifs les carrés :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "a"] \arrow[d, dotted, "u"'] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \arrow[d, equal] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "a'"] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "a'"] \arrow[d, dotted, "u'"'] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \arrow[d, equal] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "a"] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \end{tikzcd}$$

En composant verticalement, on déduit deux carrés commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u' \circ u"'] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \arrow[d, equal] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "a"] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "u \circ u'"'] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \arrow[d, equal] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "a'"] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \end{tikzcd}$$

On voit alors que les flèches $\mathrm{id} - u' \circ u$ et $\mathrm{id} - u \circ u'$ se factorisent à travers l'objet $\mathbb{1}(-n-1)[-2]$. Ils sont donc nuls vu que $\hom_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(-n-1)[-2]) = 0$ (par l'hypothèse 3.6.26). Ceci montre que u et u' sont inversibles. On déduit alors l'existence d'un triangle distingué :

$$\mathbb{1}(-n-1) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{1} \xrightarrow{a} q_*\mathscr{L}og_n^\vee \xrightarrow{b} \mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

Il reste à montrer que ϵ est nul. On prouvera en fait que b admet une section.

Pour cela, on considère le morphisme $\mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow \mathscr{L}og_n^\vee$ qui apparaît dans le triangle distingué :

$$\mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow \mathscr{L}og_n^\vee \longrightarrow \mathscr{L}og_{n+1}^\vee \longrightarrow \mathbb{1}(-n-1)$$

On va montrer que la composée :

$$\mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow q_*\mathbb{1}(-n-1)[-1] \longrightarrow q_*\mathscr{L}og_n^\vee \xrightarrow{a} \mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

est l'identité. On remarque alors qu'on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & q_*\mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[d, equal] \\
\mathbb{1}(n-1)[-1] \arrow[r] & q_*\mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[r, "e_K(-n)"] & q_*\mathbb{1}(-n) \arrow[r, "a"] & \mathbb{1}(-n-1)[-1]
\end{tikzcd}$$

déduit du morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}og_n^\vee \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}og_{n+1}^\vee \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-n-1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-n) \arrow[r] & \mathscr{K}(-n) \arrow[r] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-n-1) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Le résultat découle alors immédiatement du corollaire 3.6.25.

Étape 2. Un isomorphisme $C_n \simeq \mathbb{1}(-n-1)[-1]$. — On utilisera l'hypothèse de récurrence pour construire un tel isomorphisme. On dispose d'un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{K} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-1) \arrow[d] \\
\mathscr{L}og_{n-1}^\vee(-1)[-1] \arrow[r] & \mathbb{1} \arrow[r] & \mathscr{L}og_n^\vee \arrow[r] & \mathscr{L}og_{n-1}^\vee(-1)
\end{tikzcd}$$

En appliquant q_* et en utilisant le corollaire 3.6.25, on obtient une suite de deux morphismes de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
0[-1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathbb{1}(-1)[-1] \oplus \mathbb{1}(-2)[-2] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d] & q_*\mathscr{K} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-1) \oplus \mathbb{1}(-2)[-1] \arrow[d] \\
q_*\mathscr{L}og_{n-1}^\vee(-1)[-1] \arrow[r] & \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee \arrow[r] & q_*\mathscr{L}og_{n-1}^\vee(-1)
\end{tikzcd}$$

En appliquant l'axiome de l'octaèdre aux deux carrés commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{1} \arrow[d, "a"] \\
\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] & q_*\mathscr{L}og_n^\vee
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{1} \arrow[d, "a"] \\
\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] & q_*\mathscr{K}
\end{tikzcd}$$

on obtient un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}(-1)[-1] \oplus \mathbb{1}(-2)[-2] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-1) \oplus \mathbb{1}(-2)[-1] \arrow[d] \\
q_*\mathscr{L}og_{n-1}^\vee(-1)[-1] \arrow[r] & \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] & C_n \arrow[r] & q_*\mathscr{L}og_{n-1}^\vee(-1)
\end{tikzcd}$$

Formons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-1) \arrow[d] \\
\mathbb{1}(-1)[-1] \oplus \mathbb{1}(-2)[-2] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{1}(-2)[-1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-1) \oplus \mathbb{1}(-2)[-1] \arrow[d] \\
q_*\mathscr{L}og^\vee_{n-1}(-1)[-1] \arrow[r] & \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] & C_n \arrow[r] & q_*\mathscr{L}og^\vee_{n-1}(-1)
\end{tikzcd}$$

En composant, on obtient un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r, equal] \arrow[d, "a''"'] & \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-1) \arrow[d] \\
q_*\mathscr{L}og^\vee_{n-1}(-1)[-1] \arrow[r] & \mathbb{1}(-1)[-1] \arrow[r] & C_n \arrow[r] & q_*\mathscr{L}og^\vee_{n-1}(-1)
\end{tikzcd}$$

Il est facile de se convaincre que a'' est isomorphe (mais pas forcément égale) à $a(-1)[-1]$. Ainsi un cône de a'' est isomorphe à $C_{n-1}(-1)[-1] \simeq \mathbb{1}(-n-1)[-2]$. L'isomorphisme recherché s'obtient alors en appliquant encore une fois l'axiome de l'octaèdre.

Étape 3. Un isomorphisme $N_n \simeq \mathbb{1}$. — On procède de la même manière que l'étape précédente. On a un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}og^\vee_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}og^\vee_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}og^\vee_{n-1}[+1] \arrow[d] \\
\mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-n-1) \arrow[r] & \mathscr{K}(-n+1) \arrow[r] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-n) \arrow[r] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}_m}(-n-1)[+1]
\end{tikzcd}$$

En appliquant q_* et en utilisant le corollaire 3.6.25, on voit qu'on dispose d'une suite de deux morphismes de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
q_*\mathscr{L}og^\vee_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & q_*\mathscr{L}og^\vee_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-n) \oplus \mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & q_*\mathscr{L}og^\vee_{n-1}[+1] \arrow[d] \\
\mathbb{1}(-n+1) \oplus \mathbb{1}(-n)[-1] \arrow[r] \arrow[d] & q_*\mathscr{K}(-n+1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-n+1)[+1] \oplus \mathbb{1}(-n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-n) \oplus \mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[r, equal] & \mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[r] & 0[+1]
\end{tikzcd}$$

On applique ensuite l'axiome de l'octaèdre aux carrés commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
q_*\mathscr{L}og^\vee_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-n) \oplus \mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[d] \\
\mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[r, equal] & \mathbb{1}(-n-1)[-1]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
q_*\mathscr{K} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-n) \oplus \mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[d] \\
\mathbb{1}(-n-1)[-1] \arrow[r, equal] & \mathbb{1}(-n-1)[-1]
\end{tikzcd}$$

On obtient ainsi un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
q_*\mathscr{L}og^\vee_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & N_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & q_*\mathscr{L}og^\vee_{n-1}[+1] \arrow[d] \\
\mathbb{1}(-n+1) \oplus \mathbb{1}(-n)[-1] \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & \mathbb{1}(-n) \arrow[r] & \mathbb{1}(-n+1)[+1] \oplus \mathbb{1}(-n)
\end{tikzcd}$$

Et de là le morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
q_*\mathscr{L}og^\vee_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & N_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1}(-n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & q_*\mathscr{L}og^\vee_{n-1}[+1] \arrow[d] \\
\mathbb{1}(-n)[-1] \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{1}(-n) \arrow[r, equal] & \mathbb{1}(-n)
\end{tikzcd}$$

L'axiome de l'octaèdre fournit alors un isomorphisme $\mathbb{1} \simeq N_{n-1} \simeq N_n$. Le lemme est démontré. □

Corollaire 3.6.31. — *Le morphisme canonique* $\mathbb{1}_{\mathbb{G}m} \longrightarrow \mathscr{L}og^\vee$ *induit un isomorphisme* $\mathbb{1} \simeq q_*\mathscr{L}og^\vee$ via *la composée :*

$$\mathbb{1} \longrightarrow q_*\mathbb{1}_{\mathbb{G}m} \longrightarrow q_*\mathscr{L}og^\vee$$

Démonstration. — Étant donné que p_* commute aux colimites homotopiques (H étant supposé parfait pour les petites sommes), on déduit par passage à la colimite des triangles (44) un triangle distingué :

$$\mathsf{HoColim}_n\mathbb{1}(-n-1)[-2] \longrightarrow \mathsf{HoColim}_n\mathbb{1} \longrightarrow p_*\mathscr{L}og^\vee \longrightarrow \mathsf{HoColim}_n\mathbb{1}(-n-1)[-1]$$

La première colimite homotopique est nulle étant donné que les morphismes de transition du système inductif correspondant sont nuls. La deuxième colimite vaux $\mathbb{1}$ puisque le système inductif correspondant est stationnaire. Le corollaire est démontré. □

Remarque 3.6.32. — Les analogues (ℓ-adique, Hodge, etc) du résultat précédent sont bien connues. La preuve classique repose sur un calcul de suites spectrales. A ce propos, le lecteur peut consulter [**HW98**].

3.6.3. Le système de spécialisation logarithmique. — Rappelons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}m \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "q"'] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "p"] & s \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, equal] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

On introduit un nouveau système de spécialisation de base $(\mathbb{A}^1_k, j, i)$:

Définition 3.6.33. — *Le système de spécialisation logarithmique est le système de spécialisation noté* log *défini par :*

$$\mathsf{log}_f(A) = \chi_f(A \otimes \mathscr{L}og^\vee)$$

pour tout k-morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ et $A \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(X_\eta))$.

Dans cette section, on étudiera les propriétés de log comme on l'a déjà fait pour Υ. Remarquons tout de suite, que le morphisme évident $\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \longrightarrow \mathscr{L}og^{\vee}$ induit un morphisme de systèmes de spécialisation :

$$\chi \longrightarrow \mathsf{log}$$

On a l'analogue de la proposition 3.4.9 pour log :

Proposition 3.6.34. — *Gardons les notations du diagramme (25). Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, la composée des 2-morphismes suivants :*

$$1 \longrightarrow i^*(e_n)^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*(e_n)^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{e_n}(e_n)^*_\eta q^* \longrightarrow \mathsf{log}_{e_n}(e_n)^*_\eta q^*$$

est un 2-isomorphisme.

Démonstration. — Avant d'entamer la preuve de 3.6.34, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, l'objet $(e_n)^*_\eta \mathscr{L}og^{\vee}_N$ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{L}og^{\vee}_N$. Le foncteur $(e_n)^*_\eta$ étant monoïdal, il suffit d'exhiber un isomorphisme entre $(e_n)^*_\eta \mathscr{K}$ et $\mathscr{K}$. Pour cela, on étudie l'action de $(e_n)^*_\eta$ sur la classe de Kummer. En utilisant les morphismes de changement de base, on voit immédiatement que

$$(e_n)^*_\eta e_K : \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1] \longrightarrow \mathbb{1}$$

est la composée :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1] &\longrightarrow pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \longrightarrow pr_{1*}P_{n*}P_n^*pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \\ &\xrightarrow{\sim} pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \longrightarrow pr_{1*}\Delta_*\Delta^*pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}\end{aligned}$$

avec $P_n : \mathbb{G}\mathrm{m} \times \mathbb{G}\mathrm{m} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{m} \times \mathbb{G}\mathrm{m}$ le morphisme de schémas donné par l'association : $(x, y) \rightsquigarrow (x, y^n)$. Puisque H est $\mathbb{Q}$-linéaire et séparé, le lemme 3.4.13 affirme que la composée :

$$pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \longrightarrow pr_{1*}P_{n*}P_n^*pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \xrightarrow{\sim} pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}$$

est un isomorphisme. Il est facile de voir qu'il respecte la décomposition $pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1]$. Cet isomorphisme induit donc un isomorphisme $\alpha : \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1]$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "(e_n)^*_\eta e_K"] \arrow[rrrd, bend right, "\alpha"'] & pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \arrow[r] & pr_{1*}P_{n*}P_n^*pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \arrow[r, "\sim"] & pr_{1*}pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \arrow[r] & pr_{1*}\Delta_*\Delta^*pr_1^*\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \\
& & & \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1] \arrow[u] \arrow[ru, "e_K"'] &
\end{tikzcd}$$

On obtient alors un isomorphisme (dans la catégorie des flèches) : $(e_n)^*_\eta e_K \simeq e_K$ induisant un isomorphisme $\mathscr{K} \simeq (e_n)^*_\eta \mathscr{K}$.

Passons à la preuve de la proposition 3.6.34. Par ce qui précède, il suffit de traiter le cas $n = 1$. Il faut donc prouver que la composée des 2-morphismes suivants :

$$1 \xrightarrow{\sim} i^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{\mathrm{id}}q^* \longrightarrow \mathsf{log}_{\mathrm{id}}q^*$$

est un 2-isomorphisme. Rappelons que l'on dispose d'une transformation naturelle $q_* \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}$ définie par la composée :

$$q_* \xrightarrow{\sim} p_*j_* \longrightarrow p_*i_*i^*j_* \xrightarrow{\sim} i^*j_* = \chi_{\mathrm{id}}$$

Cette transformation naturelle a été utilisée dans la preuve de la proposition 3.4.9. On sait que cette transformation naturelle est un isomorphisme lorsqu'elle est évaluée sur des objets de la forme $q^*(?)$ (ainsi que des extensions de tels objets).

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr] & \chi_{\mathrm{id}}q^* \arrow[r] & \chi_{\mathrm{id}}(q^*(-) \otimes \mathscr{L}og^\vee) \\
& q_*q^* \arrow[r] \arrow[u, "\sim"'] & q_*(q^*(-) \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[u, "(?)"']
\end{tikzcd}$$

On voit alors que la flèche (?) est un isomorphisme (on utilise que H est parfait pour les petites sommes). D'autre part, la composée :

$$1 \longrightarrow q_*q^* \longrightarrow q_*(q^*(-) \otimes \mathscr{L}og^\vee)$$

s'identifie à :

$$(-) \otimes \mathbb{1} \longrightarrow (-) \otimes q_*q^*\mathbb{1} \longrightarrow (-) \otimes q_*\mathscr{L}og^\vee$$

Par le corollaire 3.6.31, on sait que cette composée est inversible. La proposition est prouvée. □

Le corollaire suivant s'obtient à partir de la proposition 3.6.34 de la même manière que le corollaire 3.4.15 s'obtient de la proposition 3.4.9.

Corollaire 3.6.35. — *On reprend les notations du corollaire 3.4.15. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^\times$, la composée des 2-morphismes suivants :*

$$(e_n^m)_\sigma^* \longrightarrow i^*(e_n^m)^*p^* \longrightarrow i^*j_*j^*(e_n^m)^*p^* \xrightarrow{\sim} \chi_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^* \longrightarrow \mathsf{log}_{e_n^m}(e_n^m)_\eta^*q^*$$

est un 2-isomorphisme.

On dispose également d'une structure pseudo-monoïdale sur les foncteurs $\mathsf{log}_?$ obtenue en prenant les accouplements suivants :

$$\begin{aligned}
\mathsf{log}_f A \otimes \mathsf{log}_f B &\longrightarrow \chi_f((A \otimes \mathscr{L}og^\vee) \otimes (B \otimes \mathscr{L}og^\vee)) \\
&\longrightarrow \chi_f((A \otimes B) \otimes (\mathscr{L}og^\vee)^{\otimes 2}) \longrightarrow \chi_f((A \otimes B) \otimes \mathscr{L}og^\vee)
\end{aligned}$$

La dernière flèche étant la multiplication de l'algèbre $\mathscr{L}og^{\vee}$. En utilisant le fait que cette algèbre est associative, commutative et unitaire, on déduit que log_f est un foncteur pseudo-monoïdal symétrique et que la transformation naturelle : $\chi \longrightarrow \mathsf{log}$ est un morphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux.

Supposons que le 2-foncteur monoïdal homotopique et stable H est fermé. Soit R un objet de $\mathsf{H}(k)$. On définit les opérateurs de dualité D_η et D_s par :

$$\mathsf{D}_\eta(-) = \underline{\mathsf{Hom}}(-, f_\eta^! q^* R) \qquad \text{et} \qquad \mathsf{D}_\sigma(-) = \underline{\mathsf{Hom}}(-, f_\sigma^! R)$$

On en définit un morphisme de commutation à la dualité :

$$\mathsf{sp}_f^{\mathcal{L}og} \circ \mathsf{D}_\eta \longrightarrow \mathsf{D}_s \circ \mathsf{sp}_f^{\mathcal{L}og} \tag{46}$$

par la même recette que celle du théorème 3.4.20. On a alors :

Théorème 3.6.36. — *On suppose que le corps k est de caractéristique zéro. Pour toute classe d'objets $\Lambda \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$ et tout objet E de $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X_\eta)$, le morphisme $\mathsf{sp}_f^{\mathcal{L}og} \circ \mathsf{D}_\eta(E) \longrightarrow \mathsf{D}_s \circ \mathsf{sp}_f^{\mathcal{L}og}(E)$ est inversible.*

On fait la définition suivante :

Définition 3.6.37. — *Le triangle de monodromie pour* log *est le 2-triangle distingué :*

$$\mathsf{log}_f(-1)[-1] \longrightarrow \chi_f \longrightarrow \mathsf{log}_f \xrightarrow{N} \mathsf{log}_f(-1)$$

obtenu à partir du triangle distingué (43). La transformation naturelle N est appelée l'opérateur de monodromie.

On termine notre étude du système de spécialisation logarithmique en prouvant une compatibilité du triangle de monodromie avec la dualité. On note d'abord la proposition suivante :

Proposition 3.6.38. — *Soit R un objet de $\mathsf{H}(k)$. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ un k-morphisme. Il existe un accouplement naturel :*

$$\chi_f \mathsf{D}_\eta A \otimes \chi_f A \longrightarrow f_s^! R(-1)[-1]$$

induisant un morphisme de commutation à la dualité :

$$\chi_f \mathsf{D}_\eta A \longrightarrow \mathsf{D}_s \chi_f A(-1)[-1]$$

Lorsque le corps k est de caractéristique nulle, alors pour toute classe d'objets $\Lambda \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$, ce morphisme est inversible pour A dans $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X_\eta)$.

Démonstration. — L'accouplement naturel est celui obtenu en prenant la composée :

$$\chi_f \mathsf{D}_\eta A \otimes \chi_f A \longrightarrow \chi_f \mathsf{D}_\eta A \otimes A \longrightarrow \chi_f f_\eta^! R \longrightarrow f_s^! \chi_{\mathrm{id}} R \longrightarrow f_s^! R(-1)[-1]$$

où le dernière flèche est celle déduite de l'isomorphisme canonique $\chi_{\mathrm{id}} R = R \oplus R(-1)[-1]$.

Montrons que le morphisme de commutation à la dualité est bien inversible. On se ramène par la méthode habituelle à traiter le cas $A = \mathbb{1}$ et $f = e_n$ où $f = e_n^m$. On se ramène immédiatement à montrer que l'accouplement hyperbolique :

$$(R \oplus R(-1)) \otimes (\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(-1)) \longrightarrow R(-1)$$

est non-dégénéré. Ceci est vrai. □

Soit A un objet de $\mathsf{H}(X_\eta)$. En appliquant l'opérateur de dualité D_s au triangle de monodromie, on obtient le triangle suivant :

$$\mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f A(-1)) \xrightarrow{\mathsf{D}_s(N)} \mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f A) \longrightarrow \mathsf{D}_s(\chi_f A) \longrightarrow \mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f(-1)[-1])$$

qui s'identifie au triangle distingué :

$$\mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f A)(1) \longrightarrow \mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f A) \longrightarrow \mathsf{D}_s(\chi_f(A)) \longrightarrow \mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f(A))(1)[+1]$$

On a le théorème suivant :

Théorème 3.6.39. — *On a un morphisme de triangles distingués :*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{log}_f \mathsf{D}_\eta(A)(1) \arrow[r, "-N(1)"] \arrow[d] & \mathsf{log}_f \mathsf{D}_\eta(A) \arrow[r] \arrow[d] & \chi_f \mathsf{D}_\eta(A)(1)[1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{log}_f \mathsf{D}_\eta(A)(1)[1] \arrow[d] \\
\mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f A)(1) \arrow[r, "\mathsf{D}_s N"] & \mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f A) \arrow[r] & \mathsf{D}_s(\chi_f(A)) \arrow[r] & \mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f(A))(1)[1]
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les morphismes de commutation à la dualité et le triangle supérieur est le triangle de monodromie décalé et twisté. Lorsque le corps k est de caractéristique nulle, alors pour toute classe $\Lambda \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$, ce morphisme est un isomorphisme de triangles dès que $A \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X_\eta))$.

Démonstration. — La dernière assertion est mise pour mémoire. Il s'agit simplement de prouver que le diagramme de l'énoncé est commutatif. Ainsi on divisera la preuve en trois parties, chacune consacrée à la commutation d'un des trois carrés constituant le diagramme.

Étape 1. — L'anti-commutation du carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{log}_f \mathsf{D}_\eta(A)(1) \arrow[r, "N(1)"] \arrow[d] & \mathsf{log}_f \mathsf{D}_\eta(A) \arrow[d] \\
\mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f A)(1) \arrow[r, "\mathsf{D}_s N"] & \mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f A)
\end{tikzcd}$$

On se ramène immédiatement par adjonction à montrer l'anti-commutation du carré :

$$\begin{tikzcd} \log_f \mathsf{D}_\eta(A) \otimes \log_f A \arrow[r] \arrow[d] & \log_f \mathsf{D}_\eta(A)(-1) \otimes \log_f A \arrow[d] \\ \log_f \mathsf{D}_\eta(A) \otimes \log_f(A)(-1) \arrow[r] & f_s^! R(-1) \end{tikzcd} \tag{47}$$

En revenant aux définitions, on voit immédiatement que les deux composées possibles du carré (47) sont égales aux deux composées possibles du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \chi_f(\mathsf{D}_\eta(A) \otimes \mathscr{L}og^\vee) \otimes \chi_f(A \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[d] \\ \chi_f(\mathsf{D}_\eta(A) \otimes A \otimes \mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[d] \\ \chi_f(f_s^! R \otimes \mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[d] \\ R \otimes \chi_f(f_s^!(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee)) \arrow[d] \\ R \otimes f_s^! \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[r] \arrow[d] & R \otimes f_s^! \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1) \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[d] \\ R \otimes f_s^! \chi_{\mathrm{id}}((\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1))) \arrow[r] & R \otimes f_s^! \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)) \simeq f_s^! \mathbb{1}(-1) \end{tikzcd}$$

Ainsi, il suffira de montrer l'anti-commutation du carré :

$$\begin{tikzcd} \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[r] \arrow[d] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1) \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[d] \\ \chi_{\mathrm{id}}((\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1))) \arrow[r] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)) \simeq \mathbb{1}(-1) \end{tikzcd}$$

D'après la proposition 3.6.11, on dispose d'une décomposition en somme directe :

$$\mathscr{L}og^\vee \oplus (\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathsf{Alt}^2 \mathscr{K} \otimes \mathscr{L}og^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee$$

Vue que $\hom_{\mathsf{H}(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(-1)[-1]) = 0$, on déduit immédiatement que les deux composées du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee) \arrow[r] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[r] \arrow[d] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1) \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[d] \\ & \chi_{\mathrm{id}}((\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1))) \arrow[r] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)) \simeq \mathbb{1}(-1) \end{tikzcd}$$

sont nulles. Ceci nous ramène à montrer que les deux composées possibles de diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{K} \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[r] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[r] \arrow[d] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1) \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[d] \\
& \chi_{\mathrm{id}}((\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1))) \arrow[r] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)) \simeq \mathbb{1}(-1)
\end{tikzcd}$$

sont égales à un facteur (-1) près. Par le lemme 3.6.13, on a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{K} \otimes \mathscr{L}og^\vee \arrow[r, "l", "\sim"'] \arrow[d] & \mathscr{L}og^\vee \otimes \mathbb{1}(-1) \otimes \mathscr{L}og^\vee \arrow[d] & \\
\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee \arrow[r] & \mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1) \arrow[r] & \mathscr{L}og^\vee(-1)
\end{tikzcd}$$

On déduit que la première composée, à savoir :

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{K} \otimes \mathscr{L}og^\vee) &\longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee) \\
&\longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1)) \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1))
\end{aligned} \tag{48}$$

est égale à la composée suivante :

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{K} \otimes \mathscr{L}og^\vee) &\xrightarrow{\ l\ } \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathbb{1}(-1) \otimes \mathscr{L}og^\vee) \\
&= \chi_f(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee)(-1) \longrightarrow \chi_f(\mathscr{L}og^\vee)(-1)
\end{aligned}$$

Remarquons d'autre part que la seconde composée, à savoir :

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathsf{Alt}^2\mathscr{K} \otimes \mathscr{L}og^\vee) &\longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee) \\
&\longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1) \otimes \mathscr{L}og^\vee) \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1))
\end{aligned} \tag{49}$$

s'obtient de la première en faisant agir la permutation des facteurs sur la source contenue dans $\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee$. Cette permutation agit par $-\mathrm{id}$ sur $\mathsf{Alt}^2\mathscr{K}$. D'autre part, la multiplication : $\mathscr{L}og^\vee \otimes \mathscr{L}og^\vee \longrightarrow \mathscr{L}og^\vee$ est commutative. Il vient de tout cela que les composées (48) et (49) s'obtiennent l'une de l'autre par multiplication par (-1). D'où l'anti-commutation de notre carré.

Étape 2. — La commutation du carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{log}_f\mathsf{D}_\eta(A) \arrow[r] \arrow[d] & \chi_f(\mathsf{D}_\eta A)(1)[1] \arrow[d] \\
\mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f A) \arrow[r] & \mathsf{D}_s(\chi_f(A))
\end{tikzcd}$$

On se ramène par adjonction à montrer la commutation du carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{log}_f(\mathsf{D}_\eta(A))(-1)[-1] \otimes \chi_f(A) \arrow[r] \arrow[d] & \chi_f(\mathsf{D}_\eta(A)) \otimes \chi_f(A) \arrow[d] \\
\mathsf{log}_f(\mathsf{D}_\eta(A))(-1)[-1] \otimes \mathsf{log}_f(A) \arrow[r] & f_s^! R(-1)[-1]
\end{tikzcd} \tag{50}$$

En revenant aux définitions, on voit immédiatement que les deux composées possibles du carré (50) sont égales aux deux composées possibles du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\chi_f(\mathsf{D}_\eta(A) \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \otimes \chi_f(A) \arrow[d] & & \\
\chi_f(\mathsf{D}_\eta(A) \otimes A \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1)[-1] \arrow[d] & & \\
\chi_f(f_\eta^! R \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \arrow[d] & & \\
R \otimes f_s^! \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1] \otimes \mathbb{1}) \arrow[r] \arrow[d] & R \otimes f_s^! \chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \arrow[dr] & \\
R \otimes f_s^! \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1] \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[r] & R \otimes f_s^! \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \arrow[r, "\sim"] & R \otimes f_s^! \mathbb{1}(-1)[-1]
\end{tikzcd}$$

Il vient qu'il suffit de prouver la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \arrow[r] \arrow[d] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}) \arrow[dr] & \\
\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1] \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[r] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{1}(-1)[-1]
\end{tikzcd}$$

Remarquons pour cela que $\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \simeq \mathbb{1}(-1)[-1]$. De plus, modulo cette identification, la composée :

$$\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}) \longrightarrow \mathbb{1}(-1)[-1]$$

est l'identité. Il reste donc à montrer que la composée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}(-1)[-1] = \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) &\longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1] \otimes \mathscr{L}og^\vee) \\
&\longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}(-1)[-1]
\end{aligned}$$

vaut l'identité. Pour cela, il suffit de remarquer que la composée en question est égale à la composée de :

$$\mathbb{1}(-1)[-1] \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}(-1)[-1]) \longrightarrow \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}(-1)[-1]$$

Cette dernière vaut l'identité.

Étape 3. – La commutation du carré :

$$\begin{tikzcd}
\chi_f(\mathsf{D}_\eta A)(1)[1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{log}_f(\mathsf{D}_\eta A)(1)[1] \arrow[d] \\
\mathsf{D}_s(\chi_f(A)) \arrow[r] & \mathsf{D}_s(\mathsf{log}_f(A))(1)[1]
\end{tikzcd}$$

Par adjonction, on se ramène immédiatement à la commutation du carré :

$$\begin{tikzcd}
\chi_f\mathsf{D}_\eta(A) \otimes \mathsf{log}_f A(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{log}_f\mathsf{D}_\eta(A) \otimes \mathsf{log}_f A(-1)[-1] \arrow[d] \\
\chi_f\mathsf{D}_\eta(A) \otimes \chi_f(A) \arrow[r] & f_s^! R(-1)[-1]
\end{tikzcd} \tag{51}$$

En revenant aux définitions, on voit immédiatement que les deux composées possibles du carré (51) sont égales aux deux composées possibles du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\chi_f\mathsf{D}_\eta(A) \otimes \chi_f(A \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \arrow[d] & & \\
\chi_f(\mathsf{D}_\eta(A) \otimes A \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1)[-1] \arrow[r] & \chi_f(f_\eta^! R \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \arrow[d] & \\
& R \otimes f_s^!\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1} \otimes \mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \arrow[r] \arrow[d] & R \otimes f_s^!\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1] \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[d] \\
& R \otimes f_s^!\chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \arrow[rr] & R \otimes f_s^!\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \arrow[d, "\sim"] \\
& & R \otimes f_s^!\mathbb{1}(-1)[-1]
\end{tikzcd}$$

Ce qui nous ramène encore une fois à la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \arrow[r] \arrow[d] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathbb{1}) \arrow[dr] & \\
\chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1] \otimes \mathscr{L}og^\vee) \arrow[r] & \chi_{\mathrm{id}}(\mathscr{L}og^\vee(-1)[-1]) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{1}(-1)[-1]
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme a été traité dans l'étape précédente. □

3.6.4. Retour au système de spécialisation cycles proches unipotents

On termine ce paragraphe par la construction d'un isomorphisme entre le système de spécialisation Υ construit dans la section 3.4 et le système de spécialisation logarithmique. Une fois cet isomorphisme construit, on déduit le triangle de monodromie (26) annoncé au début de la section. Pour construire cet isomorphisme, on a besoin d'une hypothèse technique souvent vérifiée, à savoir la commutation de images directes cohomologiques suivant un morphisme de schéma avec les $\mathbf{\Delta}$-colimites homotopiques.

Ainsi, tout au long de ce paragraphe, on supposera en plus de l'hypothèse 3.6.26 que la condition suivante est vérifiée :

Hypothèse 3.6.40

1- Le 2-foncteur homotopique stable H est sous-jacent à un dérivateur algébrique monoïdal, homotopique et stable. De plus pour tout morphisme de k-schéma f, le foncteur f_* commute aux $\mathbf{\Delta}$-limites, dans le sens que le morphisme évident : $(p_{\mathbf{\Delta}})_\# f_* \longrightarrow f_*(p_{\mathbf{\Delta}})_\#$ est inversible.

2- Le 2-foncteur homotopique stable H est engendré par sa base.

Sous ces conditions, on va définir un morphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux : $\mathsf{log} \longrightarrow \Upsilon$ qui fournira l'isomorphisme recherché. Pour cela, on reprend les notations de la section 3.4. On posera $\mathscr{U} = (p_{\mathbf{\Delta}})_\# \theta_* \mathbb{1} \in \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(\mathbb{G}\mathrm{m}))$. On a le lemme suivant :

Lemme 3.6.41. — *L'objet $\mathscr{U}$ est naturellement une algèbre commutative de $\mathsf{H}(\mathbb{G}m_k)$. De plus, sous la première partie de hypothèse 3.6.40, on a un isomorphisme canonique de systèmes de spécialisation monoïdaux : $\Upsilon \simeq \chi(- \otimes \mathscr{U})$.*

Démonstration. — Le foncteur θ_* étant pseudo-monoïdal symétrique, il est clair que $\theta_* \mathbb{1}$ est une algèbre commutative unitaire. De même, le foncteur $(p_{\mathbf{\Delta}})_\#$ est pseudo-monoïdal symétrique. Il vient que $\mathscr{U}$ est bien une algèbre commutative de $\mathsf{H}(\mathbb{G}\mathrm{m})$.

On obtient un morphisme $\Upsilon_f \longrightarrow \chi_f(- \otimes f_\eta^* \mathscr{U})$ en prenant la composée :

$$\begin{aligned}(p_{\mathbf{\Delta}})_\# \chi_f (\theta_f)_* (\theta_f, p_{\mathbf{\Delta}})^* &\xrightarrow{\sim} (p_{\mathbf{\Delta}})_\# \chi_f (((\theta_f)_* \mathbb{1}) \otimes (p_{\mathbf{\Delta}})^*(-)) \\ &\xrightarrow{\sim} \chi_f ((p_{\mathbf{\Delta}})_\# ((\theta_f)_* \mathbb{1}) \otimes (-))\end{aligned}$$

Sous la partie **1** de l'hypothèse 3.6.40, il s'agit bien d'un isomorphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux. □

On va définir un morphisme canonique $\ell_1 : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{U}$ dans $\mathsf{H}(\mathbb{G}\mathrm{m})$. Rappelons que $\square$ désigne la catégorie $\underline{\mathbf{1}} \times \underline{\mathbf{1}}$:

$$\begin{tikzcd} (1,1) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & (0,0) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

et que $i_\ulcorner : \ulcorner \longrightarrow \square$ désigne l'inclusion de la sous-catégorie pleine ayant pour objets $\mathsf{Ob}(\square) - \{(0,0)\}$. On appelle $\delta_\ulcorner : \Gamma \longrightarrow \mathbf{\Delta}$ le foncteur qui :

- envoie l'objet $(1,1) \in \mathsf{Ob}(\Gamma)$ sur $\underline{\mathbf{1}} \in \mathsf{Ob}(\mathbf{\Delta})$ et les objets $(1,0) \in \mathsf{Ob}(\Gamma)$ et $(0,1) \in \mathsf{Ob}(\Gamma)$ sur $\underline{\mathbf{0}} \in \mathsf{Ob}(\mathbf{\Delta})$,
- envoie la flèche $(0,1) \to (1,1)$ sur l'application $\underline{\mathbf{0}} \to \underline{\mathbf{1}}$ qui pointe $0 \in \underline{\mathbf{1}}$,
- envoie la flèche $(1,0) \to (1,1)$ sur l'application $\underline{\mathbf{0}} \to \underline{\mathbf{1}}$ qui pointe $1 \in \underline{\mathbf{1}}$.

étant donné un dérivateur triangulé de domaine Dia contenant la catégorie $\mathbf{\Delta}$, on déduit immédiatement une transformation naturelle : $(p_\Gamma)_\#(\delta_\Gamma)^* \longrightarrow (p_{\mathbf{\Delta}})_\#$ en prenant la composée :

$$(p_\Gamma)_\#(\delta_\Gamma)^* \simeq (p_{\mathbf{\Delta}})_\#(\delta_\Gamma)_\#(\delta_\Gamma)^* \longrightarrow (p_{\mathbf{\Delta}})_\#$$

En appliquant ceci à l'objet $\theta_*\mathbb{1} \in \mathsf{Ob}(\mathbb{H}(\mathbb{G}\mathrm{m}, \mathbf{\Delta}))$, on déduit un morphisme dans $\mathsf{H}(\mathbb{G}\mathrm{m})$:

$$(p_\Gamma)_\#(\delta_\Gamma)^*\theta_*\mathbb{1} \longrightarrow \mathscr{U}$$

Pour obtenir le morphisme ℓ_1 recherché, on va identifier $(p_\Gamma)_\#(\delta_\Gamma)^*\theta_*\mathbb{1}$ à $\mathscr{K}$. Calculons d'abord le squelette de $(\delta_\Gamma)^*\theta_*\mathbb{1}$. Remarquons pour cela que le diagramme de schémas $\mathscr{A} \circ \delta_\Gamma$ est donné par :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}\mathrm{m} \times_k \mathbb{G}\mathrm{m} & \mathbb{G}\mathrm{m} \arrow[l, "\Delta"'] \\
\mathbb{G}\mathrm{m} \arrow[u, "\mathrm{id} \times 1"'] &
\end{tikzcd}$$

Il vient immédiatement que le squelette de $(\delta_\Gamma)^*\theta_*\mathbb{1}$ est donné par :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1] \arrow[r, "(\mathrm{id}, e_K)"] \arrow[d, "\mathrm{id}, 0"'] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \\
\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} &
\end{tikzcd}$$

avec e_K la flèche de Kummer. Il existe alors une unique (à isomorphisme près) flèche $a : Q \longrightarrow (\delta_\Gamma)^*\theta_*\mathbb{1}$ de $\mathbb{H}(\mathbb{G}\mathrm{m}, \Gamma)$ ayant pour squelette :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1] \arrow[r, "e_K"] \arrow[d] \arrow[dr, "(0, \mathrm{id})"] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \arrow[dr, equal] & \\
0 \arrow[dr] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1] \arrow[r, "(\mathrm{id}, e)"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}, 0)"'] & \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \\
& \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\mathbb{1} \longrightarrow (\delta_\Gamma)^*\theta_*\mathbb{1}$ induit un isomorphisme après passage à $(p_\Gamma)_\#$ étant donné que la colimite du cône de a admet pour squelette :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} &
\end{tikzcd}$$

En fin de compte, par l'axiome 6 de la définition2.1.34, on dispose d'un triangle distingué :

$$\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)[-1] \xrightarrow{e} \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}} \longrightarrow (p_{\ulcorner})_{\#}Q \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}}(-1)$$

Il vient par le lemme 3.6.28 que $(p_{\ulcorner})_{\#}Q$ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{K}$.

Muni du morphisme $\ell_1 : \mathscr{K} \longrightarrow \mathcal{U}$, on applique le corollaire 3.6.19 pour obtenir un morphisme canonique d'algèbres associatives, commutatives et unitaires ℓ : $\mathscr{L}og^{\vee} \longrightarrow \mathscr{U}$

Définition 3.6.42. — *On définit un morphisme de systèmes de spécialisation* ℓ : $\mathsf{log} \longrightarrow \Upsilon$ *en prenant la composée :*

$$\mathsf{log} = \chi(- \otimes \mathscr{L}og^{\vee}) \xrightarrow{\ell} \chi(- \otimes \mathscr{U}) \xleftarrow{\sim} \Upsilon$$

C'est un morphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux.

Lemme 3.6.43. — *On a un triangle commutatif de systèmes de spécialisation :*

$$\begin{tikzcd} \chi \arrow[r] \arrow[d] & \Upsilon \\ \mathsf{sp}^{\mathscr{L}og} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Théorème 3.6.44. — *Lorsque le corps k est de caractéristique nulle, le morphisme* ℓ *est un isomorphisme de systèmes de spécialisation pseudo-monoïdaux.*

Démonstration. — Les deux systèmes de spécialisation $\mathsf{sp}^{\mathscr{L}og}$ et Υ commutent aux petites sommes. Étant donné que H est engendré par la base, on peut alors appliquer le critère 3.3.46. Le résultat découle alors des propositions 3.4.9 et 3.6.34 et des corollaires 3.4.15 et 3.6.35 (ainsi que le lemme précédent). □

Remarque 3.6.45. — Lorsque H est le 2-foncteur homotopique stable $\mathbf{DM}_{\mathbb{Q}}$, M. Levine [**Lev07**] a apporté une simplification notable à la preuve du théorème précédent. En effet, il démontre directement que le morphisme $\ell : \mathscr{L}og^{\vee} \longrightarrow \mathscr{U}$ est un isomorphisme. Pour cela, il utilise un modèle particulièrement simple du dual de $\mathscr{L}og$ qu'il arrive à identifier avec le complexe normalisé associé au schéma cosimplicial $\mathscr{A}$. En particulier, le théorème précédent est valable sans hypothèse sur le corps de base (du moins lorsqu'on travaille dans $\mathbf{DM}_{\mathbb{Q}}$).

On obtient donc le résultat suivant :

Théorème 3.6.46. — *Supposons que le corps k est de caractéristique nulle et que les hypothèses 3.6.26 et 3.6.40 sont vérifiées. Il existe un 2-triangle distingué canonique :*

$$\Upsilon_f(-1)[-1] \longrightarrow \chi_f \longrightarrow \Upsilon_f \xrightarrow{N} \Upsilon(-1)$$

appelé triangle de monodromie. De plus, ce triangle est compatible à la dualité dans le sens que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Upsilon_f \circ \mathsf{D}_\eta(-1)[-1] \arrow[r] \arrow[d] & \chi_f \circ \mathsf{D}_\eta \arrow[r] \arrow[d] & \Upsilon_f \mathsf{D}_\eta \arrow[r] \arrow[d] & \Upsilon \mathsf{D}_\eta(-1) \arrow[d] \\
\mathsf{D}_s(\Upsilon_f(1)[1]) \arrow[r] & \mathsf{D}_s(\chi_f(1)[1]) \arrow[r] & \mathsf{D}_s(\Upsilon_f) \arrow[r, "-\mathsf{D}_s(N(1))"] & \mathsf{D}_s(\Upsilon_f(1))
\end{tikzcd}$$

est un morphisme de triangles distingués qui devient un isomorphisme lorsqu'il est évalué en des objets de $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X_\eta)$ *pour toute classe* $\Lambda \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$.

On termine avec quelques conditions assurant la nilpotence des opérateurs de monodromie. Ces conditions sont vraies pour le 2-foncteur homotopique stable **DM** et sont conséquences du théorème de simplification de Voevodsky (voir pour cela [**VSF00**] et [**Voe02**]).

Hypothèse 3.6.47. — Pour tout k-schéma lisse U, le groupe abélien $\hom_{\mathsf{H}(U)}(\mathbb{1}_U, \mathbb{1}_U(n)[m])$ est nul dès que n est strictement négatif.

On a le lemme suivant :

Lemme 3.6.48. — *Supposons l'hypothèse 3.6.47 satisfaite. Soit* $\mathbb{1}(\mathbb{Z}) \subset \mathsf{Ob}(\mathsf{H}(k))$ *l'ensemble des objets de la forme* $\mathbb{1}(r)$ *avec* $r \in \mathbb{Z}$. *Soit* X *un* k*-schéma de type fini et* A *et* B *deux objets de* $\mathsf{H}_{\mathbb{1}(\mathbb{Z})}(X)$. *Il existe alors un entier* $n_0 \in \mathbb{Z}$ *tel que les groupes* $\hom_{\mathsf{H}(X)}(A, B(n)[m])$ *sont nuls pour* $n < n_0$.

Démonstration. — On a un isomorphisme canonique :

$$\hom_{\mathsf{H}(X)}(A, B(n)[m]) \simeq \hom_{\mathsf{H}(X)}(\mathbb{1}, \underline{\mathsf{Hom}}(A, B)(n)[m])$$

Comme A et B sont $\mathbb{1}(\mathbb{Z})$-constructibles, il en est de même de $\underline{\mathsf{Hom}}(A, B)$. Il vient qu'on peut supposer que $A = \mathbb{1}$. La conclusion de lemme étant clairement stable par extensions, suspensions et cosuspensions, on se ramène facilement à supposer que B varie dans un ensemble de générateurs de $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_\Lambda(X)$. On peut donc supposer que B est de la forme $f_*\mathbb{1}_Y(-n_0)$ pour un certain $f : Y \longrightarrow X$ projectif et lisse. Mais alors, par adjonction on a :

$$\hom_{\mathsf{H}(X)}(\mathbb{1}, B(n)[m]) = \hom_{\mathsf{H}(X)}(\mathbb{1}, f_*\mathbb{1}(-n_0+n)[m]) = \hom_{\mathsf{H}(Y)}(\mathbb{1}, \mathbb{1}(-n_0+n)[m])$$

Comme Y est lisse, on voit que pour $n < n_0$, les groupes ci-dessus sont bien nuls. □

Corollaire 3.6.49. — *Gardons les hypothèses du théorème 3.6.46 Lorsque l'hypothèse 3.6.47 est vérifiée, l'opérateur de monodromie :*

$$N : \Upsilon_f(A) \longrightarrow \Upsilon_f(A)(-1)$$

est nilpotent pour A *dans* $\mathsf{H}^{\mathsf{ct}}_{\mathbb{1}(\mathbb{Z})}(X)$.

CHAPITRE 4

LA CONSTRUCTION DE 2-FONCTEURS HOMOTOPIQUES STABLES

Introduction

Dans ce chapitre nous construisons le 2-foncteur homotopique stable **SH** dont il était question à plusieurs reprises dans les chapitres précédents. Ceci est bien entendu l'aboutissement des travaux de plusieurs mathématiciens : Morel et Voevodsky [**MV90**], Jardine [**Jar87, Jar00**], Hovey [**Hov01**]. Riou [**Rio02, Rio06**], Röndigs [**RÖ5**] et d'autres. En reproduisant ici la construction de **SH** nous espérons faciliter la tâche au lecteur désirant apprendre cette théorie. Le lecteur déjà familier avec la théorie remarquera à plusieurs reprises des divergences avec le traitement suivi dans les papiers originaux. Toutefois, il est clair que l'essentiel des résultats de ce chapitre sont dus aux auteurs déjà mentionnés et ont été directement puisés dans leurs papiers. Faisons un bref aperçu de ce chapitre :

1- La section 4.1 est une introduction à la théorie des catégories de modèles selon Quillen. On expose rapidement les conséquences immédiates de la définition. On définit ensuite la notion d'homotopie et on démontre le théorème fondamental de l'algèbre homotopique. On étudie également les foncteurs entre les catégories de modèles et notamment les adjonctions de Quillen. On passe ensuite aux 2-homotopies ce qui nous amène naturellement à la notion de catégories de modèles stables. On démontre alors un cas particulier du théorème de Hovey [**Hov99**] affirmant que la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles stable est naturellement triangulée.

2- La section 4.2 est probablement la plus technique de ce chapitre. Le but est d'établir le théorème de localisation de Hirschhorn [**Hir03**] (en fait un cas particulier dudit théorème). On commence par la notion d'accessibilité qui permet de mesurer la taille des objets dans une catégorie de modèles. On expose ensuite l'argument du petit objet et la notion connexe de complexes cellulaires (formalisée par Hirshhorn [**Hir03**]). On introduit dans la sous-section 4.2.3 la classe des catégories de modèles présentables par cofibrations. On s'efforce alors de filtrer les cofibrations de ces catégories par des sous-cofibrations de taille bornée. Les techniques obtenues servirons dans

la preuve du théorème de localisation mais également dans d'autres endroits tout au long du chapitre. Dans la sous-section 4.2.4, on présente une preuve du théorème de localisation de Hirschhorn. Ce théorème sera systématiquement utilisé dans la suite.

3- La section 4.3 est consacrée à la technique de stabilisation des catégories de modèles comme développée par Hovey [**Hov01**]. Le but est d'inverser, d'une manière convenable, un endofoncteur de Quillen à gauche F fixé. La technique de stabilisation est basée sur la notion de F-spectres (non-symétriques, symétriques etc). On commence par l'étude des spectres dans des catégories abstraites. On présente alors les constructions bien connues des foncteurs de suspension infinie et de délaçage. On étudie aussi la fonctorialité de la catégorie des spectres relativement aux différentes données (l'endofoncteur F, le monoïde de symétrisation, la catégorie ambiante, etc). On passe ensuite aux spectres dans les catégories de modèles. On définit les structures stables et on décrit les objets stablement fibrants *via* la notion de Ω-spectres. On démontre aussi des théorèmes de comparaisons entre différents types de spectres. Dans la sous-section 4.3.5, on spécialise la théorie au cas où le foncteur à inverser est le produit tensoriel par un objet cofibrant dans une catégorie de modèles monoïdale symétrique. On définit en particulier le produit tensoriel entre spectres symétriques et on montre que la structure de modèles stable est encore monoïdale symétrique (sous certaines hypothèses techniques).

4- Dans la section 4.4 on présente les travaux de Jardine [**Jar87**]. Étant donné un site de Grothendieck $(\mathcal{S}, top)$, notre but est de définir des structures de modèles *top*-locales sur les catégories des préfaisceaux $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ à valeurs dans certaines catégories de modèles $\mathfrak{M}$ appelées les catégories de coefficients. Notre traitement exclu le cas fondamental de $\mathfrak{M} = \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns$ considéré dans [**Jar87**] puisque nos catégories de coefficients seront supposées stables. Une bonne partie de la section est consacrée aux questions de fonctorialité. On établit ainsi un critère pour qu'un foncteur continu entre deux sites induise une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives *top*-locales.

5- Dans la dernière section, on exploite les techniques développées précédemment pour parvenir à notre but, à savoir, la construction du dérivateur algébrique $\mathbb{SH}$. On localise d'abord la structure Nis-locale de $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})$ suivant les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles (voir [**MV90**]). On stabilite ensuite relativement au foncteur $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \otimes -$ (voir [**Jar00**]). Une bonne partie est consacrée à la construction des foncteurs images inverses et de leurs adjoints ainsi qu'aux questions de cohérence. On vérifie ensuite les différents axiomes que doit satisfaire un dérivateur algébrique homotopique est stable. En particulier, on présente dans la sous-section 4.5.3 la preuve du théorème de localité de Morel et Voevodsky [**MV90**]. Cette sous-section est sans doute le cœur géométrique de ce chapitre. On termine la section par quelques compléments. On démontre notamment que les catégories $\mathbf{SH}(-)$ sont compactement engendrées.

4.1. Catégories de modèles I : la théorie générale

La notion de catégories de modèles qu'on utilisera est légèrement plus restrictive que celle de [**Qui67**] du fait que les catégories sous-jacentes seront supposées complètes et cocomplètes :

Définition 4.1.1. — *Une catégorie* $\mathfrak{M}$ *munie de trois classes de flèches* $\mathbf{W}$, $\mathbf{Cof}$ *et* $\mathbf{Fib}$ *(appelées respectivement la classe des équivalences faibles, des cofibrations et des fibrations) est une* catégorie de modèles *si les cinq axiomes suivants sont vérifiés.*

(MC1) : *Les petites limites et colimites sont représentables dans* $\mathfrak{M}$.

(MC2) : *Supposons donné un triangle commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

Si deux des trois flèches f, g *et* h *sont dans* $\mathbf{W}$, *il en est de même de la flèche restante.*

(MC3) : *Si la flèche* f *est rétracte de* g *et si* g *est une équivalence faible, une cofibration ou une fibration, il en est de même de* f.

(MC4) : *Toute cofibration admet la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales (*i.e., *fibrations qui sont des équivalences faibles). De même toute fibration admet la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales (*i.e., *cofibrations qui sont des équivalences faibles).*

(MC5) : *Toute flèche* $a : \bullet \longrightarrow \bullet$ *admet une factorisation :*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "c(a)"] \arrow[rr, bend right, "a"'] & \bullet \arrow[r, "f_0(a)"] & \bullet \end{tikzcd}$$

avec $c(a)$ *une cofibration et* $f_0(a)$ *une fibration triviale, ainsi qu'une factorisation :*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "c_0(a)"] \arrow[rr, bend right, "a"'] & \bullet \arrow[r, "f(a)"] & \bullet \end{tikzcd}$$

avec $c_0(a)$ *une cofibration triviale et* $f(a)$ *une fibration.*

Remarque 4.1.2. — Un triplet $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$, formé de trois classes de flèches dans une catégorie complète et cocomplète $\mathfrak{M}$, vérifiant les axiomes **(MC2)** à **(MC5)** de la définition 4.1.1 est appelé une *structure de modèles* sur $\mathfrak{M}$.

Les catégories de modèles rencontrées sont souvent propres au sens ci-dessous :

Définition 4.1.3. — *Une catégorie de modèles* $\mathfrak{M}$ *est dite* propre à gauche *(resp.* propre à droite*) lorsque les équivalences faibles de* $\mathfrak{M}$ *sont stables par push-out suivant les*

cofibrations (resp. stables par pull-back suivant les fibrations). On dit qu'elle est propre *si elle est propre à gauche et à droite.*

Rappelons qu'une flèche f admet *la propriété de relèvement à gauche par rapport* à une flèche g si pour tout carré commutatif (à flèches pleines) :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \bullet \end{tikzcd}$$

il existe une flèche en pointillé, appelée *relèvement*, rendant commutatif le diagramme ci-dessus. Dualement, nous disons que g admet *la propriété de relèvement à droite par rapport* à f lorsque f admet la propriété de relèvement à gauche par rapport à g. Il sera pratique d'introduire les notations suivantes :

Définition 4.1.4. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $F \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ une classe de flèches de $\mathcal{C}$. On note* $\mathrm{LLP}(F)$ *la classe des flèches ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux éléments de F. Dualement, on note* $\mathrm{RLP}(F)$ *la classe des flèches ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux éléments de F.*

La proposition ci-dessous montre que dans une catégorie de modèles, la connaissance de deux des trois classes $\mathbf{W}$, $\mathbf{Cof}$ et $\mathbf{Fib}$ suffit pour déterminer la classe restante :

Proposition 4.1.5. — *On a les égalités suivantes :*

$$\mathbf{Fib} = \mathrm{RLP}(\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}), \quad \mathbf{Fib} \cap \mathbf{W} = \mathrm{RLP}(\mathbf{Cof}),$$
$$\mathbf{Cof} = \mathrm{LLP}(\mathbf{Fib} \cap \mathbf{W}) \quad \textit{et} \quad \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W} = \mathrm{LLP}(\mathbf{Fib})$$

De plus, la classe $\mathbf{W}$ coïncide avec celle des composées $g \circ f$ avec $f \in \mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}$ et $g \in \mathbf{W} \cap \mathbf{Fib}$.

Démonstration. — On démontre uniquement la première égalité. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\mathrm{RLP}(\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W})$. Par la seconde partie de l'axiome **(MC5)**, il existe une factorisation de f :

$$X \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{f'} Y$$

avec i une cofibration triviale et f' une fibration. Comme $f \in \mathrm{RLP}(\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W})$, un relèvement existe dans le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

Ceci montre que f est rétracte de f'. Par l'axiome **(MC3)**, f est une fibration. □

On a le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 4.1.6. — *Les classes* **Cof** *et* $\mathbf{W}\cap\mathbf{Cof}$ *sont stables par push-out et coproduits directs. Dualement, les classes* **Fib** *et* $\mathbf{W}\cap\mathbf{Fib}$ *sont stables par pull-back et produits directs.*

Voici quelques exemples de catégories de modèles :

Exemple 4.1.7

1- Si $\mathcal{C}$ est une catégorie admettant les petites limites et colimites, alors $(\mathcal{C}, \mathbf{Isom}(\mathcal{C}), \mathsf{Fl}(\mathcal{C}), \mathsf{Fl}(\mathcal{C}))$ est une catégorie de modèles.

2- La notion de catégories de modèles est clairement autoduale dans le sens que lorsque $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ est une catégorie de modèles, il en est de même de $(\mathfrak{M}^{\mathrm{op}}, \mathbf{W}, \mathbf{Fib}, \mathbf{Cof})$.

3- Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne de Grothendieck. La catégorie $\mathbf{Compl}(\mathcal{A})$ des complexes (homologiques) d'objets de $\mathcal{A}$ est naturellement une catégorie de modèles propre (voir [**Joy84**]). Un morphisme de complexes $f : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ est une cofibration lorsque les f_n sont des monomorphismes pour tout $n \in \mathbb{Z}$. C'est une équivalence faibles lorsque $\mathrm{H}_n(f)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Enfin, f est une fibration s'il admet la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales.

Exemple 4.1.8. — La catégorie $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns$ des ensembles simpliciaux est naturellement une catégorie de modèles propre (voir par exemple [**GJ99**]). Les cofibrations sont les monomorphismes. Un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ est une équivalence faible si sa réalisation topologique $|f| : |A_\bullet| \longrightarrow |B_\bullet|$ est une équivalence d'homotopie. Les fibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales. La catégorie $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns$ est à la base de beaucoup de constructions de catégories de modèles.

La preuve du lemme ci-dessous est un exercice facile :

Lemme 4.1.9

1- Soient $\mathfrak{M}$ *une catégorie de modèles et* $A \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. *La catégorie* $A\backslash\mathfrak{M}$, *des flèches de source* A, *est une catégorie de modèles lorsqu'elle est munie des trois classes* $\mathrm{Oub}^{-1}(\mathbf{W})$, $\mathrm{Oub}^{-1}(\mathbf{Cof})$ *et* $\mathrm{Oub}^{-1}(\mathbf{Fib})$ *où* $\mathrm{Oub} : A\backslash\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ *désigne le foncteur d'oubli qui associe à une flèche de source* A *son but.*

2- On a également l'énoncé dual concernant la catégorie $\mathfrak{M}/A$ *des flèches de but* A.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ayant un objet initial $\varnothing$ et un objet final $*$. Rappelons que $\mathcal{C}$ est dite pointée lorsque l'unique morphisme $\varnothing \longrightarrow *$ est inversible. Il existe au moins deux façons d'associer à une catégorie $\mathcal{C}$ (ayant un objet initial et un objet final) une catégorie pointée. La première consiste à prendre la catégorie $\mathcal{C}_\varnothing = \mathcal{C}/\varnothing$. La seconde consiste à prendre la construction duale, à savoir $\mathcal{C}_* = *\backslash\mathcal{C}$. Les catégories

$\mathcal{C}_\varnothing$ et $\mathcal{C}_*$ sont pointées et la catégorie $\mathcal{C}$ est pointée si et seulement si l'un des deux foncteurs d'oubli : $\mathcal{C}_\varnothing \longrightarrow \mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}$ est un isomorphisme.

Les deux catégories $\mathcal{C}_*$ et $\mathcal{C}_\varnothing$ peuvent être tout à fait différentes. C'est le cas par exemple pour la catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$. Dans la suite nous utiliserons exclusivement la construction $\mathcal{C}_*$ qu'on appellera la catégorie pointée associée à $\mathcal{C}$.

Étant donnée une catégorie de modèles $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$, le lemme 4.1.9 nous dit que $\mathfrak{M}_*$ munie des classes $\mathbf{W}_* = \mathrm{Oub}^{-1}(\mathbf{W})$, $\mathbf{Cof}_* = \mathrm{Oub}^{-1}(\mathbf{Cof})$ et $\mathbf{Fib}_* = \mathrm{Oub}^{-1}(\mathbf{Fib})$ est une catégorie de modèles pointée.

4.1.1. Quelques points d'algèbre homotopique. — Soit $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ une catégorie de modèles. Dans ce paragraphe nous expliquons, suivant Quillen [**Qui67**], comment faire de l'homotopie dans $\mathfrak{M}$. Notre référence principale sera le second chapitre de [**GJ99**].

Définition 4.1.10. — *Soit X un objet de $\mathfrak{M}$.*

1- Un cylindre *(C_X, p, i_0, i_1) sur X est un diagramme commutatif dans $\mathfrak{M}$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "i_0"'] \arrow[drr, bend left, equal] & & \\ & C_X \arrow[r, "p"] & X \\ X \arrow[ur, "i_1"] \arrow[urr, bend right, equal] & & \end{tikzcd}$$

tel que p est une équivalence faible et $i_0 \coprod i_1 : X \coprod X \longrightarrow C_X$ une cofibration.

2- Dualement, un espace de chemins *(P_X, c, e_0, e_1) sur X est un diagramme commutatif dans $\mathfrak{M}$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, bend right, equal] & & \\ & P_X \arrow[ul, "e_0"] \arrow[dl, "e_1"'] & X \arrow[l, "c"] \\ X \arrow[ur, bend left, equal] & & \end{tikzcd}$$

tel que c est une équivalence faible et $e_0 \times e_1 : P_X \longrightarrow X \times X$ une fibration.

Soit (C_X, p, i_0, i_1) un cylindre sur X. Par l'axiome **(MC2)**, les flèches i_0 et i_1 sont des équivalences faibles. Lorsque X est cofibrant, c'est même des cofibrations triviales (voir [**GJ99**]).

Définition 4.1.11

1- Soient $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ deux flèches de $\mathfrak{M}$. Nous disons que f_0 et homotope à gauche *à f_1 relativement au cylindre (C_X, p, i_0, i_1) s'il existe une flèche*

$h : C_X \longrightarrow Y$ *tel que* $f_0 = h \circ i_0$ *et* $f_1 = h \circ i_1$. *La flèche* h *est appelée une* homotopie *de* f_0 *à* f_1 *relativement au cylindre* C_X. *Nous dirons que* f_0 *est homotope à gauche à* f_1 *s'il existe un cylindre relativement auquel* f_0 *est homotope à gauche à* f_1.

*2- Dualement, on a la notion d'*homotopie à droite *obtenue à l'aide des espaces de chemins.*

On démontre suivant [**GJ99**] que la relation d'homotopie à gauche (resp. à droite) est une relation d'équivalence lorsque X est cofibrant (resp. Y est fibrant). On a également :

Proposition 4.1.12. — *Soient* $f, g : X \longrightarrow Y$ *deux flèches de* $\mathfrak{M}$ *avec* X *cofibrant et* Y *fibrant. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *f et g sont homotopes à gauche,*
- *f et g sont homotopes à gauche relativement à un cylindre fixé,*
- *f et g sont homotopes à droite,*
- *f et g sont homotopes à droite relativement à un espace de chemin fixé.*

On notera $\pi_0(X, Y)$ *le quotient de* $\hom_{\mathfrak{M}}(X, Y)$ *par la relation d'homotopie.*

Démonstration. — On prouvera seulement que la première assertion implique la dernière. Les autres implications s'en déduisent facilement (en utilisant, entre autre, un argument de dualité). Pour cette implication, nous n'aurons pas besoin de l'hypothèse que Y est fibrant.

Soit (P_Y, c, e_0, e_1) l'espace de chemins sur Y qu'on s'est fixé. Par hypothèse, il existe un cylindre (C_X, p, i_0, i_1) sur X et une homotopie à gauche $h : C_X \longrightarrow Y$ de f à g. Comme X est cofibrant, $i_1 : X \longrightarrow C_X$ est une cofibration triviale. Considérons le carré solide commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c \circ g"] \arrow[d, "i_1"'] & P_Y \arrow[d, "(e_0, e_1)"] \\ C_X \arrow[r, "h, g \circ p"'] \arrow[ur, dotted, "t"] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

Par l'axiome **(MC4)**, on a un relèvement $t : C_X \longrightarrow P_Y$. L'homotopie à droite recherchée est donnée par la composée $t \circ i_0$. □

La preuve de la proposition 4.1.12 met en évidence la notion ci-dessous qui jouera un rôle important dans l'étude des homotopies à 2-homotopies près dans la section 4.1.3.

Définition 4.1.13. — *Soient* X *et* Y *deux objets de* $\mathfrak{M}$ *et* $f, g : X \longrightarrow Y$ *deux flèches. On suppose données :*
- *une homotopie à gauche* $h_g : C_X \longrightarrow Y$ *de* f *à* g *relativement à un cylindre* (C_X, p, i_0, i_1),
- *une homotopie à droite* $h_d : X \longrightarrow P_Y$ *de* f *à* g *relativement à un cylindre* (P_Y, c, e_0, e_1).

Une correspondance *entre h_g et h_d est une flèche $t : C_X \longrightarrow P_Y$ rendant commutatif le carré :*

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "h_d \cup c \circ g"] \arrow[d, "i_0 \cup i_1"'] & P_Y \arrow[d, "(e_0, e_1)"] \\ C_X \arrow[r, "(h_g, g \circ p)"'] \arrow[ur, "t"] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

On dit que h_g et h_d sont correspondantes *si une correspondance t existe.*

Remarque 4.1.14. — Soient X et Y deux objets de $\mathfrak{M}$ et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux flèches. Supposons que X est cofibrant et soit $h_g : C_X \longrightarrow Y$ une homotopie à gauche de f à g. La preuve de la proposition 4.1.12, montre qu'il existe une homotopie à droite $h_d : X \longrightarrow P_Y$ de f à g et une correspondance $t : C_X \longrightarrow P_Y$ entre h_g et h_d.

On note $\mathfrak{M}_c$ (resp. $\mathfrak{M}_f$) la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{M}$ formée des objets cofibrants (resp. fibrants). On note $\mathfrak{M}_{cf}$ la sous-catégorie des objets cofibrants et fibrants et $\pi_0\mathfrak{M}_{cf}$ la catégorie obtenue en quotientant l'ensemble des flèche par la relation d'homotopie. Nous dirons qu'une flèche de $\mathfrak{M}_{cf}$ est une équivalence d'homotopie si son image dans $\pi_0\mathfrak{M}_{cf}$ est un isomorphisme. On a alors le théorème de Whitehead :

Proposition 4.1.15. — *Soient X et Y deux objets cofibrants et fibrants de $\mathfrak{M}$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche. Les deux assertions suivantes :*
- *f est une équivalence faible,*
- *f est une équivalence d'homotopie,*

sont équivalentes.

Démonstration. — On suppose que $f \in \mathbf{W}$ et on démontre que f est une équivalence d'homotopie (l'autre implication est claire). On utilisant l'axiome **(MC5)**, on peut supposer que f est une cofibration triviale ou une fibration triviale. Ces deux cas sont duaux l'un de l'autre : on traitera uniquement le cas où f est une cofibration triviale. En appliquant l'axiome **(MC4)** au carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "g"] & * \end{tikzcd}$$

on obtient une rétraction g à f. Il reste à montrer que $f \circ g$ est homotope à l'identité. Pour cela, on se donne un espace de chemins (P_Y, c, e_0, e_1) sur Y et on applique une

deuxième fois l'axiome **(MC4)** au carré :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c \circ f"] \arrow[d, "f"'] & P_Y \arrow[d, "e_0, e_1"] \\ Y \arrow[r, "(\mathrm{id}, f \circ g)"'] \arrow[ur, dotted, "h"] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

ce qui fournit une homotopie à droite h de id_Y à $f \circ g$. □

Remarque 4.1.16. — La preuve de la proposition précédente montre en fait qu'une cofibration triviale $f : X \longrightarrow Y$ de source un objet fibrant admet une rétraction g tel que $f \circ g$ est homotope à droite à l'identité.

Dualement, si f est une fibration triviale et que Y est cofibrant, il existe une section s à f tel que $s \circ f$ soit homotope à gauche à l'identité.

Le théorème suivant est connu sous le nom du théorème fondamental de l'algèbre homotopique :

Théorème 4.1.17. — *La catégorie* $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}[\mathbf{W}^{-1}]$ *existe et est équivalente à* $\pi_0\mathfrak{M}_{cf}$. *Elle est appelée la catégorie homotopique associée à la catégorie de modèles* $\mathfrak{M}$. *De plus, pour* A *cofibrant et* X *fibrant on a un isomorphisme canonique* $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, X) \simeq \pi_0(A, X)$.

Démonstration. — Pour tout $X \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$ on choisit (en se servant de l'axiome **(MC5)**) deux factorisations :

$$\varnothing \longrightarrow Q(X) \xrightarrow{p_X} X \qquad \text{et} \qquad X \xrightarrow{i_X} R(X) \longrightarrow * \tag{52}$$

avec $Q(X)$ (resp. $R(X)$) cofibrant (resp. fibrant) et p_X (resp. i_X) une fibration triviale (resp. cofibration triviale). Pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathfrak{M}$ on choisit également des flèches $Q(f)$ et $R(f)$ faisant commuter les carrés :

$$\begin{tikzcd} Q(X) \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d] & Q(Y) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ R(X) \arrow[r, "R(f)"] & R(Y) \end{tikzcd} \tag{53}$$

L'existence des flèches $Q(f)$ et $R(f)$ est une conséquence de l'axiome **(MC4)**.

Remarquons que $Q(f)$ (resp. $R(f)$) est unique à une homotopie à gauche (resp. à droite) près. En effet, soient $f_1, f_2 : Q(X) \longrightarrow Q(Y)$ deux flèches rendant commutatif le premier carré de (53). Choisissons un cylindre $(C_{Q(X)}, i_0, i_1, p)$ sur $Q(X)$.

L'axiome **(MC4)** appliqué au carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} Q(X) \coprod Q(X) \arrow[r, "f_1 \cup f_2"] \arrow[d] & Q(Y) \arrow[d, "p_Y"] \\ C_{Q(X)} \arrow[r, "f \circ p \circ p_X"'] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

fournit une homotopie à gauche de f_1 à f_2. On déduit de là que $Q(\mathrm{id})$ est homotope à gauche à id. De même, pour une paire de flèches composables $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$ les flèches $Q(g \circ f)$ et $Q(g) \circ Q(f)$ sont homotopes à gauche.

Supposons maintenant que X et Y soient cofibrants et soient $f, g : X \longrightarrow Y$ deux flèches homotopes à gauche. On veut montrer que $R(f)$ et $R(g)$ sont homotopes à droite. Remarquons d'abord que $f \circ i_Y$ et $g \circ i_Y$ sont encore homotopes à gauche. Par la proposition 4.1.12, ils sont également homotopes à droite. Fixons une homotopie $h : X \longrightarrow P_{R(Y)}$ entre $f \circ i_Y$ et $g \circ i_Y$ relativement à un espace de chemins $(P_{R(Y)}, c, e_0, e_1)$ sur $R(Y)$. Par l'axiome **(MC4)**, il existe un relèvement dans le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_X"'] & P_{R(Y)} \arrow[d, "(e_0, e_1)"] \\ R(X) \arrow[r, "(R(f), R(g))"'] \arrow[ur, dotted, "h'"] & R(Y) \times R(Y) \end{tikzcd}$$

Il est clair que h' est une homotopie à droite entre $R(f)$ et $R(g)$.

Il est facile de déduire de là que $R(Q(\mathrm{id}))$ est homotope à id et que pour une paire de flèches composables $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$, on a $R(Q(g \circ f))$ homotope à $R(Q(g)) \circ R(Q(f))$. On obtient ainsi un foncteur bien défini :

$$RQ : \mathfrak{M} \longrightarrow \pi_0 \mathfrak{M}_{cf}$$

On définit une catégorie $\mathfrak{H}$ ayant les mêmes objets que ceux de $\mathfrak{M}$ et tel que pour $X, Y \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$ on a $\hom_{\mathfrak{H}}(X, Y) = \pi_0(R(Q(X)), R(Q(Y)))$. On a une factorisation évidente de RQ :

$$\mathfrak{M} \xrightarrow{L} \mathfrak{H} \longrightarrow \pi_0 \mathfrak{M}_{cf}$$

Si f est une équivalence faible, il en est de même de $R(Q(f))$ qui est donc une équivalence d'homotopie par la proposition 4.1.15. Il vient que le foncteur L envoie les équivalences faibles de $\mathfrak{M}$ sur des isomorphismes de $\mathfrak{H}$. On va montrer que ce foncteur $L : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{H}$ répond au problème universel de la localisation. On se donne ainsi un foncteur $F : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{C}$ envoyant les équivalences faibles sur des isomorphismes. On va montrer que F se factorise uniquement à travers $\mathfrak{H}$.

On construit $F_0 : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathcal{C}$ en posant $F_0(X) = F(X)$. Pour $\gamma \in \pi_0(R(Q(X)), R(Q(Y)))$, choisissons $u : R(Q(X)) \longrightarrow R(Q(Y))$ une flèche de $\mathfrak{M}$ ayant γ pour

classe d'homotopie. On pose alors $F_0(\gamma)$ l'unique flèche rendant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[d, "F_0(\gamma)"'] \arrow[rr, bend left, "\sim"] & F(Q(X)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & F(R(Q(X))) \arrow[d, "F(u)"] \\
F(Y) \arrow[rr, bend right, "\sim"'] & F(Q(Y)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & F(R(Q(Y)))
\end{tikzcd}$$

On vérifie immédiatement que $F_0(\gamma)$ ne dépend pas du choix de u. Ceci fournit le foncteur F_0 dont l'unicité est claire.

Il reste à montrer l'égalité $\hom_{\mathfrak{H}}(A, X) = \pi_0(A, X)$ pour A cofibrant et X fibrant. Étant donné que A est cofibrant, on peut supposer que $Q(A) = A$. De même, puisque X est fibrant, $Q(X)$ est encore fibrant et l'on peut supposer que $R(Q(X)) = Q(X)$. On est donc ramené à montrer que la flèche évidente $\pi_0(R(A), Q(X)) \longrightarrow \pi_0(A, X)$ est bijective. Ceci découle immédiatement de la remarque 4.1.16 appliquée à p_A et i_X. □

Remarque 4.1.18. — La preuve du théorème précédent montre que les catégories $\mathfrak{M}_c[\mathbf{W}^{-1}]$ et $\mathfrak{M}_f[\mathbf{W}^{-1}]$ existent et qu'elles sont équivalentes à $\pi_0\mathfrak{M}_{cf}$ et donc à $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Plus précisément, les choix $R(X)$, $Q(X)$, $R(f)$ et $Q(f)$ définissent des foncteurs :

$$R : \mathfrak{M}_c \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf} \qquad \text{et} \qquad Q : \mathfrak{M}_f \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf}$$

qui envoient les équivalences faibles sur des isomorphismes. Ceci induit des foncteurs :

$$\mathfrak{M}_c[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_f[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf}$$

qui sont des équivalences de catégories.

Notons les deux lemmes faciles :

Lemme 4.1.19. *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles. Le foncteur $\mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ commute aux coproduits directs entre objets cofibrants ainsi qu'aux produits directs entre objets fibrants. En particulier, les produits et coproduits directs existent dans la catégorie $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.*

Démonstration. — On traite uniquement le produit d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets fibrants. Étant donné que tout objet de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est isomorphe à un objet cofibrant il suffit de voir que pour A cofibrant :

$$\prod_i \pi_0(A, X_i) \simeq \pi_0(A, \prod_i X_i)$$

Ceci est clair si l'on définit $\pi_0(-, -)$ en utilisant les homotopies à gauche (voir la proposition 4.1.12). □

Lemme 4.1.20. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles. Si la catégorie $\mathfrak{M}$ est additive, il en est de même de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. De plus, le foncteur $\mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est additif.*

Démonstration. — Si $\mathfrak{M}$ est additive, il en est de même de $\mathfrak{M}_{cf}$ (qui est alors stable par sommes directes finies). On vérifie immédiatement que la relation d'homotopie est compatible à l'addition des flèches. Il vient que $\pi_0\mathfrak{M}_{cf}$ est aussi additive (puisqu'elle admet des produits et des coproduits).

Pour terminer, il reste à montrer que le foncteur $RQ : \mathfrak{M} \longrightarrow \pi_0\mathfrak{M}_{cf}$ est additif, *i.e.*, qu'il commute aux sommes directes finies. Il suffit pour cela de prouver que les flèches :

$$Q(X) \oplus Q(Y) \longrightarrow X \oplus Y \qquad \text{et} \qquad X \oplus Y \longrightarrow R(X) \oplus R(Y)$$

sont des équivalences faibles pour X, $Y \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. Ceci découle du fait que les fibrations triviales sont stables par produits directs et que les cofibrations triviales sont stables par coproduits directs (voir le corollaire 4.1.6). □

4.1.2. Adjonctions de Quillen et adjonctions de Morel-Voevodsky. — Dans ce paragraphe, on se donne deux catégories de modèles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$.

Définition 4.1.21

1- Soit $F : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ un foncteur. On dit que F est dérivable à droite *s'il existe un couple $(\mathsf{R}F, \gamma)$ formé*

- *d'un foncteur $\mathsf{R}F : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$,*
- *d'une face carrée :*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M} \arrow[r] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow\gamma"] & \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \arrow[d, "\mathsf{R}F"] \\ \mathfrak{N} \arrow[r] & \mathbf{Ho}(\mathfrak{N}) \end{tikzcd}$$

qui soit universel dans le sens suivant. Pour tout couple (T, β) formé d'un foncteur au niveau des catégories homotopiques et d'une face carrée comme ci-dessus, il existe une unique transformation naturelle $\alpha : \mathsf{R}F \longrightarrow T$ telle que $\beta = \alpha \circ \gamma$. Le foncteur $\mathsf{R}F$ sera appelé le foncteur dérivé à droite *de F.*

2- On obtient la notion de foncteur dérivable à gauche *par dualité. On désignera par $\mathsf{L}F$ le foncteur* dérivé à gauche *(lorsqu'il existe) de F.*

On a le critère suivant de dérivabilité :

Proposition 4.1.22. — *Soit $F : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ un foncteur qui préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants (resp. fibrants). Alors F est dérivable à gauche (resp. à droite).*

Démonstration. — Remarquons d'abord que pour A un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$ et (C_A, p, i_0, i_1) un cylindre sur A, le morphisme $F(p)$ est une équivalence faible. Il

vient que si $f, g : A \longrightarrow X$ sont homotopes à gauche, les flèches $F(f)$ et $F(g)$ ont même classe dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$.

Pour tout objet X de $\mathfrak{M}$, on fixe une fibration triviale $p_X : Q(X) \longrightarrow X$ avec $Q(X)$ un objet cofibrant. Pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$, on fixe une flèche $Q(f) : Q(X) \longrightarrow Q(Y)$ rendant commutatif :

$$\begin{tikzcd} Q(X) \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "p_X"'] & Q(Y) \arrow[d, "p_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

La flèche $Q(f)$ est unique à une homotopie à gauche près (voir la preuve du théorème 4.1.17). Il vient que l'image de $F(Q(f))$ dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$ ne dépend que de f. On obtient ainsi un foncteur bien défini $FQ : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$. D'autre part, si f est une équivalence faible, il en est de même de $Q(f)$ et donc aussi de $F(Q(f))$. Ainsi, notre foncteur envoie les équivalences faibles de $\mathfrak{M}$ sur des isomorphismes de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$. Il se factorise alors uniquement par un foncteur :

$$\mathsf{L}F : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$$

Pour montrer que $\mathsf{L}F$ est le foncteur dérivé à gauche de F, remarquons que les flèches $F(p_X) : FQ(X) \longrightarrow F(X)$ définissent une face carrée :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M} \arrow[r] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow_{\gamma}"] & \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \arrow[d, "\mathsf{L}F"] \\ \mathfrak{N} \arrow[r] & \mathbf{Ho}(\mathfrak{N}) \end{tikzcd}$$

Le couple $(\mathsf{L}F, \gamma)$ ainsi obtenu est universel. En effet, soit (T, β) un autre couple. Pour $X \in \mathfrak{M}$ on a alors un carré commutatif dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$:

$$\begin{tikzcd} T(Q(X)) \arrow[r, "T(p_X)"] \arrow[d, "\beta_{Q(X)}"'] & T(X) \arrow[d, "\beta_X"] \\ F(Q(X)) \arrow[r, "F(p_X) = \gamma_X"] & F(X) \end{tikzcd}$$

Comme p_X est inversible dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$, la flèche horizontale supérieure du carré précédent est inversible. Ainsi, la famille des flèches de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$:

$$T(X) \xrightarrow{T(p_X)^{-1}} T(Q(X)) \xrightarrow{\beta_{Q(X)}} F(Q(X)) = \mathsf{L}F(X)$$

définit une transformation naturelle $\alpha : T \longrightarrow \mathsf{L}F$ telle que $\beta = \gamma \circ \alpha$. De plus, un tel α est unique. $\square$

Le résultat suivant se déduit par un jeu d'adjonction de la proposition 4.1.5 :

Proposition 4.1.23. — *Soit* $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ *un couple de foncteurs adjoints. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *F préserve les cofibrations et les cofibrations triviales.*
- *G préserve les fibrations et les fibrations triviales.*
- *F préserve les cofibrations et G préserve les fibrations.*
- *F préserve les cofibrations triviales et G préserve les fibrations triviales.*

Définition 4.1.24. — *Un couple de foncteurs adjoints* $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ *vérifiant l'une des conditions équivalentes de la proposition 4.1.23 est appelé une* adjonction de Quillen. *Nous dirons également que F (resp. G) est un* foncteur de Quillen à gauche *(resp.* à droite*).*

Lemme 4.1.25. — *Soit* $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ *une adjonction de Quillen. Alors F préserve les cylindres sur les objets cofibrants. Dualement, G préserve les espaces de chemins sur les objets fibrants.*

Démonstration. — On traite uniquement le cas de F. Soit (C_A, p, i_0, i_1) un cylindre sur un objet cofibrant A. La flèche $F(A \coprod A) \longrightarrow F(C_A)$ est une cofibration. Comme F est un adjoint à gauche, il commute aux coproduits. Il vient que $F(i_0) \coprod F(i_1)$ est aussi une cofibration.

Il reste à vérifier que $F(p)$ est une équivalence faible. Comme A est cofibrant, i_0 est une cofibration triviale. Il vient que $F(i_0)$ est une cofibration triviale. On conclut alors par l'axiome **(MC2)** et le fait que $F(p) \circ F(i_0) = \mathrm{id}$. □

On déduit immédiatement que F (resp. G) préserve la relation d'homotopie à gauche (resp. à droite) sur les flèches de A vers B lorsque A (resp. B) est cofibrant (resp. fibrant).

Lemme 4.1.26. — *Soit* $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ *une adjonction de Quillen. Alors F préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants. Dualement, G préserve les équivalences faibles entre objets fibrants.*

Démonstration. — On traite uniquement le cas de F. Soit $f : A \longrightarrow B$ une équivalence faible entre objets cofibrants. On peut factoriser f en une composée :

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B$$

avec i une cofibration triviale et p une fibration triviale. On sait que $F(i)$ est encore une cofibration triviale. Il reste à montrer que $F(p)$ est une équivalence faible.

Étant donné que B est cofibrant, on sait par la remarque 4.1.16 que p admet une section $s : B \longrightarrow X$ tel que $s \circ p$ est homotope à gauche à l'identité. Comme X est cofibrant, le lemme précédent nous dit que $F(s) \circ F(p)$ est aussi homotope à gauche à id. Il vient que $F(p)$ est une équivalence faible. □

Proposition 4.1.27. — *Soit* $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ *une adjonction de Quillen. Alors* F *admet un foncteur dérivé à gauche* $\mathsf{L}F : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$ *. Dualement,* G *admet un foncteur dérivé à droite* $\mathsf{R}G : \mathbf{Ho}(\mathfrak{N}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ *. De plus, le foncteur* $\mathsf{L}F$ *est naturellement un adjoint à gauche de* $\mathsf{R}G$*.*

Démonstration. — L'existence de $\mathsf{L}F$ et $\mathsf{R}G$ découle du lemme 4.1.26 et de la proposition 4.1.22. Il reste à montrer que $\mathsf{L}F$ est adjoint à gauche à $\mathsf{R}G$. Il suffit de vérifier qu'on a un isomorphisme : $\pi_0(F(A), X) \simeq \pi_0(A, G(X))$ pour A cofibrant et X fibrant. Ceci découle facilement du lemme 4.1.25. □

Définition 4.1.28. — *Une adjonction de Quillen* (F, G) *est dite une* équivalence de Quillen *lorsque* $\mathsf{L}F$ *(ou* $\mathsf{R}G$*) est une équivalence de catégories.*

On suppose donné un couple de foncteurs adjoints $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ tel que G envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des équivalences faibles. On cherche des conditions assurant l'existence de l'adjoint à gauche de $\mathsf{R}G$.

Soit A est un objet de $\mathfrak{M}$ tel que $F(A)$ est cofibrant. Pour X un objet fibrant de $\mathfrak{N}$, la composée :

$$\hom_{\mathfrak{N}}(F(A), X) \longrightarrow \hom_{\mathfrak{M}}(A, G(X)) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(X))$$

se factorise par $\pi_0(F(A), X)$. En effet, si (P_X, c, e_0, e_1) est un espace de chemins sur X, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathfrak{N}}(F(A), P_X) \arrow[r, shift left, "e_0"] \arrow[r, shift right, "e_1"'] \arrow[d] & \hom_{\mathfrak{N}}(F(A), X) \arrow[d] \\
\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(P_X)) \arrow[r, shift left, "e_0"] \arrow[r, shift right, "e_1"'] & \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(X))
\end{tikzcd}$$

et les deux flèches e_0 et e_1 inférieures sont égales puisqu'ils sont deux rétractions à l'isomorphisme :

$$\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(X)) \xrightarrow{c} \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(P_X))$$

induit par l'équivalence faible $G(c) : G(X) \longrightarrow G(P_X)$.

Définition 4.1.29. — *Un objet* A *de* $\mathfrak{M}$ *est dit* F-admissible *si* $F(A)$ *est cofibrant et que pour tout objet fibrant* X *de* $\mathfrak{N}$ *le morphisme canonique :*

$$\pi_0(F(A), X) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(X))$$

est inversible.

Définition 4.1.30. — *Une adjonction* $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ *est dite une* adjonction de Morel-Voevodsky *lorsque les conditions suivantes sont satisfaites.*

1. *G envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des équivalences faibles.*
2. *Pour tout objet A de $\mathfrak{M}$, il existe une équivalence faible $B \longrightarrow A$ avec B un objet F-admissible. On dit dans ce cas, qu'il existe suffisamment de F-admissibles.*

Proposition 4.1.31. — *Soit $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ une adjonction de Morel-Voevodsky. Alors F admet un foncteur dérivé à gauche $\mathsf{L}F$ qui est naturellement un adjoint à gauche au foncteur $\mathsf{R}G$.*

Démonstration. — Pour montrer l'existence d'un adjoint à gauche à $\mathsf{R}G$, il suffit de montrer que, pour tout objet A de $\mathfrak{M}$, le foncteur :

$$\hom(A, \mathsf{R}G(-)) : \mathbf{Ho}(\mathfrak{N}) \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

est représentable. On prouvera qu'il est représentable par $F(\mathrm{ad}(A))$ pour une équivalence faible $q_A : \mathrm{ad}(A) \longrightarrow A$ avec $\mathrm{ad}(A)$ un objet F-admissible.

Pour cela, reprenons les choix de $R(X)$ et $R(f)$ comme dans la preuve de la proposition 4.1.22 de sorte que $\mathsf{R}G(X) = G(R(X))$. On a alors des isomorphismes :

$$\begin{aligned}\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, G(R(X))) &\simeq \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(\mathrm{ad}(A), G(R(X))) \\ &\simeq \pi_0(F(\mathrm{ad}(A)), R(X)) \simeq \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})}(F(\mathrm{ad}(A)), X)\end{aligned}$$

Ces isomorphismes sont bien-entendu naturels en X.

Pour terminer, il reste à prouver que l'adjoint à droite $F\mathrm{ad}$ de $\mathsf{R}G$ est bien le foncteur dérivé à gauche de F. On dispose d'une transformation naturelle $F(q_A)$: $F\mathrm{ad}(A) \longrightarrow F(A)$. On vérifie qu'elle est universelle au sens de la définition 4.1.21 en suivant la méthode utilisée dans la preuve de la proposition 4.1.22. □

4.1.3. La notion du π_1 dans une catégorie de modèles. — On définit suivant Quillen [**Qui67**] la notion de 2-homotopies entre homotopies dans une catégorie de modèles $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$:

Définition 4.1.32. — *Soient $f, g : A \longrightarrow X$ deux flèches de $\mathfrak{M}$ avec A cofibrant et X fibrant.*

1- Soient (C_A, p, i_0, i_1) et (C'_A, p', i'_0, i'_1) deux cylindres sur A. Deux homotopies à gauche $h : C_A \longrightarrow X$ et $h' : C'_A \longrightarrow X$ de f à g sont dites 2-homotopes à gauche *s'il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\left(C_A \coprod_{A \coprod A} C'_A\right) \arrow[rr, "h \cup h'"] \arrow[d, "p \cup p'"'] \arrow[dr, "a"] & & X \\
A & D \arrow[l, "q"] \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

avec a une cofibration et q une équivalence faible. La flèche l est appelée une 2-homotopie.

2- On a la notion duale de 2-homotopie à droite *entre deux homotopies à droite de f à g.*

On vérifie facilement, comme pour la relation d'homotopie :

Lemme 4.1.33. — *La relation de 2-homotopie à gauche est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — On traite uniquement la question de transitivité. Soient trois cylindres : (C_A, p, i_0, i_1), (C'_A, p', i'_0, i'_1) et $(C''_A, p'', i''_0, i''_1)$ sur A. On suppose données trois homotopies à gauche $h : C_A \longrightarrow X$, $h' : C'_A \longrightarrow X$ et $h'' : C''_A \longrightarrow X$ de f à g. Soient l_1 et l_2 deux 2-homotopies à gauche de h à h' et de h' à h'' respectivement :

$$\begin{tikzcd}
\left(C_A \coprod_{A\coprod A} C'_A\right) \arrow[rr, "h \cup h'"] \arrow[d, "p \cup p'"'] \arrow[dr, "a_1"] & & X \\
A & D_1 \arrow[l, "q_1"'] \arrow[ur, "l_1"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\left(C'_A \coprod_{A\coprod A} C''_A\right) \arrow[rr, "h' \cup h''"] \arrow[d, "p' \cup p''"'] \arrow[dr, "a_2"] & & X \\
A & D_2 \arrow[l, "q_2"'] \arrow[ur, "l_2"'] &
\end{tikzcd}$$

On pose alors $D = D_1 \coprod_{C'_A} D_2$. Alors $l = l_1 \cup l_2 : D \longrightarrow X$ est clairement une 2-homotopie de h à h''. □

Définition 4.1.34. — *On garde les notations de la définition 4.1.32. On note $\pi_1^g(A, X, f, g)$ (resp. $\pi_1^d(A, X, f, g)$) la classe des homotopies à gauche (resp. à droite) modulo la relation de 2-homotopie. Étant donné un cylindre (C_A, p, i_0, i_1) sur A (resp. un espace de chemins (P_X, c, e_0, e_1) sur X), on note $\pi_1(A, X, f, g, C_A) \subset \pi_1^g(A, X, f, g)$ (resp. $\pi_1(A, X, f, g, P_X) \subset \pi_1^d(A, X, f, g)$) le sous-ensemble des homotopies à gauche (resp. à droite) relativement à C_A (resp. P_X) à 2-homotopie près.*

Les classes $\pi_1^g(A, X, f, g)$ (resp. les ensembles $\pi_1(A, X, f, g, C_A)$) sont covariants en X de la manière évidente. Supposons donné un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A' \coprod A' \arrow[r, "i'_0 \cup i'_1"] \arrow[d] & C_{A'} \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & A' \arrow[d, "u"] \\
A \coprod A \arrow[r, "i_0 \cup i_1"] & C_A \arrow[r, "p"] & A
\end{tikzcd}$$

avec A et A' cofibrants et (C_A, p, i_1, i_2) et (C'_A, p', i'_1, i'_2) des cylindres sur A et A' respectivement. On a alors un morphisme évident $\pi_1(A, X, f, g, C_A) \longrightarrow \pi_1(A', X, f \circ u, g \circ u, C'_A)$. On vérifie immédiatement que $\pi_1(A, X, f, g, C_A)$ sont bifonctoriels en les couples $((A, C_A), X)$.

Lemme 4.1.35. — *On garde les hypothèses et les notations des définitions 4.1.32 et 4.1.34.*

1- *Il existe un isomorphisme canonique $\pi_1^g(A,X,f,g) \simeq \pi_1^d(A,X,f,g)$ qui à une homotopie à gauche $h : C_A \longrightarrow X$ associe une homotopie à droite $k : A \longrightarrow P_X$ telle que h et k sont correspondantes au sens de la définition 4.1.13.*

2- *L' inclusion $\pi_1(A,X,f,g,C_A) \subset \pi_1^g(A,X,f,g)$ est bijective. En particulier, les classes $\pi_1^g(A,X,f,g)$ sont des ensembles.*

Démonstration. — En effet, par la remarque 4.1.14, à une homotopie à gauche correspond une homotopie à droite et vice versa. Il s'agit de vérifier que cette correspondance est bien définie à 2-homotopie près.

Soit donc $h : C_A \longrightarrow X$ une homotopie à gauche de f à g. Soient (P_X, c, e_0, e_1) et (P'_X, c', e'_0, e'_1) deux espaces de chemins sur X. Considérons des relèvements t et t' dans les deux carrés commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "c \circ g"] \arrow[d, "i_1"'] & P_X \arrow[d, "(e_0,e_1)"] \\ C_A \arrow[r, "(h,\, g \circ p)"'] \arrow[ur, dotted, "t"] & X \times X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "c' \circ g"] \arrow[d, "i_1"'] & P'_X \arrow[d, "(e'_0,e'_1)"] \\ C_A \arrow[r, "(h,\, g \circ p)"'] \arrow[ur, dotted, "t'"] & X \times X \end{tikzcd}$$

dont l'existence est assurée par l'axiome **(MC4)**. On veut montrer que $t \circ i_0$ est 2-homotope à droite à $t' \circ i'_0$. On choisit par l'axiome **(MC5)** une factorisation :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "c \times c'"] & E \arrow[r, "v"] & P_X \times_{X \times X} P'_X \end{tikzcd}$$

avec u une cofibration triviale et v une fibration. Considérons le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u \circ g"] \arrow[d, "i_1"'] & E \arrow[d, "v"] \\ C_A \arrow[r, "t \times t'"'] \arrow[ur, dotted] & P_X \times_{X \times X} P'_X \end{tikzcd}$$

Par l'axiome **(MC4)**, on obtient un relèvement $w : C_A \longrightarrow E$. On vérifie immédiatement que $w \circ i_0$ est une 2-homotopie de $t \circ i_0$ à $t' \circ i'_0$.

