Astérisque

H. RUBENTHALER

Les paires duales dans les algèbres de Lie réductives

Astérisque, tome 219 (1994)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__219__1_0>

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

219 ASTÉRISQUE

1994

LES PAIRES DUALES DANS LES ALGÈBRES DE LIE RÉDUCTIVES

H. RUBENTHALER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. classification :

17B20, 17B25, 17B10

Table des matières

Introduction **3**

1. Notations et généralités **7**
1.1. Paires duales, sous-algèbres de Howe
1.2. Sous-algèbres paraboliques

2. Les espaces préhomogènes de type parabolique **11**
Table 1 : Espaces préhomogènes irréductibles réguliers de type parabolique
Table 2 : Espaces préhomogènes commutatifs

3. Les sous-algèbres admissibles et C-admissibles **19**
Table 3 : Sous-algèbres admissibles

4. Paires duales associées aux sous-algèbres C-admissibles **27**
Table 4 : Parties et sous-algèbres C-admissibles qui ne vérifient pas l'hypothèse (H_1)

5. Principes de classification **35**

6. Détermination des sous-algèbres admissibles qui sont des sous- algèbres de Howe. Etude de la S-irréductibilité **47**
6.1. Convention
6.2. Diagrammes en dualité
6.3. Type A_n
6.4. Type B_n
6.6. Type C_n
6.7. Type D_n
6.8. Type E_6
6.9. Type E_7
6.10. Type E_8
6.11. Type F_4
6.12. Type G_2
6.13. Table 5 : Tableau récapitulatif

7. Les paires duales S-irréductibles dans les algèbres de Lie classiques **77**
7.1. Les paires duales dans le cas A_n
7.2. Deux résultats
7.3. Description en termes d'algèbres unitaires des paires duales S-irréductibles des algèbres de Lie classiques

8. Enoncé et démonstration du théorème principal **85**

9. Le cas du produit tensoriel de deux formes symétriques en dimension paire : étude détaillée **89**

10. Constructions de tours duales **93**
10.1. Définitions
10.2. Quelques remarques concernant la plus grande racine
10.3. Un premier ensemble de tours duales
10.4. Où l'on agrandit la première tour duale dans E_6
10.5. Où l'on agrandit la première tour duale dans E_7
10.6. Où l'on agrandit la première tour duale dans E_8

11. Paires duales associées aux orbites des espaces préhomogènes commutatifs **113**

Bibliographie **119**

LES PAIRES DUALES DANS LES ALGEBRES DE LIE REDUCTIVES

HUBERT RUBENTHALER

INTRODUCTION

Ne t'attarde pas à l'ornière des résultats.
René Char

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de lie réductive complexe, un couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de sous-algèbres réductives dans $\mathfrak{g}$ est appelé paire duale si $\mathfrak{a}$ est le commutant de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ et vice versa.

Soit G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$. L'objet de cet article est de donner une classification des paires duales à conjugaison par G près (sous une certaine condition d'irréductibilité).

La notion de paire duale dans le groupe symplectique a été introduite par Roger Howe [H1] en liaison avec la correspondance ou conjecture qui porte son nom.
Rappelons brièvement, et sans être trop précis, l'énoncé de cette conjecture. Soit $G = Sp(n, k)$ le groupe symplectique habituel sur un corps local k. Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes réductifs de G qui forment une paire duale (i.e. dont l'un est le commutant de l'autre...). Soit ω la représentation métaplectique de G construite par Shale et Weil ; le spécialiste saura qu'il vaut mieux se placer sur un revêtement de G. Soit π_1 une représentation irréductible de G_1 qui apparaît dans ω, c'est à dire telle que $\mathrm{Hom}_{G_1}(\omega, \pi_1) \neq 0$. La conjecture de Howe dit alors qu'il existe une unique représentation π_2 de G_2 telle que $\mathrm{Hom}_{G_1 \times G_2}(\omega, \pi_1 \otimes \pi_2) \neq 0$ et la correspondance $\pi_1 \mapsto \pi_2$ s'appelle la correspondance de Howe.
Cette conjecture, qui a aussi son analogue dans le cadre global, a suscité de très nombreux et souvent difficiles travaux qu'il est impossible de citer ici (mentionnons l'article de Howe ([H2]) dans le cas réel et l'exposé de Waldspurger ([Wa]) sur la question au séminaire Bourbaki).
Howe donna la classification des paires duales de $Sp(n, k)$ dans [H1], sans

détailler les démonstrations. On pourra trouver une démonstration détaillée pour les groupes classiques dans [M-V-W].

L'intérêt d'une classification des paires duales dans le cadre des algèbres de Lie réductives trouve ces dernières années une motivation supplémentaire avec la construction *explicite* par Kazhdan et Savin ([K-S],[S]) d'une représentation ω qui devrait jouer le rôle de la représentation métaplectique pour tout groupe semi-simple. De ce fait il nous semble intéressant de donner cette classification ne serait ce que pour fournir de nombreux exemples. Les travaux récents de Rallis et Schiffmann ([Ra-Sch]) qui utilisent certaines de nos constructions et qui obtiennent des correspondances "géométriques" entre orbites co-adjointes nous confortent dans cette idée. Nous pensons d'autre part que, même dans le cas classique, notre construction donne une image nouvelle des paires duales.

Dans cette étude nous nous plaçons donc au niveau des algèbres de Lie. La classification dans les algèbres classiques était "connue", mais utilisait de manière essentielle le fait qu'une algèbre de Lie classique est une algèbre de forme, c'est à dire qu'elle laisse invariante une forme bilinéaire.
Dans les faits, les paires duales des algèbres classiques apparaissent surtout comme produits tensoriels (d'algèbres) de formes. Cette vision des choses ne se transpose évidemment pas aux cas exceptionnels. Il fallait donc trouver une manière de fabriquer des paires duales, qui se réduise essentiellement au produit tensoriel dans le cas classique.

Pour cela, nous introduisons la notion de sous-algèbre admissible que nous avions décrite dans [Ru4]. Grosso modo une sous-algèbre admissible d'une algèbre $\mathfrak{g}$ semi-simple est obtenue de la manière suivante. Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ la décomposition de Levi d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$. Soit $Z(\mathfrak{l})$ le centre de $\mathfrak{l}$ et k la dimension de $Z(\mathfrak{l})$. Soit $\overline{\mathcal{R}}$ l'ensemble des racines restreintes à $Z(\mathfrak{l})$. Une sous-algèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}$ admissible de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre semi-simple dont $Z(\mathfrak{l})$ est une sous-algèbre de Cartan et qui est engendrée par k $\mathfrak{sl}_2$-triplets $(X_{-\overline{\gamma}_i}, H_{\overline{\gamma}_i}, X_{\overline{\gamma}_i})$ où les éléments $H_{\overline{\gamma}_i}$ forment une base de $Z(\mathfrak{l})$, où les racines γ_i sont les racines simples définissant $\mathfrak{p}$ (la "barre" désigne la restriction à $Z(\mathfrak{l})$) et où $X_{\overline{\alpha}}$ est un vecteur propre de $Z(\mathfrak{l})$ pour la valeur propre $\overline{\alpha}$.
Alors, dans *beaucoup de cas*, le couple $(\widetilde{\mathfrak{g}}, Z_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{g}}))$, où $Z_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ désigne le centralisateur de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, est une paire duale dans $\mathfrak{g}$.

Cette construction est justifiée par le théorème principal de cet article qui dit que, sous une certaine hypothèse d'irréductibilité que nous appelons S-irréductibilité, toute paire duale est du type précédent (à deux exceptions près, parfaitement contrôlées).

Ce résultat, long à obtenir, ne surprend pas, vu que l'on démontre d'abord facilement , que si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale semi-simple alors les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des centres de sous-algèbres de Levi de $\mathfrak{g}$ (Th. 5.4.). D'autre part, dans les cas classiques, cette construction correspond assez fidèlement à la notion de produit tensoriel (§7).

La notion de S-irréductibilité évoquée précédemment est la suivante. Nous dirons qu'une paire duale $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ semi-simple est S-irréductible si la sous-algèbre $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ est une S-sous-algèbre au sens de Dynkin ([D]), c'est à dire qu'elle n'est incluse dans aucune sous-algèbre propre qui est invariante par l'action adjointe d'une sous-algèbre de Cartan. On montre que dans le cas de l'algèbre symplectique cette notion de S-irréductibilité, pour des paires semi-simples, coïncide exactement avec la notion d'irréductibilité donnée par Howe ([H1]).
Les résultats de cet article ont été annoncés dans [Ru6].

Indiquons à présent le contenu des paragraphes.

Les paragraphes 1,2, et 3 fixent les notations et donnent la classification des sous-algèbres admissibles et C-admissibles (les algèbres C-admissibles étant des algèbres admissibles d'un type particulier).

Dans le paragraphe 4 nous montrons que toute sous-algèbre C-admissible fournit une paire duale. Les démonstrations et résultats du paragraphe 4 constituent la clé de voûte de notre construction. Très curieusement, on remarquera que ce sont les espaces préhomogènes commutatifs (ou encore si l'on préfère les espaces hermitiens symétriques) qui fournissent les objets élémentaires qui servent à construire la plupart des paires duales.

Dans le paragraphes 5 nous donnons de nombreux procédés généraux pour construire des paires duales. Nous y démontrons aussi que si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale semi-simple non S-irréductible, alors il existe une sous-algèbre régulière de rang maximal dans laquelle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est S-irréductible.

Le paragraphe 6 est consacré à la détermination des sous-algèbres admissibles non C-admissibles, qui fournissent des paires duales. On y étudie aussi la S-irréductibilité des paires construites. La table 5 du paragraphe 6 résume alors tous les résultats obtenus.

Dans le paragraphe 7, nous donnons la classification des paires duales S-irréductibles dans les cas classiques. Dans ces cas tout était "connu", mais rien n'était vraiment écrit. Nous avons cru bon de donner des démonstrations détaillées, d'autant plus qu'il nous fallait travailler avec la S-irréductibilité et comparer à tout moment avec l'irréductibilité classique. Bien entendu, notre exposé dans ce paragraphe paraphrase souvent, dans le cadre des algèbres, l'exposé analogue dans le cadre des groupes de [M-V-W].

Le paragraphe 8 est consacré à l'énoncé et à la démonstration du théorème principal qui dit que "presque toute" paire duale S-irréductible provient d'une sous-algèbre admissible.

L'exception la plus marquante au théorème principal se produit dans le cas D_n. Nous en donnons dans le paragraphe 9 une étude détaillée.

La notion de tour duale que nous introduisons dans le paragraphe 10, n'est

qu'une évidente généralisation de la notion de "see-saw pair" introduite par Kudla ([Ku]). Nous indiquons des procédés systématiques pour construire (surtout dans les cas exceptionnels) des tours "très hautes".

Enfin, dans le paragraphe 11, nous donnons une construction qui associe des paires duales à toute orbite des espaces préhomogènes commutatifs. Dans le langage équivalent et sans doute plus connu des espaces hermitiens symétriques, nous associons une paire duale à toute $K_{\mathbf{C}}$-orbite de $\mathfrak{p}^+$ (dans les notations traditionnelles).

Remerciements. Cet article doit beaucoup à l'enthousiasme manifesté par David Ginzburg, Stephen Rallis, Gérard Schiffmann et Robert Stanton lors d'un séjour stimulant que j'ai effectué à Ohio State University, Columbus, en juin 1991. Je les en remercie chaleureusement.

Sauf mention expresse du contraire toutes les algèbres de Lie considérées dans cet article sont complexes.

1. Notations et généralités.

1.1. Paires duales, sous-algèbres de Howe.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et soit G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$.
Si E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$, nous désignerons par $Z_E(F)$ le centralisateur de F dans E, c'est à dire :

$$Z_E(F) = \{X \in E,\ [X,Y] = 0\ \forall Y \in F\}.$$

Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{s}$ nous noterons $Z_{\mathfrak{s}}$ ou $Z(\mathfrak{s})$ le centre de $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}' = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ son algèbre dérivée.

Définition 1.1.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive. Un couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ est appelé paire duale si :*
1) les sous-algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont réductives dans $\mathfrak{g}$.
2) le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{b}$ et vice-versa.

Notons que la deuxième condition de la définition précédente dit simplement que les sous-algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont leur propre bicommutant.

Définition 1.1.2. — *Si une sous-algèbre $\mathfrak{a}$ réductive dans $\mathfrak{g}$ est un des membres d'une paire duale (i.e. est égale à son bicommutant), nous dirons que $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Howe de $\mathfrak{g}$ (en accord avec la notion de sous-groupe de Howe introduite dans [M-V-W]).*

Le but de cet article est de classifier les paires duales à conjugaison par G près.

1.2. Sous-algèbres paraboliques.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$. Choisissons une fois pour toute une sous algèbre de cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. On désigne par $\mathcal{R}$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Soit $\Psi = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ une base de racines de $\mathcal{R}$; on désigne alors

par $\mathcal{R}^+$ (resp. $\mathcal{R}^-$) les racines positives (resp. négatives) relatives au choix de la base Ψ.

Pour $\alpha \in \mathcal{R}$, on désigne par $\mathfrak{g}^\alpha$ l'espace radiciel correspondant à α. Nous désignerons par X_α un élément non nul de $\mathfrak{g}^\alpha$ et par H_α la coracine habituelle de α dans $\mathfrak{h}$. Quand cela sera utile nous choisirons X_α et $X_{-\alpha}$ de sorte que $(X_{-\alpha}, H_\alpha, X_\alpha)$ soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

Pour une partie $\Gamma \subset \mathcal{R}$ on pose

$$\mathfrak{g}^\Gamma = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathfrak{g}^\alpha .$$

En posant $\mathfrak{n}^\pm = \mathfrak{g}^{\mathcal{R}^\pm}$, on a la décomposition triangulaire classique :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$$

et $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ est la sous-algèbre de Borel standard associée à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Psi)$.

Pour une partie θ de Ψ on désigne par $< \theta >$ l'ensemble des racines de $\mathcal{R}$ qui sont combinaisons linéaires d'éléments de θ. On pose également $< \theta >^\pm = < \theta > \cap \mathcal{R}^\pm$. Soit

$$\mathfrak{h}_\theta = \{H \in \mathfrak{h},\ \alpha(H) = 0\ \forall \alpha \in \theta\}$$

et soit H_θ l'unique élément de $\mathfrak{h}$ (en fait de $\mathfrak{h}_\theta$) défini par les équations

$$\alpha(H_\theta) = 0 \ si\ \alpha \in \theta$$
$$\alpha(H_\theta) = 2 \ si\ \alpha \in \Psi \setminus \theta$$

On pose également

$$\mathfrak{h}(\theta) = \bigoplus_{\alpha \in \theta} \mathbb{C} H_\alpha .$$

Posons alors, pour $p \in \mathbb{Z}$:

$$d_p(\theta) = \{X \in \mathfrak{g},\ [H_\theta, X] = 2pX\} .$$

On obtient la $\mathbb{Z}$-graduation suivante :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} d_p(\theta).$$

Les sous-espaces $d_p(\theta)$ sont les *diagonales* définies par θ (ou par H_θ).
Dans la suite nous noterons $d_{top}(\theta)$ le sous-espace $d_p(\theta)$ non réduit à $\{0\}$ dont l'indice p est maximal et par $d_{-top}(\theta)$ celui dont l'indice est minimal.