Pour terminer la démonstration du **1-**, il reste à vérifier que deux homotopies $h : C_A \longrightarrow X$ et $h' : C'_A \longrightarrow X$ qui sont 2-homotopes, correspondent à la même homotopie à droite. Choisissons une factorisation :

$$C_A \coprod_{A \coprod A} C'_A \xrightarrow{a} D \xrightarrow{q} A$$

avec $a = b \cup b'$ une cofibration et q une équivalence faible ainsi qu'une 2-homotopie $l : D \longrightarrow X$ entre h et h'. L'objet D, muni de la cofibration évidente $u_0 \coprod u_1$:

$A \coprod A \longrightarrow D$ déduite de a, est un cylindre. De plus, l est une homotopie à gauche de f à g relativement à D. Il existe donc une correspondance $t : D \longrightarrow P_X$ entre l et $t \circ u_0$. Il est alors clair que l'homotopie à droite $t \circ u_0 : A \longrightarrow P_X$ correspond aux homotopies à gauche $h = l \circ b$ et $h' = l \circ b'$ *via* les correspondances respectives $t \circ b$ et $t \circ b'$.

L'assertion du **2-** est maintenant claire. En effet, la construction précédente fournit également des isomorphismes $\pi_1^g(A, X, f, g) \simeq \pi_1(A, X, f, g, P_X)$ pour (P_X, c, e_0, e_1) un espace de chemins fixé. □

On note $\pi_1(A, X, f, g)$ l'un des deux ensembles canoniquement isomorphes $\pi_1^g(A, X, f, g)$ ou $\pi_1^d(A, X, f, g)$. Le lemme ci-dessus montre que l'ensemble $\pi_1(A, X, f, g)$ est bifonctoriel en A et X.

Lemme 4.1.36. – *Soit $u : A' \longrightarrow A$ une flèche entre objets cofibrants de $\mathfrak{M}$. La composée :*

$$\pi_1^g(A, X, f, g) \xleftarrow{\sim} \pi_1(A, X, f, g, C_A) \longrightarrow \pi_1(A', X, f \circ u, g \circ u, C'_A) \xrightarrow{\sim} \pi_1^g(A', X, f \circ u, g \circ u)$$

ne dépend pas du choix d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A' \coprod A' \arrow[r, "i'_0 \cup i'_1"] \arrow[d] & C_{A'} \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "v"] & A' \arrow[d, "u"] \\
A \coprod A \arrow[r, "i_0 \cup i_1"] & C_A \arrow[r, "p"] & A
\end{tikzcd}$$

De plus, on a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^g(A, X, f, g) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \pi_1^g(A', X, f \circ u, g \circ u) \arrow[d, "\sim"] \\
\pi_1^d(A, X, f, g) \arrow[r] & \pi_1^d(A', X, f \circ u, g \circ u)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^g(A, X, f, g) \arrow[d, "\sim"'] & \pi_1(A, X, f, g, C_A) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r] & \pi_1(A', X, f \circ u, g \circ u, C'_A) \arrow[r, "\sim"] & \pi_1^g(A', X, f \circ u, g \circ u) \arrow[d, "\sim"] \\
\pi_1^d(A, X, f, g) \arrow[rrr] & & & \pi_1^d(A', X, f \circ u, g \circ u)
\end{tikzcd}$$

Ceci revient à montrer que pour un espace de chemin (P_X, c, e_0, e_1) sur X, le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A, X, f, g, C_A) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\sim"'] & \pi_1(A', X, f \circ u, g \circ u, C'_A) \arrow[d, leftrightarrow, "\sim"] \\
\pi_1(A, X, f, g, P_X) \arrow[r] & \pi_1(A', X, f \circ u, g \circ u, P_X)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ceci découle de la remarque suivante. Soit $k : A \longrightarrow P_X$ une homotopie à droite de f à g. Si $h : C_A \longrightarrow X$ correspond à k *via* la correspondance $t : C_A \longrightarrow P_X$ alors $h \circ v$ correspond à $k \circ u$ *via* la correspondance $t \circ v$. □

Définition 4.1.37. — *Lorsque la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est pointée, on notera simplement $\pi_1(A, X)$ le groupe $\pi_1(A, X, *, *)$. On a ainsi un foncteur :*

$$\pi_1(-,-) : \mathfrak{M}_c^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{M}_f \longrightarrow \mathcal{E}ns \tag{54}$$

Théorème 4.1.38. — *Supposons que la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est pointée. Le bifoncteur* (54) *se relève en un bifoncteur :*

$$\pi_1(-,-) : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{E}ns \tag{55}$$

De plus, il existe un couple de foncteurs adjoints $(\Sigma^1, \Omega^1) : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ et des isomorphismes fonctoriels en A cofibrant et X fibrant :

$$\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(\Sigma^1 A, X) \simeq \pi_1(A, X) \simeq \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, \Omega^1 X)$$

Enfin, pour A cofibrant, l'objet $\Sigma^1 A$ est canoniquement isomorphe (dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$) au push-out du diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \coprod A \arrow[r] \arrow[d] & C_A \\ * & \end{tikzcd} \tag{56}$$

L'énoncé dual est bien entendu vrai pour $\Omega^1 X$.

Démonstration. — Pour $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M})$ cofibrant, notons S_A^1 le push-out de (56). Le foncteur $\pi_1(A, -) : \mathfrak{M}_f \longrightarrow \mathcal{E}ns$ s'identifie canoniquement à $\pi_0(S_A^1, -) : \mathfrak{M}_f \longrightarrow \mathcal{E}ns$. En effet, une homotopie $C_A \longrightarrow X$ de $*$ à $*$ est simplement une flèche de S_A^1 vers X. De même une 2-homotopie correspond simplement à une homotopie entre flèches de S_A vers X.

On en déduit que $\pi_1(A, -) : \mathfrak{M}_f \longrightarrow \mathcal{E}ns$ envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des isomorphismes. Dualement, $\pi_1(-, X)$ envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des isomorphismes. Ainsi, $\pi_1(-,-)$ se relève en un bifoncteur :

$$\mathfrak{M}_c^{\mathrm{op}}[\mathbf{W}^{-1}] \times \mathfrak{M}_f[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

Comme les foncteurs $\mathfrak{M}_c[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ et $\mathfrak{M}_f[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ sont des équivalences de catégories (voir remarque 4.1.18), nous avons prouvé la première partie du théorème. Le reste découle formellement du lemme de Yoneda et de l'isomorphisme $\pi_1(A, X) \simeq \pi_0(S_A^1, X) \simeq \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(S_A^1, X)$ pour A cofibrant et X fibrant. □

Définition 4.1.39. — *Pour une catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ pointée, l'endofoncteur Σ^1 de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est appelé le foncteur de* suspension. *Son adjoint Ω^1 est appelé le foncteur de* cosuspension *(ou encore de* délaçage*).*

Proposition 4.1.40. — *Soient $e, f, g : A \longrightarrow X$ trois flèches de $\mathfrak{M}$ avec A cofibrant et X fibrant. On a un morphisme de composition fonctoriel et associatif :*

$$\pi_1(A, X, e, f) \times \pi_1(A, X, f, g) \longrightarrow \pi_1(A, X, e, g)$$

De plus, les monoïdes $\pi_1(A, X, f, f)$ sont des groupes.

En particulier, si la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est pointée le foncteur $\pi_1(-,-)$ s'enrichit en un foncteur :

$$\pi_1(-,-) : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{G}rp$$

avec $\mathcal{G}rp$ la catégorie des groupes.

Démonstration. — Soient (C_A, p, i_0, i_1) et (C'_A, p', i'_0, i'_1) deux cylindres sur A et $(C''_A, p'', i''_0, i''_1)$ le cylindre composé où C''_A est le push-out de :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i'_0"] \arrow[d, "i_1"'] & C'_A \\ C_A & \end{tikzcd}$$

Étant données une homotopie $h : C_A \longrightarrow X$ de e à f et une homotopie $h' : C'_A \longrightarrow X$ de f à g, on définit l'homotopie $h'' : C''_A \longrightarrow X$ par $h'' = h \cup h'$. On vérifie facilement que cette construction fournit un accouplement associatif et fonctoriel :

$$\pi_1^g(A, X, e, f) \times \pi_1^g(A, X, f, g) \longrightarrow \pi_1^g(A, X, e, g)$$

dont les éléments neutres sont donnés par les classes des homotopies constantes $f \circ p : C_A \longrightarrow X$ dans $\pi_0(A, X, f, f)$.

Pour montrer que $\pi_1(A, X, f, f)$ est un groupe, il reste à construire des inverses. Si (C_A, p, i_0, i_1) est un cylindre sur A, on notera (C_A°, p, i_1, i_0) le cylindre symétrique avec $C_A^\circ = C_A$, On montrera que l'inverse d'une homotopie $h : C_A \longrightarrow X$ dans $\pi_1(A, X, f, f, C_A)$ est donnée par h mais vue dans $\pi_1(A, X, f, f, C_A^\circ)$. Il s'agit donc de voir que l'homotopie de f vers f :

$$C_A \coprod_{i_1(A)} C_A \xrightarrow{h \cup h} X$$

est 2-homotope à l'homotopie constante.

Pour cela, considérons l'objet D obtenu par push-out du diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \coprod A \arrow[r, "i_0 \cup i_0"] \arrow[d, "i_0 \cup i_1"'] \arrow[dr, "d_0 \cup d_1"] & C_A \coprod_{i_1(A)} C_A \arrow[d, dotted] \\ C_A \arrow[r, dotted] & D \end{tikzcd}$$

Le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \coprod A \arrow[r, "i_0 \cup i_0"] \arrow[d, "i_0 \coprod i_1"'] & C_A \coprod_{i_1(A)} C_A \arrow[d] \\ C_A \arrow[r, "i_0 \circ p"] & C_A \end{tikzcd}$$

fournit un morphisme $D \longrightarrow C_A$ qu'on factorise par :

$$D \xrightarrow{u} R \xrightarrow{v} C_A$$

avec u une cofibration et v une fibration triviale. Si l'on compose la cofibration $d_0 \cup d_1$ par u, on obtient la cofibration :

$$r_0 \cup r_1 : A \coprod A \longrightarrow R$$

faisant de R un cylindre sur A.

On obtient alors deux morphismes de cylindres : $C_A \longrightarrow R$ et $C_A \coprod_{i_1(A)} C_A \longrightarrow R$. L'homotopie $h \circ v$ induit par restriction suivant ces deux morphismes l'homotopie constante et l'homotopie composée $h \cup h$. Le résultat découle alors du lemme 4.1.36. □

On note trois corollaires de la proposition 4.1.40 :

Corollaire 4.1.41. — *Supposons que la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est pointée. Pour tout objet X de $\mathfrak{M}$, l'objet $\Sigma^1 X$ (resp. $\Omega^1 X$) est un cogroupe (resp. un groupe) de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. L'objet $\Sigma^2 X$ (resp. $\Omega^2 X$) est un cogroupe commutatif (resp. un groupe commutatif) de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.*

Démonstration. — L'assertion concernant Σ^1 est claire. Montrons que le cogroupe $G = \Sigma^2(X)$ est commutatif. Remarquons pour cela que cet objet admet en fait deux structures de cogroupes. La première $u : G \longrightarrow G \coprod G$ étant la structure sur $\Sigma^1 Z$ pour $Z = \Sigma^1 X$. La seconde $v : G \longrightarrow G \coprod G$ étant la structure déduite de celle de $\Sigma^1 X$ par application de Σ^1.

Il est clair que v est un morphisme de cogroupes pour la structure u. Ainsi pour tout objet B de $\mathfrak{M}$, les deux lois de groupes $*_u$ et $*_v$ sur l'ensemble $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(G, B)$, déduites de u et v respectivement, vérifient l'identité :

$$(f_1 *_u f_2) *_v (g_1 *_u g_2) = (f_1 *_v g_1) *_u (f_2 *_v g_2)$$

Il est bien connu que cette identité implique que $*_u$ et $*_v$ sont égales et commutatives. □

Corollaire 4.1.42. — *Supposons que la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est pointée. Si l'endofoncteur Σ^1 est une autoéquivalence de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$, la catégorie $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est additive.*

Démonstration. — Lorsque Σ^1 est une autoéquivalence de catégories, tout objet de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est un groupe et un cogroupe commutatif et toute flèche est compatible à cette structure. Il reste à montrer que $X \coprod Y \longrightarrow X \times Y$ est un isomorphisme pour $X, Y \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}))$.

On définit une flèche $X \times Y \longrightarrow X \coprod Y$ en prenant la somme des deux flèches évidentes :

$$X \times Y \longrightarrow X \longrightarrow X \coprod Y \quad \text{et} \quad X \times Y \longrightarrow Y \longrightarrow X \coprod Y$$

On vérifie facilement que les composées :

$$X \coprod Y \longrightarrow X \times Y \longrightarrow X \coprod Y \qquad \text{et} \qquad X \times X \longrightarrow X \coprod X \longrightarrow X \times X$$

sont des identités. □

Corollaire 4.1.43. — *Supposons que la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est pointée. Soit (C_A, p, i_0, i_1) un cylindre sur A et $\tau : C_A \longrightarrow C_A$ une flèche au-dessus de A permutant les extrémités. On a alors un diagramme commutatif dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$:*

$$\begin{tikzcd} C_A \coprod_{A \coprod A} * \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sim"'] & C_A \coprod_{A \coprod A} * \arrow[d, "\sim"] \\ \Sigma^1 A \arrow[r, "(-)^{-1}"] & \Sigma^1 A \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale inférieure est l'inverse du cogroupe $\Sigma^1 A$ et les flèches verticales sont l'identification canonique du théorème 4.1.38 associée au choix du cylindre (C_A, p, i_0, i_1).

Démonstration. — En effet, on peut voir τ comme un morphisme de cylindres :

$$\tau : (C_A, p, i_0, i_1) \longrightarrow (C_A, p, i_1, i_0)$$

Le résultat découle alors du lemme 4.1.36 et de la construction de l'inverse dans le groupe $\pi_1(-,-)$ (voir la preuve de la proposition 4.1.40). □

4.1.4. Triangulation de la catégorie homotopique. — On fait la définition suivante :

Définition 4.1.44. — *Une catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est dite stable si la catégorie $\mathfrak{M}$ est pointée et si le foncteur de suspension Σ^1 est une autoéquivalence de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.*

Le but ce paragraphe est de montrer que la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles stable admet naturellement une structure de catégorie triangulée au sens de Verdier. On se contente ici de traiter le cas où $\mathfrak{M}$ est propre à gauche. La condition de propreté n'est nullement nécessaire si l'on suit la méthode de Hovey dans [**Hov99**].

Soit $f : A \longrightarrow B$ une flèche de $\mathfrak{M}$. On appelle *cofibre* de f et l'on note $\mathsf{Cof}(f)$ le push-out :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d, dotted] \\ * \arrow[r, dotted] & \mathsf{Cof}(f) \end{tikzcd}$$

Lorsque f est une cofibration, l'objet $\mathsf{Cof}(f)$ est cofibrant.

Définition 4.1.45. — *Supposons que la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est pointée.*

1- Soit $f : A \longrightarrow B$ une flèche de $\mathfrak{M}$. Le cône *de f relativement au cylindre (C_A, p, i_0, i_1) est le push-out du diagramme :*

$$\begin{tikzcd} A \coprod A \arrow[r, "f \coprod *"] \arrow[d] & B \arrow[d, dotted, "\alpha(f)"] \\ C_A \arrow[r, dotted] & \mathsf{Cone}(f) \end{tikzcd}$$

2- La cofibre de la cofibration $B \xrightarrow{\alpha(f)} \mathsf{Cone}(f)$ est canoniquement isomorphe à la cofibre de $A \coprod A \longrightarrow C_A$. Ainsi, lorsque A est cofibrant, le cylindre C_A induit un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ entre $\mathsf{Cof}(\alpha(f))$ et $\Sigma^1 A$ (voir le théorème 4.1.38). On note alors $\partial(f) : \mathsf{Cone}(f) \longrightarrow \Sigma^1(A)$ la flèche (de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$) ainsi obtenue.

3- On appelle vrai triangle de cofibrations *(de base f) un diagramme dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ de la forme :*

$$\triangle(f, C_A) : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha(f)} \mathsf{Cone}(f) \xrightarrow{\partial(f)} \Sigma^1(A)$$

avec f une cofibration de source cofibrante. On appelle triangle de cofibrations *tout triangle*

$$U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow \Sigma^1 U$$

dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ isomorphe à un vrai triangle de cofibration.

Remarque 4.1.46. — Rappelons qu'un morphisme de triangles et un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"] & W \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \Sigma^1 U \arrow[d, "\Sigma^1 u"] \\ U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & W' \arrow[r] & \Sigma^1 U' \end{tikzcd}$$

Lemme 4.1.47. — *Soit $f : A \longrightarrow B$ une cofibration de $\mathfrak{M}$ avec A cofibrant. On se donne deux cylindres (C_A, p, i_0, i_1) et (C'_A, p', i'_0, i'_1) sur A. Les triangles $\triangle(f, C_A)$ et $\triangle(f, C'_A)$ sont isomorphes dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.*

Démonstration. — En factorisant la flèche :

$$C_A \coprod_{A \coprod A} C'_A \longrightarrow A$$

en une cofibration suivie d'une fibration triviale, on obtient un nouveau cylindre qui est le but de deux cofibrations triviales de source C_A et C'_A. On se ramène donc aux cas où il existe un morphisme de cylindres $u : C_A \longrightarrow C'_A$ avec u une cofibration (forcément triviale).

On obtient dans ce cas une cofibration triviale $\mathsf{Cone}(f) \longrightarrow \mathsf{Cone}'(f)$ avec $\mathsf{Cone}'(f)$ le cône de f relativement à C'_A. La conclusion du lemme est maintenant claire. □

Avec les notations de la définition 4.1.45, on dispose d'un morphisme $\delta(f)$: $\mathsf{Cone}(f) \longrightarrow \mathsf{Cof}(f)$ qui s'insère dans le diagramme à carrés cocartésiens :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{Cof}(i_1) \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ B \arrow[r] & \mathsf{Cone}(f) \arrow[r, "\delta(f)"] & \mathsf{Cof}(f) \end{tikzcd}$$

On a le lemme suivant :

Lemme 4.1.48. — *Supposons que la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est pointée et propre à gauche. Si A est cofibrant et f une cofibration, alors $\delta(f)$ est une équivalence faible.*

Démonstration. — Comme $i_1 : A \longrightarrow C_A$ est une cofibration triviale, il en est de même de $* \longrightarrow C_A \coprod_{i_1(A)} *$. Il vient que $\mathsf{Cof}(i_1) \longrightarrow *$ est une équivalence faible entre objets cofibrants. Le résultat découle de la propreté à gauche appliquée à la cofibration $\mathsf{Cof}(i_1) \longrightarrow \mathsf{Cone}(f)$. □

Théorème 4.1.49. — *On suppose que la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est stable et propre à gauche. Alors $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est naturellement une catégorie triangulée, où le foncteur de suspension est donné par Σ^1 et les triangles distingués par les triangles de cofibrations.*

Démonstration. — Il s'agit d'une vérification facile mais longue. Le lecteur pourra consulter [**Hov99**] pour plus de détails. Les triangles : $X = X \longrightarrow * \longrightarrow \Sigma^1(X)$ sont des triangles de cofibrations. En effet, $\mathsf{Cone}(\mathrm{id}_X)$ est la cofibre de i_1 : $X \longrightarrow C_X$ qui est contractile (*i.e.*, équivalente à $*$) pour X cofibrant.

Soit f une flèche de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Quitte à la remplacer par une flèche isomorphe, on peut supposer qu'elle est l'image d'une cofibration $\tilde{f}$ de source cofibrante. Le triangle de cofibrations associée à $\tilde{f}$ fournit un triangle de cofibrations ayant f comme première arête.

Soit un diagramme commutatif dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r, "c"] \arrow[d, dotted] & \Sigma^1 A \arrow[d, "\Sigma^1(f)"] \\
A' \arrow[r, "a'"] & B' \arrow[r, "b'"] & C' \arrow[r, "c'"] & \Sigma^1 A'
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont des triangles de cofibrations. Le carré de gauche est isomorphe à un carré provenant d'un carré commutatif de cofibrations de $\mathfrak{M}$ avec tous les sommets cofibrants. On peut alors supposer que notre diagramme est l'image de :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g"] & \mathsf{Cone}(a) \arrow[r, "c"] \arrow[d, dotted] & \Sigma^1 A \arrow[d, "\Sigma^1(f)"] \\
A' \arrow[r, "a'"] & B' \arrow[r, "b'"] & \mathsf{Cone}(a') \arrow[r, "c'"] & \Sigma^1 A'
\end{tikzcd}$$

où les cônes sont pris relativement à des cylindres (C_A, p, i_0, i_1) et (C'_A, p', i'_0, i'_1) munis d'une flèche $u : C_A \longrightarrow C'_A$ telle que $f \circ p = p' \circ u$, $i'_0 \circ f = u \circ i_0$ et $i'_1 \circ f = u \circ i_1$. Il est alors clair que la flèche $u \cup g : \mathsf{Cone}(a) \longrightarrow \mathsf{Cone}(a')$ convient.

De même, pour vérifier que la classe des triangles de cofibrations est stable par rotation à droite, on peut considérer le cas d'un vrai triangle de cofibrations :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha(f)} \mathsf{Cone}(f) \xrightarrow{\partial(f)} \Sigma^1 A$$

avec f une cofibration entre objets cofibrants. Il suffit alors de vérifier que le diagramme de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, equal] & \mathsf{Cone}(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"] \arrow[d, equal] & \mathsf{Cone}(\alpha(f)) \arrow[r, "\partial(\alpha(f))"] \arrow[d, "\delta(\alpha(f))"] & \Sigma^1 B \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, "\alpha(f)"] & \mathsf{Cone}(f) \arrow[r, "\partial(f)"] & \Sigma^1 A \arrow[r, "-\Sigma^1(f)"] & \Sigma^1 B
\end{tikzcd}$$

est commutatif puisque $\delta(\alpha(f))$ est inversible par le lemme 4.1.48. Seul la commutation du carré de droite est non évidente. En choisissant convenablement les cylindres, on obtient la factorisation suivante qui nous ramène au cas où $f = \mathrm{id}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Cone}(\alpha(f)) \arrow[r] \arrow[d, "\delta(\alpha(f))"'] & \mathsf{Cone}(\alpha(\mathrm{id}_B)) \arrow[r, "\partial(\alpha(\mathrm{id}_B))"] \arrow[d, "\delta(\alpha(\mathrm{id}_B))"] & \Sigma^1 B \arrow[d, equal] \\
\Sigma^1 A \arrow[r, "\Sigma^1(f)"] & \Sigma^1 B \arrow[r, "-\mathrm{id}"] & \Sigma^1 B
\end{tikzcd}$$

Ce cas sera traité dans le lemme 4.1.50 ci-dessous.

L'axiome de l'octaèdre est également facile. Soit $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ une paire de flèches de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. On peut supposer qu'il s'agit d'une paire de cofibrations de $\mathfrak{M}$ avec

X cofibrant. En choisissant convenablement les cylindres, on obtient un diagramme commutatif dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \mathsf{Cone}(u) \arrow[r] \arrow[d, "r"] & \Sigma^1(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "vu"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Cone}(vu) \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^1(X) \arrow[d] \\
\mathsf{Cone}(\mathrm{id}_X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Cone}(v) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Cone}(r) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Cone}(\mathrm{id}_{\Sigma^1 X}) \arrow[d] \\
\Sigma^1 X \arrow[r] & \Sigma^1 Y \arrow[r] & \Sigma^1 \mathsf{Cone}(u) \arrow[r] & \Sigma^1\Sigma^1 X
\end{tikzcd}$$

Il suffit de vérifier que la flèche $\mathsf{Cone}(v) \longrightarrow \mathsf{Cone}(r)$ est une équivalence faible. Par le lemme 4.1.48, cette flèche est isomorphe dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ à $\mathsf{Cof}(v) \longrightarrow \mathsf{Cof}(r)$. Cette dernière est un isomorphisme dans $\mathfrak{M}$. □

Lemme 4.1.50. — *On suppose que la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est stable et propre à gauche. Soit X un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$. Le triangle suivant est commutatif dans* $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ *:*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Cone}(\alpha(\mathrm{id}_X)) \arrow[d, "\delta(\alpha(\mathrm{id}_X))"'] \arrow[dr, "\partial(\alpha(\mathrm{id}_X))"] & \\
\Sigma^1 X \arrow[r, "-\mathrm{id}"'] & \Sigma^1 X
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit (C_X, p, i_0, i_1) un cylindre sur X. L'objet $\mathsf{Cone}(\alpha(\mathrm{id}_X))$ s'identifie canoniquement à :

$$\Big(C_X \coprod_{i_1(X)} *\Big) \coprod_{i_0(X)} \Big(C_X \coprod_{i_1(X)} *\Big)$$

Notons F_1 et F_2 les deux inclusions évidentes :

$$\Big(C_X \coprod_{i_1(X)} *\Big) \subset \Big(C_X \coprod_{i_1(X)} *\Big) \coprod_{i_0(X)} \Big(C_X \coprod_{i_1(X)} *\Big)$$

Les deux flèches $\partial(\alpha(\mathrm{id}_X))$ et $\delta(\alpha(\mathrm{id}_X))$ s'identifient donc à :

$$\mathsf{Cone}(\alpha(\mathrm{id}_X)) \longrightarrow \mathsf{Cone}(\alpha(\mathrm{id}_X)) \textstyle\coprod_{F_i} * \simeq \Sigma^1(X)$$

Si l'on note τ l'automorphisme de $\mathsf{Cone}(\alpha(\mathrm{id}_X))$ qui permute les facteurs F_1 et F_2 on obtient alors un triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Cone}(\alpha(\mathrm{id}_X)) \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\delta(\alpha(\mathrm{id}_X))"'] & \mathsf{Cone}(\alpha(\mathrm{id}_X)) \arrow[d, "\partial(\alpha(\mathrm{id}_X))"] \\ & \Sigma^1 X \end{tikzcd}$$

Ainsi pour conclure, il suffit de montrer que l'image de τ dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est égale à $-\mathrm{id}$.

Pour cela, on peut remarquer que $\mathsf{Cone}(\alpha(\mathrm{id}_X))$ est un modèle de $\Sigma^1 X$ obtenue *via* le théorème 4.1.38 à l'aide du cylindre :

$$C'_X = C_X \coprod_{i_1(X)} C_X$$

L'automorphisme τ permute les cofibrations triviales structurales $X \longrightarrow C'_X$. Ainsi l'image de τ dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ correspond bien à l'inverse du cogroupe $\Sigma^1 X$ par le corollaire 4.1.43. Comme $\mathfrak{M}$ est stable, l'inverse du cogroupe $\Sigma^1 X$ est donné par $-\mathrm{id}$. □

Lemme 4.1.51. — *Soit une adjonction de Quillen* (F, G) : $\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ *entre deux catégories de modèles stables et propres à gauche. Alors,* $\mathsf{L}F$ *et* $\mathsf{R}G$ *sont des foncteurs triangulés.*

Démonstration. — En vue du lemme 2.1.23, il suffit de traiter $\mathsf{L}F$. Mais il est clair que F commute à Cone et Σ^1 puisqu'il préserve les cylindres sur les objets cofibrants (voir le lemme 4.1.25). □

Remarque 4.1.52. — Si la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est stable et propre à droite, notre construction fournit une structure de catégorie triangulée sur $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}^{\mathrm{op}})$. En passant à la catégorie triangulée opposée, on obtient une structure de catégorie triangulée sur $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ dont les triangles distingués sont donnés par les triangles de fibrations (notion duale de celle de triangles de cofibrations).

Ainsi, si $\mathfrak{M}$ est propre à gauche et à droite, on a *a priori* deux structures de catégories triangulées sur $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. On peut montrer (voir Hovey [**Hov99**]) que ces deux structures coïncident.

En vue des vérifications des axiomes des dérivateurs triangulés, on est ramené à étudier les carrés cartésiens et cocartésiens dans une catégorie de modèles pointée et stable. Pour cela, nous aurons besoin d'introduire les structures de modèles de Reedy sur certains diagrammes à valeurs dans $\mathfrak{M}$. On traitera uniquement le cas des diagrammes indexés par des ensembles ordonnés finis. Pour le cas général, le lecteur pourra consulter [**Hir03**].

Proposition 4.1.53. — *Soient* $(\mathcal{I}, \leq)$ *un ensemble ordonné fini et* $\mathfrak{M}$ *une catégorie de modèles. On note* $\underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{I}, \mathfrak{M})$ *la catégorie des* $\mathcal{I}$*-diagrammes dans* $\mathfrak{M}$*. On définit une*

structure de catégorie de modèles sur $\underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{I}, \mathfrak{M})$ *en appelant un morphisme de* $\mathcal{I}$*-diagrammes* $(f_i)_{i\in\mathcal{I}} : (A_i)_{i\in\mathcal{I}} \longrightarrow (B_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *:*

- *une équivalence faible lorsque chaque* f_i *est une équivalence faible,*
- *une cofibration lorsque pour tout* i *la flèche :*

$$A_i \coprod_{\mathsf{Colim}_{e<i} A_e} \mathsf{Colim}_{e<i} B_e \longrightarrow B_i$$

est une cofibration,

- *une fibration lorsque pour tout* i *la flèche* f_i *est une fibration.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le cardinal de l'ensemble $\mathcal{I}$. Ceci est utile pour l'étape 1 de la preuve :

Étape 1. — On montre dans cette étape qu'une flèche $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est une cofibration triviale si et seulement si :

$$A_i \coprod_{\mathsf{Colim}_{e<i} A_e} \mathsf{Colim}_{e<i} B_e \longrightarrow B_i$$

est une cofibration triviale pour tout i.

La condition est nécessaire. En effet, comme $\mathcal{I}_{<i} = \{e \in \mathcal{I};\ e < i\}$ est un ensemble ordonné de cardinal strictement plus petit que celui de $\mathcal{I}$, le foncteur

$$\mathsf{Colim}_{e<i} : \underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{I}_{<i}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{M}$$

est un foncteur de Quillen à gauche. Il vient que $\mathsf{Colim}_{e<i} A_e \longrightarrow \mathsf{Colim}_{e<i} B_e$ est une cofibration triviale. Il en est de même de son push-out (par le corollaire 4.1.6) :

$$A_i \longrightarrow A_i \coprod_{\mathsf{Colim}_{e<i} A_e} \mathsf{Colim}_{e<i} B_e$$

On conclut à l'aide de l'axiome **(MC2)**.

La condition est suffisante. On raisonne par récurrence sur $i \in \mathcal{I}$. Si $A_e \longrightarrow B_e$ est une équivalence faible pour tout $e < i$ alors $(f_e)_{e<i}$ est une cofibration triviale. Il en est de même de $\mathsf{Colim}_{e<i} A_e \longrightarrow \mathsf{Colim}_{e<i} B_e$ ainsi que ses push-out. On conclut encore une fois à l'aide de l'axiome **(MC2)**.

Étape 2. — Vérifions l'axiome **(MC4)**. En le fera uniquement pour les cofibrations et fibrations triviales. L'autre cas se traite par la même méthode en présence du résultat de l'étape 1.

On suppose donné un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(A_i)_{i\in\mathcal{I}} \arrow[r] \arrow[d, "(a_i)"'] & (X_i)_{i\in\mathcal{I}} \arrow[d, "(f_i)"] \\
(B_i)_{i\in\mathcal{I}} \arrow[r] & (Y_i)_{i\in\mathcal{I}}
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble maximal tel que :

- un relèvement partiel $r : (B_j)_{j\in\mathcal{J}} \longrightarrow (X_j)_{j\in\mathcal{J}}$ existe,
- si $i \leq j$ avec $j \in \mathcal{J}$ alors $i \in \mathcal{J}$.

On va montrer que $\mathcal{J} = \mathcal{I}$. Supposons le contraire. Soit $i \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{J}$ un élément minimal. On va montrer que l'on peut étendre r à $\mathcal{J} \cup \{i\}$. Pour cela, on considère le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\left(A_i \coprod_{\mathsf{Colim}_{e<i}A_e} \mathsf{Colim}_{e<i}X_e\right) \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[d] \\
\left(B_i \coprod_{\mathsf{Colim}_{e<i}B_e} \mathsf{Colim}_{e<i}X_e\right) \arrow[r] & Y_i
\end{tikzcd}$$

La flèche verticale de droite est bien une cofibration puisque c'est le push-out de la cofibration :

$$A_i \coprod_{\mathsf{Colim}_{e<i}A_e} \mathsf{Colim}_{e<i}B_e \longrightarrow B_i$$

suivant la flèche :

$$A_i \coprod_{\mathsf{Colim}_{e<i}A_e} \mathsf{Colim}_{e<i}B_e \xrightarrow{\mathrm{id} \cup \mathsf{Colim}_{e<i}r} A_i \coprod_{\mathsf{Colim}_{e<i}A_e} \mathsf{Colim}_{e<i}X_e$$

On déduit donc un relèvement qui fournit un morphisme $r_i : B_i \longrightarrow X_i$. On vérifie facilement qu'il est compatible aux r_j pour $j \in \mathcal{J}$. Ceci contredit la maximalité de $\mathcal{J}$.

Étape 3. — On considère maintenant l'axiome **(MC5)**. On traite uniquement la première partie (la seconde partie se traite par la même méthode en présence du résultat de l'étape 1). Soit $(f_i)_{i\in\mathcal{I}} : (A_i)_{i\in\mathcal{I}} \longrightarrow (B_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une flèche dans $\underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{I}, \mathfrak{M})$. On procède comme pour l'étape 2. Soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble maximal vérifiant :

- il existe une factorisation partielle $f_j = c_j \circ p_j$ avec $(c_j)_{j\in\mathcal{J}}$ une cofibration et $(p_j)_{j\in\mathcal{J}}$ une fibration triviale,
- si $i \leq j$ avec $j \in \mathcal{J}$ alors $i \in \mathcal{J}$.

Supposons que $\mathcal{J} \neq \mathcal{I}$. Soit $i \in \mathcal{I} - \mathcal{J}$ minimal. Notons C_e le but de c_e pour $e < i$. On choisit par **(MC5)** une factorisation de la flèche évidente :

$$A_i \coprod_{\mathsf{Colim}_{e<i}A_e} \mathsf{Colim}_{e<i}C_e \longrightarrow C_i \longrightarrow B_i$$

en une cofibration suivie d'une fibration triviale. Il est alors facile de voir que les flèches $c_i : A_i \longrightarrow C_i$ et $p_i : C_i \longrightarrow B_i$ permettent d'étendre la factorisation partielle à $\mathcal{J} \cup \{i\}$. Ceci contredit la maximalité de $\mathcal{J}$. □

Remarque 4.1.54. — La preuve de la proposition 4.1.53 s'étend facilement au cas où l'ensemble ordonné $\mathcal{I}$ est remplacé par un ordinal. Il suffit en effet de remplacer la récurrence sur le cardinal de $\mathcal{I}$ par la récurrence transfinie sur les ordinaux.

Rappelons que $\ulcorner$ (resp. $\lrcorner$) désigne la sous-catégorie pleine de $\square = \underline{\mathbf{1}} \times \underline{\mathbf{1}}$ dont les objets sont $\mathsf{Ob}(\square) - \{(0,0)\}$ (resp. $\mathsf{Ob}(\square) - \{(1,1)\}$).

Pour une catégorie de modèles $\mathfrak{M}$, on notera $\ulcorner(\mathfrak{M})$ la catégorie $\underline{\mathsf{HOM}}((\ulcorner)^{\mathrm{op}}, \mathfrak{M})$ munie de sa structure de Reedy (voir la proposition 4.1.53) associée à l'ensemble ordonné $(\ulcorner)^{\mathrm{op}}$. Ainsi, les objets de $\ulcorner(\mathfrak{M})$ sont les diagrammes de la forme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

que l'on notera pour abréger $(A \to B|C)$. Une flèche $(A \to B|C) \longrightarrow (A' \to B'|C')$ est donc une cofibration lorsque les flèches suivantes :

$$A \longrightarrow A' , \qquad B \coprod_A A' \longrightarrow B' \quad \text{et} \quad C \coprod_A A' \longrightarrow C'$$

sont des cofibrations de $\mathfrak{M}$.

On notera également $\lrcorner(\mathfrak{M})$ la catégorie $\underline{\mathsf{HOM}}((\lrcorner)^{\mathrm{op}}, \mathfrak{M})$. Cette catégorie sera munie de la structure de modèles opposée de la structure de modèles de Reedy (voir la proposition 4.1.53) sur $(\underline{\mathsf{HOM}}((\lrcorner)^{\mathrm{op}}, \mathfrak{M}))^{\mathrm{op}} = \underline{\mathsf{HOM}}(\lrcorner, \mathfrak{M}^{\mathrm{op}})$ associée à l'ensemble ordonné $\lrcorner$. Ainsi, les objets de $\lrcorner(\mathfrak{M})$ sont les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

que l'on notera pour abréger $(B|C \to A)$. Une flèche $(B|C \to A) \longrightarrow (B'|C' \to A')$ est donc une fibration lorsque les flèches suivantes :

$$A \longrightarrow A' , \qquad B' \longrightarrow B \times_A A' \quad \text{et} \quad C' \longrightarrow C \times_A A'$$

sont des fibrations de $\mathfrak{M}$.

Remarquons que si $\mathfrak{M}$ est stable (resp. propre à gauche) il en est de même de $\ulcorner(\mathfrak{M})$ et $\lrcorner(\mathfrak{M})$.

On dispose d'une adjonction de Quillen :

$$(F, G) : \ulcorner(\mathfrak{M}) \longrightarrow \lrcorner(\mathfrak{M})$$

avec F (resp. G) le foncteur qui à un diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & C \\ B & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & A \end{tikzcd} \right)$$

associe le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B \coprod_A C \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} B \times_A C \arrow[r] \arrow[d] & C \\ B & \end{tikzcd} \right)$$

On déduit alors un couple de foncteurs adjoints :

$$(\mathsf{L}F, \mathsf{R}G) : \mathbf{Ho}(\ulcorner(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\lrcorner(\mathfrak{M}))$$

qui sont triangulés lorsque $\mathfrak{M}$ est stable et propre à gauche.

Proposition 4.1.55. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles stable et propre à gauche. Alors l'adjonction (F, G) est une équivalence de Quillen.*

Démonstration. — On montre uniquement que l'unité $\mathrm{id} \longrightarrow \mathsf{R}G \circ \mathsf{L}F$ est inversible. Le fait que la counité est inversible se démontre par la même méthode.

On utilisera le fait que $\mathbf{Ho}(\ulcorner\mathfrak{M})$ est triangulée. Un objet $(A \to B|C)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

s'inscrit dans un triangle distingué :

$$(* \to B|*) \oplus (* \to *|C) \longrightarrow (A \to B|C) \longrightarrow (A \to *|*) \longrightarrow$$

Il suffit donc de traiter les cas où seulement l'un des trois objets A, B et C est non-nul.

Premier cas : $B = C = *$. — Soit a le foncteur qui à un objet A de $\mathfrak{M}$ associe le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & * \\ * & \end{tikzcd}$$

et b le foncteur qui à un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

associe D. Comme a et b préservent les équivalences faibles, ils se dérivent trivialement. La composée :

$$\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \xrightarrow{a} \mathbf{Ho}(\ulcorner\mathfrak{M}) \xrightarrow{\mathsf{L}F} \mathbf{Ho}(\lrcorner\mathfrak{M}) \xrightarrow{b} \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$$

coïncide avec Σ^1 qui est une équivalence. Il est immédiat à partir de là, de voir que l'unité de $(\mathsf{L}F, \mathsf{R}G)$ appliquée à $(A \to *|*)$ coïncide avec :

$$(A \to *|*) \longrightarrow (\Omega^1\Sigma^1(A) \to *|*)$$

qui est bien inversible.

Second cas : $A = B = 0$. — Il s'agit de voir pour C cofibrant que la limite homotopique du digramme :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, equal] \\ * \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

est contractile. Ceci est évident. □

Le résultat suivant est maintenant clair :

Théorème 4.1.56. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles stable et propre à gauche. Alors, un carré :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

est homotopiquement cocartésien si et seulement si il est homotopiquement cartésien.

Pour terminer, nous vérifions que la catégorie homotopique associée à une catégorie de modèles monoïdale, stable et propre à gauche est une catégorie triangulée monoïdale au sens de la definition 2.1.148. Ceci découlera du lemme 4.1.58. Rappelons d'abord la définition d'une catégorie de modèles monoïdale (voir [**Hov99**]) :

Définition 4.1.57. — *Une catégorie de modèles monoïdale $(\mathfrak{M}, \otimes)$ est une catégorie de modèles munie d'une structure monoïdale fermée à droite et à gauche (au sens de la définition 2.1.119) vérifiant l'axiome suivant :*

(MMC) : *soient $f : A \longrightarrow B$ et $g : U \longrightarrow V$ deux cofibrations de $\mathfrak{M}$. Alors le morphisme évident :*

$$f \square g : A \otimes V \coprod_{A \otimes U} B \otimes U \longrightarrow B \otimes V$$

est une cofibration qui est une équivalence faible lorsque f ou g est une équivalence faible.

On dit que $\mathfrak{M}$ est symétrique lorsque la catégorie monoïdale sous-jacente est également munie d'un isomorphisme de symétrie. On dit que $\mathfrak{M}$ est unitaire si la catégorie monoïdale sous-jacente est munie d'un objet unité qui est cofibrant.

Pour A un objet cofibrant, les foncteurs $A \otimes -$ et $- \otimes A$ sont des foncteurs de Quillen à gauche. On déduit du lemme 4.1.26 que le bifoncteur $- \otimes -$ préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants. Il admet par la proposition 4.1.22 un foncteur dérivé à gauche $- \overset{\mathsf{L}}{\otimes} -$ qui fait de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ une catégorie monoïdale fermée à gauche et à droite (voir [**Hov99**] pour plus de détails).

Lemme 4.1.58. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles monoïdale symétrique et unitaire. On note $\mathbb{1}$ l'objet unité de $\mathfrak{M}$. Supposons que $\mathfrak{M}$ est pointée. Alors le foncteur Σ^1 est canoniquement isomorphe à $(\Sigma^1\mathbb{1}) \overset{\mathsf{L}}{\otimes} -$. De plus, la permutation des facteurs :*

$$\tau : (\Sigma^1\mathbb{1}) \overset{\mathsf{L}}{\otimes} (\Sigma^1\mathbb{1}) \longrightarrow (\Sigma^1\mathbb{1}) \overset{\mathsf{L}}{\otimes} (\Sigma^1\mathbb{1}) \tag{57}$$

est égale à l'inverse du cogroupe commutatif $\Sigma^2\mathbb{1}$ modulo l'identification $\Sigma^1(\Sigma^1\mathbb{1}) \simeq \Sigma^1\mathbb{1} \overset{\mathsf{L}}{\otimes} \Sigma^1\mathbb{1}$.

Si en plus $\mathfrak{M}$ est stable et propre à gauche, alors $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est une catégorie monoïdale triangulée au sens de la définition 2.1.148.

Démonstration. — Si (C, p, i_0, i_1) est un cylindre sur $\mathbb{1}$, alors pour tout objet cofibrant A de $\mathfrak{M}$, le quadruplet $(C \otimes A, p \otimes \mathrm{id}, i_0 \otimes \mathrm{id}, i_1 \otimes \mathrm{id})$ est un cylindre sur $\mathbb{1} \otimes A \simeq A$. L'isomorphisme $\Sigma^1 \simeq \Sigma^1\mathbb{1} \overset{\mathsf{L}}{\otimes} -$ découle alors du théorème 4.1.38 appliqué à ce cylindre. Par $\otimes$-dualité, on a également un isomorphisme $\Sigma^1 \simeq - \overset{\mathsf{L}}{\otimes} \Sigma^1\mathbb{1}$. Il est clair que la composée :

$$\Sigma^1 \simeq \Sigma^1\mathbb{1} \overset{\mathsf{L}}{\otimes} - \longrightarrow - \overset{\mathsf{L}}{\otimes} \Sigma^1\mathbb{1} \simeq \Sigma^1$$

est l'identité. En effet, elle correspond à l'isomorphisme de cylindres $C \otimes A \simeq A \otimes C$ pour A cofibrant dans $\mathfrak{M}$.

Montrons que la flèche (57) est égale à $-\mathrm{id}$. On fixe un cylindre (C, p, i_0, i_1) sur $\mathbb{1}$. On dispose alors de quatre cylindres isomorphes :

$$C \otimes i_0(\mathbb{1}), \qquad C \otimes i_1(\mathbb{1}), \qquad i_0(\mathbb{1}) \otimes C \quad \text{et} \quad i_1(\mathbb{1}) \otimes C$$

ainsi que des morphismes évident vers $C \otimes C$. La permutation τ envoie $C \otimes i_0(\mathbb{1})$ sur $i_0(\mathbb{1}) \otimes C$ et $C \otimes i_1(\mathbb{1})$ sur $i_1(\mathbb{1}) \otimes C$.

On définit deux cylindres C_{01} et C_{01} par :

$$C_{01} = (i_0(\mathbb{1}) \otimes C) \coprod_{i_0(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1})} (C \otimes i_1(\mathbb{1})) \quad \text{et} \quad C_{01} = (i_1(\mathbb{1}) \otimes C) \coprod_{i_1(\mathbb{1}) \otimes i_0(\mathbb{1})} (C \otimes i_0(\mathbb{1}))$$

Par l'axiome **(MMC)**, on dispose de deux cofibrations triviales :

$$a_{01} : C_{01} \longrightarrow C \otimes C \qquad \text{et} \qquad a_{10} : C_{10} \longrightarrow C \otimes C$$

permutées par τ.

Notons $D = C_{01} \coprod_{i_0(\mathbb{1}) \otimes i_0(\mathbb{1})} C_{10}$. C'est naturellement un cylindre sur $\mathbb{1}$. On a encore une cofibration :

$$d : D \coprod_{i_1(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1}) \coprod i_1(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1})} * \longrightarrow C \otimes C \coprod_{i_1(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1})} *$$

dont le but est contractile. De plus, la cofibre de d est égale à $\Sigma^1\mathbb{1} \otimes \Sigma^1\mathbb{1}$. On dispose donc d'un isomorphisme naturel entre $\Sigma^1\mathbb{1} \otimes \Sigma^1\mathbb{1}$ et :

$$\mathsf{Cone}\Big(D \coprod_{i_1(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1}) \coprod i_1(\mathbb{1}) \otimes i_1(\mathbb{1})} * \longrightarrow *\Big)$$

On est ainsi ramené à montrer que τ opère (à homotopie près) par $-\mathrm{id}$ sur $D\coprod_{\mathbb{1}\coprod\mathbb{1}} * = \Sigma^1\mathbb{1}$. Ceci découle du corollaire 4.1.43 et le fait que τ permute les extrémités du cylindre D.

Montrons finalement que lorsque $\mathfrak{M}$ est stable, $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est bien une catégorie monoïdale symétrique. Pour A un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$, les foncteurs $-\otimes A$ et $A\otimes -$ sont des foncteurs de Quillen à gauche. Il vient que leurs foncteurs dérivés $-\overset{\mathsf{L}}{\otimes} A$ et $A\overset{\mathsf{L}}{\otimes} -$ sont des foncteurs triangulés. Ceci fournit les isomorphismes s_g et s_d de la définition 2.1.148 et prouve la première propriété.

D'autre part, modulo l'identification $\Sigma^1 \simeq \Sigma^1\mathbb{1}\overset{\mathsf{L}}{\otimes}-$, l'isomorphisme $s_g : \Sigma^1 A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B \simeq \Sigma^1(A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B)$ est simplement l'isomorphisme d'associativité : $(\Sigma^1\mathbb{1}\overset{\mathsf{L}}{\otimes}A)\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B \xrightarrow{\sim} \Sigma^1\mathbb{1}\overset{\mathsf{L}}{\otimes}(A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B)$. Dualemement, modulo l'identification $\Sigma^1 \simeq -\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\Sigma^1\mathbb{1}$, l'isomorphisme s_d : $A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\Sigma^1 B \simeq \Sigma^1(A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B)$ est l'isomorphisme d'associativité : $A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}(B\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\Sigma^1\mathbb{1}) \xrightarrow{\sim} (A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B)\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\Sigma^1\mathbb{1}$. Étant donné que les deux identifications $\Sigma^1 \simeq \Sigma^1\mathbb{1}\overset{\mathsf{L}}{\otimes}-$ et $\Sigma^1 \simeq -\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\Sigma^1\mathbb{1}$ diffèrent par l'isomorphisme de commutation, on voit que modulo $\Sigma^1 \simeq (\Sigma^1\mathbb{1})\overset{\mathsf{L}}{\otimes}-$, l'isomorphisme s_d est la composée :

$$A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}(\Sigma^1\mathbb{1}\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B) \xrightarrow{\sim} (A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\Sigma^1\mathbb{1})\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B \xrightarrow{\sim} (\Sigma^1\overset{\mathsf{L}}{\otimes}A)\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B \xrightarrow{\sim} \Sigma^1\overset{\mathsf{L}}{\otimes}(A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B)$$

Ainsi, si l'on utilise l'identification $\Sigma^1 \simeq \Sigma^1\mathbb{1}\overset{\mathsf{L}}{\otimes}-$, on voit que l'anticommutativité du carré :

$$\begin{tikzcd}
\left(\Sigma^1 A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\Sigma^1 B\right) \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^1\left(\Sigma^1 A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B\right) \arrow[d] \\
\Sigma^1\left(A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\Sigma^1 B\right) \arrow[r] & \Sigma^1\Sigma^1\left(A\overset{\mathsf{L}}{\otimes}B\right)
\end{tikzcd}$$

équivaut à l'anticommutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(\Sigma^1\mathbb{1}\otimes A)\otimes(\Sigma^1\mathbb{1}\otimes B) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & ((\Sigma^1\mathbb{1}\otimes A)\otimes\Sigma^1\mathbb{1})\otimes B \arrow[r, "\tau"] & (\Sigma^1\mathbb{1}\otimes(\Sigma^1\mathbb{1}\otimes A))\otimes B \arrow[r, "\sim"] & (\Sigma^1\mathbb{1}\otimes\Sigma^1\mathbb{1})\otimes(A\otimes B) \arrow[d, equal] \\
\Sigma^1\mathbb{1}\otimes(A\otimes(\Sigma^1\mathbb{1}\otimes B)) \arrow[rr, "\sim"] & & \Sigma^1\mathbb{1}\otimes((A\otimes\Sigma^1\mathbb{1})\otimes B) \arrow[r, "\sim"] & (\Sigma^1\mathbb{1}\otimes\Sigma^1\mathbb{1})\otimes(A\otimes B)
\end{tikzcd}$$

Étant donné que les deux composées possibles de ce diagramme diffèrent par l'isomorphisme de commutation :

$$(\Sigma^1\mathbb{1}\otimes\Sigma^1\mathbb{1})\otimes(A\otimes B) \xrightarrow{\tau\otimes\mathrm{id}_{A\otimes B}} (\Sigma^1\mathbb{1}\otimes\Sigma^1\mathbb{1})\otimes(A\otimes B)$$

le résultat est maintenant clair. □

4.2. Catégories de modèles II : accessibilité et localisation

On introduit ici la classe des catégories de modèles *présentables par cofibrations.* Cette classe contient tous les exemples que l'on rencontrera. On démontre ensuite un théorème de localisation pour ces catégories de modèles qui sera plus ou moins un cas particulier du théorème de localisation de Hirschhorn [**Hir03**]. On commence par la notion clef d'accessibilité.

4.2.1. Accessibilité. — Nous dirons qu'une catégorie $\mathcal{J}$ est *pseudo-discrète* s'il existe deux sous-catégories pleines et discrètes $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}_1$ avec $\mathsf{Ob}(\mathcal{J}) = \mathsf{Ob}(\mathcal{J}_0) \cup \mathsf{Ob}(\mathcal{J}_1)$ et tel que $\hom(j_1, j_0) = \varnothing$ pour tout $(j_0, j_1) \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J}_0) \times \mathsf{Ob}(\mathcal{J}_1)$. Notons qu'une telle catégorie est un objet projectif dans la catégorie des petites catégories dans le sens qu'un relèvement r existe :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{J} \arrow[ur, dotted, "r"] \arrow[r] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

si le foncteur p est surjectif sur les objets et induit des surjections $\hom_{\mathcal{D}}(A, B) \longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}(p(A), p(B))$ pour tout A et B dans $\mathcal{D}$.

Par le cardinal d'une petite catégorie $\mathcal{K}$, on entend le cardinal de l'ensemble $\mathsf{Fl}(\mathcal{K})$. On fait la définition suivante :

Définition 4.2.1. — *Soit α un cardinal (non nécessairement infini). Une catégorie $\mathcal{I}$ est dite* α-filtrante *si elle est non vide et si pour tout foncteur $P : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ avec $\mathcal{J}$ pseudo-discrète et de cardinal inférieur ou égal à α, il existe $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ tel que l'ensemble :*

$$\varinjlim_{j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})} \hom_{\mathcal{I}}(P(j), i)$$

est non vide. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble ordonné dont la catégorie associée est α-filtrante, on parlera alors d'ensemble ordonné α-filtrant.

Remarque 4.2.2. — Une catégorie α-filtrante est β-filtrante pour tout cardinal $\beta \leq \alpha$. Toute catégorie non vide est clairement 0-filtrante et 1-filtrante. Une catégorie non vide $\mathcal{I}$ est 2-filtrante si et seulemment si pour tout couple d'objets $(A, B) \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})^2$, il existe un troisième objet C tel que les ensembles $\hom_{\mathcal{I}}(A, C)$ et $\hom_{\mathcal{I}}(B, C)$ soient non vides. En faisant la liste des catégories pseudo-discrètes de cardinal 3 et 4, on voit immédiatement les équivalences entre les notions :

$$\text{2-filtrante} \Longleftrightarrow \text{3-filtrante} \Longleftrightarrow \text{4-filtrante}$$

Une catégorie est 5-filtrante si et seulement si elle est *filtrante* au sens de [**AGV73**]. On vérifie également que pour tout entier naturel $n \geq 5$ la notion de n-filtrante est équivalente à 5-filtrante et donc aussi à filtrante.

Remarquons enfin que pour les ensembles ordonnés la situation se simplifie. En effet, un ensemble ordonné est filtrant si et seulement si il est 2-filtrant.

Voici quelques exemples de catégories α-filtrantes :

Exemple 4.2.3

1- Une catégorie admettant un objet final est α-filtrante pour tout cardinal α.

2- Soit $\mathcal{I}$ une catégorie admettant des colimites suivant les catégories pseudo-discrètes $\mathcal{J}$ avec $\mathrm{card}(\mathsf{Fl}(\mathcal{J})) \leq \alpha$. Alors $\mathcal{I}$ est α-filtrante.

3- Soit un foncteur $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{K}$ induisant des surjections sur les objets et les flèches entre objets. Si $\mathcal{I}$ est α-filtrante, il en est de même de $\mathcal{K}$. Ceci découle immédiatement du fait que les catégories pseudo-discrètes sont des objets « projectifs » dans la catégorie des catégories.

4- Soit α un cardinal. Alors tout cardinal $\gamma > \alpha$ vu comme ordinal[(1)] est α-filtrant.

On a le lemme fort utile suivant :

Lemme 4.2.4. — *On fixe un cardinal α et un ordinal limite λ plus petit ou égal au cardinal infini successeur de α. Soient $\mathcal{K}$ une petite catégorie de cardinal inférieur ou égal à α et un foncteur :*

$$\mathcal{E} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}rd\mathcal{E}ns$$

avec $\mathcal{O}rd\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles ordonnés et des applications croissantes. On suppose les propriétés suivantes satisfaites :

- *pour tout $k \in \mathsf{Ob}(\mathcal{K})$, l'ensemble ordonné $\mathcal{E}(k)$ est α-filtrant et admet les colimites indexées par λ,*
- *pour tout $k_1 \to k_2 \in \mathsf{Fl}(\mathcal{K})$, l'application $\mathcal{E}(k_1) \longrightarrow \mathcal{E}(k_2)$ est cofinale et commute aux λ-colimites.*

Alors l'inclusion évidente $\mathsf{Lim}_{\mathcal{K}}\mathcal{E} \longrightarrow \prod_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} \mathcal{E}(k)$ est cofinale. En particulier, l'ensemble $\mathsf{Lim}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}$ est non vide.

Démonstration. — Lorsque $\alpha = 0$ ou 1, il n'y a rien à démontrer. On supposera dans la suite que $\alpha \geq 2$. Les ensembles ordonnés $\mathcal{E}(-)$ sont donc filtrants au sens de [**AGV73**].

On se donne une famille $(e_k)_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} \in \prod_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} \mathcal{E}(k)$ que l'on majorera par un élément de $\mathsf{Lim}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}$. On pose pour cela $e_{0,k} = e_k$ pour $k \in \mathsf{Ob}(\mathcal{K})$ et on construit par récurrence transfinie une suite croissante de familles $(e_{\nu,k})_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} \in \prod_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} \mathcal{E}(k)$ pour $\nu \in \lambda$ de la manière suivante.

Soit $\nu \in \lambda$ et supposons que pour tout $\mu \in \nu$, les éléments $e_{\mu,k}$ sont construits. Comme $\mu \in \lambda$, son cardinal est strictement inférieur à celui du cardinal infini successeur de α. Il vient que le cardinal de μ est inférieur ou égal à α (resp. est fini) si α est infini (resp. α est fini).

(1) Rappelons qu'un cardinal est, par définition, le plus petit ordinal λ dans une classe d'équipotence.

Soit $k \in \mathsf{Ob}(\mathcal{K})$. Les éléments de la forme $\mathcal{E}(k' \to k)(e_{\mu,k'})$ forment une partie de cardinal inférieur à α (resp. de cardinal fini). Comme $\mathcal{E}(k)$ est α-filtrant, on peut choisir un élément $m_{\nu,k} \in \mathcal{E}(k)$ qui majore tous les $\mathcal{E}(k' \to k)(e_{\mu,k'})$.

D'autre part, pour tout $k \to k'' \in \mathsf{Fl}(\mathcal{K})$ et $\mu \in \nu$, on peut trouver, par cofinalité du foncteur $\mathcal{E}(k \to k'')$, un élément $n_{\mu,k\to k''} \in \mathcal{E}(k)$ tel que $e_{\mu,k''} \leq \mathcal{E}(k \to k'')(n_{\mu,k\to k''})$. La famille des $n_{\mu,k\to k''}$ étant de cardinal inférieur à α (resp. de cardinal fini), on peut trouver $p_{\nu,k} \in \mathcal{E}(k)$ qui majore tous les $n_{\mu,k\to k''}$. On prendra pour $e_{\nu,k}$ un majorant commun à $m_{\nu,k}$ et $p_{\nu,k}$.

Ainsi par construction, la propriété suivante est vérifiée :

(A) Pour tout $k_1 \to k_2 \in \mathsf{Fl}(\mathcal{K})$ et $\mu \in \nu \in \lambda$ on a $e_{\nu,k_2} \geq \mathcal{E}(k_1 \to k_2)(e_{\mu,k_1})$ et $\mathcal{E}(k_1 \to k_2)(e_{\nu,k_1}) \geq e_{\mu,k_2}$.

On pose alors $e'_k = \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} e_{\nu,k}$. Pour $k_1 \to k_2 \in \mathsf{Fl}(\mathcal{K})$, on déduit de (A) les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{c} e'_{k_2} = \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} e_{\nu,k_2} \leq \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} \mathcal{E}(k_1 \to k_2)(e_{\nu,k_1}) \leq \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} e_{\nu,k_2} = e'_{k_2} \\ \| \\ \mathcal{E}(k_1 \to k_2) e'_{k_1} \end{array}$$

Ceci montre que $e'_{k_2} = \mathcal{E}(k_1 \to k_2)(e'_{k_1})$. En d'autres termes, la famille $(e'_k)_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})}$ est un élément de $\mathsf{Lim}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}$. □

Définition 4.2.5

1- *Un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre catégories admettant des petites colimites est dit* α-accessible *s'il commute aux colimites suivant les petites catégories α-filtrantes.*

2- *Un objet $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ est dit* α-accessible *si le foncteur* $\hom_{\mathcal{A}}(A, -)$ *est α-accessible.*

Lorsque le cardinal α dans la définition 4.2.5 est fini et plus grand que 5, nous dirons *finiment accessible* au lieu de α-accessible (ceci étant indépendant de α par la remarque 4.2.2). Nous réserverons l'adjectif *accessible* pour les foncteurs ou objets qui sont α-accessibles pour un certain cardinal α. On a le lemme bien-connu (voir [**AGV73**]) :

Lemme 4.2.6. — *On suppose le cardinal α supérieur ou égal à 5. Soit $\mathcal{K}$ une catégorie de cardinal inférieur ou égal à α. Alors le foncteur :*

$$\mathsf{Lim}_{\mathcal{K}} : \underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{K}, \mathcal{E}ns) \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

est α-accessible.

Démonstration. — Pour tout foncteur $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}ns$, on a une suite exacte d'ensembles :

$$\mathsf{Lim}_{\mathcal{K}} F \longrightarrow \left(\prod_{k \in \mathsf{Ob}(\mathcal{K})} F(k) \right) \rightrightarrows \left(\prod_{k_1 \to k_2 \in \mathsf{Fl}(\mathcal{K})} F(k_2) \right)$$

Puisque $\alpha \geq 5$, une catégorie α-filtrante est filtrante au sens de [**AGV73**]. Comme les colimites filtrantes commutent aux limites finies dans $\mathcal{E}ns$, on est ramené à montrer que le produit direct suivant un ensemble de cardinal inférieur ou égal à α est α-accessible.

Soient E un ensemble de cardinal inférieur ou égal à α et $(D_e)_{e \in E} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ une famille de foncteurs avec $\mathcal{I}$ une petite catégorie α-filtrante. Il s'agit de montrer que l'application canonique :

$$\underset{i \in \mathcal{I}}{\mathsf{Colim}} \prod_{e \in E} D_e(i) \longrightarrow \prod_{e \in E} \underset{i \in \mathcal{I}}{\mathsf{Colim}} D_e(i)$$

est bijective.

Pour la surjectivité, on se donne une famille d'éléments $b_e \in \mathsf{Colim}_{i \in \mathcal{I}} D_e(i)$. Pour chaque e, il existe $i_e \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ tel que b_e est représenté par un élément $b'_e \in D_e(i_e)$. Comme $\mathcal{I}$ est α-filtrante, on peut choisir $k \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ et des flèches $i_e \to k$. Les éléments b_e sont également représentés par $b''_e = D_e(i_e \to k)(b'_e) \in D_e(k)$. Ainsi, la famille $(b''_e)_{e \in E} \in \prod_{e \in E} D_e(k)$ fournit un antécédent de $(b_e)_{e \in E}$.

L'injectivité se traite de manière similaire. Soient $(u_e)_{e \in E} \in \prod_{e \in E} D_e(i)$ et $(v_e)_{e \in E} \in \prod_{e \in E} D_e(j)$ deux familles ayant la même classe dans $\prod_{e \in E} \mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} D_e$. Pour tout $e \in E$, il existe des flèches $i \to k_e$ et $j \to k_e$ telles que :

$$D_e(i \to k_e)(u_e) = D_e(j \to k_e)(v_e)$$

Comme $\mathcal{I}$ est α-filtrante, il existe $l \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ et des flèches $k_e \to l$. On peut donc supposer que $k_e = l$. Ainsi, pour tout $e \in E$, on a des flèches $f_e : i \to l$ et $g_e : j \to l$ telles que $D_e(f_e)(u_e) = D_e(g_e)(v_e)$. Comme $\alpha \geq 5$, la catégorie $\mathcal{I}$ est également $(2\alpha + 3)$-filtrante. On peut donc trouver une flèche $h : l \to l'$ qui égalise les f_e et les g_e. On note $f' = h \circ f_e$ et $g' = h \circ g_e$. On a alors $D_e(f')(u_e) = D_e(g')(v_e)$. Ceci montre que les classes de $(u_e)_{e \in E}$ et $(v_e)_{e \in E}$ coïncident dans $\mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} \prod_{e \in E} D_e$. L'injectivité est prouvée. □

Corollaire 4.2.7. — *On suppose le cardinal α supérieur ou égal à 5. On se donne une catégorie $\mathcal{C}$ admettant les petites colimites. Soient $\mathcal{K}$ une catégorie de cardinal inférieur ou égal à α et $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur tel que $F(k)$ est un objet α-accessible pour tout $k \in \mathsf{Ob}(\mathcal{K})$. Alors, l'objet $\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} F$ est encore α-accessible.*

Démonstration. — En effet, pour toute petite catégorie α-filtrante $\mathcal{J}$ on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned}\hom_{\mathcal{C}}(\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} F, \mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} G) &\simeq \mathsf{Lim}_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} \hom_{\mathcal{C}}(F(k), \mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} G)\\ &\simeq \mathsf{Lim}_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})}\mathsf{Colim}_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{J})} \hom_{\mathcal{C}}(F(k), G(i))\end{aligned}$$

Or par le lemme 4.2.6, le membre de droite est isomorphe à :

$$\mathsf{Colim}_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{J})}\mathsf{Lim}_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} \hom_{\mathcal{C}}(F(k), G(i)) \simeq \mathsf{Colim}_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{J})} \hom_{\mathcal{C}}(\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} F, G(i))$$

Le corollaire est prouvé. □

On peut utiliser le corollaire 4.2.7 pour fournir un premier exemple d'objets α-accessibles :

Exemple 4.2.8. — On suppose que α est infini. Soit E un ensemble. Alors E est un objet α-accessible de $\mathcal{E}ns$ si et seulement si, son cardinal est inférieur ou égal à α. La condition est suffisante d'après le corollaire 4.2.7 puisque $E \simeq \coprod_{e\in E}\{e\}$ et que les singletons sont évidemment 0-accessibles.

Pour voir qu'elle est nécessaire, considérons l'ensemble $\mathcal{P}_\alpha(E)$ des parties de E de cardinal inférieur ou égal à α. Cet ensemble ordonné par l'inclusion est α-filtrant (on utilise ici que $\alpha \times \alpha$ est équipotent à α) et l'on a $E = \mathsf{Colim}_{A\in\mathcal{P}_\alpha(E)} A$. Lorsque E est α-accessible, l'identité de E se factorise à travers un élément de $\mathcal{P}_\alpha(E)$. Ceci montre que $E \in \mathcal{P}_\alpha(E)$.

On montre de même que l'ensemble E est finiment accessible si et seulement si son cardinal est fini.

Proposition 4.2.9. — *Soit $(F, G) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ une adjonction entre deux catégories admettant les petites colimites. On suppose que G est α-accessible. Alors le foncteur F envoie les objets α-accessibles sur des objets α-accessibles.*

Démonstration. — En effet, soit A un objet α-accessible de $\mathcal{C}$. Pour vérifier que $F(A)$ est encore α-accessible, on se donne un foncteur $B : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{D}$ avec $\mathcal{J}$ une petite catégorie α-filtrante. On a alors des isomorphismes :

$$\begin{aligned}\hom_{\mathcal{D}}(F(A), \mathsf{Colim}_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{J})} B(i)) &\simeq \hom_{\mathcal{C}}(A, G(\mathsf{Colim}_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{J})} B(i)))\\ &\simeq \hom_{\mathcal{C}}(A, \mathsf{Colim}_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{J})} G(B(i))) \simeq \mathsf{Colim}_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{J})} \hom_{\mathcal{C}}(A, G(B(i)))\\ &\simeq \mathsf{Colim}_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{J})} \hom_{\mathcal{D}}(F(A), B(i))\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Rappelons qu'un *monomorphisme* dans une catégorie $\mathcal{C}$ est une flèche a telle que l'application $\hom(X, a)$ est injective pour tout objet X. Supposons que $\mathcal{C}$ admet les coproduits finis. Une flèche dont tous les push-out sont des monomorphismes est appelée un *monomorphisme universel.* Le lemme suivant nous sera utile dans la suite.

Lemme 4.2.10. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les petites colimites. On suppose que les limites finies existent dans $\mathcal{C}$ et qu'elles commutent aux colimites filtrantes.*

Soient $\mathcal{I}$ une catégorie filtrante et $t : F \longrightarrow G$ une transformation naturelle entre deux foncteurs $F, G : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$. On suppose que pour tout $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$, la flèche $t(i) : F(i) \longrightarrow G(i)$ est un monomorphisme universel. Alors la flèche :

$$t : \mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} F \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} G$$

est encore un monomorphisme universel.

Démonstration. — Notons $A = \mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} F$. Soient $F' : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ le foncteur constant de valeur A et $G' : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ le foncteur donné par $G'(i) = A \coprod_{F(i)} G(i)$. On a alors un isomorphisme canonique $\mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} G = \mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} G'$. De plus, pour tout $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ la flèche $A \longrightarrow G'(i)$ est un monomorphisme universel. Il suffit donc de traiter le cas des foncteurs F' et G'.

En d'autres termes, on peut supposer que le foncteur F est constant de valeur A. On notera B la colimite de G. Étant donné qu'un co-changement de base suivant $A \longrightarrow A'$ ne changera pas nos hypothèses, on se contentera montrer que $A \longrightarrow B$ est un monomorphisme sans se soucier de l'universalité.

Soient $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ et $f, g : U \rightrightarrows A$ deux flèches telles que $t \circ f = t \circ g$. On veut montrer que $f = g$. On considère les égalisateurs :

$$E = \mathrm{Eq}\Big(U \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} A \Big) \qquad \text{et} \qquad E(i) = \mathrm{Eq}\Big(U \underset{g \circ t(i)}{\overset{f \circ t(i)}{\rightrightarrows}} B(i) \Big)$$

Comme les limites commutent aux colimites filtrantes, on déduit que $\mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} E(i) = U$. Mais puisque les flèches $t(i)$ sont des monomorphismes, la flèche canonique $E \longrightarrow E(i)$ est inversible. Ceci montre que $E = U$. On a donc l'égalité $f = g$. □

Définition 4.2.11. — *Soit B un objet d'une catégorie $\mathcal{C}$. On note $\mathbf{Sub}(B) \subset \mathcal{C}/B$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les monomorphismes $a : A \longrightarrow B$. Nous abuserons parfois et dirons que A est un* sous-objet *de B.*

Supposons que $\mathcal{C}$ admet les petites colimites et soit α un cardinal. On notera $\mathbf{Sub}_\alpha(B)$ la sous-catégorie pleine formée des monomorphismes de sources α-accessibles.

Remarque 4.2.12. — Supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ admet les petites colimites et que tous les monomorphismes de $\mathcal{C}$ sont universels. Si en plus, les limites finies existent dans $\mathcal{C}$ et commutent aux colimites filtrantes, la catégorie $\mathbf{Sub}(B)$ admet les colimites suivant les petites catégories filtrantes (par le lemme 4.2.10). De même, si $\alpha \geq 5$, la catégorie $\mathbf{Sub}_\alpha(B)$ admet les colimites suivant les petites catégories filtrantes de cardinal inférieur ou égal à α (par le corollaire 4.2.7). De plus, ces colimites commutent au foncteur « oubli » qui à un monomorphisme associe sa source.

Il est clair que la catégorie $\mathbf{Sub}(X)$ est directe. Étant donnés deux sous-objets A et B de X, nous dirons que B majore A s'il existe une flèche de A vers B dans $\mathbf{Sub}(X)$.

Soit $u : U \longrightarrow V$ une flèche d'une catégorie $\mathcal{C}$. On a deux sous-catégories pleines $\mathbf{Sub}_\alpha(u)$ et $\mathbf{Sub}(u)$ de $\underline{\mathsf{Hom}}(\underline{1}, \mathcal{C})/u$. On parlera alors de sous-flèches de u. Une sous-flèche u_0 est majorée par u_1 si et seulement si, le but et la source de u_0 sont respectivement majorés par le but et la source de u_1.

Définition 4.2.13. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les petites colimites. On dit qu'un objet X de $\mathcal{C}$ est la colimite α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- *la catégorie $\mathbf{Sub}_\alpha(X)$ est essentiellement petite et α-filtrante,*
- *la flèche canonique $\left(\mathsf{Colim}_{A \to X \in \mathbf{Sub}_\alpha(X)} A\right) \longrightarrow X$ est inversible.*

Le résultat suivant permet dans certain cas d'estimer le cardinal de l'ensemble des flèches partantes d'un objet α-accessible :

Proposition 4.2.14. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les petites colimites et α, β et γ des cardinaux infinis. On suppose que la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_\alpha$ des objets α-accessibles est essentiellement petite et équivalente à une catégorie de cardinal inférieur[2] ou égal à γ. Soit X un objet β-accessible de $\mathcal{C}$ qui est la colimite α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles. Alors, le cardinal de $\hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ est majoré par $\gamma.\beta^\alpha$ pour tout $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}_\alpha)$. En particulier, si $\beta = 2^\nu \geq \gamma$ pour $\nu \geq \alpha$, le cardinal de $\hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ est majoré par β.*

Démonstration. — On montrera la conclusion de la proposition dans une situation plus générale. On supposera simplement l'existence d'un isomorphisme $X \simeq \mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} F$, avec $\mathcal{I}$ un ensemble ordonné α-filtrant et F un foncteur $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que $F(i)$ est α-accessible pour tout $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$.

On veut se ramener au cas où le cardinal de $\mathcal{I}$ est majoré par β^α. Il suffit pour cela de montrer qu'il existe un sous-ensemble $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ de cardinal inférieur ou égal à β^α qui soit encore α-filtrant et tel que $\mathsf{Colim}_{j \in \mathcal{J}} F(j) \longrightarrow X$ admet une section. Considérons l'ensemble $\mathcal{S}^\alpha_\beta(\mathcal{I})$ formé des parties $\mathcal{J}$ de cardinal inférieur à β^α et qui sont α-filtrantes. Cet ensemble est ordonné par l'inclusion. En utilisant le lemme 4.2.15 ci-dessous, on voit qu'il est β^α-filtrant et donc en particulier β-filtrant. On définit un foncteur :

$$G : \mathcal{S}^\alpha_\beta(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

qui à $\mathcal{J}$ associe $\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} F$. Les flèches évidentes $\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} F \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} F = X$ sont compatibles avec les inclusions. Ils fournissent donc un morphisme évident :

$$\mathsf{Colim}_{\mathcal{S}^\alpha_\beta(\mathcal{I})} G \longrightarrow X \tag{58}$$

[2] En fait, nous aurions seulement besoin que γ majore le cardinal de chaque ensemble $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ pour A et B des objets α-accessibles.

D'autre part, pour $i \in \mathcal{I}$ le singleton $\{i\}$ est un élément de $\mathcal{S}^\alpha_\beta(\mathcal{I})$. Ceci fournit des morphismes évidents :

$$F(i) \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\mathcal{S}^\alpha_\beta(\mathcal{I})} G$$

compatibles avec les morphismes de transitions $F(i) \longrightarrow F(j)$ pour $i \leq j$ et donc, par passage à la colimite, un morphisme

$$s : X \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\mathcal{S}^\alpha_\beta(\mathcal{I})} G$$

qui est une section à la flèche (58). Comme X est β-accessible, le morphisme s provient d'un morphisme $X \longrightarrow G(\mathcal{J})$ pour $\mathcal{J} \in \mathcal{S}^\alpha_\beta(\mathcal{I})$. On voit alors que X est un rétract de $G(\mathcal{J}) = \mathsf{Colim}_{j \in \mathcal{J}} F(j)$.

On peut donc bien supposer que $\mathcal{I}$ est de cardinal inférieur à β^α. Si A est α-accessible, on a $\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, X) = \mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, F(i))$. Le cardinal de cet ensemble est majoré par $\gamma.\beta^\alpha$. □

Lemme 4.2.15. — *Soient α et δ des cardinaux tels que $\alpha \geq 2$ et δ infini. Soient $\mathcal{I}$ un ensemble ordonné α-filtrant et $A \subset \mathcal{I}$ une partie de cardinal δ. Il existe alors un sous-ensemble α-filtrant $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ contenant A et de cardinal inférieur à δ^α. En particulier, si δ est de la forme β^α, l'ensemble des parties α-filtrantes de cardinal inférieur à δ est δ-filtrant pour la relation d'inclusion.*

Démonstration. – On note $\mathcal{P}_\alpha(\mathcal{I})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{I}$ de cardinal inférieur à α. On fixe une application $M : \mathcal{P}_\alpha(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{I}$ qui à une partie $U \subset \mathcal{I}$ associe un majorant $M(U) \in \mathcal{I}$ de U. On construit par induction transfinie des parties $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_\nu \subset \ldots$ avec :

- $A_0 = A$,
  $A_{\nu+1} = A_\nu \cup \{M(U);\ U \in \mathcal{P}_\alpha(A_\nu)\}$,
- $A_\nu = \cup_{\lambda \in \nu} A_\lambda$ si ν est un ordinal limite.

Il est clair que $\mathrm{card}(A_{\nu+1}) \leq \mathrm{card}(A_\nu)^\alpha$ étant donné que $\mathrm{card}(\mathcal{P}_\alpha(A)) \leq \mathrm{card}(A_\nu)^\alpha$. En utilisant que $(\delta^\alpha)^\alpha = \delta^{\alpha \times \alpha} = \delta^\alpha$ (si δ est infini et α fini, c'est clair ; c'est également vrai lorsque α est infini), on montre par induction transfinie que $\mathrm{card}(A_\nu) \leq \delta^\alpha$ pour $\mathrm{card}(\nu) \leq \delta^\alpha$. En particulier si ν est le cardinal infini successeur de α, $\mathcal{J} = A_\nu$ est de cardinal inférieur à δ^α. Il est immédiat de voir que $\mathcal{J}$ est α-filtrant. □

On termine ce paragraphe en introduisant la classe de catégories α-présentables :

Définition 4.2.16. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit que $\mathcal{C}$ est* α-présentable *si les conditions suivantes sont vérifiées avec β n'importe quel cardinal supérieur ou égal à α :*

1. *Les petites limites et colimites sont représentables dans $\mathcal{C}$. Les colimites filtrantes commutent aux limites finies. De plus, les colimites β-filtrantes commutent aux limites suivant des catégories de cardinal inférieur ou égal à β.*
2. *Les monomorphismes de $\mathcal{C}$ sont universels.*

3. *Tout objet de $\mathcal{C}$ est accessible. Un sous-objet d'un objet β-accessible est encore β-accessible.*
4. *Tout objet de $\mathcal{C}$ est la colimite β-filtrante de ses sous-objets β-accessibles.*
5. *La sous-catégorie $\mathcal{C}_\beta$ formée des objets β-accessibles est essentiellement petite.*

Lorsque $\mathcal{C}$ est α-présentable avec α fini et plus grand ou égal à 5, nous dirons que $\mathcal{C}$ est finiment présentable. *Nous dirons que $\mathcal{C}$ est présentable, lorsqu'elle est présentable pour un certain cardinal α.*

Remarque 4.2.17. — La première condition de la définition précédente, affirme que pour toute petite catégorie $\mathcal{K}$ de cardinal inférieur ou égal à β, le foncteur :

$$\mathsf{Lim}_{\mathcal{K}} : \underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{K}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

est β-accessible. Nous avions démontré cette propriété pour la catégorie des ensembles dans le lemme 4.2.6. Notons toutefois, que dans une catégorie présentable, cette propriété est supposée vraie seulement pour β suffisamment grand.

Remarque 4.2.18. — Il existe déjà dans la littérature une notion de catégories *localement présentables* (voir par exemple [**AR94**]). Il s'agit d'une notion beaucoup plus naturelle que celle que l'on vient d'introduire dans la définition 4.2.16. Notons simplement que notre classe des catégories α-présentables est contenue dans celle des catégories localement α-présentables. Nous n'avons pas cherché à savoir si cette inclusion est stricte.

Notons aussi que la définition 4.2.16 comporte des redondances. En effet, on peut montrer, en suivant les arguments de [**AR94**], que la propriété 4 implique la propriété 5 ainsi que la commutation des colimites β-filtrantes avec les limites suivant les catégories $\mathcal{K}$ avec $\mathrm{card}(\mathsf{Fl}(\mathcal{K})) \leq \beta$.

Exemple 4.2.19. — La catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$ est finiment présentable. En effet, les deux premières conditions sont claires. La troisième et cinquième condition découlent de l'exemple 4.2.8. La quatrième condition découle du fait que si β est infini (resp. β est fini) $\mathbf{Sub}_\beta(E)$ est équivalente à l'ensemble des parties de E de cardinal inférieur ou égal à β (resp. de cardinal fini). Cet ensemble est bien β-filtrant et sa réunion vaut l'ensemble E.

On présente deux constructions permettant d'obtenir des catégories présentables :

Proposition 4.2.20. — *Soient $\mathcal{I}$ une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie présentable. Alors $\underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ est encore présentable.*

Démonstration. — Pour tout $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ on dispose d'un foncteur évident $i^* : \underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ qui à un foncteur $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{D}$ associe l'objet $F(i)$. Les foncteurs i^* commutent aux colimites et aux limites et forment une famille conservative de foncteurs. D'où la première condition de 4.2.16.

Comme $\mathcal{C}$ est cocomplète et complète, le foncteur i^* admet un adjoint à gauche $i_\#$ ainsi qu'un adjoint à droite i_*. Rappelons que la construction du foncteur i_*, fait apparaître des limites suivant des sous-catégories de $\mathcal{I}$. On en déduit que i_* est β-accessible pour tout β majorant le cardinal[3] de $\mathcal{I}$ et tel que $\mathcal{C}$ est β-accessible.

Soit $t : F \longrightarrow F'$ un morphisme de $\underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. Si chaque $t(i)$ est un monomorphisme, t est clairement un monomorphisme. Réciproquement, si t est un monomorphisme, en considérant des flèches de source $i_\# A$ pour $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ et $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, on voit que tous les $t(i)$ sont des monomorphismes. En particulier, les monomorphismes de $\underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ sont universels.

Soit β un cardinal majorant le cardinal de $\mathcal{I}$ et tel que $\mathcal{C}$ est β-présentable. On va montrer que $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ est β-accessible si et seulement si, tous les $F(i)$ le sont. Ceci démontrera la troisième et dernière propriété de 4.2.16.

Étant donné un deuxième objet F' de $\underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$, on a une suite exacte :

$$\hom(F, F') \longrightarrow \left(\prod_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})} \hom_{\mathcal{C}}(F(i), F'(i)) \right) \rightrightarrows \left(\prod_{j \to k \in \mathsf{Fl}(\mathcal{I})} \hom_{\mathcal{C}}(F(j), F'(k)) \right)$$

En utilisant que :

- les limites finies d'ensembles commutent aux colimites filtrantes,
- les produits indexés par $\mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ et $\mathsf{Fl}(\mathcal{I})$ commutent aux colimites β-filtrantes d'ensembles,

on déduit que lorsque tous les $F(i)$ sont β-accessibles, il en est de même de F.

Réciproquement, supposons que F est β-accessible. Pour montrer que $F(i)$ est β-accessible, il suffit d'évaluer $\hom(F, -)$ en des colimites β-filtrantes d'objets de la forme $i_*(A)$ avec $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ et $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ et d'utiliser le fait que i_* est β-accessible.

Pour terminer, il nous reste à établir la quatrième propriété. Étant donné un objet F de $\underline{\mathsf{HOM}}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$, il suffira de montrer que le foncteur (qui est une inclusion) :

$$\mathbf{Sub}_\beta(F) \longrightarrow \prod_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})} \mathbf{Sub}_\beta(F(i)) \tag{59}$$

est cofinal[4]. On se donne une famille de sous-objets $(A_i \in \mathbf{Sub}_\beta(F(i)))_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})}$. On va construire par récurrence une suite croissante de familles de sous-objets $(A_i^n \in \mathbf{Sub}_\beta(F(i)))_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

---

[3] Si α est un cardinal infini majorant celui de $\mathsf{Fl}(\mathcal{I})$, il majore également les cardinaux des catégories $\mathcal{I}/i$. En effet, on dispose d'une application injective $\mathsf{Fl}(\mathcal{I}/i) \longrightarrow \mathsf{Fl}(\mathcal{I})^3$ qui associe à un triangle commutatif ses arêtes.

[4] On aurait pu également appliquer le lemme 4.2.4 au foncteur $\mathcal{I}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{O}rd\mathcal{E}ns$ qui à $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ associe $\mathbf{Sub}_\beta(F(i))$ et à $i \to j \in \mathsf{Fl}(\mathcal{I})$ le foncteur $- \times_{F(j)} F(i) : \mathbf{Sub}_\beta(F(j)) \longrightarrow \mathbf{Sub}_\beta(F(i))$.

Pour $n = 0$, on prend $A_i^0 = A_i$. Supposons la famille construite au rang n. Pour chaque $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$, on considère la flèche composée :

$$\coprod_{j \to i} A_j^n \longrightarrow \coprod_{j \to i} F(j) \longrightarrow F(i) \tag{60}$$

Comme les A_j^n sont β-accessibles, il en est de même de $\coprod_{j \to i} A_j^n$. Puisque $F(j)$ est une colimite β-filtrante de ses sous-objets β-accessibles, on peut trouver un sous-objet β-accessible qui factorise la composée (60). On prend pour A_i^{n+1} un tel objet.

On pose $A_i^\infty = \mathsf{Colim}_n A_i^n$. Par construction, si $j \to i \in \mathsf{Fl}(\mathcal{I})$ la flèche composée $A_j^\infty \longrightarrow F(j) \longrightarrow F(i)$ se factorise (uniquement) par A_i^∞. On déduit donc des flèches $A_j^\infty \longrightarrow A_i^\infty$. On vérifie immédiatement qu'on a construit un foncteur $A^\infty : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ qui de plus est un sous-objet de F et dont l'image par (59) majore la famille $(A_i)_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})}$. □

Proposition 4.2.21. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie α-présentable et $\mathcal{D}$ une catégorie complète et cocomplète. On suppose donnée une adjonction $(F, G) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ telle que :*

- *G est pleinement fidèle et α-accessible,*
- *F commute aux limites finies,*
- *le foncteur $G \circ F$ préserve les objets β-accessibles pour β supérieur ou égal à α.*

Alors $\mathcal{D}$ est α-présentable.

Démonstration. — Comme G est pleinement fidèle, la counité de l'adjonction $F \circ G \longrightarrow \mathrm{id}$ est inversible. Ainsi, les colimites dans $\mathcal{D}$ peuvent se calculer dans $\mathcal{C}$ *via* la formule suivante. Soit un foncteur $B : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{D}$. On a :

$$\mathsf{Colim}_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})} B(i) \simeq F(\mathsf{Colim}_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})} G(B(i))) \tag{61}$$

Il est facile de déduire de cette formule et de la commutation de F aux limites finies que les colimites filtrantes dans $\mathcal{D}$ commutent aux limites finies. D'autre part, en utilisant que G est β-accessible on montre que les colimites β-filtrantes dans $\mathcal{D}$ commutent aux limites suivant des catégories de cardinal inférieur ou égal à β. Ceci démontre donc la première propriété de la définition 4.2.16.

Comme G est un adjoint à droite, il préserve les monomorphismes. Puisque F commute aux limites finies, il préserve également les monomorphismes. Ainsi, une flèche u de $\mathcal{D}$ est un monomorphisme si et seulement si $G(u)$ est un monomorphisme. On déduit alors (en utilisant la formule (61)) que les monomorphismes sont universels dans $\mathcal{D}$.

Montrons qu'un objet B de $\mathcal{D}$ est β-accessible si et seulement si $G(B)$ est β-accessible.

La condition est nécessaire. En effet, $G(B)$ est la colimite β-filtrante $\mathsf{Colim}_{A \in \mathbf{Sub}_\beta(G(B))} A$. Comme $G \circ F$ est β-accessible, on voit que $G(B)$ est également la colimite β-filtrante de $\mathsf{Colim}_{A \in \mathbf{Sub}_\beta(G(B))} G(F(A))$. Il vient que $B = FG(B)$ est la colimite β-filtrante $\mathsf{Colim}_{A \in \mathbf{Sub}_\beta(G(B))} F(A)$. Étant donné que l'objet B est

β-accessible, et que les $F(A)$ sont des sous-objets de B, il existe $A \in \mathbf{Sub}_\beta(G(B))$ tel que $F(A) \simeq FG(B) = B$. Il vient que $G(B) = GF(A)$ est β-accessible.

La condition est suffisante. En effet, soit $A(-) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur avec $\mathcal{J}$ une petite catégorie β-filtrante. On a des isomorphismes :

$$\begin{aligned}
&\hom_{\mathcal{D}}(B, \mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} A(-)) \simeq \\
&\qquad \hom_{\mathcal{C}}(G(B), G(\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} A(-))) \simeq \hom_{\mathcal{C}}(G(B), \mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} G(A(-))) \\
&\qquad\qquad \simeq \mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} \hom_{\mathcal{C}}(G(B), G(A(-))) \simeq \mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} \hom_{\mathcal{D}}(B, A(-))
\end{aligned}$$

En particulier, tout objet de $\mathcal{D}$ est accessible, et la sous-catégorie des objets β-accessibles est essentiellement petite.

Il reste à vérifier la quatrième propriété de la définition 4.2.16. Soit B un objet de $\mathcal{D}$. La catégorie $\mathbf{Sub}_\beta(B)$ est essentiellement petite. Pour montrer qu'elle est β-filtrante, il suffit de montrer que le foncteur :

$$G : \mathbf{Sub}_\beta(B) \longrightarrow \mathbf{Sub}_\beta(G(B))$$

est cofinal. Mais si A est un sous-objet de $G(B)$, $F(A)$ est un sous-objet de $FG(B) = B$, dont l'image par G majore A *via* le morphisme d'unité $A \longrightarrow G(F(A))$.

Pour montrer que B est isomorphe à $\mathsf{Colim}_{A \in \mathbf{Sub}_\beta(B)} A$, on peut le faire après application de G. Il suffit donc de prouver (puisque G est β-accessible) que la flèche évidente :

$$\left(\mathsf{Colim}_{A \in \mathbf{Sub}_\beta(B)} G(A)\right) \longrightarrow G(B)$$

est inversible. Mais on vient de voir que le foncteur $G : \mathbf{Sub}_\beta(B) \longrightarrow \mathbf{Sub}_\beta(G(B))$ est filtrant. Le résultat est maintenant clair. □

Remarque 4.2.22. — La proposition 4.2.21 sera appliquée dans le cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont respectivement la catégorie des préfaisceaux et la catégorie des faisceaux sur un site de Grothendieck. Le foncteur F est alors le foncteur de faisceautisation et G l'inclusion évidente.

4.2.2. L'argument du petit objet et complexes cellulaires

Définition 4.2.23. — *Soit λ un ordinal. On appelle* λ-suite *un foncteur $A : \lambda \longrightarrow \mathcal{C}$ que l'on schématise par :*

$$A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_\nu \longrightarrow A_{\nu+1} \longrightarrow \dots$$

et qui commute aux colimites (lorsqu'elles existent), i.e., *pour tout $\nu \in \lambda$ un ordinal limite, on a $A_\nu \simeq \mathsf{Colim}_{\mu \in \nu} A_\mu$. La flèche $A_0 \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu \in \lambda} A_\nu$ est appelée la* composition transfinie *de la λ-suite A.*

Définition 4.2.24. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les petites colimites et $F \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ une classe de flèches. On note* $\mathrm{Cell}(F) \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ *la plus petite classe contenant F et stable par pushout et composition transfinie.*

Remarque 4.2.25. — Toute flèche f de $\mathrm{Cell}(F)$ peut s'écrire comme la composée transfinie d'une λ-suite :

$$A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_\nu \longrightarrow A_{\nu+1} \longrightarrow \dots$$

telle que pour tout ν, la flèche $A_\nu \longrightarrow A_{\nu+1}$ est un push-out d'un élément de F. En effet, on vérifie facilement que la famille de telles flèches est stable par push-out et composition transfinie.

Le résultat ci-dessous est connu sous le nom de l'argument du petit objet. Le lecteur pourra également consulter [**Hir03**] et [**Hov99**].

Proposition 4.2.26. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les petites colimites. Soit $F \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ un ensemble de flèches de sources et de buts α-accessibles pour un cardinal α fixé. Il existe alors un foncteur*

$$\Phi_{F,\alpha} : \underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathcal{C}) \longrightarrow \underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{2}}, \mathcal{C})$$

qui à une flèche $f : U \longrightarrow V$ associe une factorisation :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f"] & \Phi_{F,\alpha}(f) \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

1. *La flèche $U \longrightarrow \Phi_{F,\alpha}(f)$ est dans* $\mathrm{Cell}(F)$.
2. *La flèche $\Phi_{F,\alpha}(f) \longrightarrow V$ est dans* $\mathrm{RLP}(F)$.
3. *Le foncteur $\Phi_{F,\alpha}$ est α-accessible.*
4. *Soit β un cardinal infini vérifiant les deux conditions :*
   (a) *β est strictement supérieur à α et supérieur ou égal au cardinal de l'ensemble F,*
   (b) *pour tout objet α-accessible A et tout objet β-accessible X de $\mathcal{C}$, l'ensemble* $\hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ *est de cardinal inférieur ou égal à β.*

   Alors, l'objet $\Phi_{F,\alpha}(f)$ est β-accessible lorsque U et V sont β-accessibles.

Démonstration. — Pour une flèche $f = f_0 : U \longrightarrow V$ de $\mathcal{C}$, on note F/f l'ensemble des carrés commutatifs $Q(a, i, j)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "a"'] & U \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"] & V \end{tikzcd}$$

avec $a \in F$. On a alors un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} \left(\coprod_{Q(a,i,j)\in F/f} A\right) \arrow[r, "\cup i"] \arrow[d, "\cup a"'] & U \arrow[d, "f"] \\ \left(\coprod_{Q(a,i,j)\in F/f} B\right) \arrow[r, "\cup j"] & V \end{tikzcd}$$

On forme le push-out $\tilde{\Phi}_{F,1}(f)$ du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \left(\coprod_{Q(a,i,j)\in F/f} A\right) \arrow[r] \arrow[d] & U \\ \left(\coprod_{Q(a,i,j)\in F/f} B\right) & \end{tikzcd}$$

pour obtenir une factorisation de f :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f"] & \tilde{\Phi}_{F,1}(f) \arrow[r, "f_1"'] & V \end{tikzcd}$$

Cette factorisation est fonctorielle en f dans le sens évident. On définit alors par induction transfinie une suite fonctorielle en f :

$$\begin{tikzcd} U = \tilde{\Phi}_{F,0}(f) \arrow[r] & \tilde{\Phi}_{F,1}(f) \arrow[r] & \tilde{\Phi}_{F,2}(f) \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "f_2"] & \dots \arrow[r] & \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f_\nu"] & \dots & V \end{tikzcd}$$

en posant :

- si $\nu = \mu{+}1$ alors $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) = \tilde{\Phi}_{F,1}(f_\mu)$ et f_ν le morphisme évident $\tilde{\Phi}_{F,1}(f_\mu) \longrightarrow V$,
- si ν est un ordinal limite, on pose $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) = \mathsf{Colim}_{\mu\in\nu}\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f)$ et f_ν la limite des $(f_\mu)_{\mu\in\nu}$.

On définit alors $\Phi_{F,\alpha} = \tilde{\Phi}_{F,\lambda}$ avec λ le cardinal infini successeur de α. La première propriété est claire.

Soit $a : A \longrightarrow B$ une flèche de F. On vérifie immédiatement, en utilisant que $\hom_{\mathcal{C}}(A, -)$ commute aux colimites indexées par λ, que $\Phi_{F,\alpha}(f) \longrightarrow V$ admet la propriété de relèvement à droite par rapport à a.

Le foncteur $\underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{E}ns$ qui à f associe l'ensemble F/f est clairement α-accessible puisque les sources et buts des éléments de F sont α-accessibles. Il vient immédiatement que le foncteur $\tilde{\Phi}_{F,1}$ est α-accessible. Par induction transfinie, on déduit que $\tilde{\Phi}_{F,\nu}$ est également α-accessible pour tout ordinal ν (et donc en particulier pour λ).

Pour la dernière propriété, il suffit de remarquer que si U et V sont β-accessibles, l'ensemble F/f est de cardinal inférieur à β. Par le corollaire 4.2.7, on voit que $\tilde{\Phi}_{F,1}(f)$ est encore β-accessible. Par le même corollaire, on déduit par induction transfinie que pour tout ordinal ν dont le cardinal est inférieur ou égal à β, l'objet $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f)$ est β-accessible. C'est en particulier le cas pour le cardinal infini successeur de α puisque β est infini et $\beta > \alpha$. La proposition est démontrée. □

La définition suivante est tirée de [**Hir03**] :

Définition 4.2.27. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les petites colimites, $F \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ une classe de flèches et λ un ordinal.*

1- *Un λ-complexe F-cellulaire $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}$ est la donnée :*

- *d'une λ-suite : $U_0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow U_\nu \longrightarrow U_{\nu+1} \longrightarrow \ldots$ à valeurs dans $\mathcal{C}$,*
- *pour tout $\nu \in \lambda$, d'un ensemble E_ν (appelé l'ensemble des* cellules*) tel que E_ν est vide si $\nu + 1 = \lambda$,*
- *pour tout $\nu \in \lambda$ et $e \in E_\nu$, d'un carré commutatif de $\mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd} A_e \arrow[r, "i_\nu(e)"] \arrow[d] & U_\nu \arrow[d] \\ B_e \arrow[r, "j_\nu(e)"] & U_{\nu+1} \end{tikzcd}$$

avec $A_e \longrightarrow B_e$ dans F et tel que le carré :

$$\begin{tikzcd} \coprod_{e\in E_\nu} A_e \arrow[r, "\cup i_\nu(e)"] \arrow[d] & U_\nu \arrow[d] \\ \coprod_{e\in E_\nu} B_e \arrow[r, "\cup j_\nu(e)"] & U_{\nu+1} \end{tikzcd}$$

est cocartésien (où l'on a posé $U_{\nu+1} = U_\nu$ si $\nu + 1 = \lambda$).

2- *Un morphisme* $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda} \longrightarrow (U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu\in\lambda}$ *de* λ*-complexes* F*-cellulaires est la donnée :*

- *d'un morphisme de* λ*-suites* $(U_\nu)_{\nu\in\lambda} \longrightarrow (U'_\nu)_{\nu\in\lambda}$,
- *pour tout* $\nu \in \lambda$, *d'une application* $m_\nu : E_\nu \longrightarrow E'_\nu$ *telle que les deux carrés suivants :*

$$\begin{tikzcd} E_\nu \arrow[r, "i_\nu"] \arrow[d, "m_\nu"'] & \coprod_{A\to B\in F} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, U_\nu) \arrow[d] \\ E'_\nu \arrow[r, "i'_\nu"] & \coprod_{A\to B\in F} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, U'_\nu) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_\nu \arrow[r, "j_\nu"] \arrow[d, "m_\nu"'] & \coprod_{A\to B\in F} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(B, U_{\nu+1}) \arrow[d] \\ E'_\nu \arrow[r, "j'_\nu"] & \coprod_{A\to B\in F} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(B, U'_{\nu+1}) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Nous dirons que le morphisme $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda} \longrightarrow (U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu\in\lambda}$ *est une* inclusion de cellules *lorsque les applications* m_ν *sont injectives.*

On notera $\mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$ la catégorie dont les objets sont les λ-complexes F-cellulaires et les morphismes définis comme dans 4.2.27. On a un foncteur évident de composition $Cp : \mathbf{CpCell}_{F,\alpha}(\mathcal{C}) \longrightarrow \underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathcal{C})$ qui à un λ-complexe F-cellulaire $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}$ associe la flèche $U_0 \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} U_\nu$, *i.e.*, la composée transfinie de la λ-suite sous-jacente.

Étant donnée une flèche $u : U \longrightarrow V$ de $\mathcal{C}$, nous appellerons *structure* F*-cellulaire* sur u, un antécédent à isomorphisme près du foncteur Cp (pour un certain ordinal λ). On a le résultat suivant qui découle immédiatement de la preuve de la proposition 4.2.26 :

Corollaire 4.2.28. *– On garde les hypothèses et les notations de la proposition 4.2.26 (et de sa démonstration). On note* λ *le cardinal infini successeur de* α. *Il existe un foncteur :*

$$(\tilde{\Phi}_{F,\nu})_{\nu\in\lambda} : \underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$$

qui à une flèche $f : U \longrightarrow V$ *de* $\mathcal{C}$ *associe un* λ*-complexe* F*-cellulaire* $(\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f), E_\nu(f), i_{f,\nu}, j_{f,\nu})_{\nu\in\lambda}$. *De plus, la composée de la* λ*-suite* $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f)$ *est la flèche* $U \longrightarrow \Phi_{F,\alpha}(f)$. *En d'autres termes,* $(\tilde{\Phi}_{F,\nu})_{\nu\in\lambda}$ *est une structure* F*-cellulaire sur la flèche* $U \longrightarrow \Phi_{F,\alpha}(f)$.

Démonstration. – C'est clair. Notons simplement que les ensembles de cellules E_ν sont les F/f_ν. Pour $Q(a, i, j) \in F/f_\nu$, la flèche $i_{f,\nu}(Q(a, i, j))$ est donnée par i. On fera attention par contre que $j_{f,\nu}(Q(a, i, j))$ est différente de j. En effet, ces deux flèches ont des buts différents en général. □

Vu le résultat précédent, nous sommes amenés à étudier la catégorie $\mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$. On regroupe quelques résultats dans le lemme suivant.

Lemme 4.2.29. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les petites colimites et $F \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ une classe de flèches.*

1- *La catégorie $\mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$ admet les petites colimites. De plus, le foncteur de composition*

$$Cp : \mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C}) \longrightarrow \underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathcal{C})$$

y commute.

2- *Soit $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu) \longrightarrow (U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)$ une inclusion de cellules. Alors, la flèche évidente :*

$$U'_0 \coprod_{U_0} \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} U_\nu \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} U'_\nu$$

est dans $\mathrm{Cell}(F)$. *De plus, elle est naturellement la composée d'un λ-complexe F-cellulaire dont les ensembles de cellules sont donnés par $E'_\nu \backslash E_\nu$.*

Démonstration. — Soient $\mathcal{K}$ une petite catégorie et $\mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$ un foncteur qui à $k \in \mathsf{Ob}(\mathcal{K})$ associe un λ-complexe F-cellulaire $(U_\nu(k), E_\nu(k), i_{k,\nu}, j_{k,\nu})$.

On pose $U_\nu = \mathsf{Colim}_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} U_\nu(k)$ et $E_\nu = \mathsf{Colim}_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} E_\nu(k)$. On définit i_ν et j_ν comme étant les limites respectives des applications :

$$E_\nu(k) \xrightarrow{i_{k,\nu}} \coprod_{A\to B} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, U_\nu(k)) \longrightarrow \coprod_{A\to B} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, U_\nu)$$

$$E_\nu(k) \xrightarrow{j_{k,\nu}} \coprod_{A\to B} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(B, U_{\nu+1}(k)) \longrightarrow \coprod_{A\to B} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(B, U_{\nu+1})$$

Pour montrer que $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)$ est bien un λ-complexe F-cellulaire il suffit de remarquer que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{e\in E_\nu} A_e & \xrightarrow{\cup i_\nu(e)} & U_\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{e\in E_\nu} B_e & \xrightarrow{\cup j_\nu(e)} & U_{\nu+1} \end{array}$$

est la colimite des carrés cocartésiens :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{e\in E_\nu(k)} A_e & \xrightarrow{\cup i_{k,\nu}(e)} & U_\nu(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{e\in E_\nu(k)} B_e & \xrightarrow{\cup j_{k,\nu}(e)} & U_{\nu+1}(k) \end{array}$$

On vérifie facilement que $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)$ est bien la colimite du foncteur $\mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})$. La commutation du foncteur Cp avec les colimites est claire par construction.

Passons à la seconde partie du lemme. On définit un λ-complexe F-cellulaire $(V_\nu, E'_\nu \backslash E_\nu, i''_\nu, j''_\nu)$ de la manière suivante. On pose $V_\nu = U'_\nu \coprod_{U_\nu} \mathsf{Colim}_{\mu\in\lambda} U_\mu$. On

obtient ainsi une λ-suite $(V_\nu)_{\nu\in\lambda}$ dont la composée est

$$U'_0 \coprod_{U_0} \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} U_\nu \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} U'_\nu$$

On va munir cette flèche d'une structure de λ-complexes F-cellulaires dont la λ-suite sous-jacente est $(V_\nu)_{\nu\in\lambda}$. Pour $\nu \in \lambda$ et $e' \in E'_\nu$ on définit $i''_\nu(e')$ et $j''_\nu(e')$ par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A_{e'} \arrow[r, "i'_\nu(e')"'] \arrow[rr, bend left, "i''_\nu(e')"] \arrow[d] & U'_\nu \arrow[r] \arrow[d] & V_\nu \arrow[d] \\
B_{e'} \arrow[r, "j'_\nu(e')"] \arrow[rr, bend right, "j''_\nu(e')"'] & U'_{\nu+1} \arrow[r] & V_{\nu+1}
\end{tikzcd}$$

On va montrer que les restrictions de i''_ν et j''_ν à $E'_\nu \backslash E_\nu$ conviennent dans le sens que le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{e'\in E'_\nu\backslash E_\nu} A_{e'} \arrow[r] \arrow[d] & U'_\nu \coprod_{U_\nu} \mathsf{Colim}_{\mu\in\lambda} U_\mu \arrow[d] \\
\coprod_{e'\in E'_\nu\backslash E_\nu} B_{e'} \arrow[r] & U'_{\nu+1} \coprod_{U_{\nu+1}} \mathsf{Colim}_{\mu\in\lambda} U_\mu
\end{tikzcd}$$

est cocartésien. En remarquant que la flèche verticale de droite est le push-out de $U'_\nu \coprod_{U_\nu} U_{\nu+1} \longrightarrow U'_{\nu+1}$ suivant $U'_\nu \coprod_{U_\nu} U_{\nu+1} \longrightarrow U'_\nu \coprod_{U_\nu} \mathsf{Colim}_{\mu\in\lambda} U_\mu$, on se ramène à montrer que le carré suivant est cocartésien :

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{e'\in E'_\nu\backslash E_\nu} A_{e'} \arrow[r] \arrow[d] & U'_\nu \coprod_{U_\nu} U_{\nu+1} \arrow[d] \\
\coprod_{e'\in E'_\nu\backslash E_\nu} B_{e'} \arrow[r] & U'_{\nu+1}
\end{tikzcd}$$

Ceci est découle immédiatement du fait que les carrés ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{e'\in E'_\nu} A_{e'} \arrow[r] \arrow[d] & U'_\nu \arrow[d] \\
\coprod_{e'\in E'_\nu} B_{e'} \arrow[r] & U'_{\nu+1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{e\in E_\nu} A_e \arrow[r] \arrow[d] & U_\nu \arrow[r] \arrow[d] & U'_\nu \arrow[d] \\
\coprod_{e\in E_\nu} B_e \arrow[r] & U_{\nu+1} \arrow[r] & U'_\nu \coprod_{U_\nu} U_{\nu+1}
\end{tikzcd}$$

sont cocartésiens. □

On obtient le complément suivant à la proposition 4.2.26.

Proposition 4.2.30. — *On garde les hypothèses et les notations de la proposition 4.2.26 et de son corollaire 4.2.28. On suppose en plus que les flèches de* Cell(F) *sont des*

monomorphismes. Supposons donné un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & V \arrow[d, "e'"] \\ U' \arrow[r, "f'"] & V' \end{tikzcd}$$

avec e et e' des monomorphismes universels. Alors, le morphisme de λ-complexes F-cellulaires

$$(\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f), E_\nu(f), i_{f,\nu}, j_{f,\nu}) \longrightarrow (\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f'), E_\nu(f'), i_{f',\nu}, j_{f',\nu})$$

est une inclusion de cellules. En particulier, la flèche $U' \coprod_U \Phi_{F,\alpha}(f) \longrightarrow \Phi_{F,\alpha}(f')$ est dans $\mathrm{Cell}(F)$.

Démonstration. — On garde les notations de la preuve de la proposition 4.2.26. Il s'agit de montrer que $F/f_\nu \to F/f'_\nu$ est injective. Ceci serait le cas si les flèches $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \to \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$ étaient des monomorphismes. Nous montrerons par récurrence transfinie que ces flèches sont des monomorphismes universels. Le résultat est vrai pour $\nu = 0$ puisque la flèche en question n'est autre que la flèche e. Soit $\nu \in \lambda$ et supposons que $\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f')$ est un monomorphisme universel pour tout $\mu \in \nu$.

On traite d'abord le cas $\nu = \mu + 1$. Rappelons que $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f)$ et $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$ sont définis comme étant les push-out respectifs de :

$$\begin{tikzcd} \coprod_{Q(a,i,j)\in F/f_\mu} A \arrow[r, "\cup i"] \arrow[d, "\cup a"'] & \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f) \\ \coprod_{Q(a,i,j)\in F/f_\mu} B & \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \coprod_{Q(a,i,j)\in F/f'_\mu} A \arrow[r, "\cup i"] \arrow[d, "\cup a"'] & \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f') \\ \coprod_{Q(a,i,j)\in F/f'_\mu} B & \end{tikzcd}$$

Il vient que $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \coprod_{\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f)} \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f') \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$ est un push-out de $\coprod_{Q(a,i,j)\in(F/f'_\mu)\setminus(F/f_\mu)} a$. C'est donc un monomorphisme universel puisqu'il appartient à $\mathrm{Cell}(F)$. Pour conclure, on factorise $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$:

$$\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \coprod_{\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f)} \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f') \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$$

et on utilise que la flèche de gauche est un push-out du monomorphisme universel $\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\mu}(f')$.

Supposons maintenant que ν est un ordinal limite. On dispose d'un morphisme de ν-complexes F-cellulaires : $(\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f), E_\mu(f), i_{f,\mu}, j_{f,\mu})_{\mu\in\nu} \longrightarrow (\tilde{\Phi}_{F,\mu}(f'), E_\mu(f'), i_{f',\mu}, j_{f',\mu})_{\mu\in\nu}$ qui est une inclusion de cellules par l'hypothèse de récurrence. Il vient par la seconde partie du lemme 4.2.29 que le morphisme $U' \coprod_U \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \longrightarrow \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f')$ est dans $\mathrm{Cell}(F)$. C'est donc un monomorphisme universel. D'autre part, $\tilde{\Phi}_{F,\nu}(f) \longrightarrow U' \coprod_U \tilde{\Phi}_{F,\nu}(f)$ est un push-out de e. La proposition est démontrée. □

Définition 4.2.31. — *On suppose que $\mathcal{C}$ admet les petites colimites et que les flèches de* $\mathrm{Cell}(F)$ *sont des monomorphismes. Soit* $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}$ *un λ-complexe F-cellulaire.*

On note $\mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda})$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{CpCell}_{F,\lambda}(\mathcal{C})/(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}$ *dont les objets sont les inclusions de complexes* $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu\in\lambda} \longrightarrow (U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}$ *avec* $U'_0 \longrightarrow U_0$ *un monomorphisme universel. Les objets de* $\mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda})$ *seront appelés les sous-complexes de* $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}$.

Lemme 4.2.32. — *On garde les hypothèses de la définition 4.2.31. Soit* $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu\in\lambda} \longrightarrow (U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}$ *un sous-complexe de* $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}$. *Alors, pour tout $\nu \in \lambda$, la flèche* $U'_\nu \longrightarrow U_\nu$ *est un monomorphisme universel. Il en est de même de* $\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} U'_\nu \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} U_\nu$.

En particulier. la catégorie $\mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda})$ *est directe et la composition transfinie des λ-suites sous-jacentes induit un foncteur :*

$$Cp : \mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}) \longrightarrow \mathbf{Sub}(U_0 \to \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda}(U_\nu)) \tag{62}$$

Démonstration. — Soit $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu\in\lambda} \longrightarrow (U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}$ une inclusion de cellules. Par le lemme 4.2.29, on voit que pour tout $\nu + 1 \in \lambda$ la flèche $U'_{\nu+1} \coprod_{U'_\nu} U_\nu \longrightarrow U_{\nu+1}$ est dans $\mathrm{Cell}(F)$. C'est donc un monomorphisme universel.

On peut donc raisonner comme dans la preuve de la proposition 4.2.30 pour prouver que les flèches $U'_\nu \longrightarrow U_\nu$ et $\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} U'_\nu \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} U_\nu$ sont des monomorphismes universels. □

Nous allons construire un adjoint à droite au foncteur (62). En plus des hypothèses de 4.2.31, nous supposerons pour simplifier que tous les monomorphismes de $\mathcal{C}$ sont universels.

Soit $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}$ un λ-complexe F-cellulaire. On note $u : U_0 = U \longrightarrow V = \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} U_\nu$ sa composition. On se donne une sous-flèche $u' : U' \longrightarrow V'$ de u.

On définit un λ-complexe F-cellulaire $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu\in\lambda}$ par récurrence transfinie sur $\nu \in \lambda$. On pose $U'_0 = U'$. Soit $E'_0 \subset E_0$ le sous-ensemble des $e \in E_0$ tels que la flèche $i_0(e) : A_e \longrightarrow U_0$ se factorise par U'_0 et la composée $B_e \longrightarrow U_1 \longrightarrow V$ se factorise par V'. On définit $i'_0(e) : A_e \longrightarrow U'_0$ comme étant l'unique flèche qui factorise $i_0(e)$.

Soit $0 \neq \nu \in \lambda$ et supposons que les données U'_μ, E'_μ et i'_μ sont définies pour $\mu \in \nu$. La flèche j'_μ est supposée définie dès que $\mu + 1 \in \nu$. On supposera aussi que $(U'_\mu, E'_\mu, i'_\mu, j'_\mu)_{\mu\in\nu} \longrightarrow (U_\mu, E_\mu, i_\mu, j_\mu)_{\mu\in\nu}$ est une inclusion de cellules.

Si ν est un ordinal limite, on posera $U'_\nu = \mathsf{Colim}_{\mu\in\nu} U'_\mu$. On sait par le lemme 4.2.32 que U'_ν est un sous-objet de U_ν. On prend pour E'_ν l'ensemble des $e \in E_\nu$ tels que $A_e \longrightarrow U_\nu$ se factorise par U'_ν et la composée $B_e \longrightarrow U_{\nu+1} \longrightarrow V$ par V'. On prendra $i'_\nu(e)$ l'unique flèche factorisant $i_\nu(e)$.

Si $\nu = \mu + 1$, on définit U'_ν et j'_μ par la condition que le carré :

$$\begin{tikzcd} \coprod_{e \in E'_\mu} A_e \arrow[r, "\cup i'_\mu(e)"] \arrow[d] & U'_\mu \arrow[d, dotted] \\ \coprod_{e \in E'_\mu} B_e \arrow[r, dotted, "\cup j'_\mu(e)"] & U'_\nu \end{tikzcd}$$

est un push-out. On vérifie facilement que U'_ν est un sous-objet de V, majoré par U_1 et V'. On définit alors l'ensemble E'_ν et les flèches $i'_\nu(e)$ de la même manière que dans le cas où ν était limite.

Proposition 4.2.33. — *La construction ci-dessus, définit un foncteur :*

$$M : \mathbf{Sub}(u) \longrightarrow \mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$$

qui est naturellement l'adjoint à droite du foncteur (62). *Si de plus, les sources et buts des flèches de F sont α-accessibles, le foncteur M est α-accessible.*

Démonstration. — Il est clair par construction que le λ-complexe F-cellulaire $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda}$ majore tous les objets de $\mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$ dont la composée est majorée par u'. D'où la première assertion. La seconde découle immédiatement de la construction. □

Définition 4.2.34. — *On garde les hypothèses et notations ci-dessus. Une sous-flèche $u' : U' \longrightarrow V'$ de u est dite cellulaire si le morphisme de counité $Cp \circ M(u) \longrightarrow u$ est inversible. Ceci revient à dire que :*

$$\mathsf{Colim}_{\nu \in \lambda} U'_\nu \longrightarrow U'$$

est un isomorphisme. On note $\mathbf{SubCell}(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$ *la sous-catégorie pleine des sous-flèches cellulaires de u.*

Lemme 4.2.35. — *La sous-catégorie* $\mathbf{SubCell}(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$ *est exactement l'image pleine*[5] *du foncteur Cp :* $\mathbf{SubCp}((U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}) \longrightarrow \mathbf{Sub}(u)$.

Démonstration. — Soit $(U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda}$ un sous-complexe de $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda}$. La flèche évidente :

$$Cp \circ M \circ Cp((U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda}) \longrightarrow Cp((U'_\nu, E'_\nu, i'_\nu, j'_\nu)_{\nu \in \lambda})$$

admet une rétraction. Mais il s'agit d'un morphisme dans la catégorie directe $\mathbf{Sub}(u)$. C'est donc un isomorphisme. Ceci montre que l'image du foncteur Cp est contenue dans $\mathbf{SubCell}(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu \in \lambda})$. L'inclusion inverse est également facile et sera laissée en exercice. □

---

[5] On appelle image pleine, d'un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}$ dont les objets sont les $F(A)$ avec $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$.

On continue avec un critère pour l'existence des colimites dans la catégorie $\mathbf{SubCell}(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda})$.

Proposition 4.2.36. — *On suppose que $\mathcal{C}$ admet les petites colimites, que les monomorphismes de $\mathcal{C}$ sont universels et que les éléments de F sont des monomorphismes.*

Soient $\mathcal{K}$ une petite catégorie et $u'(-) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{SubCell}(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda})$ un foncteur qui à $k \in \mathsf{Ob}(\mathcal{K})$ associe une sous-flèche cellulaire $u'(k) : U'(k) \longrightarrow V'(k)$. On note $u' : U' \longrightarrow V'$ la colimite $\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} u'(-)$ dans la catégorie $\underline{\mathsf{HOM}}(\underline{1}, \mathcal{C})/u$. Si la flèche u' est une sous-flèche de u, alors elle est automatiquement cellulaire.

Démonstration. — On note $(U'_\nu(k), E'_\nu(k), j'_{k,\nu}, i'_{\nu,k})$ le λ-complexe cellulaire $M(u'(k))$ pour $k \in \mathsf{Ob}(\mathcal{K})$. La colimite $\mathsf{Colim}_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} u'(k)$ est donc la composée transfinie de la λ-suite :

$$U'_0 \longrightarrow U'_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow U'_\nu \longrightarrow U'_{\nu+1} \longrightarrow \dots$$

avec $U'_\nu = \mathsf{Colim}_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} U'_\nu(k)$ et $U'_{\nu+1}$ le push-out du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\left(\coprod_{e\in\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} E'_\nu(-)} A_e\right) \arrow[r] \arrow[d] & U'_\nu \\
\left(\coprod_{e\in\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} E'_\nu(-)} B_e\right) &
\end{tikzcd}$$

Les flèches $U'_\nu \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\mu\in\lambda} U'_\mu = \mathsf{Colim}_{k\in\mathsf{Ob}(\mathcal{K})} V'(k)$ sont dans $\mathrm{Cell}(F)$. Ce sont donc des monomorphismes. Comme $\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} u'(-)$ est supposée une sous-flèche de u, on voit que pour tout $\nu \in \lambda$, la flèche $U'_\nu \longrightarrow U_\nu$ est un monomorphisme. En considérant le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} E'_\nu(-) \arrow[r, "i'_\nu"] \arrow[d] & \coprod_{A\to B\in F} \hom_{\mathcal{C}}(A, U'_\nu) \arrow[d, hook] \\
E_\nu \arrow[r] & \coprod_{A\to B\in F} \hom_{\mathcal{C}}(A, U_\nu)
\end{tikzcd}$$

on voit que la flèche i'_ν se factorise par l'image E''_ν de l'application $\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} E'_\nu(-) \longrightarrow E_\nu$. On pose alors $U''_{\nu+1}$ le push-out :

$$\begin{tikzcd}
\left(\coprod_{e\in E''_\nu} A_e\right) \arrow[r] \arrow[d] & U'_\nu \\
\left(\coprod_{e\in E''_\nu} B_e\right) &
\end{tikzcd}$$

On dispose ainsi d'un morphisme évident $U'_{\nu+1} \longrightarrow U''_{\nu+1}$ qui admet une section puisque $\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} E'_\nu(-) \to E''_\nu$ est surjective. Remarquons par ailleurs que $U'_{\nu+1} \longrightarrow U''_{\nu+1}$ factorise le monomorphisme $U'_\nu \longrightarrow U_\nu$. Il vient que $U'_{\nu+1} \longrightarrow U''_{\nu+1}$ est inversible, puisque c'est un monomorphisme admettant une section.

On définit ainsi un sous-complexe $(U'_\nu, E''_\nu, i''_\nu, j''_\nu)$ de $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)$ en prenant pour $e \in E''_\nu$ les carrés qui bordent les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} A_e \arrow[r] \arrow[d] & U'_\nu \arrow[d] \arrow[dr] & \\ B_e \arrow[r] & U''_{\nu+1} & U'_{\nu+1} \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

Il est clair que $(U'_\nu, E''_\nu, i''_\nu, j''_\nu)$ est un sous-complexe de $(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)$ dont la composition est u'. Le résultat recherché découle maintenant du lemme 4.2.35. □

Corollaire 4.2.37. — *On garde les hypothèses de la proposition 4.2.36. On suppose en plus que les colimites filtrantes de $\mathcal{C}$ préservent les monomorphismes. Alors, la catégorie* $\mathbf{SubCell}(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda})$ *admet les colimites filtrantes et le foncteur de composition y commutent.*

Corollaire 4.2.38. — *On suppose que $\mathcal{C}$ est α-présentable au sens de la définition 4.2.16. On suppose également que les buts des flèches de F sont α-accessibles pour un même cardinal α. Alors, l'inclusion :*

$$\mathbf{SubCell}_\alpha(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda}) \subset \mathbf{Sub}_\alpha(u)$$

est cofinale (avec $\mathbf{SubCell}_\alpha(u|(U_\nu, E_\nu, i_\nu, j_\nu)_{\nu\in\lambda})$ *la sous-catégorie des sous-flèches cellulaires de buts α-accessibles).*

Démonstration. — Soit en effet u_0 une sous flèche de $u : U \longrightarrow V$ de but α-accessible. On va la majorer par une sous-flèche cellulaire de but encore α-accessible.

Pour cela, considérons l'inclusion $inc : \mathbf{Sub}_\alpha(u) \longrightarrow \mathbf{Sub}(u)$. La colimite de inc est égale à u et la catégorie $\mathbf{Sub}_\alpha(u)$ est α-filtrante.

Par la proposition 4.2.33 le foncteur M est α-accessible. Il en est donc de même de l'endofoncteur $Cp \circ M$ de $\mathbf{Sub}(u)$. On a donc :

$$u = \mathsf{Colim}_{u' \in \mathbf{Sub}_\alpha(u)} Cp(M(u'))$$

Comme le but de u_0 est α-accessible, il existe donc une sous-flèche $u' \in \mathbf{Sub}_\alpha(u)$ tel que $Cp(M(u'))$ majore u_0. Pour terminer, il reste à voir que $Cp(M(u'))$ est de but α-accessible. Ceci est clair puisque $Cp(M(u'))$ est majorée par la sous-flèche u'. □

4.2.3. Catégories de modèles présentables par cofibrations. — Dans ce paragraphe, on se donne une catégorie de modèles $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$. On fait la définition suivante :

Définition 4.2.39. — *On dit que $\mathfrak{M}$ est* α-présentable par cofibrations *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$\mathfrak{M}$ est α-présentable, en tant que catégorie abstraite, au sens de la définition 4.2.16.*
2. *Les cofibrations de $\mathfrak{M}$ sont des monomorphismes.*
3. *Notons $\mathbf{Cof}_\alpha$ la classe des cofibrations de buts α-accessibles. Alors $\mathbf{Fib} = \mathrm{RLP}(\mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W})$ et $\mathbf{Fib} \cap \mathbf{W} = \mathrm{RLP}(\mathbf{Cof}_\alpha)$.*

Le cardinal α est appelé la taille essentielle de $\mathfrak{M}$.

Remarque 4.2.40. — Une catégorie de modèles présentable par cofibrations est cellulaire au sens de [**Hir03**] dès que les monomorphismes de $\mathfrak{M}$ sont effectifs. Ainsi, le théorème 4.2.71 est essentiellement un cas particulier du théorème de localisation de Hirschhorn [**Hir03**].

Proposition 4.2.41. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles α-présentable par cofibrations. Il existe deux factorisations fonctorielles d'une flèche $u : U \longrightarrow V$ de $\mathfrak{M}$:*

$$U \xrightarrow{c(u)} \Phi_{cf_0}(u) \xrightarrow{f_0(u)} V \qquad \text{et} \qquad U \xrightarrow{c_0(u)} \Phi_{c_0 f}(u) \xrightarrow{f(u)} V$$

avec $\Phi_{cf_0}(-)$ et $\Phi_{c_0 f}(-)$ des foncteurs α-accessibles et tels que :

- *$c(u)$ est une cofibration et $f_0(u)$ une fibration triviale,*
- *$c_0(u)$ est une cofibration triviale et $f(u)$ une fibration.*

Notons γ le cardinal d'une petite catégorie équivalente à la sous-catégorie des objets α-accessibles de $\mathfrak{M}$. Soit $\beta = 2^\nu$ un cardinal infini tel que $\nu \geq \alpha$ et $2^\nu \geq \gamma$. Alors les objets $\Phi_{cf_0}(u)$ et $\Phi_{c_0 f}(u)$ sont β-accessibles dès que U et V sont β-accessibles.

Démonstration. — On choisit une petite sous-catégorie pleine $\mathcal{C} \subset \mathfrak{M}$ équivalente à la sous-catégorie des objets α-accessibles de $\mathfrak{M}$. On supposera que le cardinal de $\mathcal{C}$ est majoré par γ. L'existence des factorisations découle alors de l'argument du petit objet (voir la proposition 4.2.26) appliqué à l'ensemble des cofibrations et à l'ensemble des cofibrations triviales qui sont des flèches de $\mathcal{C}$.

La dernière assertion découle de la quatrième propriété de 4.2.26 et de l'estimation du cardinal de $\hom_{\mathfrak{M}}(A, X)$, établie dans la proposition 4.2.14, avec A et X des objets α et β-accessibles de $\mathfrak{M}$. □

Par le corollaire 4.2.28, la flèche $c(u)$ (resp. $c_0(u)$) est munie d'une structure canonique de λ-complexes $\mathbf{Cof}_\alpha$-cellulaires (resp. $\mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W}$-cellulaires). On notera $(\tilde{\Phi}_{cf_0,\nu}(u), E_\nu(u), i_{u,\nu}, j_{u,\nu})_{\nu\in\lambda}$ (resp. $(\tilde{\Phi}_{c_0 f,\nu}(u), E_\nu(u), i_{u,\nu}, j_{u,\nu})_{\nu\in\lambda}$) cette structure.

Définition 4.2.42. — *Soit* $u : U \longrightarrow V$ *une flèche d'une catégorie de modèles* $\mathfrak{M}$ *supposée* α*-présentable par cofibrations. On pose :*

$$\mathbf{SubCell}(c(u)) = \mathbf{SubCell}(c(u)|(\tilde{\Phi}_{cf_0,\nu}(u), E_\nu(u), i_{u,\nu}, j_{u,\nu})_{\nu\in\lambda})$$

$$(\textit{resp.}\ \ \mathbf{SubCell}(c_0(u)) = \mathbf{SubCell}(c_0(u)|(\tilde{\Phi}_{c_0 f,\nu}(u), E_\nu(u), i_{u,\nu}, j_{u,\nu})_{\nu\in\lambda}))$$

la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sub}(c(u))$ *(resp.* $\mathbf{Sub}(c_0(u))$*) formée des sous-flèches cellulaires.*

On notera aussi $\mathbf{SubCell}_\beta(c(u)) \subset \mathbf{SubCell}(c(u))$ *(resp.* $\mathbf{SubCell}_\beta(c_0(u)) \subset \mathbf{SubCell}(c_0(u))$*) les sous-catégories pleines formées des flèches de buts* β*-accessibles.*

Étant donnée une sous-flèche cellulaire $A \longrightarrow B$ de $c(u) : U \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$, on sait par le lemme 4.2.29 que $U \coprod_A B \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ est dans $\mathrm{Cell}(\mathbf{Cof}) = \mathbf{Cof}$. Il sera pratique dans la suite d'isoler cette propriété :

Définition 4.2.43. — *Soit* $c : A \longrightarrow B$ *une cofibration de* $\mathfrak{M}$.

1- *Une* sous-cofibration *de* c *est une sous-flèche* c_0 *de* c *:*

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "c_0"] \arrow[d, "a_0"'] & B_0 \arrow[d, "b_0"] \\ A \arrow[r, "c"] & B \end{tikzcd}$$

telle que $A_0 \longrightarrow B_0$ *et* $A \coprod_{A_0} B_0 \longrightarrow B$ *sont des cofibrations.*

2- *On note* $\mathbf{SubCof}(c) \subset \mathbf{Sub}(c)$ *la sous-catégorie (*a priori *non pleine) dont les objets sont les sous-cofibrations de* c *et les flèches sont les diagrammes commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "c_0"] \arrow[d] & B_0 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r, "c_1"] \arrow[d] & B_1 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "c"] & B \end{tikzcd}$$

avec c_0 *une sous-cofibration de* c_1.

3- *On note* $\mathbf{SubCof}_\beta(c) \subset \mathbf{SubCof}(c)$ *la sous-catégorie pleine formée des sous-cofibrations de sources et buts* β*-accessibles.*

On vérifie immédiatement que les inclusions $\mathbf{SubCell}(c(u)) \subset \mathbf{Sub}(c(u))$ (resp. $\mathbf{SubCell}(c_0(u)) \subset \mathbf{Sub}(c_0(u))$) se factorisent par des inclusions $\mathbf{SubCell}(c(u)) \subset \mathbf{SubCof}(c(u))$ (resp. $\mathbf{SubCell}(c_0(u)) \subset \mathbf{SubCof}(c_0(u))$).

Proposition 4.2.44. — *Soient* $\mathfrak{M}$ *une catégorie de modèles* α*-présentable par cofibrations et* β *un cardinal comme dans la proposition 4.2.41. Soit* $u : A \longrightarrow B$ *une*

flèche de $\mathfrak{M}$. Alors la cofibration $c(u) : A \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ (resp. la cofibration triviale $c_0(u) : A \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u)$) est la colimite β-filtrante du foncteur :

$$\mathbf{Sub}_\beta(u) \xrightarrow{\Phi_{cf_0}} \mathbf{SubCell}_\beta(c(u)) \subset \underline{\mathsf{HOM}}(\mathbf{1}, \mathfrak{M})/c(u)$$

$$\textit{(resp. } \mathbf{Sub}_\beta(u) \xrightarrow{\Phi_{c_0 f}} \mathbf{SubCell}_\beta(c_0(u)) \subset \underline{\mathsf{HOM}}(\mathbf{1}, \mathfrak{M})/c_0(u) \textit{)}$$

De plus, dans le cas respectif, le foncteur envoie les sous-flèches de u sur des cofibrations triviales.

Démonstration. — Ceci découle immédiatement du fait que les foncteurs Φ_{cf_0} et $\Phi_{c_0 f}$ sont α-accessibles et donc β-accessibles. □

Ainsi, dans une catégorie de modèles α-présentable par cofibrations, les cofibrations (resp. les cofibrations triviales) de la forme $c(u)$ (resp. $c_0(u)$) sont colimites β-filtrantes d'un diagramme de sous-cofibrations (resp. sous-cofibrations triviales) de buts β-accessibles. On voudrait généraliser cette propriété à toutes les cofibrations (resp. les cofibrations triviales). Remarquons pour cela que si u est une cofibration (resp. cofibration triviale) alors u est rétracte de $c(u)$ (resp. $c_0(u)$). On introduit la définition suivante :

Définition 4.2.45. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ une cofibration (resp. une cofibration triviale) dans une catégorie de modèles α-présentable par cofibrations. On fixe un relèvement $r : B \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ dans le carré :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "c(u)"] \arrow[d, "u"'] & \Phi_{cf_0}(u) \arrow[d, "f_0(u)"] \\ B \arrow[r, equal] \arrow[ur, dotted, "r"] & B \end{tikzcd}$$

(resp. $r : B \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u)$ dans le carré :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "c_0(u)"] \arrow[d, "u"'] & \Phi_{c_0 f}(u) \arrow[d, "f(u)"] \\ B \arrow[r, equal] \arrow[ur, dotted, "r"] & B) \end{tikzcd}$$

de telle sorte que u devient un rétract de $c(u)$ (resp. $c_0(u)$).

*Soit $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ une sous-flèche de u. On dit que u_0 est r-*spéciale *lorsque le sous-objet $B_0 \in \mathbf{Sub}(B)$ est isomorphe au sous-objet $\Phi_{cf_0}(u_0) \times_{\Phi_{cf_0}(u),r} B \in \mathbf{Sub}(B)$ (resp. $\Phi_{c_0 f}(u_0) \times_{\Phi_{c_0 f}(u),r} B \in \mathbf{Sub}(B)$). On notera $\mathbf{SpSub}(u|r) \subset \mathbf{Sub}(u)$ et $\mathbf{SpSub}_\beta(u|r) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$ les sous-catégories (pleines) formées des sous-flèches r-spéciales de u.*

On résume quelques propriétés des sous-flèches r-spéciales dans la proposition suivante :

Proposition 4.2.46. — *On garde les hypothèses et les notations de la définition 4.2.45. Soit $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ une sous-flèche r-spéciale de u. On a les propriétés suivantes :*
- *u_0 est une sous-cofibration (resp. une sous-cofibration triviale) de u,*
- *u_0 est un rétract de $c(u_0)$ (resp. $c_0(u_0)$). Plus précisément, la restriction de r à B_0 se factorise par $\Phi_{cf_0}(u_0)$ (resp. $\Phi_{c_0 f}(u_0)$).*

Démonstration. — On traite uniquement le premier cas. Montrons que la composée $B_0 \longrightarrow B \xrightarrow{r} \Phi_{cf_0}(u)$ se factorise par le sous-objet $\Phi_{cf_0}(u_0)$. Comme u_0 est r-spéciale, B_0 est isomorphe au sous-objet $\Phi_{cf_0}(u_0) \times_{\Phi_{cf_0}(u).r} B \in \mathbf{Sub}(B)$. La propriété recherchée découle alors de la commutation du carré :

$$\begin{tikzcd}
\Phi_{cf_0}(u_0) \times_{\Phi_{cf_0}(u).r} B \arrow[r] \arrow[d, "pr_1"'] & B \arrow[d, "r"] \\
\Phi_{cf_0}(u_0) \arrow[r] & \Phi_{cf_0}(u)
\end{tikzcd}$$

On note $r_0 : B_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$ la restriction de r à B_0. C'est une rétraction à $f_0(u_0)$. Ceci découle immédiatement du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
B_0 \arrow[r, "r_0"] \arrow[d] & \Phi_{cf_0}(u_0) \arrow[r, "f_0(u_0)"] \arrow[d] & B_0 \arrow[d] \\
B \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, equal] & \Phi_{cf_0}(u) \arrow[r, "f_0(u)"] & B
\end{tikzcd}$$

et du fait que B_0 est un sous-objet de B. Il vient que u_0 est une cofibration par l'axiome **(MC3)**.

Il reste à montrer que u_0 est une sous-cofibration de u. Pour cela, on peut remarquer que $A \coprod_{A_0} B_0 \longrightarrow B$ est rétracte de $A \coprod_{A_0} \Phi_{cf_0}(u_0) \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$. Cette dernière est une cofibration puisque $c(u_0)$ est une sous-cofibration de $c(u)$ par la proposition 4.2.30. □

Corollaire 4.2.47. — *On garde les hypothèses et les notations de la définition 4.2.45. Soient u_0 et u_1 deux sous-flèches r-spéciales d'une cofibration (resp. d'une cofibration triviale) u. Supposons que u_0 est majorée par u_1 en tant que sous-flèche. Alors, u_0 est majorée par u_1 en tant que sous-cofibration. En particulier, la sous-catégorie pleine* $\mathbf{SpSub}(u|r) \subset \mathbf{Sub}(u)$ *est contenue dans* $\mathbf{SubCof}(u)$.

Démonstration. — En effet, si u_0 est une sous-flèche de u_1, alors $c(u_0)$ (resp. $c_0(u_0)$) est une sous-cofibration de $c(u_1)$ (resp. $c_0(u_1)$). Le résultat découle alors du fait que le morphisme de flèches $u_0 \to u_1$ est un rétract de $c(u_0) \to c(u_1)$ (resp. $c_0(u_0) \to c_0(u_1)$). □

Dans la suite, on appellera parfois abusivement *sous-cofibration r-spéciale* une sous-flèche r-spéciale. Notons également le lemme suivant qui découle immédiatement de la définition 4.2.45 et du fait que le foncteur Φ_{cf_0} (resp. Φ_{c_0f}) est α-filtrant.

Lemme 4.2.48. — *Une colimite α-filtrante de sous-flèches r-spéciales est encore une sous-flèche r-spéciale.*

Le résultat suivant, montre qu'il y a suffisamment de sous-flèches r-spéciales de buts β-accessibles :

Proposition 4.2.49. — *On suppose que $\mathfrak{M}$ est α-présentable par cofibrations. Soit β un cardinal comme dans la proposition 4.2.41 et $u : A \longrightarrow B$ une cofibration (resp. une cofibration triviale). On fixe un relèvement $r : B \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ (resp. $r : B \longrightarrow \Phi_{c_0f}(u)$) comme dans la définition 4.2.45. Alors, l'inclusion $\mathbf{SpSub}_\beta(u|r) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$ est cofinale.*

Démonstration. — On traite uniquement le premier cas. Remarquons que $\mathbf{SpSub}_\beta(u|r)$ est l'égalisateur d'une double flèche :

$$\mathbf{Sub}_\beta(u) \underset{\mathrm{id}}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathbf{Sub}_\beta(u)$$

avec F le foncteur qui à une sous-flèche $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ de u associe la sous-flèche $A_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0) \times_{\Phi_{cf_0}(u),r} B$.

Le foncteur F est cofinal. En effet, les limites finies et le foncteur Φ_{cf_0} commutent aux colimites α-filtrantes. Il vient que la flèche canonique :

$$\mathsf{Colim}_{u_0 \in \mathbf{Sub}_\beta(u)} F(u_0) \longrightarrow u$$

est inversible. Ainsi, si u' est une sous-flèche de u de but β-accessible, la composée :

$$u' \longrightarrow u \simeq \mathsf{Colim}_{u_0 \in \mathbf{Sub}_\beta(u)} F(u_0)$$

se factorise par l'une des $F(u_0)$. Cette dernière majore donc u'.

D'autre part, la catégorie $\mathbf{Sub}_\beta(u)$ admet les colimites filtrantes indexées par des catégories de cardinal inférieur ou égal à β. Le foncteur F commute aux colimites α-filtrantes indexées par des catégories de cardinal inférieur ou égal à β. Le lemme 4.2.4 s'applique pour montrer que l'inclusion $\mathbf{SpSub}_\beta(u|r) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$ est cofinale. □

On déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.50. — *On suppose que $\mathfrak{M}$ est α-présentable par cofibrations. Soient β un cardinal comme dans la proposition 4.2.41 et $u : A \longrightarrow B$ une cofibration (resp. une cofibration triviale). On fixe un relèvement $r : B \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ (resp. $r : B \longrightarrow \Phi_{c_0f}(u)$) comme dans la définition 4.2.45. La cofibration u est la colimite β-filtrante de ses sous-cofibrations (resp. sous-cofibrations triviales) r-spéciales de buts β-accessibles.*

Soit $u : A \longrightarrow B$ une cofibration. Les catégories $\mathbf{SubCof}(u)$ et $\mathbf{SpSub}(u|r)$ ne sont pas en général stables par colimites suivant les ordinaux. Ceci rend difficile l'application du lemme de Zorn qui est utile pour la construction des relèvements (voir par exemple la preuve du théorème de localisation 4.2.71). Pour cela, nous allons élargir la catégorie $\mathbf{SpSub}(u|r)$ et plus précisément $\mathrm{id}_A \backslash \mathbf{SpSub}(u|r)$:

Définition 4.2.51. — *On suppose que $\mathfrak{M}$ est α-présentable par cofibrations. Soit $u : A \longrightarrow B$ une cofibration (resp. une cofibration triviale) et fixons une rétraction $r : B \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ (resp. $r : B \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u)$) comme dans la définition 4.2.45.*

*Une sous-flèche de la forme $v : A \longrightarrow T$ de $c(u) : A \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ (resp. $c_0(u) : A \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u)$) est dite r-*normale *lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *v est une sous-flèche cellulaire.*
2. *La composée : $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u) \xrightarrow{f_0(u)} B$ (resp. $T \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u) \xrightarrow{f(u)} B$) se factorise par le sous-objet $s(T) = T \times_{\Phi_{cf_0}(u),r} B$ (resp. $s(T) = T \times_{\Phi_{c_0 f}(u),r} B$) de B.*

Dans la suite, nous considérons uniquement le premier cas afin d'alléger la présentation. Le lecteur pourra facilement adapter les énoncés et les démonstrations au cas où u est supposée une cofibration triviale et r est une rétraction à $f(u)$. On peut résumer la situation de la définition 4.2.51 par un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s(v)"] \arrow[d, equal] & s(T) \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "r"] \arrow[dd, bend left=60, equal] \\
A \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & T \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \Phi_{cf_0}(u) \arrow[d, "f_0(u)"] \\
A \arrow[r, "s(v)"] & s(T) \arrow[r] & B
\end{tikzcd} \tag{63}$$

avec $s(T) = T \times_{\Phi_{cf_0}(u),r} B$. Comme v est cellulaire, on déduit aussitôt que $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ est une cofibration. Le diagramme (63) montre également que $s(T)$ est rétract de T. On déduit alors que $s(v)$ et $s(T) \longrightarrow B$ sont des cofibrations puisqu'elles sont rétractes de v et $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ respectivement. Ainsi toutes les flèches horizontales du diagramme (63) sont des cofibrations. On parlera dorénavant de *sous-cofibrations r-normales de $c(u)$*. Voici un exemple de sous-cofibrations r-normales :

Exemple 4.2.52. — Si $u_0 : A \longrightarrow B_0$ est une sous-flèche r-spéciale de u, alors $c(u_0)$ est une sous-cofibration r-normale de $c(u)$.

Définition 4.2.53. — *On note $\mathbf{NormSub}(c(u)|r) \subset \mathbf{SubCell}(c(u))$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les sous-cofibrations r-normales.*

L'association $v \rightsquigarrow s(v)$ définit un foncteur $s : \mathbf{NormSub}(c(u)|r) \longrightarrow \mathbf{SubCof}(u)$. En effet, étant donnée une flèche $(v_0 : A \to T_0) \longrightarrow (v_1 : A \to T_1)$ dans $\mathbf{NormSub}(c(u)|r)$, la flèche $s(T_0) \longrightarrow s(T_1)$ est rétracte $T_0 \longrightarrow T_1$. Cette dernière est dans $\mathrm{Cell}(\mathbf{Cof}) = \mathbf{Cof}$ par le lemme 4.2.29. Ceci montre que $s(v_0)$ est bien une sous-cofibration de $s(v_1)$.

Proposition 4.2.54. — *On suppose toujours que $\mathfrak{M}$ est α-présentable par cofibrations. Soit $\mathcal{K}$ une petite catégorie filtrante et supposons donné un foncteur $v(-) : \mathcal{K} \longrightarrow \underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathfrak{M})/c(u)$ tel que pour $k \in \mathsf{Ob}(\mathcal{K})$, $v(k)$ est une sous-cofibration r-normale de $c(u)$. Alors $\mathsf{Colim}_{\mathcal{K}} v(-)$ est encore une sous-cofibration r-normale de $c(u)$.*

Démonstration. — Ceci découle immédiatement du corollaire 4.2.37. □

Proposition 4.2.55. — *On reprend les notations et les hypothèses de la définition 4.2.51. Soit $v : A \longrightarrow T$ une sous-cofibration r-normale de $c(u)$. On suppose donnés une sous-flèche r-spéciale u_0 dans $\mathbf{SpSub}(u|r)$ et un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[d] & T_0 \arrow[r, "j_0"] \arrow[d] & \Phi_{cf_0}(u_0) \arrow[d] \\ A \arrow[r, "v"] & T \arrow[r, "j"] & \Phi_{cf_0}(u) \end{tikzcd}$$

avec v_0 une sous-cofibration r-normale de $c(u_0)$. Si en plus, j_0 est une sous-cofibration de j, alors :

$$v' : A \longrightarrow T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0)$$

est une sous-cofibration r-normale qui majore v.

Démonstration. — Notons $T' = T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0)$. Il s'agit de montrer les points suivants :

- v' est cellulaire.
- La composée $T' \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u) \xrightarrow{f_0(u)} B$ se factorise par le sous-objet $s(T') = T' \times_{\Phi_{cf_0}(u),r} B$.

Le premier point découle de la proposition 4.2.36 et du fait que T' est un sous-objet de $\Phi_{cf_0}(u)$. Étant donné que $T' = T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0)$, il suffit de voir que les flèches :

$$T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u) \longrightarrow B \qquad \text{et} \qquad \Phi_{cf_0}(u_0) \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u) \longrightarrow B$$

se factorisent par $s(T')$. La première composée se factorise par $s(T)$ qui est majoré par $s(T')$. La seconde se factorise par B_0, qui est également majoré par $s(T')$. En effet, $\Phi_{cf_0}(u_0) \times_{\Phi_{cf_0}(u),r} B = B_0$ puisque u_0 est r-spéciale. □

Définition 4.2.56. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ une cofibration dans une catégorie de modèles α-présentable par cofibrations. Supposons donnée une sous-flèche r-normale $v : A \longrightarrow T$ de $c(u)$. Une sous-flèche r-spéciale u_0 de u sera dite* orthogonale *à v lorsque la sous-flèche $A_0 \longrightarrow T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0) = T_0$ est r-normale dans $c(u_0)$ et la flèche $T_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$ est une sous-cofibration de $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$. On note $\mathbf{SpSub}_?^{\perp v}(u|r)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{SpSub}_?(u|r)$ formées des sous-flèches r-spéciales orthogonale à v (avec $? \in \{\varnothing, \beta\}$).*

Ainsi, si la sous-flèche u_0 est orthogonale à v on peut former, par la proposition 4.2.55, une nouvelle sous-cofibration r-normale $A \longrightarrow T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0)$. On a le lemme suivant qui montre l'existence de beaucoup de sous-flèches r-spéciales et orthogonales à v.

Lemme 4.2.57. — *On garde les hypothèses de la définition 4.2.56. L'inclusion $\mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(u|r) \subset \mathbf{SpSub}_\beta(u|r)$ est cofinale.*

Démonstration. — Considérons le diagramme suivant dans $\mathcal{O}rd\mathcal{E}ns$:

$$
(64) \qquad \begin{tikzcd}
\mathbf{SubCell}_\beta(A \to T) \arrow[d, "inc"'] & & \mathbf{SpSub}_\beta(T \to \Phi_{cf_0}(u)|r') \arrow[d, "inc"] \\
\mathbf{Sub}_\beta(A \to T) & \mathbf{SpSub}_\beta(A \to B|r) \arrow[l, "F"'] \arrow[r, "G"] & \mathbf{Sub}_\beta(T \to \Phi_{cf_0}(u))
\end{tikzcd}
$$

tels que :

1. $r' : \Phi_{cf_0}(u) \longrightarrow \Phi_{cf_0}(T \to \Phi_{cf_0}(u))$ est un relèvement quelconque,
2. les foncteurs *inc* sont les inclusions évidentes,
3. le foncteur F associe à une sous-flèche $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ de u la sous-flèche $A_0 \longrightarrow T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0)$,
4. le foncteur G associe à une sous-flèche u_0 de u la sous-flèche $T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0) \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$.

Le diagramme (64) vérifie les conditions du lemme 4.2.4. En effet, toutes les catégories de (64) sont β-filtrantes et admettent des colimites suivant les catégories α-filtrantes de cardinal plus petit ou égal à β. Les foncteurs de (64) commutent à ces colimites. Les foncteurs *inc* sont cofinaux par le corollaire 4.2.38 et la proposition 4.2.49. Enfin, en utilisant le corollaire 4.2.50, on voit facilement que F et G sont aussi cofinaux.

Notons $\mathcal{L}$ la limite du diagramme (64). Par le lemme 4.2.4, le foncteur $c : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{Sub}_\beta(u|r)$ est cofinal. Un calcul immédiat montre que $\mathcal{L}$ est la catégorie des sous-flèches r-spéciales $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ tels que :

(i) $A_0 \longrightarrow T_0 = T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0)$ est cellulaire,

(ii) $T_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$ est une sous-flèche r'-spéciale de $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$.

La condition (ii) implique en particulier que $T_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$ est une sous-cofibration de $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$. Comme u_0 est r-spéciale, on dispose d'un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r, "r_0"] \arrow[d] & \Phi_{cf_0}(u_0) \arrow[d] \\ B \arrow[r, "r"] & \Phi_{cf_0}(u) \end{tikzcd}$$

Il vient que $T_0 \times_{\Phi_{cf_0}(u_0),r_0} B_0 = (T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0)) \times_{\Phi_{cf_0}(u_0),r_0} B_0 \simeq (T \times_{\Phi_{cf_0}(u),r} B) \times_B B_0$. Comme la composée $T_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u) \longrightarrow B$ se factorise par les sous-objets $(T \times_{\Phi_{cf_0}(u),r} B)$ et B_0, elle se factorise également par leur intersection, à savoir $(T \times_{\Phi_{cf_0}(u),r} B) \times_B B_0$. Ceci montre que $T_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0) \longrightarrow B_0$ se factorise par $T_0 \times_{\Phi_{cf_0}(u_0),r_0} B_0$. La sous-flèche $A_0 \longrightarrow T_0$ est donc r-normale. Il est maintenant clair que $\mathcal{L}$ est contenu dans $\mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(u|r)$. Le lemme est démontré. □

4.2.4. Localisation des catégories de modèles. — Dans ce paragraphe on démontre le théorème de localisation pour les catégories de modèles présentables par cofibrations. Il s'agit d'un cas particulier, mais amplement suffisant pour nos applications, du théorème de localisation de Hirschhorn [**Hir03**]. Dans la suite $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ désignera une catégorie de modèles. La définition suivante est tirée de [**Hir03**] :

Définition 4.2.58. — *Soit $\mathscr{A}$ une sous-classe de $\mathsf{Fl}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}))$. Une* localisation de Bousfield *(à gauche) de $\mathfrak{M}$ suivant $\mathscr{A}$ est une catégorie de modèles $(\mathsf{L}_{\mathscr{A}}\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathscr{A}}, \mathbf{Cof}_{\mathscr{A}}, \mathbf{Fib}_{\mathscr{A}})$ munie d'une adjonction de Quillen*

$$(U_{\mathscr{A}}, V_{\mathscr{A}}) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathsf{L}_{\mathscr{A}}\mathfrak{M}$$

telle que $\mathsf{L}U_{\mathscr{A}}(f)$ est inversible pour tout $f \in \mathscr{A}$ et vérifiant la propriété universelle suivante. Pour toute catégorie de modèles $\mathfrak{N}$ munie d'une adjonction de Quillen $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ telle que $\mathsf{L}F(f)$ est inversible pour $f \in \mathscr{A}$, il existe une unique adjonction de Quillen $(F_{\mathscr{A}}, G_{\mathscr{A}}) : \mathsf{L}_{\mathscr{A}}\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ rendant commutatif le triangle :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "U_{\mathscr{A}}"'] & \mathfrak{N} \\ \mathsf{L}_{\mathscr{A}}\mathfrak{M} \arrow[ur, "F_{\mathscr{A}}"'] & \end{tikzcd}$$

Remarque 4.2.59. — Soit $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ une adjonction de Quillen. Soient $\mathscr{A} \subset \mathsf{Fl}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}))$ et $\mathscr{B} \subset \mathsf{Fl}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{N}))$ deux classes de flèches. On suppose que $\mathsf{L}F(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}$. Alors, l'adjonction (F, G) induit naturellement une adjonction de Quillen (F, G) : $\mathsf{L}_{\mathscr{A}}\mathfrak{M} \longrightarrow \mathsf{L}_{\mathscr{B}}\mathfrak{N}$ lorsque les localisations de Bousfield existent.

L'objet de ce paragraphe est de donner des conditions sur $\mathfrak{M}$ et $\mathscr{A}$ qui assurent l'existence de la localisation de Bousfield. On commence par deux lemmes simples.

Lemme 4.2.60. — *Soient $a : A \longrightarrow B$ une cofibration entre objets cofibrants de $\mathfrak{M}$ et X un objet fibrant. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme $\pi_0(a, X) : \pi_0(B, X) \longrightarrow \pi_0(A, X)$ est surjectif.*

(ii) *La flèche : $X \longrightarrow *$ admet la propriété de relèvement à droite par rapport à a.*

Démonstration. — Seule l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ demande une preuve. Supposons donné un carré :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & X \arrow[d] \\ B \arrow[r] & * \end{tikzcd} \tag{65}$$

Il existe une flèche $r_0 : B \longrightarrow X$ telle que $r_0 \circ a$ est homotope à f. On se donne un cylindre (C_A, p, i_0, i_1) sur A et on construit, en utilisant l'axiome **(MC5)**, un cylindre (C_B, p, i_0, i_1) sur B qui factorise la flèche :

$$\left(C_A \coprod_{(A \coprod A)} (B \coprod B) \right) \longrightarrow B$$

en une cofibration suivie d'une fibration triviale.

Soit $h : C_A \longrightarrow X$ une homotopie de $r_0 \circ a$ à f relativement au cylindre (C_A, p, i_0, i_1). Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C_A \coprod_{i_0(A)} B \arrow[r, "h \cup r_0"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ C_B \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "k"] & * \end{tikzcd}$$

Étant donné que $C_A \coprod_{i_0(A)} B \longrightarrow C_B$ est une cofibration triviale, un relèvement k existe par **(MC4)**. Il est alors clair que $r = k \circ i_1$ est un relèvement au carré (65). □

Lemme 4.2.61. — *Soient $a : A \longrightarrow B$ une cofibration entre objets cofibrants de $\mathfrak{M}$ et X un objet fibrant. On se donne des cylindres (C_A, p, i_0, i_1) et (C_B, p, i_0, i_1) sur A et B ainsi qu'une flèche :*

$$C_a : C_A \longrightarrow C_B$$

compatible avec les flèches p, i_0 et i_1. Si la flèche $X \longrightarrow *$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux deux flèches :

$$a : A \longrightarrow B \quad \text{et} \quad \left(C_A \coprod_{(A \coprod A)} (B \coprod B) \right) \longrightarrow C_B$$

alors le morphisme $\pi_0(a, X) : \pi_0(B, X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(A, X)$ est inversible.

Démonstration. — La surjectivité est claire étant donné que $X \longrightarrow *$ admet la propriété de relèvement à droite relativement à a. Pour montrer l'injectivité, on considère deux flèches $f, g : B \longrightarrow X$ telle que $f \circ a$ est homotope à $g \circ a$. Fixons une homotopie $h : C_A \longrightarrow X$ et formons la flèche :

$$l = (f \cup g) \cup h : \left(C_A \coprod_{(A \coprod A)} (B \coprod B)\right) \longrightarrow X$$

La propriété de relèvement à droite fournit alors l'homotopie $C_B \longrightarrow X$ recherchée. □

Nous aurons également besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.62. — *Pour $e \in \{1, 2\}$, on se donne une cofibration $a_e : A_e \longrightarrow B_e$ entre objets cofibrants de $\mathfrak{M}$. On choisit des cylindres (C_{A_e}, p, i_0, i_1) et (C_{B_e}, p, i_0, i_1) sur A_e et B_e ainsi qu'une flèche :*

$$C_{a_e} : C_{A_e} \longrightarrow C_{B_e}$$

compatible avec les flèches p, i_0 et i_1. Supposons que a_1 et a_2 deviennent isomorphes dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Alors, il en est de même des flèches :

$$\left(C_{A_1} \coprod_{(A_1 \coprod A_1)} (B_1 \coprod B_1)\right) \longrightarrow C_{B_1} \quad \text{et} \quad \left(C_{A_2} \coprod_{(A_2 \coprod A_2)} (B_2 \coprod B_2)\right) \longrightarrow C_{B_2}$$

Démonstration. — Comme les flèches $C_{B_e} \longrightarrow B_e$ sont des équivalences faibles, il suffit de montrer que les deux flèches suivantes :

$$\left(C_{A_1} \coprod_{(A_1 \coprod A_1)} (B_1 \coprod B_1)\right) \longrightarrow B_1 \quad \text{et} \quad \left(C_{A_2} \coprod_{(A_2 \coprod A_2)} (B_2 \coprod B_2)\right) \longrightarrow B_2$$

ont même classe dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Ainsi, les cylindres C_{B_1} et C_{B_2} ne joueront aucun rôle. On procède en plusieurs étapes. On montre d'abord l'indépendance par rapport aux choix des cylindres sur A.

Étape 1. — Soit $a : A \longrightarrow B$ une cofibration entre objets cofibrants. On se donne deux cylindres (C_A, p, i_0, i_1) et (C'_A, p', i'_0, i'_1) sur A. En choisissant une factorisation de $p \cup p'$:

$$\left(C_A \coprod_{(A \coprod A)} C'_A\right) \longrightarrow C''_A \longrightarrow A$$

en une cofibration suivie d'une fibration triviale, on voit qu'il suffit de considérer le cas où il existe un morphisme de cylindres $C_A \longrightarrow C'_A$ qui est en plus une cofibration. Dans ce cas, la flèche :

$$\left(C_A \coprod_{(A \coprod A)} (B \coprod B)\right) \longrightarrow \left(C'_A \coprod_{(A \coprod A)} (B \coprod B)\right)$$

est une cofibration triviale, puisque c'est un push-out de $C_A \longrightarrow C'_A$.

Étape 2. — On traite maintenant le cas où il existe un carré commutatif dans $\mathfrak{M}$:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "u"'] & B_1 \arrow[d, "v"] \\ A_2 \arrow[r, "a_2"] & B_2 \end{tikzcd}$$

à flèches verticales des équivalences faibles. Ayant la liberté de modifier les cylindres sur A_1 et A_2, on peut supposer qu'il existe une flèche $C_u : C_{A_1} \longrightarrow C_{A_2}$ qui soit compatible avec p, i_0 et i_1. Remarquons que les deux diagrammes :

$$\begin{tikzcd} A_1 \coprod A_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_{A_1} \\ B_1 \coprod B_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_2 \coprod A_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_{A_2} \\ B_2 \coprod B_2 & \end{tikzcd}$$

sont des objets cofibrants de la catégorie de modèles $\Gamma(\mathfrak{M})$ munie de sa structure de Reedy (voir la proposition 4.1.53). De plus les flèches $u \coprod u$, $v \coprod v$ et C_u définissent une équivalence faible entre ces deux objets. Le foncteur $\Gamma(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{M}$, qui à un diagramme de type Γ associe sa colimite, est un foncteur de Quillen à gauche. Il vient qu'il préserve les équivalences faibles entre les objets cofibrants. D'où le résultat dans ce cas.

Étape 3. — On démontre maitenant le cas général. On peux supposer A_e et B_e fibrants (et cofibrants). En effet, par l'axiome de factorisation on peut trouver un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} A'_e \arrow[r, "a'_e"] \arrow[d] & B'_e \arrow[d] \\ A_e \arrow[r] & B_e \end{tikzcd}$$

avec a'_e une cofibration entre objets fibrants et cofibrants et tel que les flèches verticales sont des équivalences faibles.

Choisissons $\gamma : A_1 \longrightarrow A_2$ et $\gamma' : B_1 \longrightarrow B_2$ des isomorphismes dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ réalisant l'isomorphisme de flèches entre a_1 et a_2. Comme les objets A_e et B_e sont fibrants et cofibrants, on peut trouver des relèvements $\bar{\gamma}$ et $\bar{\gamma}'$ dans $\mathfrak{M}$ de γ et γ'. On obtient ainsi un carré de $\mathfrak{M}$:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "\bar{\gamma}"'] & B_1 \arrow[d, "\bar{\gamma}'"] \\ A_2 \arrow[r, "a_2"] & B_2 \end{tikzcd}$$

commutatif à homotopie près. Fixons une homotopie $h : C_{A_1} \longrightarrow B_2$ de $\bar{\gamma}' \circ a_1$ à $a_2 \circ \bar{\gamma}$ relativement à un cylindre (C_{A_1}, p, i_0, i_1).

On munit la catégorie $\underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathfrak{M})$ de sa structure de modèles de Reedy (voir la proposition 4.1.53) associée à l'ensemble ordonné $\underline{\mathbf{1}} = \{0 < 1\}$. Remarquons alors que les deux flèches a_1 et a_2 sont isomorphes en tant qu'objets de $\mathbf{Ho}(\underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathfrak{M}))$ *via* la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "i_1"'] & B_1 \arrow[d, "\bar{\gamma}'"] \\ C_{A_1} \arrow[r, "h"] & B_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_2 \circ \bar{\gamma}"] \arrow[d, "i_2"'] & B_2 \arrow[d, equal] \\ C_{A_1} \arrow[r, "h"] & B_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_2 \circ \bar{\gamma}"] \arrow[d, "\bar{\gamma}"'] & B_2 \arrow[d, equal] \\ A_2 \arrow[r, "a_2"] & B_2 \end{tikzcd}$$

Comme a_1 et a_2 sont des objets fibrants et cofibrants pour la structure de Reedy sur $\underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathfrak{M})$, il existe un carré commutatif dans $\mathfrak{M}$:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, dotted] & B_1 \arrow[d, dotted] \\ A_2 \arrow[r, "a_2"] & B_2 \end{tikzcd}$$

qui relève cet isomorphisme, *i.e.*, les flèches verticales sont des équivalences faibles. On s'est encore une fois ramené à la seconde étape de la preuve. □

Définition 4.2.63. *Pour toute cofibration $a : A \longrightarrow B$ on choisit une cofibration $\nabla(a)$:*

$$\left[\mathrm{Cyl}_a(A) \coprod_{(A \coprod A)} (B \coprod B)\right] \longrightarrow \mathrm{Cyl}_a(B)$$

avec $\mathrm{Cyl}_a(A)$ et $\mathrm{Cyl}_a(B)$ des cylindres sur A et B. Pour une classe F de cofibrations, on pose $\nabla(F) = \{\nabla(a);\ a \in F\}$. On définit par récurrence les classes $\nabla_n(F)$ en posant $\nabla_n(F) = \nabla(\nabla_{n-1}(F))$. On notera $\nabla_\infty(F) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\nabla_n(F)$ l'union de ces classes.

Dans la suite, on fixe une sous-classe $\mathscr{A} \subset \mathsf{Fl}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}))$. Soit $\underline{\mathscr{A}} \subset \mathsf{Fl}(\mathfrak{M})$ un relèvement à isomorphisme près de $\mathscr{A}$ constitué de cofibrations entre objets cofibrants. Lorsque $\mathscr{A}$ est essentiellement petite, on supposera implicitement que $\underline{\mathscr{A}}$ est un ensemble. On notera alors $\nabla_\infty(\mathscr{A})$ l'image dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ de la classe $\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}})$. D'après le lemme 4.2.62, la classe $\nabla_\infty(\mathscr{A})$ est indépendante, à isomorphisme près, du choix de $\underline{\mathscr{A}}$ et des cylindres. Voici la définition clef :

Définition 4.2.64

1- *Un objet X de $\mathfrak{M}$ est appelé $\mathscr{A}$-local lorsque pour toute flèche $a : A \longrightarrow B$ de $\nabla_\infty(\mathscr{A})$ le morphisme :*

$$\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(B, X) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, X)$$

est inversible. On note $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}-loc}$ (resp. $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\mathscr{A}-loc}$) la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$) formée des objets $\mathscr{A}$-locaux.

2- Une flèche $f : A \longrightarrow B$ est dite une $\mathscr{A}$-équivalence faible lorsque

$$\hom(f, X) : \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(B, X) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, X)$$

*est inversible pour tout objet $\mathscr{A}$-local. On note $\mathbf{W}_{\mathscr{A}}$ la classe des $\mathscr{A}$-équivalences faibles et $\mathbf{Fib}_{\mathscr{A}}$ celle des flèches ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations $\mathscr{A}$-triviales (*i.e., *qui sont des $\mathscr{A}$-équivalences faibles).*

Lemme 4.2.65

1- La notion d'objets $\mathscr{A}$-locaux ne dépend pas du choix de $\underline{\mathscr{A}}$ ni du choix des cylindres dans la construction de $\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}})$.

2- Soit $(\mathbf{W}', \mathbf{Cof}', \mathbf{Fib}')$ une deuxième structure de modèles sur la catégorie $\mathfrak{M}$. On suppose que $\mathbf{W}' = \mathbf{W}$ et $\mathbf{Cof} \subset \mathbf{Cof}'$. Alors les objets $\mathscr{A}$-locaux et les $\mathscr{A}$-équivalences faibles définis relativement à $(\mathbf{W}', \mathbf{Cof}', \mathbf{Fib}')$ sont les mêmes que ceux définis relativement à $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$.

Démonstration. — La première partie de l'énoncé découle du lemme 4.2.62. La seconde partie découle aussi de 4.2.62. En effet, $\underline{\mathscr{A}}$ est encore un relèvement à isomorphisme près de $\mathscr{A}$ formés de cofibrations entre objets cofibrants relativement à $(\mathbf{W}', \mathbf{Cof}', \mathbf{Fib}')$. De même, la formation des $\nabla_n(\mathscr{A})$ convient pour la structure $(\mathbf{W}', \mathbf{Cof}', \mathbf{Fib}')$. □

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des lemmes 4.2.60 et 4.2.61 :

Proposition 4.2.66. — *Soit X un objet fibrant de $\mathfrak{M}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est $\mathscr{A}$-local.*
(ii) *La projection $X \longrightarrow *$ possède la propriété de relèvement à droite relativement aux flèches de $\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}})$.*

Démonstration. — Comme X est fibrant, les applications $\pi_0(a, X) : \pi_0(B, X) \longrightarrow \pi_0(A, X)$ sont inversibles et donc en particulier surjectives pour tout $a \in \nabla_n(\underline{\mathscr{A}})$. On en déduit ainsi l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$. L'implication réciproque est déduite du lemme 4.2.61. □

Lemme 4.2.67. — *Supposons que $\mathfrak{M}$ est propre à gauche. Soit f un push-out d'un élément de $\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}})$. Alors, $\nabla_n(f) \in \mathbf{W}_{\mathscr{A}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. — Soit un carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & X \coprod_A B \end{tikzcd}$$

avec $a \in \nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}})$. L'objet $\mathrm{Cyl}_f(X) \coprod_{\mathrm{Cyl}_a(A)} \mathrm{Cyl}_a(B)$ est naturellement un cylindre sur $X \coprod_A B$. D'autre part, on dispose d'un carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cyl}_a(A) \coprod_{(A \coprod A)} (B \coprod B) \arrow[r, "\nabla(a)"] \arrow[d] & \mathrm{Cyl}_a(B) \arrow[d] \\ \mathrm{Cyl}_f(X) \coprod_{(X \coprod X)} ((X \coprod_A B) \coprod (X \coprod_A B)) \arrow[r] & \mathrm{Cyl}_f(X) \coprod_{\mathrm{Cyl}_a(A)} \mathrm{Cyl}_a(B) \end{tikzcd}$$

Il vient (par le lemme 4.2.62) que $\nabla(f)$ est équivalent à un push-out de $\nabla(a)$. Il suffira donc de montrer que $f \in \mathbf{W}_{\mathscr{A}}$.

Montrons que l'on peut supposer X cofibrant. Choisissons une fibration triviale $X' \longrightarrow X$ avec X' cofibrant. Comme A est cofibrant, la flèche u se relève alors en une flèche $u' : A \longrightarrow X'$. On obtient ainsi un diagramme commutatif à carrés cocartésiens :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & X' \coprod_A B \arrow[r] & X \coprod_A B \end{tikzcd}$$

Comme $\mathfrak{M}$ est propre à gauche, on voit que la classe de f dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est isomorphe à celle de f'. Ainsi, on peut remplacer X par l'objet cofibrant X'.

Dans le cas où X est cofibrant, il suffit par le lemme 4.2.61 de montrer que f et $\nabla(f)$ possèdent la propriété de relèvement à gauche par rapport aux projections $X \longrightarrow *$ avec X fibrant et $\mathscr{A}$-local. Ceci est bien le cas, puisque $\mathrm{LLP}(X \to *)$ contient a et $\nabla(a)$ et est stable par push-out. □

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 4.2.68. — *Si $\mathfrak{M}$ est propre à gauche, on a l'inclusion* $\mathrm{Cell}\big(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof})\big) \subset \mathbf{W}_{\mathscr{A}}$.

Démonstration. — On peut supposer (voir remarque 4.2.25) que $g \in \mathrm{Cell}\big(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof})\big)$ est la composée transfinie d'une λ-suite :

$$A = A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} \dots \longrightarrow A_\nu \xrightarrow{f_\nu} A_{\nu+1} \longrightarrow \dots$$

avec f_ν un push-out d'un élément de $\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof})$. On construit par induction transfinie et en utilisant l'axiome **(MC5)**, un morphisme de λ-suites :

$$\begin{tikzcd}
A'_0 \arrow[r, "f'_0"] \arrow[d] & A'_1 \arrow[r, "f'_1"] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & A'_\nu \arrow[r, "f'_\nu"] \arrow[d] & A'_{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
A_0 \arrow[r, "f_0"] & A_1 \arrow[r, "f_1"] & \dots \arrow[r] & A_\nu \arrow[r, "f_\nu"] & A_{\nu+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

à flèches verticales des équivalences faibles et f'_ν des cofibrations entres objets cofibrants. Notons g' la composition transfinie des f'_ν. Par le lemme 4.2.69 ci-dessous, la flèche g' est isomorphe à g dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Il suffit donc de montrer que g' est dans $\mathbf{W}_{\mathscr{A}}$.

Comme g' est une flèche entre objets cofibrants, il s'agit de vérifier que l'application $\pi_0(g', X)$ est bijective pour X fibrant et $\mathscr{A}$-local. Par le lemme 4.2.61, il suffira de prouver que g' et $\nabla(g')$ possèdent la propriété de relèvement à gauche par rapport à $X \longrightarrow *$. Cette propriété pour g' découle de la propriété correspondante pour chaque f'_ν. Montrons qu'il en est de même pour $\nabla(g')$.

On construit, par induction transfinie sur $\mu \in \nu \in \lambda$, des cylindres $(\mathrm{Cyl}(A'_\nu), p, i_0, i_1)$ sur A'_ν ainsi que des flèches $\mathrm{Cyl}(A'_\mu) \longrightarrow \mathrm{Cyl}(A'_\nu)$ compatibles à p, i_0 et i_1 et tels que :

- la famille $(\mathrm{Cyl}(A'_\nu))_{\nu\in\lambda}$ est une λ-suite, *i.e.*, $\mathrm{Cyl}(A'_\nu) = \mathsf{Colim}_{\mu\in\nu}\mathrm{Cyl}(A'_\mu)$ pour ν un ordinal limite,
- pour tout $\nu+1 \in \lambda$, la flèche $\mathrm{Cyl}(A'_\nu) \coprod_{(A'_\nu \coprod A'_\nu)} (A'_{\nu+1} \coprod A'_{\nu+1}) \longrightarrow \mathrm{Cyl}(A'_{\nu+1})$ est une cofibration.

Il vient par le lemme 4.2.62, que la flèche $\nabla(g')$ est (équivalente à) la colimite des flèches $\nabla(\circ_{\mu\leq\nu} f'_\mu)$ (où l'on note $\circ_{\mu\leq\nu} f'_\mu : A'_0 \longrightarrow A'_\nu$ la composée transfinie de la suite $(f'_\mu)_{\mu\leq\nu}$) :

(66)

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathrm{Cyl}(A'_0) \coprod_{A'_0 \coprod A'_0} (A'_\nu \coprod A'_\nu) \arrow[r] \arrow[d, "\nabla\left(\underset{\mu\leq\nu}{\circ} f'_\mu\right)"'] & \mathrm{Cyl}(A'_0) \coprod_{A'_0 \coprod A'_0} (A'_{\nu+1} \coprod A'_{\nu+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\nabla\left(\left(\underset{\mu\leq\nu}{\circ} f'_\mu\right) \circ f'_\nu\right)"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \mathrm{Cyl}(A'_\nu) \arrow[r] & \mathrm{Cyl}(A'_{\nu+1}) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Les lignes de (66) sont des λ-suites et pour tout $\nu \in \lambda$ la flèche :

$$\mathrm{Cyl}(A'_\nu) \coprod_{\left(\mathrm{Cyl}(A'_0) \coprod_{A'_0 \coprod A'_0} (A'_\nu \coprod A'_\nu)\right)} \left(\mathrm{Cyl}(A'_0) \coprod_{A'_0 \coprod A'_0} \left(A'_{\nu+1} \coprod A'_{\nu+1}\right)\right) \longrightarrow \mathrm{Cyl}(A'_{\nu+1})$$

s'identifie à la cofibration $\nabla(f'_\nu) : \mathrm{Cyl}(A'_\nu) \coprod_{(A'_\nu \coprod A'_\nu)} (A'_{\nu+1} \coprod A'_{\nu+1}) \longrightarrow \mathrm{Cyl}(A'_{\nu+1})$. Il vient, par le lemme 4.2.70 ci-dessous, que $\nabla(g') \in \mathrm{LLP}(X \to *)$ si les $\nabla(f'_\nu) \in \mathrm{LLP}(X \to *)$ pour tout $\nu \in \lambda$.

Ainsi pour terminer la preuve de la proposition, il reste à vérifier que les f'_ν et $\nabla(f'_\nu)$ sont dans $\mathrm{LLP}(X \to *)$ pour tout X fibrant et $\mathscr{A}$-local. Lorsque $f_\nu \in \mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}$, la propriété est claire. On se place donc dans le cas où f_ν est un push-out d'un élément de $\nabla_\infty(\mathscr{A})$.

Par le lemme 4.2.60, il suffira de montrer que f'_ν, $\nabla(f'_\nu)$ et $\nabla^2(f'_\nu)$ sont des $\mathscr{A}$-équivalences faibles. Étant donné que les images dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ de f'_ν, $\nabla(f'_\nu)$ et $\nabla^2(f'_\nu)$ sont isomorphes à ceux de f_ν, $\nabla(f_\nu)$ et $\nabla_2(f_\nu)$, le résultat découle du lemme 4.2.67. □

Lemme 4.2.69. *Soit un morphisme de λ-suites :*

$$\begin{tikzcd}
A'_0 \arrow[r, "f'_0"] \arrow[d] & A'_1 \arrow[r, "f'_1"] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & A'_\nu \arrow[r, "f'_\nu"] \arrow[d] & A'_{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
A_0 \arrow[r, "f_0"] & A_1 \arrow[r, "f_1"] & \dots \arrow[r] & A_\nu \arrow[r, "f_\nu"] & A_{\nu+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

dans une catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ propre à gauche. On suppose que les flèches verticales sont des équivalences faibles et que les flèches horizontales sont des cofibrations. Alors le morphisme évident $\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A'_\nu \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A_\nu$ *est une équivalence faible.*

Démonstration. – On peut factoriser notre morphisme de λ-suites de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
A'_0 \arrow[r, "f'_0"] \arrow[d] & A'_1 \arrow[r, "f'_1"] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & A'_\nu \arrow[r, "f'_\nu"] \arrow[d] & A'_{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
A_0 \arrow[r] \arrow[d] & A_0 \coprod_{A'_0} A'_1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & A_0 \coprod_{A'_0} A'_\nu \arrow[r] \arrow[d] & A_0 \coprod_{A'_0} A'_{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
A_0 \arrow[r, "f_0"] & A_1 \arrow[r, "f_1"] & \dots \arrow[r] & A_\nu \arrow[r, "f_\nu"] & A_{\nu+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Comme $A'_0 \longrightarrow A_0$ est une équivalence faible et que $\mathfrak{M}$ est propre à gauche, il vient que toutes les flèches $A'_\nu \longrightarrow A_0 \coprod_{A'_0} A'_\nu$ sont des équivalences faibles. On déduit que toutes le flèches verticales dans le diagramme ci-dessus sont des équivalences faibles.

Remarquons également que le morphisme canonique :

$$\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A'_\nu \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda}(A_0 \coprod_{A'_0} A'_\nu) \simeq A_0 \coprod_{A'_0} \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A'_\nu$$

est une équivalence faible puisque c'est le push-out de $A'_0 \longrightarrow A_0$ par une cofibration. Ainsi, pour montrer le lemme, il reste à montrer que la flèche :

$$\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda}(A_0 \coprod_{A'_0} A'_\nu) \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A_\nu$$

est une équivalence faible. En d'autres termes, on peut supposer dans l'énoncé que $A_0 = A'_0$.

En considérant notre problème dans la catégorie de modèles $A_0\backslash\mathfrak{M}$ (voir le lemme 4.1.9), on voit qu'il suffit de traiter le cas où tous les A_ν et A'_ν sont cofibrants. Pour traiter ce cas, rappelons que la catégorie $\underline{\mathsf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M})$ admet une structure de modèles de Reedy (voir la remarque 4.1.54) où les équivalences faibles et les fibrations sont données terme à terme. Pour cette structure de modèles, $\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda}$ est un foncteur de Quillen à gauche et le morphisme de λ-suites $A'_{\nu\in\lambda} \longrightarrow A_{\nu\in\lambda}$ est une équivalence faible entre objets cofibrants. Le résultat découle maintenant du lemme 4.1.26. □

Lemme 4.2.70. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie cocomplète et $G \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ une classe de flèches. Soit λ un ordinal et supposons donné un morphisme de λ-suites dans $\mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & A_\nu \arrow[r] \arrow[d] & A_{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
A'_0 \arrow[r] & A'_1 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & A'_\nu \arrow[r] & A'_{\nu+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

On suppose que $A_0 \longrightarrow A'_0$ est dans $\mathrm{LLP}(G)$ ainsi que les flèches :

$$A'_\nu \coprod_{A_\nu} A_{\nu+1} \longrightarrow A'_{\nu+1}$$

pour $\nu + 1 \in \lambda$. Alors $\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A_\nu \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A'_\nu$ est dans $\mathrm{LLP}(G)$.

Démonstration. — On vérifie que $\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A_\nu \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A'_\nu$ possède la propriété de relèvement à gauche par rapport aux éléments de G. On se donne donc un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A_\nu \arrow[r, "u"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A'_\nu \arrow[r, "u'"'] \arrow[ur, dotted, "r"] & Y
\end{tikzcd}$$

avec $f \in G$. Pour construire le relèvement r, il suffit de se donner des relèvements r_ν dans :

$$\begin{tikzcd} A_\nu \arrow[r, "u_\nu"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ A'_\nu \arrow[r, "u'_\nu"'] \arrow[ur, dotted, "r_\nu"] & Y \end{tikzcd}$$

d'une manière compatible. On procède par induction transfinie. Lorsque $\nu = 0$, on prend un relèvement quelconque r_0. L'ensemble des choix étant non vide puisque $A_0 \longrightarrow A'_0$ est dans $\mathrm{LLP}(G)$. Si ν est un ordinal limite, on prend r_ν la colimite de $(r_\mu)_{\mu\in\nu}$. Enfin, pour construire $r_{\nu+1}$ d'une manière compatible avec r_ν, il suffit de choisir un relèvement dans le carré :

$$\begin{tikzcd} A'_\nu \coprod_{A_\nu} A_{\nu+1} \arrow[r, "r_\nu \cup u_{\nu+1}"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ A'_{\nu+1} \arrow[r, "u'_{\nu+1}"'] \arrow[ur, dotted, "r_{\nu+1}"] & Y \end{tikzcd}$$

L'ensemble des choix étant encore non vide puisque la flèche verticale de droite est dans $\mathrm{LLP}(G)$. □

Voici le théorème qu'on cherche à démontrer :

Théorème 4.2.71. — *Supposons que le catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est propre à gauche et présentable par cofibrations. Si la classe $\mathscr{A}$ est essentiellement petite, alors le quadruplet $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathscr{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathscr{A}})$ est une catégorie de modèles qui est encore propre à gauche et présentable par cofibrations. De plus, c'est la localisation de Bousfield à gauche de $\mathfrak{M}$ par rapport à $\mathscr{A}$.*

On garde les hypothèses de l'énoncé ci-dessus. Soit α un cardinal qui majore le cardinal de $\underline{\mathscr{A}}$ et tel que $\mathfrak{M}$ est α-présentable par cofibrations et les buts des flèches de $\underline{\mathscr{A}}$ sont α-accessibles. On commence par quelques résultats préliminaires :

Proposition 4.2.72. — *Il existe un foncteur $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}} : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ et une transformation naturelle $\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}$ tels que :*

(i) Pour tout $X \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$, l'objet $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(X)$ est fibrant et possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}})$. En particulier, $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(X)$ est un objet $\mathscr{A}$-local.

(ii) Pour tout $X \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$, la flèche $X \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(X)$ est dans $\mathrm{Cell}(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_\alpha)) \subset \mathbf{W}_{\mathscr{A}}$.

(iii) Le foncteur $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}$ préserve les cofibrations.

(iv) Une flèche $f \in \mathsf{Fl}(\mathfrak{M})$ est une $\mathscr{A}$-équivalence faible si et seulement si $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(f)$ est une équivalence faible.

(v) Le foncteur $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}$ *est* α*-accessible. Si* β *est un cardinal comme dans la proposition 4.2.41, alors le foncteur* $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}$ *préserve les objets* β*-accessibles.*

Démonstration. — Mise à part la quatrième assertion, le résultat découle du lemme précédent et de l'argument du petit objet (voir la proposition 4.2.26) appliqué à la classe essentiellement petite $\nabla_{\varkappa}(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\alpha})$.

Montrons la troisième assertion. Soit $f : U \longrightarrow V$ une $\mathscr{A}$-équivalence faible. En considérant le carré :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(U) \arrow[d, "\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(f)"] \\ V \arrow[r] & \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(V) \end{tikzcd}$$

et en utilisant la proposition 4.2.68, on voit que $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(f)$ est également une $\mathscr{A}$-équivalence faible. Ainsi, pour conclure, il suffira de montrer qu'une $\mathscr{A}$-équivalence faible entre objets $\mathscr{A}$-locaux est forcément une équivalence faible. Ceci découle immédiatement du lemme de Yoneda appliqué à la sous-catégorie des objets $\mathscr{A}$-locaux de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. □

Corollaire 4.2.73. — *La classe* $\mathbf{Cof} \cup \mathbf{W}_{\mathscr{A}}$ *est stable par push-out et composition transfinie.*

Démonstration. — Pour tout objet X de $\mathfrak{M}$ la flèche $X \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(X)$ est naturellement munie d'une structure de λ-complexe $(\nabla_{\varkappa}(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\alpha}))$-cellulaire par le corollaire 4.2.28. De plus, pour tout monomorphisme $X_0 \longrightarrow X_1$, la sous-flèche $X_0 \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(X_0)$ de $X \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(X)$ est cellulaire au sens de la définition 4.2.34 (ceci étant conséquence du lemme 4.2.35).

Considérons une λ-suite : $A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_\nu \longrightarrow A_{\nu+1} \longrightarrow \ldots$ formée de cofibrations $\mathscr{A}$-triviales. Formons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A_0) \arrow[d, "(2)"'] \arrow[dr] & \\ \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A_\nu \arrow[r] & \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A_\nu) \arrow[r, "(1)"] & \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A_\nu) \end{tikzcd} \tag{67}$$

La flèche $\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A_\nu \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A_\nu)$ est colimite filtrante des sous-flèches cellulaires $A_\nu \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A_\nu)$ de $\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A_\nu \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(\mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda} A_\nu)$. Elle est donc elle-même une sous-flèche cellulaire par le corollaire 4.2.37. Ceci montre que la flèche (1) du diagramme (67) est dans $\mathrm{Cell}(\nabla_{\varkappa}(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\alpha}))$. C'est donc une $\mathscr{A}$-équivalence faible par la proposition 4.2.68.

Pour conclure, il suffit de montrer que la flèche (2) de (67) est dans $\mathrm{Cell}(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))$. On peut voir cette flèche comme la composée transfinie d'une $\lambda+1$-suite :

$$U_0 = U_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow U_\nu \longrightarrow U_{\nu+1} \longrightarrow \dots$$

avec $U_\nu = \mathsf{Colim}_{\mu\in\nu}\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A_\mu)$ pour $0 \neq \nu \in \lambda+1$. Il suffit donc de prouver que les flèches $U_\nu \longrightarrow U_{\nu+1}$, *i.e.* :

$$\mathsf{Colim}_{\mu\in\nu}\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A_\mu) \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A_\nu) \tag{68}$$

sont dans $\mathrm{Cell}(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))$. Lorsque $\nu = \mu+1$, la flèche (68) est simplement $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A_\mu) \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A_\nu)$ qui est une cofibration triviale, par la proposition 4.2.72, puisque $A_\mu \longrightarrow A_\nu$ est une cofibration $\mathscr{A}$-triviale. Lorsque ν est un ordinal limite, cette flèche s'écrit :

$$\mathsf{Colim}_{\mu\in\nu}\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A_\mu) \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(\mathsf{Colim}_{\mu\in\nu}A_\mu) \tag{69}$$

L'argument utilisé au début de la preuve pour traiter le cas de la flèche (1) du diagramme (67) montre que (69) est dans $\mathrm{Cell}(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_\alpha))$.

Il nous reste à montrer la stabilité par co-changement de base. Considérons un carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & X \coprod_A B \end{tikzcd}$$

avec $a \in \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}_{\mathscr{A}}$. On forme alors le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X \coprod_A \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A) \arrow[d] \\ X \coprod_A B \arrow[r] & X \coprod_A \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(B) \end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales sont des push-out des flèches $A \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A)$ et $B \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(B)$. Elles sont donc dans $\mathrm{Cell}(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_\alpha))$. D'autre part, $X \coprod_A \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A) \longrightarrow X \coprod_A \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(B)$ est un push-out de la cofibration triviale $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A) \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(B)$. □

On obtient la caractérisation suivante de la classe des $\mathscr{A}$-équivalences faibles :

Proposition 4.2.74. — *Sous les hypothèses du théorème 4.2.71, la classe* $\mathbf{W}_{\mathscr{A}}$ *est la plus petite classe* $\mathscr{C}$ *telle que :*

- $\mathscr{C}$ *contient* $\mathbf{W}$ *et* $\underline{\mathscr{A}}$,
- $\mathscr{C}$ *vérifie la propriété* 2 *sur* 3,
- $\mathscr{C} \cap \mathbf{Cof}$ *est stable par push-out et composition transfinie.*

Démonstration. — Nous avons vu que $\mathbf{W}_{\mathscr{A}}$ vérifie les propriétés mentionnées. On montre réciproquement que si la classe $\mathscr{C}$ vérifie les propriétés ci-dessus, elle contient $\mathbf{W}_{\mathscr{A}}$.