L'algèbre $\mathfrak{l}_\theta = d_0(\theta)$ est réductive (c'est ce qu'on appelle la sous-algèbre de Levi standard associée à θ). Le centre de $\mathfrak{l}_\theta$ est $\mathfrak{h}_\theta$ et son algèbre dérivée $\mathfrak{l}'_\theta$ est égale à $\mathfrak{h}(\theta) \oplus \mathfrak{g}^{<\theta>}$ ($\mathfrak{h}(\theta)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l}'_\theta$).

L'algèbre

$$\mathfrak{n}_\theta^+ = \bigoplus_{p>0} d_p(\theta) = \mathfrak{g}^{\mathcal{R}^+ \setminus <\theta>^+}$$

est nilpotente et est le plus grand idéal nilpotent de la sous-algèbre parabolique standard $\mathfrak{p}_\theta$ associée à θ qui est définie par

$$\mathfrak{p}_\theta = \bigoplus_{p\geq 0} d_p(\theta) = \mathfrak{l}_\theta \oplus \mathfrak{n}_\theta^+.$$

Nous noterons $\overline{\mathcal{R}}$ (respectivement $\overline{\mathcal{R}}^+$, $\overline{\mathcal{R}}^-$) l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de $\mathcal{R}$ (respectivement $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{R}^-$) à $\mathfrak{h}_\theta$ et pour une racine $\alpha \in \mathcal{R}$ nous désignerons par $\overline{\alpha}$ sa restriction à $\mathfrak{h}_\theta$.

Nous poserons

$$\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}} = \bigoplus_{\overline{\beta}=\overline{\alpha}} \mathfrak{g}^\beta.$$

On a alors la *décomposition en blocs* de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l}_\theta \oplus \bigoplus_{\overline{\alpha}\in\overline{\mathcal{R}}} \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}.$$

Notons également que si ω désigne la plus grande racine de $\mathcal{R}$ relativement à Ψ on a :

$$\mathfrak{g}^{\overline{\omega}} = d_{top}(\theta)$$

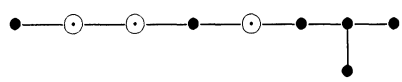
2. Les espaces préhomogènes de type parabolique.

Soit G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ et L_θ le sous-groupe analytique de G qui correspond à $\mathfrak{l}_\theta$. Le sous-groupe L_θ est aussi le centralisateur de H_θ dans G. Posons $N_\theta^+ = exp(\mathfrak{n}_\theta^+)$ et $P_\theta = L_\theta.N_\theta^+$. Le sous-groupe P_θ est alors le sous-groupe analytique de G correspondant à $\mathfrak{p}_\theta$.

D'après un théorème de Vinberg [Vi], la représentation naturelle de L_θ dans $d_1(\theta)$ possède un nombre fini d'orbites, donc une orbite ouverte pour la topologie de Zariski. Il s'agit donc d'un espace préhomogène au sens de Sato. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Sato et Kimura ([S-K]) pour tout ce qui concerne la théorie générale des espaces préhomogènes.

Puisque la notion d'espace préhomogène est essentiellement une notion infinitésimale, nous parlerons aussi bien de l'espace préhomogène $(L_\theta, d_1(\theta))$ que de l'espace préhomogène $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$.

Ces espaces sont appelés espaces préhomogènes de type parabolique ([Ru 1]). Ils sont donc simplement en bijection avec les sous-algèbres paraboliques standards de $\mathfrak{g}$, c'est à dire avec les parties θ de la base Ψ. Autrement dit un tel espace préhomogène est entièrement caractérisé par le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$, où, *par convention on a encerclé les sommets correspondant aux racines de* $\Psi \setminus \theta$. Dans ce cas les racines non encerclées sont celles du diagramme de Dynkin de la partie semi-simple $\mathfrak{l}'_\theta = [\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{l}_\theta]$ de $\mathfrak{l}_\theta$, le nombre de racines encerclées étant égal à la dimension du centre $\mathfrak{h}_\theta$ de $\mathfrak{l}_\theta$. Un tel diagramme de Dynkin à poids sera simplement appelé le diagramme (ou le graphe) de Dynkin de l'espace préhomogène (ou encore le diagramme (graphe) de Dynkin de (Ψ, θ)). Par exemple pour le diagramme suivant :

D_9 

l'algèbre $\mathfrak{l}'_\theta$ est de type $A_1 \times A_1 \times D_4$ et le centre de $\mathfrak{l}_\theta$ est de dimension 3. La proposition suivante est bien connue (voir par exemple [Ru1] pour une démonstration).

Proposition 2.1. — *La représentation $(L_\theta, d_1(\theta))$ est irréductible si et seulement si $Card(\Psi \setminus \theta) = 1$.*

Remarque 2.2.. —
Calcul du poids dominant de la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_{-1}(\theta))$ dans le cas irréductible.
Supposons que $\Psi \setminus \theta = \gamma_1$ est réduit à une seule racine. Soit $\mathfrak{h}(\theta) = \oplus_{\alpha\in\theta}\mathbb{C}H_\alpha$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l}'_\theta = [\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{l}_\theta]$. Alors le poids dominant de $(\mathfrak{l}_\theta, d_{-1}(\theta))$ (qui est la représentation contragrédiente de $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$) par rapport à la base θ du système de racines $\mathcal{R}_\theta$ de $(\mathfrak{l}'_\theta, \mathfrak{h}(\theta))$ est $-\overline{\gamma_1}$ où $\overline{\gamma_1}$ désigne la restriction de γ_1 à $\mathfrak{h}(\theta)$. Le calcul de ce poids dominant comme combinaison linéaire de poids fondamentaux est aisé à partir du graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$. On procède comme suit. Soient ω_α $(\alpha \in \theta)$ les poids fondamentaux de $\mathfrak{l}'_\theta$: ce sont les éléments de la base duale des H_α $(\alpha \in \theta)$. Soient α_i $(i = 1, 2$ ou $3)$ les racines de θ reliées à γ_1, c'est à dire telles qu'il existe au moins une arête entre α_i et γ_1 dans le graphe. On a $-\overline{\gamma_1} = \sum c_{\alpha_i} w_{\alpha_i}$ et $c_{\alpha_i} = -\gamma_1(H_{\alpha_i})$. Rappelons comment on calcule $\gamma_1(H_{\alpha_i})$ à partir du graphe de Dynkin :

- si γ_1 et α_i sont reliés par au moins une arête et si $||\gamma_1|| \leq ||\alpha_i||$, on a $\gamma_1(H_{\alpha_i}) = -1$.

- si γ_1 et α_i sont reliés par j arêtes $(1 \leq j \leq 3)$ et si $||\gamma_1|| > ||\alpha_i||$, on a $\gamma_1(H_{\alpha_i}) = -j$.

Soit θ^i la composante connexe de θ contenant α_i et soit $\mathfrak{l}_{\theta^i}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{l}_\theta$ engendrée par θ^i. Alors $\mathfrak{l}_\theta \simeq \mathbb{C} \times \prod_i \mathfrak{l}_{\theta^i}$ et la représentation $(\mathfrak{l}'_\theta, d_{-1}(\theta))$ est isomorphe à $\otimes_i(-\gamma_1(H_{\alpha_i})\omega_{\alpha_i})$, le centre de $\mathfrak{l}_\theta$ opérant par un caractère que nous ne précisons pas.
Notons également que le poids dominant de la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_{top}(\theta))$, qui est la restriction de la plus grande racine à $\mathfrak{h}_\theta$, se calcule en fonction des poids fondamentaux par la même règle appliquée au diagramme de Dynkin complété, où l'on prendra garde toutefois aux questions de signe puisque le sommet supplémentaire du graphe complété correspond à l'opposé de la plus grande racine.

Une notion importante de la théorie des espaces préhomogènes est celle de régularité. Rappelons (voir [S-K]) qu'un espace préhomogène dont le groupe est réductif (ce qui est toujours le cas ici puiqu'il s'agit de L_θ) est *régulier* si l'orbite ouverte est le complémentaire d'une hypersurface.

Les espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique qui sont réguliers sont caractérisés par le théorème suivant :

Théorème 2.3. — voir [Ru1] ou [Ru2]
Suposons que $Card(\Psi \setminus \theta) = 1$ (c'est à dire que la représentation $(L_\theta, d_1(\theta))$ est irréductible).
Alors l'espace préhomogène $(L_\theta, d_1(\theta))$ est régulier si et seulement si il existe $X \in d_1(\theta)$, $Y \in d_{-1}(\theta)$ tel que le triplet (Y, H_θ, X) est un $\mathfrak{sl}_2$−triplet.
(Rappelons que cela signifie que $[H_\theta, Y] = -2Y$, $[H_\theta, X] = 2X$ et $[Y, X] = H_\theta$;

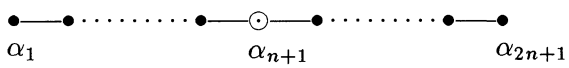
les éléments X et Y sont alors dans l'orbite ouverte respective de $d_1(\theta)$ et $d_{-1}(\theta)$ et on peut montrer que tout élément X de cette orbite ouverte peut être mis dans un tel $\mathfrak{sl}_2$-triplet.)

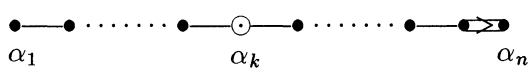
Les classes de conjugaison de $\mathfrak{sl}_2$-triplets ont été classifiés par Dynkin ([Dy],[Bo 2]). Rappelons le principe de cette classification. Si (y, h, x) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet dans $\mathfrak{g}$ on peut supposer modulo conjugaison par G que $\alpha(h) = 0, 1,$ ou 2 pour $\alpha \in \Psi$, ce qui permet d'attacher à chaque $\mathfrak{sl}_2$-triplet un diagramme de Dynkin à poids qui le caractérise (le poids de la racine α étant $\alpha(h) = 0, 1$ ou 2). Bien entendu (malheureusement !) toutes les combinaisons de 0,1 ou 2 ne correspondent pas à un $\mathfrak{sl}_2$-triplet ; la liste complète des diagrammes qui classifient les $\mathfrak{sl}_2$ -triplets se trouve dans le travail de Dynkin ([Dy], pour les groupes exceptionnels la liste est explicite : ce sont les tables 16 à 20 p. 176-185).

Le théorème 2.3. ci-dessus ramène la classification des espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique à la classification de certains $\mathfrak{sl}_2$-triplets, plus précisément ceux qui correspondent à un diagramme de Dynkin où une seule racine (la racine γ_1 qui est l'unique élément de $\Psi \setminus \theta$) a un poids égal à 2 et où toutes les autres racines (celles de θ) ont un poids égal à 0. La liste qu'on obtient ainsi figure dans [Ru1] et [Ru3] et on y retrouve de manière surprenante la plupart des espaces préhomogènes irréductibles réguliers de Sato et Kimura.

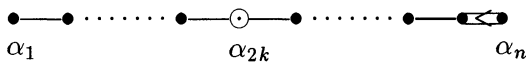
Cette liste étant importante pour la suite, nous l'insérons pour la commodité du lecteur.

TABLE 1 : Espaces préhomogènes irréductibles réguliers de type parabolique

1) A_{2n+1} 

2) B_n 

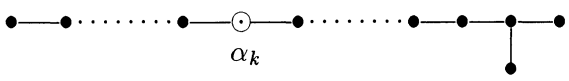
$n \geq 2,\ 3k \leq 2n+1$

3) C_n 

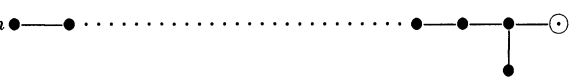
$n \geq 3,\ 6k \leq 2n$

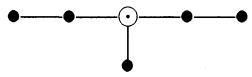
4) C_n

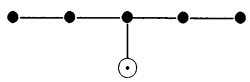
$n \geq 3$

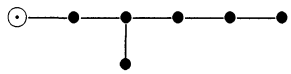
5) D_n 

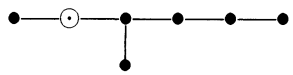
$n \geq 4,\ 3k \leq 2n$

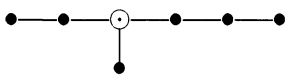
6) D_{2m} 
$m \geq 2$

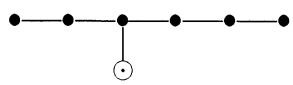
7) E_6 

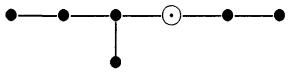
8) E_6 

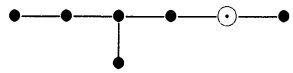
9) E_7 

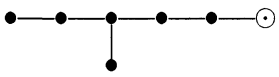
10) E_7 

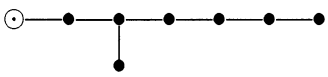
11) E_7 

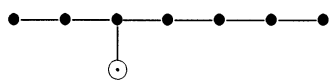
12) E_7 

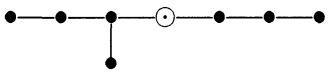
13) E_7 

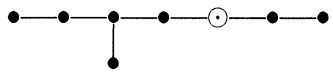
14) E_7 

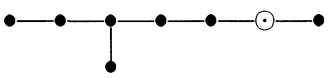
15) E_7 

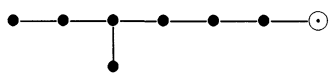
16) E_8 

17) E_8 

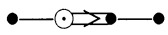
18) E_8 

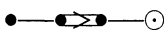
19) E_8 

20) E_8 

21) E_8 

22) F_4

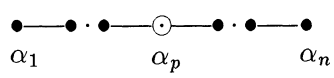
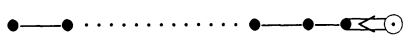
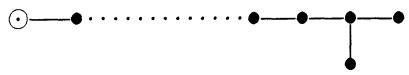
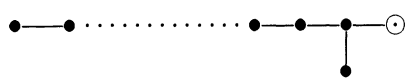
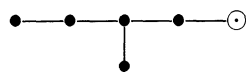
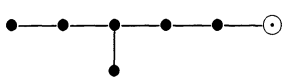
23) F_4 

24) F_4 

25) G_2

Une classe particulièrement importante pour la suite est celle des espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique qui sont *commutatifs*. Ils sont appelés ainsi parce que le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}_\theta^+$ de $\mathfrak{p}_\theta$ est commutatif (dans ce cas donc, $d_1(\theta) = \mathfrak{n}_\theta^+$). Soit ω la plus grande racine de $\mathcal{R}^+$; les espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique commutatifs (nous dirons plus simplement les espaces préhomogènes commutatifs) sont obtenus en imposant à la racine γ_1 (qui constitue l'ensemble $\Psi \setminus \theta$) d'avoir un coefficient 1 dans ω. On obtient la liste suivante, où la racine encerclée est la racine γ_1.