Remarquons d'abord que si $f : X \longrightarrow Y \in \mathscr{C} \cap \mathbf{Cof}$ alors $\nabla(f) \in \mathscr{C}$. En effet, $f \cup f : X \coprod X \longrightarrow Y \coprod Y$ est dans $\mathscr{C}$ puisque c'est la composée de deux push-out de f. Il vient alors que :

$$\mathrm{Cyl}(X) \longrightarrow \mathrm{Cyl}(X) \coprod_{(X \coprod X)} (Y \coprod Y)$$

est également dans $\mathscr{C}$. Étant donné que $\mathrm{Cyl}(X) \longrightarrow \mathrm{Cyl}(Y)$ est aussi dans $\mathscr{C}$, par la propriété 2 sur 3 nous déduisons que $\nabla(f) \in \mathscr{C}$. Ceci montre que $\mathscr{C}$ contient $\mathrm{Cell}(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))$.

Pour montrer l'inclusion $\mathbf{W}_{\mathscr{A}} \subset \mathscr{C}$, on forme pour une $\mathscr{A}$-équivalence faible f le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A) \arrow[d, "\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(f)"] \\ B \arrow[r] & \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(B) \end{tikzcd}$$

L'appartenance $f \in \mathscr{C}$ découle alors de la propriété de 2 sur 3 de $\mathscr{C}$, le fait que les flèches horizontales sont dans $\mathrm{Cell}(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))$ et que $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(f)$ est une équivalence faible (voir la proposition 4.2.72). □

L'étape suivante consiste à montrer :

Proposition 4.2.75. — *Un morphisme dans* $\mathrm{RLP}(\mathbf{Cof}_\beta \cap \mathbf{W}_{\mathscr{A}})$ *est une* $\mathscr{A}$*-fibration,* i.e., *appartient à* $\mathbf{Fib}_{\mathscr{A}}$ *(voir la définition 4.2.64).*

Démonstration. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche dans $\mathrm{RLP}(\mathbf{Cof}_\beta \cap \mathbf{W}_{\mathscr{A}})$. On veut montrer que f admet aussi la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les cofibrations $\mathscr{A}$-triviales $u : A \longrightarrow B$. Comme u est un rétract de $c(u)$, il suffit de vérifier la propriété de relèvement à droite par rapport à $c(u)$. On se donne donc un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "c(u)"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \Phi_{cf_0}(u) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ formé des classes d'isomorphismes de couples (v, a) avec $v : A \longrightarrow T$ une sous-cofibration r-normale de $c(u)$ (voir la définition 4.2.51) qui est de plus $\mathscr{A}$-triviale et a un relèvement partiel :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[d, "v"'] & & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[urr, "a"] & \Phi_{cf_0}(u) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Cet ensemble est non vide puisqu'il contient $(\mathrm{id}_A, A \to X)$. Il est naturellement ordonné de la manière suivante : $(v,a) \leq (v',a')$ si la sous-flèche $v : A \longrightarrow T$ est majorée par $v' : A \longrightarrow T'$ et si la restriction de $a' : T' \longrightarrow X$ à T est égale à a. Par la proposition 4.2.54 et le corollaire 4.2.73, on voit que toutes les chaînes de l'ensemble $\mathscr{E}$ sont majorées par leur colimite. Ainsi, par le lemme de Zorn, il existe des éléments maximaux dans $\mathscr{E}$.

Dans la suite, on fixe un élément de $\mathscr{E}$:

$$(v : A \longrightarrow T\ , a : T \longrightarrow X\ )$$

que l'on supposera maximal et on montrera que $T \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u)$ est inversible. Considérons le diagramme de catégories directes :

(70)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{SpSub}_\beta(\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(v)|r'') \arrow[d, "inc"'] & & & \mathbf{SpSub}_\beta(\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u)|r') \arrow[d, "inc"] \\
\mathbf{Sub}_\beta(\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(v)) & \mathbf{Sub}_\beta(v) \arrow[l, "E"'] & \mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(u|r) \arrow[l, "F"'] \arrow[r, "G"] & \mathbf{Sub}_\beta(\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u))
\end{tikzcd}$$

Les notations sont expliquées ci-dessous :

1. $r' : \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(B) \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u))$ et $r'' : \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(T) \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(v))$ sont des relèvements comme dans le cas respectif de la définition 4.2.51. Ces relèvements existent puisque $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u)$ et $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(v)$ sont des cofibrations triviales par la proposition 4.2.72.
2. Les foncteurs *inc* sont les inclusions évidentes.
3. Le foncteur E associe à une sous-flèche v_0 de v. la sous-flèche $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(v_0)$ de $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(v)$.
4. Le foncteur F associe à une sous-flèche $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ de u, la sous-flèche $v_0 : A_0 \longrightarrow T_0 = T \times_{\Phi_{cf_0}(u)} \Phi_{cf_0}(u_0)$ de v.
5. Le foncteur G associe à une sous-flèche u_0 de u, la sous-flèche $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u_0)$ de $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u)$.

Toutes le catégories du diagramme (70) sont β-filtrantes et admettent les colimites suivant les catégories α-filtrantes de cardinal plus petit ou égal à α. De plus, les foncteurs *inc*, E, F et G commutent à ces colimites. Ces foncteurs sont également cofinaux. Le lemme 4.2.4 affirme donc que la limite $\mathcal{L}$ de (70) est cofinale dans $\mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(u|r)$.

Par construction, $\mathcal{L}$ est formée des sous-cofibrations r-spéciales $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ de u qui sont orthogonales à v et telles que :

- $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u_0)$ est une sous-flèche r'-spéciale de $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u)$. En particulier, c'est une équivalence faible,
- $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(v_0)$ est une sous-flèches r''-spéciale de $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(v)$. En particulier, c'est une équivalence faible.

Ainsi, par la proposition 4.2.72, les cofibrations u_0 et v_0 sont $\mathscr{A}$-triviales.

Comme u_0 est orthogonale à v, on peut former par la proposition 4.2.55 la sous-cofibration r-normale $v' : A \longrightarrow T' = T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0)$. Comme u_0 et v_0 sont des $\mathscr{A}$-équivalences faibles, on déduit que v' est encore $\mathscr{A}$-triviale.

Notons a_0 la restriction de a à T_0. Comme $\Phi_{cf_0}(u_0)$ est β-accessible, et que $f \in \mathrm{RLP}(\mathbf{Cof}_\beta \cap \mathbf{W}_{\mathscr{A}})$, on peut trouver un relèvement dans le carré :

$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, "a_0"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \Phi_{cf_0}(u_0) \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "l"] & Y \end{tikzcd}$$

Ainsi, en posant $a' = a \cup l : T \coprod_{T_0} \Phi_{cf_0}(u_0) \longrightarrow X$, on obtient un élément (v', a') de $\mathscr{E}$ qui majore (v, a). Par maximalité de (v, a), le sous-objet $\Phi_{cf_0}(u_0)$ de $\Phi_{cf_0}(u)$ est majoré par T. Ainsi, le foncteur $\mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{Sub}(c(u))$ qui à u_0 associe $c(u_0)$: $A_0 \longrightarrow \Phi_{cf_0}(u_0)$ se factorise par $\mathbf{Sub}(v)$. Comme $\mathcal{L}$ est cofinal dans $\mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(u|r)$ qui est cofinal dans $\mathbf{Sub}_\beta(u)$ et que le foncteur Φ_{cf_0} est α-accessible, on voit que $v \geq \mathsf{Colim}_{\mathcal{L}}(c(-) : \mathcal{L} \to \mathbf{Sub}(c(u))) = c(u)$. Ceci prouve que $T \simeq \Phi_{cf_0}(u)$. $\square$

On peut maintenant achever la preuve du théorème 4.2.71. Les axiomes **(MC1)**, **(MC2)**, **(MC3)** sont triviaux. La deuxième partie de l'axiome **(MC5)** est triviale elle aussi. La première partie, découle de la proposition précédente et de l'argument du petit objet appliqué à un ensemble essentiellement équivalent à $\mathbf{Cof}_\beta \cap \mathbf{W}_{\mathscr{A}}$.

Par construction, la première partie de l'axiome **(MC4)** est claire. La seconde partie du même axiome, découle alors par l'astuce de Joyal (voir [**Hir03**] ou [**Hov99**]).

Enfin, pour voir que $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathscr{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathscr{A}})$ est la localisation de Bousfield de $\mathfrak{M}$, on se donne une adjonction de Quillen $(F, G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ telle que la classe $\mathsf{L}F(\mathscr{A})$ est formée d'isomorphismes. On va montrer que le couple de foncteurs adjoints (F, G) forment un adjonction de Quillen relativement à la structure $\mathscr{A}$-localisée de $\mathfrak{M}$. Il suffit de montrer que F préserve les cofibrations $\mathscr{A}$-triviales puisque F préserve déjà les cofibrations. Soit donc $u : A \longrightarrow B$ une cofibrations $\mathscr{A}$-triviale. On forme le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(A) \arrow[d, "\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u)"] \\ B \arrow[r] & \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(B) \end{tikzcd}$$

Comme $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u)$ est une cofibration triviale, son image par F est une équivalence faible. Il suffira donc de montrer que $F(\mathrm{Cell}(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}))) \subset \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}$. Comme F commute aux colimites et que $\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}$ est stable par push-out et compositions transfinies, il nous reste à montrer que $F(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}})) \subset \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}$. Ceci découle du fait que la classe $F(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}))$ est équivalente dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$ à $\nabla_\infty(F(\underline{\mathscr{A}}))$ et que la construction $a \rightsquigarrow \nabla(a)$ préserve les cofibrations triviales.

4.2.5. Quelques compléments. — Dans cette dernière sous-section, on se donne une catégorie de modèles monoïdale $(\mathfrak{M}, \otimes)$ au sens de la définition 4.1.57. On suppose que $\mathfrak{M}$ est propre à gauche et présentable par cofibrations. On cherche un critère pour que la localisation de Bousfield suivant la classe essentiellement petite $\mathscr{A} \subset \mathsf{Fl}(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}))$ soit encore une catégorie de modèles monoïdale. Dans cette direction, nous avons obtenu le critère peu satisfaisant :

Proposition 4.2.76. — *La catégorie de modèles $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathscr{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathscr{A}})$ est une catégorie de modèles monoïdale lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) pour $A \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$ cofibrant et $f \in \underline{\mathscr{A}}$, les flèches $A \otimes f$ et $f \otimes A$ sont des $\mathscr{A}$-équivalences faibles.

(ii) la catégorie de modèles $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathscr{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathscr{A}})$ est stable.

On rappelle le lecteur que $\underline{\mathscr{A}}$ est un ensemble de cofibrations entre objets cofibrants de $\mathfrak{M}$ qui relève à équivalences faibles près la classe $\mathscr{A}$. La condition (i) du critère ci-dessus est nécessaire. C'est la condition (ii) qui rend ce critère peu applicable.

Lemme 4.2.77. — *On suppose vérifiée la condition (i) de la proposition 4.2.76. Pour $A \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$ cofibrant, les foncteurs $(A \otimes -)$ et $(- \otimes A) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ sont des foncteurs de Quillen à gauche relativement à la structure $\mathscr{A}$-localisée.*

Démonstration. — Le foncteur $A \otimes - : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ est un foncteur de Quillen à gauche. Étant donné que $(A \otimes -)$ envoie $\underline{\mathscr{A}}$ sur des $\mathscr{A}$-équivalences faibles, on voit que $A \otimes -$ est encore un foncteur de Quillen à gauche relativement à la structure $\mathscr{A}$-localisée. □

Corollaire 4.2.78. — *La condition (i) de la proposition 4.2.76 est équivalente à :*

(i') pour toute cofibration $\mathscr{A}$-triviale f et tout objet cofibrant $A \in \mathfrak{M}$, les flèches $A \otimes f$ et $f \otimes A$ sont des cofibrations $\mathscr{A}$-triviales.

Dans la suite, nous supposons que les conditions (i) et (ii) de la proposition 4.2.76 sont satisfaites. Soit $a : A \longrightarrow B$ une cofibration de $\mathfrak{M}$. On note $\mathscr{C}_a$ la classe des cofibrations $\mathscr{A}$-triviales $u : U \longrightarrow V$ telles que $a \square u : A \otimes V \coprod_{A \otimes U} B \otimes U \longrightarrow B \otimes V$ est une $\mathscr{A}$-équivalence faible (et donc une cofibration $\mathscr{A}$-triviale). Notre but et donc de prouver que l'inclusion $\mathscr{C}_a \subset \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}_{\mathscr{A}}$ est une égalité. Notons le lemme simple suivant :

Lemme 4.2.79. — *La classe $\mathscr{C}_a$ est stable par rétract, composition transfinie et push-out.*

Démonstration. — En effet, si u' est un push-out de u alors $a \square u'$ est un push-out de $a \square u$. La stabilité par composition transfinie découle immédiatement du lemme 4.2.69. □

Le lemme suivant est le seul endroit où l'on a besoin de l'hypothèse que $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathscr{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathscr{A}})$ est stable :

Lemme 4.2.80. — *Supposons donnée une suite composable de cofibrations $\mathscr{A}$-triviales : $U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{v} W$. Si v et $v \circ u$ sont dans $\mathscr{C}_a$, il en est de même de u.*

Démonstration. — La flèche $a\square(v \circ u)$ se factorise de la manière suivante :

$$A \otimes W \coprod_{A\otimes U} B \otimes U \xrightarrow{r} A \otimes W \coprod_{A\otimes V} B \otimes V \xrightarrow{a \otimes v} B \otimes W$$

Il vient que la flèche r est une $\mathscr{A}$-équivalence faible.

Remarquons alors que r est le push-out de $a\square u$ suivant la flèche $A \otimes V \coprod_{A\otimes U} B \otimes U \longrightarrow A \otimes W \coprod_{A\otimes U} B \otimes U$. Ceci montre que la cofibration $* \longrightarrow \mathsf{Cof}(a\square u)$ est une $\mathscr{A}$-équivalence faible. Comme $\mathbf{Ho}_{\mathscr{A}}(\mathfrak{M})$ est triangulée, on déduit que $a\square u$ est inversible dans $\mathbf{Ho}_{\mathscr{A}}(\mathfrak{M})$. $\square$

Soit $u : U \longrightarrow V$ une cofibration $\mathscr{A}$-triviale. Par la proposition 4.2.66, on dispose d'un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(U) \arrow[d, "\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u)"] \\ V \arrow[r] & \mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(V) \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont dans $\mathrm{Cell}(\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \cup (\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}))$ et la flèche $\mathrm{Loc}_{\mathscr{A}}(u)$ dans $\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}$. Ainsi, par le lemme 4.2.80, pour montrer que $u \in \mathscr{C}_a$, il suffit de montrer que $\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}}) \subset \mathscr{C}_a$. Remarquons alors que les flèches de $\nabla_\infty(\underline{\mathscr{A}})$ sont des cofibrations $\mathscr{A}$-triviales de source un objet cofibrant. Il suffit donc de prouver le lemme :

Lemme 4.2.81. — *Soit $u : U \longrightarrow V$ une cofibration $\mathscr{A}$-triviale avec U cofibrant. Alors pour toute cofibration $a : A \longrightarrow B$, la cofibration $a\square u : A \otimes V \coprod_{A\otimes U} B \otimes U \longrightarrow B \otimes V$ est $\mathscr{A}$-triviale.*

Démonstration. — On fixe un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "a'"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r, "a"] & B \end{tikzcd}$$

à flèches verticales des équivalences faibles et tel que a' est une cofibration entre objets cofibrants. On notera $C = A \coprod_{A'} B'$ et c la cofibration $A \longrightarrow C$. Comme $\mathfrak{M}$ est propre à gauche, la flèche évidente $C \longrightarrow B$ est une équivalence faible.

Remarquons d'abord que $a'\Box u$ est une cofibration $\mathscr{A}$-triviale. En effet, les flèches verticales du carré :

$$\begin{tikzcd} A' \otimes U \arrow[r] \arrow[d] & B' \otimes U \arrow[d] \\ A' \otimes V \arrow[r] & B' \otimes U \end{tikzcd}$$

sont des $\mathscr{A}$-équivalences faibles puisque A' et B' sont cofibrants. Il vient que $c\Box u$ est aussi une $\mathscr{A}$-équivalence faible. Pour conclure, nous allons montrer que les flèches verticales du carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \otimes V \coprod_{A\otimes U} C \otimes U \arrow[r, "c\Box u"] \arrow[d] & C \otimes V \arrow[d] \\ A \otimes V \coprod_{A\otimes U} B \otimes U \arrow[r, "a\Box u"] & B \otimes V \end{tikzcd} \tag{71}$$

sont des équivalences faibles. Pour voir que la flèche $C \otimes V \longrightarrow B \otimes V$ est une équivalence faible, il suffit de remarquer que $- \otimes V$ induit un foncteur de Quillen à gauche : $A\backslash\mathfrak{M} \longrightarrow A \otimes V\backslash\mathfrak{M}$ et que $C \longrightarrow B$ est une équivalence faible entre les deux objets cofibrants $A \to C$ et $A \to B$ de $A\backslash\mathfrak{M}$.

Le même raisonnement montre que $C \otimes U \longrightarrow B \otimes U$ est une équivalence faible. Pour conclure, on considère la flèche verticale de gauche du carré (71) comme étant l'image par le foncteur de Quillen à gauche $A \otimes V \coprod_{A\otimes U} -$: $A \otimes U\backslash\mathfrak{M} \longrightarrow A \otimes V\backslash\mathfrak{M}$ de l'équivalence faible $C \otimes U \longrightarrow B \otimes U$ entre les objets cofibrants $A \otimes U \to C \otimes U$ et $A \otimes U \to B \otimes U$ de $A \otimes U\backslash\mathfrak{M}$. $\Box$

Notons enfin le critère suivant de stabilité de la structure $\mathscr{A}$-localisée :

Proposition 4.2.82. — *Soient $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles présentable par cofibrations et $\mathscr{A}$ une classe essentiellement petite de flèches dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. On suppose que $\mathfrak{M}$ est stable. Pour que la structure $\mathscr{A}$-localisée de $\mathfrak{M}$ soit encore stable, il faut et il suffit que l'une des deux conditions équivalentes soient satisfaites :*

(i) le foncteur $\Omega^1 : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ envoie les flèches de $\nabla_\infty(\mathscr{A})$ sur des $\mathscr{A}$-équivalences faibles,

(ii) le foncteur Σ^1 préserve les objets $\mathscr{A}$-locaux de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — Le fait que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes est un simple exercice d'adjonction (vue que Σ^1 et Ω^1 sont des équivalences inverses l'une de l'autre). La condition (i) est nécessaire. En effet, si $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}_{\mathscr{A}}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathscr{A}})$ est stable, le foncteur évident $L : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathscr{A}}(\mathfrak{M})$ est triangulé. Ainsi, si $f \in \nabla_\infty(\mathscr{A})$, la flèche $L(f)$ est inversible et donc aussi $\Omega^1(L(f)) \simeq L(\Omega^1(f))$.

La condition (ii) est suffisante. En effet, elle montre que Ω^1 préserve les $\mathscr{A}$-équivalences faibles dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Ceci est également le cas pour Σ^1. L'équivalence (Σ^1, Ω^1) passe alors à la localisation $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \rightsquigarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})[\mathbf{W}_{\mathscr{A}}^{-1}]$ et induit donc une équivalence (Σ^1, Ω^1) sur $\mathbf{Ho}_{\mathscr{A}}(\mathfrak{M})$. □

4.3. Catégories de modèles III : les spectres symétriques

On présente ici la technique de stabilisation des catégories de modèles par rapport à un endo-foncteur. On suit les grandes lignes de l'article de Hovey [**Hov01**].

Dans cette section, $\Phi = (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera un *monoïde gradué et unitaire* dans la catégorie des groupes. C'est donc la donnée pour tout entier naturel n d'un groupe Φ_n et pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ d'un morphisme de groupes :

$$\phi_{m,n} : \Phi_m \times \Phi_n \longrightarrow \Phi_{m+n} \tag{72}$$

telle que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout triplet $(m, n, r) \in \mathbb{N}^3$, le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Phi_m \times \Phi_n \times \Phi_r \arrow[r, "\phi_{m,n}"] \arrow[d, "\phi_{n,r}"'] & \Phi_{m+n} \times \Phi_r \arrow[d, "\phi_{m+n,r}"] \\
\Phi_m \times \Phi_{n+r} \arrow[r, "\phi_{m,n+r}"'] & \Phi_{m+n+r}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux composées :

$$\Phi_n \simeq \{1\} \times \Phi_n \longrightarrow \Phi_0 \times \Phi_n \xrightarrow{\phi_{0,n}} \Phi_n$$

et

$$\Phi_n \simeq \Phi_n \times \{1\} \longrightarrow \Phi_n \times \Phi_0 \xrightarrow{\phi_{n,0}} \Phi_n$$

sont l'identité (avec 1 l'élément neutre de Φ_0).

On est particulièrement intéressé par les deux exemples suivants :

Exemple 4.3.1

1- Le monoïde trivial $\{1\}$ donné en chaque degré par le groupe à un élément $\{1\}$.

2- Le monoïde des groupes symétriques $\Sigma = (\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où Σ_n est le groupe des permutations de l'ensemble $\{i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n\}$ (qui est donc vide pour $n = 0$). Le morphisme de groupes $\phi_{m,n} : \Sigma_m \times \Sigma_n \longrightarrow \Sigma_{n+m}$ associe à un couple de permutations (f, g) la permutation $f \bullet g$ définie par :

$$f \bullet g(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si} \quad 1 \leq i \leq m, \\ g(i-m) + m & \text{si} \quad m+1 \leq i \leq m+n. \end{cases}$$

pour $i \in \{1, \ldots, m+n\}$.

Remarque 4.3.2. — Pour $(a, g) \in \Phi_0 \times \Phi_m$, on a :

$$\phi_{0,m}(a,g) = \begin{cases} \phi_{0,m}((a,1)(1,g)) = \phi_{0,m}(a,1)\phi_{0,m}(1,g) = \phi_{0,m}(a,1).g \\ \\ \phi_{0,m}((1,g)(a,1)) = \phi_{0,m}(1,g)\phi_{0,m}(a,1) = g.\phi_{0,m}(a,1) \end{cases}$$

Ceci montre que le morphisme $\phi_{0,m}(-,1) : \Phi_0 \longrightarrow \Phi_m$ est central (en particulier, Φ_0 est abélien et $\phi_{0,0}$ et l'application produit). Il en est de même de $\phi_{m,0}(1,-)$. Notons toutefois que les deux morphismes de groupes $\phi_{0,m}(-,1)$ et $\phi_{m,0}(1,-)$ sont en général différents lorsque $m \geq 1$.

4.3.1. Les (F, Φ)-spectres dans une catégorie abstraite. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On commence par une série de définitions :

Définition 4.3.3

1- Pour un groupe G, on note $\mathbf{Rep}(G, \mathcal{C})$ *la catégorie des G-représentations dans $\mathcal{C}$* i.e., *des foncteurs $\bullet\{G\} \longrightarrow \mathcal{C}$ où $\bullet\{G\}$ est la catégorie à un objet $\bullet$ et* $\mathrm{end}(\bullet) = G$.

2- On note $\mathbf{Suite}(\Phi, \mathcal{C})$ *la catégorie* $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C})$. *Les objets de cette catégorie sont appelés les suites Φ-symétriques de $\mathcal{C}$. Ce sont les familles d'objets $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}$ munies d'actions $\Phi_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 4.3.4. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un* endofoncteur Φ-symétrique *de $\mathcal{C}$ est un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ muni pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une action* $\mathrm{a}_F : \Phi_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F^{\circ n})$, *telle que les carrés suivants :*

$$\begin{tikzcd}
\Phi_m \times \Phi_n \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{m,n}"'] & \mathrm{Aut}\left(\overbrace{F \circ \cdots \circ F}^{m}\right) \times \mathrm{Aut}\left(\overbrace{F \circ \cdots \circ F}^{n}\right) \arrow[d] \\
\Phi_{m+n} \arrow[r] & \mathrm{Aut}\left(\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{m} \circ \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n}\right)
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs pour $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Remarque 4.3.5. — À un endofoncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ on peut associer un monoïde gradué et unitaire dans la catégorie des groupes (non nécessairement petits) en posant $\Phi_n(F) = \mathrm{Aut}(F^{\circ n})$ avec $n \in \mathbb{N}$. Il est alors clair qu'un endofoncteur Φ-symétrique est simplement un endofoncteur F muni d'un morphisme de monoïdes gradués a_F : $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow (\Phi_n(F))_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 4.3.6. — *Soit F un endofoncteur Φ-symétrique de $\mathcal{C}$.*

*1- Un F-*spectre Φ-symétrique $\mathbf{X}$ *(ou simplement un (F,Φ)-*spectre*) est une suite Φ-symétrique $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}$ munie de* morphismes d'assemblage γ_n : $F(\mathbf{X}_n) \longrightarrow \mathbf{X}_{n+1}$ *tels que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ la composée de :*

$$F^{\circ m}(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{F^{\circ m-1}(\gamma_n)} F^{\circ m-1}\mathbf{X}_{1+n} \longrightarrow \dots \longrightarrow F(\mathbf{X}_{m-1+n}) \xrightarrow{\gamma_{m-1+n}} \mathbf{X}_{m+n}$$

est $\Phi_m \times \Phi_n$-équivariante relativement à :

- *L'action sur $F^{\circ m}(\mathbf{X}_n)$ induite par l'action de Φ_m sur $F^{\circ m}$ et l'action de Φ_n sur $\mathbf{X}_n$,*
- *L'action sur $\mathbf{X}_{m+n}$ obtenue par restriction de l'action de Φ_{m+n} suivant le morphisme $\phi_{m,n}$.*

2- Un morphisme de (F,Φ)-spectres de $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un morphisme de suites Φ-symétriques $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow (\mathbf{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que les carrés :

$$\begin{tikzcd} F\mathbf{X}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{X}_{n+1} \arrow[d] \\ F\mathbf{Y}_n \arrow[r] & \mathbf{Y}_{n+1} \end{tikzcd}$$

sont commutatifs pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C})$ la catégorie des F-spectres Φ-symétriques.

3- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\underline{\mathrm{Ev}}_n$: $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C})$ le foncteur qui à un (F,Φ)-spectre $\mathbf{X}$ associe la Φ_n-représentation sur $\mathbf{X}_n$. On notera Ev_n : $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ le foncteur qui à $\mathbf{X}$ associe l'objet $\mathbf{X}_n$ de $\mathcal{C}$.

Remarque 4.3.7. — Pour $m = 0$, la condition de la première partie de la définition 4.3.6 est non vide. Elle affirme en effet que l'identité de $\mathbf{X}_n$ est $\Phi_0 \times \Phi_n$-équivariante pour deux actions différentes. Ceci est le cas si et seulement si l'action de Φ_0 sur $\mathbf{X}_n$, déduite par restriction suivant le morphisme $\phi_{0,n}(-,1)$, coïncide avec celle obtenue par le biais de l'action de Φ_0 sur le foncteur identité. On appellera $\mathbf{Rep}_{\Phi_0}(\Phi_n, \mathcal{C})$ la catégorie de tels représentations. C'est donc la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C})$ formée des Φ_n-représentations X telles que le carré :

$$\begin{tikzcd} \Phi_0 \arrow[r, "\mathrm{a}_F"] \arrow[d, "\phi_{0,n}(-,1)"'] & \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}) \arrow[d] \\ \Phi_n \arrow[r] & \mathrm{Aut}(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Exemple 4.3.8. — Supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ admet un objet initial $\varnothing$. Notons $F_{\varnothing}$ le foncteur qui à tout $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ associe $\varnothing$. Se donner une structure d'endofoncteur

Φ-symétrique sur $F_\varnothing$ équivaut à se donner une action a : $\Phi_0 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ sur le foncteur identité de $\mathcal{C}$. On vérifie alors immédiatement que la catégorie $\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F_\varnothing}(\mathcal{C})$ est identique à $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Rep}_{\Phi_0}(\Phi_n, \mathcal{C})$.

Supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ admet les colimites pertinentes. Soit $\alpha : H \longrightarrow G$ un morphisme de groupes. On dispose d'un foncteur évident $\alpha_* : \mathbf{Rep}(G, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Rep}(H, \mathcal{C})$ qui à une G-représentation dans $\mathcal{C}$ associe la H-représentation obtenue par restriction suivant α. Ce foncteur, que l'on notera Oub^G_H, admet un adjoint à gauche α^* connu sous le nom du foncteur *représentation induite*. Pour une H-représentation X de $\mathcal{C}$ nous noterons $\mathrm{Ind}^G_H(X)$ la G-représentation $\alpha^* X$. On vérifie facilement que lorsque α est injectif, l'objet de $\mathcal{C}$ sous-jacent à $\mathrm{Ind}^G_H(X)$ est isomorphe (non canoniquement) au coproduit de G/H-copies de X.

Lemme 4.3.9. — *Soit F un endofoncteur Φ-symétrique de $\mathcal{C}$ qui commute aux colimites pertinentes. Pour $p \in \mathbb{N}$, le foncteur $\underline{\mathrm{Ev}}_p$ admet un adjoint à gauche $\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi} : \mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathcal{C})$. Pour $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C}))$ le (F, Φ)-spectre $\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(X)$ est tel que :*

(i) La Φ_n-représentation $\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(X)_n$ est donnée par $\mathrm{Ind}^{\Phi_n}_{\Phi_{n-p}\times\Phi_p}(F^{\circ n-p}(X))$ lorsque $n \geq p$. Elle est égale à $\varnothing$ sinon.

(ii) Pour $n \geq p$, le morphisme d'assemblage $F[\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(X)_n] \longrightarrow \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(X)_{n+1}$ est la composée :

$$\begin{aligned} F\left(\mathrm{Ind}^{\Phi_n}_{\Phi_{n-p}\times\Phi_p}(F^{\circ n-p}(X))\right) &\simeq \left(\mathrm{Ind}^{\{1\}\times\Phi_n}_{\{1\}\times\Phi_{n-p}\times\Phi_p}(F^{\circ 1+n-p}(X))\right) \\ &\longrightarrow \left(\mathrm{Ind}^{\Phi_{1+n}}_{\Phi_{1+n-p}\times\Phi_p}(F^{\circ 1+n-p}(X))\right) \end{aligned} \tag{73}$$

Démonstration. — La composée de m morphismes de type (73) est égale à :

$$\begin{aligned} F^{\circ m}\left(\mathrm{Ind}^{\Phi_n}_{\Phi_{n-p}\times\Phi_p}(F^{\circ n-p}(X))\right) &\simeq \left(\mathrm{Ind}^{\{1\}\times\Phi_n}_{\{1\}\times\Phi_{n-p}\times\Phi_p}(F^{\circ m+n-p}(X))\right) \\ &\longrightarrow \left(\mathrm{Ind}^{\Phi_{m+n}}_{\Phi_{m+n-p}\times\Phi_p}(F^{\circ m+n-p}(X))\right) \end{aligned} \tag{74}$$

Modulo l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ind}^{\{1\}\times\Phi_n}_{\{1\}\times\Phi_{n-p}\times\Phi_p}(F^{\circ m+n-p}(X)) \simeq \mathrm{Ind}^{\Phi_m\times\Phi_n}_{\Phi_m\times\Phi_{n-p}\times\Phi_p}(F^{\circ m+n-p}(X))$$

la flèche (74) correspond à la transformation naturelle évidente $\mathrm{Ind}^{\Phi_m\times\Phi_n}_{\Phi_m\times\Phi_{n-p}\times\Phi_p} \longrightarrow \mathrm{Ind}^{\Phi_{m+n}}_{\Phi_{m+n-p}\times\Phi_p}$. Ceci prouve que (74) est $\Phi_m \times \Phi_n$-équivariante. Les données (i) et (ii) de l'énoncé définissent donc un (F, Φ)-spectre.

Pour un (F, Φ)-spectre $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on construit un isomorphisme naturel :

$$\hom_{\mathbf{Rep}(\Phi_p,\mathcal{C})}(X, \mathbf{Y}_p) \simeq \hom_{\mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathcal{C})}(\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(X), \mathbf{Y})$$

de la manière suivante. À un morphisme de (F,Φ)-spectres $f : \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(X) \longrightarrow \mathbf{Y}$ on associe la composée :

$$X \longrightarrow \mathrm{Ind}^{\Phi_p}_{\Phi_0\times\Phi_p}(X) \simeq \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(X)_p \xrightarrow{f_p} \mathbf{Y}_p$$

Réciproquement, soit un morphisme de Φ_p-représentations $u : X \longrightarrow \mathbf{Y}_p$. Pour $n \geq p$, la composée :

$$F^{\circ n-p}(X) \longrightarrow F^{\circ n-p}\mathbf{Y}_p \longrightarrow \mathbf{Y}_n$$

est $\Phi_{n-p} \times \Phi_p$-équivariante. On en déduit par adjonction une flèche :

$$u_n : \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(X)_n = \mathrm{Ind}^{\Phi_n}_{\Phi_{n-p}\times\Phi_p} F^{\circ n-p}(X) \longrightarrow \mathbf{Y}_n$$

La famille des u_n définit bien un morphisme de (F,Φ)-spectres. □

Définition 4.3.10. — *On garde les hypothèses du lemme 4.3.9. On pose* $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi} = \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi} \circ \mathrm{Ind}^{\Phi_p}_1$. *Comme* $\mathrm{Ev}_p = \mathrm{Oub}^{\Phi_p}_1 \circ \underline{\mathrm{Ev}}_p$ *on a donc une adjonction* $(\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}, \mathrm{Ev}_p)$.

Pour $X \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$, *le* (F,Φ)*-spectre* $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(X)$ *est appelé le* p*-ième* (F,Φ)*-spectre de suspension sur* X. *Au niveau* $n \geq p$, *ce* (F,Φ)*-spectre est donné par* $\mathrm{Ind}^{\Phi_n}_{\Phi_{n-p}} F^{\circ n-p}X$, *où l'induction est prise suivant le morphisme de groupes* $\phi_{n-p,p}(-,1)$.

Soit Φ' un deuxième monoïde gradué unitaire et F' un endofoncteur Φ'-symétrique. Supposons donnés un morphisme de monoïdes gradués $\Phi \longrightarrow \Phi'$ ainsi qu'une transformation naturelle Φ-équivariante $F \longrightarrow F'$ (*i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}$, la transformation naturelle $F^{\circ n} \longrightarrow F'^{\circ n}$ est Φ_n-équivariante). On dispose alors d'un foncteur d'oubli :

$$\mathrm{Oub}^{F',\Phi'}_{F,\Phi} : \mathbf{Spect}^{\Phi'}_{F'}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F}(\mathcal{C}) \tag{75}$$

Proposition 4.3.11. — *Supposons que* $\mathcal{C}$ *admet les colimites pertinentes et que* F *et* F' *y commutent. Alors, le foncteur* $\mathrm{Oub}^{F',\Phi'}_{F,\Phi}$ *admet un adjoint à gauche :*

$$(F',\Phi') \otimes_{F,\Phi} - : \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi'}_{F'}(\mathcal{C}) \tag{76}$$

Démonstration. — Soit $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un (F,Φ)-spectre. On définit une suite Φ'-symétrique $(\mathbf{X}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

(77)

$$\mathbf{X}'_n = \mathrm{Coeq}\left(\coprod_{i+j+k=n} \mathrm{Ind}^{\Phi'_n}_{\Phi'_i\times\Phi_j\times\Phi_k} F'^{\circ i} F^{\circ j}\mathbf{X}_k \rightrightarrows \coprod_{l+m=n} \mathrm{Ind}^{\Phi'_n}_{\Phi'_l\times\Phi_m} F'^{\circ l}\mathbf{X}_m \right)$$

La première flèche étant celle induite par la transformation naturelle $F \longrightarrow F'$ et la seconde est celle induite par les morphismes d'assemblage du (F, Φ)-spectre $\mathbf{X}$. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
F'^{\circ h}\left(\coprod_{i+j+k=n} \mathrm{Ind}_{\Phi'_i\times\Phi_j\times\Phi_k}^{\Phi'_n} F'^{\circ i}F^{\circ j}\mathbf{X}_k\right) \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \left(\coprod_{i'+j'+k'=n+h} \mathrm{Ind}_{\Phi'_{i'}\times\Phi_{j'}\times\Phi_{k'}}^{\Phi'_{n+h}} F'^{\circ i'}F^{\circ j'}\mathbf{X}_{k'}\right) \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\
F'^{\circ h}\left(\coprod_{l+m=n} \mathrm{Ind}_{\Phi'_l\times\Phi_m}^{\Phi'_n} F'^{\circ l}\mathbf{X}_m\right) \arrow[r] & \left(\coprod_{l'+m'=n+h} \mathrm{Ind}_{\Phi'_{l'}\times\Phi_{m'}}^{\Phi'_{n+h}} F'^{\circ l'}\mathbf{X}_{m'}\right)
\end{tikzcd}$$

est un morphisme de doubles flèches qui est de plus $\Phi'_h \times \Phi'_n$-équivariant. En passant au coégalisateurs et en utilisant la commutation de F aux colimites, on obtient une structure de (F', Φ')-spectre $\mathbf{X}'$ sur la suite $(\mathbf{X}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrons que le foncteur qui à $\mathbf{X}$ associe $\mathbf{X}'$ est adjoint à gauche du foncteur oubli. Soit $\mathbf{Y}'$ un (F', Φ')-spectre. Un morphisme de (F', Φ')-spectres $\mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{Y}'$ est une famille de morphismes $f_{l,m} : F'^{\circ l}\mathbf{X}_m \longrightarrow \mathbf{Y}'_n$ qui sont $\Phi'_l \times \Phi_m$-équivariants et tels que :

(i) Pour $i + j + k = n$ le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
F'^{\circ i}F^{\circ j}\mathbf{X}_k \arrow[r] \arrow[d] & F'^{\circ i+j}\mathbf{X}_k \arrow[d, "f_{i+j,k}"] \\
F'^{\circ i}\mathbf{X}_{j+k} \arrow[r, "f_{i,j+k}"'] & \mathbf{Y}'_n
\end{tikzcd}$$

est commutatif,

(ii) Pour $l + m = n$ le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
F' \circ F'^{\circ l}\mathbf{X}_m \arrow[r, "F'(f_{l,m})"] \arrow[d, equal] & F'\mathbf{Y}'_n \arrow[d] \\
F'^{\circ l+1}\mathbf{X}_m \arrow[r, "f_{l+1,m}"'] & \mathbf{Y}'_{n+1}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

La condition (ii) équivaut à dire que $f_{l,m}$ est égale à la composée :

$$F'^{\circ l}\mathbf{X}_m \xrightarrow{f_{0,m}} F'^{\circ l}\mathbf{Y}'_m \longrightarrow \mathbf{Y}'_n$$

De plus, la flèche $f_{0,m} : \mathbf{X}_m \longrightarrow \mathbf{Y}'_m$ est Φ_m-équivariante si et seulement si elle est $\Phi'_0 \times \Phi_m$-équivariante (puisque Φ'_0 opère *via* l'action $\Phi'_0 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$). En

présence de (ii), la condition (i) fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F\mathbf{X}_k \arrow[r, "F(f_{0,k})"] \arrow[dd] \arrow[dr, bend left] & F\mathbf{Y}'_k \arrow[dr, bend left] & \\
& F'\mathbf{X}_k \arrow[r, "F'(f_{0,k})"] \arrow[d, "f_{1,k}"'] & F'\mathbf{Y}'_k \arrow[dl] \\
\mathbf{X}_{k+1} \arrow[r, "f_{0,k+1}"'] & \mathbf{Y}'_{k+1} &
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que les $f_{0,m} : \mathbf{X}_m \longrightarrow \mathbf{Y}'_m$ définissent un morphisme de (F, Φ)-spectres.

Réciproquement, étant donné un morphisme $(f_n) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}'$ de (F, Φ)-spectres, on prend pour $f_{l,m}$ la composée :

$$F'^{ol}\mathbf{X}_m \xrightarrow{f_m} F'^{ol}\mathbf{Y}'_m \longrightarrow \mathbf{Y}'_{m+l}$$

Il est immédiat de vérifier les conditions (i) et (ii) pour cette famille de morphismes.

En d'autres termes se donner un morphisme de (F', Φ')-spectres $\mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{Y}'$ équivaut à se donner un morphisme de (F, Φ)-spectres $\mathbf{X} \longrightarrow \mathrm{Oub}_{F,\Phi}^{F',\Phi'}(\mathbf{Y}')$. □

Remarque 4.3.12. — Pour $p \in \mathbb{N}$, on dispose d'un carré et d'un triangle commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathrm{Oub}_{F,\Phi}^{F'\Phi'}"] \arrow[d, "\underline{\mathrm{Ev}}_p"'] & \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[d, "\underline{\mathrm{Ev}}_p"] \\
\mathbf{Rep}(\Phi'_p, \mathcal{C}) \arrow[r, "\mathrm{Oub}_{\Phi_p}^{\Phi'_p}"] & \mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) \arrow[rr, "\mathrm{Oub}_{F,\Phi}^{F'\Phi'}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ev}_p"'] & & \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[dl, "\mathrm{Ev}_p"] \\
& \mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

En passant aux adjoints à gauche, on obtient deux isomorphismes de foncteurs :

$$(F', \Phi') \otimes_{F,\Phi} (\underline{\mathrm{Sus}}_{F,\Phi}^p(-)) \simeq \underline{\mathrm{Sus}}_{F',\Phi'}^p(\mathrm{Ind}_{\Phi_p}^{\Phi'_p}(-))$$

et

$$(F', \Phi') \otimes_{F,\Phi} (\mathrm{Sus}_{F,\Phi}^p(-)) \simeq \mathrm{Sus}_{F',\Phi'}^p(-)$$

On a également des opérations de décalage sur les (F, Φ)-spectres :

Définition 4.3.13

1- On note $s_- : \mathbf{Suite}(\Phi, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Suite}(\Phi, \mathcal{C})$ *le foncteur qui à une suite* Φ-*symétrique* $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *associe la suite* Φ-*symétrique* $s_-(X)$ *définie par* $(s_-(X))_n = X_{n+1}$ *muni de l'action de* Φ_n *obtenue par restriction suivant le morphisme* $\phi_{n,1}(-, 1) : \Phi_n \longrightarrow \Phi_{n+1}$.

2- Supposons que $\mathcal{C}$ admet les colimites pertinentes. Le foncteur s_- admet un adjoint à gauche s_+. Ce dernier, associe à la suite Φ-symétrique X la suite Φ-symétrique $s_+(X)$ définie par :

$$(s_+(X))_n = \begin{cases} \varnothing & si \quad n = 0, \\ \mathrm{Ind}_{\Phi_{n-1}\times 1}^{\Phi_n} X_{n-1} & si \quad n \geq 1. \end{cases}$$

3- Supposons que le foncteur F commute aux colimites pertinentes. Les foncteurs s_+ et s_- s'étendent naturellement en un couple de foncteurs adjoints sur les (F, Φ)-spectres :

$$(s_+, s_-) : \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C})$$

tel que les carrés suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[r, "s_-"] \arrow[d, "\prod_n \mathrm{Ev}_n"'] & \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[d, "\prod_n \mathrm{Ev}_n"] \\ \mathbf{Suite}(\Phi, \mathcal{C}) \arrow[r, "s_-"] & \mathbf{Suite}(\Phi, \mathcal{C}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[r, "s_+"] \arrow[d, "\prod_n \mathrm{Ev}_n"'] & \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[d, "\prod_n \mathrm{Ev}_n"] \\ \mathbf{Suite}(\Phi, \mathcal{C}) \arrow[r, "s_+"] & \mathbf{Suite}(\Phi, \mathcal{C}) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Soit un (F, Φ)-spectre $\mathbf{X}$. Le morphisme d'assemblage $F[(s_-(\mathbf{X}))_n] \longrightarrow (s_-(\mathbf{X}))_{n+1}$ est $F\mathbf{X}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{X}_{n+2}$. Pour $n \geq 1$, le morphisme d'assemblage $F[(s_+(\mathbf{X}))_n] \longrightarrow (s_+(\mathbf{X}))_{n+1}$ est la composée :

$$F\left(\mathrm{Ind}_{\Phi_{n-1}}^{\Phi_n} \mathbf{X}_{n-1}\right) \simeq \left(\mathrm{Ind}_{\Phi_{n-1}}^{\Phi_n} F\mathbf{X}_{n-1}\right) \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_{\{1\}\times\Phi_{n-1}}^{\{1\}\times\Phi_n} \mathbf{X}_n\right) \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_{\Phi_n}^{\Phi_{1+n}} \mathbf{X}_n\right)$$

Remarque 4.3.14. — Du carré et triangle commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[r, "s_-"] \arrow[d, "\underline{\mathrm{Ev}}_n"'] & \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[d, "\underline{\mathrm{Ev}}_{n-1}"] \\ \mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C}) \arrow[r, "\mathrm{Oub}_{\Phi_{n-1}\times 1}^{\Phi_n}"] & \mathbf{Rep}(\Phi_{n-1}, \mathcal{C}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[rr, "s_-"] \arrow[dr, "\mathrm{Ev}_n"'] & & \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[dl, "\mathrm{Ev}_{n-1}"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

on déduit, par passage aux adjoints à gauche, deux isomorphismes de foncteurs $\underline{\mathrm{Sus}}_{F,\Phi}^n(\mathrm{Ind}_{\Phi_{n-1}}^{\Phi_n}(-)) \simeq s_+\underline{\mathrm{Sus}}_{F,\Phi}^{n-1}(-)$ et $\mathrm{Sus}_{F,\Phi}^n(-) \simeq s_+\mathrm{Sus}_{F,\Phi}^{n-1}(-)$.

Dans le même esprit, on a également :

Remarque 4.3.15. — Reprenons les notations et hypothèses de la proposition 4.3.11. Les deux carrés suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) \arrow[r, "s_-"] \arrow[d, "\mathrm{Oub}_{F,\Phi}^{F',\Phi'}"'] & \mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) \arrow[d, "\mathrm{Oub}_{F,\Phi}^{F',\Phi'}"] \\ \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[r, "s_-"] & \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) \arrow[r, "s_+"] \arrow[d, "\mathrm{Oub}_{F,\Phi}^{F',\Phi'}"'] & \mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathcal{C}) \arrow[d, "\mathrm{Oub}_{F,\Phi}^{F',\Phi'}"] \\ \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \arrow[r, "s_+"] & \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathcal{C}) \end{tikzcd}$$

commutent. Du premier carré ci-dessus, on obtient en passant aux adjoints à gauche un isomorphisme de foncteurs $(F', \Phi') \oslash_{F,\Phi} s_+(-) \simeq s_+((F', \Phi') \otimes_{F,\Phi} -)$.

On aura besoin d'une dernière construction :

Définition 4.3.16. — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories munies chacune d'un enfoncteur Φ-symétrique F et F'.*

1- Soient $K : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur et $\tau : F' \circ K \longrightarrow K \circ F$ une transformation naturelle. On dit que τ est Φ-symétrique *lorsque la composée :*

$$F'^{\circ n} \circ K \xrightarrow{\tau} F'^{\circ n-1} \circ K \circ F \xrightarrow{\tau} \dots \xrightarrow{\tau} K \circ F^{\circ n}$$

est Φ_n-équivariante.

2- Si τ est symétrique, le prolongement *de K (*suivant *τ) est le foncteur K_τ : $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C}')$ qui à un (F, Φ)-spectre $\mathbf{X}$ associe le (F', Φ)-spectre $K_\tau(\mathbf{X})$ avec $(K_\tau(\mathbf{X}))_n = K(\mathbf{X}_n)$ et pour morphisme d'assemblage, la composée :*

$$F'(K(\mathbf{X}_n)) \xrightarrow{\tau} K(F(\mathbf{X}_n)) \longrightarrow K(\mathbf{X}_{n+1})$$

Il est clair que l'association $(K, \tau) \rightsquigarrow K_\tau$ est compatible à la composition des foncteurs et est fonctorielle en les transformations naturelles qui commutent à τ.

Lemme 4.3.17. — *On garde les notations de la définition 4.3.16. Supposons que τ est Φ-symétrique et que K admet un adjoint à droite L. Si τ est inversible, la composée :*

$$\tau' \quad = \quad {}^a\tau^{-1} \quad : \quad F \circ L \longrightarrow L \circ K \circ F \circ L \xrightarrow{\tau^{-1}} L \circ F' \circ K \circ L \longrightarrow L \circ F'$$

est encore Φ-symétrique. De plus, le foncteur $L_{\tau'}$ est naturellement l'adjoint à droite de K_τ.

Démonstration. — Le fait que τ' est Φ-symétrique découle immédiatement de la proposition 1.1.12. Pour montrer que $L_{\tau'}$ est l'adjoint à droite de K_τ, remarquons que les foncteurs $L_{\tau'} \circ K_\tau$ et $K_\tau \circ L_{\tau'}$ sont les prolongements de $L \circ K$ et $K \circ L$ suivant les transformations Φ-symétriques $\tau' \circ \tau$ et $\tau \circ \tau'$. Étant donné que les 2-morphismes d'unité et de counité $1 \longrightarrow L \circ K$ et $K \circ L \longrightarrow 1$ sont compatibles avec ces transformations, on déduit des transformations naturelles $1 \longrightarrow L_{\tau'} \circ K_\tau$ et $K_\tau \circ L_{\tau'} \longrightarrow 1$. Ces transformations naturelles définissent une adjonction entre K_τ et $L_{\tau'}$. □

Remarque 4.3.18. — Gardons les hypothèses du lemme 4.3.17. Pour $p \in \mathbb{N}$, les carrés suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathcal{C}') \arrow[r, "L_{\tau'}"] \arrow[d, "\underline{\mathrm{Ev}}_p"'] & \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F}(\mathcal{C}) \arrow[d, "\underline{\mathrm{Ev}}_p"] \\ \mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C}') \arrow[r, "L"] & \mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathcal{C}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathcal{C}') \arrow[r, "L_{\tau'}"] \arrow[d, "\mathrm{Ev}_p"'] & \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F}(\mathcal{C}) \arrow[d, "\mathrm{Ev}_p"] \\ \mathcal{C}' \arrow[r, "L"] & \Phi_p, \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

commutent. En passant aux adjoints à gauche, on obtient deux isomorphismes canoniques : $K_\tau \circ \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi} \simeq \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F',\Phi} \circ K$ et $K_\tau \circ \mathrm{Sus}^p_{F,\Phi} \simeq \mathrm{Sus}^p_{F',\Phi} \circ K$.

On termine les généralités sur les spectres abstraits par la proposition suivante :

Proposition 4.3.19. — *Soit α un cardinal majorant le cardinal du monoïde Φ. On suppose que $\mathcal{C}$ est α-présentable au sens de la définition 4.2.16 et que le foncteur F admet un adjoint à droite G qui est α-accessible. Alors, la catégorie $\mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathcal{C})$ est également α-présentable.*

Démonstration. — La catégorie $\mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathcal{C})$ est complète et cocomplète. De plus, les limites et colimites commutent aux foncteurs d'évaluations $\mathrm{Ev}_n : \mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$. La première et deuxième condition de la définition 4.2.16 sont donc vérifiées.

Montrons qu'un (F, Φ)-spectre $\mathbf{X}$ est β-accessible si et seulement si tous les $\mathbf{X}_n$ sont des objets β-accessibles de $\mathcal{C}$. Le foncteur $\hom(\mathbf{X}, -)$ s'insère dans une suite exacte :

$$\hom(\mathbf{X}, -) \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} \hom_{\mathbf{Rep}(\Phi_n,\mathcal{C})}(\mathbf{X}_n, \underline{\mathrm{Ev}}_n(-)) \rightrightarrows \prod_{n\in\mathbb{N}} \hom_{\mathcal{C}}(F\mathbf{X}_n, \mathrm{Ev}_{n+1}(-))$$

Les foncteurs F, $\underline{\mathrm{Ev}}_n$ et Ev_n commutent aux colimites. D'autre part, une Φ_n-représentation est α-accessible dès que l'objet de $\mathcal{C}$ sous-jacent l'est (voir la preuve de la proposition 4.2.20). Il vient que $\mathbf{X}$ est α-accessible lorsque les $\mathbf{X}_n$ le sont.

Pour la réciproque, on remarque que le foncteur $\underline{\mathrm{Ev}}_n$ admet un adjoint à droite qui à une Φ_n-représentation A associe le (F, Φ)-spectre $d_n(A)$ défini par :

$$(d_n(A))_p = \begin{cases} * & \text{si} \quad p > n, \\ \mathrm{Fix}(\Phi_{n-p}, G^{\circ n-p}A) & \text{si} \quad p \leq n. \end{cases}$$

où $\mathrm{Fix}(\Phi_{n-p}, G^{\circ n-p}A)$ désigne l'objet invariant relativement à l'action de Φ_{n-p} *via* la diagonale :

$$\Phi_n \simeq \{(g, g),\ g \in \Phi_{n-p}\} \subset \Phi_{n-p} \times \Phi_{n-p} \xrightarrow{\mathrm{id} \times \phi_{n-p,p}(-,1)} \Phi_{n-p} \times \Phi_n$$

avec Φ_{n-p} opérant sur $G^{\circ n-p}$ par $g \in \Phi_{n-p} \rightsquigarrow {}^a(\mathrm{a}_F(g^{-1}))$. En effet, soient un (F, Φ)-spectre $\mathbf{X}$ et une flèche équivariante $\mathbf{X}_n \longrightarrow A$. La composée :

$$\mathbf{X}_p \longrightarrow G^{\circ n-p}F^{\circ n-p}\mathbf{X}_p \longrightarrow G^{\circ n-p}\mathbf{X}_n \longrightarrow G^{\circ n-p}A$$

se factorise par le sous-objet $\mathrm{Fix}(\Phi_{n-p}, G^{\circ n-p}A)$, étant donné que pour $g \in \Phi_{n-p}$ le triangle :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"'] & G^{\circ n-p} \circ F^{\circ n-p} \arrow[d, "{}^a g^{-1} \circ g"] \\ & G^{\circ n-p} F^{\circ n-p} \end{tikzcd}$$

commute. Les flèches $\mathbf{X}_p \longrightarrow (d_n(A))_p$ définissent un morphisme de (F, Φ)-spectres $\mathbf{X} \longrightarrow d_n(A)$. L'application $\hom_{\mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C})}(\mathbf{X}_n, A) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C})}(\mathbf{X}, d_n(A))$ ainsi obtenue est l'inverse de l'application évidente.

Le foncteur d_n est α-accessible, puisque c'est le cas des foncteurs G et $\mathrm{Fix}(\Phi_{n-p}, -)$. Si $\mathbf{X}$ est un (F, Φ)-spectre β-accessible, on montre que l'objet $\mathbf{X}_n$ est β-accessible en évaluant en une colimite β-filtrante d'objets de la forme $d_n(-)$.

Il reste à prouver la quatrième propriété. Elle découle du fait que le foncteur

$$\mathbf{Sub}_\beta(\mathbf{X}) \longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Sub}_\beta(\mathbf{X}_n) \tag{78}$$

est cofinal pour tout (F, Φ)-spectre $\mathbf{X}$. On peut obtenir la cofinalité de (78) en appliquant le lemme 4.2.4 au foncteur $\mathcal{E} : \mathbb{N}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{O}rd\mathcal{E}ns$ qui à $n \in \mathbb{N}$ associe $\mathbf{Sub}_\beta(\mathbf{X}_n)$ (où les sous-objets sont considérés dans $\mathbf{Rep}(\Phi_n, \mathcal{C})$) et à $m \leq n$ associe le foncteur $\mathbf{X}_m \times_{G^{\circ n-m}\mathbf{X}_n} G^{\circ n-m}(-)$. Les détails sont laissés aux lecteurs. □

4.3.2. Les (F, Φ)-spectres dans une catégorie de modèles. — Dans cette sous-section, on se donne une catégorie de modèles $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$. On suppose alors que F est un endofoncteur de Quillen à gauche de $\mathfrak{M}$ qui est Φ-symétrique au sens de la définition 4.3.4. On note G l'adjoint à droite de F.

Définition 4.3.20. — *Soit $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ une flèche de $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$.*

1- On dit que f est une équivalence faible *(resp.* cofibration, fibration*)* niveau par niveau *si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la flèche $f_n : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{Y}_n$ est une équivalence faible (resp. une cofibration, fibration) de la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$. On note $\mathbf{W}_{niv}$ (resp. $\mathbf{Cof}_{niv}$, $\mathbf{Fib}_{niv}$) la classe des équivalences faibles (resp. cofibrations, fibrations) niveau par niveau.*

2- On dit que f est une cofibration projective *(resp. une* fibration injective*) lorsqu'elle possède la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement aux fibrations triviales (resp. cofibrations triviales) niveau par niveau. On note $\mathbf{Cof}_{proj}$ (resp. $\mathbf{Fib}_{inj}$) la classe des cofibrations projectives (resp. fibrations injectives).*

On a la proposition suivante :

Proposition 4.3.21. — *Supposons que la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est présentable par cofibrations (voir la définition 4.2.39) et que le foncteur G est accessible. Supposons également que pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, les morphismes de groupes $\phi_{m,n}(-, 1) : \Phi_m \longrightarrow \Phi_{m+n}$*

sont injectifs. Alors, les deux quadruplets :

(79) $(\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{niv})$ *et* $(\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{niv}, \mathbf{Fib}_{inj})$

sont des catégories de modèles qui sont encore présentables par cofibrations.

Démonstration. — Soit α un cardinal majorant celui de Φ tel que G est α-accessible et $\mathfrak{M}$ α-présentable par cofibrations. On sait par la proposition 4.3.19 que $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})$ est α-présentable en tant que catégorie abstraite.

Les axiomes **(MC1)**, **(MC2)** et **(MC3)** sont vérifiés pour les deux quadruplets (79). Pour montrer les axiomes restants, on aura besoin de distinguer les deux cas :

Le cas de $(\mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{niv})$. — Les classes $\mathbf{Fib}_{niv}$ et $\mathbf{Fib}_{niv} \cap \mathbf{W}_{niv}$ coïncident respectivement avec :

$$\mathrm{RLP}\{\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u_0);\ p \in \mathbb{N} \text{ et } u_0 \in \mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W}\}$$

et

$$\mathrm{RLP}\{\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u);\ p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof}_\alpha\}$$

On peut donc appliquer l'argument du petit objet (voir la proposition 4.2.26) pour factoriser une flèche f de $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})$ en une flèche dans $\mathrm{Cell}\{\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u_0);\ p \in \mathbb{N} \text{ et } u_0 \in \mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W}\}$ suivie d'une fibration niveau par niveau. De même, on peut factoriser f en une flèche dans $\mathrm{Cell}\{\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u);\ p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof}_\alpha\}$ suivie d'une fibration triviale niveau par niveau. Ainsi, pour montrer l'axiome **(MC5)**, il reste à voir que $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u)$ (resp. $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u_0)$) est une cofibration projective (resp. une cofibration projective triviale) lorsque u (resp. u_0) est une cofibration (resp. une cofibration triviale) de $\mathfrak{M}$. Le premier cas est clair puisque l'on a défini les cofibrations projectives par la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales niveau par niveau.

Pour montrer le cas respectif, il suffit de vérifier que $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u_0)$ est une cofibration triviale niveau par niveau lorsque u_0 est une cofibration triviale. En effet cette propriété est stable par push-out et composition transfinie. Au niveau $n \geq p$, la flèche $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u_0)$ est donnée par $\mathrm{Ind}^{\Phi_n}_{\Phi_{n-p}} F^{\circ n-p}(u_0)$. Cette flèche est bien une cofibration triviale puisque $F^{\circ n-p}$ est un foncteur de Quillen à gauche et que $\phi_{n-p,p}(-,1)$ est injectif.

L'axiome **(MC4)** (et plus précisément sa seconde moitié) s'obtient en appliquant l'astuce de Joyal. Nous avons donc montré que le triplet $(\mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{niv})$ est une structure de modèles sur $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})$.

Le foncteur F préserve les objets α-accessibles (voir la proposition 4.2.9). Il en est donc de même des foncteurs $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}$. Il vient que les cofibrations projectives $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u)$ et $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u_0)$ sont de buts α-accessibles lorsque u et u_0 le sont. Ceci montre la troisième propriété de la définition 4.2.39.

La seconde propriété de la définition 4.2.39 découle du fait que les cofibrations projectives sont des cofibrations niveau par niveau. En effet, une cofibration projective

est un rétract d'une flèche dans $\mathrm{Cell}\{\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u);\ p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof}_\alpha\}$. Il suffit donc de voir que les $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u)$ sont des cofibrations niveau par niveau. Au niveau $n \geq p$, cette flèche est donnée par $\mathrm{Ind}^{\Phi_n}_{\Phi_{n-p}} F^{\circ n-p}(u_0)$. Il s'agit bien d'une cofibration triviale puisque $F^{\circ n-p}$ est un foncteur de Quillen à gauche et que $\phi_{n-p,p}(-,1)$ est injectif.

Le cas de $(\mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{niv}, \mathbf{Fib}_{inj})$. — Il suffit de montrer l'égalité :

$$\mathbf{Fib}_{inj} = \mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_\beta \cap \mathbf{W}_{niv}) \tag{80}$$

pour un certain cardinal β. En effet, l'argument du petit objet fournit pour $f \in \mathsf{Fl}(\mathbf{Spect}^\Phi_F(\mathfrak{M}))$ une factorisation en une flèche dans $\mathrm{Cell}((\mathbf{Cof}_{niv})_\beta \cap \mathbf{W}_{niv})$ (resp. $\mathrm{Cell}((\mathbf{Cof}_{niv})_\beta)$) suivie par une flèche dans $\mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_\beta \cap \mathbf{W}_{niv})$ (resp. $\mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_\beta)$). L'axiome **(MC5)** sera satisfait si l'on sait que $\mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_\beta) \subset \mathbf{W}_{niv} \cap \mathbf{Fib}_{inj}$. L'inclusion $\mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_\beta) \subset \mathbf{Fib}_{inj}$ découle de (80). L'inclusion $\mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_\beta) \subset \mathbf{W}_{niv}$ est vraie dès que $\beta \geq \alpha$. En effet, on a vu dans la première partie de la preuve que $\mathbf{Cof}_{proj} \subset \mathbf{Cof}_{niv}$ et que $\mathrm{LLP}((\mathbf{Cof}_{proj})_\alpha) = \mathbf{Fib}_{niv} \cap \mathbf{W}_{niv} \subset \mathbf{W}_{niv}$. On applique encore une fois l'astuce de Joyal pour obtenir l'axiome **(MC4)**.

Dans la suite, on supposera que β majore le cardinal d'une petite catégorie équivalente à $\mathfrak{M}_\alpha$ et qu'il est de la forme 2^ν pour $\nu \geq \alpha$ (comme dans la proposition 4.2.41). Pour montrer (80), on utilisera les techniques développées dans la sous-section 4.2.3. Soit donc $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ une flèche dans $\mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{niv})_\beta \cap \mathbf{W}_{niv})$. On montrera que f possède la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les cofibrations triviales niveau par niveau.

Soit un carré commutatif dans $\mathbf{Spect}^\Phi_F(\mathfrak{M})$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

avec u une cofibration triviale niveau par niveau. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on fixe un relèvement $r_n : \mathbf{B}_n \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u_n)$ comme dans le cas respectif de la définition 4.2.45. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des classes d'isomorphismes de familles $(v_n, a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec :

- $v_n : \mathbf{A}_n \longrightarrow T_n$ une sous-flèche r_n-normale de $c_0(u_n)$ (voir la définition 4.2.51),
- $a_n : s(T_n) \longrightarrow \mathbf{X}_n$ un relèvement partiel :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_n \arrow[rr] \arrow[d, "s(v_n)"'] & & \mathbf{X}_n \arrow[d, "f_n"] \\ s(T_n) \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "a_n"] & \mathbf{B}_n \arrow[r] & \mathbf{Y}_n \end{tikzcd}$$

(où $s(T_n)$ est le sous-objet $T_n \times_{\Phi_{c_0 f}(u_n), r_n} \mathbf{B}_n$)

et vérifiant les conditions suivantes :

(i) La famille $(s(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ définit naturellement un sous-(F,Φ)-spectre $\mathbf{s}((T_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de $\mathbf{B}$. En d'autres termes, l'action de Φ_n sur $\mathbf{B}_n$ préserve $s(T_n)$ et la composée $F(s(T_n)) \longrightarrow F\mathbf{B}_n \longrightarrow \mathbf{B}_{n+1}$ se factorise à travers $s(T_{n+1})$,

(ii) La famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit un morphisme de (F,Φ)-spectres $\mathbf{s}((T_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow \mathbf{B}$.

Cet ensemble est naturellement ordonné par la relation suivante : $(v_n,a_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (v'_n,a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $n\in\mathbb{N}$, la sous-flèche v_n est majorée par v'_n et si la restriction de a'_n à $s(T_n)$ est égale à a_n. De plus, toute chaîne de $\mathscr{E}$ est majorée par sa colimite (par la proposition 4.2.54). Par le lemme de Zorn, cet ensemble admet des éléments maximaux. Dans la suite, nous fixons un élément maximal $(v_n,a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{E}$. On montrera que $T_n \simeq \Phi_{c_0 f}(u_n)$. Ceci terminera la preuve de la proposition.

On considère le diagramme suivant dans $\mathcal{O}rd\mathcal{E}ns$ (voir la définition 4.2.56) :

$$\begin{tikzcd} \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v_n}(u_n|r_n) \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "P"'] \arrow[d, shift right, "Q"'] \arrow[d, shift left, "R"] & \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Sub}_\beta(u_n) \\ \prod_{n\in\mathbb{N}, g\in\Phi_n} \mathbf{Sub}_\beta(u_n) & \end{tikzcd} \tag{81}$$

avec :

- P le foncteur qui à une famille de sous-flèches $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la famille $(u_n \times_{G(u_{n+1})} G(u'_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$,
- Q le foncteur qui à une famille $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la famille $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}, g\in\Phi_n}$,
- R le foncteur qui à une famille $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la famille $(g\circ u'_n)_{n\in\mathbb{N}, g\in\Phi_n}$,

Le lecteur vérifiera facilement que les hypothèses du lemme 4.2.4 sont satisfaites (il faut bien entendu utiliser le lemme 4.2.57). Il vient que la limite $\mathcal{L}$ du diagramme (81) est cofinale dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v_n}(u_n|r_n)$. Un calcul immédiat montre que $\mathcal{L}$ est formée des familles $(u'_n : \mathbf{A}'_n \longrightarrow \mathbf{B}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que :

1. u'_n est une sous-flèche r_n-spéciale de u_n qui est orthogonale à v_n,
2. Les sous-objets $\mathbf{A}'_n$ et $\mathbf{B}'_n$ sont stables par l'action de Φ_n sur $\mathbf{A}_n$ et $\mathbf{B}_n$ respectivement,
3. On a des isomorphismes $\mathbf{A}'_n \simeq \mathbf{A}_n \times_{G(\mathbf{A}_{n+1})} G(\mathbf{A}'_{n+1})$ et $\mathbf{B}'_n \simeq \mathbf{B}_n \times_{G(\mathbf{B}_{n+1})} G(\mathbf{B}'_{n+1})$.

Il vient en particulier, que les familles $(\mathbf{A}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbf{B}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissent des sous-(F,Φ)-spectres $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

Considérons les sous-flèches $v'_n : \mathbf{A}'_n \longrightarrow T'_n$ avec $T'_n = T_n \times_{\Phi_{c_0 f}(u_n)} \Phi_{c_0 f}(u'_n)$. Comme u'_n est orthogonale à v_n, la sous-flèche v'_n de $c_0(u'_n)$ est normale. En particulier, $s(T'_n) \longrightarrow \mathbf{B}'_n$ est une cofibration triviale. D'autre part, la famille $s(T'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un sous-(F,Φ)-spectre de $\mathbf{B}'$ que l'on notera $\mathbf{s}((T'_n)_{n\in\mathbb{N}})$. On a évidemment $\mathbf{s}((T'_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathbf{s}((T_n)_{n\in\mathbb{N}}) \times_{\mathbf{B}} \mathbf{B}'$.

Étant donné que $\mathbf{s}((T'_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longrightarrow \mathbf{B}'$ est une cofibration triviale niveau par niveau et de but β-accessible, on peut trouver un relèvement dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{s}((T'_n)_{n\in\mathbb{N}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{s}((T_n)_{n\in\mathbb{N}}) \arrow[r, "a"] & \mathbf{X} \arrow[d] \\
\mathbf{B}' \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "l=(l_n)_n"] & \mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}$$

Par la proposition 4.2.55, la famille $(\mathbf{A}_n \to T_n \coprod_{T'_n} \Phi_{c_0 f}(u'_n), a_n \cup l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fournit un majorant de $(v_n, a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par maximalité, on voit alors que $\Phi_{c_0 f}(u'_n)$ est un sous-objet de T_n. Comme $\mathcal{L}$ est cofinal dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Sub}_\beta(u_n)$ on déduit immédiatement que $T = \Phi_{c_0 f}(u)$. □

Définition 4.3.22. — *Gardons les hypothèses de la proposition 4.3.21. Le triplet* $(\mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{niv})$ *est appelé la structure de modèles* projective instable *sur* $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$. *Le triplet* $(\mathbf{W}_{niv}, \mathbf{Cof}_{niv}, \mathbf{Fib}_{inj})$ *est appelée la structure de modèles* injective instable *sur* $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$. *On notera* $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})) = \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})[\mathbf{W}_{niv}^{-1}]$.

À partir de maintenant, la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ sera supposée présentable par cofibrations et le foncteur G accessible. Sauf mention explicite du contraire, tous les monoïdes Φ, Φ', etc auront les morphismes $\phi_{m,n}(1,-)$, $\phi'_{m,n}(1,-)$, etc injectifs. On se concentrera surtout sur la structure projective de $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$. Notons le résultat suivant qui a été établi au cours de la preuve de la proposition 4.3.21.

Corollaire 4.3.23. — *Les cofibrations projectives de $\mathfrak{M}$ sont des cofibrations niveau par niveau. En particulier, si $\mathfrak{M}$ est propre à gauche, il en est de même de* $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ *munie de sa structure projective instable ou de sa structure injective instable.*

Notons les lemmes suivants :

Lemme 4.3.24. — *Pour $p \in \mathbb{N}$, l'adjonction* $(\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}, \mathrm{Ev}_p) : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{M}$ *est une adjonction de Quillen relativement à la structure projective instable sur* $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — En effet, le foncteur Ev_p envoie les fibrations et les équivalences faibles niveau par niveau sur des fibrations et équivalences faibles de $\mathfrak{M}$. □

Lemme 4.3.25. — *Soient Φ' un monoïde gradué dans la catégorie des groupes et F' un endofoncteur de Quillen à gauche Φ'-symétrique et tel que son adjoint à droite G' est accessible. On suppose donnés un morphisme de monoïdes gradués $\Phi \longrightarrow \Phi'$ ainsi qu'une transformation naturelle $F \longrightarrow F'$ qui est Φ-équivariante. Alors, le couple* $(\mathrm{Oub}^{F',\Phi'}_{F,\Phi}, (F',\Phi') \otimes_{F,\Phi} -)$ *est une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives instables sur* $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ *et* $\mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi'}(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — En effet, le foncteur $\mathrm{Oub}_{F,\Phi}^{F',\Phi'}$ préserve les équivalences faibles et les fibrations niveau par niveau. □

Lemme 4.3.26. — *L'adjonction* $(s_+, s_-) : \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})$ *est une adjonction de Quillen relativement à la structure projective instable sur* $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — En effet, s_- préserve les équivalences faibles et les fibrations niveau par niveau. □

Lemme 4.3.27. — *On suppose donnés deux catégories de modèles* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{M}'$ *présentables par cofibrations ainsi que des endofoncteurs* Φ*-symétriques* F *et* F' *qui sont des foncteurs de Quillen à gauche ayant des adjoints à droite accessibles. Soit* $K : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$ *un foncteur de Quillen à gauche muni d'une transformation naturelle* $\tau : F' \circ K \xrightarrow{\sim} K \circ F$ *inversible et* Φ*-symétrique (au sens de la définition 4.3.16). Alors le foncteur :*

$$K_\tau : \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}')$$

est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures projectives instables.

Démonstration. — Soit L l'adjoint à droite de K et τ' comme dans le lemme 4.3.17. Le prolongement K_τ admet pour adjoint à droite le prolongement $L_{\tau'}$. Il est immédiat que $L_{\tau'}$ préserve les fibrations et les fibrations triviales niveau par niveau. D'où le résultat. □

Soit X un objet de $\mathfrak{M}$ et p un entier naturel. On a $\mathrm{Ev}_{p+1}[\mathrm{Sus}_{F,\Phi}^p(X)] = \mathrm{Oub}_1^{\Phi_{p+1}}(\mathrm{Ind}_{\Phi_1}^{\Phi_{p+1}} F(X))$. Le morphisme évident $F(X) \longrightarrow \mathrm{Oub}_1^{\Phi_{p+1}}(\mathrm{Ind}_{\Phi_1}^{\Phi_{p+1}} F(X))$ correspond par adjonction à un morphisme :

$$\omega_X^p : \mathrm{Sus}_{F,\Phi}^{p+1}(F(X)) \longrightarrow \mathrm{Sus}_{F,\Phi}^p(X) \tag{82}$$

On note $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}_\beta$) la classe des flèches ω_X^p avec $p \in \mathbb{N}$ et X un objet cofibrant (resp. et β-accessible) de $\mathfrak{M}$. On notera $\mathbf{W}_{\mathscr{R}}$ (resp. $\mathbf{W}_{\mathscr{R}_\beta}$) la classe des $\mathscr{R}$-équivalences faibles (resp. $\mathscr{R}_\beta$-équivalences faibles) (voir la définition 4.2.64). Par le lemme 4.2.65, ces classes peuvent être définies relativement à la structure projective ou injective instable.

Lemme 4.3.28. — *On suppose que* $\mathfrak{M}$ *est propre à gauche, présentable par cofibrations et que* G *est accessible. Pour* β *suffisamment grand, on a* $\mathbf{W}_{\mathscr{R}_\beta} = \mathbf{W}_{\mathscr{R}}$.

Démonstration. — On utilisera librement l'existence de la localisation de Bousfield (voir le théorème 4.2.71) de la structure projective (ou injective) instable sur $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})$ suivant la classe essentiellement petite $\mathscr{R}_\beta$. Il suffit de montrer que $\omega_X^p \in \mathbf{W}_{\mathscr{R}_\alpha}$ pour X un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$. Dans la suite, le cardinal β sera pris comme dans la proposition 4.2.41.

Soit $r : X \longrightarrow \Phi_{cf_0}(\varnothing \to X)$ une rétraction comme dans la définition 4.2.45. Rappelons que $\mathbf{NormSub}(c(\varnothing \to X)|r)$ est la catégorie des sous-cofibrations r-normale $\varnothing \longrightarrow T$ de $\varnothing \longrightarrow \Phi_{cf_0}(\varnothing \to X)$ (voir la définition 4.2.51).

On considère l'ensemble ordonné formé des classes d'isomorphismes de sous-cofibrations r-normales $\varnothing \longrightarrow T$ de $\varnothing \longrightarrow \Phi_{cf_0}(\varnothing \to X)$, telle que $\omega_T^p \in \mathbf{W}_{\mathscr{R}_\beta}$. Toutes les chaînes totalement ordonnées de cet ensemble sont majorées par leur colimite (par la proposition 4.2.54). Par le lemme de Zorn, cet ensemble admet des éléments maximaux.

On fixe un élément maximal $\varnothing \longrightarrow T$. On va prouver que $T \simeq \Phi_{cf_0}(\varnothing \to X)$. En effet, dans le cas contraire, on peut trouver par le lemme 4.2.57 une sous-cofibration :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ T \arrow[r] & \Phi_{cf_0}(\varnothing \to X) \end{tikzcd}$$

avec U et V cofibrants et β-accessibles et telle que $\varnothing \to T \coprod_U V = T'$ est encore une sous-cofibration r-normale majorant strictement $\varnothing \to T$. Comme ω_U^p et ω_V^p sont dans $\mathbf{W}_{\mathscr{R}_\beta}$ on déduit que $\omega_{T'}^p$ est encore dans $\mathbf{W}_{\mathscr{R}_\beta}$. En effet, on peut regarder le triplet $(\omega_U^p, \omega_V^p, \omega_T^p)$ comme une équivalence faible entre deux objets cofibrants de la catégorie de modèles $\Gamma(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}))$ munie de sa structure de Reedy déduite de la structure $\mathscr{R}_\beta$-localisée. Le résultat découle alors du fait que la colimite de Γ-diagrammes est un foncteur de Quillen à gauche. Ceci contredit la maximalité de $\varnothing \to T$. □

Le lemme 4.3.28 et le théorème 4.2.71 montrent l'existence des $\mathscr{R}$-localisations de Bousfield des structures instables sur $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$.

Définition 4.3.29. — *On suppose que $\mathfrak{M}$ est propre à gauche, présentable par cofibrations et que G est accessible. La structure* projective *(resp.* injective*)* stable *sur $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ est la localisation de Bousfield de la structure projective (resp. injective) instable de la définition 4.3.22 suivant la classe $\mathscr{R}$. On note $\mathbf{W}_{st}$ la classe des $\mathscr{R}$-équivalences faibles qui seront alors appelées les* équivalences stables. *On note également $\mathbf{Fib}_{proj-st}$ (resp. $\mathbf{Fib}_{inj-st}$) la classe des $\mathscr{R}$-fibrations projectives (resp. injectives) qui seront appelées les* fibrations stables projectives *(resp.* injectives*). On pose finalement $\mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})) = \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})[\mathbf{W}_{st}^{-1}]$.*

On a une description simple des objets $\mathscr{R}$-locaux de $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$:

Proposition 4.3.30. — *Un objet fibrant niveau par niveau $\mathbf{X}$ de $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ est $\mathscr{R}$-local si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ le morphisme obtenu par adjonction du morphisme d'assemblage :*

$$\mathbf{X}_n \longrightarrow G\mathbf{X}_{n+1} \tag{83}$$

est une équivalence faible.

Démonstration. — La condition est nécessaire. En effet pour tout A cofibrant de $\mathfrak{M}$, on a :

$$\pi_0(\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(A), \mathbf{X}) = \pi_0(A, \mathbf{X}_p)$$

Ainsi, pour $\mathbf{X}$ un (F,Φ)-spectre $\mathscr{R}$-local $\pi_0(A, \mathbf{X}_n) \simeq \pi_0(F(A), \mathbf{X}_{n+1}) \simeq \pi_0(A, G\mathbf{X}_{n+1})$. Par le lemme de Yoneda appliqué dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$, on déduit que (83) est une équivalence faible.

Montrons que la condition est suffisante. Soit $\mathbf{X}$ un (F,Φ)-spectre fibrant niveau par niveau tel que (83) est une équivalence faible pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer, pour $f \in \nabla_\infty(\mathscr{R})$, que l'application $\pi_0(f, X)$ est bijective.

Étant donné une flèche $u : A \longrightarrow B$, on notera ω^p_u la flèche :

$$\left(\mathrm{Sus}^{p+1}_{F,\Phi}(F(B)) \coprod_{\mathrm{Sus}^{p+1}_{F,\Phi}(F(A))} \mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(A)\right) \longrightarrow \mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(B)$$

On vérifie immédiatement que $\nabla(\omega^p_u) = \omega^p_{\nabla(u)}$ quitte à choisir convenablement les objets cylindres. Étant donné que $\omega^p_X = \omega^p_{\varnothing \to X}$, on voit que f est de la forme ω^p_u avec $u : A \longrightarrow B$ une cofibration entre objets cofibrants.

Se donner une flèche :

$$\gamma : \left(\mathrm{Sus}^{p+1}_{F,\Phi}(F(B)) \coprod_{\mathrm{Sus}^{p+1}_{F,\Phi}(F(A))} \mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(A)\right) \longrightarrow \mathbf{X}$$

équivaut à se donner un couple de flèches $(\gamma_B : F(B) \to \mathbf{X}_{n+1}, \gamma_A : A \to \mathbf{X}_n)$ tel que le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\gamma_A"] \arrow[d, "F(u)"'] & F\mathbf{X}_n \arrow[d] \\ F(B) \arrow[r, "\gamma_B"'] & \mathbf{X}_{p+1} \end{tikzcd}$$

commute. Ceci, équivaut à se donner un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{X}_n \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\gamma"'] & G\mathbf{X}_{n+1} \end{tikzcd}$$

De même, se donner une homotopie à droite entre deux telles flèches γ_1 et γ_2 revient à se donner une homotopie à droite dans la catégorie de modèles $\underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathfrak{M})$ (pour la structure de Reedy de la proposition 4.1.53 associée à l'ensemble ordonné $\underline{\mathbf{1}} = \{0 < 1\}$) entre les deux flèches :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{X}_n \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\gamma_1"'] & G\mathbf{X}_{n+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "u"'] & \mathbf{X}_n \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\gamma_2"'] & G\mathbf{X}_{n+1} \end{tikzcd}$$

On a donc un isomorphisme canonique :

$$\pi_0\left(\left(\mathrm{Sus}^{p+1}_{F,\Phi}(F(B)) \coprod_{\mathrm{Sus}^{p+1}_{F,\Phi}(F(A))} \mathrm{Sus}^{p}_{F,\Phi}(A)\right), \mathbf{X}\right) \simeq \pi_0(A \to B, \mathbf{X}_n \to G\mathbf{X}_{n+1})$$

Il suffit alors de montrer que le morphisme canonique :

$$\pi_0(B, \mathbf{X}_n) \longrightarrow \pi_0(A \to B, \mathbf{X}_n \to G\mathbf{X}_{n+1})$$

est inversible. Ceci est vrai, étant donné que la flèche évidente $(\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_n) \longrightarrow (\mathbf{X}_n \to G\mathbf{X}_{n+1})$ est une équivalence faible dans $\underline{\mathsf{HOM}}(\underline{\mathbf{1}}, \mathfrak{M})$. □

Définition 4.3.31. — *Un (F, Φ)-spectre $\mathbf{X}$ est appelé un $\Omega_{F,\Phi}$-*spectre *(ou simplement Ω-*spectre*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la flèche $\mathbf{X}_n \longrightarrow \mathsf{R}G\mathbf{X}_{n+1}$ est inversible dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.*

Ainsi, les objets fibrants de $(\mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ sont les Ω-spectres fibrants niveau par niveau.

Lemme 4.3.32. — *Soient Φ' un monoïde gradué dans la catégorie des groupes et F' un endofoncteur de Quillen à gauche Φ'-symétrique et tel que son adjoint à droite G' est accessible. On suppose donnés un morphisme de monoïdes gradués $\Phi \longrightarrow \Phi'$ ainsi qu'une transformation naturelle Φ-équivariante $F \longrightarrow F'$ tel que $F(X) \longrightarrow F'(X)$ est une équivalence faible pour tout X cofibrant de $\mathfrak{M}$. Alors, le couple $(\mathrm{Oub}^{F',\Phi'}_{F,\Phi}, (F', \Phi') \otimes_{F,\Phi} -)$ est une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives stables sur $\mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathfrak{M})$ et $\mathbf{Spect}^{\Phi'}_{F'}(\mathfrak{M})$.*

Démonstration. — Par la remarque 4.2.59, il suffit de montrer que les flèches $(F', \Phi') \otimes_{F,\Phi} \omega^p_X$ sont des équivalences stables pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$ cofibrant. Par la remarque 4.3.12 on a des isomorphismes de foncteurs $(F', \Phi') \otimes_{F,\Phi} (\mathrm{Sus}^n_{F,\Phi}(-)) \simeq \mathrm{Sus}^n_{F',\Phi'}(-)$. Modulo ces identifications, la flèche $(F', \Phi') \otimes_{F,\Phi} \omega^p_X$ se factorise de la manière suivante :

$$\mathrm{Sus}^{p+1}_{F',\Phi'}(F(X)) \longrightarrow \mathrm{Sus}^{p+1}_{F',\Phi'}(F'(X)) \xrightarrow{\omega^p_X} \mathrm{Sus}^{p}_{F',\Phi'}(X)$$

Il suffit donc de prouver que la première flèche ci-dessus est une équivalence faible niveau par niveau. Ceci est bien le cas puisque $\mathrm{Sus}^{p+1}_{F',\Phi'}$ est un foncteur de Quillen à gauche et que $F(X) \longrightarrow F'(X)$ est une équivalence faible entre objets cofibrants. □

Lemme 4.3.33. — *L'adjonction (s_+, s_-) : $\mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathfrak{M})$ est une adjonction de Quillen relativement à la structure projective stable sur $\mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathfrak{M})$.*

Démonstration. — On sait que (s_+, s_-) est une adjonction de Quillen pour les structures projectives instables. Le résultat découle alors de la remarque 4.2.59 et du fait que $s_+(\omega^p_X) = \omega^{p+1}_X$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. □

Lemme 4.3.34. — *On suppose données deux catégories de modèles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ présentables par cofibrations ainsi que des endofoncteurs Φ-symétriques F et F' qui sont des foncteurs de Quillen à gauche ayant des adjoints à droite accessibles. Soit $K : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$ un foncteur de Quillen à gauche muni d'une transformation naturelle $\tau : F' \circ K \xrightarrow{\sim} K \circ F$ inversible et Φ-symétrique (au sens de la définition 4.3.16). Alors, le foncteur :*

$$K_\tau : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}')$$

est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures projectives stables.

Démonstration. — En utilisant la remarque 4.3.18 on voit que $K_\tau(\omega_X^p) \simeq \omega_{K(X)}^p$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. Le résultat découle alors du lemme 4.3.27 et de la remarque 4.2.59. □

Notons également le résultat suivant :

Proposition 4.3.35. — *Si (F, G) est une équivalence de Quillen alors l'adjonction :*

$$(\mathrm{Sus}^0_{F,\Phi}, \mathrm{Ev}_0) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$$

est une équivalence de Quillen lorsque $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ est munie de sa structure projective stable.

Démonstration. — Le couple $(\mathrm{Sus}^0_{F,\Phi}, \mathrm{Ev}_0)$ est une adjonction de Quillen par 4.3.24 Montrons que le morphisme d'unité :

$$1 \longrightarrow \mathsf{R}\mathrm{Ev}_0 \circ \mathsf{L}\mathrm{Sus}^0_{F,\Phi} \tag{84}$$

est inversible. Soit donc X_0 un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$. Comme $F^{\circ n} X_0$ est cofibrant et que (F, G) est une équivalence de Quillen, le morphisme d'unité :

$$F^{\circ n} X_0 \longrightarrow \mathsf{R}GF^{\circ n+1} X_0$$

est inversible dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Il vient que le (F, Φ)-spectre $\mathrm{Sus}^0_{F,\Phi}(X_0)$ est un Ω-spectre au sens de la définition 4.3.31. Choisissons une cofibration triviale niveau par niveau $\mathrm{Sus}^0_{F,\Phi}(X_0) \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $\mathbf{R}$ fibrant niveau par niveau. Le spectre $\mathbf{R}$ est alors fibrant relativement à la structure $(\mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$. Le résultat est maintenant clair puisque l'évaluation de (84) en X_0 est donnée par $X_0 \longrightarrow \mathbf{R}_0$.

Il reste encore à démontrer que la counité :

$$\mathsf{L}\mathrm{Sus}^0_{F,\Phi} \circ \mathsf{R}\mathrm{Ev}_0\, \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X} \tag{85}$$

est inversible. On peut supposer que $\mathbf{X}$ est fibrant relativement à $(\mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$. Il suffit de montrer que le morphisme $\mathsf{L}F^{\circ n}\mathbf{X}_0 \longrightarrow \mathbf{X}_n$ est inversible dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ce morphisme se factorise de la manière suivante :

$$\mathsf{L}F^{\circ n}\mathbf{X}_0 \longrightarrow \mathsf{L}F^{\circ n}G^{\circ n}\mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{X}_n \tag{86}$$

La flèche de droite de (86) est inversible. En effet, il s'agit de la counité de l'équivalence de Quillen (F, G). D'autre part, la flèche $\mathbf{X}_0 \longrightarrow G^{\circ n}\mathbf{X}_n$ est une équivalence faible. Comme $\mathsf{L}F^{\circ n}$ envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes, la flèche de gauche de (86) est également inversible. La proposition est démontrée. □

Pour $\tau \in \Phi_2$, on note $\tau_{(n)} \in \Phi_{n+1}$ l'élément $\tau_1 \dots \tau_n$ avec $\tau_i = \phi_{i-1,2,n-i}(1, \tau, 1)$ l'image de τ par le morphisme :

$$\phi_{i-1,2,n-i}(1, -, 1) : \ \Phi_2 = 1 \times \Phi_2 \times 1 \longrightarrow \Phi_{i-1} \times \Phi_2 \times \Phi_{n-i} \longrightarrow \Phi_{n+1}$$

Définition 4.3.36. — *L'élément $\tau \in \Phi_2$ est dit* symétrique *lorsque pour tout $g \in \Phi_n$ on a :*

$$\tau_{(n)}.\phi_{n,1}(g, 1) = \phi_{1,n}(1, g).\tau_{(n)} \tag{87}$$

où $\phi_{n,m} : \ \Phi_m \times \Phi_n \longrightarrow \Phi_{m+n}$ désigne le morphisme structural du monoïde Φ.

Exemple 4.3.37. — La transposition $\tau = (12) \in \Sigma_2$ est un élément symétrique du monoïde des groupes symétriques Σ (voir l'exemple 4.3.1). En effet, la permutation $\tau_{(n)}$ est égale au produit des transpositions :

$$(12)(23)\dots(n-1, n)(n, n+1) = (1, 2, 3, \dots, n, n+1)$$

En particulier, sa restriction à $\{1, \dots, n\}$ est donnée par $i \rightsquigarrow i+1$. Il vient que pour $g \in \Sigma_n$, on a $\tau_{(n)}(g \bullet 1) = (1 \bullet g)\tau_{(n)}$.

Si $\tau \in \Phi_2$ est un élément symétrique, la transformation naturelle $\mathrm{a}_F(\tau)$: $F \circ F \longrightarrow F \circ F$ est Φ-symétrique au sens de la définition 4.3.16. En effet, la relation (87) se traduit par la commutation du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\left(\overbrace{F \circ \cdots \circ F}^{n}\right) \circ F \arrow[r, "\tau_n"] \arrow[d, "\phi_{n,1}(g,1)"'] & \left(\overbrace{F \circ \cdots \circ F}^{n-1}\right) \circ F \circ \arrow[r, "\tau_{n-1}"] & \dots \arrow[r, "\tau_1"] & F \circ \left(\overbrace{F \circ \cdots \circ F}^{n}\right) \arrow[d, "\phi_{1,n}(1,g)"] \\
\left(\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n}\right) \circ F \arrow[r, "\tau_n"] & \left(\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n-1}\right) \circ F \circ \arrow[r, "\tau_{n-1}"] & \dots \arrow[r, "\tau_1"] & F \circ \left(\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n}\right)
\end{tikzcd}$$

On en déduit un foncteur F_τ : $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$. Comme τ est un automorphisme, F_τ est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures projectives instable et stable (par le lemme 4.3.17). L'adjoint à droite de F_τ est donné par $G_{\tau'}$ avec $\tau' = {}^a\tau^{-1} : \ F \circ G \longrightarrow G \circ F$.

Soit $\mathbf{X}$ un (F, Φ)-spectre. Le (F, Φ)-spectre $F_\tau\mathbf{X}$ est donné au niveau n par $(F_\tau\mathbf{X})_n = F\mathbf{X}_n$. Montrons que les flèches composées de :

$$F\mathbf{X}_n \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{X}}} \mathbf{X}_{n+1} \xrightarrow{\tau_{(n)}^{-1}} \mathbf{X}_{n+1} \tag{88}$$

définissent un morphisme de (F, Φ)-spectres $F_\tau \mathbf{X} \longrightarrow s_- \mathbf{X}$. Remarquons d'abord que la composée (88) est Φ_n-équivariante. En effet, pour $g \in \Phi_n$ on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F\mathbf{X}_n \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{X}}"] \arrow[d, "(1,g)"'] & \mathbf{X}_{n+1} \arrow[r, "\tau_{(n)}^{-1}"] \arrow[d, "\phi_{1,n}(1,g)"] & \mathbf{X}_{n+1} \arrow[d, "\phi_{n,1}(g,1)"] \\
F\mathbf{X}_n \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{X}}"'] & \mathbf{X}_{n+1} \arrow[r, "\tau_{(n)}^{-1}"'] & \mathbf{X}_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que (88) commutent aux morphismes d'assemblages. Ceci se traduit par la commutation du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
F(F(\mathbf{X}_n)) \arrow[r, "F(\gamma_{\mathbf{X}})"] \arrow[d, equal] & F(\mathbf{X}_{n+1}) \arrow[rr, "F((\tau_{(n)})^{-1})"] & & F(\mathbf{X}_{n+1}) \arrow[dd, "\gamma_{\mathbf{X}}"] \\
F \circ F(\mathbf{X}_n) \arrow[d, "\tau"'] & & & \\
F \circ F(\mathbf{X}_n) \arrow[r, "F(\gamma_{\mathbf{X}})"] & F(\mathbf{X}_{n+1}) \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{X}}"] & \mathbf{X}_{n+2} \arrow[r, "\tau_{(n+1)}^{-1}"] & \mathbf{X}_{n+2}
\end{tikzcd}$$

Il est facile de voir que $\phi_{1,n+1}(1, \tau_i) = \tau_{i+1}$ avec τ_{i+1} considéré dans Φ_{n+2}. On déduit immédiatement la relation $\tau_{(n+1)} = \phi_{2,n}(\tau, 1).\phi_{1,n+1}(1, \tau_{(n)})$. Ceci permet de diviser notre diagramme en deux parties :

$$\begin{tikzcd}
F(F(\mathbf{X}_n)) \arrow[r, "F(\gamma_{\mathbf{X}})"] \arrow[d, equal] & F(\mathbf{X}_{n+1}) \arrow[rrr, "F((\tau_{(n)})^{-1})"] \arrow[ddrr, bend left, "\gamma_{\mathbf{X}}"] & & & F(\mathbf{X}_{n+1}) \arrow[dd, "\gamma_{\mathbf{X}}"] \\
F \circ F(\mathbf{X}_n) \arrow[d, "\tau"'] & (1) & & (2) & \\
F \circ F(\mathbf{X}_n) \arrow[r, "F(\gamma_{\mathbf{X}})"] & F(\mathbf{X}_{n+1}) \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{X}}"] & \mathbf{X}_{n+2} & \mathbf{X}_{n+2} \arrow[l, "\phi_{2,n}(\tau,1)"'] \arrow[r, "\phi_{1,n+1}(1,\tau_{(n)}^{-1})"] & \mathbf{X}_{n+2}
\end{tikzcd}$$

La partie (2) est commutative puisque les morphismes d'assemblages sont équivariants. De même, la partie (1) commute puisque la composée $F \circ F\mathbf{X}_n \longrightarrow F\mathbf{X}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{X}_{n+2}$ est $\Phi_2 \times \Phi_n$-équivariante. On notera $t_\tau : F_\tau \longrightarrow s_-$ la transformation naturelle définie par (88).

Théorème 4.3.38. — *On suppose l'existence d'un élément symétrique $\tau \in \Phi_2$. On a relativement à la catégorie de modèles $(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$:*

1- L'adjonction $(s_+, s_-) : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ est une équivalence de Quillen.

2- L'adjonction $(F_\tau, G_{\tau'}) : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M})$ est une équivalence de Quillen.

3- La transformation naturelle $t_\tau : F_\tau \longrightarrow s_-$ *induit un isomorphisme :* $\mathsf{L}F_\tau \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}s_-$.

Démonstration. — Il est clair que les deux foncteurs s_- et $G_{\tau'}$ commutent. On note $\Lambda = s_- \circ G_{\tau'} = G_{\tau'} \circ s_-$ leur composition. On dispose d'une transformation naturelle $\lambda : 1 \longrightarrow \Lambda$ obtenue en prenant la composée :

$$1 \xrightarrow{\eta} G_{\tau'} \circ F_\tau \xrightarrow{t_\tau} G_{\tau'} \circ s_-$$

Pour un (F, Φ)-spectre $\mathbf{X}$ et $n \in \mathbb{N}$, la flèche $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\eta} \Lambda(\mathbf{X})_n$ est la composée :

$$\mathbf{X}_n \longrightarrow G(F\mathbf{X}_n) \xrightarrow{G(\gamma_{\mathbf{X}})} G\mathbf{X}_{n+1} \xrightarrow{G(\tau_{(n)}^{-1})} G\mathbf{X}_{n+1} \tag{89}$$

Comme la flèche $G(\tau_{(n)}^{-1})$ de (89) est inversible, les deux conditions suivantes sont équivalentes pour un (F, Φ)-spectre $\mathbf{X}$ fibrant niveau par niveau :

- $\mathbf{X}$ est un Ω-spectre *i.e.* fibrant pour la structure $(\mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$,
- Le morphisme $\mathbf{X} \longrightarrow \Lambda(\mathbf{X})$ est une équivalence faible niveau par niveau.

On en déduit que la transformation naturelle $\lambda : 1 \longrightarrow \mathsf{R}\Lambda$ est inversible puisqu'elle se calcule sur les spectres fibrants pour la structure $(\mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$. Comme $\Lambda = G_{\tau'} \circ s_- = s_- \circ G_{\tau'}$, on obtient ainsi deux isomorphismes de foncteurs :

$$1 \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}G_{\tau'} \circ \mathsf{R}s_- \qquad \text{et} \qquad 1 \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}s_- \circ \mathsf{R}G_{\tau'}$$

Ceci montre que $\mathsf{R}G_{\tau'}$ et $\mathsf{R}s_-$ sont des équivalences de catégories. Les autres assertions sont alors immédiates. □

4.3.3. Comparaison des spectres. — Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles propre à gauche et présentable par cofibrations. Soient Φ et Φ' deux monoïdes gradués dans la catégorie des groupes. On supposera ici que les morphismes structuraux

$$\phi_{m,n}(-,-) : \Phi_m \times \Phi_n \longrightarrow \Phi_{m+n} \quad \text{et} \quad \phi'_{m,n}(-,-) : \Phi'_m \times \Phi'_n \longrightarrow \Phi'_{m+n}$$

sont injectifs pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Notons que cela implique en particulier que $\Phi_0 \simeq \Phi'_0 \simeq \{1\}$. On généralise la définition 4.3.36 de la manière suivante :

Définition 4.3.39. — *Supposons donné un morphisme de monoïdes gradués* $\alpha : \Phi \longrightarrow \Phi'$. *Un élément* $\sigma \in \Phi'_2$ *sera dit* symétrique relativement à Φ *lorsque pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $g \in \Phi_n$ *la relation suivante est satisfaite :*

$$\sigma_{(n)}.\phi'_{n,1}(\alpha(g), 1) = \phi'_{1,n}(1, \alpha(g)).\sigma_{(n)}$$

avec $\sigma_{(n)} = \sigma_1 \ldots \sigma_n$ *pour* $\sigma_i = \phi_{i-1,2,n-i}(1, \sigma, 1)$.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.3.40. — *Soient F et F' deux endofoncteurs Φ et Φ'-symétriques de $\mathfrak{M}$ qui sont des foncteurs de Quillen à gauche admettant des adjoints à droite accessibles. On suppose donnés un morphisme de monoïdes gradués $\alpha : \Phi \longrightarrow \Phi'$ et une transformation naturelle Φ-équivariante $F \longrightarrow F'$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) Il existe un élément symétrique $\tau' \in \Phi'_2$ tel que $\sigma = (\tau')^{-1}$ est symétrique relativement à Φ.

(ii) Pour X un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$, le morphisme $F(X) \longrightarrow F'(X)$ est une équivalence faible,

(iii) Le foncteur F'_σ : $\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M})$ est une équivalence de Quillen à gauche,

alors l'adjonction $((F',\Phi') \otimes_{F,\Phi} -, \mathrm{Oub}^{F',\Phi'}_{F,\Phi})$: $\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi'}_{F'}(\mathfrak{M})$ est une équivalence de Quillen relativement aux structures projectives stables.

Remarque 4.3.41. — La condition (i) ci-dessus est automatiquement satisfaite pour l'élément symétrique $\tau = (1,2) \in \Sigma_2$ puisque $\tau^{-1} = \tau$.

L'adjonction $((F',\Phi') \otimes_{F,\Phi} -, \mathrm{Oub}^{F',\Phi'}_{F,\Phi})$ est bien une adjonction de Quillen relativement aux structures stables par le lemme 4.3.32. De plus, cette adjonction de Quillen se décompose :

$$\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F}(\mathfrak{M}) \xrightarrow{F' \otimes_F -} \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M}) \xrightarrow{\Phi' \otimes_\Phi -} \mathbf{Spect}^{\Phi'}_{F'}(\mathfrak{M})$$

Ainsi, la preuve du théorème 4.3.40 se divise en deux parties. On traite d'abord le foncteur $- \otimes_F F'$. On montre plus précisément le résultat suivant :

Proposition 4.3.42. — *Soit $F \longrightarrow F'$ une transformation naturelle Φ-équivariante entre endofoncteurs de Quillen à gauche Φ-symétriques de $\mathfrak{M}$ qui admettent des adjoints à droite accessibles. On suppose que la flèche $F(X) \longrightarrow F'(X)$ est une équivalence faible pour $X \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$ cofibrant. Alors l'adjonction :*

$$(F' \otimes_F -, \mathrm{Oub}^{F'}_{F}) : \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F'}(\mathfrak{M})$$

est une équivalence de Quillen pour les structures projectives niveau par niveau et les structures projectives stables.

Nous aurons besoin de quelques lemmes préliminaires. Soit G un groupe. Une flèche f de $\mathbf{Rep}(G,\mathfrak{M})$ est appelée une équivalence faible lorsque $\mathrm{Oub}^{G}_{1}(f)$ est une équivalence faible de $\mathfrak{M}$. Si $\mathrm{Oub}^{G}_{1}(f)$ est une cofibration (resp. fibration), nous dirons que f est une cofibration injective (resp. fibration projective). On définit alors les fibrations injectives (resp. cofibrations projectives) par la propriété de relèvement à droite (resp.

à gauche) par rapport aux cofibrations injectives (resp. fibrations projectives) triviales. On obtient ainsi deux structure de catégories de modèles $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$ et $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj})$ sur $\mathbf{Rep}(G, \mathfrak{M})$. Le lecteur pourra consulter la sous-section 4.4.2 pour une preuve (dans le cas plus général des préfaisceaux). Il est clair que les adjonctions :

$$(\mathrm{Ind}_1^G, \mathrm{Oub}_1^G) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Rep}(G, \mathfrak{M})$$

et

$$(\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}, \underline{\mathrm{Ev}}_p) : \mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathfrak{M})$$

sont de Quillen relativement aux structures projectives sur $\mathbf{Rep}(G, \mathfrak{M})$, $\mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathfrak{M})$ et $\mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathfrak{M})$.

Lemme 4.3.43. — *Soit $v : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ une cofibration projective de $\mathbf{Spect}^{\Phi}_F(\mathfrak{M})$ de source projectivement cofibrante. Alors, u est rétracte d'une flèche de :*

$$\mathrm{Cell}\{\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(u) \colon p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathscr{C}\}$$

où $\mathscr{C} \subset \mathbf{Cof}_{proj}$ est la classe des cofibrations projectives de sources injectivement cofibrantes.

Démonstration. — On sait que v est rétracte d'une flèche de source $\mathbf{A}$ et qui est dans $\mathrm{Cell}\{\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u);\ p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof}\}$. On peut donc supposer que v est la composée transfinie d'une λ-suite :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(0) \longrightarrow \mathbf{A}(1) \ldots \longrightarrow \mathbf{A}(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}(\nu+1) \longrightarrow \ldots$$

telle que pour tout $\nu + 1 \in \lambda$, la flèche $\mathbf{A}(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}(\nu+1)$ est un push-out d'une flèche de $\{\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u);\ p \in \mathbb{N} \text{ et } u \in \mathbf{Cof}\}$. En particulier, tous les $\mathbf{A}(\nu)$ sont projectivement cofibrants. Il suffit donc de traiter le cas où $v : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ est le push-out d'une flèche $\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u)$ avec $u : C \longrightarrow D$ une cofibration de $\mathfrak{M}$. On dispose donc d'un carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(\mathrm{Ind}_1^{\Phi_p} C) \arrow[r, equal] & \mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(C) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(u)"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "v"] \\
\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(\mathrm{Ind}_1^{\Phi_p} D) \arrow[r, equal] & \mathrm{Sus}^p_{F,\Phi}(D) \arrow[r, "b"] & \mathbf{B}
\end{tikzcd} \tag{90}$$

Les flèches a et b correspondent par adjonction à $a : \mathrm{Ind}_1^{\Phi_p}(C) \longrightarrow \mathbf{A}_p$ et $b : \mathrm{Ind}_1^{\Phi_p}(D) \longrightarrow \mathbf{B}_p$. Étant donné que $\underline{\mathrm{Ev}}_p \circ \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi} = \mathrm{Ind}^{\Phi_p}_{\Phi_0 \times \Phi_p} = \mathrm{id}$, on déduit de (90) que le carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_1^{\Phi_p}(C) \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \mathbf{A}_p \arrow[d, "v_p"] \\
\mathrm{Ind}_1^{\Phi_p}(D) \arrow[r, "b"] & \mathbf{B}_p
\end{tikzcd} \tag{91}$$

est cocartésien. En particulier, v_p est une cofibration projective de $\mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathfrak{M})$. Notons également que $\mathbf{A}_p$ est injectivement cofibrant. En effet, par le corollaire 4.3.23, le (F, Φ)-spectre $\mathbf{A}$ est injectivement cofibrant. Ceci montre que $v_p \in \mathscr{C}$. On factorise le carré (90) de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(\mathrm{Ind}_1^{\Phi_p} C) \arrow[r, "\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(a)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}\mathbf{A}_p \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathbf{A} \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(\mathrm{Ind}_1^{\Phi_p} D) \arrow[r, "\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(b)"'] & \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}\mathbf{B}_p \arrow[r] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

Le carré (1) est cocartésien puisqu'il est l'image par le foncteur (commutant aux colimites) $\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}$ du carré cocartésien (91). Ceci montre que (2) est cocartésien *i.e.* v est un push-out de $\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(v_p)$. Le lemme est démontré. □

Lemme 4.3.44. — *On garde les hypothèses de la proposition 4.3.42. Pour* $\mathbf{X}$ *un* (F, Φ)-*spectre projectivement cofibrant, la flèche* $\mathbf{X} \longrightarrow \mathrm{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{X})$ *est une équivalence faible niveau par niveau.*

Démonstration. — En appliquant le lemme 4.3.43 à la cofibration projective $\varnothing \to \mathbf{X}$, on voit que l'on peut supposer $\mathbf{X} = \mathsf{Colim}_{\nu \in \lambda} \mathbf{A}(\nu)$ où :

$$\mathbf{A}(0) = \varnothing \longrightarrow \mathbf{A}(1) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbf{A}(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}(\nu+1) \longrightarrow \ldots$$

est une λ-suite avec $\mathbf{A}(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}(\nu+1)$ un push-out d'une flèche de $\{\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(u);\ p \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathscr{C}\}$. On forme alors le morphisme de λ-suites :

(92)
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(0) = \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & \mathbf{A}(\nu) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{A}(\nu+1) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
\mathrm{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(0)) = \varnothing \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & \mathrm{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu)) \arrow[r] & \mathrm{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu+1)) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Étant donné que $\mathscr{C} \subset \mathbf{Cof}_{proj}$, les flèches $\mathbf{A}(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}(\nu+1)$ sont des cofibrations projectives de (F, Φ)-spectres. Le foncteur $F' \otimes_F -$ préserve les cofibrations projectives et le foncteur $\mathrm{Oub}_F^{F'}$ préserve les cofibrations niveau par niveau. Il vient que les flèches $\mathrm{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu)) \longrightarrow \mathrm{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu+1))$ sont des cofibrations niveau par niveau. Ainsi, toutes les flèches horizontales de (92) sont des cofibrations niveau par niveau. Par le lemme 4.2.69, il suffira de prouver que les flèches verticales sont des équivalences faibles niveau par niveau.

On raisonne par récurrence transfinie sur $\nu \in \lambda$. Lorsque $\nu = 0$, il n'y a rien à montrer. Lorsque ν est limite, le résultat découle du lemme 4.2.69. Supposons donc

que $\nu = \mu + 1$. On fixe un carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(u)"'] & \mathbf{A}(\nu) \arrow[d] \\ \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(D) \arrow[r] & \mathbf{A}(\nu+1) \end{tikzcd}$$

avec $u \in \mathscr{C}$. En utilisant l'isomorphisme $F' \otimes_F \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi} \simeq \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F',\Phi}$ (voir la remarque 4.3.12) on déduit un carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Oub}^{F'}_F \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F',\Phi}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F',\Phi}(u)"'] & \mathrm{Oub}^{F'}_F (F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu)) \arrow[d] \\ \mathrm{Oub}^{F'}_F \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F',\Phi}(D) \arrow[r] & \mathrm{Oub}^{F'}_F (F' \otimes_F \mathbf{A}(\nu+1)) \end{tikzcd}$$

Étant donné que $\mathfrak{M}$ est propre à gauche, il suffit par le lemme 4.3.45 de montrer que la flèche :

$$\underline{\mathrm{Sus}}^p_{F,\Phi}(U) \longrightarrow \mathrm{Oub}^{F'}_F \underline{\mathrm{Sus}}^p_{F',\Phi}(U) \tag{93}$$

est une équivalence faible niveau par niveau pour $U \in \{C, D\}$ ou plus généralement pour U un objet injectivement cofibrant de $\mathbf{Rep}(\Phi_p, \mathfrak{M})$. Au niveau $n \geq p$, le morphisme (93) est donné par :

$$\mathrm{Ind}^{\Phi_n}_{\Phi_{n-p}\times\Phi_p} F^{\circ n-p}U \longrightarrow \mathrm{Ind}^{\Phi_n}_{\Phi_{n-p}\times\Phi_p} F'^{\circ n-p}U$$

Comme le morphisme de groupes $\phi_{n-p,p}$ est injectif, et que les objets $F^{\circ n-p}U$ et $F'^{\circ n-p}U$ sont cofibrants, il suffira de prouver que $F^{\circ n-p}U \longrightarrow F'^{\circ n-p}U$ est une équivalence faible. Cette flèche se factorise de la manière suivante :

$$F^{\circ n-p}U \longrightarrow F' \circ F^{\circ n-p-1}U \longrightarrow \ldots \longrightarrow F'^{n-p-1}FU \longrightarrow F'^{\circ n-p}U$$

Le résultat découle du fait que $F(V) \longrightarrow F'(V)$ est une équivalence faible pour V cofibrant, et que F' est un foncteur de Quillen à gauche (et donc préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants). □

Lemme 4.3.45. — *On suppose donné un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d] & A \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "c"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ B' & A' \arrow[l, "b'"'] \arrow[r, "c'"] & C' \end{tikzcd}$$

dans une catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ propre à gauche. On suppose que les flèches verticales sont des équivalences faibles et que b et b' sont des cofibrations. Alors, la flèche $B \coprod_A C \longrightarrow B' \coprod_{A'} C'$ est une équivalence faible.

Démonstration. — On peut former un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d] & A \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "d"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "c"] & D \arrow[r, "e"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
B' & A' \arrow[l, "b'"'] \arrow[r, "d'"] \arrow[rr, bend right, "c'"'] & D' \arrow[r, "e'"] & C'
\end{tikzcd}$$

avec d et d' des cofibrations et e et e' des équivalences faibles. Comme $\mathfrak{M}$ est propre, les flèches horizontales du carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
B \coprod_A D \arrow[r] \arrow[d] & B \coprod_A C \arrow[d] \\
B' \coprod_{A'} D' \arrow[r] & B' \coprod_{A'} C'
\end{tikzcd}$$

sont des équivalences faibles. Il suffit donc de prouver le lemme pour D et D' à la place de C et C'. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d] & A \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "d"] \arrow[d] & D \arrow[d] \\
B' & A' \arrow[l, "b'"'] \arrow[r, "d'"] & D'
\end{tikzcd}$$

définit une équivalence faible entre deux objets cofibrants de $\ulcorner(\mathfrak{M})$ pour la structure de Reedy (voir la proposition 4.1.53). Le résultat découle alors du fait que la colimite est un foncteur de Quillen à gauche. □

On peut maintenant prouver la proposition 4.3.42 :

Démonstration de la proposition 4.3.42. — Montrons d'abord que le foncteur $\mathsf{ROub}_F^{F'}$ est conservatif (*i.e.* détecte les isomorphismes). Soit $f' : \mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{Y}'$ un morphisme de $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi}(\mathfrak{M}))$ (resp. $\mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi}(\mathfrak{M}))$) tel que $\mathsf{ROub}_F^{F'}(f')$ est inversible. On peut alors supposer que f' est l'image d'une flèche entre objets fibrants niveau par niveau (resp. stablement fibrant). Dans les deux cas (instable et stable), $\mathsf{Oub}_F^{F'}(f')$ est une équivalence niveau par niveau. Ceci montre que f' est aussi une équivalence niveau par niveau de $\mathbf{Spect}_{F'}^{\Phi}(\mathfrak{M})$.

Sachant que $\mathsf{ROub}_F^{F'}$ est conservatif, il suffit de prouver que le morphisme d'unité :

$$1 \xrightarrow{\eta} \mathsf{ROub}_F^{F'} \circ \mathsf{L}(F' \otimes_F -) \tag{94}$$

est inversible. En effet, étant donné que la composée :

$$\mathsf{ROub}_F^{F'} \xrightarrow[\sim]{\eta} \mathsf{ROub}_F^{F'} \circ \mathsf{L}(F' \otimes_F -) \circ \mathsf{ROub}_F^{F'} \xrightarrow{\delta} \mathsf{ROub}_F^{F'}$$

est l'identité, on déduit que $\mathsf{ROub}_F^{F'}(\delta) : \mathsf{ROub}_F^{F'} \circ \mathsf{L}(F' \oslash_F -) \circ \mathsf{ROub}_F^{F'} \xrightarrow{\delta} \mathsf{ROub}_F^{F'}$ est un isomorphisme. Comme $\mathsf{ROub}_F^{F'}$ est conservatif, on obtient que le morphisme de counité $\mathsf{L}(F' \otimes_F -) \circ \mathsf{ROub}_F^{F'} \xrightarrow{\delta} 1$ est aussi inversible.

Le cas instable de la proposition 4.3.42 est maintenant facile. En effet, le foncteur $\mathrm{Oub}_F^{F'}$ préserve les équivalences faibles niveau par niveau. Il se dérive donc trivialement. Ainsi, l'inversibilité de (94) découle directement du lemme 4.3.44.

Le cas stable demande encore un peu de travail. Étant donné que tout objet de $\mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}))$ est isomorphe à un Ω-spectre, il suffit de prouver que :

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\eta} \mathsf{ROub}_F^{F'}(F' \oslash_F \mathbf{X}) \tag{95}$$

est inversible avec $\mathbf{X}$ un Ω-spectre projectivement cofibrant. Le lemme 4.3.46 ci-dessous affirme alors que $F' \otimes_F \mathbf{X}$ est un $\Omega_{F',\Phi}$-spectre étant donné que $\mathrm{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{X})$ est un $\Omega_{F,\Phi}$-spectre puisque isomorphe dans $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}))$ à $\mathbf{X}$ (par le lemme 4.3.44).

Il vient qu'une équivalence stable $F' \otimes_F \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $\mathbf{R}$ un (F', Φ)-spectre stablement fibrant est une équivalence niveau par niveau. Ceci montre que $\mathsf{ROub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{X}) \simeq \mathrm{Oub}_F^{F'}(F' \otimes_F \mathbf{X})$ et (95) est inversible par le lemme 4.3.44. □

Lemme 4.3.46. — *On garde les hypothèses de la proposition 4.3.42. Soit $\mathbf{X}'$ un (F', Φ)-spectre. Alors $\mathbf{X}'$ est un $\Omega_{F',\Phi}$-spectre si et seulement si $\mathrm{Oub}_F^{F'}\mathbf{X}'$ est $\Omega_{F,\Phi}$-spectre.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{Oub}_F^{F'}$ préserve les équivalences faibles niveau par niveau, on peut supposer que $\mathbf{X}'$ est fibrant niveau par niveau. Dire que $\mathrm{Oub}_F^{F'}\mathbf{X}'$ est un Ω-spectre, équivaut à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la composée :

$$\mathbf{X}'_n \longrightarrow G'\mathbf{X}'_{n+1} \longrightarrow G\mathbf{X}'_{n+1}$$

est inversible. L'assertion du lemme serait vraie si l'on savait que $G'(Y) \longrightarrow G(Y)$ était une équivalence faible pour tout Y fibrant de $\mathfrak{M}$. En d'autre termes, il nous faut montrer que la transformation naturelle $\mathsf{R}G' \longrightarrow \mathsf{R}G$ est inversible. Cette dernière est l'adjointe de $\mathsf{L}F \longrightarrow \mathsf{L}F'$ qui est bien inversible puisque $F(A) \longrightarrow F'(A)$ est une équivalence faible pour A cofibrant de $\mathfrak{M}$. □

On traite maintenant la seconde partie du théorème 4.3.40, *i.e.* le foncteur $\Phi' \otimes_{\Phi} -$. Nous montrerons plus précisément :

Proposition 4.3.47. — *Soit $\alpha : \Phi \longrightarrow \Phi'$ un morphisme de monoïdes. Soit $F : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ un foncteur de Quillen à gauche Φ'-symétrique et admettant un adjoint à droite accessible. On suppose que :*

- *Il existe un élément symétrique $\tau' \in \Phi'_2$ tel que $\sigma = (\tau')^{-1}$ est symétrique relativement à Φ,*
- *Le foncteur $F_\sigma : \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})$ est une équivalence de Quillen.*

Alors l'adjonction $(\Phi' \otimes_\Phi -, \mathrm{Oub}_\Phi^{\Phi'}) : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M})$ *est une équivalence de Quillen.*

Pour montrer la proposition, nous avons besoin de faire une digression pour introduire les bispectres. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abstraite admettant les colimites pertinentes. On suppose donnés deux monoïdes gradués et unitaires $\Phi = (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\Psi = (\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la catégorie des groupes ainsi que des endo-foncteurs F et P de $\mathcal{C}$ qui sont respectivement Φ et Ψ-symétriques.

Définition 4.3.48. — *Une transformation naturelle* $\sigma : F \circ P \longrightarrow P \circ F$ *est dite* (Ψ, Φ)*-bisymétrique lorsque la transformation naturelle :*

$$F^{\circ n} \circ P^{\circ m} \longrightarrow P^{\circ m} \circ F^{\circ n}$$

déduite de σ*, est* Ψ_m*-équivariante et* Φ_n*-équivariante pour tout* $(m, n) \in \mathbb{N}^2$*. Ceci revient à dire qu'elle est* $\Psi_m \times \Phi_n$*-équivariante.*

La condition de la définition 4.3.48 est vide pour $n = 0$ ou $r = 0$. Notons la remarque suivante :

Remarque 4.3.49. — Pour que la transformation naturelle $\sigma : F \circ P \longrightarrow P \circ F$ soit (Ψ, Φ)-bisymétrique, il suffit que que les deux transformations naturelles :

$$F^{\circ n} \circ P \longrightarrow P \circ F^{\circ n} \qquad \text{et} \qquad F \circ P^m \longrightarrow P^m \circ F$$

soient respectivement Φ_n et Ψ_m-équivariantes. En particulier, σ est Φ-symétrique au sens de la définition 4.3.16. Lorsque σ est inversible, la transformation σ^{-1} est (Φ, Ψ)-symétrique. Il vient que σ^{-1} est Ψ-symétrique au sens de la définition 4.3.16.

Le lemme suivant est une évidence :

Lemme 4.3.50. — *Supposons que* $\sigma : F \circ P \longrightarrow P \circ F$ *est* (Ψ, Φ)*-bisymétrique. Alors, le prolongement* $P_\sigma : \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C})$ *est naturellement un endofoncteur* Ψ*-symétrique.*

On se donne une transformation naturelle (Ψ, Φ)-symétrique $\sigma : F \circ P \longrightarrow P \circ F$. Par le lemme 4.3.50 on peut considérer la catégorie $\mathbf{Spect}_{P_\sigma}^\Psi(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C}))$. Un objet $\mathbf{X}$ de cette catégorie, correspond aux données suivantes :

1. Pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, d'une Ψ_m-représentation et une Φ_n-représentation sur $\mathbf{X}_{m,n}$,
2. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, d'un morphisme d'assemblage $\gamma_{\mathbf{X}} : F\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m,n+1}$,
3. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, d'un morphisme d'assemblage $\gamma'_{\mathbf{X}} : P\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m+1,n}$,

telles que les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite Φ-symétrique $(\mathbf{X}_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est un (F, Φ)-spectre (que l'on note $\mathbf{X}_{m,\bullet}$) pour les morphismes $\gamma_{\mathbf{X}}$,

(ii) Les morphismes d'assemblage $\gamma'_{\mathbf{X}}$ définissent un morphisme de (F,Φ)-spectres $P_\sigma \mathbf{X}_{m,\bullet} \longrightarrow \mathbf{X}_{m+1,\bullet}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$,

(iii) L'action des Ψ_m sur les $\mathbf{X}_{m,n}$ définit une suite Ψ-symétrique de (F,Φ)-spectres $(\mathbf{X}_{m,\bullet})_{m\in\mathbb{N}}$.

(iv) La suite Ψ-symétrique $(\mathbf{X}_{m,\bullet})_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C})$ est un (P_σ,Ψ)-spectre pour les morphismes d'assemblage définis par les $\gamma'_{\mathbf{X}}$.

La condition (i) dit simplement que les flèches $F^{\circ r}\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m,n+r}$ sont $\Phi_r \times \Phi_n$-équivariantes. La condition (ii) affirme que la flèche $P\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m+1,n}$ est Φ_n-équivariante et que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F\circ P\mathbf{X}_{m,n} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] & F\mathbf{X}_{m+1,n} \arrow[r] & \mathbf{X}_{m+1,n+1} \arrow[d, equal] \\ P\circ F\mathbf{X}_{m,n} \arrow[r] & P\mathbf{X}_{m,n+1} \arrow[r] & \mathbf{X}_{m+1,n+1} \end{tikzcd} \tag{96}$$

est commutatif. La condition (iii) affirme que l'action de Ψ_m sur $\mathbf{X}_{m,n}$ commute avec l'action de Ψ_n et que les flèches $\gamma_{\mathbf{X}} : F\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m,n+1}$ sont Ψ_m-équivariantes. La condition (iv) affirme que les flèches $P^{\circ r}\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m,r+n}$ sont $\Psi_r \times \Psi_n$-équivariantes. Ainsi, les quatre conditions (i) à (iv) sont équivalentes aux quatre conditions (plus symétriques) suivantes :

(i') Les actions de Ψ_m et Φ_n commutent.

(ii') Les morphismes $F^{\circ r}\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m,n+r}$ sont $\Phi_r \times \Phi_n$-équivariants et Ψ_m-équivariants,

(iii') Les morphismes $P^{\circ r}\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m+r,n}$ sont $\Psi_r \times \Psi_m$-équivariants et Φ_n-équivariants,

(iv') Le diagramme (96) est commutatif.

Le résultat suivant est maintenant clair :

Proposition 4.3.51. — *Supposons que la transformation (Ψ,Φ)-symétrique σ : $F\circ P \longrightarrow P\circ F$ est inversible. Alors, les catégories $\mathbf{Spect}_{P_\sigma}^\Psi(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C}))$ et $\mathbf{Spect}_{F_{\sigma^{-1}}}^\Phi(\mathbf{Spect}_P^\Psi(\mathcal{C}))$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. — À un objet $\mathbf{X}$ de $\mathbf{Spect}_{P_\sigma}^\Psi(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathcal{C}))$ on associe un objet $\mathbf{X}'$ de $\mathbf{Spect}_{F_{\sigma^{-1}}}^\Phi(\mathbf{Spect}_P^\Psi(\mathcal{C}))$ en posant $\mathbf{X}'_{m,n} = \mathbf{X}_{n,m}$ et en prenant les mêmes actions de Ψ_m et Φ_n et les mêmes morphismes d'assemblage. □

On revient au cas où $\mathcal{C}$ est une catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ propre à gauche et présentable par cofibrations. On suppose alors que F et P sont des foncteurs de Quillen à gauche ayant des adjoints à droite accessibles. On dispose alors d'une structure de modèles *bi-projective bi-stable* sur $\mathbf{Spect}_{P_\sigma}^\Psi(\mathbf{Spect}_F^\Phi(\mathfrak{M}))$ obtenue en prenant deux fois les structures projectives stables.

Proposition 4.3.52. — *On garde les notations et les hypothèses précédentes. On suppose que σ est inversible. L'isomorphisme de catégories*

$$\mathbf{Spect}^{\Psi}_{P_\sigma}(\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F}(\mathfrak{M})) \simeq \mathbf{Spect}^{\Phi}_{F_{\sigma^{-1}}}(\mathbf{Spect}^{\Psi}_{P}(\mathfrak{M})) \tag{97}$$

de la proposition 4.3.51 est un isomorphisme de catégories de modèles pour les structures bi-projectives bi-stables.

Démonstration. — On dispose sur $\mathbf{Spect}^{\Psi}_{P_\sigma}(\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F}(\mathfrak{M}))$ (respectivement, sur $\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F_{\sigma^{-1}}}(\mathbf{Spect}^{\Psi}_{P}(\mathfrak{M})))$ d'une structure de modèles bi-projective bi-instable obtenue en prenant deux fois la structure projective instable. Les fibrations et les équivalences faibles sont alors détectées (bi-)niveau par (bi-)niveau. Il est alors clair que l'isomorphisme (97) est un isomorphisme de catégories de modèles pour les structures bi-projectives bi-instables.

Revenons au cas des structures bi-projectives bi-stables. Étant donné que les cofibrations des structures bi-projectives et bi-stables sont les mêmes que ceux des structures bi-projectives bi-instables, il nous reste à montrer que (97) est un isomorphisme sur les classes des équivalences bi-stables. Par le lemme 4.3.53 ci-dessous, il suffira de vérifier que (97) est un isomorphisme sur les classes d'objets bi-stablement fibrants. Presque par définition, un objet $\mathbf{X}$ de $\mathbf{Spect}^{\Psi}_{P_\sigma}(\mathbf{Spect}^{\Phi}_{F}(\mathfrak{M}))$ est bi-stablement fibrant si et seulement si pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$:

- L'objet $\mathbf{X}_{m,n}$ est fibrant dans $\mathfrak{M}$,
- Les morphismes $\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow Q\mathbf{X}_{m+1,n}$ et $\mathbf{X}_{m,n} \longrightarrow G\mathbf{X}_{m,n+1}$ sont des équivalences faibles

avec Q l'adjoint à droite de P. Le résultat est maintenant clair. □

Lemme 4.3.53. — *Soit $\mathfrak{N}$ une catégorie munie de trois structures de modèles $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$, $(\mathbf{W}_1, \mathbf{Cof}_1, \mathbf{Fib}_1)$ et $(\mathbf{W}_2, \mathbf{Cof}_2, \mathbf{Fib}_2)$. On suppose que :*

- $\mathbf{Cof} = \mathbf{Cof}_1 = \mathbf{Cof}_2$,
- $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$.

Pour que $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2$, il suffit que les objets fibrants pour $(\mathbf{W}_1, \mathbf{Cof}_1, \mathbf{Fib}_1)$ et $(\mathbf{W}_2, \mathbf{Cof}_2, \mathbf{Fib}_2)$ soient les mêmes.

Démonstration. — Montrons que $f \in \mathbf{W}_1$ si et seulement si pour tout X fibrant pour la structure $(\mathbf{W}_1, \mathbf{Cof}_1, \mathbf{Fib}_1)$ l'application

$$\hom_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}^{-1}]}(f, X)$$

est inversible. Ceci démontrera le lemme. Comme $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}_1$, on peut supposer que $f : A \longrightarrow B$ est une cofibration entre objets cofibrants. Choisissons des cylindres (C_A, p, i_0, i_1) et (C_B, p, i_0, i_1) pour la structure $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$. L'objet X fibrant pour $(\mathbf{W}_1, \mathbf{Cof}_1, \mathbf{Fib}_1)$ est aussi fibrant pour $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$. Il vient que l'ensemble $\pi_0(A, X)$ (resp. $\pi_0(B, X)$) calculé à l'aide du cylindre C_A (resp. C_B) est isomorphe à $\hom_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}^{-1}]}(A, X)$ et $\hom_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(A, X)$ (resp. $\hom_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}^{-1}]}(B, X)$ et

$\hom_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(B, X)$). Ceci montre que la condition $\hom_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}^{-1}]}(f, X)$ inversible est équivalente à $\hom_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(f, X)$ inversible. Étant donné que tout objet de $\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]$ est isomorphe à un objet fibrant pour $(\mathbf{W}_1, \mathbf{Cof}_1, \mathbf{Fib}_1)$, cette dernière condition est équivalente à dire que le foncteur $\hom_{\mathfrak{N}[\mathbf{W}_1^{-1}]}(f, -)$ est inversible. Par le lemme de Yoneda, ceci est équivalent à $f \in \mathbf{W}_1$. □

Revenons à la proposition 4.3.47. On spécialisera la construction et les résultats précédents à la situation suivante : $P = F$, $\Psi = \Phi'$ et $\sigma = \mathrm{a}_F(\sigma) : F \circ F \longrightarrow F \circ F$. Étant donné que $\tau' \in \Phi'_2$ est un élément symétrique et que $\sigma = (\tau')^{-1}$ est symétrique relativement à Φ, on déduit que $\sigma : F \circ F \longrightarrow F \circ F$ est (Φ', Φ)-bisymétrique.

Lemme 4.3.54. — *Sous les hypothèses de la proposition 4.3.47, on a deux équivalences de Quillen :*

$$\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{F_\sigma}^{\Phi'}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}))$$

(98) *et*

$$\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{F_{\tau'}}^{\Phi}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}))$$

relativement aux structures projectives stables et bi-projectives bi-stables. Ces équivalences sont données par les adjonctions $(\mathrm{Sus}^0_{F_\sigma, \Phi'}, \mathrm{Ev}_0)$ *et* $(\mathrm{Sus}^0_{F_{\sigma^{-1}}, \Phi}, \mathrm{Ev}_0)$. *De plus,* $\mathbf{Spect}_{F_\sigma}^{\Phi'}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M}))$ *et* $\mathbf{Spect}_{F_{\tau'}}^{\Phi}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}))$ *sont canoniquement isomorphes en tant que catégories de modèles.*

Démonstration. — La dernière assertion est mise pour mémoire. Par hypothèse, l'endofoncteur F_σ de $\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})$ est une équivalence de Quillen à gauche. Par la proposition 4.3.35, la première adjonction de (98) est une équivalence de Quillen.

Étant donné que τ' est un élément symétrique de Φ', on sait par le théorème 4.3.38 que $F_{\tau'}$ est une équivalence de Quillen à gauche. On applique une deuxième fois la proposition 4.3.35 pour conclure. □

Soit un (F, Φ')-spectre $(\mathbf{X}_n)$. On définira de la manière suivante un bi-spectre $\mathbf{Y}$ dans $\mathbf{Spect}_{F_{\tau'}}^{\Phi}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}))$:

- $\mathbf{Y}_{m,n} = \mathbf{X}_{m+n}$ muni de l'action déduite par la restriction suivant $\phi_{m,n}(\alpha(-), -) : \Phi_m \times \Phi'_n \longrightarrow \Phi'_{m+n}$.
- $\gamma'_{\mathbf{Y}} : F\mathbf{Y}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{Y}_{m+1,n}$ est le morphisme d'assemblage $F\mathbf{X}_{m+n} \longrightarrow \mathbf{X}_{m+n+1}$ de $\mathbf{X}$.
- $\gamma_{\mathbf{Y}} : F\mathbf{Y}_{m,n} \longrightarrow \mathbf{Y}_{m,n+1}$ est la composée :

$$F\mathbf{X}_{m+n} \longrightarrow \mathbf{X}_{1+m+n} \xrightarrow{\phi'_{m+1,n}(\sigma_{(m)}, 1)^{-1}} \mathbf{X}_{m+1+n}$$

Pour montrer que $\mathbf{Y}_{m,n}$ est un bi-spectre, nous allons vérifier les conditions (i') à (iv') de la page 254. On fera attention que Φ joue le role de Ψ et Φ' celui de Φ. Seules les

conditions (ii') et (iv') sont non triviales. Pour (ii'), remarquons que la composée de r flèches $\gamma_{\mathbf{Y}}$ est égale à :

(99)
$$F^{\circ r}\mathbf{X}_{m+n} \longrightarrow \mathbf{X}_{r+m+n} \xrightarrow{\phi'_{0,m+1,r-1+n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}\ldots\ \phi'_{r-1,m+1,n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}} \mathbf{X}_{m+r+n}$$

Ainsi, pour montrer que (99) est $\Phi'_r \times \Phi_m \times \Phi'_n$-équivariante, il suffit de montrer pour $(g',g) \in \Phi'_r \times \Phi_m$ la commutation du diagramme :

(100)
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}_{r+m+n} \arrow[r, "\phi'_{0,m+1,r-1+n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}\ldots\phi'_{r-1,m+1,n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}"] \arrow[d, "\phi'_{r,m,n}(1,\alpha(g),1)"'] & \mathbf{X}_{m+r+n} \arrow[d, "\phi'_{m,r,n}(\alpha(g),1,1)"] \\
\mathbf{X}_{r+m+n} \arrow[r, "\phi'_{0,m+1,r-1+n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}\ldots\phi'_{r-1,m+1,n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}"] \arrow[d, "\phi'_{r,m,n}(g',1,1)"'] & \mathbf{X}_{m+r+n} \arrow[d, "\phi'_{m,r,n}(1,g',1)"] \\
\mathbf{X}_{r+m+n} \arrow[r, "\phi'_{0,m+1,r-1+n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}\ldots\ \phi'_{r-1,m+1,n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}"] & \mathbf{X}_{m+r+n}
\end{tikzcd}$$

La commutation du carré supérieur de (100) est facile. En effet, ce carré se décompose en des petits carrés :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\phi'_{r-i-1,m+1,n-r+i}(1,\sigma_{(n)},1)^{-1}"] \arrow[d, "\phi'_{r-i,m,n+i}(1,\alpha(g),1)"'] & \bullet \arrow[d, "\phi'_{r-i-1,m,n+i+1}(1,\alpha(g),1)"] \\
\bullet \arrow[r, "\phi'_{r-i-1,m+1,n-r+i}(1,\sigma_{(n)},1)^{-1}"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

pour $0 \leq i \leq r-1$. La commutation de ces petits carrés découle immédiatement de la relation $\sigma_{(m)}\phi'_{m,1}(\alpha(g),1) = \phi'_{1,m}(1,\alpha(g))\sigma_{(m)}$. Pour montrer la commutation du carré inférieur, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.3.55. — *On a l'égalité suivante dans Φ'_{m+n} :*

$$\begin{aligned}(101)\qquad &\phi'_{0,m+1,r-1+n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}\ldots\ \phi'_{r-1,m+1,n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1} \\ &\qquad = \phi'_{m-1,r+1,n}(1,\tau'_{(r)},1)\ldots\ \phi'_{0,r+1,m-1+n}(1,\tau'_{(r)},1)\end{aligned}$$

Démonstration. — En reprenant la définition de $\tau'_{(r)}$ et $\sigma_{(m)}$ on peut récrire (101) de la manière suivante :

$$(102)\qquad (\sigma_1\ldots\sigma_m)^{-1}\ldots(\sigma_r\ldots\sigma_{r+m-1})^{-1} = (\tau'_m\ldots\tau'_{m+r-1})\ldots(\tau'_1\ldots\tau'_r)$$

Comme $\sigma_i = \tau_i'^{-1}$, l'égalité (102) est équivalente à :

$$(103)\qquad (\tau'_m\ldots\tau'_1)\ldots(\tau'_{m+r-1}\ldots\tau'_r) = (\tau'_m\ldots\tau'_{m+r-1})\ldots(\tau'_1\ldots\tau'_r)$$

Il est clair que τ'_i et τ'_j commutent dès que $|i-j| \neq 1$. On peut alors faire les manipulations suivantes sur le premier membre de (103) :

$$\begin{aligned}
&(\tau'_m \dots \tau'_1)(\tau'_{m+1} \dots \tau'_2) \dots (\tau'_{m+i} \dots \tau'_{i+1}) \dots (\tau'_{m+r-1} \dots \tau'_r) \\
&= \tau'_m(\tau'_{m-1} \dots \tau'_1)\tau'_{m+1}(\tau'_m \dots \tau'_2) \dots \tau'_{m+i}(\tau'_{m+i-1} \dots \tau'_{i+1}) \dots \tau'_{m+r-1}(\tau'_{m+r-2} \dots \tau'_r) \\
&= \tau'_m.\tau'_{m+1} \dots \tau'_{m+i} \dots \tau'_{m+r-1} \\
&\qquad\qquad .(\tau'_{m-1} \dots \tau'_1)(\tau'_m \dots \tau'_2) \dots (\tau'_{m+i-1} \dots \tau'_{i+1}) \dots (\tau'_{m+r-2} \dots \tau'_r)
\end{aligned}$$

En simplifiant l'expression $(\tau'_m \dots \tau'_{m+r-1})$. on voit que l'égalité (103) est équivalente à :

$$(\tau'_{m-1} \dots \tau'_1) \dots (\tau'_{m+r-2} \dots \tau'_r) = (\tau'_{m-1} \dots \tau'_{m+r-2}) \dots (\tau'_1 \dots \tau'_r)$$

Ainsi, le cas (m, r) découle du cas $(m-1, r)$. On se ramène alors par récurrence au cas trivial $(1, r)$. □

Par le lemme 4.3.55 ci-dessus, on peut décomposer le carré inférieur de (100) en des petits carrés :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\phi'_{m-i.r+1.n-i-1}(1.\tau_{(r)}.1)"] \arrow[d, "\phi'_{m-i.r.n-i}(1,g'.1)"'] & \bullet \arrow[d, "\phi'_{m-i+1.r.n-i-1}(1,g'.1)"] \\
\bullet \arrow[r, "\phi'_{m-i.r+1.n-i-1}(1.\tau_{(r)}.1)"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

qui commutent en vue de la relation $\tau_{(r)}.\phi'_{r.1}(g'.1) = \phi'_{1.r}(1,g')\tau_{(r)}$. On a donc montré que (99) est $\Phi'_r \times \Phi_m \times \Phi'_n$équivariante. Il reste à vérifier la condition (iv') pour $\mathbf{Y}_{m.n}$. Il faut donc montrer que le digramme :

$$\begin{tikzcd}
F \circ F\mathbf{X}_{m+n} \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{X}}"] \arrow[d, "\tau'"'] & F\mathbf{X}_{m+n+1} \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{X}}"] & \mathbf{X}_{n+m+2} \arrow[rr, "\phi'_{m+2.n}(\sigma_{(m+1)},1)^{-1}"] & & \mathbf{X}_{n+m+2} \arrow[d, equal] \\
F \circ F\mathbf{X}_{m+n} \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{X}}"] & F\mathbf{X}_{m+n+1} \arrow[rr, "\phi'_{m+1.n}(\sigma_{(m)},1)^{-1}"] & & F\mathbf{X}_{n+m+1} \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{X}}"] & \mathbf{X}_{n+m+2}
\end{tikzcd}$$

commute. On se ramène facilement à montrer que le carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}_{m+n+2} \arrow[r, "\phi'_{m+2.n}(\sigma_{(m+1)},1)^{-1}"] \arrow[d, "\phi_{2.m+n}(\sigma,1)^{-1}"'] & \mathbf{X}_{m+n+2} \arrow[d, equal] \\
\mathbf{X}_{m+n+2} \arrow[r, "\phi'_{1.m+1.n}(1,\sigma_{(m)},1)^{-1}"] & \mathbf{X}_{m+n+2}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ceci découle immédiatement de la relation $\sigma_{(m+1)} = \sigma_1.\phi_{1.m+1}(1,\sigma_{(m)})$.

On a ainsi défini un foncteur :

$$\Delta : \mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{F_{\tau'}}^{\Phi}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}))$$

qui associe au (F, Φ')-spectre $\mathbf{X}$ le bi-spectre $\mathbf{Y}$. Ce foncteur admet un foncteur dérivé à droite puisqu'il envoie les équivalences faibles entre objets stablement fibrants sur des équivalences faibles entre objets bi-stablement fibrants. La composée :

$$\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}) \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Spect}_{F_{\tau'}}^{\Phi}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M})) \xrightarrow{\mathrm{Ev}_0} \mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M})$$

est le foncteur identité. Par la seconde équivalence de Quillen du lemme 4.3.54, on déduit alors que $\mathsf{R}\Delta$ est une équivalence de catégories. D'autre part, la composée :

$$\begin{aligned}\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M}) &\xrightarrow{\Delta} \mathbf{Spect}_{F_{\tau'}}^{\Phi}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi'}(\mathfrak{M})) \\ &\qquad\qquad = \mathbf{Spect}_{F_\sigma}^{\Phi'}(\mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})) \xrightarrow{\mathrm{Ev}_0} \mathbf{Spect}_F^{\Phi}(\mathfrak{M})\end{aligned}$$

est isomorphe au foncteur $\mathrm{Oub}_\Phi^{\Phi'}$. Par la première équivalence de Quillen du lemme 4.3.54, on sait que $\mathsf{R}\mathrm{Ev}_0$ est une équivalence de catégories. Ceci montre que $\mathsf{R}\mathrm{Oub}_F^{F'}$ est une équivalence de catégories. La proposition 4.3.47 est démontrée et donc aussi le théorème 4.3.40.

4.3.4. Hypothèse de finitude et Ω-spectres. — Dans ce paragraphe, on travaille avec les spectres *non-symétriques i.e.* on prendera pour Φ le monoïde trivial $(\{1\})_{n\in\mathbb{N}}$. La catégorie des F-spectres non-symétriques à valeurs dans une catégorie $\mathcal{C}$ sera simplement notée $\mathbf{Spect}_F(\mathcal{C})$.

On reprend nos hypothèses habituelles, à savoir : $\mathfrak{M}$ est une catégorie de modèles présentable par cofibrations et F un endofoncteur de Quillen à gauche de $\mathfrak{M}$ admettant un adjoint à droite G accessible. On va exploiter l'hypothèse supplémentaire suivante qui sera satisfaite dans tous les exemples qui nous intéressent :

Hypothèse 4.3.56. — Le foncteur $\mathsf{R}G : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ commute aux compositions transfinies dans le sens suivant. Soit λ un ordinal. L'adjonction (F, G) induit une adjonction de Quillen :

$$(F, G) : \underline{\mathsf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M}) \longrightarrow \underline{\mathsf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M})$$

lorsque l'on munit $\underline{\mathsf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M})$ de sa structure de Reedy (voir la remarque 4.1.54). La face carrée évidente :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ho}(\underline{\mathsf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M})) \arrow[r, "\mathsf{R}G"] \arrow[d, "\mathsf{LColim}_{\nu\in\lambda}"'] \arrow[dr, phantom, "\sim\Leftarrow"] & \mathbf{Ho}(\underline{\mathsf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M})) \arrow[d, "\mathsf{LColim}_{\nu\in\lambda}"] \\
\mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \arrow[r, "\mathsf{R}G"'] & \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})
\end{tikzcd}$$

déduite de l'isomorphisme $\mathsf{LColim}_{\nu\in\lambda} \circ \mathsf{L}F \simeq \mathsf{L}F \circ \mathsf{LColim}_{\nu\in\lambda}$, est inversible.

L'hypothèse 4.3.56 sera utilisée *via* la proposition suivante :

Proposition 4.3.57. — *Soient* $(K, L) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ *une adjonction de Quillen et* $\tau : F \circ K \xrightarrow{\sim} K \circ F$ *une transformation naturelle inversible. On note* $\tau' = {}^a(\tau^{-1}) : F \circ L \longrightarrow L \circ F$ *comme dans le lemme 4.3.17.*

On suppose que le foncteur $\mathsf{R}L : \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ *commute aux compositions transfinies au sens de l'hypothèse 4.3.56. Alors, le foncteur* $\mathsf{R}L_{\tau'} : \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$ *préserve les équivalences stables.*

Démonstration. — Soit $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ une équivalence stable de F-spectres. Par la proposition 4.2.72, $\mathrm{Loc}_{\mathscr{R}}(f)$ est une équivalence faible niveau par niveau et les flèches $\mathbf{A} \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{R}}\mathbf{A}$ et $\mathbf{B} \longrightarrow \mathrm{Loc}_{\mathscr{R}}\mathbf{B}$ sont dans $\mathrm{Cell}(\nabla_{\infty}(\underline{\mathscr{R}}) \cup (\mathbf{Cof}_{proj} \cap \mathbf{W}_{niv}))$.

Il suffit donc de traiter le cas de $f \in \mathrm{Cell}(\nabla_{\infty}(\underline{\mathscr{R}}) \cup (\mathbf{Cof}_{proj} \cap \mathbf{W}_{niv}))$. Ainsi, f est la composée transfinie d'une λ-suite :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(0) \xrightarrow{a_0} \mathbf{A}(1) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbf{A}(\nu) \xrightarrow{a_\nu} \mathbf{A}(\nu+1) \longrightarrow \ldots \tag{104}$$

avec a_ν un push-out d'un élément de $\nabla_{\infty}(\underline{\mathscr{R}}) \cup (\mathbf{Cof}_{proj} \cap \mathbf{W}_{niv})$.

Montrons que $\mathsf{R}L_{\tau'}(f)$ est une équivalence stable ou plus correctement que $\mathsf{R}L_{\tau'}(f)$ est isomorphe à l'image d'une équivalence stable par le foncteur $\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$. Comme les flèches a_ν de la λ-suite (104) sont des cofibrations projectives, on déduit que $\mathsf{LColim}_{\nu\in\lambda}\mathbf{A}(\nu) \simeq \mathsf{Colim}_{\nu\in\lambda}\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{B}$. Ainsi, par l'hypothèse 4.3.56, on est ramené à prouver que :

$$\mathsf{R}L_{\tau'}(\mathbf{A}(0)) \longrightarrow \mathsf{LColim}_{\nu\in\lambda}\mathsf{R}L_{\tau'}(\mathbf{A}(\nu)) \tag{105}$$

est une équivalence stable. Toujours par l'hypothèse 4.3.56, on peut appliquer le lemme 4.3.58 ci-dessous, pour se ramener à montrer que $\mathsf{R}L_{\tau'}(a_\nu) : \mathsf{R}L_{\tau'}(\mathbf{A}(\nu)) \longrightarrow \mathsf{R}L_{\tau'}(\mathbf{A}(\nu+1))$ est une équivalence stable pour chaque $\nu \in \lambda$. Seul le cas où a_ν est un push-out d'un élément $u \in \nabla_{\infty}(\underline{\mathscr{R}})$ demande un argument. Dans ce cas, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{A}_n(\nu) \longrightarrow \mathbf{A}_n(\nu+1)$ est un isomorphisme pour $n \geq N$ (quitte à choisir convenablement les cylindres dans la formation des $\nabla_n(\omega_X^p)$). Il vient que $\mathsf{REv}_n\mathsf{R}L_{\tau'}(\mathbf{A}(\nu)) \longrightarrow \mathsf{REv}_n\mathsf{R}L_{\tau'}(\mathbf{A}(\nu+1))$ est inversible pour $n \geq N$. On conclut alors par le lemme 4.3.59 ci-dessous. □

Lemme 4.3.58. — *On suppose donné un foncteur* $\mathbf{E}(-) : \lambda \longrightarrow \mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})$ *tel que :*

- *Pour* $\nu + 1 \in \lambda$, *la flèche* $\mathbf{E}(\nu) \longrightarrow \mathbf{E}(\nu+1)$ *est une équivalence stable,*
- *Pour* $\nu \in \lambda$ *limite, la flèche* $\mathsf{LColim}_{\mu\in\nu}\mathbf{E}_\mu \longrightarrow \mathbf{E}_\nu$ *est un isomorphisme dans* $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$.

Alors, la flèche $\mathbf{E}(0) \longrightarrow \mathsf{LColim}_{\nu\in\lambda}\mathbf{E}(\nu)$ *est une équivalence stable.*

Démonstration. — Les conditions de l'énoncé dépendent uniquement de la classe d'isomorphisme de l'objet $\mathbf{E}(-)$ dans $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\underline{\mathsf{HOM}}(\lambda, \mathfrak{M})))$. On peut alors

supposer que $\mathbf{E}(-)$ est un objet cofibrant de $\underline{\mathsf{HOM}}(\lambda.\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$ pour la structure de Reedy obtenue à partir de la structure projective instable sur $\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})$. Dans ce cas, les flèches $\mathbf{E}_\nu \longrightarrow \mathbf{E}_{\nu+1}$ sont des cofibrations projectives stablement triviales et pour ν limite, $\mathsf{Colim}_{\mu\in\nu}\mathbf{E}_\mu \longrightarrow \mathbf{E}_\nu$ est une cofibration projective triviale niveau par niveau et donc stablement triviale. Le résultat découle alors du fait que $\mathbf{Cof}_{proj} \cap \mathbf{W}_{st}$ est stable par composition transfinie. □

Lemme 4.3.59. — *Soit $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ un morphisme de F-spectres. On suppose que $f_n : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{Y}_n$ est une équivalence faible de $\mathfrak{M}$ pour $n \geq N$. Alors, f est une équivalence stable.*

Démonstration. - On fait une récurrence descendante sur N. On peut supposer que f est une cofibration niveau par niveau entre F-spectres cofibrants niveau par niveau. On peut également supposer que $\mathbf{X}_n = \varnothing$ pour $n < N$. Quitte à remplacer $\mathbf{X}$ par $\mathbf{X} \coprod_{\mathrm{Sus}_F^N(\mathbf{X}_N)} \mathrm{Sus}_F^N(\mathbf{Y}_N)$ on peut supposer que $\mathbf{X}_N = \mathbf{Y}_N$.

La composée $F\mathbf{Y}_{N-1} \longrightarrow \mathbf{Y}_N \simeq \mathbf{X}_N$ correspond par adjonction à une flèche $a : \mathrm{Sus}_F^N(F\mathbf{Y}_{N-1}) \longrightarrow \mathbf{X}$. De plus, le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sus}_F^N F\mathbf{Y}_{N-1} \arrow[r] \arrow[d, "\omega^{N-1}_{\mathbf{Y}_{N-1}}"'] & \mathbf{X} \arrow[d] \\
\mathrm{Sus}_F^{N-1}\mathbf{Y}_{N-1} \arrow[r] & \mathbf{Y}
\end{tikzcd}$$

commute. La flèche $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X} \coprod_{\mathrm{Sus}_F^N F\mathbf{Y}_{N-1}} \mathrm{Sus}_F^{N-1}\mathbf{Y}_{N-1}$ est une équivalence stable puisque c'est un push-out de $\omega^{N-1}_{\mathbf{Y}_{N-1}}$ (qui est une cofibration niveau par niveau dans le cas des spectres non symétriques). Il suffit donc de montrer que $f' : \mathbf{X} \coprod_{\mathrm{Sus}_F^N F\mathbf{Y}_{N-1}} \mathrm{Sus}_F^{N-1}\mathbf{Y}_{N-1} \longrightarrow \mathbf{Y}$ est une équivalence stable. Or f'_n est une équivalence faible pour $n \geq N-1$ (en fait, f'_{N-1} est un isomorphisme et $f'_m = f_m$ pour $m \geq N$). □

Supposons l'hypothèse 4.3.56 satisfaite. Le monoïde triviale admet bien évidement un élément symétrique. Ainsi, l'adjonction (F, G) se prolonge en une adjonction de Quillen $(F, G) : \mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})$. Par la proposition 4.3.57, le foncteur $\mathsf{R}G : \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$ préserve les équivalences faibles. Rappelons également que le théorème 4.3.38, affirme que ce foncteur est une équivalence de Quillen à droite relativement à la structure projective stable.

À la page 245, on a construit une transformation naturelle $t : F \longrightarrow s_-$ entre endofoncteurs de $\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})$. On a également posé $\Lambda = G \circ s_- = s_- \circ G$ et $\lambda : 1 \longrightarrow \Lambda$ la composée $1 \xrightarrow{\eta} G \circ F \xrightarrow{t} G \circ s_-$.

Corollaire 4.3.60. — *Pour tout* $\mathbf{X} \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})))$, *la flèche* $\mathbf{X} \longrightarrow \mathsf{R}\Lambda(\mathbf{X})$ *est une équivalence stable (où le foncteur dérivé* $\mathsf{R}\Lambda$ *est pris relativement à la structure projective instable).*

Démonstration. — Un morphisme de F-spectres $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ est une équivalence stable si et seulement si $s_+(f)$ est une équivalence stable. Lorsque $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont projectivement cofibrants, ceci est clair puisque s_+ est une équivalence de Quillen à gauche par le théorème 4.3.38. Pour le cas général, il suffit de remarquer que s_+ préserve les équivalences faibles niveau par niveau, ce qui permet de remplacer $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ par des objets projectivement cofibrants sans changer l'hypothèse : $s_+(f) \in \mathbf{W}_{st}$.

D'autre part, pour tout F-spectre $\mathbf{X}$, la flèche de counité $s_+s_-\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ est une équivalence stable par le lemme 4.3.59, puisqu'elle induit un isomorphisme $(s_+s_-\mathbf{X})_n \simeq \mathbf{X}_n$ pour $n \geq 1$. Ainsi, si $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ est une équivalence stable de F-spectres, la flèche $s_+s_-(f)$ est aussi une équivalence stable et donc $s_-(f)$ est une équivalence stable.

Par la discussion précédente et la proposition 4.3.57, $\mathsf{R}\Lambda : \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$ préserve les équivalences stables. Soient $\mathbf{X}$ un F-spectre fibrant niveau par niveau et $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{R}$ une équivalence stable avec $\mathbf{R}$ un F-spectre stablement fibrant. Dans le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{R} \arrow[d] \\ \Lambda\mathbf{X} \arrow[r] & \Lambda\mathbf{R} \end{tikzcd}$$

les flèches horizontales sont alors des équivalences stables. La flèche $\mathbf{R} \longrightarrow \Lambda\mathbf{R}$ est une équivalence stable par le théorème 4.3.38. Le corollaire est démontré. □

Le résultat suivant fournit un modèle simple du $\mathscr{R}$-localisé d'un F-spectre :

Théorème 4.3.61. — *Soit* $\mathbf{X}$ *un* F*-spectre fibrant niveau par niveau. La colimite homotopique de la* $\mathbb{N}$*-suite :*

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{X}}} \Lambda(\mathbf{X}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^{\circ n}(\mathbf{X}) \xrightarrow{\lambda_{\Lambda^{\circ n}(\mathbf{X})}} \Lambda^{\circ n+1}(\mathbf{X}) \longrightarrow \dots \tag{106}$$

est un Ω_F*-spectre. De plus, la flèche évidente* $\mathbf{X} \longrightarrow \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^{\circ n}\mathbf{X}$ *est une équivalence stable.*

Démonstration. — Le fait que $\mathbf{X} \longrightarrow \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^{\circ n}\mathbf{X}$ est une équivalence stable découle du lemme 4.3.58 étant donné que les $\lambda_{\Lambda^{\circ n}\mathbf{X}}$ sont des équivalences stables par le corollaire 4.3.60.

Il reste à montrer que la colimite homotopique $\mathbf{K}$ de (106) est un Ω-spectre. Ceci équivaut à dire que $\mathbf{K} \longrightarrow \mathsf{R}\Lambda(\mathbf{K})$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_F(\mathfrak{M}))$.

Étant donné que s_- commute aux colimites et qu'il préserve les équivalences faibles, on déduit de l'hypothèse 4.3.56 un isomorphisme de commutation à la colimite homotopique $\mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}} \circ \mathsf{R}\Lambda \simeq \mathsf{R}\Lambda \circ \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}$. Il suffit donc de prouver que le morphisme :

$$\mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^{\circ n}\mathbf{X} \longrightarrow \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}\Lambda \circ \Lambda^{\circ n}\mathbf{X}$$

est inversible. Ce morphisme correspond à la colimite homotopique du morphisme de $\mathbb{N}$-suites :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r, "\lambda_{\mathbf{X}}"] \arrow[d, "\lambda_{\mathbf{X}}"'] & \Lambda(\mathbf{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{\Lambda(\mathbf{X})}"] & \dots \arrow[r] & \Lambda^{\circ n}(\mathbf{X}) \arrow[r, "\lambda_{\Lambda^{\circ n}(\mathbf{X})}"] \arrow[d, "\lambda_{\Lambda^{\circ n}(\mathbf{X})}"'] & \Lambda^{\circ n+1}(\mathbf{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{\Lambda^{\circ n+1}(\mathbf{X})}"] & \dots \\
\Lambda(\mathbf{X}) \arrow[r, "\Lambda(\lambda_{\mathbf{X}})"] & \Lambda^2(\mathbf{X}) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \Lambda^{\circ n+1}(\mathbf{X}) \arrow[r, "\Lambda(\lambda_{\Lambda^{\circ n}(\mathbf{X})})"] & \Lambda^{\circ n+2}(\mathbf{X}) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Le résultat découle alors du lemme 4.3.62 ci-dessous. □

Lemme 4.3.62. — *Pour tout F-spectre $\mathbf{X}$ les deux morphismes $\Lambda(\lambda_{\mathbf{X}})$ et $\lambda_{\Lambda(\mathbf{X})}$ sont égaux.*

Démonstration. — Au niveau n, la flèche $\lambda_{\Lambda(\mathbf{X})}$ est donnée par la composée :

$$G(\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{\eta} GF(G\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{G(\gamma_{\Lambda(\mathbf{X})})} G(G\mathbf{X}_{n+2}) \tag{107}$$

Rappelons que les morphismes d'assemblage du F-spectre $\Lambda(\mathbf{X})$ sont construits à partir du morphisme $F \circ G \longrightarrow G \circ F$ déduit par adjonction de $F \circ F = F \circ F$. Ils sont donc donnés par la composée :

$$F(G\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{\delta} \mathbf{X}_{n+1} \xrightarrow{\eta} G(F\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{G(\gamma_{\mathbf{X}})} G\mathbf{X}_{n+2}$$

Étant donné que la composée $G \longrightarrow GFG \longrightarrow G$ est l'identité, on voit que $\lambda_{\Lambda(\mathbf{X})}$ est égale à la composée :

$$G(\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{G(\eta)} G(GF\mathbf{X}_{n+1}) \xrightarrow{G \circ G(\gamma_{\mathbf{X}})} G(G\mathbf{X}_{n+2}) \tag{108}$$

Par définition, la composée (108) est le niveau n du morphisme de F-spectres $\Lambda(\lambda_{\mathbf{X}})$. □

4.3.5. Spectres dans les catégories de modèles monoïdales. — On suppose ici que $(\mathfrak{M}, \otimes)$ est une catégorie de modèles monoïdale symétrique et unitaire (voir la définition 4.1.57). On suppose toujours que $\mathfrak{M}$ est présentable par cofibrations.

Soit T un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$. Le foncteur $F = T \otimes -$ est un foncteur de Quillen à gauche qui est Σ-symétrique, lorsque Σ_n agit sur $F^{\circ n} = T^{\otimes n} \otimes -$ en permutant les facteurs de $T \otimes \cdots \otimes T$. On supposera que le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}_g(T, -)$ est accessible. On dispose ainsi de deux catégories (avec plusieurs structures de modèles) :

- $\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})$, la catégorie de T-spectres non-symétriques,
- $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathfrak{M})$, la catégorie des T-spectres (Σ)-symétriques.

On verra dans ce numéro que $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathfrak{M})$ est une catégorie de modèles monoïdale symétrique (sous l'hypothèse que $(\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ est stable au sens de la définition 4.1.44) et que sous certaines conditions, les catégories de modèles $\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})$ et $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathfrak{M})$ sont Quillen-équivalentes.

On commence par construire un produit tensoriel sur les suites (Σ)-symétriques (voir la définition 4.3.3). On se place momentanément dans le cadre d'une catégorie monoïdale unitaire abstraite $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$. On supposera que $\mathcal{C}$ admet les coproduits et que les foncteurs $A \otimes -$ et $- \otimes A$ y commutent pour $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$.

Définition 4.3.63. — *Soient $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites symétriques dans $\mathcal{C}$. On définit une nouvelle suite symétrique $X \otimes Y$ en posant :*

$$(X \otimes Y)_n = \coprod_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n}(X_i \otimes Y_j)$$

Le bi-foncteur $- \otimes -$ que l'on vient de définir induit une structure monoïdale sur $\mathbf{Suite}(\Sigma_n, \mathfrak{M})$ dont l'objet unité est donné par $\mathbb{1}_{\Sigma} = (\mathbb{1}, \varnothing, \ldots, \varnothing, \ldots)$. L'isomorphisme d'associativité est donné au niveau n par la composée :

$$\begin{aligned}(X \otimes (Y \otimes Z))_n &\simeq \coprod_{i+j+k=n} \mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j \times \Sigma_k}^{\Sigma_n}(X_i \otimes (Y_j \otimes Z_k)) \\ &\simeq \coprod_{i+j+k=n} \mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j \times \Sigma_k}^{\Sigma_n}((X_i \otimes Y_j) \otimes Z_k) \simeq ((X \otimes Y) \otimes Z)_n\end{aligned}$$

Notons le lemme suivant :

Lemme 4.3.64. — *Supposons que $\mathcal{C}$ est fermée à gauche (resp. à droite) et qu'elle admet les limites pertinentes. Alors la catégorie monoïdale $\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$ est fermée à gauche (resp. à droite).*

Démonstration. — Par $\otimes$-dualité, il suffit de traiter le premier cas. Soient $X = (X)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites symétriques dans $\mathcal{C}$. Pour $(i, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\underline{\mathsf{Hom}}_g^{\Sigma_i}(X_i, Z_{i+n})$ est le sous-objet de Σ_i-invariants de $\underline{\mathsf{Hom}}_g(X_i, Z_{i+n})$ pour l'action :

$$t \in \Sigma_i \rightsquigarrow \underline{\mathsf{Hom}}_g(X_i, Z_{i+n}) \xrightarrow{\underline{\mathsf{Hom}}_g(t^{-1}, Z_{i+n})} \underline{\mathsf{Hom}}_g(X_i, Z_{i+n}) \xrightarrow{\underline{\mathsf{Hom}}_g(X_i, \phi_{i.n}(t,1))} \underline{\mathsf{Hom}}_g(X_i, Z_{i+n})$$

Le groupe Σ_n opère sur $\underline{\mathsf{Hom}}_g(X_i, Z_{i+n})$ par $\underline{\mathsf{Hom}}_g(X_i, \phi_{i,n}(1,-))$. On définit une suite symétrique $\underline{\mathsf{Hom}}_g(X, Z)$ par :

$$\underline{\mathsf{Hom}}_g(X, Z)_n = \prod_{i\in\mathbb{N}} \underline{\mathsf{Hom}}_g^{\Sigma_i}(X_i, Z_{i+n})$$

Soit $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite symétrique. Se donner un morphisme de Y dans $\underline{\mathsf{Hom}}_g(X, Z)$ revient à se donner, pour tout $(n, i) \in \mathbb{N}$, une flèche $\Sigma_i \times \Sigma_n$-équivariante : $X_i \otimes Y_n \longrightarrow Z_{i+n}$. Ceci montre que $\underline{\mathsf{Hom}}_g(X, Z)$ représente le foncteur $\hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma,\mathcal{C})}(X \otimes -, Z)$. □

On suppose maintenant que $(\mathcal{C}, \otimes)$ est monoïdale symétrique. On va définir une contrainte de symétrie pour le produit tensoriel de la définition 4.3.63. Pour cela, on introduit pour $n = i + j$ la permutation $\theta_{i,j} \in \Sigma_n$ définie par :

$$\theta_{i,j}(a) = \begin{cases} a + j & \text{si} \quad 1 \leq a \leq i \\ a - i & \text{si} \quad i + 1 \leq a \leq i + j \end{cases} \tag{109}$$

Ainsi $\theta_{i,j}$ est l'unique permutation qui envoie $\{1, \ldots, i\}$ sur $\{j + 1, \ldots, j + i\}$ et $\{i + 1, \ldots, i + j\}$ sur $\{1, \ldots, j\}$ d'une manière croissante. On a clairement $\theta_{j,i} = \theta_{i,j}^{-1}$. On vérifie immédiatement que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Sigma_i \times \Sigma_j \arrow[r, "\phi_{i,j}"] \arrow[d, "\tau"'] & \Sigma_n \arrow[d, "\theta_{i,j}(-)\theta_{i,j}^{-1}"] \\ \Sigma_j \times \Sigma_i \arrow[r, "\phi_{j,i}"] & \Sigma_n \end{tikzcd} \tag{110}$$

où τ est la permutation des facteurs. On a le lemme :

Lemme 4.3.65. — *Soient $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites symétriques dans $\mathcal{C}$. Soit $n = i + j$ une décomposition de n en somme d'entiers naturels. La composée :*

$$X_i \otimes Y_j \xrightarrow{\tau} Y_j \otimes X_i \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\Sigma_j\times\Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) \xrightarrow{\theta_{j,i}} \mathrm{Ind}_{\Sigma_j\times\Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) \tag{111}$$

est $\Sigma_i \times \Sigma_j$-équivariante pour :

- *L'action produit sur $X_i \otimes Y_j$,*
- *L'action obtenue par restriction via $\phi_{i,j} : \Sigma_i \times \Sigma_j \longrightarrow \Sigma_n$ de l'action de Σ_n sur $\mathrm{Ind}_{\Sigma_j\times\Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i)$.*

Démonstration. — Soit $(u, v) \in \Phi_i \times \Phi_j$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X_i \otimes Y_j \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "(u,v)"'] & Y_j \otimes X_i \arrow[r] \arrow[d, "(v,u)"] & \mathrm{Ind}_{\Sigma_j\times\Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) \arrow[r, "\theta_{j,i}"] \arrow[d, "\phi_{j,i}(v,u)"] & \mathrm{Ind}_{\Sigma_j\times\Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) \arrow[d, "\theta_{j,i}\phi_{j,i}(v,u)\theta_{j,i}^{-1}"] \\ X_i \otimes Y_j \arrow[r, "\tau"] & Y_j \otimes X_i \arrow[r] & \mathrm{Ind}_{\Sigma_j\times\Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) \arrow[r, "\theta_{j,i}"] & \mathrm{Ind}_{\Sigma_j\times\Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) \end{tikzcd}$$

À une permutation près de i et j, le carré commutatif (110) montre que $\theta_{j,i}\phi_{j,i}(v, u)\theta_{j,i}^{-1} = \phi_{i,j}(u, v)$. □

Ainsi, la composée (111) induit par adjonction un morphisme Σ_n-équivariant (que l'on appelle θ par abus de notations) :

$$\theta : \operatorname{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n}(X_i \otimes Y_j) \longrightarrow \operatorname{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(Y_j \otimes X_i) \tag{112}$$

et donc, par passage au coproduit suivant les décompositions $n = i + j$, un morphisme naturel de suites symétriques :

$$\theta : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X \tag{113}$$

Nous allons vérifier rapidement que θ rend la structure monoïdale sur $\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathfrak{M})$ symétrique :

Lemme 4.3.66. — *La flèche* (113) *est involutive* i.e. $\theta^2 = \mathrm{id}_{X \otimes Y}$. *De plus, le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "\sim"] & Z \otimes (Y \otimes X) \arrow[d, "\sim"] \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\sim"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[r, "\sim"] & (Z \otimes Y) \otimes X
\end{tikzcd} \tag{114}$$

est commutatif.

Démonstration. — Pour faire cela, il est pratique de se donner une suite symétrique $T = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'évaluer le foncteur $\hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(-, T)$ sur θ^2 et sur le diagramme de l'énoncé.

L'application $\hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(\theta, T) : \hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(Y \otimes X, T) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(X \otimes Y, T)$ associe à une famille :

$$(\gamma_{j,i})_{j+i=n} \in \prod_{j+i=n} \hom_{\mathbf{Rep}(\Sigma_j \times \Sigma_i, \mathcal{C})}(Y_j \otimes X_i, T)$$

la famille des composées :

$$\left(X_i \otimes Y_j \xrightarrow{\tau} Y_j \otimes X_i \xrightarrow{\gamma_{j,i}} T_n \xrightarrow{\theta_{j,i}} T_n \right)_{i+j=n}$$

avec τ l'isomorphisme de commutativité de $\mathcal{C}$ et $\theta_{j,i}$ l'élément (109) de Σ_{i+j}. Étant donné que $\tau^2 = \mathrm{id}$ et $\theta_{ji}\theta_{ij} = 1$, il est immédiat que $\hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(\theta^2, T)$ est l'identité.

Montrons la commutation du diagramme (114). La composée

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}((Z \otimes Y) \otimes X, T) &\longrightarrow \hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}((Y \otimes Z) \otimes X, T) \\
&\longrightarrow \hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})}(X \otimes (Y \otimes Z), T)
\end{aligned}$$

associe à une famille :

$$(\gamma_{k,j,i})_{k+j+i=n} \in \prod_{k+j+i=n} \hom_{\mathbf{Rep}(\Sigma_k \times \Sigma_j \times \Sigma_i)}((Z_k \otimes Y_j) \otimes X_i, T)$$

la famille des composées :

$$\Big(X_i \otimes (Y_j \otimes Z_k) \xrightarrow{\tau} (Y_j \otimes Z_k) \otimes X_i \xrightarrow{\tau} (Z_k \otimes Y_j) \otimes X_i \xrightarrow{\gamma_{k,j,i}} T \xrightarrow{\phi_{j+k,i}(\theta_{j,k},1)} T \xrightarrow{\theta_{j+k,i}} T \Big)_{i+j+k=n}$$

De même, la composée

$$\hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma,\mathcal{C})}(Z \otimes (Y \otimes X), T) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma,\mathcal{C})}((Y \otimes X) \otimes Z, T) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Suite}(\Sigma,\mathcal{C})}((X \otimes Y) \otimes Z, T)$$

associe à une famille :

$$(\gamma_{k,j,i})_{k+j+i=n} \in \prod_{k+j+i=n} \hom_{\mathbf{Rep}(\Sigma_k \times \Sigma_j \times \Sigma_i)}(Z_k \otimes (Y_j \otimes X_i), T)$$

la famille des composées :

$$\Big((X_i \otimes Y_j) \otimes Z_k \xrightarrow{\tau} Z_k \otimes (X_i \otimes Y_j) \xrightarrow{\tau} Z_k \otimes (Y_j \otimes X_i) \xrightarrow{\gamma_{k,j,i}} T \xrightarrow{\phi_{k,i+j}(1,\theta_{j,i})} T \xrightarrow{\theta_{k,i+j}} T \Big)_{i+j+k=n}$$

La commutation du diagramme (114) découle alors de la commutation du diagramme correspondant dans la catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$ ainsi que la relation $\theta_{j+k,i}\phi_{j+k,i}(\theta_{j,k},1) = \theta_{k,i+j}\phi_{k,i+j}(1,\theta_{j,i})$. □

On a donc la proposition suivante :

Proposition 4.3.67. — *Soit $(\mathcal{C},\otimes)$ une catégorie monoïdale fermée symétrique et unitaire. On suppose que $\mathcal{C}$ admet les colimites et limites pertinentes. Alors, $(\mathbf{Suite}(\Sigma,\mathcal{C}),\otimes)$ est aussi une catégorie monoïdale fermée symétrique et unitaire.*

Dans la suite, $(C,\otimes)$ sera toujours supposée symétrique.

Définition 4.3.68. — *Soit T un objet de $\mathcal{C}$.*

1- *On note S^T la suite symétrique donnée au niveau $n \in \mathbb{N}$ par l'objet $\mathrm{S}^T_n = T^{\otimes n}$ muni de l'action de Σ_n déduite de la permutation des facteurs.*

2- *On note m le morphisme de suites symétriques $\mathrm{S}^T \otimes \mathrm{S}^T \longrightarrow \mathrm{S}^T$ donné au niveau n par le coproduit, selon les décompositions $n = i + j$, des flèches évidentes :*

$$\mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n}(T^{\otimes i} \otimes T^{\otimes j}) \longrightarrow T^{\otimes n}$$

Proposition 4.3.69. — *La suite* S^T, *munie de l'accouplement* $m : \mathrm{S}^T \otimes \mathrm{S}^T \longrightarrow \mathrm{S}^T$ *et de l'unité* $\mathbb{1}_\Sigma \longrightarrow \mathrm{S}^T$, *est une algèbre unitaire et commutative dans la catégorie monoïdale* $\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$.

Démonstration. — On traite uniquement la commutativité de S^T. Il s'agit de montrer pour $n = i + j$ que le triangle suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n}(T^{\otimes i} \otimes T^{\otimes j}) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr] & & \mathrm{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}) \arrow[dl] \\
& T^{\otimes n} &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Par adjonction, et en utilisant la construction de θ, on voit qu'il suffit de montrer la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
T^{\otimes i} \otimes T^{\otimes j} \arrow[r, "\tau"] \arrow[drrr, equal] & T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i} \arrow[r] & \mathrm{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}) \arrow[r, "\theta_{j,i}"] & \mathrm{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}) \arrow[d] \\
& & & T^{\otimes n}
\end{tikzcd}$$

Le point clef est de remarquer que la permutation $\tau : T^{\otimes i} \otimes T^{\otimes j} \longrightarrow T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}$ coïncide avec l'action de $\theta_{i,j} \in \Sigma_n$ sur $T^{\otimes n}$ modulo les identifications canoniques. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T^{\otimes i} \otimes T^{\otimes j} \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, equal] & T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i} \arrow[r] \arrow[dr, equal] & \mathrm{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}) \arrow[r, "\theta_{j,i}"] \arrow[d] & \mathrm{Ind}_{\Sigma_j \times \Sigma_i}^{\Sigma_n}(T^{\otimes j} \otimes T^{\otimes i}) \arrow[d] \\
& T^{\otimes n} \arrow[r, "\theta_{i,j}"] & T^{\otimes n} \arrow[r, "\theta_{j,i}"] & T^{\otimes n}
\end{tikzcd}$$

Le résultat découle alors de la relation $\theta_{j,i}\theta_{i,j} = 1$. □

On notera $\mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T)$ (resp. $\mathbf{Mod}_d(\mathrm{S}^T)$) la catégorie des S^T-modules à gauche (resp. à droite) dans $\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$. Comme S^T est une algèbre commutative, on dispose d'un isomorphisme $\mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T) \simeq \mathbf{Mod}_d(\mathrm{S}^T)$ qui à un S^T-module à gauche $(\mathrm{S}^T \otimes M \to M)$ associe le S^T-module à droite $(M \otimes \mathrm{S}^T \simeq \mathrm{S}^T \otimes M \to M)$.

L'intérêt de l'algèbre S^T vient du résultat suivant :

Proposition 4.3.70. — *La catégorie* $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C})$ *est (tautologiquement) isomorphe à la catégorie* $\mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T)$ *des* S^T*-modules à gauche dans* $\mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$.

Démonstration. — Un T-spectre symétrique $\mathbf{X}$ définit un S^T-module en prenant la suite symétrique $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'accouplement :

$$\mathrm{S}^T \otimes (\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow (\mathbf{X}_n)_n$$

donné en degré n par le coproduit, selon les décompositions $n = i + j$, des flèches :

$$\mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n}(T^{\otimes i} \otimes \mathbf{X}_j) \longrightarrow \mathbf{X}_n$$

déduites des morphismes d'assemblage du T-spectre symétrique $\mathbf{X}$.

Réciproquement, un S^T-module $(M)_{n\in\mathbb{N}}$ définit un T-spectre symétrique $\mathbf{M}$ en posant $\mathbf{M}_n = M_n$ et en prenant pour morphisme d'assemblage $T \otimes M_{n-1} \longrightarrow M_n$ la composante correspondante à la décomposition $n = 1 + (n-1)$ du morphisme structural $\mathrm{S}^T \otimes M \longrightarrow M$. □

Vue la proposition 4.3.70, les S^T-modules à gauche seront notés par les lettres grasses : $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, etc. Comme S^T est commutative, on dispose aussi d'un isomorphisme $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Mod}_d(\mathrm{S}^T)$. Toutefois, cet isomorphisme est moins tautologique que celui de la proposition 4.3.70.

Comme S^T est une algèbre symétrique et unitaire, la catégorie $\mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T)$ est encore monoïdale symétrique et unitaire. Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont deux S^T-modules, on définit $\mathbf{X} \otimes_{\mathrm{S}^T} \mathbf{Y}$ comme étant le coégalisateur habituel :

$$\mathsf{Coeq}\Big(\mathbf{X} \otimes \mathrm{S}^T \otimes \mathbf{Y} \rightrightarrows \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} \Big)$$

où $\mathbf{X}$ est considéré comme un S^T-module à droite *via* l'isomorphisme $\mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T) \simeq \mathbf{Mod}_d(\mathrm{S}^T)$. Sous les hypothèses du lemme 4.3.64, la catégorie $\mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T)$ et également fermée. Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont deux S^T-modules à gauche, on définit $\underline{\mathsf{Hom}}_g^{\mathrm{S}^T}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ comme étant l'égalisateur :

$$\mathsf{Eq}\Big(\underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \rightrightarrows \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathbf{X} \otimes \mathrm{S}^T, \mathbf{Z}) \Big) \tag{115}$$

où la première flèche est celle déduite du morphisme structural $\mathbf{X} \otimes \mathrm{S}^T \longrightarrow \mathbf{X}$ de $\mathbf{X}$ vu comme S^T-module à droite et la seconde est la composée :

$$\underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathbf{X} \otimes \mathrm{S}^T, \mathbf{Z} \otimes \mathrm{S}^T) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathbf{X} \otimes \mathrm{S}^T, \mathbf{Z})$$

Notons également que la structure de S^T-module à gauche sur (115) est donnée par celle de $\mathbf{Z}$.

En utilisant la proposition 4.3.70 on déduit un produit tensoriel $- \otimes -$ sur la catégorie $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C})$. De plus, $(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C}), \otimes)$ est monoïdale symétrique et unitaire. Elle est également fermée si $\mathcal{C}$ est fermée et admet les limites pertinentes. Notons la proposition suivante :

Proposition 4.3.71. — *Appelons* $\underline{\mathrm{SUS}}_{T,\Sigma} : \mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C})$ *le foncteur qui à une suite symétrique* $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *associe le* T*-spectre symétrique* $\coprod_{p\in\mathbb{N}} \underline{\mathrm{Sus}}_{T,\Sigma}^p(X_p)$. *Ce foncteur correspond* via *l'isomorphisme* $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T)$ *au foncteur « S^T-module libre associé » qui à la suite symétrique* $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *associe le* S^T*-module à gauche* $\mathrm{S}^T \otimes X$. *En particulier, le foncteur* $\underline{\mathrm{SUS}}_{T,\Sigma}$ *est monoïdal.*

Démonstration. — Le foncteur $\underline{\mathrm{SUS}}_{T,\Sigma}$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C})$. De même, le foncteur $\mathrm{S}^T \otimes -$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T) \longrightarrow \mathbf{Suite}(\Sigma. \mathcal{C})$. Le résultat est maintenant clair. □

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, on note $e_p(A)$ la suite symétrique $(\varnothing, \ldots, \varnothing, \mathrm{Ind}_1^{\Sigma_p} A, \varnothing, \ldots)$ avec $\mathrm{Ind}_1^{\Sigma_p} A$ placé en degré p. On a un isomorphisme canonique $e_p(A) \otimes e_q(B) \simeq e_{p+q}(A \otimes B)$. De la relation $\mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^p = \underline{\mathrm{SUS}}_{T,\Sigma} \circ e_p$, on déduit le corollaire :

Corollaire 4.3.72. — *Il existe un isomorphisme de T-spectres* $\mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^p(X) \otimes \mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^q(Y) \simeq \mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^{p+q}(X \otimes Y)$ *naturel en X et Y dans $\mathcal{C}$. En particulier, le foncteur* $\mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^0$ *est monoïdal.*

On dispose d'un morphisme évident de suites symétriques $i_1 : e_1(T) \longrightarrow \mathrm{S}^T$ qui est l'identité au niveau 1. On peut former la composée des morphismes de S^T-modules :

$$\omega : \mathrm{S}^T \otimes e_1(T) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes i_1} \mathrm{S}^T \otimes \mathrm{S}^T \xrightarrow{m} \mathrm{S}^T \tag{116}$$

Le morphisme ω est aussi la flèche correspondante à i_1 *via* l'adjonction $(\mathrm{S}^T \otimes -, \mathrm{Oub}^{\mathrm{S}^T}) : \mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T)$.

Étant donnée une suite symétrique $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la flèche $\omega \otimes X$:

$$\mathrm{S}^T \otimes e_1(T) \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes i_1} \mathrm{S}^T \otimes \mathrm{S}^T \otimes X \xrightarrow{m} \mathrm{S}^T \otimes X$$

induit par la proposition 4.3.71 une flèche naturelle en X :

$$\omega_X : \underline{\mathrm{SUS}}_{T,\Sigma}(e_1(T) \otimes X) \longrightarrow \underline{\mathrm{SUS}}_{T,\Sigma}(X) \tag{117}$$

De plus, cette flèche correspond, *via* l'adjonction $(\underline{\mathrm{SUS}}_{T,\Sigma}, \mathrm{Oub}_{\Sigma}^{T,\Sigma}) : \mathbf{Suite}(\Sigma, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathcal{C})$, à la flèche

$$e_1(T) \otimes X \longrightarrow \underline{\mathrm{SUS}}_{T,\Sigma}(X)$$

qui, au niveau n, est donnée par l'inclusion du facteur $\mathrm{Ind}_{1 \times \Sigma^{n-1}}^{\Sigma^n} T \otimes X_{n-1}$, numéroté $1 + n - 1 = n$, dans le coproduit $\coprod_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} T^{\otimes i} X_j$. Il vient que si l'on applique (117) à $X = e_p(A)$, on retrouve la flèche ω_A^p (voir (82)). Le lemme suivant est maintenant clair :

Lemme 4.3.73. — *Soient $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ et $p \in \mathbb{N}$. La flèche $\omega_A^p : \mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^{p+1}(T \otimes A) \longrightarrow \mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^p(A)$ correspond* via *l'isomorphisme de catégories $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T)$ à la composée :*

$$\mathrm{S}^T \otimes e_{p+1}(T \otimes A) \simeq \mathrm{S}^T \otimes e_1(T) \otimes e_p(A) \xrightarrow{i_1} \mathrm{S}^T \otimes \mathrm{S}^T \otimes e_p(A) \xrightarrow{m} \mathrm{S}^T \otimes e_p(A)$$

Corollaire 4.3.74. — *Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $(A,B) \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})^2$. Le carré suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sus}^{p+1}_{T,\Sigma}(T \otimes A) \otimes \mathrm{Sus}^{q}_{T,\Sigma}(B) \arrow[r, "\omega^p_A \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{Sus}^{p}_{T,\Sigma}(A) \otimes \mathrm{Sus}^{q}_{T,\Sigma}(B) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathrm{Sus}^{p+q+1}_{T,\Sigma}(T \otimes A \otimes B) \arrow[r, "\omega^{p+q}_{A\otimes B}"] & \mathrm{Sus}^{p+q}_{T,\Sigma}(A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. — Par le lemme précédent, le carré de l'énoncé correspond modulo l'isomorphisme $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T)$ au carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{S}^T \otimes e_1(T) \otimes e_p(A)) \otimes e_q(B) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & (\mathrm{S}^T \otimes e_p(A)) \otimes e_q(B) \arrow[d] \\
\mathrm{S}^T \otimes e_1(T) \otimes e_{p+q}(A \otimes B) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{S}^T \otimes e_{p+q}(A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

La commutation de ce carré est évidente. □

Revenons au cas où $\mathcal{C}$ est notre catégorie de modèles $(\mathfrak{M}, \otimes, \mathbb{1})$ monoïdale symétrique et unitaire. Notons la proposition suivante :

Proposition 4.3.75. — *La catégorie $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathfrak{M})$ est une catégorie de modèles monoïdale pour sa structure projective instable.*

Démonstration. — Il s'agit de vérifier l'axiome **(MMC)** de la définition 4.1.57. Soit $v : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ une cofibration projective (resp. cofibration projective triviale niveau par niveau) de T-spectres symétriques. On note $\mathscr{C}'$ la classe des flèches $v' : \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{B}'$ dans $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T}(\mathfrak{M})$ telles que :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}' \coprod_{\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}'} \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}'$$

est une cofibration projective (resp. cofibration projective triviale niveau par niveau). Il suffira de prouver que $\mathbf{Cof}_{proj} \subset \mathscr{C}'$. Pour cela, remarquons que $\mathscr{C}'$ est stable par rétract, composition transfinie et push-out. Ceci nous ramène à vérifier que $\{\mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(u');\ q \in \mathbb{N} \text{ et } u' \in \mathbf{Cof}\} \subset \mathscr{C}$.