Table 2 : espaces préhomogènes commutatifs

$\mathfrak{g}$		$\mathfrak{l}'_\theta = [\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{l}_\theta]$	régularité
A_n		$A_{p-1} \times A_{n-p}$	régulier si n=2p-1
B_n		B_{n-1}	régulier
C_n		A_{n-1}	régulier
$D_{n,1}$		D_{n-1}	régulier
$D_{n,2}$		A_{n-1}	rég. si n pair
E_6		D_5	non régulier
E_7		E_6	régulier

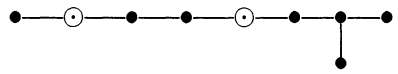
Remarque 2.4. —
a) On pourra trouver une étude plus détaillée des espaces préhomogènes commutatifs dans [M-R-S] et [R-S]. Certains résultats de ces deux articles seront décrits au début du paragraphe 11. Les articles récents de Howe et Umeda [H-U] et de Wallach [W] concernent aussi ces objets.
b) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Dans le cas d'un espace préhomogène commutatif la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_\theta^- \oplus \mathfrak{l}_\theta \oplus \mathfrak{n}_\theta^+$ est une $\mathbb{Z}$-graduation courte, c'est à dire une $\mathbb{Z}$-graduation de la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ et il est facile de voir que toute $\mathbb{Z}$-graduation courte (où l'action de $\mathfrak{g}_0$ sur $\mathfrak{g}_1$ est irréductible) correspond à un espace préhomogène commutatif. Autrement dit les espaces préhomogènes commutatifs ne sont rien d'autre que les $\mathbb{Z}$-graduations courtes.

c) Désignons par $X = G/K$ un espace symétrique hermitien irréductible ([He], chap. 8). Ici G est est un groupe de Lie semi-simple réel et K un sous-groupe compact maximal de G possédant un centre $Z(K)$ non trivial. Ecrivons la décomposition de Cartan classique $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$; le centre de $\mathfrak{k}$ possède alors un unique élément H dont le carré de l'action adjointe sur $\mathfrak{p}$ est $-Id_{\mathfrak{p}}$.

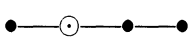
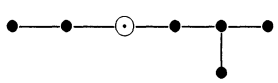
Soient $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ les complexifiés respectifs de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$. On a alors classiquement la décomposition $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^- \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^+$ où $\mathfrak{p}^+$ (resp. $\mathfrak{p}^-$) est l'espace propre de ad$H$ pour la valeur propre i (resp. -i). Cette décomposition est une $\mathbb{Z}$-graduation courte, donc $(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^+)$ est un espace préhomogène commutatif et on peut montrer qu'inversement tout espace préhomogène commutatif est ainsi obtenu à partir d'un espace hermitien symétrique. On peut également montrer que dans ce contexte la régularité est équivalente au fait que l'espace hermitien symétrique est de type tube.

Nous n'avons jusqu'à présent considéré que le cas où la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ était irréductible. Nous allons maintenant considérer le cas général. La décomposition de $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ en composantes irréductibles s'obtient de la manière suivante. Désignons par $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ les racines de $\Psi \setminus \theta$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$ on désigne par Ψ_i la composante connexe de $\Psi \cup \{\gamma_i\}$ qui contient γ_i. On désigne par D_i le graphe de Dynkin de Ψ_i (c'est un sous-graphe du graphe de Dynkin D de Ψ) où on a encerclé la racine γ_i.

Donnons un exemple. Si D est le diagramme de Dynkin à poids suivant :



alors les sous-diagrammes D_i sont les suivants :

D_1  D_2 

Les espaces préhomogènes iréductibles de type parabolique correspondant à ces sous-diagrammes sont naturellement plongés dans $\mathfrak{g}$ (voir Remarque 2.6. ci-dessous).

Posons encore $\theta_i = \Psi_i \setminus \{\gamma_i\}$ et désignons par Γ_i l'ensemble des racines α de $\mathcal{R}^+$ de la forme $\alpha = \gamma_i + \gamma$ où γ est une combinaison linéaire d'éléments de θ_i et définissons :

$$d_1^i(\theta) = \mathfrak{g}^{\Gamma_i}.$$

La proposition suivante est alors facile à démontrer.

Proposition 2.5. — *La décomposition $d_1(\theta) = \oplus_{i=1}^k d_1^i(\theta)$ est la décomposition de $d_1(\theta)$ en $\mathfrak{l}_\theta$-modules irréductibles.*

Remarque 2.6. —
On constate facilement (c'est implicite dans la démonstration de la proposition précédente) qu'en général, seule une partie de $\mathfrak{l}_\theta$ agit de manière non triviale sur $d_1^i(\theta)$.
Soyons plus précis. Posons $\mathfrak{h}_i = \sum_{\gamma\in\Psi_i} \mathbb{C}H_\gamma$, $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i + \mathfrak{g}^{<\Psi_i>}$ et $\mathfrak{l}_{\theta_i} = \mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{g}^{<\theta_i>}$. Alors $\mathfrak{l}_{\theta_i}$ est une sous-algèbre de Levi d'une sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{g}_i$ (elle est maximale car $\mathrm{Card}(\Psi_i \backslash \theta_i)=1$). Désignons par H_i l'unique élément de $\mathfrak{h}_i$ tel que $\gamma(H_i) = 0$ si $\gamma \in \theta_i$ et $\gamma_i(H_i) = 2$. Il est clair que $\sum_{i=0}^k \mathbb{C}H_i = \mathfrak{h}_\theta$ et on voit facilement que la diagonale d'indice 1 (cf. §1.2.) de $\mathfrak{g}_i$ définie par θ_i ou H_i est $d_1^i(\theta)$.

Posons $\mathfrak{l}^i = \sum_{j\neq i} \mathbb{C}H_j \oplus E_i$ où E_i désigne l'orthogonal de $\mathfrak{l}_{\theta_i} \oplus \sum_{j\neq i} \mathbb{C}H_j$ dans $\mathfrak{l}_\theta$ pour la forme de Killing. La sous-algèbre $\mathfrak{l}^i$ est réductive dans $\mathfrak{l}_\theta$, on a $\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{l}_{\theta_i} \oplus \mathfrak{l}^i$ (somme directe d'algèbres de Lie) et $\mathfrak{l}^i$ n'agit pas sur $d_1^i(\theta)$ puisque $[\mathfrak{l}^i, d_1^i(\theta)] = 0$.
De plus $(\mathfrak{l}_{\theta_i}, d_1^i(\theta))$ est un espace préhomogène irréductible de type parabolique dans $\mathfrak{g}_i$ dont le diagramme de Dynkin à poids est D_i.

Pour des raisons qui sont maintenant évidentes nous dirons que les diagrammes de Dynkin à poids D_i sont les composantes irréductibles du diagramme D.

2.7. Eléments génériques, isotropie générique, isotropie partielle.

Un élément dans l'orbite ouverte de l'espace préhomogène $(L_\theta, d_1(\theta))$ (ainsi que de tout espace préhomogène) sera appelé élément générique.
Le sous-groupe d'isotropie (resp. la sous-algèbre d'isotropie) d'un élément générique sera appelé sous-groupe d'isotropie générique (resp. sous-algèbre d'isotropie générique). Nous dirons parfois simplement "isotropie générique" pour désigner l'un de ces objets.
L'isotropie générique de l'espace préhomogène $(\mathfrak{l}_\theta, d_1^i(\theta))$ $(i = 1, \ldots, k)$ sera appelée "isotropie partielle".

3. Les sous-algèbres admissibles et C-admissibles.

Définition 3.1. — *Le couple (Ψ, θ) est dit admissible si les composantes irréductibles D_i du diagramme D associé à (Ψ, θ) figurent tous dans la Table 1 (c'est à dire que les espaces préhomogènes $(\mathfrak{l}_{\theta_i}, d_1^i(\theta))$ sont tous réguliers). Dans ce cas le diagramme à poids D de (Ψ, θ) sera également dit admissible.*

Définition 3.2. —
Le couple (Ψ, θ) est dit C-admissible si les composantes irréductibles D_i du diagramme D associé à (Ψ, θ) sont tous réguliers dans la Table 2 (c'est à dire que les espaces préhomogènes $(\mathfrak{l}_{\theta_i}, d_1^i(\theta))$ sont tous commutatifs réguliers). Dans ce cas le diagramme à poids D de (Ψ, θ) sera également dit C-admissible.

Notons que puisque la Table 2 est incluse dans la Table 1, un diagramme C-admissible est admissible.

Supposons à présent que le couple (Ψ, θ) est admissible. Rappelons que nous notons $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ les racines de (Ψ, θ). Pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, posons, comme dans la Remarque 2.6., $\mathfrak{h}_i = \sum_{\gamma \in \Psi_i} \mathbb{C} H_\gamma$. La sous-algèbre $\mathfrak{h}_i$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i + \mathfrak{g}^{<\Psi_i>}$. Rappelons également que H_i désigne l'unique élément de $\mathfrak{h}_i$ défini par les équations :

$$\gamma_i(H_i) = 2\,,\ \alpha(H_i) = 0 \text{ si } \alpha \in \theta_i\,.$$

Puique (Ψ, θ) est admissible, l'espace préhomogène $(\mathfrak{l}_{\theta_i}, d_1^i(\theta))$ est un espace préhomogène irréductible régulier de type parabolique dans $\mathfrak{g}_i$, pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$.
D'après le Théorème 2.3. il existe $X_i \in d_1^i(\theta), Y_i \in d_{-1}^i(\theta)$ tels que (Y_i, H_i, X_i) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

Théorème 3.3. — ([Ru 4])
Si le couple (Ψ, θ) est admissible, la famille des $\mathfrak{sl}_2$-triplets (Y_i, H_i, X_i) engendre une sous-algèbre simple $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ dans $\mathfrak{g}$.

Il est facile de voir que le centre $\mathfrak{h}_\theta$ de $\mathfrak{l}_\theta$ est une sous-algèbre de Cartan de $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$. Les racines de la paire $(\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$ sont alors des restrictions de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Soit $\overline{\mathcal{R}}_{nd}$ l'ensemble des racines non divisibles de $\overline{\mathcal{R}}$ (i.e. l'ensemble des $\gamma \in \overline{\mathcal{R}}$ tels que $\frac{\gamma}{n} \notin \overline{\mathcal{R}}$ pour n=2,3,...). Soit d'autre part $\mathcal{R}_{\widetilde{\mathfrak{g}_\theta}}$ le système de racines de $(\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$. On a montré dans [Ru 4] que $\mathcal{R}_{\widetilde{\mathfrak{g}_\theta}} = \overline{\mathcal{R}}_{nd}$. On remarquera que $d_1^i(\theta) = \mathfrak{g}^{\overline{\alpha_i}}$

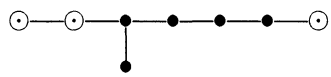
Définition 3.4. —
a) Si le couple (Ψ, θ) est admissible, la sous-algèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ sera appelée sous-algèbre admissible associée à (Ψ, θ).
b) Si le couple (Ψ, θ) est C-admissible, nous dirons que $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ est une sous-algèbre C-admissible .

Exemple 3.5. —

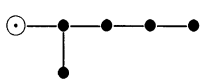
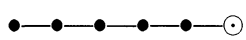
a) Il ressort de la définition 3.1. que les diagrammes de la Table 1 sont admissibles. La sous-algèbre admissible correspondante étant simplement la sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$ engendrée par le $\mathfrak{sl}_2$-triplet décrit dans le Théorème 2.3.

b) L'exemple suivant, pour trivial qu'il soit nous semble important car il montre que dans un certain sens, les élément X_i, Y_i et leurs crochets généralisent les sous-espaces radiciels habituels. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple quelconque et considérons la partie $\theta = \emptyset$. Dans le diagramme de Dynkin correspondant *toutes* les racines sont encerclées, ce diagramme est donc admissible (d'ailleurs même C-admissible) puisque les sous-diagrammes irréductibles sont tous égaux à $\odot$ qui figure dans la Table 2.
Les $\mathfrak{sl}_2$-triplets correspondants sont simplement les $\mathfrak{sl}_2$-triplets usuels $(Y_\alpha, H_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{q}}$ donc $\widetilde{\mathfrak{g}_\emptyset} = \mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ elle même est donc admissible.

c) Considérons le diagramme D suivant dans E_8 :



Les composantes irréductibles de D sont :

D_1 D_2  D_3 

Les diagrammes D_1 et D_2 sont dans la Table 1 ; par contre le diagramme D_3 n'y figure pas. Le diagramme D n'est donc pas admissible.

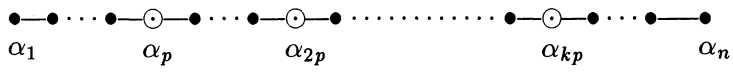
Etant donné la description *combinatoire* des parties admissibles (à savoir que les sous-diagrammes irréductibles D_i de D doivent appartenir à la Table 1) il est facile de donner la liste des parties admissibles. La détermination du type de l'algèbre admissible nécessite un calcul dont les résultats ont été publiés

dans [Ru4]. Signalons aussi que d'autres propriétés des algèbres admissibles (paramétrisation d'orbites dans certaines nappes de Dixmier) ont été obtenues dans [Ru5].
Pour la commodité du lecteur nous reproduisons dans la Table 3 ci-dessous la liste des parties admissibles et des sous-algèbres admissibles correspondantes.

Donnons quelques explications concernant la Table 3. Dans la première colonne de cette Table se trouve le diagramme de Dynkin à poids associé aux données (Ψ, θ) (on rappelle que les sommets encerclés sont ceux correspondants aux racines de $\Psi \setminus \theta$), dans la deuxième colonne on trouve le type de la sous-algèbre admissible $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ associée au diagramme, la troisième colonne mentionne éventuellement si la partie θ est C-admissible. Cette Table ne mentionne pas en général le cas "trivial" de l'Exemple 3.5.a) où l'algèbre $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre admissible d'elle même (cas où toutes les racines sont encerclées).

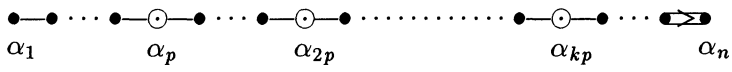
Table 3 : Sous-algèbres admissibles.

Type A_n : $n = (k+1)p - 1, k \geq 1,\ n \geq 1,\ p \geq 1$.



A_k C-admissible

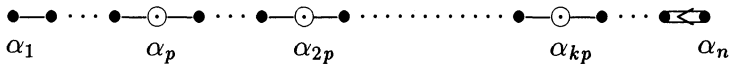
Type B_n : $n \geq kp$, $(2k+1)p \leq (2n+1)$, $p \geq 1$.



B_k C-admissible si $p = 1$

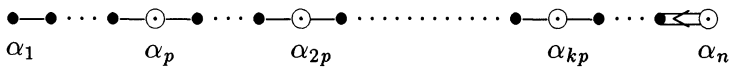
Type C_n :

1) p pair, $(2k+1)p \leq 2n$.



B_k

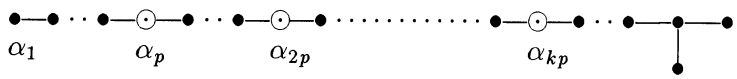
2) $n = (k+1)p$, $k \geq 0$, $p \geq 1$.



C_{k+1} C-admissible

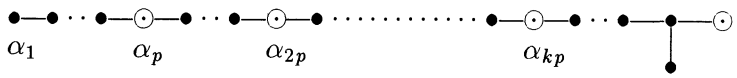
Type D_n :

1) $n \geq kp + 2$, $(2k+1)p \leq 2n$.



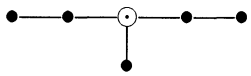
B_k C-admissible si $p = 1$

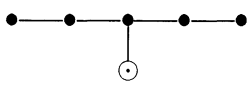
2) $n = (k+1)p$, p pair, $p \geq 1$.

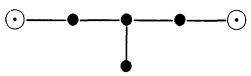


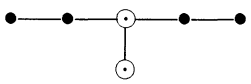
C_{k+1} C-admissible

Type E_6 :

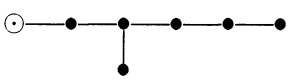
1)  A_1

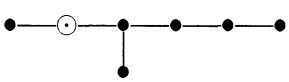
2)  A_1

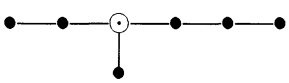
3)  A_2 C-admissible

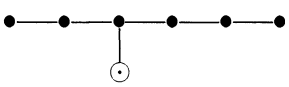
4)  G_2 C-admissible

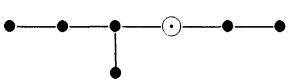
Type E_7 :

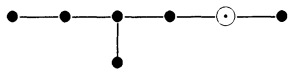
1)  A_1

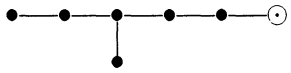
2)  A_1

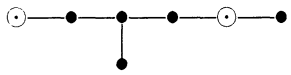
3)  A_1

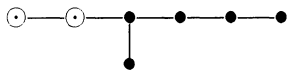
4)  A_1

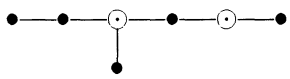
5)  A_1

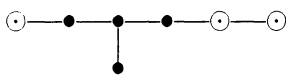
6)  A_1

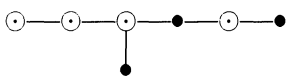
7)  A_1 C-admissible

8)  B_2

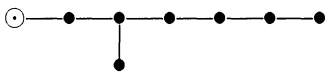
9)  G_2 C-admissible

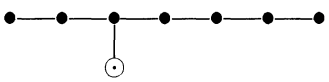
10)  G_2

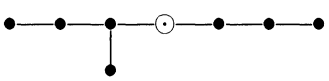
11)  C_3 C-admissible

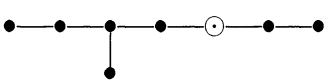
12)  F_4 C-admissible

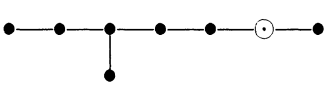
<u>Type E_8</u> :

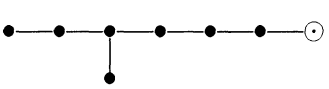
1)  A_1

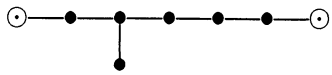
2)  A_1

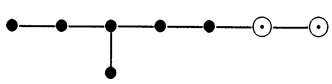
3)  A_1

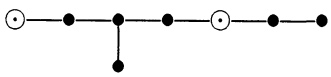
4)  A_1

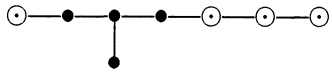
5)  A_1

6)  A_1

7)  B_2

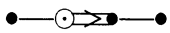
8)  G_2 C-admissible

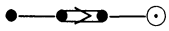
9)  G_2

10)  F_4 C-admissible

<u>Type F_4</u> :

1) A_1

2)  A_1

3)  A_1

4) G_2 C-admissible

<u>Type G_2</u> :

1) A_1

Terminons ce paragraphe par deux résultats utiles par la suite.

Proposition 3.6. —
Si $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ est une sous-algèbre C-admissible on a $\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}}_{nd}$ $(= \mathcal{R}_{\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta})$, c'est à dire que toutes les racines restreintes sont des racines de la sous-algèbre C-admissible.

Démonstration. — Soit $\overline{\alpha}$ un élément divisible de $\overline{\mathcal{R}}$. Alors $\overline{\alpha} = n\overline{\gamma}$ où $\overline{\gamma} \in \overline{\mathcal{R}}_{nd}$ et où n est un entier > 1. D'après la théorie générale des systèmes de racines, il existe $w \in W(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta})$ (le groupe de Weyl de $\mathcal{R}_{\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta}$) et $i \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $w\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_i$. Donc $w\overline{\alpha} = n\overline{\gamma}_i$. Il existe donc une racine $\beta \in \mathcal{R}$ tel que $\beta = n\gamma_i$ modulo $< \theta >$ et ceci est en contradiction avec l'hypothèse de C-admissibilité. $\square$

La démonstration ci-dessus contient celle de la proposition suivante.

Proposition 3.7. —
Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ une sous-algèbre admissible non C-admissible de $\mathfrak{g}$. Soit $\overline{\alpha} \in \overline{\mathcal{R}} \setminus \overline{\mathcal{R}}_{nd}$. Alors il existe $w \in W(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta})$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ et un entier $n > 1$ tels que $w\overline{\alpha} = n\overline{\gamma}_i$.

4. Paires duales associées aux sous-algèbres C-admissibles.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.1. — *Soit $\Psi \setminus \theta$ un couple C-admissible et $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ la sous-algèbre C-admissible correspondante, alors $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ est une sous-algèbre de Howe de $\mathfrak{g}$ (c'est à dire, rappelons le, que $(\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta, Z_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta))$ est une paire duale).*

Remarque 4.2. —

a) Désignons comme précédemment par (Y_i, H_i, X_i) la famille des $\mathfrak{sl}_2$-triplets construits à partir de la famille $\{\gamma_i\}_{i=1,\dots,k} = \Psi \setminus \theta$. Posons $X_\theta = \sum_{i=1}^k X_i$. Alors X_θ est un élément de l'orbite ouverte de l'espace préhomogène (non irréductible) $(L_\theta, d_1(\theta))$ et on voit facilement, en utilisant le fait que pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$ on a $Z_{\mathfrak{l}_\theta}(X_i) = Z_{\mathfrak{l}_\theta}(Y_i)$, que $Z_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta)) = Z_{\mathfrak{l}_\theta}(X_\theta)$.
Cela signifie très exactement que le deuxième membre de la paire duale construite dans le théorème 4.1. est simplement l'isotropie générique de l'espace préhomogène $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$.

b) Si on prend $\theta = \emptyset$ (i.e. tous les sommets sont encerclés) le Théorème 4.1. fournit simplement la paire duale triviale $(\mathfrak{g}, \{0\})$.

La démonstration du théorème 4.1 est assez longue. Nous allons la développer ci-dessous. Le point clé est le théorème suivant qui en est un cas particulier.

Théorème 4.3. — *Soit $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ un espace préhomogène irréductible régulier de type parabolique commutatif (c'est à dire un élément régulier de la Table 2). Soit (Y, H_θ, X) un des $\mathfrak{sl}_2$-triplets associés à $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ par le Théorème 2.3. Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ la sous-algèbre admissible isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$ engendrée par ce triplet. Alors $\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ est une sous-algèbre de Howe.*

Démonstration. —
Posons $w = exp(adX)exp(adY)exp(adX)$, on sait alors ([Ru1],[Ru2]) que si $\sigma = w\mid_{\mathfrak{l}_\theta}$, on a $\sigma^2 = Id$, c'est à dire que la restriction de w à $\mathfrak{l}_\theta$ est une

involution dont l'ensemble des points fixes est exactement l'isotropie générique $Z_{\mathfrak{l}_\theta}(X) = Z_{\mathfrak{l}_\theta}(Y)$. Notons aussi que d'après la remarque 4.2. cette isotropie générique est le deuxième membre présumé de la paire duale, c'est à dire $Z_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta)$.

Pour simplifier nous poserons $\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{l}_\theta\,, \sigma(X) = X\} = Z_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta)$ et $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{l}_\theta\,, \sigma(X) = -X\}$ et nous aurons alors la décomposition $\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{q}$.
Rappelons que puisque $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est commutatif on a la décomposition $\mathfrak{g} = d_{-1} \oplus \mathfrak{l}_\theta \oplus d_1(\theta)$. Soit x un élément de $\mathfrak{g}$ qui commute à $\mathfrak{s}$. Nous devons montrer que $x \in \widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$. Ecrivons $x = x_{-1} + x_0 + x_1$, $(x_{-1} \in d_{-1}\,, x_0 \in \mathfrak{l}_\theta\,, x_1 \in d_1(\theta))$. Puisque $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{l}_\theta$, il est clair que si x commute à $\mathfrak{s}$, chacun des éléments $x_{-1}\,, x_0$ et x_1 commute à $\mathfrak{s}$.
Puisque $[\mathfrak{l}_\theta, X] = d_1(\theta)$ (c'est la version infinitésimale de l'existence de l'orbite ouverte), on a $[\mathfrak{q}, X] = d_1(\theta)$. Plus précisément il existe un unique élément $q_1 \in \mathfrak{q}$ tel que $[q_1, X] = x_1$.
On a alors (en utilisant l'identité de Jacobi) :

$$0 = [\mathfrak{s}, x_1] = [\mathfrak{s}, [q_1, X]] = [[\mathfrak{s}, q_1], X]\,.$$

Donc $[\mathfrak{s}, q_1] \in Z_{\mathfrak{l}_\theta}(X) = \mathfrak{s}$, d'autre part on a $[\mathfrak{s}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q}$. On en déduit que $[\mathfrak{s}, q_1] = 0$. Donc, si B désigne la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, on a :

$$B([\mathfrak{q}, \mathfrak{s}], q_1) = B(\mathfrak{q}, [\mathfrak{s}, q_1]) = B(\mathfrak{q}, 0) = 0\,.$$

C'est à dire que q_1 est orthogonal à $[\mathfrak{s}, \mathfrak{q}]$. Or

$$[\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{l}_\theta] = \mathfrak{l}'_\theta = [\mathfrak{s} + \mathfrak{q}, \mathfrak{s} + \mathfrak{q}] = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] + [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] + [\mathfrak{q}, \mathfrak{s}]\,.$$

Puisque $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ et $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ sont dans $\mathfrak{s}$ et que $[\mathfrak{q}, \mathfrak{s}]$ est dans $\mathfrak{q}$, on déduit de ce qui précède que q_1 est orthogonal à $\mathfrak{l}'_\theta$, donc que $q_1 = \lambda H_\theta\,(\lambda \in \mathbb{C})$. On a alors $x_1 = [q_1, X] = 2\lambda X$. Ainsi x_1 est bien proportionnel à X, comme il fallait le démontrer. Un argument similaire montrerait que $x_{-1} = \mu Y\,(\mu \in \mathbb{C})$.
Il ne reste plus alors qu'à démontrer que $x_0 = \nu H_\theta$. Puisque le crochet de deux éléments qui commutent à $\mathfrak{s}$ est un élément qui commute à $\mathfrak{s}$, on a, au vu de ce que l'on vient de démontrer que $[x_0, X] = \alpha X$ $(\alpha \in \mathbb{C})$. Mais alors $x_0 - \frac{\alpha}{2} H_\theta$ commute à X et est dans $\mathfrak{l}_\theta$, donc $x_0 = \frac{\alpha}{2} H_\theta + \tau$ où $\tau \in \mathfrak{s}$. Mais $[\mathfrak{s}, x_0] = 0 = [\mathfrak{s}, \tau]$, donc τ appartient au centre de $\mathfrak{s}$. On conclut en remarquant que les cas $A_n, B_n, C_n, D_{n,1}, D_{2n,2}, E_7$ de la Table 2 qui nous concernent ici correspondent respectivement aux cas $n°$ 1,15,2,15,3,27 de la classification des espaces préhomogènes réguliers irréductibles de Sato et Kimura ([S-K],par. 7, Table p.144). Dans ce travail les auteurs ont calculé toutes les isotropies génériques et on pourra constater que ces isotropies sont semi-simples, donc n'ont pas de centre (à vrai dire le calcul est trivial sauf dans le cas E_7 où apparaît le groupe E_6 et sa représentation de dimension 27, dont l'isotropie générique est de type F_4).
En tout cas cela montre que $\tau = 0$ et donc que $x_0 = \frac{\alpha}{2} H_\theta$. $\square$

suite de la démonstration du Théorème 4.1.

Pour simplifier les notations, nous allons toujours désigner par $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *les paires duales.*

Nous allons prouver que si $\mathfrak{a} = \widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ et $\mathfrak{b} = Z_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta) = Z_{\mathfrak{l}_\theta}(X_\theta)$, alors $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale.

D'après la Remarque 2.6. on décompose $\mathfrak{l}_\theta$ comme suit :

$$\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{l}_{\theta_i} \oplus \ell^i$$

Nous allons d'abord démontrer le théorème sous l'hypothèse restrictive suivante :

Hypothèse (H_1) **:**
Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, pour tout $u \in Z_{\mathfrak{l}_{\theta_i}}(X_i)$, il existe $v \in \ell^i$ tels que $u+v \in \mathfrak{b}$ (cf. la décomposition (4-1)).

Les sous-algèbres admissibles qui ne vérifient pas (H_1) constituent la Table 4 ci-dessous et nécessiterons des démonstrations spécifiques.

Lemme 4.4. — *Soit* $\mathfrak{a} = \widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ *une sous-algèbre C-admissible qui vérifie l'hypothèse* (H_1) *et soit* $\mathfrak{b} = Z_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta)$. *Alors* $Z_{d_1(\theta)}(\mathfrak{b}) = \oplus_{i=1}^k \mathbb{C}X_i$.

Démonstration. — Il est clair qu'il suffit de démontrer que $Z_{d_1^i(\theta)}(\mathfrak{b}) = \mathbb{C}X_i$. Soit $X \in Z_{d_1^i(\theta)}(\mathfrak{b})$ *En utilisant l'hypothèse* (H_1) et le fait que $[\ell^i, d_1^i(\theta)] = 0$ (cf. Remarque 2.6.), on voit que $X \in Z_{d_1^i(\theta)}(Z_{\mathfrak{l}_{\theta_i}}(X_i))$, donc d'après le théorème 4.3. on a $X = \lambda X_i$, $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

Lemme 4.5. — *Sous les mêmes hypothèses que celles du Lemme 4.4., on a* $Z_{\mathfrak{l}_\theta}(\mathfrak{b}) = \oplus_{i=1}^k \mathbb{C}H_i = \mathfrak{h}_\theta$.