Soit $u' : U' \longrightarrow V'$ une cofibration de $\mathfrak{M}$. Il faut montrer que la flèche :

$$\mathbf{A} \otimes \mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(V') \coprod_{\mathbf{A}\otimes\mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(U')} \mathbf{B} \otimes \mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(U') \longrightarrow \mathbf{B} \otimes \mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(V')$$

est une cofibration projective (resp. cofibration projective triviale niveau par niveau). Pour faire cela, on introduit la classe $\mathscr{C}$ des flèches v vérifiant cette propriété et on montre que $\mathbf{Cof}_{proj} \subset \mathscr{C}$ (resp. $\mathbf{Cof}_{proj} \cap \mathbf{W}_{niv} \subset \mathscr{C}$). Étant donné que $\mathscr{C}$ est stable par rétract, composition transfinie et push-out, on se ramène à montrer que

$\{\mathrm{Sus}^p_{T,\Sigma}(u);\ p \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbf{Cof}$ (resp. $u \in \mathbf{Cof} \cap \mathbf{W})\} \subset \mathscr{C}$. On se donne donc une cofibration (resp. une cofibration triviale) $u : U \longrightarrow V$ de $\mathfrak{M}$. Par le corollaire 4.3.72, on voit que la flèche :

$$\mathrm{Sus}^p_{T,\Sigma}(U) \otimes \mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(V') \coprod_{\mathrm{Sus}^p_{T,\Sigma}(U)\otimes \mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(U')} \mathrm{Sus}^p_{T,\Sigma}(V) \otimes \mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(U') \longrightarrow \mathrm{Sus}^p_{T,\Sigma}(V) \otimes \mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(V')$$

s'identifie canoniquement à :

$$\mathrm{Sus}^{p+q}_{T,\Sigma}(U \otimes V') \coprod_{\mathrm{Sus}^{p+q}_{T,\Sigma}(U \otimes U')} \mathrm{Sus}^{p+q}_{T,\Sigma}(U' \otimes V) \longrightarrow \mathrm{Sus}^{p+q}_{T,\Sigma}(V \otimes V')$$

et donc à l'image de la cofibration (resp. cofibration triviale) $U \otimes V' \coprod_{U\otimes U} U' \otimes V \longrightarrow V \otimes V'$ par le foncteur de Quillen à gauche $\mathrm{Sus}^{p+q}_{T,\Sigma}$. D'où le résultat. □

Nous ignorons si l'analogue de la proposition 4.3.75 est encore vrai pour la structure stable sur $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathcal{C})$. Nous avons toutefois le résultat conditionnel :

Théorème 4.3.76. – *On suppose que la catégorie* $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M})$ *est stable pour sa structure projective stable. Alors,* $(\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ *est une catégorie de modèles monoïdale.*

Démonstration. — Par la proposition 4.2.76, il nous reste à vérifier que $\mathbf{E} \otimes \omega^p_A$ est une équivalence stable pour $\mathbf{E}$ un T-spectre symétrique projectivement cofibrant, A un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$ et $p \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de voir que pour tout Ω_T-spectre fibrant niveau par niveau $\mathbf{X}$, l'application :

$$\hom_{\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M}))}(\mathbf{E} \otimes \mathrm{Sus}^p_{T,\Sigma}(A), \mathbf{X}) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M}))}(\mathbf{E} \otimes \mathrm{Sus}^{p+1}_{T,\Sigma}(T \otimes A), \mathbf{X})$$

est bijective. Par adjonction, cette application s'identifie à :

$$\hom_{\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M}))}(\mathbf{E}, \underline{\mathsf{Hom}}_d(\mathrm{Sus}^p_{T,\Sigma}(A), \mathbf{X})) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M}))}(\mathbf{E}, \underline{\mathsf{Hom}}_d(\mathrm{Sus}^{p+1}_{T,\Sigma}(T \otimes A), \mathbf{X}))$$

Il suffit donc de montrer que la flèche $\underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{Sus}^p_{T,\Sigma}(A), \mathbf{X}) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{Sus}^{p+1}_{T,\Sigma}(T \otimes A), \mathbf{X})$ est une équivalence faible niveau par niveau. Soit $q \in \mathbb{N}$, la transformation naturelle :

$$\mathrm{Ev}_q \circ \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{Sus}^p_{T,\Sigma}(A), -) \longrightarrow \mathrm{Ev}_q \circ \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{Sus}^{p+1}_{T,\Sigma}(T \otimes A), -) \tag{118}$$

correspond par adjonction à la flèche :

$$\mathrm{Sus}^{p+1}_{T,\Sigma}(T \otimes A) \otimes \mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(-) \xrightarrow{\omega^p_A \otimes \mathrm{id}} \mathrm{Sus}^p_{T,\Sigma}(A) \otimes \mathrm{Sus}^q_{T,\Sigma}(-) \tag{119}$$

Par le corollaire 4.3.74, la transformation naturelle (119) est isomorphe à :

$$\mathrm{Sus}^{p+q+1}_{T,\Sigma}(T \otimes A \otimes -) \xrightarrow{\omega^{p+q}_{A\otimes -}} \mathrm{Sus}^{p+q}_{T,\Sigma}(A \otimes -) \tag{120}$$

On déduit que (118) est isomorphe à la transformation naturelle :

$$\underline{\mathsf{Hom}}_g(A, \mathrm{Ev}_{p+q}(-)) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_g(A, \underline{\mathsf{Hom}}_g(T, \mathrm{Ev}_{p+q+1}(-)))$$

déduite par adjonction du morphisme d'assemblage des T-spectres. Le résultat est maintenant clair étant donné que pour un Ω_T-spectre fibrant niveau par niveau, le morphisme $\mathbf{X}_{p+q} \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_g(T, \mathbf{X}_{p+q+1})$ est une équivalence faible de $\mathfrak{M}$. □

Notons la proposition suivante :

Proposition 4.3.77. — *Pour que la catégorie de modèles* $(\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ *soit stable, il suffit qu'il existe un objet* $T' \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$ *tel que* T *soit isomorphe à* $\Sigma^1(T')$ *dans* $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — Par la proposition 4.3.42, il suffit de traiter le cas $T = T' \otimes \Sigma^1\mathbb{1}$ avec T' un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$. On note τ la transposition $(12) \in \Sigma_2$. On sait par le théorème 4.3.38 que le foncteur $(T \otimes -)_\tau$ est une équivalence de Quillen à gauche relativement à la structure projective stable de $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M})$. On vérifie immédiatement que $(T\otimes -)_\tau$ est égal au foncteur $\mathrm{S}^T \otimes e_0(T) \otimes -$ modulo l'isomorphisme $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M}) \simeq \mathbf{Mod}_g(\mathrm{S}^T)$. On a des isomorphismes canoniques de foncteurs :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}^T \otimes e_0(T) \otimes - &= (\mathrm{S}^T \otimes e_0(T') \otimes -) \circ (\mathrm{S}^T \otimes e_0(\Sigma^1\mathbb{1}) \otimes -) \\ &= (\mathrm{S}^T \otimes e_0(\Sigma^1\mathbb{1}) \otimes -) \circ (\mathrm{S}^T \otimes e_0(T') \otimes -) \end{aligned}$$

De plus, les deux foncteurs $(\mathrm{S}^T \otimes e_0(T') \otimes -)$ et $(\mathrm{S}^T \otimes e_0(\Sigma^1\mathbb{1}) \otimes -)$ sont des foncteurs de Quillen à gauche. Ceci montre que $(\mathrm{S}^T \otimes e_0(\Sigma^1\mathbb{1}) \otimes -)$ est une équivalence de Quillen à gauche. Il est immédiat que $\mathsf{L}(\mathrm{S}^T \otimes e_0(\Sigma^1\mathbb{1}) \otimes -)$ est isomorphe à l'endofoncteur $\Sigma^1(-)$ de $\mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M}))$. □

Remarque 4.3.78. — La condition de la proposition 4.3.77 est clairement satisfaite lorsque $\mathfrak{M}$ est stable.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve du critère suivant :

Théorème 4.3.79. — *Pour que le foncteur de Quillen à gauche* $(- \otimes_{\{1\}} \Sigma)$: $\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M})$ *soit une équivalence de Quillen relativement aux structures projectives stables, il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) La permutation $(123) \in \Sigma_3$ *opère par l'identité sur* $T^{\otimes 3}$ *dans* $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$,

(ii) Le foncteur $\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T, -)$ *commute aux compositions transfinies comme dans l'hypothèse 4.3.56.*

(iii) La catégorie de modèles $(\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ *est stable.*

La permutation $\tau = (12) \in \Sigma_2$ est une involution symétrique du monoïde Σ (voir la définition 4.3.36). D'après le théorème 4.3.40, il suffit de vérifier que le foncteur $(T \otimes -)_\tau = (T \otimes_\tau -) : \mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})$ est une équivalence de Quillen à gauche. On notera $\underline{\mathsf{Hom}}_g^\tau(T, -)$ l'adjoint à droite de $T \otimes_\tau -$. L'hypothèse de stabilité de $(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ sera utilisée *via* le lemme suivant :

Lemme 4.3.80. — *On suppose donné un morphisme de* $\mathbb{N}$*-suites dans une catégorie de modèles stable* $\mathfrak{N}$ *:*

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
B_0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & B_n \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

et des morphismes $\gamma_n : B_n \longrightarrow A_{n+1}$ *dans* $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$ *faisant de :*

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
B_0 \arrow[r] \arrow[ur] & B_1 \arrow[r] \arrow[ur] & \dots \arrow[r] & B_n \arrow[r] \arrow[ur] & B_{n+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$*. Alors le morphisme évident* $\mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}} A_n \longrightarrow \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}} B_n$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$*.*

Démonstration. — La colimite homotopique d'une $\mathbb{N}$-suite de $\mathfrak{N}$:

$$C_0 \xrightarrow{c_0} C_1 \xrightarrow{c_1} \dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{c_n} C_{n+1} \longrightarrow \dots$$

se calcule (à un isomorphisme non-unique près) dans la catégorie homotopique par :

$$\mathsf{Cone}\Big(\coprod_n C_n \xrightarrow{\mathrm{id} - \coprod_n c_n} \coprod_n C_n\Big)$$

Les flèches γ_n de l'énoncé fournissent donc une flèche (non canonique) γ : $\mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}} B_n \longrightarrow \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On montre facilement que les composées $\gamma \circ c$ et $c \circ \gamma$ sont inversibles (avec c : $\mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}} A_n \longrightarrow \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}} B_n$ le morphisme canonique). □

La composée $(T \otimes_\tau -) \circ (T \otimes_\tau -)$ est égale à $(T^{\otimes 2} \otimes -)_\sigma$ avec $\sigma = (123) \in \Sigma_3$. On notera $T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -$ le prolongement de $T^{\otimes 2} \otimes -$ associé à σ et $\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -)$ sont adjoint à droite.

Lemme 4.3.81. — *On suppose que* $\sigma = (123)$: $T^{\otimes 3} \longrightarrow T^{\otimes 3}$ *est l'identité dans* $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$*. On suppose aussi que* $(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}), \mathbf{W}_{st}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{proj-st})$ *est*

stable. Alors, l'unité : $\mathbf{X} \longrightarrow \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -) \circ \mathsf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -)\mathbf{X}$ *de l'adjonction* $(\mathsf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -), \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T, -)) : \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$ *est une équivalence stable pour tout* T*-spectre* $\mathbf{X}$.

Démonstration. — Soit $\mathbf{X}$ un T-spectre projectivement cofibrant. Choisissons une suite de cofibrations

$$\mathbf{X} \xrightarrow{a_1} \mathbf{R}_1 \xrightarrow{u} \mathbf{R}$$

avec a_1 triviale niveau par niveau, u stablement triviale, $\mathbf{R}_1$ fibrant niveau par niveau et $\mathbf{R}$ stablement fibrant. On choisit ensuite une cofibration triviale niveau par niveau $b_1 : T^{\otimes 2} \otimes_\sigma \mathbf{R}_1 \longrightarrow \mathbf{Q}_1$ avec $\mathbf{Q}_1$ fibrant niveau par niveau et un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{R} \arrow[d] \\
\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) \arrow[r, "v"] & \mathbf{P}
\end{tikzcd}$$

avec v une cofibration stablement triviale et $\mathbf{P}$ stablement fibrant.

Considérons le diagramme suivant dans $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "e"] & \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^{\circ n}\mathbf{R}_1 \arrow[r] \arrow[d, "(\star)"] & \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^{\circ n}\mathbf{R} \arrow[d] \\
\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "e'"'] & \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^{\circ n}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) \arrow[r] & \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^{\circ n}\mathbf{P}
\end{tikzcd} \tag{121}$$

Comme $\mathbf{R}$ et $\mathbf{P}$ sont des T-spectres stablement fibrants, les flèches $\Lambda^{\circ n}\mathbf{R} \longrightarrow \Lambda^{\circ n+1}\mathbf{R}$ et $\Lambda^{\circ n}\mathbf{P} \longrightarrow \Lambda^{\circ n+1}\mathbf{P}$ sont des équivalences faibles niveau par niveau. On déduit des isomorphismes $\mathbf{R} \simeq \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^{\circ n}\mathbf{R}$ et $\mathbf{P} \simeq \mathsf{LColim}_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^{\circ n}\mathbf{P}$ dans $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$. Ceci montre que les flèches e et e' sont des équivalences stables. En considérant l'image de (121) par $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$, la flèche $\mathbf{X} \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_g^\tau(T, \mathbf{Q}_1)$ devient un rétract de $(\star)$. Il suffira donc de montrer que $(\star)$ est une équivalence stable. On verra même que $(\star)$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$.

La flèche $(\star)$ de (121) est la colimite homotopique du morphisme de $\mathbb{N}$-suites :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^0\mathbf{R}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^1\mathbf{R}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & \Lambda^{\circ n}\mathbf{R}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\Lambda^0\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) \arrow[r] & \Lambda^1\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \Lambda^{\circ n}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{Q}_1) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

On montrera que la restriction de ce morphisme de $\mathbb{N}$-suites suivant l'inclusion cofinale $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, vérifie la condition du lemme 4.3.80 niveau par niveau. Ainsi, on s'intéressera uniquement à l'image de cette restriction par le foncteur $\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}) \xrightarrow{Ev_p} \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Cette image est :

(122)

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \mathbf{X}_{n+p}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(2)"'] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathbf{X}_{2+n+p}) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) \arrow[r, "(3)"] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{2+n+p})) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

où la flèche (1) est la composée :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \mathbf{X}_{n+p}) \arrow[r] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p}) \arrow[r, "\gamma^2_{\mathbf{X}}"] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathbf{X}_{2+n+p})
\end{tikzcd}$$

La flèche (2) est induite par le morphisme d'unité $1 \longrightarrow \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes -)$. La flèche (3) est donnée par la composée :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) \arrow[r] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) \arrow[d, "\gamma^2_{\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}^\sigma_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_\sigma \mathbf{X})}"] \\
& \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{2+n+p}))
\end{tikzcd}$$

Supposons un instant que le morphisme d'assemblage du T-spectre $\underline{\mathsf{Hom}}^\sigma_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_\sigma \mathbf{X})$ est égal dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ au morphisme d'assemblage du T-spectre $\underline{\mathsf{Hom}}^1_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_1 \mathbf{X})$ (avec $T^{\otimes 2} \otimes_1 -$ le prolongement du foncteur $T^{\otimes 2} \otimes - : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ associé à l'isomorphisme d'associativité $T \otimes (T \otimes T) \otimes - \simeq (T \otimes T) \otimes T \otimes -$). Dans ce cas, la flèche (3) dans le diagramme (122) est égale à la composée :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) \arrow[r] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2} \otimes \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+p})) \arrow[d, "\gamma^2_{\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}^1_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes_1 \mathbf{X})}"] \\
& \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{2+n+p}))
\end{tikzcd}$$

Le carré du morphisme d'assemblage $\gamma_{\underline{\mathsf{Hom}}^1_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes_1 \mathbf{X})}$ du T-spectre $\underline{\mathsf{Hom}}^1_g(T\otimes_1 \mathbf{X})$ est égal à la composée :

$$\begin{aligned} T^{\otimes 2}\otimes \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{n+p}) &\xrightarrow{\delta} T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{n+p} \\ &\xrightarrow{\gamma^2_{\mathbf{X}}} \mathbf{X}_{2+n+p} \xrightarrow{\eta} \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{2+n+p}) \end{aligned}$$

On dispose d'un isomorphisme canonique $\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, -)) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}\otimes T^{\otimes n}, -)$ et d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{n+p})) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}\otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{n+p}) \arrow[d, "\gamma^2_{\mathbf{X}}"] \\
\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}\otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2}\otimes \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{n+p})) \arrow[d, "\delta"] & \underline{\mathsf{Hom}}_g(T\otimes T^{\otimes n}, \mathbf{X}_{1+n+p}) \arrow[d, "\eta"] \\
\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}\otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{n+p}) \arrow[d, "\gamma^2_{\mathbf{X}}"] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 1+n}, \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{1+n+p})) \\
\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}\otimes T^{\otimes n}, \mathbf{X}_{2+n+p}) \arrow[d, "\eta"] & \\
\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{2+n+p})) &
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \mathbf{X}_{n+p}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(2)"'] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathbf{X}_{2+n+p}) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{n+p})) \arrow[r, "(3)"] \arrow[ur, dotted, "r_n"] & \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{2+n+p})) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

est commutatif dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ si l'on prend pour la flèche en pointillés la composée :

$$\begin{aligned} &\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes n}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{n+p})) \\ &\qquad \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}\otimes T^{\otimes n}, T^{\otimes 2}\otimes \mathbf{X}_{n+p}) \xrightarrow{\gamma^2_{\mathbf{X}}} \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2+n}, \mathbf{X}_{2+n+p}) \end{aligned}$$

On conclut alors avec le lemme 4.3.80.

Pour terminer, il nous reste donc à vérifier que les morphismes d'assemblage $\gamma_{\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes_\sigma \mathbf{X})}$ sont isomorphes dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ aux morphismes d'assemblage $\gamma_{\underline{\mathsf{Hom}}_g^1(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes_1 \mathbf{X})}$. Soit $\epsilon \in \Sigma_3$ et explicitons $\gamma_{\underline{\mathsf{Hom}}_g^\epsilon(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2}\otimes_\epsilon \mathbf{X})}$ en revenant aux définitions. Il s'agit donc de la composée :

$$\begin{tikzcd}
T \otimes \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_n) \arrow[d, "\eta"] & & \\
\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes T \otimes \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_n)) \arrow[d, "\epsilon^{-1}"] & & \\
\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T \otimes T^{\otimes 2} \otimes \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_n)) \arrow[r, "\delta"] & \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T \otimes T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_n) \arrow[r, "\epsilon"] & \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes T \otimes \mathbf{X}_n) \arrow[d, "\gamma_{\mathbf{X}}"] \\
& & \underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, T^{\otimes 2} \otimes \mathbf{X}_{n+1})
\end{tikzcd}$$

Étant donné que σ et σ^{-1} agissent trivialement sur $T \otimes T \otimes T$ dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$, cette composée est la même (dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$) pour $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = \sigma$. Le lemme est démontré. $\square$

On peut maintenant achever la preuve du théorème 4.3.79. Étant donné que $(T \otimes_T -)^{\circ 2} = (T^{\otimes} \otimes_\sigma -)$, il suffit de montrer que l'adjonction $((T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -), \underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -))$ est une équivalence de Quillen relativement à la structure stable.

L'endofoncteur $\mathsf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -)$ de $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$ préserve les équivalences stables. La condition (ii) du théorème 4.3.79 implique que l'endofoncteur $\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -)$ de $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$ préserve également les équivalences stables (voir la proposition 4.3.57). Ces deux foncteurs se dérivent donc trivialement relativement à la localisation de $\mathbf{Ho}_{niv}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$ suivant les équivalences stables. On déduit, par le lemme 4.3.81, que l'unité de l'adjonction $(\mathsf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -), \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -)) \quad : \quad \mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$ est inversible.

D'autre part, le foncteur $\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -)$ est conservatif. En effet, soit $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ un morphisme de T-spectres stablement fibrants. Supposons que $\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, f)$ est une équivalence stable. Les T-spectres $\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{X})$ et $\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, \mathbf{Y})$ sont encore stablement fibrants. Il vient que $\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, f)$ est une équivalence faible niveau par niveau. Pour $n \in \mathbb{N}$, les carrés :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] & \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathbf{X}_{n+2}) \arrow[d, "\underline{\mathsf{Hom}}_g(T^{\otimes 2}, f_{n+2})"] \\
\mathbf{Y}_n \arrow[r] & \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathbf{Y}_{n+2})
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs et à flèches horizontales des équivalences faibles. Ceci montre que les f_n étaient des équivalences faibles.

Il découle alors formellement que la counité de l'adjonction : $(\mathsf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -), \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -))$ (au niveau de $\mathbf{Ho}_{st}(\mathbf{Spect}_T(\mathfrak{M}))$) est aussi inversible. En effet, la composée :

$$\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -) \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -) \circ \mathsf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -) \circ \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -) \longrightarrow \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -)$$

est l'identité. Ceci montre que $\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -) \circ \mathsf{L}(T^{\otimes 2} \otimes_\sigma -) \circ \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -) \longrightarrow \mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -)$ est inversible. On invoque alors le fait que $\mathsf{R}\underline{\mathsf{Hom}}_g^\sigma(T^{\otimes 2}, -)$ est conservatif. Le théorème 4.3.79 est démontré.

4.4. Des catégories de modèles de nature faisceautique

Le but de cette section est d'exposer les résultats de Jardine [**Jar87**] sur l'existence de structures de modèles sur les catégories de faisceaux sur un site. Une différence notable avec [**Jar87**] vient du fait que l'on considère des faisceaux à valeurs dans des catégories de *coefficients* (voir la définition 4.4.23). Ceci exclut donc l'exemple fondamental $\mathbf{\Delta}^{op}\mathcal{E}ns$ puisque les catégories de coefficients sont stables.

4.4.1. Préfaisceaux et faisceaux à valeurs dans une catégorie abstraite

Dans ce numéro, on se donne une catégorie $\mathcal{C}$ complète et cocomplète. Si A est un objet de $\mathcal{C}$ et E un ensemble, on notera $E \otimes A$ (resp. $\underline{\mathrm{hom}}(E, A)$) la colimite (resp. la limite) du foncteur :

$$E \longrightarrow * \xrightarrow{A} \mathcal{C}$$

où l'ensemble E est considéré comme une catégorie discrète. Bien entendu, $E \otimes A$ (resp. $\underline{\mathrm{hom}}(E, A)$) est simplement le coproduit (resp. le produit) de E copies de A. On vérifie aisément que le foncteur $E \otimes -$ est adjoint à gauche du foncteur $\underline{\mathrm{hom}}(E, -)$.

Définition 4.4.1. — *Soit $\mathcal{S}$ une petite catégorie. On note* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ *la catégorie* $\underline{\mathrm{HOM}}(\mathcal{S}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$. *Un objet de* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ *est appelé un* préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$. *Lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles, on note simplement* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})$ *la catégorie des préfaisceaux d'ensembles.*

Dans la suite de cette section, une petite catégorie $\mathcal{S}$ sera fixée. Sauf mention explicite du contraire, les préfaisceaux sont définis sur $\mathcal{S}$. Soit F un préfaisceau d'ensembles. On note $\mathcal{S}/F$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})/F$ formée des flèches $U \to F$ avec U un objet de $\mathcal{S}$ vu comme un préfaisceau représentable *via* le plongement de Yoneda.

Définition 4.4.2. — *Étant donnés un préfaisceau K à valeurs dans $\mathcal{C}$ et un préfaisceau d'ensembles F, on définit un préfaisceau $F \mathbin{\mathcal{Z}} K : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ par l'association :*

$$U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow F(U) \mathbin{\mathcal{Z}} K(U)$$

Si H est un autre préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$, on note $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F, H)$ l'objet de $\mathcal{C}$ défini par :

$$\mathsf{Lim}_{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)} H(U)$$

On définit alors un préfaisceau $\underline{\hom}(F, H)$ à valeurs dans $\mathcal{C}$ par l'association :

$$U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F \times U, H)$$

Remarque 4.4.3. — Pour $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$, on a un isomorphisme canonique : $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(U, H) \simeq H(U)$. En effet, la catégorie $\mathcal{S}/U$ admet id_U comme objet final.

On verra que $\underline{\hom}(F, -)$ est l'adjoint à droite du foncteur $F \otimes -$. On commence par :

Proposition 4.4.4. — *Soit F un préfaisceau d'ensembles. Le foncteur $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F, -)$: $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ est adjoint à droite du foncteur composé :*

$$\mathcal{C} \xrightarrow{cst} \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \xrightarrow{F \mathbin{\mathcal{Z}} -} \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$$

*où cst est le foncteur qui associe à $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ le préfaisceau constant A_{cst} (*i.e. *tel que $A_{cst}(U) = A$ pour $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$).*

Démonstration. — Il s'agit de construire un isomorphisme naturel en $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ et $H \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$:

$$\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(F \otimes A_{cst}, H) \xrightarrow{\sim} \hom_{\mathcal{C}}(A, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F, H))$$

L'ensemble $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(F \otimes A_{cst}, H)$ est l'égalisateur de la double flèche évidente :

$$\prod_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \hom_{\mathcal{C}}(F(U) \otimes A, H(U)) \rightrightarrows \prod_{U \to V \in \mathsf{Fl}(\mathcal{S})} \hom_{\mathcal{C}}(F(V) \otimes A, H(U))$$

On déduit par adjonction, un isomorphisme naturel entre $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(F \otimes A_{cst}, H)$ et l'égalisateur de :

$$\prod_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \hom_{\mathcal{C}}(A, \underline{\hom}(F(U), H(U))) \rightrightarrows \prod_{U \to V \in \mathsf{Fl}(\mathcal{S})} \hom_{\mathcal{C}}(A, \underline{\hom}(F(V), H(U)))$$

Étant donné que le foncteur $\hom_{\mathcal{C}}(A, -)$ commute aux limites, il nous reste à construire un isomorphisme naturel en H entre les deux objets suivants :

$$\mathsf{Lim}_{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)} H(U)$$

et

$$\mathrm{Eq}\Big(\prod_{U\in\mathsf{Ob}(\mathcal{S})}\underline{\hom}(F(U),H(U))\rightrightarrows\prod_{U\to V\in\mathsf{Fl}(\mathcal{S})}\underline{\hom}(F(V),H(U))\Big)$$

En écrivant $\underline{\hom}(F(U'),H(U))=\prod_{U'\to F}H(U)$ on voit que l'égalisateur de droite est égal à :

$$\begin{aligned}\mathrm{Eq}\Big(\prod_{U\in\mathsf{Ob}(\mathcal{S})}\prod_{U\to F}H(U)\rightrightarrows\prod_{U\to V\in\mathsf{Fl}(\mathcal{S})}\prod_{V\to F}H(U)\Big)\\ =\mathrm{Eq}\Big(\textstyle\prod_{U\to F\in\mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)}H(U)\rightrightarrows\prod_{U\to V\to F\in\mathsf{Fl}(\mathcal{S}/F)}H(U)\Big)\end{aligned}$$

Le membre de droite est une description de la limite $\mathsf{Lim}_{U\to F\in\mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)}H(U)$. La proposition est démontrée. □

Proposition 4.4.5. — *Soit F un préfaisceau d'ensembles. L'endofoncteur $\underline{\hom}(F,-)$ de* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})$ *est adjoint à droite de l'endofoncteur $F\otimes-$.*

Démonstration. — Soient K et H deux préfaisceaux à valeurs dans $\mathcal{C}$. Il s'agit de construire un isomorphisme naturel :

$$\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(F\otimes K,H)\xrightarrow{\sim}\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(K,\underline{\hom}(F,H))$$

Par définition, l'ensemble $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(K,\underline{\hom}(F,H))$ est l'égalisateur de la double flèche évidente :

$$\begin{aligned}\prod_{U\in\mathsf{Ob}(\mathcal{S})}\hom_{\mathcal{C}}(K(U),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F\times U,H))\\ \rightrightarrows\prod_{U\to V\in\mathsf{Fl}(\mathcal{S})}\hom_{\mathcal{C}}(K(V),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F\times U,H))\end{aligned}$$

Par l'adjonction décrite dans la proposition 4.4.4, on a un isomorphisme naturel entre $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(K,\underline{\hom}(F,H))$ et l'égalisateur :

$$\begin{aligned}\prod_{U\in\mathsf{Ob}(\mathcal{S})}\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}((F\times U)\otimes K(U)_{cst},H)\\ \rightrightarrows\prod_{U\to V\in\mathsf{Fl}(\mathcal{S})}\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}((F\times U)\otimes K(V)_{cst},H)\end{aligned}$$

Étant donné que $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(-,H)$ envoie les colimites sur les limites, on voit qu'il suffit de construire un isomorphisme entre K et :

$$\mathrm{Coeq}\Big(\coprod_{U\to V\in\mathsf{Fl}(\mathcal{S})}U\otimes K(V)_{cst}\rightrightarrows\coprod_{U\in\mathsf{Ob}(\mathcal{S})}U\otimes K(U)_{cst}\Big)\tag{123}$$

Une flèche de (123) vers $L \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$ correspond à un élément de :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Eq}\Big(\prod_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(U \otimes K(U)_{cst}, L) \\
&\qquad \Longrightarrow \prod_{U \to V \in \mathsf{Fl}(\mathcal{S})} \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(U \otimes K(V)_{cst}, L)\Big) \\
&= \mathrm{Eq}\Big(\prod_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \hom_{\mathcal{C}}(K(U), L(U)) \Longrightarrow \prod_{U \to V \in \mathsf{Fl}(\mathcal{S})} \hom_{\mathcal{C}}(K(V), L(U))\Big) \\
&\qquad = \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(K, L)
\end{aligned}$$

La première égalité provient de l'adjonction $(U \otimes (-)_{cst}, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(U, -))$ et de l'identification $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(U, L) = L(U)$ (voir la remarque 4.4.3). L'isomorphisme recherché s'obtient alors par le lemme de Yoneda. □

On déduit immédiatement le corollaire :

Corollaire 4.4.6. — *Soient F et G deux préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{S}$. Il existe un isomorphisme naturel :*

$$\underline{\hom}(F \times G, H) \simeq \underline{\hom}(G, \underline{\hom}(F, H))$$

en $H \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$.

Rappelons qu'une topologie de Grothendieck *top* sur une petite catégorie $\mathcal{S}$ est la donnée pour tout objet $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ d'une famille $\mathrm{J}_{top}(U)$ de sous-préfaisceaux d'ensembles de U telle que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $U \in \mathrm{J}_{top}(U)$,

(ii) Pour toute flèche $V \longrightarrow U$ et tout $R \in \mathrm{J}_{top}(U)$, le sous-préfaisceau $R \times_U V \subset V$ est dans $\mathrm{J}_{top}(V)$,

(iii) Soit $R \in \mathrm{J}_{top}(U)$ et P un sous-préfaisceau de U. Si pour tout $V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)$ le sous-préfaisceau $V \times_U P$ est dans $\mathrm{J}_{top}(V)$, alors $P \in \mathrm{J}_{top}(U)$.

Les sous-préfaisceaux dans $\mathrm{J}_{top}(U)$ sont appelés les *cribles couvrantes* de U (pour la topologie *top*). Le couple $(\mathcal{S}, top)$ est appelé un *site de Grothendieck*.

Dans le reste de cette sous-section, on suppose que $\mathcal{S}$ est munie d'une topologie *top*. Rappelons la définition suivante :

Définition 4.4.7. — *Un préfaisceau H à valeurs dans $\mathcal{C}$ est un* faisceau *(resp. est* séparé*) (relativement à la topologie top) lorsque la flèche :*

$$H(U) = \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(U, H) \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R, H)$$

est un isomorphisme (resp. un monomorphisme) pour tout $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ et toute crible couvrante R de U. On note $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ dont les objets sont les faisceaux.

Soit H un préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$. On pose, suivant [**AGV73**],

$$\mathrm{L}H(U) = \mathsf{Colim}_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)}\, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R, H) \tag{124}$$

Il est clair que $\mathrm{L}H$ est naturellement un préfaisceau et que l'on dispose d'un morphisme canonique $\ell(H) : H \longrightarrow \mathrm{L}H$. On a la proposition suivante :

Proposition 4.4.8. — *On suppose que les monomorphismes de $\mathcal{C}$ sont stables par petites colimites filtrantes. Soit H un préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$. Alors, H est un faisceau si et seulement si $\ell(H)$ est inversible.*

Démonstration. — La condition est clairement nécessaire. Supposons donc que $\ell(H)$ est inversible et montrons que H est un faisceau. Pour toute crible couvrante $P \in \mathrm{J}_{top}(U)$, la flèche $H(U) \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(P, H)$ admet une rétraction donnée par la composée :

$$H(U) \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow \mathsf{Colim}_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)}\, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R, H) \simeq H(U)$$

En particulier, cette flèche est un monomorphisme. Plus généralement, si R et R' sont deux cribles couvrantes de U avec $R' \subset R$, le morphisme :

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R, H) \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R', H)$$

est un monomorphisme. En effet, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R, H) \arrow[r] \arrow[d, "(1)"'] & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R', H) \arrow[d, "(2)"'] \arrow[ddl, bend left, "(1)"] \\
\prod_{V\to R\in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)} H(V) \arrow[r, "(3)"] \arrow[dr] & \prod_{V\to R\in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(V \times_R R', H) \arrow[d] \\
& \prod_{V'\to R'\in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R')} H(V')
\end{tikzcd}$$

Les flèches numérotées (1) sont des monomorphismes par la construction de $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$ (voir la définition 4.4.2). Il vient que la flèche (2) est aussi un monomorphismes. L'assertion découle alors du fait que (3) est un monomorphisme puisque c'est le produit des monomorphismes $H(V) \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(V \times_R R', H)$.

Il est maintenant facile d'achever la preuve de la proposition. En effet, pour $P \in \mathrm{J}_{top}(U)$, la flèche :

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow \mathsf{Colim}_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R, H) \simeq H(U) \tag{125}$$

est un monomorphisme puisque c'est la colimite des monomorphismes $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(P, H) \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R, H)$ suivant les cribles couvrantes R de U contenues dans P. Mais, la flèche (125) admet $H(U) \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(P, H)$ pour section. Il vient que (125) et sa section sont des isomorphismes. □

Lemme 4.4.9. — *Soit H un préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$. Les flèches* $\mathrm{L}(\ell(H)),\ \ell(\mathrm{L}(H)) : \mathrm{L}(H) \longrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{L}(H))$ *sont égales.*

Démonstration. — Soit U un objet de $\mathcal{S}$ et il s'agit de comparer les deux flèches :

$$\mathsf{Colim}_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)}\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(R,H) \xrightarrow{\ell(H)} \mathsf{Colim}_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)}\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(R,\mathrm{L}(H))$$

$$\mathsf{Colim}_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)}\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(R,H) \simeq \mathrm{L}(H)(U) \longrightarrow \mathsf{Colim}_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)}\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(R,\mathrm{L}(H))$$

L'application $\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(\mathsf{Colim}_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)}\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(R,H),\ -) \longrightarrow \prod_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(R, H), -)$ étant injective, on se ramène à comparer les composées ci-dessous avec P une crible couvrante de U :

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,H) \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,\mathrm{L}(H)) \longrightarrow \mathsf{Colim}_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)}\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(R,\mathrm{L}(H))$$

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,H) \longrightarrow \mathrm{L}(H)(U) \longrightarrow \mathsf{Colim}_{R\in \mathrm{J}_{top}(U)}\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(R,\mathrm{L}(H))$$

Il suffit donc de montrer que les deux composées :

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,H) \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,\mathrm{L}(H))$$

et

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,H) \longrightarrow \mathrm{L}(H)(U) \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,\mathrm{L}(H))$$

sont égales. Puisque l'application

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathsf{Lim}_{V\to P\in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/P)}\mathrm{L}(H)(V)) \longrightarrow \prod_{V\to P\in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/P)} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathrm{L}(H)(V))$$

est injective, il suffit de prouver que les deux flèches suivantes sont égales pour $V \to P \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/P)$:

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,H) \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,\mathrm{L}(H)) \longrightarrow \mathrm{L}(H)(V)$$

(126) et

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,H) \longrightarrow \mathrm{L}(H)(U) \longrightarrow \mathrm{L}(H)(V)$$

Étant donné le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,H) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,\mathrm{L}(H)) \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(V,H) \arrow[r] & \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(V,\mathrm{L}(H))
\end{tikzcd}$$

on voit que la première composée de (126) est égale à : $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,H) \longrightarrow H(V) \longrightarrow \mathrm{L}(H)(V)$. D'autre part, en étudiant la structure de préfaisceau sur $\mathrm{L}(H)$, on voit que la seconde composée de (126) est égale à :

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,H) \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P\times_U V,H) \longrightarrow \mathrm{L}(H)(V)$$

Comme $P\times_U V \simeq V$, on voit que cette composée est simplement $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(P,H) \longrightarrow H(V) \longrightarrow \mathrm{L}(H)(V)$. Le lemme est démontré. □

Théorème 4.4.10. — *On suppose que $\mathcal{C}$ est présentable au sens de la définition 4.2.16. L'inclusion $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \subset \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche :*

$$\mathrm{a}_{top} : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_t(\mathcal{S}, \mathcal{C})$$

De plus, le foncteur a_{top} commute aux limites finis.

Démonstration. — Pour tous ordinals $\nu \leq \lambda$, on définit par induction transfinie un foncteur L^λ et une transformation naturelle $\ell_{\nu \leq \lambda} : \mathrm{L}^\nu \longrightarrow \mathrm{L}^\lambda$ de la manière suivante :

- $\mathrm{L}^0 = \mathrm{id}$ et $\ell_{\lambda \leq \lambda} = \mathrm{id}$,
- Si λ est limite, on pose $\mathrm{L}^\lambda = \mathsf{Colim}_{\nu \in \lambda} \mathrm{L}^\nu$. Pour $\mu \in \lambda$, on prend $\ell_{\mu \leq \lambda}$ la transformation évidente,
- Si $\lambda = \nu + 1$, on pose $\mathrm{L}^\lambda = \mathrm{L} \circ \mathrm{L}^\nu$. Pour $\mu \in \lambda$, on prend $\ell_{\mu \leq \lambda} = \ell(\mathrm{L}^\nu) \circ \ell_{\mu \leq \nu}$.

Supposons que $\mathcal{C}$ est α-présentable avec α majorant le cardinal de $\mathcal{S}$. Les foncteurs $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(R, -)$ sont α-accessibles pour toutes les cribles couvrantes de la topologie *top*. En effet, la définition du foncteur $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(R, -)$ fait intervenir une limite suivant la catégorie $\mathcal{S}/R$ qui est de cardinal inférieur à α. Il vient que L est α-accessible. Ainsi, pour λ le cardinal successeur de α, la flèche $\ell : \mathrm{L}^\lambda \longrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{L}^\lambda)$ s'identifie à la colimite des flèches :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L} \arrow[r, "\ell(L)"] \arrow[d, "\ell(\mathrm{L})"'] & \mathrm{L}^2 \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}^2)"] \arrow[d, "\ell(\mathrm{L}^2)"] & \dots \arrow[r] & \mathrm{L}^\nu \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}^\nu)"] \arrow[d, "\ell(\mathrm{L}^\nu)"] & \mathrm{L}^{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d, "\ell(\mathrm{L}^{\nu+1})"] & \dots \\
\mathrm{L}^2 \arrow[r, "\mathrm{L}(\ell(\mathrm{L}^1))"'] & \mathrm{L}^3 \arrow[r, "\mathrm{L}(\ell(\mathrm{L}^2))"'] & \dots \arrow[r] & \mathrm{L}^{\nu+1} \arrow[r, "\mathrm{L}(\ell(\mathrm{L}^\nu))"'] & \mathrm{L}^{\nu+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Par le lemme 4.4.9, on sait que $\mathrm{L}(\ell(\mathrm{L}^\nu)) = \ell(\mathrm{L}^{\nu+1})$. Ceci montre que $\ell : \mathrm{L}^\lambda \longrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{L}^\lambda)$ est inversible. Par la proposition 4.4.8, $\mathrm{L}^\lambda H$ est donc un faisceau pour tout $H \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$. L'énoncé découle alors formellement du fait que $H \simeq \mathrm{L}^\lambda H$ si le préfaisceau H est un faisceau. □

Corollaire 4.4.11. — *On suppose que $\mathcal{C}$ est présentable au sens de la définition 4.2.16. Alors, les catégories $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ et $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ sont aussi présentables.*

Démonstration. — Ceci découle immédiatement des propositions 4.2.20 et 4.2.21. □

On a le lemme suivant :

Lemme 4.4.12. — *On suppose que $\mathcal{C}$ est présentable. Soit H un préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$. Le morphisme $\ell(H) : H \longrightarrow \mathrm{L}H$ induit un isomorphisme après faisceautisation.*

Démonstration. — On garde les notations de la preuve du théorème 4.4.10. Il s'agit de montrer que la colimite des flèches verticales :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}(H) \arrow[r, "\ell(L)"] \arrow[d, "\mathrm{L}(\ell)"'] & \mathrm{L}^2(H) \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}^2)"] \arrow[d, "\mathrm{L}^2(\ell)"] & \dots \arrow[r] & \mathrm{L}^\nu(H) \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}^\nu)"] \arrow[d, "\mathrm{L}^\nu(\ell)"] & \mathrm{L}^{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{L}^{\nu+1}(\ell)"] & \dots \\
\mathrm{L}^2(H) \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}^2)"'] & \mathrm{L}^3(H) \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}^3)"'] & \dots \arrow[r] & \mathrm{L}^{\nu+1}(H) \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}^{\nu+1})"'] & \mathrm{L}^{\nu+2}(H) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

est inversible. On montre par induction transfinie à partir du lemme 4.4.9 que $\mathrm{L}^\nu(\ell) = \ell(\mathrm{L}^\nu)$. Le résultat est alors immédiat. □

Corollaire 4.4.13. — *On suppose que $\mathcal{C}$ est présentable. Soient H un préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$ et $F \longrightarrow F'$ un morphisme de préfaisceaux d'ensembles qui devient inversible après faisceautisation. La flèche $F \otimes H \longrightarrow F' \otimes H$ induit alors un isomorphisme après faisceautisation.*

Démonstration. — On se ramène immédiatement au cas du morphisme de préfaisceaux $F \longrightarrow \mathrm{L}F$. On dispose d'un morphisme évident $\mathrm{L}(F) \otimes H \longrightarrow \mathrm{L}(F \otimes H)$ donné au niveau de $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ par la colimite suivant $R \in \mathrm{J}_{top}(U)$ des :

$$\underline{\hom}_{\mathcal{E}ns}(R, F) \otimes H(U) \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R, F \otimes H)$$

Montrons que ce morphisme définit un relèvement dans le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F \otimes H \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L}(F \otimes H) \arrow[d] \\
\mathrm{L}F \otimes H \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathrm{L}(\mathrm{L}F \otimes H)
\end{tikzcd}$$

Ceci permettra de conclure étant donné que les flèches horizontales deviennent inversibles après application de a_{top}. Seule la commutation du triangle inférieur demande un argument. Pour cela, on remarque que la naturalité en F du morphisme $\mathrm{L}(F) \otimes H \longrightarrow \mathrm{L}(F \otimes H)$ et le fait que $\ell(\mathrm{L}) = \mathrm{L}(\ell)$ fournissent le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}F \otimes H \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L}(F \otimes H) \arrow[d] \\
\mathrm{L}^2F \otimes H \arrow[r] & \mathrm{L}(\mathrm{L}F \otimes H)
\end{tikzcd}$$

Le corollaire est démontré. □

On déduit alors le résultat suivant :

Corollaire 4.4.14. — *On suppose que $\mathcal{C}$ est présentable. Soit $F \longrightarrow F'$ un morphisme de préfaisceaux d'ensembles qui induit un isomorphisme après faisceautisation. Soit K un faisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$. Alors les morphismes :*

$$\underline{\mathrm{hom}}(F', K) \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}(F, K) \quad \textit{et} \quad \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(F', K) \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(F, K)$$

sont inversibles.

Démonstration. — En remarquant que $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(*, \underline{\mathrm{hom}}(F, -)) \simeq \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(F, -)$, il suffit de considérer la première flèche.

Soit H un préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$. La flèche :

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(H, \underline{\mathrm{hom}}(F', K)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(H, \underline{\mathrm{hom}}(F, K))$$

est isomorphe à :

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(F' \otimes H, K) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(F \otimes H, K)$$

Comme K est un faisceau, cette flèche s'identifie à :

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(\mathrm{a}_{top}(F' \otimes H), K) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(\mathrm{a}_{top}(F \otimes H), K)$$

Le résultat découle alors du corollaire 4.4.13 et du lemme de Yoneda. □

4.4.2. Préfaisceaux et faisceaux à valeurs dans une catégorie de modèles

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ est une catégorie de modèles $\mathfrak{M}$. On fait les définitions suivantes :

Définition 4.4.15. — *Soit $f : H \longrightarrow K$ une flèche de* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$.

1- On dit que f est une équivalence faible (resp. cofibration injective, fibration projective) lorsque pour tout $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$, la flèche $f(U) : H(U) \longrightarrow K(U)$ est une équivalence faible (resp. cofibration, fibration) de $\mathfrak{M}$.

2- On dit que f est une cofibration projective (resp. fibration injective) lorsque f admet la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) par rapport aux fibrations triviales projectives (resp. cofibrations triviales injectives).

3- On notera $\mathbf{W}$ *la classe des équivalences faibles de* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$. *On note* $\mathbf{Cof}_{proj}$, *(resp.* $\mathbf{Cof}_{inj}$*) la classe des cofibrations projectives (resp. injectives) et* $\mathbf{Fib}_{proj}$, *(resp.* $\mathbf{Fib}_{inj}$*) celle des fibrations projectives (resp. injectives).*

Proposition 4.4.16. — *Supposons que $\mathfrak{M}$ est une catégorie de modèles présentable par cofibrations. Alors, la catégorie* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *munie des trois classes* $\mathbf{W}$, $\mathbf{Cof}_{proj}$ *et* $\mathbf{Fib}_{proj}$, *est une catégorie de modèles présentable par cofibrations.*

Démonstration. — On suppose que $\mathfrak{M}$ est α-présentable par cofibrations. Il est immédiat que les classes $\mathbf{Fib}_{proj}$ et $\mathbf{Fib}_{proj} \cap \mathbf{W}$ coïncident respectivement avec les deux classes :

$$\mathrm{RLP}\{U \otimes f_{cst} : U \otimes A_{cst} \longrightarrow U \otimes B_{cst} : \\ f : A \longrightarrow B \in \mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W} \subset \mathsf{Fl}(\mathfrak{M}) \text{ et } U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})\}$$

$$\mathrm{RLP}\{U \otimes f_{cst} : U \otimes A_{cst} \longrightarrow U \otimes B_{cst} : \\ f : A \longrightarrow B \in \mathbf{Cof}_\alpha \subset \mathsf{Fl}(\mathfrak{M}) \text{ et } U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})\}$$

L'axiome **(MC5)** découle alors par l'argument du petit objet et du fait que les flèches de

$$\mathrm{Cell}\{U \otimes f_{cst} : U \otimes A_{cst} \longrightarrow U \otimes B_{cst} : \\ f : A \longrightarrow B \in \mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W} \subset \mathsf{Fl}(\mathfrak{M}) \text{ et } U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})\}$$

sont des équivalences faibles. Les axiomes **(MC1)**, **(MC2)** et **(MC3)** sont évidents. L'axiome **(MC4)** s'obtient par l'astuce de Joyal. Le fait que la catégorie de modèles ainsi obtenue soit présentable par cofibrations découle immédiatement du corollaire 4.4.11. □

Le résultat suivant demandera plus de travail : on utilisera librement les résultats du numéro 4.2.3 :

Proposition 4.4.17. — *Supposons que $\mathfrak{M}$ est une catégorie de modèles présentable par cofibrations. Alors, la catégorie* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *munie des trois classes* $\mathbf{W}$, $\mathbf{Cof}_{inj}$ *et* $\mathbf{Fib}_{inj}$, *est une catégorie de modèles présentable par cofibrations.*

Démonstration. — Soit α un cardinal majorant celui de $\mathcal{S}$ et tel que $\mathfrak{M}$ est α-présentable par cofibrations. Soit β un cardinal comme dans la proposition 4.2.41. On prouvera l'égalité :

$$\mathbf{Fib}_{inj} = \mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{inj})_\beta \cap \mathbf{W}) \tag{127}$$

Montrons seulement comment obtenir l'axiome **(MC5)** de (127). L'argument du petit objet appliqué à la classe essentiellement petite $(\mathbf{Cof}_{inj})_\beta \cap \mathbf{W}$, fournit des factorisations par cofibrations triviales injectives suivies de fibrations injectives. De même, l'argument du petit objet appliqué à $(\mathbf{Cof}_{inj})_\beta$ fournit des factorisations par cofibrations injectives suivies de flèches dans $\mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{inj})_\beta)$. De (127), on déduit que $\mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{inj})_\beta) \subset \mathbf{Fib}_{inj}$. Pour voir que $\mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{inj})_\beta) \subset \mathbf{W}$, il suffit de remarquer que :

$$\{U \otimes f_{cst} : U \otimes A_{cst} \longrightarrow U \otimes B_{cst} : \\ f : A \longrightarrow B \in \mathbf{Cof}_\alpha \subset \mathsf{Fl}(\mathfrak{M}) \text{ et } U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})\} \subset (\mathbf{Cof}_{inj})_\beta$$

Le reste de la démonstration est consacré à la preuve de (127). Soit $f \in \mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{inj})_\beta \cap \mathbf{W})$ et montrons que $f \in \mathrm{RLP}(\mathbf{Cof}_{inj} \cap \mathbf{W})$. On se donne un carré commutatif dans $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & H \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

avec u une cofibration triviale injective. Pour $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$, on choisit une section $r_U : B(U) \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u(U))$ comme dans le cas respectif de la définition 4.2.45.

On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ formé des classes d'isomorphisme des familles $(v_U, a_U)_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})}$ avec :

- $v_U : A(U) \longrightarrow T(U)$ une sous-cofibration r_U-normale de $c_0(u(U))$,
- $a_U : s(T(U)) \longrightarrow H(U)$ avec $s(T(U)) = T(U) \times_{\Phi_{c_0 f}(u(U)), r_U} B(U)$.

et qui vérifient les conditions suivantes :

(i) Les sous-objets $s(T(U))$ de $B(U)$ forment un sous-préfaisceau $s(T)$ de B,

(ii) Les flèches a_U définissent un morphisme de préfaisceaux $a : s(T) \longrightarrow H$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[d] & & H \arrow[d, "f"] \\ s(T) \arrow[r] \arrow[urr, "a"] & B \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

On ordonne $\mathscr{E}$ de la manière évidente. Par la proposition 4.2.54, les chaînes de $\mathscr{E}$ sont majorées par leur colimite. Le lemme de Zorn assure l'existence d'éléments maximaux.

Supposons que $(v_U, a_U)_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})}$ est un élément maximal de $\mathscr{E}$ et montrons que $T(U) = \Phi_{c_0 f}(u(U))$ pour tout $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$. Considérons le diagramme de $\mathcal{O}rd\mathcal{E}ns$:

$$\begin{tikzcd} & \prod_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v_U}(u(U)|r_U) \arrow[d] \\ \mathbf{Sub}_\beta(u) \arrow[r] & \prod_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \mathbf{Sub}_\beta(u(U)) \end{tikzcd}$$

où les flèches sont les inclusions évidentes. On note $\mathcal{L}$ la limite de ce diagramme. Par les lemmes 4.2.57 et 4.2.4, cette limite est cofinale dans $\prod_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \mathbf{Sub}_\beta(u(U))$ (pour la cofinalité de l'inclusion $\mathbf{Sub}_\beta(u) \subset \prod_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \mathbf{Sub}_\beta(u(U))$, se référer à la preuve de la proposition 4.2.20).

Se donner un objet de $\mathcal{L}$ revient à se donner une sous-flèche $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ de u de but β-accessible et telle que pour $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$, $u_0(U)$ est une sous-cofibration r_U-spéciale de $u(U)$ qui est de plus orthogonale à v_U. Notons $T_0(U) = T(U) \times_{\Phi_{c_0 f}(u(U))} \Phi_{c_0 f}(u_0(U))$. Comme $u_0(U)$ est orthogonale à v_U, la flèche $A_0(U) \longrightarrow T_0(U)$

est $r_{0,U}$-normale dans $u_0(U)$ (avec $r_{0,U} : B_0(U) \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u_0(U))$ la section déduite de r_U). Notons $s(T_0)$ le préfaisceau $s(T) \times_B B_0$. On a clairement $s(T_0)(U) = T_0(U) \times_{\Phi_{c_0 f}(u_0(U)), r_{0,U}} B_0(U)$ pour $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$. La flèche $s(T_0) \longrightarrow B_0$ est donc une cofibration injective triviale. On déduit l'existence d'un relèvement :

$$\begin{tikzcd}
s(T_0) \arrow[r] \arrow[d, "u_0"'] & s(T) \arrow[r, "a"] & H \arrow[d, "f"] \\
B_0 \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "l"] & B \arrow[r] & K
\end{tikzcd}$$

Pour $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$, $v'_U : A(U) \longrightarrow T'(U) = T(U) \coprod_{T_0(U)} \Phi_{c_0 f}(u_0(U))$ est une sous-cofibration r_U-normale de $u(U)$ majorant v_U. Il vient que la famille $(v'_U, a_U \cup l(U))_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})}$ majore $(v_U, a_U)_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})}$ dans $\mathscr{E}$. Par maximalité, on déduit que les sous-objets $\Phi_{c_0 f}(u_0(U))$ de $\Phi_{c_0 f}(u(U))$ sont majorés par $T(U)$. Comme $\mathcal{L}$ est cofinal dans $\prod_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \mathbf{Sub}_\beta(u(U))$, on a forcément $T(U) = \Phi_{c_0 f}(u(U))$. □

Définition 4.4.18. — *Soit* $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ *une catégorie de modèles présentable par cofibrations. Le triplet* $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj})$ *est la structure de modèles* projective *sur* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$. *Le triplet* $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$ *est la structure de modèles* injective *sur* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$.

Notons les deux lemmes simples suivants :

Lemme 4.4.19. — *Soient* $\mathfrak{M}$ *une catégorie présentable par cofibrations et* F *un préfaisceau d'ensembles. Alors,*

$$(F \otimes -, \underline{\mathrm{hom}}(F, -)) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$$

et

$$(F \otimes (-)_{cst}, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(F, -)) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$$

sont des adjonctions de Quillen lorsque l'on munit $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *de sa structure injective. Si le préfaisceau* F *est représentable,* $(F \otimes (-)_{cst}, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(F, -))$ *est également une adjonction de Quillen relativement à la structure projective sur* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$.

Démonstration. — En effet, le foncteur $F \otimes -$ (resp. $F \otimes (-)_{cst}$) envoie les cofibrations et les cofibrations triviales de $(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}), \mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$ (resp. $(\mathfrak{M}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$) sur des cofibrations injectives et des cofibrations injectives triviales. Si U est un objet de $\mathcal{S}$, le foncteur $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(U, -)$ envoie les fibrations projectives et les fibrations projectives triviales sur des fibrations et des fibrations triviales de $\mathfrak{M}$. □

Lemme 4.4.20. — *On garde les hypothèses du lemme 4.4.19. La famille des foncteurs :*

$$\mathsf{R}\underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(U, -) : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$$

avec $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ *est conservative.*

Corollaire 4.4.21. — *Supposons que la catégorie de modèles présentable par cofibrations $\mathfrak{M}$ est stable. Alors les structures de modèles sur* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *de la définition 4.4.18 sont stables.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que l'unité et la counité de l'adjonction

$$(\Sigma^1, \Omega^1) : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$$

sont inversibles. Ceci découle du lemme 4.4.20 et de la commutation de Σ^1 et Ω^1 avec les foncteurs $\mathsf{R}\underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(U, -)$ pour $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$. □

Étant donnée une topologie de Grothendieck *top* sur $\mathcal{S}$ nous allons localiser les structures de la définition 4.4.18 pour obtenir les structures *top*-locales de Jardines [**Jar87**]. On fera cela dans un cadre restreint que nous allons décrire.

Définition 4.4.22. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles stable. Un objet $A \in \mathfrak{M}$ est dit* homotopiquement compact *si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le foncteur* $\mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, -[n]) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ *commute aux petites colimites filtrantes.*

Définition 4.4.23. — *Une catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est appelée une* catégorie de coefficients *lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $\mathfrak{M}$ est propre à gauche, présentable par cofibrations et stable,

(ii) Les équivalences faibles de $\mathfrak{M}$ sont stables par coproduits finis.

(iii) Il existe un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$ d'objets homotopiquement compacts qui engendre la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.

On supposera que l'ensemble $\mathcal{E}$ fait partie des données d'une catégorie de coefficients.

On est bien sûr intéressé par les exemples suivants :

Exemple 4.4.24

1- Les deux catégories de modèles $\mathbf{Spect}_{S^1}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns)$ et $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{S^1}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns)$ munies de leurs structures projectives stables sont des catégories de coefficients. La condition (*iii*) découle du fait qu'une colimite filtrantes d'objets fibrants est encore un objet fibrant.

2- De même, si A est un anneau, la catégorie des complexes de A-modules à gauche $\mathbf{Compl}(\mathcal{M}od_g(A))$ est une catégorie de coefficients lorsqu'elle est munie de sa structure projective (*i.e.* les fibrations sont les surjections).

Définition 4.4.25. — *Soient H et K deux objets de* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$. *On notera $\underline{\Pi}_0(H, K)$ le préfaisceau d'ensembles défini par l'association :*

$$U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U \overset{\mathsf{L}}{\otimes} H, K)$$

où le foncteur dérivé $U \overset{\mathsf{L}}{\otimes} -$ est pris relativement à la structure injective sur $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$. *On notera $\underline{\Pi}_0^{top}(H, K)$ le faisceau associé à $\underline{\Pi}_0(H, K)$ pour la topologie top.*

Remarque 4.4.26. — Lorsque le préfaisceau $H = A_{cst}$ avec A un objet de $\mathfrak{M}$, le préfaisceau $\underline{\Pi}_0(H, K)$ est donné par : $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, K(U))$. On le notera simplement $\Pi_0(A, K)$. Son faisceau associé est alors noté $\Pi_0^{top}(A, K)$

Définition 4.4.27. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de coefficients. Une flèche $f : H \longrightarrow K$ de* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *est appelée une* équivalence *top*-locale *si pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$ homotopiquement compact, le morphisme de faisceaux :*

$$\Pi_0^{top}(A, f[n]) : \Pi_0^{top}(A, H[n]) \longrightarrow \Pi_0^{top}(A, K[n])$$

est inversible. On notera $\mathscr{L}_{top}$ (resp. $\mathscr{L}_{top,\beta}$) la classe des équivalences top-locales (resp. celles qui dont la source et le but sont β-accessibles).

Remarque 4.4.28. — Une équivalence faible de préfaisceaux à valeurs dans $\mathfrak{M}$ est une équivalence *top*-locale. Si la topologie *top* est la topologie grossière, alors les équivalences *top*-locales sont exactement les équivalences faibles de préfaisceaux. Ceci découle de la propriété (iii) de la définition 4.4.23.

Lemme 4.4.29. — *La classe $\mathscr{L}_{top}$ vérifie la propriété de 2 sur 3. Elle est stable par rétractions et par colimites filtrantes. La classe $\mathscr{L}_{top} \cap \mathbf{Cof}_{inj}$ est stable par push-out.*

Démonstration. — Les deux premières propriétés sont évidentes. La stabilité de $\mathscr{L}_{top}$ par colimites filtrantes découle de la propriété (iii) de la définition 4.4.23.

Pout montrer que $\mathscr{L}_{top} \cap \mathbf{Cof}_{inj}$ est stable par push-out, on se donne un carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ H' \arrow[r, "f'"] & K' \end{tikzcd}$$

avec $f \in \mathscr{L}_{top} \cap \mathbf{Cof}_{inj}$. On a donc $\mathsf{Cof}(f) = \mathsf{Cof}(f')$. Soit $A \in \mathcal{E}$ un objet homotopiquement compact de $\mathfrak{M}$. Comme $\mathfrak{M}$ est stable, on déduit une suite exacte de préfaisceaux de groupes abéliens :

$$\begin{aligned} \Pi_0(A, H[n]) \longrightarrow \Pi_0(A, K[n]) &\longrightarrow \Pi_0(A, \mathsf{Cof}(f)[n]) \\ &\longrightarrow \Pi_0(A, H[n+1]) \longrightarrow \Pi_0(A, K[n+1]) \end{aligned}$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Le foncteur a_{top} étant exact, il vient que $\Pi_0^{top}(A, \mathsf{Cof}(f)[n]) \simeq \Pi_0^{top}(A, \mathsf{Cof}(f')[n])$ est le faisceau nul. Le résultat découle alors de la suite exacte :

$$\begin{aligned} \Pi_0(A, \mathsf{Cof}(f')[n-1]) \longrightarrow \Pi_0(A, H'[n]) &\\ \longrightarrow \Pi_0(A, K'[n]) \longrightarrow \Pi_0(A, \mathsf{Cof}(f')[n]) & \end{aligned}$$

et du fait que le foncteur a_{top} est exact. □

Remarque 4.4.30. — L'argument ci-dessus, montre plus généralement qu'une cofibration injective $u : H \longrightarrow K$ est une équivalence *top*-locale si et seulement si, pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{E}$, les faisceaux $\Pi_0^{top}(A, \Sigma^n \mathsf{Cof}(u))$ sont nuls.

Proposition 4.4.31. — *On suppose que $\mathfrak{M}$ est une catégorie de coefficients. Il existe un cardinal β tel que $\mathbf{W}_{\mathscr{L}_{top}} = \mathbf{W}_{\mathscr{L}_{top,\beta}}$. De plus, $\mathscr{L}_{top} = \mathbf{W}_{\mathscr{L}_{top}}$.*

Démonstration. — Soit α un cardinal tel que $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ est α-présentable pour sa structure injective et que tous les objets de $\mathcal{E}$ sont α-accessibles. On choisit le cardinal β comme dans la proposition 4.2.41.

On utilisera librement l'existence de la localisation de Bousfield de la structure $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$ suivant la classe essentiellement petite $\mathscr{L}_{top,\beta}$. Par la proposition 4.2.74 et le lemme 4.4.29, on déduit que $\mathbf{W}_{\mathscr{L}_{top,\beta}} \subset \mathscr{L}_{top}$.

Il s'agit de montrer que toute équivalence *top*-locale f est dans $\mathbf{W}_{\mathscr{L}_{top,\beta}}$. On peut pour cela supposer que $f : H \longrightarrow K$ est une cofibration injective et l'on choisit une section $r : K \longrightarrow \Phi_{cf_0}(f)$ comme dans la définition 4.2.45. On considère alors l'ensemble $\mathscr{E}$ formé des classes d'isomorphismes de sous-cofibrations r-normales $v : H \longrightarrow T$ de $c(f)$ avec v dans $\mathbf{W}_{\mathscr{L}_{top,\beta}}$.

Cet ensemble est naturellement ordonné et toutes ses chaînes sont majorées par leur colimite. Il admet donc des éléments maximaux. Dans la suite, on suppose que $v : H \longrightarrow T$ est un élément maximal de $\mathscr{E}$ et on montrera que $T \simeq \Phi_{cf_0}(f)$.

On appelle $\mathbf{Sub}_\beta^{top}(?)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sub}_\beta(?)$ formée des sous-flèches qui sont des équivalences *top*-locales. Par le lemme 4.4.32 ci-dessus, on sait que l'inclusion $\mathbf{Sub}_\beta^{top}(?) \subset \mathbf{Sub}_\beta(?)$ est cofinale (du moins pour ? une cofibration injective). Considérons alors le diagramme de $\mathcal{O}rd\mathcal{E}ns$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}_\beta^{top}(c(f)) \arrow[d] & & \mathbf{Sub}_\beta^{top}(v) \arrow[d] \\
\mathbf{Sub}_\beta(c(f)) & \mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v}(f|r) \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "R"] & \mathbf{Sub}_\beta(v)
\end{tikzcd}$$

avec :

- Les flèches verticales sont les inclusions évidentes,
- Le foncteur P associe à une sous-flèche f_0 la sous-flèche $c(f_0)$,
- Le foncteur Q associe à une sous-flèche $f_0 : H_0 \longrightarrow K_0$ la sous-flèche $v_0 : H_0 \longrightarrow T_0 = T \times_{\Phi_{cf_0}(f)} \Phi_{cf_0}(f_0)$.

Par les lemmes 4.2.57 et 4.2.4, la limite $\mathcal{L}$ de ce diagramme est cofinale dans $\mathbf{Sub}_\beta(c(f))$. Se donner un objet de $\mathcal{L}$, revient à se donner une sous-cofibration $f_0 : H_0 \longrightarrow K_0$ de f, r-normale et orthogonale à v et telle que les flèches $c(f_0)$ et $v_0 : H_0 \longrightarrow T_0$ sont dans $\mathscr{L}_{top}$ (et donc dans $\mathscr{L}_{top,\beta}$ car T_0 est β-accessible). Il vient que $H \longrightarrow T \coprod_{T_0} \phi_{cf_0}(f_0)$ est une sous-cofibration r-normale qui est dans

$\mathbf{W}_{\mathscr{L}_{top,\beta}}$. Par maximalité de v, on déduit que $\phi_{cf_0}(f_0)$ est un sous-objet de T. Ceci force l'égalité $T = \Phi_{cf_0}(f)$. La proposition est prouvée. □

Lemme 4.4.32. — *On garde les hypothèses de la proposition 4.4.31. Soit* $u : H \longrightarrow K$ *une équivalence top-locale. L'inclusion* $\mathbf{Sub}_\beta^{top}(u) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$ *est cofinale.*

Démonstration. — Pour $r \in \mathbb{Z}$, $A \in \mathcal{E}$ et $u' : H' \longrightarrow K'$ une sous-flèche de u, considérons le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Pi_0^{top}(A, H'[r]) \arrow[r] \arrow[d, "(1)"'] & \Pi_0^{top}(A, K'[r]) \arrow[d, "(2)"] \\ \Pi_0^{top}(A, H[r]) \arrow[r, "\sim"] & \Pi_0^{top}(A, K[r]) \end{tikzcd}$$

Notons $N_1(u')$ et $N_2(u')$ le noyau de (1) et (2) respectivement. De même, notons $P_1(u')$ et $P_2(u')$ les images respectives de (1) et (2).

Pour u' de but β-accessible, les groupes $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, H'[r])$ et $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, K'[r])$ sont de cardinal inférieur à β. D'autre part, le foncteur a_{top} préserve les objets β-accessibles. Il vient que $N_i(u')$ et $P_i(u')$ sont des faisceaux de groupes abéliens β-accessibles pour $i \in \{1, 2\}$.

Soit $u_0 : H_0 \longrightarrow K_0$ une sous-flèche de u de but β-accessible. On construit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ une suite croissante de sous-flèches $u_n \in \mathbf{Sub}_\beta(u)$ de la manière suivante. Supposons u_{n-1} construite. Étant donné que $u = \mathsf{Colim}_{u' \in \mathbf{Sub}_\beta(u)} u'$, et que le foncteur $\Pi_0^{top}(A, -[r])$ commute aux colimites filtrantes, on déduit qu'il existe $u_{n-1} \leq u_n \in \mathbf{Sub}_\beta(u)$ telles que : $N_i(u_{n-1}) \longrightarrow N_i(u_n)$ est nul pour $i \in \{1, 2\}$ et $P_2(u_{n-1})$ contenu dans $P_1(u_n)$. En passant à la colimite suivant $n \in \mathbb{N}$, on obtient une sous-flèche u_∞ telle que $N_i(u_\infty) = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $P_1(u_\infty) \simeq P_2(u_\infty)$. Ceci montre que u_∞ induit un isomorphisme après application $\Pi_0^{top}(A, -[r])$.

Notons $\mathbf{Sub}_\beta^{A,r}(u) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$ la sous-catégorie pleine formée des sous-flèches induisant un isomorphisme après application du foncteur $\Pi_0^{top}(A, -[r])$. On a montré que cette inclusion était cofinale. Étant donné que $\mathcal{E}$ est de cardinal essentiel inférieur à β, on peut appliquer le lemme 4.2.4 au diagramme des inclusions $\mathbf{Sub}_\beta^{A,r}(u) \subset \mathbf{Sub}_\beta(u)$ pour déduire le résultat recherché. □

Par la proposition 4.4.31 on peut localiser suivant la classe $\mathscr{L}_{top}$:

Définition 4.4.33. — *On suppose que* $\mathfrak{M}$ *est une catégorie de coefficients. La structure projective (resp. injective) top-locale* $(\mathbf{W}_{top}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-top})$ *(resp.* $(\mathbf{W}_{top}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-top})$*) sur* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *est la localisation de Bousfield de la structure projective (resp. injective) de la définition 4.4.18 suivant* $\mathscr{L}_{top}$*. On note* $\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$ *la catégorie homotopique de ces structures de modèles.*

Par la seconde partie de la proposition 4.4.31, on sait que $\mathbf{W}_{top}$ est exactement la classe des équivalences *top*-locales. Notons le lemme suivant :

Lemme 4.4.34. — *On garde les hypothèses de la définition 4.4.33. Les structures de modèles top-locales sur* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *sont propres à gauche et stables.*

Démonstration. — La propreté à gauche est conservée par la localisation de Bousfield (voir le théorème 4.2.71). Pour la stabilité, il faut montrer que l'endofoncteur Ω^1 de $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$ préserve les équivalences *top*-locales.

Soit $f : H \longrightarrow K$ une équivalence *top*-locale. Pour $A \in \mathcal{E}$, le morphisme de faisceaux $\Pi_0^{top}(A, \Omega^1(H)[n]) \longrightarrow \Pi_0^{top}(A, \Omega^1(K)[n])$ est isomorphe à $\Pi_0^{top}(A, H[n-1]) \longrightarrow \Pi_0^{top}(A, K[n-1])$. Ce dernier est inversible. □

Lemme 4.4.35. — *Soient* $\mathfrak{M}$ *une catégorie de coefficients et* F *un préfaisceau d'ensembles. Alors,*

$$(F \otimes -, \underline{\hom}(F, -)) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$$

et

$$(F \otimes (-)_{cst}, \underline{\hom}_{\mathfrak{M}}(F, -)) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$$

sont des adjonctions de Quillen lorsque l'on munit $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *de sa structure injective top-locale. Si le préfaisceau* F *est représentable,* $(F \otimes (-)_{cst}, \underline{\hom}_{\mathfrak{M}}(F, -))$ *est également une adjonction de Quillen relativement à la structure projective top-locale sur* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$.

Démonstration. — Les assertions concernant l'adjonction $(F \otimes (-)_{cst}, \underline{\hom}_{\mathfrak{M}}(F, -))$ sont évidentes. Pour l'adjonction $(F \otimes -, \underline{\hom}(F, -))$ il faut montrer que $F \otimes -$ préserve les équivalences *top*-locales. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$. Par la définition 4.4.23, le foncteur $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, -[n]) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{A}b$ commutent aux colimites filtrantes et aux coproduits finis. On déduit qu'il commute aussi aux coproduits infinis. Il vient que la transformation naturelle $F \otimes \Pi_0(A, -[n]) \longrightarrow \Pi_0(A, F \otimes -[n])$ est inversible. Étant donné que le foncteur a_{top} commute au produit de préfaisceaux d'ensembles, on déduit pour $K \in \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ un isomorphisme canonique $\Pi_0^{top}(A, F \otimes K[n]) \simeq \mathrm{a}_{top}F \times \Pi_0^{top}(A, F \otimes K[n])$. Le résultat est maintenant clair. □

Nous allons voir que les structures de modèles *top*-locales passent à la catégorie des faisceaux.

Lemme 4.4.36. — *Soient* H *et* K *deux préfaisceaux sur* $\mathcal{S}$ *à valeurs dans une catégorie de coefficients* $\mathfrak{M}$ *présentable par cofibrations. On note* $\underline{\Pi}'_0(H, K)$ *le préfaisceau d'ensembles défini par l'association :*

$$U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow \mathsf{Colim}_{R \in \mathrm{J}_{top}(U)} \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(R \overset{\mathsf{L}}{\otimes} H, K)$$

Le morphisme évident $\underline{\Pi}_0(H,K) \longrightarrow \underline{\Pi}'_0(H,K)$ *induit un isomorphisme sur les top-faisceaux associés.*

Démonstration. - On peut supposer que l'objet H est injectivement cofibrant. Soit $R \in \mathrm{J}_{top}(U)$ une crible couvrante de $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$. Pour tout $V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)$, on dispose d'un morphisme évident :

$$\hom_{\mathbf{Ho(PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(R \otimes H, K) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho(PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(V \otimes H, K)$$

induisant une application :

$$\begin{aligned}\hom_{\mathbf{Ho(PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(R \otimes H, K) \longrightarrow \underset{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)}{\mathsf{Lim}} & \hom_{\mathbf{Ho(PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(V \otimes H, K) \\ & = \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, \underline{\Pi}_0(H,K))\end{aligned}$$

On obtient ainsi des applications naturelles en $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$:

$$\underset{R \in \mathrm{J}_{top}(U)}{\mathsf{Colim}} \hom_{\mathbf{Ho(PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(R \overset{\mathsf{L}}{\otimes} H, K) \longrightarrow \underset{R \in \mathrm{J}_{top}(U)}{\mathsf{Colim}} \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, \underline{\Pi}_0(H,K))$$

et donc un morphisme de préfaisceaux d'ensembles $m : \underline{\Pi}'_0(H,K) \longrightarrow \mathrm{L}\underline{\Pi}_0(H,K)$. On vérifie immédiatement que la composée :

$$\underline{\Pi}_0(H,K) \longrightarrow \underline{\Pi}'_0(H,K) \xrightarrow{m} \mathrm{L}\underline{\Pi}_0(H,K)$$

est le morphisme évident $\ell(\underline{\Pi}_0(H,K))$ (voir la page 283). Étant donné que la faisceautisation de $\ell(?)$ est un isomorphisme, on déduit que le morphisme de faisceaux d'ensembles $\mathrm{a}_{top}\underline{\Pi}_0(H,K) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}\underline{\Pi}'_0(H,K)$ admet une rétraction.

Pour conclure, il suffit de montrer que le morphisme de préfaisceaux d'ensembles :

$$\mathrm{L}(m) : \mathrm{L}\underline{\Pi}'_0(H,K) \longrightarrow \mathrm{LL}\underline{\Pi}_0(H,K)$$

est injectif. On se donne alors deux éléments $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{L}\underline{\Pi}'_0(H,K)(U)$ ayant même image par $\mathrm{L}(m)$. Soit R une crible couvrante de U telle que γ_1 et γ_2 soient représentés par deux éléments γ'_1 et γ'_2 de $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, \underline{\Pi}'_0(H,K))$. Quitte à raffiner la crible R, on peut également supposer que les images de γ'_1 et γ'_2 sont égales dans $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, \mathrm{L}\underline{\Pi}_0(H,K))$.

Pour $V \to R \in \mathcal{S}/R$, notons $(\gamma'_i)_V$ l'image de γ'_i dans $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(V, \underline{\Pi}'_0(H,K)) = \underline{\Pi}'_0(H,K)(V)$. En reprenant la définition de $\underline{\Pi}'_0(H,K)(V)$, on voit qu'il existe une crible couvrante R_V de V telle que $(\gamma'_1)_V$ et $(\gamma'_2)_V$ soient représentées par des éléments $\gamma''_{V,1}$ et $\gamma''_{V,2}$ dans $\hom_{\mathbf{Ho(PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(R_V \otimes H, K)$ et telle que les images de $\gamma''_{V,1}$ et $\gamma''_{V,2}$ coïncident dans $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R_V, \underline{\Pi}_0(H,K))$.

Notons P la crible couvrante de U égale à l'image du morphisme de préfaisceaux :

$$\coprod_{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)} R_V \longrightarrow \coprod_{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)} V \longrightarrow U$$

Nous allons montrer que les images de γ'_1 et γ'_2 coïncident dans $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(P, \underline{\Pi}'_0(H,K))$. Ceci terminera la preuve du lemme.

Soit $W \to P \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/P)$. Il existe donc $V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)$ et un diagramme commutatif de préfaisceaux :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & R_V \arrow[r] & V \arrow[d] \\ P \arrow[rr] & & U \end{tikzcd}$$

L'image de γ_i' dans $\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(W, \underline{\Pi}_0'(H,K)) = \underline{\Pi}_0'(H,K)(W)$ est le pull-back de $(\gamma_i')_V \in \underline{\Pi}_0'(H,K)(V)$. C'est donc l'image de $(\gamma_{V,i}'') \in \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{M}))}(R_V \otimes H, K)$ suivant :

$$\begin{aligned} \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{M}))}(R_V \otimes H, K) &\longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{M}))}(W \otimes H, K) \\ &\longrightarrow \underline{\Pi}_0'(H,K)(W) \end{aligned}$$

Notons γ_i''' l'image de $(\gamma_i'')_V$ dans $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{M}))}(W \otimes H, K)$. En utilisant le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{M}))}(R_V \otimes H, K) \arrow[r] \arrow[d] & \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{M}))}(W \otimes H, K) \arrow[d, equal] \\ \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R_V, \underline{\Pi}_0(H,K)) \arrow[r] & \underline{\Pi}_0(H,K)(W) \end{tikzcd}$$

On voit que $\gamma_1''' = \gamma_2'''$. D'où le résultat. □

Pour A un objet de $\mathfrak{M}$, on pose $\Pi_0'(A,-) = \underline{\Pi}_0'(A_{cst},-)$.

Lemme 4.4.37. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de coefficients. Soient $n \in \mathbb{Z}$, $A \in \mathcal{E}$ et H un préfaisceau à valeurs dans $\mathfrak{M}$ injectivement fibrant. Il existe un isomorphisme canonique $\Pi_0(A[-n], \mathrm{L}H) \simeq \Pi_0'(A[-n], H)$.*

Démonstration. — Soit $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$. On a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \Pi_0(A[-n], \mathrm{L}H)(U) &= \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], \operatorname*{Colim}_{R \in \mathrm{J}_{top}(U)} \underline{\hom}_{\mathfrak{M}}(R,H)) \\ &\simeq \operatorname*{Colim}_{R \in \mathrm{J}_{top}(U)} \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], \underline{\hom}_{\mathfrak{M}}(R,H)) \end{aligned}$$

Comme $\underline{\hom}_{\mathfrak{M}}(R,-)$ est un foncteur de Quillen à droite relativement à la structure injective et que H est injectivement fibrant, on déduit un isomorphisme :

$$\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, \underline{\hom}_{\mathfrak{M}}(R,H)[n]) \quad \simeq \quad \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(R \otimes (A[-n])_{cst}, H)$$

D'où le résultat. □

Corollaire 4.4.38. — *Si H est un objet injectivement fibrant de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M})$, alors la flèche $\ell(H) : H \longrightarrow \mathrm{L}H$ est une équivalence top-locale.*

Démonstration. — On vérifie immédiatement que la composée $\Pi_0(A[-n], H) \longrightarrow \Pi_0(A[-n], \mathrm{L}(H)) \simeq \Pi'_0(A[-n], H)$ est égale au morphisme évident. Le résultat découle alors du lemme 4.4.36. □

Plus généralement, nous avons :

Proposition 4.4.39. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de coefficients. Soit $f : H \longrightarrow K$ une flèche de* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *induisant un isomorphisme $\mathrm{a}_{top}(f) : \mathrm{a}_{top}H \xrightarrow{\sim} \mathrm{a}_{top}K$ sur les faisceaux associés. Alors, f est une équivalence top-locale.*

Démonstration. — On procède en deux étapes. Notre point de départ sera le corollaire 4.4.38, affirmant que $H \longrightarrow \mathrm{L}H$ est une équivalence *top*-locale pour H injectivement fibrant.

Étape 1. — Soit $f : H \longrightarrow H'$ une flèche de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ avec H injectivement fibrant. On suppose qu'il existe un relèvement $r : H' \longrightarrow \mathrm{L}H$ dans le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\ell(H)"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{L}H \arrow[d, "\mathrm{L}(f)"] \\ H' \arrow[r, "\ell(H')"'] \arrow[ur, dotted, "r"] & \mathrm{L}H' \end{tikzcd}$$

Alors f est une équivalence locale de Jardine.

En effet, soit $i : H' \longrightarrow Q$ une cofibration triviale injective avec Q un objet injectivement fibrant de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$. Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L}H \arrow[r] & \mathrm{L}H' \arrow[d] \\ Q \arrow[rr] & & \mathrm{L}Q \end{tikzcd}$$

fournit le digramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] & H' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L}H \arrow[d] & \\ & Q \arrow[r] & Q \coprod_{H'} \mathrm{L}H \arrow[r] & \mathrm{L}Q \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des équivalences faibles. En passant aux $\Pi_0^{top}(A[-n], -)$ (avec $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$) on obtient le diagramme de faisceaux d'ensembles :

$$\begin{tikzcd} \Pi_0^{top}(A[-n], H) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\sim"] & \Pi_0^{top}(A[-n], H') \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \Pi_0^{top}(A[-n], \mathrm{L}H) \arrow[d, "\sim"] & \\ & \Pi_0^{top}(A[-n], Q) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\sim"'] & \Pi_0^{top}(A[-n], Q \coprod_{H'} \mathrm{L}H) \arrow[r] & \Pi_0^{top}(A[-n], \mathrm{L}Q) \end{tikzcd}$$

Ceci montre que la flèche $\Pi_0^{top}(A[-n], H') \longrightarrow \Pi_0^{top}(A[-n], \mathrm{L}H)$ est surjective et injective. D'où le résultat.

Étape 2. — On traite maintenant le cas général. En considérant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\ell(H)"] \arrow[d] & \mathrm{L}H \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}H)"] \arrow[d] & \mathrm{L}^2H \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}^2H)"] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & \mathrm{L}^\lambda H \arrow[d, "\sim"] \\
K \arrow[r, "\ell(K)"'] & \mathrm{L}K \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}K)"'] & \mathrm{L}^2K \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}^2K)"'] & \dots \arrow[r] & \mathrm{L}^\lambda K
\end{tikzcd}$$

et en utilisant le fait que $\mathbf{W}_{top}$ est stable par colimite filtrantes, on voit qu'il suffit de montrer que pour tout préfaisceau M à valeurs dans $\mathfrak{M}$, la flèche $M \longrightarrow \mathrm{L}M$ est une équivalence *top*-locale.

Choisissons une cofibration injective triviale $M \longrightarrow N$ avec N un préfaisceau injectivement fibrant. Les flèches horizontales dans le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \\
\mathrm{L}M \arrow[r] & N \coprod_M \mathrm{L}M
\end{tikzcd}$$

sont des équivalences faibles. Il suffit donc de prouver que $N \longrightarrow N \coprod_M \mathrm{L}M$ est une équivalence *top*-locale. On montrera que la condition de l'étape 1 est vérifiée avec r la flèche :

$$N \coprod_M \mathrm{L}M \longrightarrow \mathrm{L}N$$

déduite du carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \\
\mathrm{L}M \arrow[r] & \mathrm{L}N
\end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que la composée suivante :

$$b : N \coprod_M \mathrm{L}M \longrightarrow \mathrm{L}N \longrightarrow \mathrm{L}\,(N \coprod_M \mathrm{L}M)$$

coïncide avec la flèche $\ell(N \coprod_M \mathrm{L}M)$. Remarquons que b est le coproduit des deux composées :

$$N \longrightarrow \mathrm{L}N \longrightarrow \mathrm{L}\,(N \coprod_M \mathrm{L}M) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}M \longrightarrow \mathrm{L}N \longrightarrow \mathrm{L}\,(N \coprod_M \mathrm{L}M)$$

D'autre part, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\ell(N)"] \arrow[d] & \mathrm{L}N \arrow[d] \\
N \coprod_M \mathrm{L}M \arrow[r, "\ell(N \coprod_M \mathrm{L}M)"] & \mathrm{L}(N \coprod_M \mathrm{L}M) \\
\mathrm{L}M \arrow[u] \arrow[r, "\ell(\mathrm{L}M)"'] & \mathrm{L}^2 M \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que $\ell(N \coprod_M \mathrm{L}M)$ est le coproduit des composées :

$$N \longrightarrow \mathrm{L}N \longrightarrow \mathrm{L}(N \coprod_M \mathrm{L}M) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}M \longrightarrow \mathrm{L}^2 M \longrightarrow \mathrm{L}(N \coprod_M \mathrm{L}M)$$

Il reste donc à voir que les composées suivantes sont égales :

(128)

$$\mathrm{L}M \longrightarrow \mathrm{L}N \longrightarrow \mathrm{L}(N \coprod_M \mathrm{L}M) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}M \xrightarrow{\ell(\mathrm{L}M)} \mathrm{L}^2 M \longrightarrow \mathrm{L}(N \coprod_M \mathrm{L}M)$$

Par le lemme 4.4.9, on a $\ell(\mathrm{L}M) = \mathrm{L}(\ell(M))$. Il vient que les deux composées (128) s'obtiennent par application du foncteur L des deux composées :

$$M \longrightarrow N \longrightarrow N \coprod_M \mathrm{L}M \quad \text{et} \quad M \longrightarrow \mathrm{L}M \longrightarrow N \coprod_M \mathrm{L}M$$

Le résultat recherché est maintenant clair. □

On fait maintenant la définition suivante :

Définition 4.4.40. — *Soit f une flèche de $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$.*

1- *f est dite une équivalence faible lorsqu'elle est une équivalence top-locale une fois considérée dans $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$. On note $\mathbf{W}$ la classe des équivalences faibles entre faisceaux.*

2- *f est dite une fibration projective (resp. injective) lorsqu'elle est une fibration projective (resp. injective) top-locale, une fois considérée dans $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$. On note $\mathbf{Fib}_{proj}$ (resp. $\mathbf{Fib}_{inj}$) la classe des fibrations projectives (resp. injectives) entre faisceaux.*

3- *f est dite une cofibration projective (resp. injective) lorsqu'elle admet la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations projectives (resp. injectives) triviales. On note $\mathbf{Cof}_{proj}$ (resp. $\mathbf{Cof}_{inj}$) la classe des cofibrations projectives (resp. injectives) entre faisceaux.*

Notons le lemme suivant :

Lemme 4.4.41. — *Soit $(F, G) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ un couple de foncteurs adjoints avec $(\mathfrak{C}, \mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ une catégorie de modèles α-présentable par cofibrations et $\mathfrak{D}$ une*

catégorie complète et cocomplète. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

- *G est pleinement fidèle et α-accessible,*
- *F commute aux limites finies,*
- *Le foncteur $G \circ F$ préserve les objets β-accessibles pour β supérieur ou égal à α.*
- *Pour tout $A \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{C})$, l'unité $A \longrightarrow G \circ F(A)$ est une équivalence faible.*

Alors, le quadruplet $(\mathfrak{D}, G^{-1}\mathbf{W}, F\mathbf{Cof}, G^{-1}\mathbf{Fib})$ est une catégorie de modèles α-présentable par cofibrations. De plus, (F, G) devient une équivalence de Quillen.

Démonstration. — Le fait que $\mathfrak{D}$ est une catégorie présentable découle de la proposition 4.2.21. La dernière condition de l'énoncé, montre que $G \circ F\mathbf{W} \subset \mathbf{W}$. Il vient que $F\mathbf{W} \subset G^{-1}\mathbf{W}$. Comme $F \circ G \simeq 1$, on déduit que $F\mathbf{W} = G^{-1}\mathbf{W}$. Il vient que $F(\mathbf{Cof} \cap \mathbf{W}) = F\mathbf{Cof} \cap G^{-1}\mathbf{W}$. On a aussi $G^{-1}(\mathbf{Fib} \cap \mathbf{W}) = G^{-1}\mathbf{Fib} \cap G^{-1}\mathbf{W}$. L'axiome **(MC4)** découle alors par un jeu d'adjonction. On obtient aussi les formules :

$$G^{-1}\mathbf{Fib} = \mathrm{LLP}(F(\mathbf{Cof}_\alpha \cap \mathbf{W})) \quad \text{et} \quad G^{-1}\mathbf{Fib} \cap G^{-1}\mathbf{W} = \mathrm{RLP}(F\mathbf{Cof}_\alpha)$$

L'axiome **(MC5)** s'obtient donc de l'argument du petit objet. Les autres axiomes et propriétés sont faciles. □

En appliquant le lemme 4.4.41 ci-dessus, on obtient :

Corollaire 4.4.42. — *Les deux triplets $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj})$ et $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$ définissent des structures de catégories de modèles présentables par cofibrations sur la catégorie $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$. De plus, cette dernière est Quillen équivalente à $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ munie de ses structures top-locales.*

4.4.3. Fonctorialité élémentaire. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie complète et cocomplète. Un foncteur $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ entre petites catégories induit un foncteur évident $f_* : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ qui à un préfaisceau H' sur $\mathcal{S}'$ associe $H' \circ f$. On a :

Lemme 4.4.43. — *Le foncteur f_* admet un adjoint à gauche $f^* : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathcal{C})$ qui à un préfaisceau K sur $\mathcal{S}$ associe le préfaisceau f^*K tel que :*

$$f^*K(U') = \underset{U' \to f(U) \in \mathsf{Ob}(U' \backslash \mathcal{S})}{\mathsf{Colim}} K(U) \qquad \text{pour} \quad U' \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}') \tag{129}$$

(voir la remarque 2.1.29. pour la définition de la catégorie $U' \backslash \mathcal{S}$).

Démonstration. — Il est facile de voir que le préfaisceau f^*K défini par (129) est égal au coégalisateur :

$$\mathrm{Coeq}\left(\coprod_{U \to V \in \mathsf{Fl}(\mathcal{S})} f(U) \otimes K(V)_{cst} \rightrightarrows \coprod_{U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})} f(U) \otimes K(U)_{cst} \right) \tag{130}$$

Une flèche de (130) vers $L' \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathcal{C}))$ correspond à un élément de :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Eq}\Big(\prod_{U\in\mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(f(U)\otimes K(U)_{cst}, L') \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow \prod_{U\to V\in\mathsf{Fl}(\mathcal{S})} \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(f(U)\otimes K(V)_{cst}, L')\Big) \\
&= \mathrm{Eq}\Big(\prod_{U\in\mathsf{Ob}(\mathcal{S})} \hom_{\mathcal{C}}(K(U), L'\circ f(U)) \Longrightarrow \prod_{U\to V\in\mathsf{Fl}(\mathcal{S})} \hom_{\mathcal{C}}(K(V), L'\circ f(U))\Big) \\
&= \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{C})}(K, L'\circ f)
\end{aligned}$$

D' où le résultat. □

Lorsque K est un préfaisceau d'ensembles représentable par $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$, le préfaisceau f^*K est canoniquement représentable par $f(U)$.

Remarque 4.4.44. — Soient $F \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}))$ et $K \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$. De la formule (129), on déduit immédiatement un isomorphisme canonique $f^*F \otimes f^*K \simeq f^*(H \otimes K)$. On déduit alors la formule d'adjonction habituelle $\underline{\hom}(f^*F, H') \simeq \underline{\hom}(F, f_*H')$ pour $H' \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathcal{C}))$. En appliquant $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(*, -)$ à cet isomorphisme, on déduit également $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(f^*F, H') \simeq \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F, f_*H')$.

Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie de modèles, on a le résultat simple suivant :

Proposition 4.4.45. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles présentable par cofibrations. Alors l'adjonction $(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M})$ est une adjonction de Quillen lorsque les catégories de préfaisceaux sont munies des structures projectives de la définition 4.4.18.*

Démonstration. — En effet, le foncteur f_* préserve les équivalences faibles et les fibrations projectives. □

On introduit la terminologie suivante :

Définition 4.4.46. — *Supposons donnés deux sites de Grothendieck $(\mathcal{S}, top)$ et $(\mathcal{S}', top')$.*

1- *Un foncteur $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ est dit* continu *lorsque pour tout faisceau d'ensembles F' sur $(\mathcal{S}', top')$, le préfaisceau $F' \circ f : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ est un faisceau sur $(\mathcal{S}, top)$.*

2- *Un* pré-morphisme *de sites $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$ est un foncteur continu $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$.*

Étant donné un pré-morphisme de sites $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$, on note $f_* : \mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}') \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$ le foncteur image directe des faisceaux. Ce foncteur admet un adjoint à gauche, noté f^* et donné par $\mathrm{a}_{top'} \circ f^* \circ inc$ avec inc le

foncteur d'inclusion de la catégorie des faisceaux dans celle des préfaisceaux. On a le lemme :

Lemme 4.4.47. — *Soient* $(\mathcal{S}, top)$ *et* $(\mathcal{S}', top')$ *deux sites de Grothendieck et* $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ *un foncteur. Alors* f *est continu si et seulement si pour tout* $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ *et* $R \in \mathrm{J}_{top}(U)$, *le morphisme évident* $f^*R \longrightarrow f^*U = f(U)$ *induit un isomorphisme après faisceautisation.*

Démonstration. — La condition est suffisante. En effet, soit F' un faisceau d'ensembles sur $\mathcal{S}'$ et vérifions que $F' \circ f$ est encore un faisceau sur $\mathcal{S}$. Soit $R \in \mathrm{J}_{top}(U)$ une crible couvrante de $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$. Le morphisme évident :

$$\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(U, F' \circ f) \longrightarrow \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, F' \circ f)$$

s'identifie *via* l'adjonction (f^*, f_*) à :

$$\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}')}(f^*U, F') \longrightarrow \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}')}(f^*R, F')$$

Étant donné que F' est un faisceau pour la topologie top', cette application s'identifie également à :

$$\hom_{\mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}')}(\mathrm{a}_{top'}(f(U)), F') \longrightarrow \hom_{\mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}')}(\mathrm{a}_{top'}(f^*R), F') \tag{131}$$

qui est bien un isomorphisme puisque le morphisme de faisceaux $\mathrm{a}_{top'}(f^*R) \longrightarrow \mathrm{a}_{top'}(f(U))$ est inversible par hypothèse.

La condition est nécessaire. En effet, si f est continue, le raisonnement précédent montre que pour tout faisceau d'ensembles F' sur $\mathcal{S}'$ l'application (131) est inversible. On applique alors le lemme de Yoneda pour conclure. □

Corollaire 4.4.48. — *Soit* $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$ *un pré-morphisme de sites. Soit* H' *un faisceau sur* $\mathcal{S}'$ *à valeurs dans une catégorie présentable* $\mathcal{C}$. *Alors,* $H' \circ f$ *est encore un faisceau sur* $\mathcal{S}$.