Démonstration. — Soit $X_0 \in Z_{\mathfrak{l}_\theta}(\mathfrak{b})$. Puisque les éléments X_i commutent à $\mathfrak{b}$, l'élément $[X_0, X_i]$ commute à $\mathfrak{b}$ et appartient à $d_1^i(\theta)$. D'après le Lemme précédent, il existe des constantes $\lambda_i \in \mathbb{C}$ telles que $[X_0, X_i] = \lambda_i X_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Puisque les H_i forment une base de $\mathfrak{h}_\theta$, il existe une unique combinaison linéaire $\sum_{i=1}^k r_i H_i = H_0$ telle que $[H_0, X_i] = \lambda_i X_i$ (les formes linéaires $\overline{\gamma_i}$ constituent une base de $\mathfrak{h}_\theta^*$). Mais alors $\tau_0 = X_0 - H_0 \in Z_{\mathfrak{l}_\theta}(X_\theta) = \mathfrak{b}$.
Puisque X_0 et H_0 commutent à $\mathfrak{b}$, l'élément τ_0 appartient au centre de $\mathfrak{b}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ on écrit :

$$\tau_0 = u_{\tau_0}^i + v_{\tau_0}^i,$$

où $u_{\tau_0}^i \in \mathfrak{l}_{\theta_i}$, $v_{\tau_0}^i \in \ell^i$.
Soit également $X \in \mathfrak{b}$ et écrivons la décomposition correspondante :

$$X = u_X^i + v_X^i.$$

Puisque $[\tau_0, X] = 0$, on a :

$$[u^i_{\tau_0}, u^i_X] = [v^i_{\tau_0}, v^i_X] = [w^i_{\tau_0}, w^i_X] = 0.$$

L'hypothèse (H_1) implique alors notamment que $[u^i_{\tau_0}, Z_{\mathfrak{l}_{\theta_i}}(X_i)] = 0$. D'après le théorème 4.3. cela implique que $u^i_{\tau_0} = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, donc que $\tau_0 \in \cap_{i=0}^k \ell^i = \{0\}$. $\square$

Lemme 4.6. — *Sous les mêmes hypothèses que celles du Lemme 4.4. on a* $Z_{d_j(\theta)}(\mathfrak{b}) = d_j(\theta) \cap \mathfrak{a} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — Rappelons que nous avons posé $X_\theta = \sum_{i=0}^k X_i$. Posons encore $Y_\theta = \sum_{i=0}^k Y_i$. Alors $(Y_\theta, H_\theta, X_\theta)$ est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (c'est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal de $\mathfrak{a}$ (cf. [B0 2], [K])
Soit

$$w_\theta = exp(adY_\theta)exp(adX_\theta)exp(adY_\theta).$$

alors

$$w_\theta : d_{-j}(\theta) \cap \mathfrak{a} \longrightarrow d_j(\theta) \cap \mathfrak{a}$$

est une bijection qui commute à $ad\mathfrak{b}$.
Il suffit donc de démontrer le lemme pour $j \geq 0$. Pour $j = 1$ c'est le Lemme 4.4. Supposons donc $j \geq 2$. Avec les notations introduites au §1.2. on a :

$$d_j(\theta) = \sum_{\alpha(H_\theta)=2j} \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}.$$

Désignons par $\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}_\theta)$. Rappelons que, vu l'hypothèse de C-admissibilité, on a $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{a}}$ (Prop. 3.6.). Soit alors $\overline{\alpha} \in \overline{\mathcal{R}}$ telle que $\alpha(H_\theta) = 2j$. Il existe donc $w \in W(\mathcal{R}_{\mathfrak{a}})$ (le groupe de Weyl de $\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}$) tel que $w\overline{\alpha} = \overline{\alpha_i}$ pour un indice $i \in \{1, \ldots, k\}$. Mais alors $w\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}} = \mathfrak{g}^{\overline{\alpha_i}}$. Cela signifie que $\dim(Z_{\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}}(\mathfrak{b})) = \dim(Z_{\mathfrak{g}^{\overline{\alpha_i}}}(\mathfrak{b})) = 1$. Donc $Z_{\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}}(\mathfrak{b}) = \mathbb{C}w^{-1}X_i$. $\square$

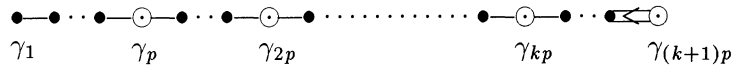
Nous avons donc démontré le Théorème 4.1. dans le cas d'une sous-algèbre C-admissible qui vérifie l'hypothèse (H_1).

Nous allons maintenant étudier les cas restants dont la liste constitue la Table 4 ci-dessous. Dans cette Table, à la suite du diagramme C-admissible nous indiquons le type de la sous-algèbre admissible $\mathfrak{a} = \widetilde{\mathfrak{g}}_\theta$ correspondante (i.e. la première sous-algèbre de Howe de la paire), puis nous indiquons le type de $\mathfrak{b} = Z_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta)$ (i.e. la deuxième sous-algèbre de Howe de la paire).

La justification du type de $\mathfrak{b}$ dans cette Table se trouvera dans la suite de la démonstration.

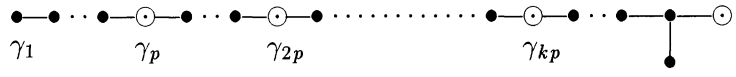
Table 4 : Parties et sous-algèbres C-admissibles qui ne vérifient pas l'hypothèse (H_1).

1) Type C_n, $n = (k+1)p$, $k \geq 0$, $p \geq 1$.



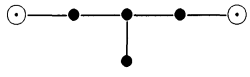
C_{k+1} $O(p)$

2) Type D_n, $n = (k+1)p$, p pair, $p \geq 1$.



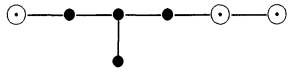
C_{k+1} $C_{\frac{p}{2}}$

3) Type E_6



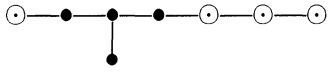
A_2 G_2

4) Type E_7



C_3 G_2

5) Type E_8

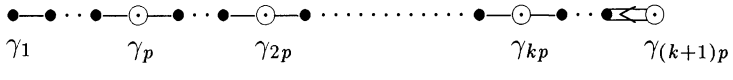


F_4 G_2

Fin de la démonstration du Théorème 4.1.

Remarquons que, d'après l'argument développé dans la démonstration du Lemme 4.6., il suffit de prouver que $Z_{\mathfrak{l}_\theta}(\mathfrak{b}) = \oplus_{i=1}^k \mathbb{C}H_i$ et que $Z_{d_1(\theta)}(\mathfrak{b}) = \oplus_{i=1}^k \mathbb{C}X_i$. Nous allons étudier l'un après l'autre les différents cas de la Table 4.

1)



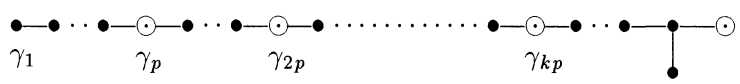
Notons qu'ici le nombre de racines encerclées est $k+1$.
On a $\mathfrak{l}_\theta = \underbrace{gl(p) \times gl(p) \times \ldots \times gl(p)}_{(k+1)\times}$

et $d_1(\theta) = \underbrace{M_p \times M_p \times \ldots \times M_p}_{k\times} \times S_p$ où M_p désigne l'espace des matrices complexes de type (p,p) et où S_p désigne l'espace des matrices symétriques complexes de type (p,p).
L'action de $(g_1,\ldots,g_{k+1}) \in \mathfrak{l}_\theta$ sur $(x_1,\ldots,x_k,s) \in d_1(\theta)$ est la suivante :
$(g_1,\ldots,g_{k+1})(x_1,\ldots,x_k,s) = (g_1x_1 - x_1g_2,\ldots,g_kx_k - x_kg_{k+1}, g_{k+1}s + s^tg_{k+1})$.
L'élément $X_\theta = (Id_p,\ldots,Id_p) \in d_1(\theta)$ est générique et son isotropie est $\mathfrak{b} = o(p)$ plongé diagonalement dans $\mathfrak{l}_\theta = (gl(p))^{k+1}$. La représentation naturelle de $o(p)$ dans $\mathbb{C}^p$ étant irréductible, le Lemme de Schur implique immédiatement que

$$Z_{\mathfrak{l}_\theta}(\mathfrak{b}) = (\mathbb{C}Id_p,\ldots,\mathbb{C}Id_p) = \oplus_{i=1}^{k+1}\mathbb{C}H_i$$

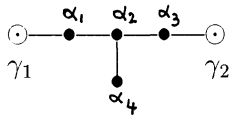
(ici les H_i sont les matrices scalaires) et que

$$Z_{d_1(\theta)}(\mathfrak{b}) = \{(\lambda_1 Id_p,\ldots,\lambda_{k+1}Id_p), \lambda_1,\ldots,\lambda_{k+1} \in \mathbb{C}\} = \oplus_{i=1}^{k+1}\mathbb{C}X_i.$$

2) 

p pair.

La démonstration pour ce deuxième cas est similaire au cas précédent. L'algèbre $\mathfrak{l}_\theta$ est encore $(gl(p))^{k+1}$, l'espace $d_1(\theta)$ de la représentation est $(M_p)^k \times AS_p$ où AS_p est l'espace de matrices antisymétriques de type (p,p) (rappelons que p est pair). Si on prend pour élément générique l'élément $X_\theta = (Id_p,\ldots,Id_p,J_p)$ où J_p est la matrice antisymétrique classique (associée à $sp(\frac{p}{2})$), l'isotropie générique est $sp(\frac{p}{2})$ plongé diagonalement dans $\mathfrak{l}_\theta$.
La représentation naturelle de $sp(\frac{p}{2})$ dans $\mathbb{C}^{\frac{p}{2}}$ étant irréductible, le Lemme de Schur donne le résultat.

3) 

Il ressort de la Table 3 que dans ce cas $\mathfrak{a} = \widetilde{\mathfrak{g}}_\theta = A_2$. Commençons par montrer que $\mathfrak{b} = Z_{\widetilde{\mathfrak{g}}_\theta} = G_2$. Ici $\mathfrak{l}_\theta \simeq D_4 \oplus \mathbb{C}^2$. Soient $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ les poids fondamentaux de D_4 correspondant respectivement aux racines $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ ainsi qu'elles sont indiquées sur le diagramme ci-dessus. La représentation de $\mathfrak{l}_\theta$ sur $d_1(\theta)$ est la représentation $\omega_1 \oplus \omega_3$. Le groupe L_θ est alors nécessairement de type $Spin(8) \times \mathbb{C}^{*2}$ car l'une des deux représentations w_1 et w_3 ne s'intègre pas sur $SO(8)$.

Quitte à choisir la projection

$$Spin(8) \xrightarrow{\chi} SO(8)$$

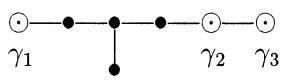
on peut supposer que w_1 s'intègre sur $SO(8)$ (si ce n'était pas le cas on peut transformer χ par un automorphisme non trivial du graphe D_4).
Donc, puisque l'isotropie générique de $(SO(8) \times \mathbb{C}^*, \mathbb{C}^8)$ (représentation naturelle) est $SO(7)$, l'isotropie générique de $(L_\theta, d_1^1(\theta))$ est $Spin(7) \times \mathbb{C}^*$. La restriction de $(Spin(8) \times \mathbb{C}^*, \omega_3)$, qui est la représentation *spin*, à $Spin(7)$, est la représentation *spin* de $Spin(7)$ ([S-K] p.114).
Finalement $\mathfrak{b}$ est l'isotropie générique de $Spin(7) \times \mathbb{C}^*$ et cette isotropie est G_2 d'après [S-K] (Prop. 25, p.116).
Nous allons maintenant prouver que $Z_{d_1(\theta)}(G_2) = \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2$ (X_1 et X_2 ayant été choisis génériques dans $d_1^1(\theta)$ et $d_1^2(\theta)$ respectivement).
Soient

$$I_1 = \{z \in \mathfrak{l}_\theta, [z, d_1^1(\theta)] = 0\}$$

et

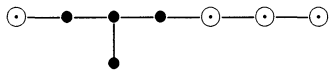
$$I_2 = \{z \in \mathfrak{l}_\theta, [z, d_1^2(\theta)] = 0\}.$$

Il est immédiat que I_1 et I_2 sont des idéaux de $\mathfrak{l}_\theta$ qui sont inclus dans $\mathfrak{l}'_\theta = D_4$. Donc $I_1 = I_2 = \{0\}$.
Supposons que $Z_{d_1(\theta)}(G_2) \neq \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2$. Alors on peut supposer qu'il existe $Y_1 \in Z_{d_1^1(\theta)}(G_2)$ tel que $Y_1 \notin \mathbb{C}X_1$ (dans le cas où un tel élément Y_2 existerait dans $d_1^2(\theta)$ le raisonnement serait le même que celui qui suit).
La plus petite représentation non triviale de G_2 étant de dimension 7 ([S-K] p.21) et $d_1^1(\theta)$ étant de dimension 8, l'existence d'un élément Y_1 différent de X_1, commutant à G_2, implique que $d_1^1(\theta)$ est un $\mathfrak{l}_\theta$-module trivial, ce qui contredit le fait que $I_1 = \{0\}$.
Il reste encore à démontrer que $Z_{\mathfrak{l}_\theta}(G_2) = \mathbb{C}H_1 \oplus \mathbb{C}H_2$. Soit $X_0 \in Z_{\mathfrak{l}_\theta}(G_2)$, alors $[X_0, X_1] \in Z_{d_1(\theta)}(G_2)$ et $[X_0, X_2] \in Z_{d_1(\theta)}(G_2)$. Il existe donc, d'après ce que nous venons de voir, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que $[X_0, X_1] = \lambda_1 X_1$ et $[X_0, X_2] = \lambda_2 X_2$. Mais alors il existe μ_1 et μ_2 uniques tels que $X_0 - \mu_1 H_1 - \mu_2 H_2 \in Z_{\mathfrak{l}_\theta}(X_1 + X_2) = G_2$. D'autre part, clairement, $[X_0 - \mu_1 H_1 - \mu_2 H_2, G_2] = \{0\}$; or G_2 n'a pas de centre donc $X_0 = \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2$.

4) 

Ici $\mathfrak{l}_\theta = D_4 \oplus \mathbb{C}H_1 \oplus \mathbb{C}H_2 \oplus \mathbb{C}H_3$ et il est clair que $D_4 \oplus \mathbb{C}H_1 \oplus \mathbb{C}H_2$ est inclus dans la sous-algèbre E_6 définie par le sous-diagramme correspondant.
Il est clair également que $d_1^3(\theta)$ est de dimension 1 et que seul $\mathbb{C}H_2 \oplus \mathbb{C}H_3$ agit sur cet espace. L'isotropie générique de $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est donc la même que dans le cas précédent, c'est G_2 ("*tout* se passe dans le diagramme E_6"). Puisque $d_1^1(\theta)$ et $d_1^2(\theta)$ sont toujours les mêmes représentations de dimension 8 de D_4, on en

déduit que $Z_{d_1^1(\theta)\oplus d_1^2(\theta)}(G_2) = \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2$. Puisque $d_1^3(\theta)$ est de dimension 1, on a que $Z_{d_1(\theta)}(G_2) = \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2 \oplus \mathbb{C}X_3$. La démonstration se termine alors comme dans le cas précédent.

5) 

La démonstration est analogue à celle de 4).

Le Théorème 4.1. est démontré. $\square$

Remarque 4.7. —

L'espace préhomogène $(Spin(7), spin)$ fait partie des quelques exemples de la liste de [S-K] qui n'apparaissent pas commes espaces préhomogènes paraboliques réguliers irréductibles ([Ru1], [Ru2]). L'exemple 3) de la démonstration précédente montre que $(Spin(7), spin)$ apparait comme "isotropie partielle" d'un espace préhomogène irrégulier de type parabolique ayant deux composantes irréductibles.

5. Principes de classification.

Les notations sont celles de 1.1.
Quelques remarques faciles sont résumées dans les Lemmes suivants .

Lemme 5.1. — *Ecrivons* $\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}'$. *Si* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *est une paire duale dans* $\mathfrak{g}$ *alors* $\mathfrak{a} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{a}_1$ *et* $\mathfrak{b} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{b}_1$ *où* $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$ *est une paire duale dans* $\mathfrak{g}'$. *Inversement toute paire duale dans* $\mathfrak{g}'$ *fournit ainsi une paire duale dans* $\mathfrak{g}$.

On est donc ramené à chercher les paires duales dans les algèbres semi-simples.

Lemme 5.2. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *semi-simple et soit* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *une paire duale dans* $\mathfrak{g}$. *Si* $\mathfrak{a}$ *possède un centre* $Z_{\mathfrak{a}}$ *non trivial, alors* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = Z_{\mathfrak{a}} = Z_{\mathfrak{b}} = Z$. *Posons* $\mathfrak{l}_Z = Z_{\mathfrak{g}}(Z)$. *L'algèbre* $\mathfrak{l}_Z$ *est une sous-algèbre de Levi de* $\mathfrak{g}$ *dont le centre est* Z. *Si on écrit* $\mathfrak{l}_Z = Z \oplus \mathfrak{l}'_Z$, $\mathfrak{a} = Z \oplus \mathfrak{a}'$ *et* $\mathfrak{b} = Z \oplus \mathfrak{b}'$, *alors* $(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}')$ *est une paire duale dans* $\mathfrak{l}'_Z$. *Inversement toute paire duale d'une sous-algèbre de Levi de* $\mathfrak{g}$ *est une paire duale de* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — L'assertion concernant l'égalité des centres est facile. Ecrivons alors $\mathfrak{a} = Z \oplus \mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b} = Z \oplus \mathfrak{b}'$ ($\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont réductives). Pour que $\mathfrak{l}_Z$ soit une sous-algèbre de Levi, il faut que Z soit constitué d'éléments semi-simples dans $\mathfrak{g}$, ce qui est le cas car $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont réductives dans $\mathfrak{g}$ d'après la définition des paires duales. Soit Z_1 le centre de $\mathfrak{l}_Z$; on a à priori $Z \subset Z_1$. Mais Z_1 commute à $\mathfrak{b}$, donc $Z_1 \subset Z$. On a donc bien $Z = Z_1$. Les assertions suivantes du Lemme sont alors évidentes. $\square$

On est donc ramené à chercher les paires duales semi-simples dans les algèbres semi-simples.

Lemme 5.3. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple et soit* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \ldots \times \mathfrak{g}_n$ *sa décomposition en idéaux simples. Si on se donne pour chaque* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *une paire duale* $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i)$ *dans* $\mathfrak{g}_i$, *alors* $(\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i, \prod_{i=1}^n \mathfrak{b}_i)$ *est une paire duale dans* $\mathfrak{g}$ *et toute paire duale de* $\mathfrak{g}$ *est obtenue de cette manière.*

Démonstration. — L'assertion directe est évidente. Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ une paire duale dans $\mathfrak{g}$. Montrons par exemple que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_n$. Puisque $\mathfrak{a} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b})$ on a, pour $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathfrak{a}$:

$$[(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)] = [a_1, b_1] + \ldots + [a_n, b_n] = 0 \quad \forall (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathfrak{b}$$

ce qui implique que

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = \ldots = [a_n, b_n] = 0 \qquad \forall (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathfrak{b}.$$

D'où :

$$[(0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots, 0), (b_1, b_2, \ldots, b_n)] = [a_i, b_i] = 0 \quad \forall (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathfrak{b},$$

ce qui implique que $(0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots, 0) \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$, ce qui donne le résultat. $\square$

Tout ceci montre qu'il suffit de chercher les paires duales (ou les sous-algèbres de Howe) semi-simples dans les algèbres simples. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons donc désormais que $\mathfrak{g}$ est simple et que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont semi-simples.

Nous avons vu au Paragraphe 4 que toute sous-algèbre C-admissible était une sous-algèbre de Howe et nous déterminérons au Paragraphe 5 quelles sont les sous-algèbres admissibles non C-admissibles qui sont des sous-algèbres de Howe. Les sous-algèbres admissibles de $\mathfrak{g}$ sont, par construction, des sous-algèbres dont les sous-espaces de Cartan sont des centres de sous-algèbres de Levi de $\mathfrak{g}$. Ceci est une propriété générale des sous-algèbres de Howe semi-simple comme le dit le Théorème suivant.

Théorème 5.4. — *Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Howe semi-simple de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{a}$. Alors $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$ est le centre d'une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} = Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}))$. Il est clair que $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \subset Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}))$. D'autre part les éléments de $Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}))$ sont dans le bicommutant de $\mathfrak{a}$, on a donc :

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \subset Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}})) \subset \mathfrak{a}.$$

On a donc

$$Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}})) \subset Z_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}.$$

Ce qui implique $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} = Z(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}))$. $\square$

Remarque 5.5. —

Le but de cette Remarque est de montrer (grâce au Théorème précédent) que les sous-algèbres de Howe semi-simples sont des sous-algèbres de nature *proche* de celle des sous-algèbres admissibles.

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Howe et soit $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{a}$. D'après ce que nous venons de voir $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}$ est le centre d'une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$. Soit alors $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}$. Soit $\mathcal{R}$ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, il existe une base Ψ de $\mathcal{R}$ et une partie θ de Ψ telles que $\mathfrak{h}_\mathfrak{a} = \mathfrak{h}_\theta$ et $Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_\mathfrak{a}) = \mathfrak{l}_\theta$ ([Bo2] VI, par.1, 7, Prop.20). Posons comme d'habitude $\Psi \setminus \theta = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$ et reprenons les notations du paragraphe 1.2. Soit $\mathcal{R}_\mathfrak{a}$ le système de racines de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}_\theta)$. On a évidemment $\mathcal{R}_\mathfrak{a} \subset \overline{\mathcal{R}}$ et on pose $\mathcal{R}_\mathfrak{a}^\pm = \overline{\mathcal{R}}^\pm \cap \mathcal{R}_\mathfrak{a}$.
La partition

$$\mathcal{R}_\mathfrak{a} = \mathcal{R}_\mathfrak{a}^+ \cup \mathcal{R}_\mathfrak{a}^-$$

où $\mathcal{R}_\mathfrak{a}^- = -\mathcal{R}_\mathfrak{a}^+$, définit classiquement une base $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_k$ de $\mathcal{R}_\mathfrak{a}$ (on pourra noter qu'on a également $\mathcal{R}_\mathfrak{a}^+ = \{\overline{\beta} \in \mathcal{R}_\mathfrak{a},\ \overline{\beta}(H_\theta) > 0\}$).

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$, notons $(X_{-\overline{\beta}_i}, H_{\overline{\beta}_i}, X_{\overline{\beta}_i})$ le $\mathfrak{sl}_2$-triplet dans $\mathfrak{a}$ classiquement associé à $\overline{\beta}_i$. Posons $\widetilde{\mathfrak{g}}_i = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{n\overline{\beta}_i}$ où on a posé $\mathfrak{g}^{\overline{0}} = \mathfrak{l}_\theta$. L'algèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}_i$ est réductive et est naturellement $\mathbb{Z}$-graduée. On voit sans peine que la $\mathbb{Z}$-graduation de $\widetilde{\mathfrak{g}}_i$ est définie par l'élément $H_{\overline{\beta}_i}$ qui joue donc le même rôle que l'élément H_θ défini au paragraphe 1.2.

Comme pour $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$, le Théorème de Vinberg ([Vi]) nous dit alors que $(\mathfrak{g}^{\overline{0}} = \mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{g}^{\overline{\beta}_i})$ est un espace préhomogène qui est par ailleurs irréductible. Le Théorème 2.3. s'applique alors (avec pour $\mathfrak{sl}_2$-triplet le triplet $(X_{-\overline{\beta}_i}, H_{\overline{\beta}_i}, X_{\overline{\beta}_i})$.

Tout ceci montre qu'une sous-algèbre de Howe $\mathfrak{a}$ a pour sous-algèbre de Cartan le centre $\mathfrak{h}_\theta$ d'une sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}_\theta$ et que les espaces radiciels $\mathfrak{a}^{\overline{\gamma}}$ de $\mathfrak{a}$ par rapport à $\mathfrak{h}_\theta$ sont des droites engendrées par des éléments réguliers des espaces préhomogènes $(\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{g}^{\overline{\gamma}})$. La seule différence est que, contrairement au cas admissible, où les racines de la base de $\mathcal{R}_\mathfrak{a}$ sont les racines $\overline{\gamma}_i$ où $\gamma_i \in \Psi \setminus \theta$ (c'est à dire sont en "position minimale"), les racines β_i de $\mathcal{R}_\mathfrak{a}$ peuvent être dans les "diagonales supérieures" $d_i(\theta)$ (avec $i > 1$).

Nous allons maintenant rappeler les notions de sous-algèbre régulière, de R-sous-algèbre et de S-sous-algèbre dues à Dynkin ([Dy], voir aussi [T]).

Définition 5.6. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Une sous-algèbre $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ est appelée régulière s'il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{u}$ soit invariante par $ad_\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ (i.e. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}$).*

5.7. Construction des sous-algèbres régulières, d'après Dynkin.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, soit D son graphe de Dynkin et soit $\widetilde{D}$ son graphe de Dynkin complété. Le graphe $\widetilde{D}$ n'est pas le graphe d'une algèbre semi-simple, mais dès qu'on enlève un sommet s_1 à $\widetilde{D}$ et toutes les arêtes qui y aboutissent, on obtient un graphe de Dynkin D_{s_1}, non nécessairement connexe. La sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par les espaces radiciciels $\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ ($\alpha \in D_{s_1}$) est une sous-algèbre $\mathfrak{g}_{s_1}$ régulière de rang maximal (c'est à dire égal au rang de $\mathfrak{g}$) et de graphe D_{s_1}.

L'opération passant de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}_{s_1}$ que nous venons de décrire s'appelle une *opération élémentaire.* On peut alors refaire une opération élémentaire sur D_{s_1} (ou plutôt sur une composante connexe de D_{s_1}) et ainsi de suite. Dynkin a alors montré que toute sous-algèbre régulière semi-simple de rang maximal est obtenue (à conjugaison près) par un nombre fini d'opérations élémentaire ([Dy] Th. 5.3. et Tables 9 et 10, [T] Th. 3.4.)

Les sous-algèbres régulières maximales sont toutes obtenues au moyen d'une seule opération élémentaire et à quelques exceptions près la réciproque est vraie (voir le Th. 5.5. de [Dy] et la remarque qui suit le Th 3.5. de [T]). Une explication rationnelle pour ces exceptions est fournie par [Bo2] (exercice 4, par.4, p.229) et par [Bo3] (exercice 2, par.3, p.222).

Signalons pour terminer qu'une sous-algèbre régulière semi-simple quelconque de $\mathfrak{g}$ est la partie semi-simple d'une sous-algèbre de Levi d'une sous-algèbre régulière de rang maximal ([Dy], Th 5.1. et Th. 5.2) (cette dernière étant donc obtenue par un nombre fini d'opérations élémentaires) .

Définition 5.8. — ([Dy]) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Une R-sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre contenue dans une sous-algèbre régulière propre.*

Définition 5.9. — ([Dy]) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Une S-sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre qui n'est pas une R-sous-algèbre.*

Remarque 5.10. —

a) De manière générale le centralisateur d'une S-sous-algèbre est réduit à $\{0\}$ ([Dy] Th 7.4.).

b) Si $\mathfrak{g}$ est de type A_n, les S-sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ sont exactement les sous-algèbres irréductibles, c'est à dire les sous-algèbres $\mathfrak{s}$ pour lesquelles la restriction de la représentation naturelle de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{s}$ est irréductible. Pour le voir considérons une sous-algèbre $\mathfrak{s}$ qui est irréductible. Si elle n'était pas S-irréductible, elle serait contenue dans une sous-algèbre régulière propre maximale de A_n. Mais la considération du graphe de Dynkin complété de A_n et la description des opérations élémentaires dans le §5.7. ci-dessus montre que A_n ne possède pas de sous-algèbre régulière propre de rang maximal.

Définition 5.11. — *Soit* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *une paire duale semi-simple d'une algèbre semi-simple* $\mathfrak{g}$. *Nous dirons que la paire* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *est S-irréductible si l'algèbre* $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ *est une S-algèbre.*

Théorème 5.12. — *Soit* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *une paire duale semi-simple non S-irréductible dans* $\mathfrak{g}$. *Il existe alors une sous-algèbre semi-simple régulière* $\mathfrak{u}$ *de rang maximal de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \subset \mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ *et telle que* $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ *est une S-sous-algèbre de* $\mathfrak{u}$.

Démonstration. — Il existe, d'après le Th 7.7. p.161 de [Dy], une sous-algèbre semi-simple régulière propre $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \subset \mathfrak{u}$. On choisit $\mathfrak{u}$ minimale pour ces propriétés.

Montrons qu'alors $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{u}$. Si ce n'était pas le cas, toujours d'après le Th.7.7. p.161 de [Dy], il existerait une sous-algèbre semi-simple régulière propre $\mathfrak{u}_1$ de $\mathfrak{u}$ telle que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \subset \mathfrak{u}_1 \subset \mathfrak{u}$.

Mais alors $\mathfrak{u}_1$ est régulière dans $\mathfrak{g}$., comme nous allons le voir. Puisque $\mathfrak{u}$ est régulière dans $\mathfrak{g}$ il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{u}$, telle que $\mathfrak{h}_\mathfrak{u} \subset \mathfrak{h}$, et une partie close et symétrique Γ du système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tels que :

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{h}_\mathfrak{u} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Puisque $\mathfrak{u}_1$ est régulière dans $\mathfrak{u}$, il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}'_\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{u}$, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathfrak{u}_1}$ de $\mathfrak{u}_1$ telle que $\mathfrak{h}_{\mathfrak{u}_1} \subset \mathfrak{h}'_\mathfrak{u}$ et une partie close et symétrique Γ' du système de racines de $(\mathfrak{u}, \mathfrak{h}'_\mathfrak{u})$ tels que :

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{h}_{\mathfrak{u}_1} \oplus \bigoplus_{\beta \in \Gamma'} \mathfrak{u}^\beta,$$

où les espaces $\mathfrak{u}^\beta$ sont les espaces radiciels par rapport à $\mathfrak{h}'_\mathfrak{u}$.

Soit U le sous-groupe du groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$ correspondant à $\mathfrak{u}$. Il existe $g \in U$ tel que $g.\mathfrak{h}'_\mathfrak{u} = \mathfrak{h}_\mathfrak{u}$. On aura donc :

$$g.(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}) \subset g.\mathfrak{u}_1 \subset \mathfrak{u}.$$

Mais alors $g.\mathfrak{u}_1$ est régulière dans $\mathfrak{g}$ car

$$g.\mathfrak{u}_1 = g.\mathfrak{h}_{\mathfrak{u}_1} \oplus \bigoplus_{\gamma \in g.\Gamma'} \mathfrak{u}^\gamma$$

où les espaces $\mathfrak{u}^\gamma$ sont les espaces radiciels de $\mathfrak{u}$ par rapport à $g.\mathfrak{h}'_\mathfrak{u} = \mathfrak{h}_\mathfrak{u}$. Puisque $\mathfrak{u}^\gamma = \mathfrak{g}^\gamma$, l'algèbre $g.\mathfrak{u}_1$ est bien régulière, il en est donc de même pour $\mathfrak{u}_1$.