Démonstration. — Soient $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ et $R \in \mathrm{J}_{top}(U)$. La flèche $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(U, f_*H') \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(R, f_*H')$ s'identifie à $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(f^*U, H') \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(f^*R, H')$ (voir la remarque 4.4.44). Le résultat découle alors du lemme 4.4.14. □

En particulier, sous les conditions du corollaire précédent on dispose d'une adjonction :

$$(f^*, f_*) : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}', \mathcal{C})$$

qui étend celle pour les faisceaux d'ensembles. Le foncteur f^* sur les faisceaux à valeurs dans $\mathcal{C}$ est donné, comme dans le cas des faisceaux d'ensembles, par $\mathrm{a}_{top'} \circ f^* \circ inc$.

Définition 4.4.49

1- Un pré-morphisme de sites $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$ *est dit un* morphisme *de sites lorsque le foncteur* $f^* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}')$ *commute aux limites finies.*

2- Un pré-morphisme de sites $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$ *est dit un* pseudo-morphisme *de sites lorsque le foncteur* $f^* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}')$ *commute aux produits fibrés et aux égalisateurs.*

Notre but est de montrer que les pseudo-morphismes de sites induisent des adjonctions de Quillen relativement aux structures locales projectives. Pour $\mathfrak{M}$ la catégorie des ensembles simpliciaux, la preuve de ce résultat utilise les hyper-recouvrements (voir [**DHI04**]). Dans le cas géométrique, Morel et Voevodsky [**MV90**] déduisent ce résultat de la propriété de Brown-Gersten [**BG73**] pour la topologie de Nisnevich.

Bien qu'il est tout à fait plausible que la méthode de [**DHI04**] s'étend à des catégories de modèles trés générales, nous avons choisi une autre méthode qui fonctionne bien dans le cas où la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ est stable. Voici donc le théorème qu'on démontrera ici :

Théorème 4.4.50. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *une catégorie de coefficients. Soit* $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$ *un pseudo-morphisme de sites. Alors, l'adjonction* $(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M})$ *est une adjonction de Quillen relativement aux structures locales projectives de la définition 4.4.33. De plus, le foncteur* f^* *envoie les équivalences top-locales sur des équivalences* top'*-locales.*

Nous aurons besoin de quelques compléments sur les sites et leurs faisceaux. Soient $(\mathcal{S}, top)$ un site de Grothendieck et $\mathcal{T} \subset \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$ une sous-catégorie pleine contenant l'image de $\mathcal{S}$ par le foncteur $\mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$. On note $u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ le foncteur évident. On suppose donnée une classe de catégories complètes et cocomplètes $\mathscr{C}$ contenant $\mathcal{E}ns$. On munit $\mathcal{T}$ de la topologie $top = top_{\mathscr{C}}$ la plus fine pour laquelle les préfaisceaux $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(-, G) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont des faisceaux pour $G \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$ et $\mathcal{C} \in \mathscr{C}$ (on verra dans la remarque 4.4.53 que la topologie $top_{\mathscr{C}}$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{C}$). On a la proposition suivante :

Proposition 4.4.51

1- Soient $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ *et* $R \in \mathrm{J}_{top}(U)$. *Le morphisme de* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{T})$ *:*

$$\underset{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)}{\mathsf{Colim}} \mathrm{a}_{top}(V) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}(U) \tag{132}$$

où la colimite est prise dans la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{T}$, *devient un isomorphisme après faisceautisation.*

2- Soit $F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T})$. Le morphisme de **PreShv**$(\mathcal{T})$ *:*

$$\underset{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)}{\mathsf{Colim}} \mathrm{a}_{top}(U) \longrightarrow F \tag{133}$$

où la colimite est prise dans la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{T}$, devient un isomorphisme après faisceautisation.

Démonstration. — On divise la preuve en plusieurs parties. On montre d'abord que (132) et (133) sont surjectifs sur les faisceaux associés.

Partie A. — Notons R' le préfaisceau image de (132). Nous allons vérifier que R' est une crible couvrante de $\mathrm{a}_{top}(U)$. Il s'agit de montrer pour $G \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$ (avec $\mathcal{C} \in \mathscr{C}$) que le morphisme :

$$G(U) = \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{a}_{top}(U), G) \longrightarrow \underset{E \to R' \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T}/R')}{\mathsf{Lim}} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(E, G) \tag{134}$$

est inversible. Le foncteur $\mathcal{S}/R \longrightarrow \mathcal{T}/R'$ qui à $V \to R$ associe $\mathrm{a}_{top}(V) \to R'$, fournit une rétraction de (134) :

$$\underset{E \to R' \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T}/R')}{\mathsf{Lim}} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(E, G) \longrightarrow \underset{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)}{\mathsf{Lim}} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{a}_{top}(V), G) = G(U) \tag{135}$$

Il suffit alors de voir que (135) est un monomorphisme. Pour cela, remarquons que par construction de R', tout objet $E \to R'$ de $\mathcal{T}/R'$ admet une flèche vers un élément de la forme $\mathrm{a}_{top}(V) \to R'$. Ceci montre que la flèche :

$$\underset{E \to R' \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T}/R')}{\mathsf{Lim}} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(E, G) \longrightarrow \prod_{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{a}_{top}(V), G)$$

est un monomorphisme.

Partie B. — Notons R_F le préfaisceau image de (133). Nous allons vérifier que R_F est une crible couvrante de $F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T})$. On reprend l'argument de la partie A. Pour $G \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$ (avec $\mathcal{C} \in \mathscr{C}$), le morphisme :

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F, G) \longrightarrow \underset{E \to R_F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T}/R_F)}{\mathsf{Lim}} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(E, G) \tag{136}$$

est inversible. En effet, le foncteur $\mathcal{S}/F \longrightarrow \mathcal{T}/R_F$ qui à $U \to F$ associe $\mathrm{a}_{top}(U) \to R_F$, fournit une rétraction de (136) :

(137)

$$\underset{E \to R_F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T}/R_F)}{\mathsf{Lim}} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(E, G) \longrightarrow \underset{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)}{\mathsf{Lim}} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{a}_{top}(U), G) = \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F, G)$$

Il reste à voir que (137) est un monomorphisme. Pour cela, remarquons que par construction de R_F, tout objet $E \to R_F$ de $\mathcal{T}/R_F$ admet une flèche vers un élément de la forme $\mathrm{a}_{top}(U) \to R_F$. Ceci montre que la flèche :

$$\underset{E \to R_F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T}/R_F)}{\mathsf{Lim}} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(E, G) \longrightarrow \prod_{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{a}_{top}(U), G)$$

est un monomorphisme.

Partie C. — Montrons que (132) est un monomorphisme après application du foncteur L (voir la page 283). Supposons donnés $F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T})$, $P \in \mathrm{J}_{top}(F)$ et une double flèche coégalisée par (132) :

$$P \rightrightarrows \underset{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)}{\mathsf{Colim}} \mathrm{a}_{top}(V) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}(U)$$

On note $P' \subset P$ l'égalisateur de la double flèche ci-dessus. Il s'agit de montrer que P' est une crible couvrante de $\mathrm{a}_{top}(U) \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T})$.

Pour tout $G \to P \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T}/P)$, on dispose (par la partie B de la preuve) d'une crible couvrante engendrée par les flèches $\mathrm{a}_{top}(W) \to G$ avec $W \to G \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/G)$. Il suffira donc de montrer que $\mathrm{a}_{top}(W) \times_P P' \subset \mathrm{a}_{top}(W)$ est une crible couvrante de $\mathrm{a}_{top}(W)$ pour toute flèche $\mathrm{a}_{top}(W) \to P$. Il est clair que $\mathrm{a}_{top}(W) \times_P P'$ est simplement l'égalisateur de la double flèche (de source $\mathrm{a}_{top}(W)$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{a}_{top}(W) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left] & P \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \underset{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)}{\mathsf{Colim}} & \mathrm{a}_{top}(V)
\end{tikzcd}$$

Étant donné que $\mathrm{a}_{top}(W)$ est un préfaisceau représentable de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{T})$, il existe $V_i \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)$ avec $i \in \{1, 2\}$ et une factorisation de la double flèche :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{a}_{top}(V_1) \arrow[dr, bend left] & & \\
\mathrm{a}_{top}(W) \arrow[ur, bend left] \arrow[urr, bend left] \arrow[drr, bend right] & & \underset{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)}{\mathsf{Colim}} & \mathrm{a}_{top}(V) \\
 & \mathrm{a}_{top}(V_2) \arrow[ur, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Notons Q la crible de W telle que $Z \to Q \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/Q)$ si et seulement si les deux composées :

$$\mathrm{a}_{top}(Z) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}(W) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}(V_1) \quad \text{et} \quad \mathrm{a}_{top}(Z) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}(W) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}(V_2)$$

sont égales à l'image par a_{top} de flèches $Z \longrightarrow V_1$ et $Z \longrightarrow V_2$ rendant commutatif le carré :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d] & V_1 \arrow[d] \\
V_2 \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

Il est facile de voir que Q est une crible couvrante de W et qu'elle égalise $\mathrm{a}_{top}(W) \rightrightarrows \mathsf{Colim}_{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)} \mathrm{a}_{top}(V)$.

Partie D. — Il reste à montrer que (133) est un monomorphisme après application du foncteur L. On procède comme dans la partie C. Supposons donnés $E \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T})$, $P \in \mathrm{J}_{top}(E)$ et une double flèche coégalisée par (133) :

$$P \rightrightarrows \operatorname*{\mathsf{Colim}}_{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)} \mathrm{a}_{top}(U) \longrightarrow F$$

On note $P' \subset P$ l'égalisateur de la double flèche ci-dessus et on montre que $P' \in \mathrm{J}_{top}(E)$.

Comme dans la partie C, on se ramène à montrer pour $W \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ et $\mathrm{a}_{top}(W) \to P \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T}/P)$ que l'égalisateur de la double flèche :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{a}_{top}(W) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left] & P \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \operatorname*{\mathsf{Colim}}_{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)} \mathrm{a}_{top}(U)
\end{tikzcd}$$

est une crible couvrante de $\mathrm{a}_{top}(W)$. Étant donné que $\mathrm{a}_{top}(W)$ est un préfaisceau représentable de $\mathcal{T}$, il existe $V_i \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)$ avec $i \in \{1, 2\}$ et une factorisation de la double flèche :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{a}_{top}(V_1) \arrow[dr, bend left] & \\
\mathrm{a}_{top}(W) \arrow[ur, bend left] \arrow[rr, bend left] \arrow[rr] \arrow[dr, bend right] & & \operatorname*{\mathsf{Colim}}_{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)} \mathrm{a}_{top}(U) \\
 & \mathrm{a}_{top}(V_2) \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Pour terminer, il suffit de remarquer qu'il existe une crible couvrante $Q \in \mathrm{J}_{top}(W)$ telle que pour tout $Z \to Q \in \mathcal{S}/Q$, les deux composées :

$$\mathrm{a}_{top}(Z) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}(W) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}(V_1) \quad \text{et} \quad \mathrm{a}_{top}(Z) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}(W) \longrightarrow \mathrm{a}_{top}(V_2)$$

sont égales à l'image par a_{top} de flèches $Z \longrightarrow V_1$ et $Z \longrightarrow V_2$ rendant commutatif le carré de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})$:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d] & V_1 \arrow[d] \\
V_2 \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

La proposition est prouvée. □

Pour $\mathcal{C} \in \mathscr{C}$, on note $u^! : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ le foncteur qui à $G \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C}))$ associe le faisceau $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(-, G) : \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{E}ns$. Le résultat suivant est bien connu (voir [**AGV73**]).

Corollaire 4.4.52. — *Le foncteur* $u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ *induit un morphisme de sites. Pour* $\mathcal{C} \in \mathscr{C}$, *le foncteur* $u_* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ *est une équivalence de catégories ayant pour inverse* $u^!$. *De plus, on a un isomorphisme canonique de foncteurs* $u^* \simeq u^!$.

Démonstration. — Si E est un faisceau d'ensembles sur $\mathcal{T}$, $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ et R une crible couvrante de U, on a :

$$\begin{aligned}\hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{S})}(R, u_*(E)) &= \operatorname*{Lim}_{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)} \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{T})}(\mathrm{a}_{top}(V), E) \\ &\simeq \hom_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{T})}\Big(\operatorname*{Colim}_{V \to R \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/R)} \mathrm{a}_{top}(V), E\Big)\end{aligned}$$

Par la proposition 4.4.51, le membre de droite est égal à $E(\mathrm{a}_{top}(U)) = u_*(E)(U)$. Ceci montre que u_*E est un faisceau. Le foncteur u est donc continu.

Pour $G \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}), \mathcal{C})$, on a un isomorphisme évident $u_*u^!G \simeq G$. De même, pour $E \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}), \mathcal{C})$, et $F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T})$, on a par la proposition 4.4.51, un isomorphisme : $E(F) = \mathsf{Lim}_{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)} E(\mathrm{a}_{top}(U)) = \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F, u_*E)$. Ceci fournit un isomorphisme $E \simeq u^!u_*(E)$. D'où la seconde partie de l'énoncé.

En particulier, on déduit un isomorphisme canonique $u^* \simeq u^!$. Le foncteur u^* commute aux limites projectives, car c'est une équivalence de catégories. Le foncteur u induit donc un morphisme de sites. □

Remarque 4.4.53. — Par le corollaire 4.4.52, le foncteur $u^* : \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T})$ est une équivalence de catégories. Étant donnée que la topologie d'un site est uniquement déterminée par sa catégorie de faisceaux d'ensembles (voir [**AGV73**]), on déduit que la topologie $top_{\mathscr{C}}$ de $\mathcal{T}$ ne dépend pas du choix de la classe $\mathscr{C}$. En particulier, l'hypothèse $\mathcal{C} \in \mathscr{C}$ dans 4.4.52 est superflue.

Lemme 4.4.54. — *Soit* K *un préfaisceau sur* $\mathcal{T}$ *à valeurs dans une catégorie présentable* $\mathcal{C}$. *On a un isomorphisme canonique* $\mathrm{a}_{top}(K) \simeq u^!\mathrm{a}_{top}u_*(K)$. *En particulier, on a* $u_*\mathrm{a}_{top}(K) \simeq \mathrm{a}_{top}u_*(K)$.

Démonstration. — On note $\mathrm{a}'_{top} : \mathbf{PreShv}(\mathcal{T}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ le foncteur $u^! \circ \mathrm{a}_{top}u_*$. On montrera que a'_{top} est l'adjoint à droite de l'inclusion évidente (que l'on notera *inc*). On définit une transformation naturelle $1 \longrightarrow inc \circ \mathrm{a}'_{top}$ en prenant pour K un préfaisceau sur $\mathcal{T}$ et $F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{T})$, la composée :

$$\begin{aligned}K(F) \longrightarrow \operatorname*{Lim}_{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)} K(\mathrm{a}_{top}(U)) &= \operatorname*{Lim}_{U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)} u_*(K)(U) \\ &= \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F, u_*(K)) \longrightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F, \mathrm{a}_{top}u_*(K))\end{aligned}$$

Il est clair que si F est déjà un faisceau sur $\mathcal{T}$, la flèche $K \longrightarrow inc \circ \mathrm{a}'_{top}(K)$ est inversible. Il est également clair que a'_{top} appliqué à la transformation naturelle

$1 \longrightarrow inc \circ \mathrm{a}'_{top}$ est canoniquement isomorphe à l'identité. Le résultat découle formellement de ces propriétés. □

Proposition 4.4.55. – *Gardons les notations et les hypothèses ci-dessus. Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de coefficients. L'adjonction (u^*, u_*) : $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{T}, \mathfrak{M})$ est une équivalence de Quillen relativement aux structures locales projectives. De plus, le foncteur u^* préserve et détecte les équivalences locales.*

Démonstration. — Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$, le foncteur $\Pi_0(A[-n], u_*(-))$ est égal à $u_*\Pi_0(A[-n], -)$. Étant donné que le foncteur u_* commute à la faisceautisation (voir le lemme 4.4.54), on déduit un isomorphisme : $\Pi_0^{top}(A[-n], u_*(-)) \simeq u_*\Pi_0^{top}(A[-n], -)$. Comme u_* : $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$ est une équivalence de catégories, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une équivalence *top*-locale,

(ii) $u_*(f)$ est une équivalence *top*-locale.

pour tout $f \in \mathsf{Fl}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{T}, \mathfrak{M}))$.

Montrons que u^* préserve les équivalences *top*-locales. Soit g : $L \longrightarrow M$ une équivalence *top*-locale de préfaisceaux sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $\mathfrak{M}$. Étant donné que u^* commute à la faisceautisation, on peut supposer par la proposition 4.4.39 que L et M sont des faisceaux. Le résultat découle alors de l'équivalence entre (i) et (ii) et du fait que $u_*u^*(g) \simeq u_*u^!(g) \simeq g$. Il vient que (u^*, u_*) est une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives locales.

Il reste à voir que $\mathsf{R}u_*$ est une équivalence de catégories. Comme u_* préserve les équivalences locales, il se dérive trivialement. Il suffit donc de montrer que le foncteur u_* : $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}, \mathfrak{M})[\mathbf{W}^{-1}] \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})[\mathbf{W}^{-1}]$ est une équivalence de catégories. Ceci découle immédiatement de l'équivalence entre les assertions (i) et (ii) et du fait que u_* : $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{T}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ est une équivalence de catégories. □

Revenons à la preuve du théorème 4.4.50. On sait que (f^*, f_*) est une adjonction de Quillen pour les structures projectives de la définition 4.4.18. Il reste à montrer que f^* : $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M})$ préserve les équivalences locales. Notons $\mathcal{T} \subset \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$ (resp. $\mathcal{T}' \subset \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}')$) la plus petite sous-catégorie contenant l'image de $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) et stable par produits fibrés et égalisateurs. Comme f^* : $\mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top'}(\mathcal{S}')$ commute aux produits fibrés et égalisateurs, il induit un foncteur g : $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ tel que le carré :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "g"] \\ \mathcal{S}' \arrow[r, "u'"] & \mathcal{T}' \end{tikzcd}$$

est commutatif (à isomorphisme canonique près). On déduit alors un carré :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathbf{PreShv}(\mathcal{T}, \mathfrak{M}) \arrow[d, "g^*"] \\ \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M}) \arrow[r, "u'^*"] & \mathbf{PreShv}(\mathcal{T}', \mathfrak{M}) \end{tikzcd}$$

commutatif à isomorphisme canonique près. Par la proposition 4.4.55, les foncteurs u^* et u'^* préservent et détectent les équivalences locales. Il suffit donc de montrer que g^* préserve les équivalences locales. On s'est donc ramené au cas où $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ admettent les produits fibrés et les égalisateurs et le foncteur $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ y commute. C'est sous cette hypothèse que nous démontrerons le théorème 4.4.50. Le lemme clef est le suivant :

Lemme 4.4.56. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de coefficients. Soit $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ un foncteur entre petites catégories. On suppose que les catégories $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ admettent les produits fibrés et les égalisateurs et que f y commutent. Alors, pour $K \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$, $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$, le morphisme évident :*

$$(f^*)_{\mathcal{A}b}\Pi_0(A[-n], K) \longrightarrow \Pi_0(A[-n], f^*K)$$

est inversible (avec $(f^*)_{\mathcal{A}b} : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathcal{A}b)$ le foncteur image inverse de préfaisceaux de groupes abéliens).

Démonstration. — Rappelons que pour $U' \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}')$ et F un préfaisceau sur $\mathcal{S}$, on a :

$$f^*F(U') = \mathsf{Colim}_{U' \to f(U) \in \mathsf{Ob}(U' \backslash \mathcal{S})} F(U)$$

Il s'agit de montrer que le foncteur $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], -) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{A}b$ commute aux colimites suivant $(U' \backslash \mathcal{S})^{\mathrm{op}}$. Étant donné que $\mathcal{S}$ admet les produits fibrés et les égalisateurs et que f y commute, la catégorie $(U' \backslash \mathcal{S})^{\mathrm{op}}$ est pseudo-filtrante au sens de [**AGV73**]. Plus précisément, $(U' \backslash \mathcal{S})^{\mathrm{op}}$ est une union disjointe de catégories filtrantes. Il suffit donc de démontrer que $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], -)$ commute aux colimites filtrantes ainsi qu'aux coproduits quelconques.

La commutation avec les colimites filtrantes est vraie par la définition 4.4.23. En écrivant un coproduit quelconque comme une colimite filtrante de coproduits finis, on voit qu'il suffit de montrer que le morphisme évident : $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], P) \oplus \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], Q) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], P \coprod Q)$ est inversible pour tout P, $Q \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. Étant donné que le coproduit de deux équivalences faibles est une équivalence faible (voir la définition 4.4.23) on peut supposer que P et Q sont des objets cofibrants. Le résultat découle alors du fait que $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est additive puisque $\mathfrak{M}$ est supposée stable. □

Il est maintenant aisé d'achever la preuve du théorème 4.4.50, *i.e.* de prouver que le foncteur f^* préserve les équivalences locales. Soit $u : H \longrightarrow K$ une équivalence *top*-locale de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$. Par le lemme 4.4.56 et l'isomorphisme $\mathrm{a}_{top'} \circ f^* \simeq f^* \circ \mathrm{a}_{top}$, la flèche $\Pi_0^{top'}(A[-n], u) : \Pi_0^{top'}(A[-n], f^*H) \longrightarrow \Pi_0^{top'}(A[-n], f^*K)$ s'identifie à :

$$(f^*)_{\mathcal{A}b}\Pi_0^{top}(A[-n], u) : (f^*)_{\mathcal{A}b}\Pi_0^{top}(A[-n], H) \longrightarrow (f^*)_{\mathcal{A}b}\Pi_0^{top}(A[-n], K)$$

Elle est donc inversible. Ceci montre que $f^*(u)$ est une équivalence *top'*-locale. □

Dans la section 4.5, nous utiliserons le théorème 4.4.50 sous une forme généralisée que nous allons décrire.

Définition 4.4.57. — *Soit* $(\mathcal{S}, top)$ *un site de Grothendieck. Une* P*-structure sur* $\mathcal{S}$ *est la donnée pour tout* $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ *d'un site* $(\mathcal{E}_U, top_U)$ *avec* $\mathcal{E}_U \subset \mathcal{S}/U$ *une sous-catégorie pleine et telle que :*

- *L'identité de* U *est dans* $\mathcal{E}_U$,
- *La composée* $\mathcal{E}_U \subset \mathcal{S}/U \longrightarrow \mathcal{S}$ *induit un pseudo-morphisme de sites* e_U : $(\mathcal{S}, top) \longrightarrow (\mathcal{E}_U, top_U)$,
- *Pour* F *un préfaisceau d'ensembles sur* $\mathcal{S}$, *le morphisme* $\mathrm{a}_{top_U}(e_U)_*(F) \longrightarrow (e_U)_*\mathrm{a}_{top}(F)$ *est inversible.*

La terminologie choisie dans la définition 4.4.57 est inspirée de la notion de *petits sites* v.s. *gros sites* associé à un schéma X. On a le résultat suivant :

Proposition 4.4.58. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *une catégorie de coefficients. On garde les notations de la définition 4.4.57. La structure locale* $(\mathbf{W}_{top}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-top})$ *sur* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *est la localisation de Bousfield de la structure projective* $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj})$ *suivant la classe des flèches de la forme* $(e_U)^*(a)$ *avec* $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ *et* $a \in \mathbf{W}_{top_U} \cap \mathbf{Cof}_{proj} \subset \mathsf{Fl}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}))$ *de source projectivement cofibrante.*

Démonstration. — Soit β un cardinal et notons $\mathscr{L}_{P,\beta}$ la classe des flèches de la forme $(e_U)^*(a)$ avec $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ et $a \in \mathbf{W}_{top_U} \cap \mathbf{Cof}_{proj}$ de source cofibrante et de but β-accessible. Notons $(\mathbf{W}_{P,\beta}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-P,\beta})$ la localisation de Bousfield de la structure projective sur $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ suivant la classe essentiellement petite $\mathscr{L}_{P,\beta}$. Par le théorème 4.4.50, les flèches $(e_U)^*(a)$ sont des équivalences *top*-locales. Il s'agit donc de démontrer que $\mathbf{W}_{top} \subset \mathbf{W}_{P,\beta}$ pour β suffisamment grand. On prendra β tel que la structure projective locale sur $\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M})$ coïncide avec la localisation de Bousfield de la structure projective suivant la classe $\mathscr{L}_{top_U,\beta}$ des équivalences top_U-locales de buts β-accessibles.

Soit $f : H \longrightarrow K$ une équivalence *top*-locale de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ et montrons que $f \in \mathbf{W}_{P,\beta}$. On peut supposer que f est une fibration entre objets fibrants relativement à la structure $(\mathbf{W}_{P,\beta}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-P,\beta})$. Par le choix de β, l'adjonction $((e_U)^*, (e_U)_*)$ est une adjonction de Quillen entre :

$$(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U, \mathfrak{M}), \mathbf{W}_{top_U}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{top_U-proj})$$

et

$$(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}), \mathbf{W}_{P,\beta}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-P,\beta})$$

pour tout $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$. Il vient que $(e_U)_* f$ est une fibration entre objets fibrants relativement à la structure top_U-locale projective. D'autre part, la troisième condition de la définition 4.4.57, fournit un isomorphisme $\Pi_0^{top_U}(A[-n], (e_U)_*(-)) \simeq (e_U)_* \Pi_0^{top}(A[-n], -)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. On voit alors que $(e_U)_*$ préserve les équivalences locales. Ainsi, $(e_U)_* f$ est une fibration triviale. Il vient que $f(U)$ est une équivalence faible de $\mathfrak{M}$. Ceci étant vrai pour tout $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$, nous avons obtenu que f est une équivalence faible de préfaisceaux. □

Définition 4.4.59. — *Soient $(\mathcal{S}, top)$ et $(\mathcal{S}', top')$ deux sites de Grothendieck munis de P-structures $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Un pré-morphisme de sites $(\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$ est dit compatible aux P-structures, lorsque pour tout $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$:*

- *Le foncteur $f_U : \mathcal{S}/U \longrightarrow \mathcal{S}'/f(U)$ envoie $\mathcal{E}_U$ dans $\mathcal{E}'_{f(U)}$ et induit donc un foncteur $f_U^{\mathcal{E}} : \mathcal{E}_U \longrightarrow \mathcal{E}'_{f(U)}$.*
- *Le foncteur $f_U^{\mathcal{E}}$ définit un pseudo-morphisme de sites $f_U^{\mathcal{E}} : (\mathcal{E}'_{f(U)}, top'_{f(U)}) \longrightarrow (\mathcal{E}_U, top_U)$.*

Théorème 4.4.60. — *On se donne un pré-morphisme de sites $f : (\mathcal{S}', top') \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$ compatible à deux P-structures sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ comme dans la définition 4.4.59. Alors, $(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M})$ est une adjonction de Quillen relativement aux structures locales projectives.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que

$$\mathsf{L}f^* : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}', \mathfrak{M})$$

envoie la flèche $(e_U)^* a$ sur une équivalence top'-locale pour toute équivalence top_U-locale a de but et source cofibrants. Étant donné le carré commutatif de pré-morphismes de sites :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_U \arrow[r, "e_U"] \arrow[d, "f_U^{\mathcal{E}}"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{E}'_{f(U)} \arrow[r, "e'_{f(U)}"] & \mathcal{S}' \end{tikzcd}$$

on voit que $\mathrm{L}f^* \mathrm{L}(e_U)^*(a) \simeq \mathrm{L}(e'_{f(U)})^* \mathrm{L}(f_U^{\mathcal{E}})^*(a)$. Le résultat découle alors du théorème 4.4.50 et du fait que $f_U^{\mathcal{E}}$ et $e'_{f(U)}$ sont des pseudo-morphismes de sites. □

4.4.4. Cas où $\mathfrak{M}$ est monoïdale. — Notons d'abord le résultat simple suivant :

Proposition 4.4.61. — *Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles monoïdale (resp. et symétrique). On suppose que $\mathfrak{M}$ est présentable. La catégorie* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *est alors naturellement une catégorie de modèles monoïdale (resp. et symétrique) relativement aux structures projectives et injectives de la définition 4.4.18.*

Démonstration. — Le cas de la structure injective est évident. Le cas de la structure projective se ramène au cas de la structure injective étant donné que $\mathbf{Cof}_{proj} \subset \mathbf{Cof}_{inj}$. □

Lorsque $\mathfrak{M}$ admet un objet unité cofibrant $\mathbb{1}$, $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ est alors une catégorie de modèles monoïdale unitaire pour la structure injective. C'est également le cas pour la structure projective si $\mathcal{S}$ admet un objet final (*i.e.* le préfaisceau final est représentable). Pour démontrer l'anaolgue de la proposition précédente pour les structures *top*-locales, nous aurons besoin de supposer que le site $(\mathcal{S}, top)$ admet suffisamment de points.

Proposition 4.4.62. — *Supposons que la catégorie de coefficients $\mathfrak{M}$ est aussi une catégorie de modèles monoïdale (resp. et symétrique). Si le site $(\mathcal{S}, top)$ admet suffisamment de points, alors* $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ *est une catégorie de modèles monoïdale (resp. et symétrique) relativement aux structures projective et injective top-locales*

Démonstration. — Par la proposition 4.2.76, il faut vérifier que $u \otimes K$ est encore une équivalence *top*-locale pour K un préfaisceau projectivement (resp. injectivement) cofibrant et $u : G \longrightarrow H$ une équivalence *top*-locale entre objets projectivement (resp. injectivement) cofibrants. Étant donné que $- \otimes -$ préserve les équivalences faibles de préfaisceaux entre objets injectivement cofibrants, il suffit de traiter le premier cas.

Soit $(x^*, x_*) : \mathcal{E}ns \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$ un point pour la topologie *top*. Notons E l'image de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}ns$ par le foncteur x^*. On munit E de la topologie t induite par celle de $\mathcal{E}ns$ de sorte que $\mathbf{Shv}_t(E) \simeq \mathcal{E}ns$. Le point (x^*, x_*) est donc induit par un morphisme de sites $x : (E, t) \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$.

On fixe une famille conservative de points $x_\alpha : (E_\alpha, t_\alpha) \longrightarrow (\mathcal{S}, top)$ avec $E_\alpha \subset \mathcal{E}ns$ comme ci-dessus et contenant le singleton $* = \{\varnothing\}$. Par la preuve du théorème 4.4.50, on a pour $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$, un isomorphisme canonique $x_\alpha^*(\Pi_0^{top}(A[-n], -)) \simeq \Pi_0^{t_\alpha}(A[-n], x_\alpha^*(-))$. Ainsi, une flèche f de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ est une équivalence *top*-locale si et seulement si $\Pi_0^{t_\alpha}(A[-n], x_\alpha^*(f))$ est inversible, ce qui revient à dire que $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], x_\alpha^*(f)(*))$ est inversible. Comme la famille des $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[-n], -)$ détecte les équivalences faibles, on a une équivalence entre :

(i) f est une équivalence *top*-locale,

(ii) Pour tout α, $x_\alpha^*(f)(*)$ est une équivalence faible de $\mathfrak{M}$.

Il nous reste donc à montrer que $x_\alpha^*(u \otimes K)(*_\alpha)$ est une équivalence faible. Comme x_α^* est monoïdale, cette flèche s'identifie à $x_\alpha^*(u)(*_\alpha) \otimes x_\alpha^*(K)(*_\alpha)$. Comme x_α^* est un foncteur de Quillen à gauche, $x_\alpha^*(K)(*_\alpha)$ est cofibrant et $x_\alpha^*(u)(*_\alpha)$ est une équivalence faible entre objets cofibrants. D'où le résultat. □

4.5. Le dérivateur algébrique homotopique et stable $\mathbb{SH}$

Dans ce numéro, nous construisons le 2-foncteur $\mathbb{SH}$ et vérifions qu'il est un dérivateur algébrique homotopique et stable au sens de la définition 2.4.13. Tout est formel à l'exception de l'axiome de localité. Nous suivrons pour cela la méthode de Morel et Voevodsky [**MV90**]. On fixe un schéma de base S. Rappelons que DiaSch/S désigne la 2-catégorie des diagrammes de S-schémas (voir la définition 2.4.4). Un objet $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ de DiaSch/S est un foncteur covariant $\mathscr{F} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathsf{Sch}/S$ de source une petite catégorie.

Le symbole $\tau \in \{\text{Nis}, \text{ét}\}$ désignera l'une des topologies usuelles : Nisnevich ou étale. Nous fixons une catégorie de coefficients $\mathfrak{M}$.

4.5.1. Le 2-foncteur $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(-,-), \mathfrak{M})$. — Étant donné un diagramme de S-schémas $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$, on notera $\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ la catégorie dont les objets sont les couples (U, i) avec $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ et U un $\mathscr{F}(i)$-schéma lisse. On notera $(U \to \mathscr{F}(i), i)$ cet objet si on veut mettre en évidence le morphisme structural de $\mathscr{F}(i)$-schémas. Une flèche $(U', i') \longrightarrow (U, i)$ dans $\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ est un couple $(U' \to U, i' \to i)$ tel que le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ \mathscr{F}(i') \arrow[r] & \mathscr{F}(i) \end{tikzcd}$$

commute. Soit $(f, \alpha) : (\mathscr{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathcal{I})$ un 1-morphisme de DiaSch/S. Nous allons associer à (f, α) un foncteur $(f, \alpha)^* : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$. On dispose d'une factorisation canonique :

$$(\mathscr{G}, \mathcal{J}) \xrightarrow{f} (\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \xrightarrow{\alpha} (\mathscr{F}, \mathcal{I}) \tag{138}$$

Nous construirons f^* et α^* séparément.

On considère le foncteur $f = - \times_{\mathscr{F}} \mathscr{G} : \mathsf{Sm}/(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{J})$ qui à un couple (V, j), avec $j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$ et V un $\mathscr{F}(\alpha(j))$-schéma lisse, associe le couple $(V \times_{\mathscr{F}(\alpha(j))} \mathscr{G}(j), j)$. Ce foncteur induit une adjonction :

$$(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}\,(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}\,(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \tag{139}$$

D'autre part, le 1-morphisme $\alpha : (\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathcal{I})$ induit un foncteur :

$$\bar{\alpha} : \mathsf{Sm}/(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I})$$

qui à un couple $(U \to \mathscr{F}(\alpha(j)), j)$ associe $(U \to \mathscr{F}(\alpha(j)), \alpha(j))$. On définit alors le foncteur α^* par :

$$\alpha^* = \bar{\alpha}_* : \mathbf{PreShv}\,(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}\,(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \tag{140}$$

Définition 4.5.1. — *Soit $(f, \alpha) : (\mathscr{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathcal{I})$ un 1-morphisme de diagrammes de S-schémas. On définit le foncteur :*

$$(f, \alpha)^* : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \tag{141}$$

par la composée :

$$\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) \xrightarrow{\alpha^*} \mathbf{PreShv}\,(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \xrightarrow{f^*} \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$$

Le lemme ci-dessous est évident. Il découle immédiatement de la description de l'image inverse des préfaisceaux (voir la formule (129) du lemme 4.4.43) :

Lemme 4.5.2. — *Soit $(f, \alpha) : (\mathscr{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathcal{I})$ un 1-morphisme de DiaSch/S. Soit H un préfaisceau sur $\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ à valeurs dans $\mathfrak{M}$. Le préfaisceau $(f, \alpha)^* H$ est donné par l'association :*

$$(V, j) \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/\mathscr{G}(j)) \rightsquigarrow \operatorname*{Colim}_{V \to U \times_{\mathscr{F}(\alpha(j))} \mathscr{G}(j) \in \mathsf{Ob}(V \setminus (\mathsf{Sm}/\mathscr{F}(\alpha(j))))} H(U, \alpha(j))$$

Proposition 4.5.3. — *L'association $(f, \alpha) \rightsquigarrow (f, \alpha)^*$ s'étend naturellement en un 2-foncteur contravariant :*

$$\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(-, -), \mathfrak{M}) : \mathsf{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{Cat}$$

Démonstration. — Soient deux 1-morphismes composables dans DiaSch/S :

$$(\mathscr{H}, \mathcal{K}) \xrightarrow{(g, \beta)} (\mathscr{G}, \mathcal{J}) \xrightarrow{(f, \alpha)} (\mathscr{F}, \mathcal{I})$$

Pour H un préfaisceau sur $\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ à valeurs dans $\mathfrak{M}$ et $(W \to \mathscr{H}(k), k) \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{H}, \mathcal{K}))$, on a par le lemme 4.5.2 :

$$\begin{aligned}
[(g, \beta)^*(f, \alpha)^* H](W, k) &= \operatorname*{Colim}_{W \to V \times_{\mathscr{G}(\beta(k))} \mathscr{H}(k)} [(f^*, \alpha)^* H](V, \beta(k)) \\
&= \operatorname*{Colim}_{W \to V \times_{\mathscr{G}(\beta(k))} \mathscr{H}(k)} \Big(\operatorname*{Colim}_{V \to U \times_{\mathscr{F}(\alpha(\beta(k)))} \mathscr{G}(\beta(k))} H(U, \alpha \circ \beta(k)) \Big) \\
&\simeq \operatorname*{Colim}_{W \to U \times_{\mathscr{F}(\alpha \circ \beta(k))} \mathscr{H}(k)} H(U, \alpha \circ \beta(k)) = [(\alpha \circ \beta, f \circ g)^* H](W, k)
\end{aligned}$$

Ceci fournit une transformation naturelle inversible $(g, \beta)^*(f, \alpha)^* \simeq (\alpha \circ \beta, f \circ g)^*$. La relation de cocycle pour cet isomorphisme de connexion découle de la relation de cocycle pour la composition des foncteurs colimites.

Soient $(f,\alpha),(f'\alpha') : (\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F},\mathcal{I})$ deux 1-morphismes de DiaSch/S et $t : \alpha \longrightarrow \alpha'$ une transformation naturelle rendant le carré :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{G} \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & \mathscr{G} \arrow[d, "f'"] \\ \mathscr{F}\circ\alpha \arrow[r, "t"] & \mathscr{F}\circ\alpha' \end{tikzcd}$$

commutatif. Nous allons définir une transformation naturelle $t^* : (f',\alpha')^* \longrightarrow (f,\alpha)^*$. Pour $j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$ et V un $\mathscr{G}(j)$-schéma lisse, la transformation naturelle t définit un foncteur $V\backslash(\mathsf{Sm}/\mathscr{F}(\alpha'(j))) \longrightarrow V\backslash(\mathsf{Sm}/\mathscr{F}(\alpha(j)))$ qui à un couple $(U' \to \mathscr{F}(\alpha'(j)), V \to U' \times_{\mathscr{F}(\alpha'(j))} \mathscr{G}(j))$ associe le couple :

$$\begin{aligned}(U' \times_{\mathscr{F}(\alpha'(j))} \mathscr{F}(\alpha(j)) \to \mathscr{F}(\alpha(j)), V \to U' \times_{\mathscr{F}(\alpha'(j))} \mathscr{G}(j)) \\ \simeq (U' \times_{\mathscr{F}(\alpha'(j))} \mathscr{F}(\alpha(j))) \times_{\mathscr{F}(\alpha(j))} \mathscr{G}(j)\end{aligned}$$

Ce foncteur et les flèches $H(U',\alpha'(j)) \longrightarrow H(U' \times_{\mathscr{F}(\alpha'(j))} \mathscr{F}(\alpha(j)), \alpha(j))$ induisent un morphisme dans $\mathfrak{M}$:

$$\underset{(U'\to\mathscr{F}(\alpha'(j)),V\to U'\times_{\mathscr{F}(\alpha'(j))}\mathscr{G}(j))}{\mathsf{Colim}} H(U',\alpha'(j)) \longrightarrow \underset{(U\to\mathscr{F}(\alpha(j)),V\to U\times_{\mathscr{F}(\alpha(j))}\mathscr{G}(j))}{\mathsf{Colim}} H(U,\alpha(j))$$

et donc la transformation naturelle t^*. La commutation de ces transformations naturelles avec les isomorphismes de connexion est laissée aux lecteurs. □

Proposition 4.5.4. — *Soit $(f,\alpha) : (\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F},\mathcal{I})$ un 1-morphisme de diagrammes de S-schémas. Le foncteur $(f,\alpha)^*$ admet un adjoint à droite $(f,\alpha)_*$. Si (f,α) est lisse argument par argument, le foncteur $(f,\alpha)^*$ admet un adjoint à gauche $(f,\alpha)_\#$.*

Démonstration. — En utilisant la décomposition $(f,\alpha) = \alpha \circ f$ on est ramené à distinguer deux cas.

Le cas de $f : (\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F}\circ\alpha,\mathcal{J})$. — Le foncteur f^* est l'image inverse suivant le foncteur

$$f = (- \times_{\mathscr{F}} \mathscr{G}) : \mathsf{Sm}/(\mathscr{F}\circ\alpha,\mathcal{J}) \longrightarrow \mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{J})$$

Il admet un adjoint à droite, à savoir le foncteur image directe qui à un préfaisceau H sur $\mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{J})$ associe $H \circ f$. Lorsque les morphismes $f(j)$ sont lisses, le foncteur $f : \mathsf{Sm}/(\mathscr{F}\circ\alpha,\mathcal{J}) \longrightarrow \mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{J})$ admet un adjoint à droite c_f qui à $(V \to \mathscr{G}(j), j)$ associe le couple $(V \to \mathscr{G}(j) \to \mathscr{F}(\alpha(j)), j)$. L'adjoint à gauche $f_\#$ de f^* est donc donné par c_f^*. On a de plus $f^* = (c_f)_*$.

Le cas de $\alpha : (\mathscr{F}\circ\alpha,\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F},\mathcal{I})$. — Le foncteur α^* est construit comme l'image directe suivant le foncteur $\bar{\alpha}$. Il admet donc un adjoint à gauche $\alpha_\# = \bar{\alpha}^*$ et un adjoint à droite $\alpha_* = \bar{\alpha}^!$. □

Soit $(f,\alpha) : (\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F},\mathcal{I})$ un 1-morphisme de diagrammes de S-schémas. Pour $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ on forme la face carrée dans DiaSch/S :

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{G}/i,\mathcal{J}/i) \arrow[r, "(\mathrm{id},u_i)"] \arrow[d, "(f/i)"'] \arrow[dr, phantom, "r\swarrow"] & (\mathscr{G},\mathcal{J}) \arrow[d, "(f,\alpha)"] \\ \mathscr{F}(i) \arrow[r, "(\mathrm{id}_{\mathscr{F}(i)},i)"'] & (\mathscr{F},\mathcal{I}) \end{tikzcd} \tag{142}$$

Le lemme suivant découle immédiatement de la construction du foncteur $\alpha_* = \bar{\alpha}^!$.

Lemme 4.5.5. — *La transformation naturelle* $(\mathrm{id}_{\mathscr{F}(i)},i)^*(f,\alpha)_* \longrightarrow (f/i)_*(\mathrm{id},u_i)^*$ *est inversible.*

De même, lorsque les foncteurs $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont constants de valeur le S-schéma F, on peut former la face carrée :

$$\begin{tikzcd} (F,i\backslash\mathcal{J}) \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "\alpha/i"'] \arrow[dr, phantom, "r\nearrow"] & (F,\mathcal{J}) \arrow[d, "\alpha"] \\ (F,i) \arrow[r, "i"] & (F,\mathcal{I}) \end{tikzcd} \tag{143}$$

On a alors :

Lemme 4.5.6. — *La transformation naturelle* $(\alpha/i)_\# u_i^* \longrightarrow i^*\alpha_\#$ *est inversible.*

Soit $f : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}$ un morphisme de $\mathcal{I}$-diagrammes de S-schémas. Pour un foncteur $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$, on forme le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{G}\circ\alpha,\mathcal{J}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_{|\mathcal{J}}"'] & (\mathscr{G},\mathcal{I}) \arrow[d, "f"] \\ (\mathscr{F}\circ\alpha,\mathcal{J}) \arrow[r, "\alpha"'] & (\mathscr{F},\mathcal{I}) \end{tikzcd} \tag{144}$$

On a alors :

Lemme 4.5.7. — *La transformation naturelle* $\alpha^* f_* \longrightarrow (f_{|\mathcal{J}})_*\alpha^*$ *est inversible. Supposons de plus que f est cartésien et lisse argument par argument. Alors,* $(f_{|\mathcal{J}})_\#\alpha^* \longrightarrow \alpha^* f_\#$ *est inversible.*

Démonstration. — La première assertion est évidente. En effet, les foncteurs α^*, f_* et $(f_{|\mathcal{J}})_*$ sont des images directes. Pour montrer la seconde assertion, on se ramène

immédiatement au cas où α est le foncteur $i : * \longrightarrow \mathcal{I}$ pour $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$. Pour U un $\mathscr{F}(i)$-schéma lisse et $K \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}))$, on a :

$$f_{\#}K(U,i) = \underset{(U,i)\to(V\to\mathscr{G}(j)\to\mathscr{F}(j),j)\in\mathsf{Ob}((U,i)\backslash(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{I})))}{\mathsf{Colim}} K(V,j)$$

Comme f est cartésien, les flèches $(U,i) \to (V \to \mathscr{G}(j) \to \mathscr{F}(j), j)$ se factorisent canoniquement par $(U,i) \to (V \times_{\mathscr{G}(j)} \mathscr{G}(i) \to \mathscr{G}(i) \to \mathscr{F}(i), i)$. Il vient que la colimite ci-dessus se récrit :

$$f_{\#}K(U,i) = \underset{(U,i)\to(V\to\mathscr{G}(i)\to\mathscr{F}(i),i)\in\mathsf{Ob}(U\backslash(\mathsf{Sm}/\mathscr{G}(i)))}{\mathsf{Colim}} K(V,i) = f(i)_{\#}i^*(K)(U)$$

Le lemme est démontré. □

Soit $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ un diagramme de S-schémas. Il sera pratique dans la suite de considérer sur $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})$ une structure de modèles intermédiaire entre la structure projective et la structure injective.

Définition 4.5.8. — *Un morphisme $f : H \longrightarrow K$ de préfaisceaux sur $\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ à valeurs dans $\mathfrak{M}$ est une* cofibration semi-projective *si pour tout $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$, le morphisme $(\mathrm{id}_{\mathscr{F}(i)}, i)^*(f)$ est une cofibration projective dans $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/\mathscr{F}(i), \mathfrak{M})$. La classe des cofibrations semi-projectives est notée par $\mathbf{Cof}_{s-pr}$. On définit la classe $\mathbf{Fib}_{s-pr}$ des fibrations semi-projectives par la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathbf{Cof}_{s-pr} \cap \mathbf{W}$.*

La preuve de la proposition suivante est calquée sur celle de la proposition 4.4.17.

Proposition 4.5.9. — *Le triplet $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr})$ est une structure de modèles présentable par cofibrations sur la catégorie $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})$.*

Démonstration. — Le résultat est vrai lorsque $\mathfrak{M}$ est seulement supposée présentable par cofibrations. On montrera uniquement que $\mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{s-pr})_\beta \cap \mathbf{W}) = \mathbf{Fib}_{s-pr}$ pour β suffisamment grand. Soit α un cardinal majorant celui de $\mathcal{I}$ et de Sm/S et tel que $\mathfrak{M}$ est α-présentable par cofibrations. On prendra β un cardinal comme dans la proposition 4.2.41.

Soit $f \in \mathrm{RLP}((\mathbf{Cof}_{s-pr})_\beta \cap \mathbf{W})$ et montrons que $f \in \mathrm{RLP}(\mathbf{Cof}_{s-pr} \cap \mathbf{W})$. On se donne un carré commutatif dans $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & H \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

avec u une cofibration triviale semi-projective. Pour $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$, on note $?(i)$ la restriction de $?$ à $\mathsf{Sm}/\mathscr{F}(i)$. On choisit une section $r_i : B(i) \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u(i))$ comme dans le cas respectif de la définition 4.2.45.

On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ formé des classes d'isomorphisme des familles $(v_i, a_i)_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{I})}$ avec :

- $v_i : A(i) \longrightarrow T(i)$ une sous-cofibration r_i-normale de $c_0(u(i))$,
- $a_i : s(T(i)) \longrightarrow H(i)$ avec $s(T(i)) = T(i) \times_{\Phi_{c_0 f}(u(i)), r_i} B(i)$.

et qui vérifient les conditions suivantes :

(i) Les sous-objets $s(T(i))$ de $B(i)$ forment un sous-préfaisceau $s(T)$ de B,

(ii) Les flèches a_i définissent un morphisme de préfaisceaux $a : s(T) \longrightarrow H$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d, "f"] \\ s(T) \arrow[r] \arrow[ur, "a"] & B \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

On ordonne $\mathscr{E}$ de la manière évidente. Par la proposition 4.2.54, les chaînes de $\mathscr{E}$ sont majorées par leur colimite. Le lemme de Zorn assure l'existence d'éléments maximaux.

Supposons que $(v_i, a_i)_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{I})}$ est un élément maximal de $\mathscr{E}$ et montrons que $T(i) = \Phi_{c_0 f}(u(i))$ pour tout $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$. Considérons le diagramme de $\mathcal{O}rd\mathcal{E}ns$:

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{I})} \mathbf{SpSub}_\beta^{\perp v_i}(u(i)|r_i) \arrow[d] \\ \mathbf{Sub}_\beta(u) \arrow[r] & \prod_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{I})} \mathbf{Sub}_\beta(u(i)) \end{tikzcd}$$

où les flèches sont les inclusions évidentes. On note $\mathcal{L}$ la limite de ce diagramme. Par les lemmes 4.2.57 et 4.2.4, cette limite est cofinale dans $\prod_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{I})} \mathbf{Sub}_\beta(u(i))$ (pour la cofinalité de l'inclusion $\mathbf{Sub}_\beta(u) \subset \prod_{i\in\mathsf{Ob}(\mathcal{I})} \mathbf{Sub}_\beta(u(i))$, le lecteur pourra facilement adapter l'argument de la preuve de la proposition 4.2.20).

Se donner un objet de $\mathcal{L}$ revient à se donner une sous-flèche $u_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ de u de but β-accessible et telle que pour $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$, $u_0(i)$ est une sous-cofibration r_i-spéciale de $u(i)$ qui est de plus orthogonale à v_i. Notons $T_0(i) = T(i) \times_{\Phi_{c_0 f}(u(i))} \Phi_{c_0 f}(u_0(i))$. Comme $u_0(i)$ est orthogonale à v_i, la flèche $A_0(i) \longrightarrow T_0(i)$ est $r_{0,i}$-normale dans $u_0(i)$ (avec $r_{0,i} : B_0(i) \longrightarrow \Phi_{c_0 f}(u_0(i))$ la section déduite de r_i). Notons $s(T_0)$ le préfaisceau $s(T) \times_B B_0$. On a clairement $s(T_0)(i) = T_0(i) \times_{\Phi_{c_0 f}(u_0(i)), r_{0,i}} B_0(i)$ pour $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$. La flèche $s(T_0) \longrightarrow B_0$ est donc une cofibration semi-projective triviale. On déduit l'existence d'un relèvement :

$$\begin{tikzcd} s(T_0) \arrow[r] \arrow[d, "u_0"'] & s(T) \arrow[r, "a"] & H \arrow[d, "f"] \\ B_0 \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "l"] & B \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

Pour $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$, $v'_i : A(i) \longrightarrow T'(i) = T(i) \coprod_{T_0(i)} \Phi_{c_0 f}(u_0(i))$ est une sous-cofibration r_i-normale de $u(i)$ majorant v_i. Il vient que la famille $(v'_i, a_i \cup l(i))_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})}$ majore $(v_i, a_i)_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})}$ dans $\mathscr{E}$. Par maximalité, on déduit que les sous-objets $\Phi_{c_0 f}(u_0(i))$ de $\Phi_{c_0 f}(u(i))$ sont majorés par $T(i)$. Comme $\mathcal{L}$ est cofinal dans $\prod_{i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})} \mathbf{Sub}_\beta(u(i))$, on a forcément $T(i) = \Phi_{c_0 f}(u(i))$. □

Rappelons que $\tau \in \{\text{Nis}, \text{ét}\}$ désigne l'une des topologies usuelles Nisnevich ou étale. On munit la catégorie $\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ de la topologie τ engendrée par les familles de la forme :

$$\Big((u_\alpha, \mathrm{id}_i) : (U_\alpha, i) \longrightarrow (U, i) \Big)_\alpha$$

avec $(u_\alpha)_\alpha$ une famille couvrante pour la topologie τ. Ainsi, un sous-préfaisceau R de (U, i) est une crible couvrante pour la topologie τ si et seulement si la restriction de R à la sous-catégorie Et/U des U-schémas étales est une crible couvrante pour la topologie τ. On vérifie immédiatement que la donnée pour $(U, i) \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}))$ du site $(\mathsf{Et}/U, \tau)$ est une P-structure sur $(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \tau)$ au sens de la définition 4.4.57. Cette P-structure sera appelée la P-structure *étale*.

Par la proposition 4.4.31, on peut localiser la structure $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr})$ pour obtenir la structure semi-projective τ-locale que l'on notera $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\tau})$. On a le théorème suivant :

Théorème 4.5.10. — *Soit* $(f, \alpha) : (\mathscr{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathcal{I})$ *un* 1*-morphisme de diagrammes de* S*-schémas.*

1- *On a, relativement aux structures semi-projectives* τ*-locales* $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\tau})$*, les deux adjonctions de Quillen suivantes :*

(i) $((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$,

(ii) $(f_\#, f^*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$ *lorsque* f *est cartésien et lisse argument par argument.*

2- *On a, relativement aux structures projectives* τ*-locales* $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\tau})$*, les trois adjonctions de Quillen suivantes :*

(i) $(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$,

(ii) $(\alpha_\#, \alpha^*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})$,

(iii) $((f, \alpha)_\#, (f, \alpha)^*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})$ *lorsque* (f, α) *est lisse argument par argument.*

3- *Enfin,* $(\alpha^*, \alpha_*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}), \mathfrak{M})$ *est une adjonction de Quillen relativement aux structures injectives* τ*-locales* $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\tau})$.

Démonstration. — On traite d'abord les assertions relatives aux structures projectives τ-locales. Le foncteur $f = (-) \times_{\mathscr{F}} \mathscr{G} : \mathsf{Sm}/(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathsf{Sm}/(\mathscr{G}, \mathcal{J})$ est continu. De plus, le pré-morphisme de sites qu'il définit est compatible aux

P-structures étales. La première assertion découle alors du théorème 4.4.60. Supposons que (f,α) est lisse argument par argument. L'adjonction $((f,\alpha)_\#,(f,\alpha)^*)$ est associée au foncteur $c_{f,\alpha}$: $\mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow \mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I})$ qui à un objet (V,j) associe $(V \to \mathscr{G}(j) \to \mathscr{F}(\alpha(j)),\alpha(j))$. Ce foncteur est clairement continu et compatible aux P-structures étales. On peut encore appliquer le théorème 4.4.60. Enfin, la seconde assertion est clairement un cas particulier de la troisième.

Revenons à la première partie de l'énoncé. Le foncteur $(f,\alpha)^*$ préserve clairement les cofibrations semi-projectives. Pour montrer qu'il préserve les cofibrations semi-projectives triviales, il suffit de le faire après application des foncteurs $(\mathrm{id}_{\mathscr{G}(j)},j)^*$ pour $j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$. Mais on vient de montrer que $f(\alpha(j))^*$ préserve les cofibrations projectives triviales. De même, pour vérifier que $f_\#$ préserve les cofibrations semi-projectives et les cofibrations semi-projectives triviales, on peut se ramener au cas où f est un morphisme lisse de S-schémas en utilisant le lemme 4.5.7.

Pour la dernière assertion, il suffit de remarquer que le foncteur α^* préserve les cofibrations injectives et les équivalences τ-locales. Le théorème est démontré. □

Soit $(\mathscr{F},\mathcal{I})$ un diagramme de S-schémas. On considère la classe $\mathscr{A}$ de flèches de $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M})$ de la forme

$$\sigma(U,i,B) : (U,i)\otimes B_{cst} \xrightarrow{s_0\otimes \mathrm{id}_B} (\mathbb{A}^1_U,i)\otimes B_{cst}$$

avec $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$, U un $\mathscr{F}(i)$-schéma lisse, s_0 la section nulle de la droite affine et B un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$. On note également $\mathscr{A}_\alpha$ la classe des $\sigma(U,i,B)$ avec B un objet α-accessible. On a :

Proposition 4.5.11. — *Supposons que β est suffisamment grand. Soit $K \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))$ fibrant pour la structure $(\mathbf{W}_\tau,\mathbf{Cof}_{s-pr},\mathbf{Fib}_{s-pr})$. Alors, K est $\mathscr{A}_\beta$-local si et seulement si pour tout $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ et U un $\mathscr{F}(i)$-schéma lisse, la flèche $K(\mathbb{A}^1_U,i) \longrightarrow K(U,i)$ est une équivalence faible.*

Démonstration. — Soit β un cardinal tel que $A[n]$ admet un représentant cofibrant et β-accessible pour tout $A \in \mathcal{E}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Par définition, K est $\mathscr{A}_\beta$-local si le morphisme :

$$\begin{aligned}&\hom_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))}((\mathbb{A}^1_U,i)\otimes B_{cst},K)\\ &\qquad\longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))}((U,i)\otimes B_{cst},K)\end{aligned}$$

est inversible pour B cofibrant et β-accessible dans $\mathfrak{M}$. Par le lemme 4.4.35, on dispose pour un préfaisceau représentable F d'une adjonction de Quillen $(F\otimes(-)_{cst},\underline{\hom}_{\mathfrak{M}}(F,-))$ avec $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M})$ munie de sa structure projective τ-locale. Le morphisme ci-dessus s'identifie donc à :

$$\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(B,K(\mathbb{A}^1_U,i)) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(B,K(U,i)) \tag{145}$$

Étant donné que la classe des objets cofibrants β-accessibles contient des représentants de $A[n]$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$, on déduit que (145) est inversible si et seulement si $K(\mathbb{A}^1_U, i) \longrightarrow K(U, i)$ est une équivalence faible (on utilise bien entendu la propriété (iii) de la définition 4.4.23). □

En particulier, on a : $(\mathbf{W}_\tau)_{\mathscr{A}_\beta} = (\mathbf{W}_\tau)_{\mathscr{A}}$ pour β suffisamment grand. Ceci montre que la localisation de Bousfield suivant $\mathscr{A}$ existe :

Définition 4.5.12. — *Soit $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ un diagramme de S-schémas. La structure semi-projective (resp. projective, injective) $\mathbb{A}^1$-locale*

$$(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\mathbb{A}^1})$$

(resp. $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1})$, $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\mathbb{A}^1})$) est la localisation de Bousfield suivant $\mathscr{A}$ de la structure semi-projective (resp. projective, injective) τ-locale. Les éléments de $\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}$ sont appelée les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles.

Soit $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ un diagramme de S-schémas. On note $\mathbb{A}^1_{\mathscr{F},\mathcal{I}}$ le préfaisceau d'ensembles sur $\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ qui à un objet (U, i) associe $\hom_{\mathsf{Sch}/\mathscr{F}(i)}(U, \mathbb{A}^1_{\mathscr{F}(i)})$. On a le résultat suivant :

Lemme 4.5.13

1- Soit $K \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}))$ un objet fibrant relativement à la structure projective τ-locale $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\tau})$. Alors, K est $\mathbb{A}^1$-local si et seulement si la flèche $\underline{\hom}(\mathbb{A}^1_{\mathscr{F},\mathcal{I}}, K) \longrightarrow K$ est une équivalence faible de préfaisceaux.

2- Soit $H \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}))$ un préfaisceau injectivement cofibrant. Alors la flèche $H \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes H$ induite par la section nulle est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible.

Démonstration. — En effet, pour (U, i) un objet de $\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I})$, la flèche $\underline{\hom}(\mathbb{A}^1_{\mathscr{F},\mathcal{I}}, K)(U, i) \longrightarrow K(U, i)$ s'identifie canoniquement à $K(\mathbb{A}^1_U, i) \longrightarrow K(U, i)$.

Montrons la seconde partie du lemme. Il suffit de montrer que pour tout K injectivement fibrant et $\mathbb{A}^1$-local, l'application :

$$\hom_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))}(\mathbb{A}^1_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes H, K) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))}(H, K)$$

est bijective. En utilisant l'adjonction de Quillen du lemme 4.4.35, cette application s'identifie à :

$$\hom_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))}(H, \underline{\hom}(\mathbb{A}^1_{\mathscr{F},\mathcal{I}}, K)) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))}(H, K)$$

Le résultat découle alors de la première partie. □

On a également le théorème :

Théorème 4.5.14. — *Soit* $(f,\alpha) : (\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F},\mathcal{I})$ *un* 1*-morphisme de diagrammes de* S*-schémas.*

1- *On a, relativement aux structures semi-projectives* $\mathbb{A}^1$*-locales* $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\mathbb{A}^1})$*, les deux adjonctions de Quillen suivantes :*

(i) $((f,\alpha)^*, (f,\alpha)_*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{J}),\mathfrak{M})$,

(ii) $(f_\#, f^*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{J}),\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}\circ\alpha,\mathcal{J}),\mathfrak{M})$ *lorsque* f *est cartésien et lisse argument par argument.*

2- *On a, relativement aux structures projectives* $\mathbb{A}^1$*-locales* $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1})$*, les trois adjonctions de Quillen suivantes :*

(i) $(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}\circ\alpha,\mathcal{J}),\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{J}),\mathfrak{M})$,

(ii) $(\alpha_\#, \alpha^*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}\circ\alpha,\mathcal{J}),\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M})$,

(iii) $((f,\alpha)_\#, (f,\alpha)^*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{J}),\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M})$ *lorsque* (f,α) *est lisse argument par argument.*

3- *Enfin,* $(\alpha^*, \alpha_*) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}\circ\alpha,\mathcal{J}),\mathfrak{M})$ *est une adjonction de Quillen relativement aux structures injectives* $\mathbb{A}^1$*-locales* $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\mathbb{A}^1})$.

Démonstration. — Pour déduire l'énoncé du théorème 4.5.10, il s'agit de montrer que les différents foncteurs à Quillen à gauche envoient les flèches de $\mathscr{A}$ sur des $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles.

On traite d'abord le cas du foncteur f^*. Soient $B \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$ un objet cofibrant, $j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$ et U un $\mathscr{F}(\alpha(j))$-schéma lisse. La source et le but de $\sigma(U,j,B)$: $(\mathbb{A}^1_U, j) \otimes B_{cst} \longrightarrow (U,j) \otimes B_{cst}$ sont projectivement cofibrants. Le résultat recherché découle alors de l'égalité $f^*(\sigma(U,j,B)) = \sigma(U \times_{\mathscr{F}(\alpha(j))} \mathscr{G}(j), j, B)$. De même, si V est un $\mathscr{G}(j)$-schéma lisse, on a $f_\#(\sigma(V,j,B)) = \sigma(V \to \mathscr{G}(j) \to \mathscr{F}(\alpha(j)), j, B)$. D'où le résultat pour $f_\#$. Le cas de $\alpha_\#$ se traite de la même façon. Le cas du foncteur α^* est légèrement moins trivial. Il suffit toutefois de remarquer que ce dernier envoie la flèche $K \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes K$ sur $\alpha^* K \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathscr{F}\circ\alpha,\mathcal{J}} \otimes \alpha^* K$ pour $K \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))$ et d'invoquer le lemme 4.5.13. □

4.5.2. Le 2-foncteur $\mathbb{SH}^T_{\mathfrak{M}}(-)$. Début de la vérification des axiomes. — On suppose maintenant que notre catégorie de coefficients $\mathfrak{M}$ est aussi une catégorie de modèles monoïdale symétrique. Par la proposition 4.4.62 et la proposition 4.2.76 appliquée à la $\mathbb{A}^1$-localisation, les catégories $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M})$ sont encore des catégories de modèles monoïdales symétriques relativement aux structures projectives et injectives (τ-locales et $\mathbb{A}^1$-locales). C'est également le cas relativement aux structures semi-projectives, étant donné que l'on peut vérifier l'axiome **(MMC)** après application des foncteurs i^* pour $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$. Notons le lemme suivant :

Lemme 4.5.15. — *Soit* $(f,\alpha) : (\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F},\mathcal{I})$ *un* 1*-morphisme de diagrammes de* S*-schémas.*

1. *Les foncteurs* f_* *et* α^* *sont monoïdaux symétriques. Les foncteurs* $(f,\alpha)^*$ *et* $\alpha_\#$ *sont pseudo-comonoïdaux et* α_* *est pseudo-monoïdal.*
2. *Supposons que* (f,α) *est lisse argument par argument. Alors,* $(f,\alpha)^*$ *est monoïdal symétrique et* $(f,\alpha)_\#$ *est un* $(f,\alpha)^*$*-projecteur au sens de la définition 2.1.99.*

Démonstration. — L'image directe sur les préfaisceaux suivant n'importe quel foncteur est clairement monoïdal. D'où la première assertion. Ceci montre que f_* et α^* sont monoïdaux. De même, pour (f,α) lisse argument par argument, le foncteur f^* est monoïdal puisqu'il est isomorphe à l'image direct suivant c_f (voir la preuve de la proposition 4.5.4). Les autres assertions découlent maintenant par adjonction (pour $(f,\alpha)^*$ il faut utiliser $(f,\alpha)^* = \alpha^* \circ f^*$). □

La proposition ci-dessous montre que $(f,\alpha)^*$ est en fait un foncteur monoïdal.

Proposition 4.5.16. — *Soit* $(f,\alpha) : (\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F},\mathcal{I})$ *un* 1*-morphisme de diagrammes de* S*-schémas. Soient* K, $L \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))$. *La flèche naturelle* $(f,\alpha)^*(K \otimes L) \longrightarrow (f,\alpha)^*(K) \otimes (f,\alpha)^*(L)$ *est inversible.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que la flèche en question est inversible après applications des foncteurs j^* pour $j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$. On se ramène alors au cas où $\mathcal{I} = \mathcal{J} = *$, *i.e.* à un morphisme de S-schémas $f : Y \longrightarrow X$.

On fixe le préfaisceau L et on note $\mathscr{C}$ la classe des préfaisceaux K vérifiant la conclusion de l'énoncé. Il est clair que $\mathscr{C}$ est stable par colimite quelconque. On se ramène alors au cas où K est de la forme $U \otimes (A_{cst})$ avec U un X-schéma lisse et $A \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. Le même raisonnement permet de supposer que $L = V \otimes (B_{cst})$ avec V un X-schéma lisse et $B \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. On a alors la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} f^*((U \otimes (A_{cst})) \otimes (V \otimes (B_{cst}))) &\simeq f^*((U \times_X V) \otimes (A \otimes B)_{cst}) \\ \simeq (U \times_X Y) \times_Y (V \times_X Y) \otimes (A \otimes B)_{cst} &\simeq ((U \times_X Y) \otimes (A_{cst})) \otimes ((V \times_X Y) \otimes (B_{cst})) \\ &\simeq f^*(U \otimes (A_{cst})) \otimes f^*(V \otimes (B_{cst})) \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera facilement que la composée ci-dessus est égale au morphisme canonique de l'énoncé. □

On résume quelques formules de projections dans la proposition suivante :

Proposition 4.5.17

1- *Soit* $f : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}$ *un morphisme cartésien et lisse de* $\mathcal{I}$*-diagrammes de* S*-schémas. Pour* $K \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))$ *et* $M \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{I}),\mathfrak{M}))$, *le morphisme (structural du* f^**-projecteur)* $f_\#(f^*(K) \otimes M) \longrightarrow K \otimes f_\#(M)$ *est inversible.*

2- Soit $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ *un foncteur de* Dia *et* X *un* S*-schéma. Pour* $K \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(X,\mathcal{I}),\mathfrak{M}))$ *et* $M \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(X,\mathcal{J}),\mathfrak{M}))$, *le morphisme* $\alpha_\#(\alpha^*(K)\otimes M) \longrightarrow K\otimes \alpha_\# M$ *est inversible.*

3- Soit $(f,\alpha) : (\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F},\mathcal{I})$ *un* 1*-morphisme de diagrammes de* S*-schémas. On note* $\pi_{\mathscr{F},\mathcal{I}}$ *la projection structurale* $(\mathscr{F},\mathcal{I}) \longrightarrow S$. *Soient* $T \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/S,\mathfrak{M}))$ *et* $M \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{G},\mathcal{J}),\mathfrak{M}))$. *Le morphisme* $(f,\alpha)_\#((f,\alpha)^*(\pi^*_{\mathscr{F},\mathcal{I}}T)\otimes M) \longrightarrow (\pi^*_{\mathscr{F},\mathcal{I}}T)\otimes (f,\alpha)_\# M$ *est inversible.*

Démonstration. — Pour la première partie, on se ramène à $\mathcal{I} = *$ en utilisant le lemme 4.5.7. Soit donc $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme lisse de S-schémas. Comme dans la preuve de la proposition 4.5.16 on peut supposer que $K = U\otimes(A_{cst})$ et $M = V\otimes(B_{cst})$ avec U un X-schéma lisse, V un Y-schéma lisse et A, $B \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. On a alors la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} f_\#(f^*(U\otimes A_{cst})\otimes(V\otimes B_{cst})) &\simeq f_\#(((U\times_X Y)\otimes A_{cst})\otimes(V\otimes B_{cst})) \\ &\simeq f_\#(((U\times_X Y)\times_Y V)\otimes(A\otimes B)_{cst}) \simeq (U\times_X(V\to Y\to X))(A\otimes B)_{cst} \\ &\simeq (U\otimes A_{cst})\otimes((V\to Y\to X)\otimes B_{cst}) \simeq (U\otimes A_{cst})\otimes f_\#(V\otimes B_{cst}) \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera facilement que la composée ci-dessus coïncide avec le morphisme canonique de l'énoncé.

Pour la seconde partie, on utilise le lemme 4.5.6 pour se ramener au cas où $\mathcal{I} = *$, *i.e.* à $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow *$. On peut supposer que $K = U\otimes(A_{cst})$ et $M = (V,j)\otimes B_{cst}$ avec U et V des X-schémas lisses, $j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$ et A, $B \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. On a alors la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} \alpha_\#(\alpha^*(U\otimes A_{cst})\otimes((V,j)\otimes B_{cst})) &\simeq \alpha_\#((U\times_X V,j)\otimes(A\otimes B)_{cst}) \\ &\simeq (U\times_X V)\otimes(A\otimes B)_{cst} \simeq (U\otimes A_{cst})\otimes\alpha_\#((V,j)\otimes B_{cst}) \end{aligned}$$

dont la composée coïncide avec le morphisme de l'énoncé.

Il nous reste à montrer la dernière partie. On suppose que $T = U\otimes A_{cst}$ et $M = (V,j)\otimes B_{cst}$ avec U un S-schéma lisse, $j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$, V un $\mathscr{G}(j)$-schéma lisse et A, $B \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. On a alors la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} (f,\alpha)_\#((f,\alpha)^*\pi^*_{\mathscr{F},\mathcal{I}}(U\otimes A_{cst})\otimes((V,j)\otimes B_{cst})) &\simeq (f,\alpha)_\#((U\times_S V,j)\otimes(A\otimes B)_{cst}) \\ \simeq (U\times_S V\to\mathscr{F}(\alpha(j)),j)\otimes(A\otimes B)_{cst} &\simeq \pi^*_{\mathscr{F},\mathcal{I}}(U\otimes A_{cst})\otimes((V\to\mathscr{F}(\alpha(j)),j)\otimes B_{cst}) \\ &\simeq \pi^*_{\mathscr{F},\mathcal{I}}(U\otimes A_{cst})\otimes(f,\alpha)_\#((V,j)\otimes B_{cst}) \end{aligned}$$

La proposition est prouvée. □

On fixe un objet projectivement cofibrant T de $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/S,\mathfrak{M})$ tel que pour tout S-schéma lisse U, le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}(T(U),-) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ est accessible. Étant donné un diagramme de S-schémas $(\mathscr{F},\mathcal{I})$ on notera $T_{\mathscr{F},\mathcal{I}}$ l'objet $\pi^*_{\mathscr{F},\mathcal{I}}T$ où $\pi_{\mathscr{F},\mathcal{I}}$

désigne la projection structurale de $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$. On vérifie facilement que les foncteurs $\underline{\mathsf{Hom}}(T_{\mathscr{F},\mathcal{I}}, -)$ sont accessibles.

Définition 4.5.18. — *On note* $\mathbb{M}_T(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ *la catégorie* $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T_{\mathscr{F},\mathcal{I}}}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}))$.

Proposition 4.5.19. — *Le 2-foncteur* $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(-,-), \mathfrak{M}) : \mathsf{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{Mono}$ *qui à un 1-morphisme* (f, α) *associe le foncteur monoïdal* $(f, \alpha)^*$ *induit naturellement un 2-foncteur contravariant :*

$$\mathbb{M}_T(-,-) : \mathsf{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{Mono}$$

Démonstration. — Soit $(f, \alpha) : (\mathscr{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathcal{I})$ un 1-morphisme de diagrammes de S-schémas. L'isomorphisme canonique $(f, \alpha)^* T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \simeq T_{\mathscr{G},\mathcal{J}}$ induit un isomorphisme de foncteurs $\epsilon : T_{\mathscr{G},\mathcal{J}} \otimes (f, \alpha)^*(-) \simeq (f, \alpha)^*(T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes -)$ qui est clairement Σ-symétrique au sens de la définition 4.3.16. On a donc $(f, \alpha)^*_\epsilon : \mathbb{M}_T(\mathscr{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathscr{G}, \mathcal{J})$ le prolongement de $(f, \alpha)^*$ aux catégories des T-spectres symétriques.

Supposons donné un 1-morphisme $(g, \beta) : (\mathscr{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{H}, \mathcal{K})$. L'isomorphisme de connexion $(g, \beta)^*(f, \alpha)^* \simeq (f \circ g, \alpha \circ \beta)^*$ est compatible aux isomorphismes ϵ. On déduit par la naturalité du prolongement un isomorphisme $(g, \beta)^*_\epsilon (f, \alpha)^*_\epsilon \simeq (f \circ g, \alpha \circ \beta)^*_\epsilon$.

De même, un 2-morphisme $t : (f, \alpha) \longrightarrow (f', \alpha')$ entre 1-morphismes dans $\mathcal{M}or((\mathscr{F}, \mathcal{I}), (\mathscr{G}, \mathcal{J}))$ induit une transformation naturelle $t^* : (f', \alpha')^* \longrightarrow (f, \alpha)^*$. Cette dernière est compatible avec l'isomorphisme ϵ et induit donc une transformation naturelle $t^* : (f', \alpha')^*_\epsilon \longrightarrow (f, \alpha)^*_\epsilon$.

Pour terminer, il reste à vérifier que certains diagrammes commutent. Pour faire cela, il suffit d'appliquer les foncteurs Ev_p et d'invoquer la proposition 4.5.3. □

Dans la suite, on notera simplement $(f, \alpha)^* : \mathbb{M}_T(\mathscr{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathscr{G}, \mathcal{J})$ le foncteur $(f, \alpha)^*_\epsilon$ associé à un 1-morphisme (f, α). Par le lemme 4.3.17, ce foncteur admet un adjoint à droite $(f, \alpha)_*$. Lorsque (f, α) est lisse argument par argument, on a par la proposition 4.5.17 un isomorphisme $\epsilon' : (f, \alpha)_\#((f, \alpha)^* T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes -) \simeq T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes (f, \alpha)_\#(-)$ et donc un prolongement $((f, \alpha)_\#)_{(\epsilon')^{-1}}$. Pour vérifier qu'il s'agit bien de l'adjoint à gauche de $(f, \alpha)^*_\epsilon$, il suffit de vérifier que ϵ s'obtient par adjonction de ϵ' (ce qui est évident). Dans la suite, $((f, \alpha)_\#)_{(\epsilon')^{-1}}$ sera simplement noté $(f, \alpha)_\#$.

Lemme 4.5.20. — *Soit* $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ *un diagramme de* S*-schémas. Le foncteur* $T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes -$ *est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures semi-projectives (resp. projectives, injectives)* $\mathbb{A}^1$*-locales.*

Démonstration. — Comme T est un objet projectivement cofibrant de $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/S, \mathfrak{M})$, $T_{\mathscr{F},\mathcal{I}}$ est semi-projectivement cofibrant. Ceci prouve le premier cas.

Montrons que $T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes -$ est un foncteur de Quillen à gauche relativement à la structure projective[6] Il faut montrer que $T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes -$ préserve les cofibrations projectives puisqu'il préserve dejà les cofibrations semi-projectives $\mathbb{A}^1$-triviales. Il suffit alors de voir que $T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes -$ envoie les éléments de

$$\mathrm{Cell}\{(U,i) \otimes (u)_{cst} | u : A \to B \in \mathbf{Cof} \subset \mathsf{Fl}(\mathfrak{M}) \text{ et } (U,i) \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}))\}$$

sur des cofibrations projectives. Étant donné l'isomorphisme $T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes ((U,i) \otimes (u)_{cst}) \simeq (U,i) \otimes \pi^*_{\mathscr{F},\mathcal{I}}(T \otimes (u)_{cst})$, il suffit de montrer que pour toute cofibration projective $v : H \longrightarrow K$ de $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/S, \mathfrak{M})$, la flèche $(U,i) \otimes \pi^*_{\mathscr{F},\mathcal{I}}(v)$ est une cofibration projective. Cette condition étant stable par composition transfinie, push-out et rétraction, on peut supposer que v est de la forme $V \otimes (w)_{cst}$ avec V un S-schéma lisse et w une cofibration de $\mathfrak{M}$. Le résultat découle alors du fait que $(U,i) \otimes \pi^*_{\mathscr{F},\mathcal{I}}(V \otimes (w)_{cst}) = (U \times_S V) \otimes (w)_{cst}$.

Il reste à traiter le cas de la structure injective $\mathbb{A}^1$-locale. Il est clair que $T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes -$ est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$. Pour montrer qu'il est encore un foncteur de Quillen à gauche après les deux localisations de Bousfield suivant les classes $\mathscr{L}_T$ et $\mathscr{A}$, il suffit de vérifier que le foncteur

$$\mathsf{L}(T_{\mathscr{F},\mathcal{I}} \otimes -) : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}), \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}), \mathfrak{M}))$$

préserve les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles. Ceci découle du premier cas de l'énoncé. □

Définition 4.5.21. — *Soit $(\mathscr{F},\mathcal{I})$ un diagramme de S-schémas. La structure semi-projective (resp. projective, injective)* $\mathbb{A}^1$-stable *sur $\mathbb{M}_T(\mathscr{F},\mathcal{I})$ est la structure projective stable sur la catégorie $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_T(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}), \mathfrak{M}))$ déduite de la structure semi-projective (resp. projective, injective) $\mathbb{A}^1$-locale $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-T})$ sur la catégorie $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F},\mathcal{I}), \mathfrak{M})$. Cette structure sera notée :*

$$(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\mathbb{A}^1-st})$$

(resp. $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$, $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\mathbb{A}^1-st})$). Les flèches de $\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}$ sont appelées les $\mathbb{A}^1$-équivalences stables. La catégorie homotopique de ces structures $\mathbb{A}^1$-stables est $\mathbb{SH}^T_{\mathfrak{M}}(\mathscr{F},\mathcal{I})$.

Remarque 4.5.22. — Il existe bien entendu trois autres structures naturelles sur $\mathbb{M}_T(\mathscr{F},\mathcal{I})$ obtenues à partir des trois structures $\mathbb{A}^1$-locales en prenant la structure injective sur les T-spectres.

Théorème 4.5.23. — *Soit $(f,\alpha) : (\mathscr{G},\mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F},\mathcal{I})$ un 1-morphisme de diagrammes de S-schémas.*

[6] Il n'y a pas de contradiction avec le fait que $T_{\mathscr{F},\mathcal{I}}$ est non projectivement cofibrant ! En effet, l'objet unité n'est pas nécessairement projectivement cofibrant.

1- On a, relativement aux structures semi-projectives $\mathbb{A}^1$-stables $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\mathbb{A}^1-st})$, *les deux adjonctions de Quillen suivantes :*

(i) $((f,\alpha)^*, (f,\alpha)_*) : \mathbb{M}_T(\mathscr{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathscr{G}, \mathcal{J})$,

(ii) $(f_\#, f^*) : \mathbb{M}_T(\mathscr{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J})$ *lorsque f est cartésien et lisse argument par argument.*

2- On a, relativement aux structures projectives $\mathbb{A}^1$-locales $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$, *les trois adjonctions de Quillen suivantes :*

(i) $(f^*, f_*) : \mathbb{M}_T(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathscr{G}, \mathcal{J})$,

(ii) $(\alpha_\#, \alpha^*) : \mathbb{M}_T(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathscr{F}, \mathcal{I})$.

(iii) $((f,\alpha)_\#, (f,\alpha)^*) : \mathbb{M}_T(\mathscr{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ *lorsque (f,α) est lisse argument par argument.*

3- Enfin, $(\alpha^*, \alpha_*) : \mathbb{M}_T(\mathscr{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J})$ *est une adjonction de Quillen relativement aux structures injectives $\mathbb{A}^1$-locales* $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\mathbb{A}^1})$.

Démonstration. — Ceci découle immédiatement du théorème 4.5.14 et du lemme 4.3.34. □

On a le résultat suivant :

Théorème 4.5.24. — *Les associations* $(\mathscr{F}, \mathcal{I}) \rightsquigarrow \mathbb{SH}^T_{\mathfrak{M}}(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ *et* $(f,\alpha) \rightsquigarrow \mathsf{L}(f,\alpha)^*$ *s'étendent naturellement en un 2-foncteur contravariant :*

$$\mathbb{SH}^T_{\mathfrak{M}} : \mathsf{DiaSch} \longrightarrow \mathfrak{MonoTR}$$

Démonstration. — Le fait que les catégories $\mathbb{SH}^T_{\mathfrak{M}}(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ sont triangulées et monoïdales symétriques découle des propositions 4.2.76, 4.2.82, 4.4.62, et 4.3.77, des théorèmes 4.3.76, et 4.1.49 et du lemme 4.1.58. De même, le fait que les foncteurs $\mathsf{L}(f,\alpha)^*$ soient triangulés et monoïdales découle du théorème 4.5.23, de la proposition 4.5.16 et du lemme 4.1.51. Il reste à construire le 2-foncteur en question. Il suffit alors de prendre la composée des 2-foncteurs :

$$\mathsf{DiaSch}/S \xrightarrow{\mathbb{M}_T(-,-)} \mathfrak{ModCat} \xrightarrow{\mathbf{Ho}(-),\mathsf{L}} \mathfrak{Cat}$$

où $\mathfrak{ModCat}$ désigne la 2-catégorie des catégories de modèles et des foncteurs de Quillen à gauche. □

Celon la terminologie de la définition 2.4.12, nous venons de construire un prédérivateur algébrique à valeurs dans $\mathfrak{MonoTR}$. Nous allons entreprendre la vérification des axiomes d'un dérivateur algébrique homotopique et stable. L'axiome **DerAlg 0** est trivial. On a également l'axiome **DerAlg 1** :

Lemme 4.5.25. — *Soit* $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ *un diagramme de S-schémas. Les foncteurs* $i^* : \mathbb{M}_T(\mathscr{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathscr{F}(i))$ *avec* $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$ *préservent et détectent les $\mathbb{A}^1$-équivalences stables.*

Démonstration. — Montrons d'abord que i^* préserve les $\mathbb{A}^1$-équivalences stables. On sait que i^* est un foncteur de Quillen à gauche relativement à la structures semi-projective $\mathbb{A}^1$-stable. Il préserve donc les $\mathbb{A}^1$-équivalences stables entre objets semi-projectivement cofibrants. Pour le cas général, on prend $u : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F} \in \mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}$. Il existe un diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}' \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & \mathbf{F}' \arrow[d] \\ \mathbf{E} \arrow[r, "u"] & \mathbf{F} \end{tikzcd}$$

tel que $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{F}'$ sont semi-projectivement cofibrants et tel que les flèches verticales sont des équivalences faibles de préfaisceaux niveau par niveau. L'assertion découle alors du fait que i^* préserve les équivalences faibles de préfaisceaux.

La familles des foncteurs i^* détecte les $\mathbb{A}^1$-équivalences stables. En effet, soit f une flèche de $\mathbb{M}_T(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ qui devient une $\mathbb{A}^1$-équivalence stable après application des foncteurs i^*. On peut supposer que f est une fibration relativement à la structure

$$(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$$

Comme $(i_\#, i^*)$ est une adjonction de Quillen relativement à cette structure, $i^*(f)$ est une fibration triviale pour tout $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$. C'est donc une équivalence faible de préfaisceaux niveau par niveau. En d'autres termes, pour tout $(U, i) \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/(\mathscr{F}, \mathcal{I}))$, et $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ev}_p(f)(U, i)$ est une équivalence faible de $\mathfrak{M}$. Le résultat est maintenant clair. □

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 4.5.25 :

Corollaire 4.5.26. — *Soit $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ un foncteur entre petites catégories. Soit $(\mathscr{F}, \mathcal{I})$ un digramme de S-schémas. Le foncteur $\alpha^* : \mathbb{M}_T(\mathscr{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathscr{F} \circ \alpha, \mathcal{J})$ préserve les $\mathbb{A}^1$-équivalences stables. Il se dérive donc trivialement.*

La proposition suivante n'est autre que les axiomes **DerAlg 2g** et **DerAlg 2d** :

Proposition 4.5.27. — *Soit $(f, \alpha) : (\mathscr{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathscr{F}, \mathcal{I})$ un 1-morphisme de diagrammes de S-schémas. Le foncteur $\mathsf{L}(f, \alpha)^* : \mathbb{SH}(\mathscr{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{SH}(\mathscr{G}, \mathcal{J})$ admet un adjoint à droite $\mathsf{R}(f, \alpha)_*$. De plus, lorsque $f(j)$ est lisse pour tout $j \in \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$, ce même foncteur admet un adjoint à gauche $\mathsf{L}(f, \alpha)_\#$.*

Démonstration. — C'est une conséquence directe du théorème 4.5.23. □

Montrons l'axiome **DerAlg 3** :

Lemme 4.5.28. — *Reprenons les notations du diagramme* (144). *La transformation $\alpha^* \mathsf{R} f_* \longrightarrow \mathsf{R}(f_{|\mathcal{J}})_* \alpha^*$ est inversible. Supposons de plus que f est cartésien et lisse argument par argument. Alors, $\mathsf{L}(f_{|\mathcal{J}})_\# \alpha^* \longrightarrow \alpha^* \mathsf{L} f_\#$ est inversible.*

Démonstration. — Par le théorème 4.5.23 les foncteurs f_* et $(f_{|\mathcal{J}})_*$ sont de Quillen à droite relativement à la structure de modèles $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$. Il en est de même des foncteurs α^*. Le résultat découle maintenant du lemme 4.5.7.

La seconde partie de l'énoncé découle aussi du lemme 4.5.7 étant donné que les foncteurs en question sont de Quillen à gauche relativement à la structure semi-projective $\mathbb{A}^1$-stable (voir le théorème 4.5.23). □

On démontre maintenant l'axiome **DerAlg 4'd** :

Lemme 4.5.29. — *On reprend les hypothèses et les notations des diagrammes* (142) *et* (143). *Les transformations naturelles* $(\mathrm{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)^*\mathsf{R}(f,\alpha)_* \longrightarrow \mathsf{R}(f/i)_*(\mathrm{id}, u_i)^*$ *et* $\mathsf{L}(\alpha/i)_\# u_i^* \longrightarrow i^*\mathsf{L}\alpha_\#$ *sont inversibles.*

Démonstration. — Les lemmes 4.5.5 et 4.5.6 affirment que ces transformations naturelles sont inversibles aux niveaux des préfaisceaux à valeurs dans $\mathfrak{M}$. On déduit qu'elles sont également inversibles au niveau des catégories de modèles $\mathbb{M}_T(-,-)$. Il s'agit donc de vérifier qu'elles induisent des isomorphismes sur les foncteurs dérivés.

On traite d'abord la transformation $(\mathrm{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)^*\mathsf{R}(f,\alpha)_* \longrightarrow \mathsf{R}(f/i)_*(\mathrm{id}, u_i)^*$. Il suffit de montrer que $(\mathrm{id}, u_i)^*$ préserve les objets fibrants relativement à la structure semi-projective $\mathbb{A}^1$-stable $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$. Cela revient à dire que $(\mathrm{id}, u_i)_\#$ préserve les cofibrations triviales de cette même structure. Pour cela, on aura besoin d'expliciter le foncteur $(\mathrm{id}, u_i)_\#$. Pour $K \in \mathsf{Ob}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathcal{G}/i, \mathcal{J}/i), \mathfrak{M}))$ et $(V, j) \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}))$, on a :

$$(\mathrm{id}, u_i)_\#(K)(V,j) = \underset{(V,j)\to(X,k);\alpha(k)\to i}{\mathsf{Colim}} K(X, \alpha(k) \to i) = \coprod_{\alpha(j)\to i} K(V, \alpha(j) \to i)$$

On a donc un isomorphisme canonique $j^*[(\mathrm{id}, u_i)_\#(K)] \simeq \coprod_{\alpha(j)\to i}[\alpha(j) \to i]^*K$. Il est maintenant clair que $(\mathrm{id}, u_i)_\#$ est un foncteur de Quillen à gauche relativement à la structure semi-projective $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr})$. Étant donné que le foncteur :

$$\mathsf{L}(\mathrm{id}, u_i)_\# : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathcal{G}/i, \mathcal{J}/i), \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}))$$

préserve les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles (puisque c'est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures projectives $\mathbb{A}^1$-locale), on déduit que $(\mathrm{id}, u_i)_\#$ est aussi un foncteur de Quillen à gauche relativement à $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{s-pr}, \mathbf{Fib}_{s-pr-\mathbb{A}^1})$. Pour conclure, il reste à appliquer le lemme 4.3.34.

Le cas de la transformation naturelle $(\alpha/i)_\# u_i^* \longrightarrow i^*\alpha_\#$ se traite de la même manière. On se ramène à montrer que u_i^* préserve les cofibrations de la structure $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$. On montrera plus généralement qu'il est de Quillen à gauche relativement à cette structure. Par le lemme 4.3.34, on peut raisonner sur les préfaisceaux à valeurs dans $\mathfrak{M}$. Comme u_i^* commute aux colimites, il suffit de montrer que u_i^* envoie une flèche de la forme $(U, j) \otimes u_{cst}$ sur une cofibration projective (resp. et

triviale) pour tout $(U,j) \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/F) \times \mathsf{Ob}(\mathcal{J})$ et u une cofibration (resp. triviale) de $\mathfrak{M}$. Soit V un F-schéma lisse et $i \to \alpha(k) \in \mathsf{Ob}(i\backslash\mathcal{J})$ on a :

$$\begin{aligned} u_i^*((U,j) \otimes u_{cst})(V, i \to \alpha(k)) &= \hom((V,k),(U,j)) \otimes u_{cst} \\ &= \coprod_{i \to \alpha(j)} \hom((V, i \to \alpha(k)), (U, i \to \alpha(j))) \otimes u_{cst} \end{aligned}$$

Ceci montre l'égalité $u_i^*((U,j) \otimes u_{cst}) = \coprod_{i \to \alpha(j)} (U, i \to \alpha(j)) \otimes u_{cst}$. Le résultat est démontré. □

On résume la discussion par :

Théorème 4.5.30. — *Les axiomes* ***DerAlg 0*** *à* ***DerAlg 4*** *sont vérifiés pour* $\mathbb{SH}$.

Démonstration. — Il reste à voir que $\mathbb{SH}^T_{\mathfrak{M}}(X,-) : \mathsf{Dia} \longrightarrow \mathfrak{TM}$ est un dérivateur triangulé. Plus précisément, il reste à établir les propriétés 5 et 6 de la définition 2.1.34. Ceci découle immédiatement de la construction de la structure triangulée sur la catégorie homotopique (voir le théorème 4.1.49) et du théorème 4.1.56. □

On a également les formules de projection :

Proposition 4.5.31

1- Soit $f : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}$ un morphisme cartésien et lisse de $\mathcal{I}$-diagrammes de S-schémas. Pour $K \in \mathsf{Ob}(\mathbb{M}_T(\mathscr{F},\mathcal{I}))$ et $M \in \mathsf{Ob}(\mathbb{M}_T(\mathscr{G},\mathcal{I}))$, le morphisme $\mathsf{L}f_\#(\mathsf{L}f^*(K) \overset{\mathsf{L}}{\otimes} M) \longrightarrow K \overset{\mathsf{L}}{\otimes} \mathsf{L}f_\# M$ est inversible.

2- Soit $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ un foncteur entre petites catégories et X un S-schéma. Pour $K \in \mathsf{Ob}(\mathbb{M}_T(X,\mathcal{I}))$ et $M \in \mathsf{Ob}(\mathbb{M}_T(X,\mathcal{J}))$, le morphisme $\mathsf{L}\alpha_\#(\alpha^*(K) \overset{\mathsf{L}}{\otimes} M) \longrightarrow K \overset{\mathsf{L}}{\otimes} \mathsf{L}\alpha_\# M$ est inversible.

Démonstration. — La première assertion découle de la proposition 4.5.17 et du fait que tous les foncteurs présents sont de Quillen à gauche relativement à la structure semi-projective $\mathbb{A}^1$-stable (utiliser que f est cartésien).

Pour la seconde partie, on utilise le lemme 4.5.29 pour se ramener au cas où $\mathcal{I} = *$. Dans ce cas, on montre que pour K projectivement cofibrant, le foncteur $\alpha^*(K) \otimes -$ est de Quillen à gauche relativement à structure projective $\mathbb{A}^1$-stable. Les détails sont laissés en exercice. □

4.5.3. L'axiome de localité. — Pour montrer que $\mathbb{SH}^T_{\mathfrak{M}}(-)$ est un dérivateur algébrique homotopique et stable (avec T bien choisi), il reste à vérifier l'axiome **DerAlg 5** qui affirme que $\mathbb{SH}(-,\mathbf{e})$ est un 2-foncteur homotopique stable. Cette section est consacrée à la preuve de l'axiome de localité. Nous suivrons la méthode de [**MV90**].

Pour un S-schéma X, on notera $\mathbf{SH}^T_{\mathfrak{M}}(X) = \mathbb{SH}^T_{\mathfrak{M}}(X,\mathbf{e})$. On aura besoin de quelques préliminaires concernant les images directes suivant les immersions fermées.

On introduit la topologie $t_\varnothing$ sur Sm/X pour laquelle $\mathrm{J}_{t_\varnothing}(U/X) = \{\mathrm{id}_{U/X} : (U/X) \to (U/X)\}$ lorsque U est non vide et $\mathrm{J}_{t_\varnothing}(\varnothing/X) = \{\mathrm{id}_{\varnothing/X} : (\varnothing/X) \to (\varnothing/X), \varnothing \to (\varnothing/X)\}$ où $\varnothing$ désigne le préfaisceau d'ensembles vides et $(\varnothing/X)$ le X-schéma vide. On vérifie immédiatement que $t_\varnothing$ est une topologie sur Sm/X. Un préfaisceau K sur Sm/X à valeurs dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un $t_\varnothing$-faisceau (*i.e.* un faisceau pour la topologie $t_\varnothing$) si et seulement si $K(\varnothing/X)$ est l'objet final de $\mathcal{C}$. Étant donné un préfaisceau K sur $\mathcal{C}$, le faisceau associé $\mathrm{a}_{t_\varnothing}(F)$ est donné par :

$$U \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/X) \quad \rightsquigarrow \quad (\mathrm{a}_{t_\varnothing} F)(U) = \begin{cases} *_{\mathcal{C}} & si \quad U \simeq \varnothing/X \\ F(U) & si \quad U \not\simeq \varnothing/X \end{cases}$$

(où $*_{\mathcal{C}}$ désigne l'objet final de $\mathcal{C}$). Lorsque $\mathcal{C}$ est pointée, l'inclusion $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathcal{C}) \subset \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathcal{C})$ admet un adjoint à droite :

$$\mathrm{b} : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathcal{C})$$

qui à un préfaisceau F associe le $t_\varnothing$-faisceau $\mathrm{b}(F)$ donné par : $(\mathrm{b}F)(U) = F(U) \times_{F(\varnothing/X)} *_{\mathcal{C}}$ pour $U \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/X)$.

Rappelons que $\mathfrak{M}$ est notre catégorie de coefficients. C'est une catégorie pointée puisqu'elle est supposée stable. Par le corollaire 4.4.42, on dispose sur $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ de deux structures de modèles $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$ et $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj})$. En appliquant le lemme 4.4.41 à l'adjonction $(\mathrm{a}_{t_\varnothing}, inc)$ et aux structures τ-locales de $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ on obtient également deux structures de modèles τ-locales sur $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$. On les notera $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-\tau})$ et $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\tau})$.

Proposition 4.5.32. — *Soit $i : Z \longrightarrow X$ une immersion fermée de S-schémas. Le foncteur :*

$$i_* : \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$$

est un foncteur de Quillen à gauche pour les structures injectives $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$ et $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{\tau-inj})$.

Démonstration. — Le foncteur $i_* : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ admet un adjoint à droite $i^!$ qui à un préfaisceau H sur Sm/X associe le préfaisceau $i^! H$ donné par :

$$i^! H : (V \to Z) \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/Z) \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname*{Lim}_{U \times_X Z \to V} H(U)$$

On en déduit que le foncteur $i_* : \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ admet un adjoint à droite donné par $\mathrm{b} \circ i^! \circ inc$. On le notera encore $i^!$.

Les cofibrations de la structure injective sur $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(-, \mathfrak{M})$ sont les $t_\varnothing$-faisceautisations des cofibrations injectives de préfaisceaux. C'est donc exactement les morphismes de $t_\varnothing$-faisceaux $H \longrightarrow K$ tel que $H(U) \longrightarrow K(U)$ est une cofibration pour tout X-schéma lisse U. De même, un morphisme de $t_\varnothing$-faisceaux $f : H \longrightarrow K$

est une équivalence faible si et seulement si $f(U)$ est une équivalence faible pour tout X-schéma U.

On déduit immédiatement que le foncteur $i_* : \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ préserve les cofibrations injectives et les équivalences faibles de la structure $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj})$. C'est donc bien un foncteur de Quillen à gauche.

Il reste à vérifier que i_* envoie les équivalences τ-locales sur des équivalences τ-locales. Soit $u : H \longrightarrow K$ une équivalence τ-locale de $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z, \mathfrak{M})$. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$. On a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} i_*\Pi_0(A[-n], H) & \longrightarrow & i_*\Pi_0(A[-n], K) \\ \| & & \| \\ \Pi_0(A[-n], i_*H) & \longrightarrow & \Pi_0(A[-n], i_*K) \end{array}$$

Il faut donc prouver que $\mathrm{a}_\tau i_*\Pi_0(A[-n], H) \longrightarrow \mathrm{a}_\tau i_*\Pi_0(A[-n], K)$ est inversible. Le résultat découle immédiatement de la commutation $\mathrm{a}_\tau \circ i_* \simeq i_* \circ \mathrm{a}_\tau$ pour les $t_\varnothing$-faisceaux d'ensembles (voir le lemme 4.5.33 ci-dessous). □

Lemme 4.5.33. — *Soit $i : Z \longrightarrow X$ une immersion fermée de S-schémas. La transformation naturelle $\mathrm{a}_\tau \circ i_* \longrightarrow i_* \circ \mathrm{a}_\tau$ est inversible lorsqu'elle est évaluée sur les $t_\varnothing$-faisceaux d'ensembles.*

Démonstration. — Soit F un préfaisceau d'ensembles sur Sm/Z et U un X-schéma lisse. On a :

$$\mathrm{L}(i_*F)(U) = \underset{(U_i \to U)_i \in \mathrm{Cov}_\tau(U)}{\mathsf{Colim}} \mathrm{Eq}\Big(\prod_i F(U_i \times_X Z) \rightrightarrows \prod_{i,j} F((U_i \times_U U_j) \times_X Z)\Big)$$

où la colimite est prise selon la catégorie directe $\mathrm{Cov}_\tau(U)$ des familles $(U_i \to U)_i$ de morphismes étales qui sont couvrantes pour la topologie τ.

Le foncteur évident $\mathrm{Cov}_\tau(U) \longrightarrow \mathrm{Cov}_\tau(U \times_X Z)$ qui à une famille $(U_i \to U)_i$ associe la famille $(U_i \times_X Z \to U \times_Z U)$ est cofinal dès que $U \times_X Z$ est non vide[7]. En effet, soit $(V_j \to U \times_X Z)_i$ une famille couvrante pour la topologie τ (l'ensemble indexant est donc non vide). Quitte à raffiner la famille en question, on peut supposer qu'il existe pour tout j un U-schéma étale U_j tel que $V_j = U_j \times_X Z$. La famille $(U_j \to U)_j \coprod \{(U - U \times_X Z) \to U\}$ est alors un τ-recouvrement de U dont la restriction à $U \times_X Z$ raffine notre recouvrement de départ (puisque $\varnothing = (U - U \times_X Z) \times_X Z \to Z$ se factorise par tous les V_j et qu'il y en a au moins un).

Il vient que lorsque $U \times_X Z$ est non vide, $\mathrm{L}(i_*F)(U)$ est isomorphe à :

$$\underset{(V_j \to U \times_X Z)_i \in \mathrm{Cov}(U \times_X Z)}{\mathsf{Colim}} \mathrm{Eq}\Big(\prod_i F(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(V_i \times_{U \times_X Z} V_j)\Big) = \mathrm{L}F(U \times_X Z)$$

[7] Lorsque U est non vide et que $U \times_X Z$ est vide, ce foncteur est bien entendu non cofinal !

D'autre part, pour F un $t_\varnothing$-faisceau, on évidement $\mathrm{L}(i_*F)(U) = *$ pour $U \times_X Z \simeq \varnothing/Z$. Ceci donne $\mathrm{L}(i_*F) \simeq i_*\mathrm{L}F$ et donc également un isomorphisme $\mathrm{a}_\tau(i_*F) \simeq i_*\mathrm{a}_\tau F$. On laisse aux lecteurs le soin de vérifier que cet isomorphisme coïncide avec l'isomorphisme canonique de l'énoncé. □

On a également :

Théorème 4.5.34. — *Soit $i : Z \longrightarrow X$ une immersion fermée de S-schémas. Le foncteur :*

$$i_* : \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$$

est un foncteur de Quillen à gauche pour les structures $\mathbb{A}^1$-locales injectives $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{\mathbb{A}^1-inj})$.

Démonstration. — Il suffit par la proposition 4.5.32 et la remarque 4.2.59 de montrer que $\mathsf{L}i_*$ envoie les flèches de la forme $\mathbb{A}^1_V \otimes A \longrightarrow V \otimes A$ (avec $A \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$ et V un Z-schéma lisse) sur des $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles. Par la preuve de la proposition 4.5.32, on sait que i_* se dérive trivialement. Il faut donc montrer que :

$$p : i_*(\mathbb{A}^1_V \otimes A) \longrightarrow i_*(V \otimes A)$$

est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible. La flèche p admet une section s (la section nulle). Il suffit de montrer que l'identité de $i_*(A \otimes \mathbb{A}^1_V)$ est $\mathbb{A}^1$-homotope à la flèche déduite de $s \circ p$. On obtient une telle homotopie en prenant la composée :

$$\begin{aligned} i_*\mathbb{A}^1_X \otimes (\mathbb{A}^1_V \otimes A) &\longrightarrow i_*(\mathbb{A}^1_Z) \otimes i_*(\mathbb{A}^1_V \otimes A) \\ &= i_*((\mathbb{A}^1_Z \times \mathbb{A}^1_Z \times_Z V) \otimes A) \xrightarrow{m} i_*((\mathbb{A}^1_Z \times_Z V) \otimes A) \end{aligned}$$

avec m la flèche induite par la multiplication du schéma en anneaux $\mathbb{A}^1$. □

Remarque 4.5.35. — La preuve de la proposition 4.5.32 et du théorème 4.5.34 montre que le foncteur $i_* : \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ préserve les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles. Ce dernier se dérive donc trivialement. On a en particulier des isomorphismes $\mathsf{L}i_* \simeq i_* \simeq \mathsf{R}i_*$.

Rappelons que le but de cette sous-section est d'établir l'axiome de localité. On commence d'abord par la version instable. Soit une paire d'immersions complémentaires :

$$U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} Z \tag{146}$$

avec i une immersion fermée et j une immersion ouverte. Soit H un objet de $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$. La composée :

$$j_\# j^* H \longrightarrow H \longrightarrow i_* i^* H \tag{147}$$

correspond par adjonction à une flèche $j^*H \longrightarrow j^*i_*i^*H$. Or, pour tout $t_\varnothing$-faisceau F sur Sm/Z on a $j^*i_*F(U' \to U) = (i_*F)(U' \to U \to X) = F(\varnothing) = *$. Le préfaisceau j^*i_*F est donc nul. Ceci montre que la composée (147) est nulle. On a donc un carré commutatif de $t_\varnothing$-faisceaux :

$$\begin{tikzcd} j_\# j^*H \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] \\ * \arrow[r] & i_*i^*H \end{tikzcd} \tag{148}$$

Le théorème suivant est du à Morel et Voevodsky [**MV90**] :

Théorème 4.5.36. — *Supposons que H est un objet projectivement cofibrant de $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$. Le carré commutatif* (148) *est homotopiquement cocartésien relativement aux structures de modèles $\mathbb{A}^1$-locales.*

Notons d'abord la réduction suivante :

Lemme 4.5.37. — *Il suffit de prouver le théorème 4.5.36 pour H de la forme $\mathrm{a}_{t_\varnothing}(X' \otimes A_{cst})$ avec A un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$ et X' un X-schéma lisse.*

Démonstration. — On utilise l'hypothèse que $\mathfrak{M}$ est stable *via* la discussion suivante. Supposons donnée une suite de cofibrations (voir la définition 4.1.45) :

$$H_1 \xrightarrow{h} H_2 \xrightarrow{k} \mathsf{Cone}(h) \longrightarrow \mathsf{Cof}(k)$$

avec H_1 un $t_\varnothing$-faisceau projectivement cofibrant et h et k des cofibrations projectives. On considère la structure de Reedy sur $\underline{\mathsf{HOM}}(\square, \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$ déduite de la structure injective $\mathbb{A}^1$-locale sur la catégorie des $t_\varnothing$-faisceaux et telle que les cofibrations sont détectées argument par argument relativement à $\square$. Étant donné que le foncteur i_* préserve les cofibrations injectives, on déduit une suite de cofibrations dans $\underline{\mathsf{HOM}}(\square, \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$ dont les sommets sont constitués des carrés (148) avec H remplacé respectivement par H_1, H_2, $\mathsf{Cone}(h)$ et $\mathsf{Cof}(k)$. Étant donné que la propriété d'être cocartésien vérifie la propriété de 2 sur 3 dans les triangles distingués, on voit que si la conclusion du théorème 4.5.36 est vraie pour H_1 et $\mathsf{cone}(h)$, elle l'est encore pour H_2.

Supposons le théorème 4.5.36 démontré pour les préfaisceaux de l'énoncé. Rappelons que les cofibrations projectives de $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ sont engendrées par la classe $\mathscr{C}$ des flèches :

$$\mathrm{a}_{t_\varnothing}(X' \otimes A_{cst}) \longrightarrow \mathrm{a}_{t_\varnothing}(X' \otimes B_{cst})$$

avec $A \longrightarrow B$ une cofibration de $\mathfrak{M}$ de but β-accessible (β étant un cardinal suffisamment grand) et X' un X-schéma lisse. Ainsi, tout objet projectivement cofibrant H est rétract de $\Phi_{\mathscr{C},\beta}(\varnothing \to H)$ (voir la proposition 4.2.26). Il suffit donc de démontrer

le théorème 4.5.36 pour $\Phi_{\mathscr{C},\beta}(\varnothing \to H)$. Rappelons que cet objet est construit comme une colimite d'une λ-suite :

$$(\varnothing \longrightarrow \Phi_1 \longrightarrow \Phi_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \Phi_\nu \longrightarrow \Phi_{\nu+1} \longrightarrow \dots)_{\nu\in\lambda}$$

Nous allons montrer par induction transfinie que la conclusion du théorème est vraie pour tous les Φ_ν.

Supposons le résultat vrai pour Φ_ν. L'objet $\Phi_{\nu+1}$ est le push-out d'un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd} \coprod_i \mathrm{a}_{t_\varnothing}(X_i' \otimes (A_i)_{cst}) \arrow[r] \arrow[d] & \Phi_\nu \\ \coprod_i \mathrm{a}_{t_\varnothing}(X_i' \otimes (B_i)_{cst}) & \end{tikzcd}$$

avec $u_i : A_i \longrightarrow B_i$ des cofibrations de $\mathfrak{M}$ et X_i' des X-schémas lisses. Il vient que le $\mathsf{Cone}(\Phi_\nu \to \Phi_{\nu+1})$ est équivalent à $\coprod_i \mathrm{a}_{t_\varnothing}(X_i' \otimes \mathsf{Cof}(u_i)_{cst})$. En particulier, il rend le carré (148) cocartésien. Ceci montre que $\Phi_{\nu+1}$ rend également le carré (148) cocartésien en vue de la discussion du début de la preuve.

Supposons que μ est un ordinal limite et que tous les Φ_ν rendent le carrée (148) cocartésien pour $\nu \in \mu$. On dispose alors d'un morphisme de μ-suites :

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] & \mathsf{Cof}(j_\# j^*\Phi_1 \to \Phi_1) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & \mathsf{Cof}(j_\# j^*\Phi_\nu \to \Phi_\nu) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Cof}(j_\# j^*\Phi_{\nu+1} \to \Phi_{\nu+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ \varnothing \arrow[r] & i_* i^*\Phi_1 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & i_* i^*\Phi_\nu \arrow[r] & i_* i^*\Phi_{\nu+1} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Le résultat découle maintenant du lemme 4.2.69 et du fait que les flèches horizontales sont toutes des cofibrations injectives. □

Nous aurons besoin de faire une courte digression pour établir un résultat technique. Le résultat en question est valable avec Sm/X remplacée par une petite catégorie $\mathcal{S}$ arbitraire et la catégorie de modèles $\mathfrak{M}$ uniquement supposée présentable par cofibrations. On adoptera donc ces hypothèses pour le lemme 4.5.38 et son corollaire 4.5.39.

Lemme 4.5.38. — *Soit F un préfaisceau d'ensembles sur une petite catégorie $\mathcal{S}$. On définit un objet $\mathrm{N}(F)$ de $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}))$ qui à $\underline{\mathbf{n}} \in \mathsf{Ob}(\mathbf{\Delta})$ associe :*

$$\coprod_{U=(U(0)\to\dots\to U(n)):\ \underline{\mathbf{n}} \longrightarrow \mathcal{S}/F} U(0)$$

et à une application croissante $r : \underline{\mathbf{m}} \longrightarrow \underline{\mathbf{n}}$ associe le coproduit des flèches :

$$U(0) \longrightarrow U(r(0)) \longrightarrow \coprod_{V:\underline{\mathbf{m}}\to\mathcal{S}/F} V(0)$$

où la seconde flèche est l'identité de la composante correspondante au foncteur composé : $\underline{\mathbf{m}} \to \underline{\mathbf{n}} \to \mathcal{S}/F$. On verra $\mathrm{N}(F)$ comme un préfaisceau d'ensembles sur $\mathbf{\Delta} \times \mathcal{S}$.

Notons $p : \mathbf{\Delta} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ *la projection sur le second facteur. Alors pour tout objet* A *cofibrant de* $\mathfrak{M}$. *le morphisme évident :*

$$\mathrm{L}p^*(\mathrm{N}(F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow F \otimes A_{cst}$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$.

Démonstration. — Nous allons utiliser le formalisme des dérivateurs (voir la sous-section 2.1.2). Pour cela, il sera plus naturel de noter $p_\#$ au lieu de p^* et p^* au lieu de p_*. Avec ces notations, on prouvera que :

$$\mathrm{L}p_\#(\mathrm{N}(F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow F \otimes A_{cst}$$

est un isomorphisme. On dispose d'un morphisme évident de préfaisceaux d'ensembles $\mathrm{N}(F) \otimes A_{cst} \longrightarrow p^*(F \otimes A_{cst})$ tel que pour $(\underline{\mathbf{n}}, T) \in \mathsf{Ob}(\mathbf{\Delta}) \times \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$, la flèche $(\mathrm{N}(F) \otimes A_{cst})(\underline{\mathbf{n}}, T) \longrightarrow (p^*(F \otimes A_{cst}))(\underline{\mathbf{n}}, T)$ est le coproduit des :

$$\hom_{\mathcal{S}}(T, U(0)) \otimes A \longrightarrow F(T) \otimes A$$

La flèche de l'énoncé est la composée :

$$\mathrm{L}p_\#(\mathrm{N}(F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow \mathrm{L}p_\# p^*(F \otimes A_{cst}) \xrightarrow{\sim} (F \otimes A_{cst})$$

La dernière flèche est inversible par la proposition 2.1.41.

Pour montrer le lemme, nous allons vérifier que la flèche $(\mathrm{N}(F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow p^*(F \otimes A)$ induit une équivalence d'homotopie (au sens de la définition 2.1.56) chaque fois que l'on évalue sur $T \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$. La flèche $(\mathrm{N}(F) \otimes A_{cst})(-, T) \longrightarrow p^*(F \otimes A_{cst})(-, T)$, qui vit dans $\mathbf{PreShv}(\mathbf{\Delta}, \mathfrak{M})$, est donnée au niveau $\underline{\mathbf{n}} \in \mathsf{Ob}(\mathbf{\Delta})$ par :

$$\coprod_{T \to U(0),\ U : \underline{\mathbf{n}} \to \mathcal{S}/F} A \longrightarrow \coprod_{T \to F} A$$

qui s'écrit encore de la manière plus suggestive suivante :

$$\coprod_{T \to U_0 \to U_1 \cdots \to U_n \to F} A \longrightarrow \coprod_{T \to F} A$$

On voit alors que la flèche $(\mathrm{N}(F) \otimes A_{cst})(T, -) \longrightarrow p^*(F \otimes A_{cst})(T, -)$ possède une rétraction :

$$\coprod_{T \to F} A \xrightarrow{\sim} \coprod_{T = T = \cdots = T \to F} A \subset \coprod_{T \to U(0),\ U : \underline{\mathbf{n}} \to \mathcal{S}/F} A$$

Pour conclure, il reste à montrer que l'identité de $(\mathrm{N}(F) \otimes A_{cst})(-, T)$ est homotope, au sens de la définition 2.1.56, à l'endomorphisme qui envoie identiquement le $(T \to U_0 \to \cdots \to U_n \to F)$-ième facteur A sur le $(T = T = \cdots = T \to F)$-ième facteur. Une

telle homotopie est donnée par un morphisme dans $\mathbf{PreShv}(\mathbf{\Delta}/\underline{\mathbf{1}}, \mathfrak{M})$ qui à $r : \underline{\mathbf{n}} \to \underline{\mathbf{1}}$ associe la composée :

$$\Big(\coprod_{T\to U_0\to\cdots\to U_n\to F} A\Big) \longrightarrow \Big(\coprod_{T\to U_0\to\cdots\to U_{i_r}\to F} A\Big) \longrightarrow$$
$$\Big(\coprod_{T\to U_0\to\cdots\to U_{i_r}=\cdots=U_{i_r}\to F} A\Big) \subset \Big(\coprod_{T\to U_0\to\cdots\to U_n\to F} A\Big)$$

avec $i_r \in \underline{\mathbf{n}} \cup \{-1\}$ le plus grand entier tel que $r(i_r) = 0$ (avec les conventions $r(-1) = 0$ et $U_{-1} = T$). □

On obtient facilement le corollaire suivant :

Corollaire 4.5.39. — *Soient $\mathcal{S}$ une petite catégorie et $G \longrightarrow F$ un morphisme de préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{S}$. Notons G_F le préfaisceau d'ensembles sur $\mathcal{S}/F$ qui à une flèche $s : U \to F \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}/F)$ associe le produit fibré $G(U) \times_{F(U)} *$ avec $* \longrightarrow F(U)$ l'application qui pointe la section s.*

Notons $p_F : \mathcal{S}/F \longrightarrow \mathcal{S}$ le foncteur évident et $p_F^* : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, -) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}/F, -)$ le foncteur composition à droite par p_F (c'est la convention des dérivateurs de Grothendieck). Pour tout objet cofibrant A de $\mathfrak{M}$, le morphisme évident : $\mathsf{L}(p_F)_\#(G_F \otimes A_{cst}) \longrightarrow G \otimes A_{cst}$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$.

Démonstration. — Considérons le préfaisceau d'ensembles $\mathrm{N}(G_F)$ sur $\mathbf{\Delta} \times \mathcal{S}/F$. Notons comme dans le lemme 4.5.38, p les projections sur le second facteur $\mathbf{\Delta} \times (-) \longrightarrow (-)$. On sait par le lemme 4.5.38 que le morphisme canonique $\mathsf{L}p_\#(\mathrm{N}(G_F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow G_F \otimes A_{cst}$ est inversible. Il suffira donc de montrer que la flèche :

$$\mathsf{L}(p_F)_\#\mathsf{L}p_\#(\mathrm{N}(G_F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow G \otimes A_{cst}$$

est inversible. On a clairement $p_\# \circ (p_F \times \mathrm{id}_{\mathbf{\Delta}})_\# \simeq (p_F)_\# \circ p_\#$. Il vient qu'il suffit de prouver que :

$$\mathsf{L}p_\#\mathsf{L}(p_F \times \mathrm{id}_{\mathbf{\Delta}})_\#(\mathrm{N}(G_F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow G \otimes A_{cst}$$

est inversible. En appliquant encore une fois le lemme 4.5.38, on se ramène à montrer que la flèche évidente :

$$\mathsf{L}(p_F \times \mathrm{id}_{\mathbf{\Delta}})_\#(\mathrm{N}(G_F) \otimes A_{cst}) \longrightarrow \mathrm{N}(G) \otimes A_{cst}$$

est inversible. Il suffit de voir que pour tout $\underline{\mathbf{n}} \in \mathsf{Ob}(\mathbf{\Delta})$, la flèche :

$$\mathsf{L}(p_F)_\#(\mathrm{N}(G_F)(\underline{\mathbf{n}}) \otimes A_{cst}) \longrightarrow \mathrm{N}(G)(\underline{\mathbf{n}}) \otimes A_{cst}$$

est inversible. Étant donné que le préfaisceau $\mathrm{N}(G_F)(\underline{\mathbf{n}})$ est un coproduit de préfaisceaux représentables, il reste à voir que $(p_F)_\#(\mathrm{N}(G_F)(\underline{\mathbf{n}})) \simeq \mathrm{N}(G)(\underline{\mathbf{n}})$. Ceci découle immédiatement de la définition de $\mathrm{N}(-)$ et de l'isomorphisme de catégories $(\mathcal{S}/F)/G_F \simeq (\mathcal{S}/G)$. □

On reprend les hypothèses du théorème 4.5.36. De la digression précédente, on utilisera uniquement le corollaire suivant :

Corollaire 4.5.40. — *Soit $G \longrightarrow F$ un morphisme de préfaisceaux d'ensembles sur Sm/X. Pour une section $s : Y \longrightarrow F$ avec Y un X-schéma lisse, on note $T_{Y,s}$ le préfaisceau d'ensembles sur Sm/Y défini par :*

$$T_{Y,s} = p_Y^* G \times_{p_Y^* F} Y$$

avec p_Y la projection structurale de Y sur X et la flèche $Y \longrightarrow p_Y^* F$ utilisée dans le produit fibrée est l'adjointe de $(p_Y)_\# Y \simeq Y \xrightarrow{s} F$.

Soit A un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$ et supposons que pour tout X-schéma lisse Y et toute section $s \in F(Y)$ le morphisme :

$$T_{Y,s} \otimes A_{cst} \longrightarrow Y \otimes A_{cst}$$

est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible de $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/Y, \mathfrak{M})$. Alors, $G \otimes A_{cst} \longrightarrow F \otimes A_{cst}$ est aussi une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible.

Démonstration. — La catégorie $(\mathsf{Sm}/X)/F$ est un site pour la topologie τ induite de celle de Sm/X. On dispose donc d'une structure de modèles projective τ-locale $(\mathbf{W}_\tau, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\tau})$ sur $\mathbf{PreShv}((\mathsf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M})$. La donnée pour $(Y/X) \to F \in \mathsf{Ob}((\mathsf{Sm}/X)/F)$ du petit site $(\mathsf{Et}/Y, \tau)$ est une P-structure sur $(\mathsf{Sm}/X)/F$. Le foncteur continu $p_F : (\mathsf{Sm}/X)/F \longrightarrow \mathsf{Sm}/X$ est compatible aux P-structures étales. On dispose par le théorème 4.4.60 d'une adjonction de Quillen :

$$((p_F)_\#, (p_F)^*) : \mathbf{PreShv}((\mathsf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}) \tag{149}$$

pour les structures projectives τ-locales. On peut localiser la structure τ-locale sur $\mathbf{PreShv}((\mathsf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M})$ suivant la classe $\mathscr{A}$ des flèches $((Y/X) \to F) \otimes A_{cst} \longrightarrow ((\mathbb{A}^1_Y/X) \to F) \otimes A_{cst}$ avec Y un X-schéma lisse et A un objet cofibrant de $\mathfrak{M}$. On obtient ainsi la structure projective $\mathbb{A}^1$-locale $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1})$. Il est clair que les foncteurs évidents

$$((Y/X) \to F)^* : \mathbf{PreShv}((\mathsf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/Y, \mathfrak{M}) \tag{150}$$

avec $(Y/X) \to F \in \mathsf{Ob}((\mathsf{Sm}/X)/F)$, préservent les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles. L'analogue de la proposition 4.5.11 reste vrai pour $\mathbf{PreShv}((\mathsf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M})$. Il est facile d'en déduire que la famille des foncteurs (150) détecte également les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles. Enfin, la formule $(p_F)_\#(((Y/X) \to F) \otimes A_{cst}) = (Y/X) \otimes A_{cst}$, montre que (149) est encore une adjonction de Quillen pour les structures projectives $\mathbb{A}^1$-locales.

Il est maintenant facile de déduire l'énoncé du corollaire 4.5.39. En effet, la flèche $G \otimes A_{cst} \longrightarrow F \otimes A_{cst}$ s'identifie au $\mathsf{L}(p_F)_\#$ de la flèche :

$$G_F \otimes A_{cst} \longrightarrow * \otimes A_{cst} \tag{151}$$

Il suffit donc de prouver que (151) est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible de $\mathbf{PreShv}((\mathsf{Sm}/X)/F, \mathfrak{M})$. Comme (150) détectent les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles, il suffit de considérer les restrictions de (151) à Sm/Y suivant les différentes sections $s : (Y/X) \to F$. Ces restrictions sont données par $T_{Y,s} \otimes A_{cst} \longrightarrow Y \otimes A_{cst}$. Le corollaire est prouvé. □

On peut maintenant attaquer la preuve du théorème 4.5.36. On se fixe donc un objet cofibrant A de $\mathfrak{M}$ et un X-schéma lisse X'. On forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & X' \arrow[d] & Z' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d] \\ U \arrow[r, "j"] & X & Z \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

On veut montrer que le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{a}_{t_\varnothing}(U' \otimes A_{cst}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{a}_{t_\varnothing}(X' \otimes A_{cst}) \arrow[d] \\ * \arrow[r] & i_*\mathrm{a}_{t_\varnothing}(Z' \otimes A_{cst}) \end{tikzcd} \tag{152}$$

est homotopiquement cocartésien (en effet, les foncteurs $j_\#$, j^* et i^* commutent aux foncteurs $\mathrm{a}_{t_\varnothing}$). Il serait plus aisé de travailler avec la version suivante :

Lemme 4.5.41. *Il existe un carré commutatif de préfaisceaux d'ensembles :*

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ U \arrow[r] & i_*Z' \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale inférieure est donnée par l'unique élément $\hom(U, i_*Z') = \hom(\varnothing, Z')$. *De plus, pour que le carré* (152) *soit homotopiquement cocartésien il suffit que le carré suivant :*

$$\begin{tikzcd} U' \otimes A_{cst} \arrow[r] \arrow[d] & X' \otimes A_{cst} \arrow[d] \\ U \otimes A_{cst} \arrow[r] & i_*Z' \otimes A_{cst} \end{tikzcd}$$

le soit (dans $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$*).*

Démonstration. — La commutation du carré de préfaisceaux d'ensembles découle du fait que $\hom(U', i_*Z') = *$ *i.e.* du fait qu'il y a une seule flèche de U' vers i_*Z'. Pour la dernière assertion, il suffit de remarquer que le push-out de :

$$\begin{array}{ccc} U \otimes A_{cst} & \longrightarrow & i_*Z' \otimes A_{cst} \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

s'identifie canoniquement à $i_*\mathrm{a}_{t_\varnothing}(i_*Z' \otimes A_{cst})$. □

Nous sommes ramenés à montrer que le morphisme de préfaisceaux :

$$[X' \coprod_{U'} U] \otimes A_{cst} \longrightarrow i_*Z' \otimes A_{cst} \tag{153}$$

est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible. Pour un X-schéma lisse W nous avons :

$$\begin{aligned} [X' \coprod_{U'} U](W) &= \hom(W, X') \coprod_{\hom(W,U')} \hom(W, U) \\ &= \begin{cases} \hom(W, X') & \text{si} \quad W \times_X Z \neq \varnothing \\ * & \text{si} \quad W \times_X Z = \varnothing \end{cases} \end{aligned}$$

On applique le corollaire 4.5.40 à (153). Il suffit alors de montrer pour une section $s : Y \longrightarrow i_*Z'$ qu'un certain morphisme de préfaisceaux :

$$T_{X',Y,s} \otimes A_{cst} \longrightarrow Y \otimes A_{cst}$$

est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible de $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/Y, \mathfrak{M})$. Un calcul facile montre que :

$$T_{X',Y,s}(P) = \begin{cases} \hom_X(P, X') \times_{\hom_Z(P \times_X Z, Z')} * & \text{si} \quad P \times_X Z \neq \varnothing \\ \\ * & \text{si} \quad P \times_X Z = \varnothing \end{cases}$$

où P est un Y-schéma lisse et le produit fibré est pris suivant l'application $* \to \hom_Z(P \times_X Z, Z')$ qui pointe la composée :

$$P \times_X Z \longrightarrow Y \times_X Z \xrightarrow{s} Z'$$

Remarquons d'autre part que le préfaisceau $T_{X',Y,s}$ coïncide avec

$$T_{X' \times_X Y, Y, (\mathrm{id}, s) : Y \times_X Z \to Y \times_X Z'}$$

On peut donc supposer que $Y = X$. Il nous reste à montrer la proposition :

Proposition 4.5.42. — *Soit X' un X-schéma lisse et soit $s : Z \longrightarrow X'$ une section partielle définie sur Z. On note $T_{X',s}$ le préfaisceau d'ensembles défini par :*

$$T_{X',s}(P) = \begin{cases} \hom_X(P, X') \times_{\hom(P \times_X Z, Z')} * & \text{si} \quad P \times_X Z \neq \varnothing \\ \\ * & \text{si} \quad P \times_X Z = \varnothing \end{cases}$$

Alors la flèche $T_{X',s} \otimes A_{cst} \longrightarrow X \otimes A_{cst}$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible.

Démonstration. — On procède en trois étapes.

Étape 1. — Soit $(u_i : X_i \longrightarrow X)_i$ une famille de morphismes étales qui est couvrante pour la topologie τ. On note Z_i, X_i' et s_i les pull-back de Z, X' et s suivant u_i. Le préfaisceau $u_i^*(T_{X',s})$ s'identifie canoniquement à T_{X_i',s_i}. Ainsi, par le lemme 4.5.43 ci-dessous, il suffit de prouver la proposition pour chaque X_i. Quitte à choisir un recouvrement suffisamment fin, on peut alors supposer que :

(i) X est affine,

(ii) $s : Z \longrightarrow X'$ admet un voisinage affine dans X',

(iii) Le faisceau normal $\mathscr{N}_s$ de l'immersion s est libre.

Nous prouverons la proposition sous les hypothèses ci-dessus.

Étape 2. — Soient $r : X'' \longrightarrow X'$ un morphisme étale et s et s' des sections définies sur Z tels que le triangle suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "s'"] \arrow[dr, "s"'] & X'' \arrow[d, "r"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

On dispose alors d'un morphisme évident de préfaisceaux : $T_{X'',s'} \longrightarrow T_{X',s}$. Montrons que ce morphisme induit un isomorphisme sur les faisceaux associées (pour la topologie τ). Il suffit de vérifier cela sur les points de la topologie Nisnevich. Soit $Y \longrightarrow X$ le localisé hensélien d'un point dans un X-schéma lisse. Si $Y \times_X Z$ est non vide, on définit une application inverse :

$$T_{X',s}(Y) \longrightarrow T_{X'',s'}(Y)$$

de la manière suivante. Soit $f : Y \longrightarrow X'$ un morphisme de X-schémas tel que le triangle :

$$\begin{tikzcd} Y \times_X Z \arrow[r, "f \times_X Z"] \arrow[d] & Z' \\ Z \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Le carré ci-dessous est aussi commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y \times_X Z \arrow[rr] \arrow[d] & & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & X'' \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

Ceci donne une section partielle $Y \times_X Z \longrightarrow Y \times_{X'} X''$ du morphisme étale $Y \times_{X'} X'' \longrightarrow Y$. Comme Y est supposé hensélien, cette section se prolonge uniquement à Y. On note $r_f : Y \longrightarrow Y \times_{X'} X''$ le morphisme ainsi obtenu.

On définit alors f' par la composée : $Y \xrightarrow{r_f} Y \times_{X'} X'' \longrightarrow X''$. On vérifie aisément que l'association $f \rightsquigarrow f'$ est bien un inverse à droite et à gauche de $T_{X'',s'}(Y) \longrightarrow T_{X',s}(Y)$.

Étape 3. — En utilisant les hypothèses (i), (ii) et (iii) de l'étape 1, on peut construire un morphisme étale $X'_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n_X$ avec X'_0 un voisinage affine de s dans X' et tel que la composée :

$$Z \longrightarrow X'_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n_X$$

est la section nulle. En utilisant l'étape 2, on est ramené à traiter le cas où $X' = \mathbb{A}^n_X$ et s la section nulle. On dispose d'une application :

$$T_{\mathbb{A}^n_X,0} \times \mathbb{A}^1_X \longrightarrow T_{\mathbb{A}^n_X,0}$$

qui à un couple $(f,t) \in T_{\mathbb{A}^n_X,0}(Y) \times \mathbb{A}^1_X(Y)$ associe la composée :

$$Y \longrightarrow \mathbb{A}^n_X \times \mathbb{A}^1_X \xrightarrow{(x_1,\ldots,x_n,t) \to (tx_1,\ldots,tx_n)} \mathbb{A}^n_X$$

Cette application fournit une homotopie entre l'identité de $T_{X',s}$ et l'application nulle. □

Le résultat suivant à été utilisé dans la première étape de la preuve ci-dessus :

Lemme 4.5.43. — *Soient X un S-schéma et $u : U \longrightarrow X$ morphisme lisse couvrant pour la topologie τ. Le foncteur*

$$u^* : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/U, \mathfrak{M})$$

préserve et détecte les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles.

Démonstration. — Rappelons que $u^* \simeq (c_u)_*$ avec c_u le foncteur de composition à droite par u. Le fait que $(c_u)_*$ préserve les équivalences τ-locales est clair. Pour montrer que $(c_u)_*$ détecte les équivalences τ-locales, il suffit de remarquer que $(c_u)_*$ commute au foncteur de faisceautisation et qu'un morphisme de faisceaux d'ensembles $a : H \longrightarrow K$ sur Sm/X est un isomorphisme si et seulement si $u^*(a)$ est un isomorphisme (car u est couvrante).

Soit $f : H \longrightarrow K$ une flèche de $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$. On suppose que $u^*(f)$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible. On peut supposer que H et K sont fibrants pour la structure $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1})$. Comme u^* est de Quillen à droite relativement à cette structure, on déduit que $u^*(f)$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible entre objets $\mathbb{A}^1$-fibrants. C'est donc une équivalence τ-locale. Ceci montre que f est aussi une équivalence τ-locale. □

Notons le corollaire suivant du théorème 4.5.34 :

Corollaire 4.5.44. — *Soient $i : Z \longrightarrow X$ une immersion fermée de S-schémas et j l'immersion ouverte complémentaire. Le couple de foncteurs $(\mathsf{L}i^*, j^*)$ est conservatif sur $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$. De plus, le morphisme de counité $\mathsf{L}i^*\mathsf{R}i_* \longrightarrow 1$ est inversible.*

Démonstration. — La première assertion découle du 2-triangle distingué :

$$\mathsf{L}j_\# j^* \longrightarrow 1 \longrightarrow \mathsf{R}i_*\mathsf{L}i^* \longrightarrow \tag{154}$$

déduit du carré homotopiquement cocartésien et du fait que $\mathsf{R}i_* = i_*$ sur les $t_\varnothing$-faisceaux (On utilise ici l'équivalence de catégories $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})) \simeq \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$). Pour montrer la seconde assertion, on applique le triangle (154) à i_* et on utilise que $j^*i_* = 0$ pour déduire que $i_* \xrightarrow{\eta} i_*\mathsf{L}i^*i_*$ est inversible. Il vient que $i_*\mathsf{L}i^*i_* \xrightarrow{\delta} i_*$ est aussi inversible. Pour terminer, il reste à montrer que le foncteur i_* détecte les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles sur les $t_\varnothing$-faisceaux. Soit donc $f : H \longrightarrow K$ une flèche de $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z, \mathfrak{M})$ qui devient une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible après application de i_*. Comme i_* préserve les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles, on peut supposer que H et K sont projectivement $\mathbb{A}^1$-fibrants. Il vient que $i_*(f)$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence stable entre objets $\mathbb{A}^1$-fibrants. C'est donc une équivalence de préfaisceaux. Le résultat découle maintenant du fait que tout Z-schéma lisse est localement pour la topologie de Nisnevich isomorphe au pull-back d'un X-schéma lisse par l'immersion i. □

Il reste à déduire l'analogue stable du théorème 4.5.36. Soit X un S-schéma. L'équivalence de Quillen à gauche $\mathrm{a}_{t_\varnothing} : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ (relativement aux structures $\mathbb{A}^1$-locales) induit une équivalence de Quillen à gauche :

$$\mathrm{a}_{t_\varnothing} : \mathbf{Spect}^\Sigma_{T_X}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}^\Sigma_{\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X)}(\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$$

Pour une immersion fermée $i : Z \longrightarrow X$, on dispose d'une transformation naturelle

$$T_X \otimes i_*(-) \longrightarrow i_*(T_Z \otimes -) \tag{155}$$

qui induit le prolongement

$$i_* : \mathbf{Spect}^\Sigma_{T_Z}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/Z, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}^\Sigma_{T_X}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$$

Le lecteur vérifie facilement que (155) induit une transformation naturelle :

$$\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X) \otimes i_*(-) \longrightarrow i_*(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z) \otimes -) \tag{156}$$

où le produit tensoriel est pris dans la catégorie des $t_\varnothing$-faisceaux. On obtient de plus un carré commutatif de catégories :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z)}(\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z,\mathfrak{M})) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, hook] & \mathbf{Spect}^{\Sigma}_{\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X)}(\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X,\mathfrak{M})) \arrow[d, hook] \\
\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T_Z}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/Z,\mathfrak{M})) \arrow[r, "i_*"] & \mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T_X}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X,\mathfrak{M}))
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les inclusions évidentes (qui sont donc des équivalences de Quillen à droite). On a le théorème suivant :

Théorème 4.5.45. — *Soit $i : Z \longrightarrow X$ une immersion fermée de S-schémas. Le foncteur :*

$$i_* : \mathbf{Spect}^{\Sigma}_{\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z)}(\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z,\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Sigma}_{\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X)}(\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X,\mathfrak{M})) \tag{157}$$

est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures injectives stables sur les spectres déduites des structures injectives $\mathbb{A}^1$-locales $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1}.\mathbf{Cof}_{inj}.\mathbf{Fib}_{inj-\mathbb{A}^1})$ sur les catégories de $t_\varnothing$-faisceaux.

Démonstration. — Le foncteur (157) admet un adjoint à droite (voir le lemme 4.5.46 ci-dessous). Le fait que (157) préserve les cofibrations injectives et les cofibrations injectives $\mathbb{A}^1$-triviales niveau par niveau découle du théorème 4.5.34. Il reste à voir que (157) envoie les flèches de la forme ω^p_K (voir la page 239) sur des $\mathbb{A}^1$-équivalences stables pour tout $K \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z,\mathfrak{M}))$ injectivement cofibrant et $p \in \mathbb{N}$. On dispose d'un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sus}^{p+1}_{\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X).\Sigma}(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X) \otimes i_*K) \arrow[r, "\omega^p_{i_*K}"] \arrow[d] & \mathrm{Sus}^{p}_{\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X).\Sigma}(i_*K) \arrow[d] \\
i_*\mathrm{Sus}^{p+1}_{\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z).\Sigma}(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z) \otimes K) \arrow[r, "i_*\omega^p_K"] & i_*\mathrm{Sus}^{p}_{\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z).\Sigma}(K)
\end{tikzcd}$$

Il suffira de montrer que les flèches verticales sont des $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles niveau par niveau. On se ramène ainsi à montrer que les flèches :

$$\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X^{\otimes r}) \otimes i_*K \longrightarrow i_*(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z^{\otimes r}) \otimes K) \tag{158}$$

sont des $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles. Notons j l'immersion ouverte complémentaire. Le couple de foncteurs $(\mathsf{L}i^*; j^*)$ est conservatif par le corollaire 4.5.44. Il suffit donc de prouver que :

$$j^*[\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X^{\otimes r}) \otimes i_*K] \longrightarrow j^*[i_*(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z^{\otimes r}) \otimes K)]$$

(159) et

$$\mathsf{L}i^*[\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X^{\otimes r}) \otimes i_*K] \longrightarrow \mathsf{L}i^*[i_*(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z^{\otimes r}) \otimes K)]$$

sont inversibles. La flèche de gauche est l'unique flèche entre objets nuls puisque $j^*i_* = 0$. Pour la seconde flèche, on considère le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{L}i^*[\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X^{\otimes r}) \otimes i_*K] \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathsf{L}i^*[i_*(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z^{\otimes r}) \otimes K)] \arrow[d] \\
\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z^{\otimes r}) \otimes \mathsf{L}i^* i_* K \arrow[r] & \mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z^{\otimes r}) \otimes K
\end{tikzcd}$$

Le résultat découle alors du fait que la counité de $(\mathsf{L}i^*, i_*)$ est inversible (toujours par le corollaire 4.5.44). □

Lemme 4.5.46. — *On garde les hypothèses du théorème 4.5.45. Le foncteur* (157) *admet un adjoint à droite.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{E}$ un $\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X)$-spectre symétrique à valeurs dans $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$. On définit une suite symétrique $(\mathbf{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/Z, \mathfrak{M})$ par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_n = \mathrm{Eq}\Big(\prod_{k\in\mathbb{N}} \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z)^{\otimes k}, i^!\mathbf{E}_{k+n}) \rightrightarrows \\
\prod_{l\in\mathbb{N}} \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z)^{\otimes l}, i^!\underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X), \mathbf{E}_{l+1+n}))\Big)
\end{aligned} \tag{160}$$

où Σ_n opère sur $\mathbf{F}_n$ par les restrictions suivant $1 \times \Sigma_n \subset \Sigma_m \times \Sigma_n \subset \Sigma_{m+n}$ de l'action de Σ_{m+n} sur $\mathbf{E}_{m+n}$. Les deux flèches de (160) sont données par l'adjoint du morphisme d'assemblage du $\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X)$-spectre $\mathbf{E}$ et par la composée :

$$\begin{aligned}
\underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z)^{\otimes k}, i^!(-)) &\simeq \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z)^{\otimes k-1}, \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z), i^!(-))) \\
&\longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z)^{\otimes k-1}, i^!\underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X), -))
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que le produit des flèches :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_n \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z)^{\otimes k}, i^!\mathbf{E}_{k+n}) \\
\simeq \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z), \underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z)^{\otimes k-1}, i^!\mathbf{E}_{k-1+1+n}))
\end{aligned}$$

se factorise par le sous-objet $\underline{\mathsf{Hom}}_g(\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z), \mathbf{F}_{n+1})$. On obtient ainsi un $\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_Z)$-spectre symétrique $\mathbf{F}$. Le lecteur vérifiera que le foncteur $\hom(i_*(-), \mathbf{E})$ est représenté par $\mathbf{F}$. □

On a enfin l'axiome de localité pour les catégories $\mathbf{SH}^T_{\mathfrak{M}}(-)$:

Corollaire 4.5.47. — *Soient $i : Z \longrightarrow X$ une immersion fermée de S-schémas et j l'immersion ouverte complémentaire. Le couple de foncteurs $(\mathsf{L}i^*, j^*)$ est conservatif sur $\mathbf{SH}^T_{\mathfrak{M}}(X)$. De plus, le morphisme de counité $\mathsf{L}i^*\mathsf{R}i_* \longrightarrow 1$ est inversible.*

Démonstration. — Montrons d'abord la première assertion. Si $\mathbf{E}$ est un $\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T_X)$-spectre projectivement cofibrant à valeurs dans $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$, le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} j_\# j^* \mathbf{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{E} \arrow[d] \\ * \arrow[r] & i_* i^* \mathbf{E} \end{tikzcd} \tag{161}$$

est homotopiquement cocartésien niveau par niveau. Comme i_* préserve les $\mathbb{A}^1$-équivalences stables, il se dérive trivialement. On déduit ainsi un 2-triangle distingué dans $\mathbf{SH}^T_{\mathfrak{M}}(X)$:

$$\mathsf{L}j_\# j^* \longrightarrow 1 \longrightarrow \mathsf{R}i_* \mathsf{L}i^* \longrightarrow \tag{162}$$

Ceci montre que le couple de foncteurs $(\mathsf{L}i^*, j^*)$ est conservatif. La seconde assertion découle de son analogue instable (et du fait que i_* se dérive trivialement pour les $t_\varnothing$-faisceaux). □

4.5.4. Fin de la vérification des axiomes. — Il nous reste à montrer le théorème de changement de base par un morphisme lisse, l'axiome d'homotopie et l'axiome de stabilité.

Proposition 4.5.48. — *Soit un carré cartésien de S-schémas :*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

avec f lisse. Le morphisme de changement de base $\mathsf{L}f'_\# \mathsf{L}g'^* \longrightarrow \mathsf{L}g^* \mathsf{L}f_\#$ est inversible.

Démonstration. — Étant donné que les quatre foncteurs $f_\#$, g^*, g'^* et $f'_\#$ sont de Quillen à gauche relativement à la structure projective $\mathbb{A}^1$-stable $(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1-st})$, il suffit de démontrer que la transformation naturelle $f'_\# g'^* \longrightarrow g^* f_\#$ est inversible au niveau des préfaisceaux à valeurs dans $\mathfrak{M}$. Étant donné que les quatre foncteurs en question commutent aux petites colimites, il suffit d'évaluer en $U' \otimes A_{cst}$ avec U' un X'-schéma lisse et $A \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. On obtient alors la flèche :

$$(U' \otimes_{X'} Y' \to Y' \to Y) \otimes A_{cst} \longrightarrow ((U' \to X' \to X) \times_X Y) \otimes A_{cst}$$

Le résultat découle alors de la transitivité du produit fibré de schémas. □

On démontre maintenant l'axiome d'homotopie :

Proposition 4.5.49. — *Soit X un S-schéma et notons $p : \mathbb{A}^1_X \longrightarrow X$ la projection de la droite affine sur X. Le morphisme d'unité $1 \longrightarrow \mathsf{R}p_* \mathsf{L}p^*$ est inversible.*

Démonstration. — C'est équivalent de demander que la counité $\mathsf{L}p_{\#}\mathsf{L}p^* \longrightarrow 1$ est inversible. Par la formule de projection, on déduit un isomorphisme $\mathsf{L}p_{\#}\mathsf{L}p^*(-) \simeq (\mathsf{L}p_{\#}\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1_X}) \otimes (-)$ avec $\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1_X}$ l'objet unité de la catégorie monoïdale $\mathbb{M}_T(\mathbb{A}^1_X)$. Par définition de $p_{\#}$, l'objet $p_{\#}\mathbb{1}_{\mathbb{A}^1_X}$ est le T_X-spectre de suspension $\mathrm{Sus}^0_{T_X,\Sigma}(\mathbb{A}^1_X \otimes \mathbb{1})$. Il nous reste à montrer que le morphisme :

$$\mathrm{Sus}^0_{T_X,\Sigma}(\mathbb{A}^1_X \otimes \mathbb{1}) \longrightarrow \mathrm{Sus}^0_{T_X,\Sigma}(\mathrm{id}_X \otimes \mathbb{1})$$

est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible niveau par niveau. Au niveau $n \in \mathbb{N}$, cette flèche est donnée par $\mathbb{A}^1 \otimes T_X^{\otimes n} \longrightarrow T_X^{\otimes n}$. Le résultat est maintenant clair. □

Pour l'axiome de stabilité, on aura besoin du lemme ci-dessous qui repose sur l'axiome de localité :

Lemme 4.5.50. — *Soit X un S-schéma. On forme le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}m_X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "q"'] & \mathbb{A}^1_X \arrow[d, "p"] & X \arrow[l, "s"'] \arrow[dl, equal] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Il existe un isomorphisme canonique : $\mathsf{L}p_{\#}\mathsf{R}s_* \simeq \mathrm{Sus}^0_{T_X,\Sigma}[\mathsf{Cof}(\mathbb{G}m_X \otimes \mathbb{1}_X \to \mathbb{A}^1_X \otimes \mathbb{1}_X)] \overset{\mathsf{L}}{\otimes} -$.

Démonstration. Soit $\mathbf{E}$ un $\mathrm{a}_{t_\varnothing}(T)$-spectre symétrique à valeurs dans $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$. On suppose que $\mathbf{E}$ est projectivement cofibrant. On dispose d'un morphisme évident :

$$\mathsf{Cof}(j_{\#}\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}_X} \to \mathbb{1}_{\mathbb{A}^1_X}) \otimes p^*\mathbf{E} \longrightarrow s_*\mathbf{E}$$

qui est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible niveau par niveau. Le lemme découle alors de la formule de projection appliquée à $\mathsf{L}p_{\#}$ et du fait que $\mathsf{Cof}(j_{\#}\mathbb{1}_{\mathbb{G}\mathrm{m}_X} \to \mathbb{1}_{\mathbb{A}^1_X}) \otimes -$ est de Quillen à gauche pour la structure injective. □

Corollaire 4.5.51. — *Supposons que l'objet T est équivalent à* $\mathsf{Cof}(\mathbb{G}m_S \otimes \mathbb{1} \to \mathbb{A}^1_S \otimes \mathbb{1})$. *Alors, pour tout S-schéma X, le foncteur* $\mathsf{L}p_{\#}\mathsf{R}s_*$ *est une équivalence de catégories,*

Démonstration. — En effet, par le lemme 4.5.50, le foncteur $\mathsf{L}p_{\#}\mathsf{R}s_*$ est isomorphe à $\mathrm{Sus}^0_{T_X,\Sigma}(T_X) \overset{\mathsf{L}}{\otimes} -$. Le résultat découle alors du théorème 4.3.38. □

Définition 4.5.52. — *Soit* $T \longrightarrow \mathsf{Cof}(\mathbb{G}m_S \otimes \mathbb{1} \to \mathbb{A}^1_S \otimes \mathbb{1})$ *une équivalence faible avec T un préfaisceau cofibrant à valeurs dans $\mathfrak{M}$. On pose alors* $\mathbb{SH}_{\mathfrak{M}}(-,-) = \mathbb{SH}^T_{\mathfrak{M}}(-,-)$ *et* $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-) = \mathbb{SH}^T_{\mathfrak{M}}(-)$. *C'est le dérivateur algébrique homotopique et stable associé à la catégorie de coefficients $\mathfrak{M}$.*

Remarque 4.5.53. — Le dérivateur algébrique homotopique et stable $\mathbb{SH}$ ne dépend de T qu'à une équivalence près. En effet, si T' est un autre remplacement cofibrant de $\mathsf{Cof}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}S} \otimes \mathbb{1} \to \mathbb{A}^1_S \otimes \mathbb{1})$ muni d'une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible $T \longrightarrow T'$, on a par le théorème 4.3.40, une équivalence de Quillen entre les deux catégories des spectres.

4.5.5. Quelques compléments. — Dans cette dernière section, nous supposerons que la catégorie de coefficients $\mathfrak{M}$ est la catégorie des S^1-spectres symétriques $\mathbf{Spect}^{\Sigma}_{S^1}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}(\mathcal{E}ns))$ ou la catégorie des complexes de R-modules $\mathbf{Compl}(\mathbf{Mod}(R))$ avec R un anneau commutatif. Dans ce cas, la catégorie triangulée $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ admet une t-structure naturelle $(\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\geq 0}, \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{<0})$. Son cœur est équivalent à la catégorie des groupes abéliens dans le cas $\mathfrak{M} = \mathbf{Spect}^{\Sigma}_{S^1}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}(\mathcal{E}ns))$. Il est équivalent à la catégories des R-modules dans le cas $\mathfrak{M} = \mathbf{Compl}(\mathbf{Mod}(R))$. Si A est un objet de $\mathfrak{M}$ et $r \in \mathbb{Z}$, on note $A_{\geq r}$ et $A_{<r}$ les tronqués bien définis à isomorphisme près dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. On pose aussi $h_r(A) = (A_{\leq r})_{\geq r}[-r]$.

Cette t-structure est engendrée, au sens de la définition 2.1.71, par l'objet unité $\mathbb{1}$ de $\mathfrak{M}$ (*i.e.* le spectre symétrique $\mathrm{Sus}^0_{S^1,\Sigma}(S^0)$ et le complexe concentré en degré zero $[\cdots \to 0 \to A \to 0 \to \ldots]$ respectivement). Elle est en particulier non-dégénérée (par la proposition 2.1.73). On déduit donc pour tout objet A de $\mathfrak{M}$ des isomorphismes :

$$A \simeq \mathsf{HoLim}_{n\in\mathbb{N}} A_{\leq -n} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{HoColim}_{n\in\mathbb{N}} A_{\geq n} \simeq A$$

On peut modifier la construction dans la preuve de la proposition 2.1.70 pour obtenir des troncations au niveau de la catégorie de modèles. On fixe un remplacement fibrant $A \longrightarrow A_{fib}$ fonctoriel en $A \in \mathsf{Ob}(\mathfrak{M})$. Soit $r \in \mathbb{N}$. On définit alors $\phi_r(A)$ par le push-out du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\underline{\Sigma}^n \mathbb{1} \to A_{fib}, n \geq r} \underline{\Sigma}^n \mathbb{1} & \longrightarrow & A_{fib} \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

où $\underline{\Sigma}^1(-)$ désigne un modèle du foncteur de suspension. On pose alors $\phi^k_r(A) = \phi_r(\phi^{k-1}_r(A))$ pour $k \geq 1$ et on note $A_{<r}$ la colimite de la $\mathbb{N}$-suite :

$$A \longrightarrow \phi^1_r(A) \longrightarrow \phi^2_r(A) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \phi^n_r(A) \longrightarrow \ldots$$

Par construction, $A_{<r}$ est aussi la colimite des $\phi^k_r(A)_{fib}$. C'est donc un objet fibrant. De plus, toute flèche de $\underline{\Sigma}^n \mathbb{1}$ vers $A_{<0}$ est nulle (avec $n \geq r$). Ceci montre que $A_{<r}$ est un objet strictement inférieur à r. On factorise d'une manière fonctorielle la flèche $A \longrightarrow A_{<r}$ par une cofibration triviale suivie d'une fibration $\tilde{A} \longrightarrow A_{<r}$.

On pose alors $A_{\geq r}$ la fibre $\tilde{A} \longrightarrow A_{<r}$. On a ainsi associé à tout objet A un diagramme fonctoriel en A :

$$A_{\geq r} \longrightarrow \tilde{A} \longrightarrow A_{<r} \tag{163}$$

qui relève le triangle distingué habituel[8].

Soit $\mathcal{S}$ est une petite catégorie. On considère la t-structure sur $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$ engendrée par $U \otimes \mathbb{1}$ pour $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$. Cette t-structure est encore non-dégénérée. Son cœur est équivalent à la catégorie abélienne des préfaisceaux de groupes abéliens et des R-modules respectivement. Si K est un préfaisceau à valeurs dans $\mathfrak{M}$, on pose $\tilde{K}(-) = \widetilde{K(-)}$, $K_{<r}(-) = K(-)_{<r}$ et $K_{\geq r}(-) = K(-)_{\geq r}$ (avec $r \in \mathbb{N}$). Pour simplifier, nous supposerons que nos sites de Grothendieck admettent suffisamment de points. Notons le lemme suivant :

Lemme 4.5.54. — *Soient un site $(\mathcal{S}, top)$ et $u : K \longrightarrow H$ un morphisme de préfaisceaux. Alors, u est une équivalence top-locale si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{Z}$, le morphisme de préfaisceaux $h_r(K) \longrightarrow h_r(H)$ à valeurs dans la catégorie abélienne $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\geq 0} \cap \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\leq 0}$ induit un isomorphisme sur les faisceaux associés.*

Démonstration. — Soit $x : \mathcal{E}ns \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$ un point du site $(\mathcal{S}, top)$. Pour tout préfaisceau K à valeurs dans $\mathfrak{M}$, on a un isomorphisme canonique $x^* h_r(K) \simeq h_r(x^*(K))$. Il suffit donc de démontrer le lemme pour le site ponctuel. Le résultat découle alors du fait que la t-structure est non dégénérée. □

Lemme 4.5.55. — *Soient un site $(\mathcal{S}, top)$ et un préfaisceau K sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $\mathfrak{M}$. Soit $K \longrightarrow H$ une équivalence top-locale avec H un préfaisceau fibrant pour la structure top-locale $(\mathbf{W}_{top}, \mathbf{Cof}_{proj}, \mathbf{Fib}_{proj-top})$. Si le préfaisceau K est strictement négatif, il en est de même de H.*

Démonstration. — La conclusion du lemme ne dépend pas du choix du remplacement *top*-fibrant de K. Il suffit donc d'établir l'énoncé pour un H particulier.

On note $(-)_{top-f}$ le remplaçant *top*-fibrant fonctoriel. On pose $\psi(-) = ((-)_{top-f})_{<0}$, $\psi^{\nu+1}(-) = \psi(\psi^{\nu}(-))$ et $\psi^{\nu}(-) = \mathsf{Colim}_{\mu \in \nu} \psi^{\mu}$ lorsque l'ordinal ν est limite. Si λ est l'ordinal successeur de α (avec $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ α-accessible pour sa structure *top*-locale), le préfaisceau $H = \psi^{\lambda}(K)$ est *top*-fibrant. Il est également strictement négatif. Enfin, $K \longrightarrow H$ est une *top*-équivalence faible lorsque K est strictement négatif (utiliser le lemme 4.5.54). □

[8] Bien entendu, des constructions beaucoup plus jolies existent, notamment pour la catégorie des complexes.

Corollaire 4.5.56. — *Soient un site (S, top) et un préfaisceau K sur S à valeurs dans $\mathfrak{M}$. Le morphisme de groupes abéliens :*

$$\hom_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, K_{\geq 0}) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, K)$$

est inversible pour tout $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$.

Démonstration. — Le triangle distingué $K_{\geq 0} \longrightarrow K \longrightarrow K_{<0} \longrightarrow$ induit une suite exacte longue sur les groupes d'homomorphismes. Il suffit donc de montrer que les deux groupes suivant :

$$\hom_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, K_{<0}) \quad \text{et} \quad \hom_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}, \Omega^1 K_{<0})$$

sont nuls. Par le lemme 4.5.55, les remplacements *top*-fibrants de $K_{<0}$ et $\Omega^1 K_{<0}$ sont des préfaisceaux strictement négatifs. D'où le résultat. □

Définition 4.5.57. — *Soit $(\mathcal{S}, top)$ un site de Grothendieck. On dit que $\mathcal{S}$ est* de dimension cohomologique finie *s'il existe un entier N tel que pour tout $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$ le foncteur $\mathrm{H}^i_{top}(U, -) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{A}b$ est identiquement nul pour $i > N$. Le plus petit entier N vérifiant cette condition est appelé la* dimension cohomologique *de $\mathcal{S}$.*

Proposition 4.5.58. — *Soit $(\mathcal{S}, top)$ un site de Grothendieck de dimension cohomologique finie N. Soient K un préfaisceau sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $\mathfrak{M}$ et $K \longrightarrow H$ une équivalence top-locale avec H un préfaisceau top-fibrant. Supposons que le préfaisceau K est positif. Alors, le morphisme $H \longrightarrow H_{\geq -N}$ est une équivalence faible de préfaisceaux.*

Démonstration. — On dispose d'un système projectif dans $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ (appelé la tour de Postnikoff) :

$$\ldots \longrightarrow K_{\leq r+1} \longrightarrow K_{\leq r} \longrightarrow \ldots \longrightarrow K_{\leq 1} \longrightarrow K_{\leq 0} \tag{164}$$

(avec $K_{\leq r} = K_{<r+1}$). On choisit un remplacement *top*-fibrant de (164) dans $\mathbf{PreShv}(\mathbb{N} \times \mathcal{S}, \mathfrak{M})$ relativement à la structure injective $(\mathbf{W}_{top}, \mathbf{Cof}_{inj}, \mathbf{Fib}_{inj-top})$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & K_{\leq r+1} \arrow[r] \arrow[d] & K_{\leq r} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & K_{\leq 1} \arrow[r] \arrow[d] & K_{\leq 0} \arrow[d] \\
\ldots \arrow[r] & H_{r+1} \arrow[r] & H_r \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & H_1 \arrow[r] & H_0
\end{tikzcd}$$

En particulier, les flèches verticales sont des équivalences *top*-locales, les H_n des préfaisceaux *top*-fibrants et les flèches $H_{r+1} \longrightarrow H_r$ sont des *top*-fibrations.

Supposons que l'on sache montrer la proposition pour les préfaisceaux bornés, en particulier pour les $K_{\leq r}$, et expliquons comment conclure. Le préfaisceau $H = \mathsf{Lim}_{r \in \mathbb{N}} H_r$ est *top*-fibrant. Il reste à montrer que $H \longrightarrow H_{\leq -N}$ est une équivalence

faible et que $K \longrightarrow H$ est une équivalence *top*-locale. Pour cela, nous allons calculer les préfaisceaux de cohomologies $\Pi_0(A, H)$ avec $A = \Sigma^p \mathbb{1}$ ou $A = \Omega^q \mathbb{1}$ (p, $q \in \mathbb{N}$). On dispose d'une suite exacte courte (dite de Milnor) :

$$\mathsf{Lim}^1 \Pi_0(A, H_r) \longrightarrow \Pi_0(A, H) \longrightarrow \mathsf{Lim}\Pi_0(A, H_r)$$

Nous allons voir que pour r suffisamment grand, le morphisme $\Pi_0(A, H_{r+1}) \longrightarrow \Pi_0(A, H_r)$ est inversible. Ceci montrera que $\mathsf{Lim}^1 \Pi_0(A, H_r) = 0$. On aura donc :

- $\Pi_0(A, H) = \Pi_0(A, H_r) = 0$ pour $A = \Omega^r \mathbb{1}$ et $r > N$,
- $\Pi_0^{top}(A, H) \simeq \Pi_0^{top}(A, H_r) \simeq \Pi_0^{top}(A, K)$.

et la proposition sera montrée. Notons F_r la fibre de $H_r \longrightarrow H_{r-1}$ (qui est donc un objet fibrant) et $E_r = (K_{\leq r})_{\geq r}$. On a un morphisme de triangles distingués dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$:

$$\begin{tikzcd} E_r \arrow[r] \arrow[d] & K_{\leq r} \arrow[r] \arrow[d] & K_{\leq r-1} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\ F_r \arrow[r] & H_r \arrow[r] & H_{r-1} \arrow[r] & {} \end{tikzcd} \tag{165}$$

Ceci montre que F_r est un remplacement *top*-fibrant du préfaisceau E_r concentré en degré r. On sait donc que $F_r \longrightarrow (F_r)_{\geq r-N}$ est inversible. En particulier on a $\Pi_0(\Sigma^p \mathbb{1}, F_r) = 0$ pour $r \geq N + p + 1$ et $\Pi_0(\Omega^q \mathbb{1}, F_r) = 0$ pour $r \geq N - q + 1$. Le résultat découle maintenant de la suite exacte longue déduite du triangle $F_r \longrightarrow H_r \longrightarrow H_{r-1} \longrightarrow$.

Il reste à montrer la proposition pour K borné *i.e.* $K = K_{\leq r}$. On raisonne par récurrence sur r. Lorsque $r = 0$, le résultat découle immédiatement du lemme 4.5.59. Pour passer du cas $r-1$ au cas r, il suffit d'utiliser le triangle distingué $F_r \longrightarrow H_r \longrightarrow H_{r-1} \longrightarrow$ et d'appliquer le cas $r = 0$ à $E_r \longrightarrow F_r$. □

Si K est un préfaisceau à valeurs dans le cœur de $\mathfrak{M}$, on notera K_a le préfaisceau de groupes abéliens égal à la composée :

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\leq 0} \cap \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})_{\geq 0} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

Lemme 4.5.59. — *Soit K un préfaisceau à valeurs dans le coeur de $\mathfrak{M}$ et soit $K \longrightarrow H$ un remplacement top-fibrant. Alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, $h_r(H)_a$ est canoniquement isomorphe au préfaisceau $\mathrm{H}_{top}^{-r}(-, K_a)$.*

Démonstration. — On traite uniquement le cas où $\mathfrak{M}$ est la catégorie $\mathbf{Spect}_{S^1}^{\Sigma}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns)$. Étant donné l'équivalence de Quillen

$$\mathbf{Spect}_{S^1}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{S^1}^{\Sigma}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns)$$

on peut travailler avec les spectres non-symétriques. On dispose alors d'une adjonction de Quillen :

$$(\mathbf{N}, \mathbf{E}) : \ \mathbf{Spect}_{S^1}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns) \longrightarrow \mathbf{Compl}(\mathcal{A}b)$$

avec $\mathbf{N}$ le foncteur qui à un S^1-spectre $\mathbf{A}$ associe le complexe $\mathsf{Colim}_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{N}(\mathbb{Z}[\mathbf{A}_n])[-n]$ où $\mathrm{N}(-)$ est le complexe normalisé associé à un objet simplicial en groupes abéliens. Le foncteur $\mathbf{E}$ envoie un complexe de groupes abéliens sur son spectre d'Eilenberg-McLane. Les foncteurs $\mathbf{N}$ et $\mathbf{E}$ préservent les équivalences faibles. Le foncteur RE est t-exact et induit une équivalence de catégories sur les cœurs.

L'adjonction $(\mathbf{N},\mathbf{E})$ induit une adjonction de Quillen :

$$(\mathbf{N},\mathbf{E}) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathbf{Spect}_{S^1}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns)) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathbf{Compl}(\mathcal{A}b))$$

qui passe à la localisation suivant les équivalences *top*-locales du moins lorsque $(\mathcal{S},top)$ admet suffisamment de points. En effet, les foncteurs $\mathbf{N}$ et $\mathbf{E}$ préservent les *top*-équivalences puisqu'ils commutent au foncteur fibre associé à un point $\mathcal{E}ns \longrightarrow \mathbf{Shv}_{top}(\mathcal{S})$.

Il est facile maintenant de déduire le lemme. On peut supposer que notre préfaisceau K est de la forme $\mathbf{E}(A)$ avec A un préfaisceau de groupes abéliens sur $\mathcal{S}$. Soit $A \longrightarrow I$ une équivalence *top*-locale de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathbf{Compl}(\mathcal{A}b))$ avec I un complexe *top*-fibrant. On déduit alors une équivalence *top*-locale $K = \mathbf{E}(A) \longrightarrow \mathbf{E}(I)$ et le préfaisceau $\mathbf{E}(I)$ est *top*-fibrant. Le résultat découle maintenant du fait que $\mathbf{E}$ est exact. □

Corollaire 4.5.60. — *Soit un site $(\mathcal{S},\mathfrak{M})$ de dimension cohomologique finie N. Soit un préfaisceau K sur S à valeurs dans $\mathfrak{M}$. Le morphisme de groupes abéliens :*

$$\hom_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U\otimes\mathbb{1},K) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U\otimes\mathbb{1},K_{\leq N})$$

est inversible pour tout $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$.

Démonstration. — La suite exacte longue associée à $K_{\geq N+1} \longrightarrow K \longrightarrow K_{\leq N} \longrightarrow$ montre qu'il suffit de prouver que les groupes :

$$\hom_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U\otimes\mathbb{1},K_{\geq N+1}) \quad \text{et} \quad \hom_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U\otimes\mathbb{1},\Sigma^1K_{\geq N+1})$$

Ceci découle immédiatement de la proposition 4.5.58. □

Corollaire 4.5.61. — *Soit un site $(\mathcal{S},\mathfrak{M})$ quasi-compact et de dimension cohomologique finie. Pout tout $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S})$, le foncteur :*

$$\hom_{\mathbf{Ho}_{top}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U\otimes\mathbb{1},-) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

commute aux colimites filtrantes.

Démonstration. — Soient $\mathcal{I}$ une petite catégorie filtrante et $K(-) : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M})$ un foncteur. Les corollaires 4.5.56 et 4.5.60 montrent que l'on peut remplacer $K(-)$ par $(K(-)_{\geq 0})_{\leq N}$. On peut donc supposer que $K(-)$ est positif et borné. En utilisant la tour de Postnikoff (voir la preuve de la proposition 4.5.58) on se ramène par récurrence au cas où les $K(-)$ sont concentrés en un seul degré

$0 \leq r \leq N$. Modulo le lemme 4.5.59, le résultat découle de la commutation de $\mathrm{H}^r_{top}(U,-) : \mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{A}b$ aux colimites filtrantes (voir [**AGV73**]). □

Proposition 4.5.62. — *Soit $(\mathcal{S}, top)$ un site muni d'une P-structure : $U \in \mathsf{Ob}(\mathcal{S}) \rightsquigarrow (\mathcal{E}_U, top_U)$. On suppose que les sites $(\mathcal{E}_U, top_U)$ sont quasi-compacts et de dimension cohomologique finie. Alors, une colimite filtrante de préfaisceaux projectivement top-fibrants et encore un préfaisceau projectivement top-fibrant.*

Démonstration. — Soient $\mathcal{J}$ une petite catégorie filtrante et $K(-) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M})$ un foncteur à valeurs dans les préfaisceaux projectivement *top*-fibrants. Le préfaisceau $\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} K(-)$ est encore projectivement fibrant. Il reste à montrer qu'il est *top*-local. Soit $\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} K \longrightarrow H$ un remplacement *top*-fibrant. On montrera que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme :

$$\begin{aligned} &\hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], \mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} K(-)) \\ &\qquad\qquad \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S},\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], H) \end{aligned} \tag{166}$$

est inversible. Notons $e_U : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}_U$ le pseudo-morphisme de sites évident. L'application (166) s'identifie à :

$$\begin{aligned} &\hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U,\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], \mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} (e_U)_* K(-)) \\ &\qquad\qquad \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U,\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], (e_U)_* H) \end{aligned} \tag{167}$$

Le foncteur $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U,\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], -)$ commute clairement aux colimites filtrantes. L'application (167) s'écrit :

$$\begin{aligned} &\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U,\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], (e_U)_* K(-)) \\ &\qquad\qquad \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U,\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], (e_U)_* H) \end{aligned} \tag{168}$$

Par le théorème 4.4.50, le foncteur $(e_U)_*$ préserve les objets *top*-fibrants. En particulier, $(e_U)_* K(-)$ et $(e_U)_* H$ sont top_U-fibrants. On déduit que (168) est isomorphe à :

$$\begin{aligned} &\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}} \hom_{\mathbf{Ho}_{top_U}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U,\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], (e_U)_* K(-)) \\ &\qquad\qquad \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}_{top_U}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{E}_U,\mathfrak{M}))}(U \otimes \mathbb{1}[n], (e_U)_* H) \end{aligned} \tag{169}$$

Le résultat découle maintenant du corollaire 4.5.61. □

Revenons aux cas des schémas. Nous travaillerons uniquement avec la topologie de Nisnevich, bien que les résultats ci-dessous soient aussi vrais pour $\tau =$ ét lorsque les schémas considérés sont de dimension cohomologique étale fini (*e.g.* des schémas de type fini sur un corps algébriquement clos). Pour un schéma X noethérien, la dimension cohomologie de $(\mathsf{Et}/X, \mathrm{Nis})$ est majorée par la dimension de Krull (voir [**TT90**]).

Si cette dimension est finie, la proposition 4.5.62 s'applique. On a également :

Proposition 4.5.63. — *Soit X un S-schéma noethérien et de dimension de Krull finie. Une colimite filtrante de préfaisceaux projectivement $\mathbb{A}^1$-fibrants de* $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ *est encore un objet $\mathbb{A}^1$-fibrant.*

Démonstration. — Comme X est noethérien et de dimension de Krull fini, il en est de même de tout X-schéma de type fini.

Soient $\mathcal{I}$ une petite catégorie filtrante et $K(-) : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ un foncteur à valeurs dans les préfaisceaux projectivement $\mathbb{A}^1$-fibrants. La colimite $\mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} K(-)$ est Nis-fibrante par la proposition 4.5.62. Pour vérifier qu'elle est $\mathbb{A}^1$-locale, il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{A}^1_X, \mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} K(-)) \longrightarrow \mathsf{Colim}_{\mathcal{I}} K(-)$ est une équivalence faible de préfaisceaux. Le résultat découle alors de la commutation de $\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{A}^1_X, -)$ aux colimites et du fait que les colimites filtrantes préservent les équivalences faibles de $\mathfrak{M}$. □

Corollaire 4.5.64. — *Soit X un S-schéma noethérien et de dimension de Krull finie. Pour U un X-schéma lisse, le foncteur*

$$\underline{\mathsf{Hom}}(U \otimes \mathbb{1}, -) : \mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$$

commute aux compositions transfinies (au sens de l'hypothèse 4.3.56).

On en déduit (sous les hypothèses du corollaire 4.5.64) que $\underline{\mathsf{Hom}}(T_X, -)$ commute aux compositions transfinies pour T comme dans la définition 4.5.52. Le lemme ci-dessous et le théorème 4.3.79 montrent donc que la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$ est équivalente à la catégorie homotopique stable des T_X-spectres non-symétriques.

Lemme 4.5.65. — *La permutation* (123) *opère trivialement sur* $\mathsf{Cof}(\mathbb{G}m^1_S \otimes \mathbb{1} \to \mathbb{A}^1_S \otimes \mathbb{1})^{\otimes 3}$ *dans la catégorie homotopique* $\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/S, \mathfrak{M}))$.

Démonstration. — Le groupe $\mathbb{G}\ell_S(3)$ des matrices 3×3 inversibles opère sur l'objet $Q = \mathsf{Cof}(\mathbb{G}m^3_S \otimes \mathbb{1} \to \mathbb{A}^3_S \otimes \mathbb{1})$, *i.e.* on a une flèche :

$$\mathbb{G}\ell_S(3) \otimes Q \longrightarrow Q$$

De plus, l'action de la permutation (123) coïncide avec l'action par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a la relation :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois matrices dans le membre de droite sont unipotentes *i.e.* de la forme $\mathrm{id}_3 + N$ avec N nilpotente. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{id}_3 + N$ opère trivialement. Pour cela, on considère le morphisme de S-schéma : $\mathbb{A}^1_S \longrightarrow \mathbb{G}\ell(3)$ donné par $t \rightsquigarrow \mathrm{id}_3 + t.N$. La composée :

$$\mathbb{A}^1_S \otimes Q \longrightarrow \mathbb{G}\ell_S(3) \otimes Q \longrightarrow Q$$

fournit l'homotopie recherchée. □

Corollaire 4.5.66. — *Pour tout S-schéma X, la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$ est canoniquement équivalente à la catégorie homotopique de $\mathbf{Spect}_{T_X}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$ munie de la structure stable déduite de la structure $\mathbb{A}^1$-locale sur $\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$.*

On a aussi le théorème suivant :

Théorème 4.5.67. — *Soit X un S-schéma noethérien de dimension de Krull finie. La catégorie triangulée $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$ est compactement engendrée par les objets de la forme $\mathrm{Sus}^p_{T_X,\Sigma}(U \otimes \mathbb{1})$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $U \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Sm}/X)$.*

Démonstration. — Les foncteurs $\hom_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(\mathrm{Sus}^p_{T_X,\Sigma}(U \otimes \mathbb{1})[n], -)$ avec $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $U \in \mathsf{Sm}/X$ forment une famille conservative. En effet, soit $u : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ un morphisme de T_X-spectres symétriques dont les images par ces foncteurs sont inversibles. On peut supposer que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont stablement $\mathbb{A}^1$-fibrants. Dans ce cas, l'application : $\hom_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(\mathrm{Sus}^p_{T_X,\Sigma}(U \otimes \mathbb{1})[n], u)$ s'identifie à :

$$\hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(\mathbb{1}[n], \mathbf{E}_p(U)) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(\mathbb{1}[n], \mathbf{F}_p(U))$$

Ceci montre que u est une équivalence faible de préfaisceaux niveau par niveau.

Il reste à montrer que les objets $\mathrm{Sus}^p_{T_X,\Sigma}(U \otimes \mathbb{1})$ sont compacts. On montrera plus généralement que le foncteur

$$\hom_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(\mathrm{Sus}^p_{T_X,\Sigma}(U \otimes \mathbb{1}), -) : \mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T_X}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

commute aux colimites filtrantes. Il suffit pour cela de montrer que les colimites filtrantes préservent les T_X-spectres fibrants de la structure :

$$(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-st}, (\mathbf{Cof}_{proj})_{proj}, (\mathbf{Fib}_{proj-\mathbb{A}^1})_{proj-st}) \tag{170}$$

Soient $\mathcal{J}$ une petite catégorie filtrante et $\mathbf{K}(-) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{Spect}^{\Sigma}_{T_X}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$ un foncteur à valeurs dans les T_X-spectres fibrants pour la structure (170). Par la proposition 4.5.63, la colimite $\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}}\mathbf{K}$ est projectivement $\mathbb{A}^1$-fibrante niveau par niveau. Il reste à voir que $\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}}\mathbf{K}$ est un Ω-spectre. Il s'agit donc de montrer que pour $p \in \mathbb{N}$, le morphisme $\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}}\mathbf{K}_p(-) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(T_X, \mathsf{Colim}_{\mathcal{J}}\mathbf{K}_{p+1}(-))$ est une

équivalence faible. Il suffit de montrer que pour tout X-schéma lisse U, l'application :

$$\begin{aligned}&\hom_{\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X,\mathfrak{M}))}(U\otimes\mathbb{1}[n],\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}}\mathbf{K}_p(-))\\&\qquad\longrightarrow\hom_{\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X,\mathfrak{M}))}(U\otimes T_X[n],\mathsf{Colim}_{\mathcal{J}}\mathbf{K}_p(-))\end{aligned}$$

est bijective. Ceci découle du fait que $\hom_{\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X,\mathfrak{M}))}(U\otimes\mathbb{1},-)$ et $\hom_{\mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathsf{Sm}/X,\mathfrak{M}))}(U\otimes T_X,-)$ commutent aux colimites filtrantes. □

Remarque 4.5.68. — Soit U un X-schéma lisse et notons $f : U\longrightarrow X$ son morphisme structural. Le T_X-spectre $\mathrm{Sus}^p_{T_X,\Sigma}(U\otimes\mathbb{1})$ est isomorphe à $\mathsf{L}f_\#\mathbb{1}_U(-p)[-2p]$. En effet, on peut écrire $\mathrm{Sus}^p_{T_X,\Sigma}(U\otimes\mathbb{1})\simeq[\mathrm{Sus}^1_{T_X,\Sigma}\mathbb{1}]^{\otimes p}\otimes\mathrm{Sus}^0_{T_X,\Sigma}(U\otimes\mathbb{1})$. On a bien $\mathsf{L}f_\#\mathbb{1}=\mathrm{Sus}^0_{T_X,\Sigma}(U\otimes\mathbb{1})$ par définition. Il reste à voir que $\mathrm{Sus}^1_{T_X,\Sigma}\mathbb{1}(1)[2]\simeq\mathbb{1}$. Ceci découle du fait que $\omega^1_{T_X} : \mathrm{Sus}^1_{T_X,\Sigma}(T_X)\longrightarrow\mathrm{Sus}^0_{T_X,\Sigma}\mathbb{1}$ est une équivalence stable.

BIBLIOGRAPHIE

[AGV73] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK & J.-L. VERDIER (éds.) – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math., vol. 269, vol. 270 & vol. 305, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, Springer Verlag, 1972-73.

[AK02] Y. ANDRÉ & B. KAHN – « Nilpotence, radicaux et structures monoïdales (avec un appendice de Peter O'Sullivan) », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **108** (2002), p. 107–291.

[AR94] J. ADÁMEK & J. ROSICKÝ – *Locally presentable and accessible categories*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 189, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Ayo04] J. AYOUB – « Motivic version of the classical polylogarithms », Arbeitsgemeinschaft mit aktuellem thema : Polylogarithms, Oberwolfach Rep., 2004.

[Ayo07] ———, « The motivic nearby cycles and the conservation conjecture », Algebraic Cycles and Motives part I (J. Nagel & C. Peters, éds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., no. 343, 2007.

[BBD82] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982.

[BD94] A. BEILINSON & P. DELIGNE – « Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs », Motives, Proceedings of the Research Conference on Motives held July 20-August 2, 1991, in Seattle, Washington (U. Jannsen, S. Kleiman & J.-P. Serre, éds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55 Part II, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 123–190.

[BG73] K. S. BROWN & S. M. GERSTEN – « Algebraic K-theory and generalized sheaf cohomology », Lecture Notes in Math., vol. 341, 1973, p. 266–292.

[BGI71] P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK & L. ILLUSIE (éds.) – *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Lecture Notes in Math., vol. 225, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1971.

[BK72] A. BOUSFIELD & D. KAN – *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Math., vol. 304, Springer Verlag, New York, 1972.

[Del77] P. DELIGNE – *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Math., vol. 569, Springer Verlag, 1977.

[Del01] ———, « Voevodsky's lectures on cross functors », Fall 2001, Motivic Homotopy Theory Program: `http://www.math.ias.edu/~vladimir/seminar.html`.

[DHI04] D. DUGGER, S. HOLLANDER & D. ISAKSEN – « Hypercovers and simplicial presheaves », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **136** (2004), p. 9–51.

[Ful84] W. FULTON – *Intersection Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb., Springer Verlag, 1984.

[GD60] A. GROTHENDIECK & J. DIEUDONNÉ – « Éléments de géométrie algébrique I. Le language des schémas », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **4** (1960), p. 5–228.

[GD61] ———, « Éléments de géométrie algébrique II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **8** (1961), p. 5–222.

[GJ99] P. GOERSS & J. JARDINE – *Simplicial Homotopy Theory*, Progr. Math., vol. 174, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1999.

[Gro90] A. GROTHENDIECK – « Les dérivateurs », manuscrit édité par M. Künzer, J. Malgoire et G. Maltsiniotis, 1990, disponible à l'adresse : `http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateur.html`.

[Har77] R. HARTSHORNE – *Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math., Springer Verlag, 1977.

[Hir03] P. S. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Math. Surveys Monogr., vol. 99, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[Hov99] M. HOVEY – *Model categories*, Math. Surveys Monogr., vol. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Hov01] ———, « Spectra and symmetric spectra in general model categories », *J. Pure Appl. Algebra* **165** (2001), p. 63–127.

[HW98] A. HUBER & J. WILDESHAUS – « Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne », *Doc. Math.* **3** (1998), p. 27–133.

[Jar87] J. F. JARDINE – « Simplicial presheaves », *J. Pure Appl. Algebra* **47** (1987), p. 35–87.

[Jar00] ———, « Motivic symmetric spectra », *Doc. Math.* **5** (2000), p. 445–552, disponible à l'adresse : `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/vol-05/vol-05.html`.

[Joy84] A. JOYAL – « Letter to Alexander Grothendieck », 4 novembre 1984.

[Kim05] S.-I. KIMURA – « Chow groups are finite dimensional, in some sense », *Math. Ann.* **331** (2005), no. 1, p. 173–201.

[KM71] G. M. KELLEY & S. MACLANE – « Coherence in closed categories », *J. Pure Appl. Algebra* **1** (1971), no. 1, p. 97–140.

[Lev07] M. LEVINE – « Motivic tubular neighborhoods », *Doc. Math.* (2007).

[Mac63] S. MACLANE – « Natural associativity and commutativity », *Rice University Studies* **49** (1963), no. 4, p. 28–46.

[Mac71] ———, *Categories for the working mathematician*, Grad. Texts in Math., vol. 5, Springer Verlag, 1971.

[Mal01a] G. MALTSINIOTIS – « Introduction à la théorie des dérivateurs », preprint, 2001, disponible à l'adresse : `http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/`.

[Mal01b] ———, « La K-theorie d'un dérivateur triangulé », preprint, 2001, disponible à l'adresse : `http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/`.

[Mor02] F. MOREL – « The homotopy t-structure of the $\mathbb{A}^1$-homotopy category », preprint, 2002, disponible à l'adresse : `http://www.mathematik.uni-munchen.de/~morel/stable.html`.

[Mor03] ———, « An introduction to $\mathbb{A}^1$-homotopy theory », Contemporary Developments in Algebraic K-theory (M. Karoubi, A. O. Kuku & C. Pedrini, éds.), ICTP Lect. Notes, vol. 15, 2003, p. 357–441.

[Mor05] ———, « The stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorems », *K-Theory* (2005).

[MV90] F. MOREL & V. VOEVODSKY – « $\mathbb{A}^1$-Homotopy theory of schemes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **90** (1990).

[Nee01] A. NEEMAN – *Triangulated categories*, Ann. of Math. Stud., vol. 148, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[Qui67] D. G. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math., vol. 43, Springer Verlag, Berlin-New York, 1967.

[RÖ5] O. RÖNDIGS – « Functoriality in motivic homotopy theory », preprint, 2005, disponible à l'adresse : `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~oroendig/`.

[Rio02] J. Riou – *Théorie homotopique des S-schémas*, Mémoire, Université Paris 7, 2002, disponible à l'adresse : `http://www.math.jussieu.fr/~riou/dea/`.

[Rio06] ———, « Opérations sur la K-théorie algébrique et régulateurs via la théorie homotopique des schémas », Thèse, Université Paris 7, 2006, disponible à l'adresse : `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0793/` (K-théory Preprint Archives).

[TT90] R. Thomason & T. Trobaugh – « Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories », "The Grothendieck Festschrift": a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck. Volume III, Progr. Math., vol. 88, Birkhaüser, 1990, p. 247–436.

[Ver96] J.-L. Verdier – *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque, vol. 239, Soc. Math. France, Paris, 1996.

[Voe98] V. Voevodsky – « $\mathbb{A}^1$-Homotopy theory », *Doc. Math.* Extra volume ICM I (1998), p. 579–606, `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/xvol-icm/00/Voevodsky.MAN.html`.

[Voe02] ———, « Cancellation theorem », preprint, January 28 2002, disponible à l'adresse : `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0541/` (K-theory Preprint Archives).

[Vol07] V. Vologodsky – « Integrality of instanton numbers », preprint, 2007, `http://arxiv.org/pdf/0707.4617`.

[VSF00] V. Voevodsky, A. Suslin & E. M. Friedlander – *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.

[Wil97] J. Wildeshaus – *Realizations of Polylogarithms*, Lecture Notes in Math., vol. 1650, Springer Verlag, 1997.

LES SIX OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK ET LE FORMALISME DES CYCLES ÉVANESCENTS DANS LE MONDE MOTIVIQUE

par J. Ayoub

Volume I : Astérisque 314

Remerciements vii

Introduction générale ix

1. Les quatre opérations de Grothendieck dans un cadre motivique .. 1
1.1. Préliminaires 2-catégoriques I : Adjonctions et équivalences dans une 2-catégorie 6
1.2. Préliminaires 2-catégoriques II : Échanges entre 2-foncteurs. Foncteurs croisés 25
1.3. Préliminaires 2-catégoriques III : Un critère de prolongement pour les 2-foncteurs 47
1.4. Énoncé du résultat principal. Quelques préparations 71
1.5. Les équivalences de Thom. Les 2-foncteurs ${}^{\mathrm{Liss}}\mathsf{H}^!$ et ${}^{\mathrm{Liss}}\mathsf{H}_!$ 89
1.6. Pureté. Construction du foncteur croisé $(\mathsf{H}^*, \mathsf{H}_*, \mathsf{H}_!, \mathsf{H}^!)$ 115
1.7. Le morphisme de 2-foncteurs $\mathsf{H}_! \longmapsto \mathsf{H}_*$. Fin de la démonstration 210

2. Compléments sur les 2-foncteurs homotopiques stables et les quatres opérations 239
2.1. Préliminaires généraux 242
2.2. Engendrement de sous-catégories et de t-structures dans un 2-foncteur homotopique stable. 339
2.3. Les 2-foncteurs monoïdaux homotopiques stables 385
2.4. Dérivateurs algébriques homotopiques et stables 436

Bibliographie 461

Volume II : Astérisque 315

3. La théorie des foncteurs cycles proches dans un cadre motivique .. 1
Introduction 1
3.1. Les systèmes de spécialisation : définition et propriétés de cohérence 3
3.2. Une technique de construction de structures de spécialisation 14
3.3. Le calcul des systèmes de spécialisation pour les schémas standards 27

3.4. Le système de spécialisation Υ 69
3.5. Le système de spécialisation Ψ 85
3.6. Le système de spécialisation logarithmique et le triangle de monodromie 93

4. La construction de 2-foncteurs homotopiques stables 139
Introduction 139
4.1. Catégories de modèles I : la théorie générale 141
4.2. Catégories de modèles II : accessibilité et localisation 174
4.3. Catégories de modèles III : les spectres symétriques 224
4.4. Des catégories de modèles de nature faisceautique 279
4.5. Le dérivateur algébrique homotopique et stable $\mathbb{SH}$ 314

Bibliographie 359