Et ceci contredit la minimalité de $\mathfrak{u}$. Donc $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ est bien une S-sous-algèbre de $\mathfrak{u}$. Mais d'après ce que l'on a vu en 5.7., l'algèbre $\mathfrak{u}$ est la partie semi-simple d'une sous-algèbre de Levi d'une sous-algèbre semi-simple régulière de rang maximal. Si ce Levi était propre, alors la sous-algèbre $\mathfrak{u}$ commuterait à son centre (non-trivial) et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ne serait pas une paire duale semi-simple (Lemme 5.2.).
Donc $\mathfrak{u}$ est semi-simple régulière de rang maximal. $\square$

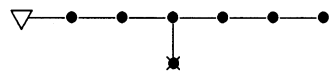
Remarque 5.13. —

Dans le cas bien connu de l'algèbre symplectique ([H1],[M-V-W]) la classification classique des paires duales utilise une notion d'irréductibilité qui semble à priori différente. Si W est un espace symplectique et si on se donne une décomposition orthogonale $W = W_1 \oplus W_2$, il s'en déduit des plongements des algèbres symplectiques $sp(W_1)$ et $sp(W_2)$ dans $sp(W)$ et une paire duale $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ dans $sp(W)$ est dite réductible si elle est incluse dans $sp(W_1) \oplus sp(W_2)$. La considération du graphe de Dynkin complété de C_n, montre facilement que pour les paires semi-simples dans $sp(W)$ les deux notions d'irréductibilité coincident.

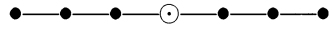
Remarque 5.14. —

La réciproque du Théorème 5.12. est cependant fausse. Il se peut qu'une paire duale dans une sous-algèbre régulière de rang maximal de $\mathfrak{g}$ ne soit soit pas une paire duale dans $\mathfrak{g}$. En voici un exemple. Plaçons nous dans E_7 et considérons le graphe de Dynkin complété :

(5 − 1)



Le symbole ∇ désigne l'opposé $-\omega$ de la plus grande racine et le sommet barré ✱ indique le sommet enlevé dans l'opération élémentaire. La sous-algèbre régulière de rang maximal de E_7 est donc ici de type $A_7 \simeq sl(8)$. Dans A_7 on considère la sous-algèbre C-admissible définie par le diagramme :



La sous-algèbre admissible $\mathfrak{a}$ est ici de type A_1 et $\mathfrak{b}$ est isomorphe à $sl(4)$ plongé diagonalement dans $\mathfrak{l}_\theta \simeq sl(4) \times sl(4)$. Mais $sl(4) \times sl(4)$ tout entier centralise l'espace radiciel correspondant au sommet barré (car il n'y a pas d'arête entre ✱ et les sommets correspondant à $sl(4) \times sl(4)$ dans le diagramme (5-1) ci-dessus). On en déduit que le centralisateur de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ est strictement plus grand que $\mathfrak{a}$.

La proposition suivante fournit une construction de paires duales liée à certaines opérations élémentaires.

Proposition 5.15. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de lie simple. Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ deux sous-algèbres semi-simples de $\mathfrak{g}$ (en particulier non réduites à $\{0\}$) telles que $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ soit une sous-algèbre régulière maximale de $\mathfrak{g}$. ($\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ est donc obtenue par une seule opération élémentaire). Alors $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ est une paire duale.*

Démonstration. — On a évidemment $\mathfrak{g}_2 \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)$. Il s'agit de montrer l'inclusion inverse. Soient $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ des sous-algèbres de Cartan respectives de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$. Puisque $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ est de rang maximal la sous-algèbre $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

L'algèbre $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)$ est stable par $ad\mathfrak{h}$. En effet pour $X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)$, pour $H = (H_1, H_2) \in \mathfrak{h}$ ($H_i \in \mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$) et pour $Y \in \mathfrak{g}_1$ on a :

$$[[H, X], Y] = [[H, Y], X] + [H, [X, Y]] = 0$$

car $[H, Y] = [H_1, Y] \in \mathfrak{g}_1$ et $[X, Y] = 0$. Cela montre bien que $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)$ est stable par $ad\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{g}_1$ est semi-simple on a $\mathfrak{g}_1 \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1) = \{0\}$.

L'algèbre $\mathfrak{g}_1 \oplus Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)$ est donc une sous-algèbre $ad\mathfrak{h}$-invariante contenant strictement $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ si et seulement si $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)$ contient strictement $\mathfrak{g}_2$. Si cela était le cas la maximalité de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ impliquerait que $\mathfrak{g}_1 + Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}$. Mais alors $\mathfrak{g}_1$ serait un idéal propre, ce qui est impossible puisque par hypothèse l'algèbre $\mathfrak{g}$ est simple. $\square$

Nous allons maintenant décrire une nouvelle construction de paires duales. Cette construction va fournir une classe de paires duales non S-irréductibles.

5.16. Nous supposons $\mathfrak{g}$ simple et utilisons les notations habituelles. Soit ω la plus grande racine du système de racines $\mathcal{R}$ de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ relativement à une base Ψ. Considérons le diagramme à poids (au sens du paragraphe 2) où les sommets encerclés (correspondant donc aux racines de $\Psi \setminus \theta$) sont ceux qui sont reliés par au moins une arête au sommet correspondant à $-\omega$ dans le graphe de Dynkin complété. Notons que dans ce cas Card($\Psi \setminus \theta$)=1 sauf dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de type A_n auquel cas Card($\Psi \setminus \theta$)=2. Il est connu que dans ce cas l'algèbre $\mathfrak{n}_\theta^+$ est une algèbre d'Heisenberg de centre $d_{top}(\theta) = d_2(\theta) = \mathfrak{g}^\omega$ ([J],Corollary 2.3. et [K-S], par. 3).

On a donc une $\mathbb{Z}$-graduation de la forme :

$$\mathfrak{g} = d_{-2}(\theta) \oplus d_{-1}(\theta) \oplus \mathfrak{l}_\theta \oplus d_1(\theta) \oplus d_2(\theta).$$

Appelons $\mathfrak{a}_\omega$ la sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$ engendrée par $(X_{-\omega}, H_\omega, X_\omega)$.

Proposition 5.17. — *Supposons que $\mathfrak{g}$ ne soit pas de type A_n. La paire $(\mathfrak{a}_\omega, \mathfrak{l}'_\theta)$ est alors une paire duale non S-irréductible.*

Démonstration. — Une première démonstration consiste à appliquer la Proposition 5.15. Nous en donnons ici une deuxième démonstration.
Puisque $d_2(\theta) = \mathfrak{g}^\omega$ est de dimension 1, ainsi que $d_{-2}(\theta)$, on a :

$$[\mathfrak{l}'_\theta, d_2(\theta)] = [\mathfrak{l}'_\theta, d_{-2}(\theta)] = \{0\}.$$

On en déduit que $\mathfrak{a}_\omega$ et $\mathfrak{l}'_\theta$ commutent, ce qui implique que $H_\omega = \frac{1}{2} H_\theta$ puisque le centre $\mathfrak{h}_\theta$ est de dimension 1. Puisque $\mathfrak{a}_\omega$ contient H_θ, le commutant de $\mathfrak{a}_\omega$ est donc $\mathfrak{l}'_\theta$.

Si le commutant de $\mathfrak{l}'_\theta$ était plus grand que $\mathfrak{a}_\omega$, il existerait un élément X non nul de $d_1(\theta)$ ou de $d_{-1}(\theta)$ qui commute à $\mathfrak{l}'_\theta$. Mais comme nous avons supposé que nous n'étions pas dans le cas A_n, les représentations $(\mathfrak{l}'_\theta, d_1(\theta))$ et $(\mathfrak{l}_\theta, d_{-1}(\theta))$ sont irréductibles, d'où la première assertion.

Cette paire duale n'est pas S-irréductible puisque

$$\mathfrak{a}_\omega \oplus \mathfrak{l}'_\theta \subset d_{-2}(\theta) \oplus \mathfrak{l}_\theta \oplus d_2(\theta)$$

et que $d_{-2}(\theta) \oplus \mathfrak{l}_\theta \oplus d_2(\theta)$ est une sous-algèbre régulière de $\mathfrak{g}$. $\square$

Remarque 5.18. —
Supposons toujours que $\mathfrak{g}$ n'est pas de type A_n. Alors, en illustration du Théorème 5.12, on constate sans peine que $\mathfrak{a}_\omega \oplus \mathfrak{l}'_\theta$ est la sous-algèbre régulière de rang maximal obtenue par l'opération élémentaire consistant à enlever l'unique racine reliée à $-\omega$ dans le graphe de Dynkin complété. De plus, bien que ce soit évident, signalons que la paire duale $(\mathfrak{a}_\omega, \mathfrak{l}'_\theta)$ dans $\mathfrak{a}_\omega \oplus \mathfrak{l}'_\theta$ est du type de celles construites dans la Proposition 5.15.

Voici encore une autre construction de paires duales, qui permettra notamment d'utiliser les listes des S-sous-algèbres des algèbres exceptionnelles données par Dynkin ([Dy]).

Proposition 5.19. — *Supposons que $\mathfrak{g}$ soit simple. Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des sous-algèbres semi-simples de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ soit une S-sous-algèbre maximale. Alors $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale (évidemment S-irréductible).*

Démonstration. — Supposons que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ne soit pas une paire duale. On peut alors supposer que l'inclusion

$$\mathfrak{b} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$$

est stricte. Puisque $\mathfrak{a}$ est semi-simple on a $\mathfrak{a} \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{0\}$. Donc, puisque $\mathfrak{g}$ est simple, on a la suite d'inclusions strictes :

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \times Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{g}.$$

L'algèbre $\mathfrak{a} \times Z_{\mathfrak{g}}$ ne peut être un S-sous-algèbre à cause de la maximalité de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Mais $\mathfrak{a} \times Z_{\mathfrak{g}}$ ne peut pas non plus être une R-sous-algèbre, car dans ce cas, l'algèbre $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ serait une R-sous-algèbre, ce qui est contraire à l'hypothèse. $\square$

Voici un critère pour obtenir des paires duales S-irréductibles utile par la suite.

Proposition 5.20. — *Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre admissible. Soit $\mathfrak{b} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ et supposons que $\mathfrak{b}$ soit une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$, alors $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale S-irréductible.*

Démonstration. — Commençons par montrer que nous avons bien une paire duale. D'après la généralisation du Lemme de Schur pour les S-sous-algèbres ([Dy],Th. 7.4. p. 160) on a :

$$Z_{\mathfrak{l}_\theta}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{h}_\theta,$$

ce qui signifie en d'autres termes que

$$Z_{\mathfrak{l}_\theta}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{l}_\theta \cap \mathfrak{a}.$$

Supposons que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ne soit pas une paire duale. Alors il existe $X \notin \mathfrak{a}$ tel que $[X, \mathfrak{b}] = 0$. On peut supposer que X est "homogène", c'est à dire que $X \in d_i(\theta)$ pour un entier $i \neq 0$ et par la suite nous supposerons également que $i > 0$.
Soit $(Y_\theta, H_\theta, X_\theta)$ le $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal ([K]) de $\mathfrak{a}$ relativement à $\mathfrak{h}_\theta$ et à la base $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_k$ de $\mathcal{R}_\mathfrak{a}$ (c'est à dire que $X_\theta = \sum_k X_i$, où $X_i \in \mathfrak{g}^{\overline{\gamma}_i} \cap \mathfrak{a}$ et que $Y_\theta = \sum_k Y_i$, où $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\overline{\gamma}_i} \cap \mathfrak{a}$). Désignons par $\mathfrak{sl}_2(\theta)$ la sous-algèbre engendrée par ce triplet.
L'algèbre $Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{b})$ est un $\mathfrak{a}$-module, donc un $\mathfrak{sl}_2(\theta)$-module. On aurait donc une décomposition

$$Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus V_\delta$$

les espaces V_δ étant des $\mathfrak{sl}_2(\theta)$-modules irréductibles, et on peut supposer que $X \in d_i(\theta) \cap V_\delta$.
Mais alors $(adY_\theta)^i X \in \mathfrak{l}'_\theta \cap Z_{\mathfrak{l}_\theta}(\mathfrak{b}) = \{0\}$, ce qui impliquerait $X = 0$. Donc $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est bien une paire duale.
Montrons à présent que cette paire est S-irréductible. Pour cela nous montrons que si $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ était une R-sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{b}$ serait une R-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
Si $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ est une R-sous-algèbre, il existe une sous-algèbre régulière semi-simple propre $\mathfrak{u}$ contenant $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ ([Dy], Th. 7.7. p. 161).
Alors $H_\theta \in \mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}$ se gradue en $\mathfrak{u} = \oplus \mathfrak{u}^n$ par rapport aux valeurs propres de H_θ. On a les inclusions

$$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{u}^0 = Z_\mathfrak{u}(H_\theta) \subseteq \mathfrak{l}_\theta.$$

On a nécessairement $\mathfrak{u}^0 \neq \mathfrak{l}_\theta$. Car si on avait égalité de ces deux espaces, l'algèbre $\mathfrak{u}$ contiendrait $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{l}_\theta$. Or la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{l}_\theta$ et $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{g}$, on aurait donc $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}$ ce qui contredit le fait que $\mathfrak{u}$ soit propre. $\square$

Lemme 5.21. — *Soit $\mathfrak{u}$ une sous-algèbre régulière semi-simple de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{u}^0$ une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{u}$. Alors $\mathfrak{u}^0$ est une sous-algèbre régulière de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration du Lemme 5.21. — Soit $\mathfrak{h}_1$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ par rapport à laquelle $\mathfrak{u}$ est régulière. D'après [Bo 3] (Prop. 2, chap. 8, par. 3, n° 1) on a

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{h}_1^P \oplus \mathfrak{g}^P$$

où P est une partie close et symétrique du système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et où $\mathfrak{h}_1^P = \sum_{\alpha \in P} \mathbb{C} H_\alpha$ (les H_α étant définis par rapport à ce dernier système de racines).
Soit $\mathfrak{h}_\mathfrak{u}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{u}$ par rapport à laquelle $\mathfrak{u}^0$ est "déployée" (c'est à dire que $\mathfrak{h}_\mathfrak{u}$ est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{u}^0$ et que $Z(\mathfrak{u}^0) \subseteq \mathfrak{h}$).

Il existe alors $u \in U$ (le sous-groupe de G correspondant à $\mathfrak{u}$) tel que $u(\mathfrak{h}_1^P) = \mathfrak{h}_\mathfrak{u}$. dans ce cas $u(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{u}] \subseteq \mathfrak{u}$ (car $[\mathfrak{h}, \mathfrak{u}] = u[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{u}] \subseteq u(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$).
Donc $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ par rapport à laquelle $\mathfrak{u}$ est régulière. Dans les notations déjà utilisées ci-dessus on a

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{h}^{P'} \oplus \mathfrak{g}^{P'}$$

où P' est une parties close et symétrique du système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Puisque $\mathfrak{u}^0$ est déployée par rapport à $\mathfrak{h}$, on en déduit le Lemme. $\square$

Lemme 5.22. — *Soit $\mathfrak{l}_\theta$ une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{u}^0 \subseteq \mathfrak{l}_\theta$ une sous-algèbre régulière de $\mathfrak{g}$ contenant H_θ. Alors $\mathfrak{u}^0$ est régulière dans $\mathfrak{l}_\theta$.*

Démonstration du Lemme 5.22. — Soit $\mathfrak{h}_1$ une sous-algèbre de cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{u}^0] \subseteq \mathfrak{u}^0$. Puisque $H_\theta \subseteq \mathfrak{u}^0$ on a

$$[\mathfrak{h}_1, H_\theta] \subseteq \mathfrak{u}^0 \subseteq \mathfrak{l}_\theta$$

et cela implique facilement que $\mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{l}_\theta$. donc $\mathfrak{h}_1$ est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l}_\theta$, ce qui implique que $\mathfrak{u}^0$ est régulière dans $\mathfrak{l}_\theta$. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition 5.20.

D'après ce qui précède $\mathfrak{u}^0$ est une sous-algèbre régulière propre de $\mathfrak{l}_\theta$ contenant $\mathfrak{b}$. On en déduit que $\mathfrak{b}$ est une R-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$, contrairement à l'hypothèse. $\square$

Nous allons maintenant décrire une condition nécessaire de S-irréductibilité. Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ une paire duale dans une algèbre simple $\mathfrak{g}$. Nous reprenons les notations de la Remarque 5.5. Soit $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{a}$ et soit $\mathcal{R}_\mathfrak{a}$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}_\mathfrak{a})$. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}$. Soient $\mathcal{R}$ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, Ψ une base de $\mathcal{R}$ et θ une partie de Ψ tels que $\mathfrak{h}_\mathfrak{a} = \mathfrak{h}_\theta$. Comme d'habitude on pose $\Psi \setminus \theta = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$. En posant $\mathcal{R}_\mathfrak{a}^\pm = \overline{\mathcal{R}}^\pm \cap \mathcal{R}_\mathfrak{a}$ on définit une base $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_k$ de $\mathcal{R}_\mathfrak{a}$.
Considérons le réseau Γ de $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}^* = \mathfrak{h}_\theta^*$ défini par

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{Z}\overline{\gamma}_i$$

et posons

$$\Gamma' = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{Z}\overline{\beta}_i \quad .$$

On a $\Gamma' \subseteq \Gamma$ et les racines de $\mathcal{R}_\mathfrak{a}$ sont des éléments de Γ'. D'autre part on a l'égalité $\Gamma' = \Gamma$ si et seulement si

$$det_{\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k\}}(\overline{\beta}_1,\overline{\beta}_2,\ldots,\overline{\beta}_k) \quad = \quad \pm 1$$

où $det_{\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k\}}(\overline{\beta}_1,\overline{\beta}_2,\ldots,\overline{\beta}_k)$ désigne le déterminant de $\overline{\beta}_1,\overline{\beta}_2,\ldots,\overline{\beta}_k$ dans la base $\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k\}$.
Si Γ' est strictement inclus dans Γ, alors l'algèbre

$$\mathfrak{g}^{\Gamma'} \quad = \quad \sum_{\overline{\delta}\in\Gamma'} \mathfrak{g}^{\overline{\delta}}$$

est une sous-algèbre régulière propre de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$ (car $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{g}^{\overline{0}}\subset\mathfrak{g}^{\Gamma'}$).

Nous avons donc prouvé la proposition suivante :

Proposition 5.23. — *(On utilise les notations précédentes) Si* $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ *est une paire duale S-irréductible alors* $det_{\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k\}}(\overline{\beta}_1,\overline{\beta}_2,\ldots,\overline{\beta}_k) \quad = \quad \pm 1$.

Corollaire 5.24. — *Soit* $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ *une paire duale S-irréductible. Supposons que* $\mathfrak{a}$ *soit de type* A_1. *Alors* $\mathfrak{a}$ *est admissible.*

Démonstration. — On a $\overline{\beta}_1 = n\overline{\gamma}_1$, avec $n\in\mathbb{N}$. La condition sur le déterminant qui figure dans la proposition précédente dit que $\overline{\beta}_1 = \overline{\gamma}_1$, ce qui donne le résultat $\square$

Malheureuseument cette condition sur le déterminant n'est pas tout à fait assez forte pour impliquer la S-irréductibilité, comme le montreront les exceptions au théorème principal de cet article (§8).

6. Détermination des sous-algèbres admissibles qui sont des sous-algèbres de Howe. Etude de la S-irréductibilité.

Nous avons vu dans le paragraphe 4 (Théorème 4.3.) que toute sous-algèbre C-admissible est une sous-algèbre de Howe. Nous allons maintenant déterminer (malheureusement par un calcul cas par cas) quelles autres sous-algèbres admissibles sont de Howe.

Comme nous examinons aussi la S-irréductibilité, nous reprendrons néanmoins les cas C-admissibles.

Comme précédemment nous désignerons par $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre admissible et par $\mathfrak{b}$ son centralisateur dans $\mathfrak{g}$.

Nous désignerons par M_p l'espace des matrices carrées de type $p \times p$, par $M_{p,q}$ l'espace des matrices de types $p \times q$, par S_p l'espace des matrices symétriques de type $p \times p$, et par $MAS(p)$ l'espace des matrices anti-symétriques de type $p \times p$, étant entendu qu'il s'agit ici de matrices à coefficients complexes.

Nous désignerons également par $gl(n)$ l'algèbre de Lie de toutes les matrices complexes de type $n \times n$, par $sl(n)$ la sous-algèbre de Lie des matrices de trace nulle, par $o(n)$ la sous-algèbre de Lie des matrices orthogonales (i.e. antisymétriques) et par $sp(n)$ l'algèbre de Lie des matrices symplectiques de type $2n \times 2n$.

6.1. Convention.

Commençons par fixer quelques notations utiles pour la suite. Soient $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_{k+1}$ une famille de $k+1$ algèbres simples. Nous aurons à considérer des représentations de $\mathbb{C}^k \times \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \ldots \times \mathfrak{g}_k \times \mathfrak{g}_{k+1}$ qui se décomposent en somme de k représentations irréductibles $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de sorte que seules les algèbres $\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_{i+1}$ agissent sur V_i par la représentation $\rho_i \otimes \sigma_i$ où ρ_i (respectivement σ_i) est une représentation irréductible de $\mathfrak{g}_i$ (respectivement $\mathfrak{g}_{i+1}$) ; le centre $\mathbb{C}^k$ agissant scalairement dans chaque composante V_i par un caractère que nous ne préciserons pas en général. Nous noterons une telle représentation par :

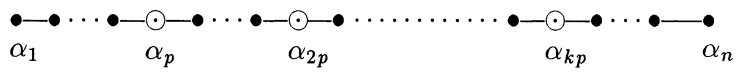
$$(\rho_1 \otimes \sigma_1) \oplus (\rho_2 \otimes \sigma_2) \oplus \ldots \oplus (\rho_k \otimes \sigma_k)$$

6.2. Diagrammes en dualité.

Nous dirons que deux diagrammes admissibles correspondant à des paires duales respectives $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ et $(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}')$ sont en dualité si $\mathfrak{a}$ est conjuguée à $\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}$ est conjuguée à $\mathfrak{a}'$, autrement dit si la sous-algèbre admissible correspondant à l'un des diagrammes est l'isotropie générique de l'autre.
On prendra garde cependant au fait que les sous-algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ne sont pas réalisées simultanément comme sous-algèbres admissibles et qu'un diagramme admissible n'admet pas forcément un diagramme dual.

6.3. Type A_n

$n = (k+1)p - 1, k \geq 1,\ n \geq 1,\ p \geq 1.$



$\mathfrak{a} \simeq A_k$

C-admissible

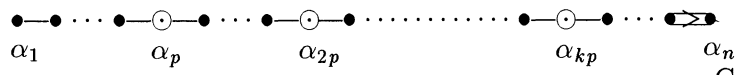
Nous savons déjà que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale. On vérifie facilement que la sous-algèbre $\mathfrak{b} \simeq sl(p)$ est réalisée dans $\mathfrak{g} \simeq sl((k+1)p)$ par le plongement

$$\mathfrak{b} \ni x \mapsto \begin{pmatrix} x & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & x \end{pmatrix} \in sl((k+1)p)$$

est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$. Donc d'après la proposition 5.20., $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale S-irréductible.
Le diagramme ci-dessus est en dualité avec le diagramme analogue où on a échangé les rôles de p et k.

6.4. Type B_n

$n \geq kp,\ (2k+1)p \leq (2n+1),\ p \geq 1.$



$\mathfrak{a} \simeq B_k$

C-admissible si $p = 1$

Puique le diagramme est C-admissible si $p = 1$, nous supposons d'abord que $p > 1$.

Nous avons $\mathfrak{l}_\theta \simeq gl(p)^k \times o(2(n-kp)+1)$ et $d_1(\theta) \simeq (M_p)^{k-1} \times M_{p,2(n-kp)+1}$.
Désignons par Λ_i $(i = 1, \ldots, p-1)$ la représentation fondamentale de $sl(p)$ correspondant à l'indice i dans la numérotation traditionnelle des racines dans le système A_{p-1}, et désignons aussi par Λ_1 la représentation naturelle de B_{n-kp} (cet abus de notation ne prêtera pas à confusion).
La représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est alors (dans les notations de 6.1.) :

$$\underbrace{(\Lambda_{p-1} \otimes \Lambda_1) \oplus \ldots \oplus (\Lambda_{p-1} \otimes \Lambda_1)}_{(k-1)\times} \oplus (\Lambda_{p-1} \otimes \Lambda_1).$$

La sous-algèbre d'isotropie générique $\mathfrak{b}$ du préhomogène $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ (qui est égal à $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ d'après la remarque 4.2.) a été calculée dans le cas irréductible (i.e. $k = 1$) dans [S-K] (exemple 15 p.145). Ici le calcul est quasiment le même et on trouve que $\mathfrak{b} \simeq o(p) \times o(2(n-kp)+1-p)$ est réalisé dans $\mathfrak{l}_\theta$ comme suit :

$$(6-1) \qquad o(p) \times o(2(n-kp)+1-p) \ni (a,b) \longmapsto (\underbrace{a, \ldots, a}_{k\times}, a, b) \in \mathfrak{l}_\theta$$

le dernier couple (a, b) étant plongé naturellement dans $o(2(n-kp)+1)$.
Nous examinons d'abord le cas $p > 2$. Commençons par montrer que dans ce cas $Z_{d_1(\theta)}(\mathfrak{b}) = \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}X_{k-1} \oplus \mathbb{C}X_k$ où $X_1 = X_2 = \ldots = X_{k-1} = I_p$, I_p étant la matrice unité de type (p,p), et où $X_k = (\, I_p \quad 0\,) \in M_{p,2(n-kp)+1}$.
Il est facile de voir qu'il suffit pour cela, de démontrer que si $X \in M_{p,2(n-kp)+1}$ vérifie $aX = X \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ pout tout couple $(a,b) \in o(k) \times o(2(n-kp)+1-p)$ alors $X = \mathbb{C}X_k$, ce qui ressort d'un simple calcul.
Montrons à présent que

$$(6-2) \qquad Z_{d_j(\theta)}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cap d_j(\theta).$$

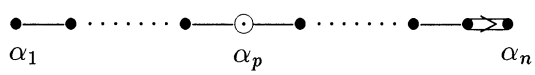
La même démonstration que celle figurant dans le Lemme 4.6. montre qu'il suffit de démontrer (6-2) dans le cas où j est strictement positif. Autrement dit,il suffit de prouver que si $\alpha \in \overline{\mathcal{R}}^+$ alors :

$$(6-3) \qquad Z_{\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}.$$

Toujours d'après la démonstration du Lemme 4.6. la relation (6-3) est vérifiée si $\overline{\alpha}$ n'est pas divisible. Si $\overline{\alpha}$ est divisible il suffit, d'après la proposition 3.7.,

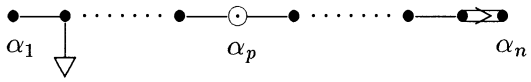
de prouver que la relation (6-3) est vraie pour $\overline{\alpha} = n\overline{\gamma}_i$ (où, comme toujours γ_i est une des racines encerclées du diagramme). Remarquons que dans le cas que nous considérons ici, la seule racine γ_i qui possède un multiple positif non trivial dont la restriction à $\mathfrak{h}_\theta$ est non nulle est $\gamma_k = \alpha_{kp}$.

Nous sommes ainsi ramenés au problème de prouver la relation (6-3) dans le cas du (sous)-diagramme irréductible (correspondant à $k = 1$) :

B_n 

$n \geq 2,\ 3p \leq 2n+1,\ p > 2$

La consultation de [Bo2] (Planche II p.252) montre alors que le seul multiple de $\overline{\alpha}_p$ qui soit une racine restreinte est $2\overline{\alpha}_p$. Dans ce cas la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{g}^{2\overline{\alpha}_p})$ a pour plus haut poids (relativement à θ...) la plus grande racine ω de $\mathcal{R}$ relativement à Ψ. La considération du diagramme complété :



où le symbole $\bigtriangledown$ désigne comme précédemment l'opposé $-\omega$ de la plus grande racine, montre que seul $gl(p)$ agit sur $\mathfrak{g}^{2\overline{\alpha}_p}$ (parce que nous supposons $p > 2$!) et que la représentation correspondante est la représentation Λ_2 qui est la représentation "naturelle" de $gl(p)$ dans $MAS(p)$.

Lorsqu'on restreint cette représentation à $\mathfrak{b}$, seul $o(p)$ agit sur $MAS(p)$: c'est la représentation adjointe de $o(p)$ qui est simple. On a alors :

$$Z_{\mathfrak{g}^{2\overline{\alpha}_k}}(\mathfrak{b}) = \{0\}$$

ce qui démontre la relation (6-3).

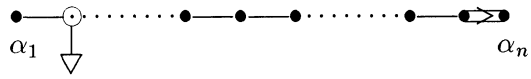
Il reste encore à montrer que :

$$Z_{\mathfrak{l}_\theta}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{h}_\theta = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{C}H_i.$$

Cela se fait de manière analogue à la démonstration du Lemme 4.5. On prend $X_0 \in Z_{\mathfrak{l}_\theta}(\mathfrak{b})$. Il existe alors des constantes $\gamma_i \in \mathbb{C}$ telles que l'élément $\tau_0 = X_0 - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i H_i$ appartient au centre de $\mathfrak{b}$ qui est réduit à $\{0\}$.

Finalement nous avons trouvé dans ce cas une paire duale de type $(B_k, o(p) \times o(2(n-kp)-p+1))$.

Considérons à présent le cas où $p = 2$. Regardons alors ce qui se passe dans le sous-diagramme irréductible (complété) :



La racine encerclée est celle qui est connectée à $-\omega$. Nous avons considéré cette situation en 5.16. et dans la proposition 5.17. Il résulte de ce qui a été dit en 5.16. que l'espace $\mathfrak{g}^{2\overline{\alpha}_2}$ est de dimension 1 (c'est le centre de l'algèbre d'Heisenberg), et donc que l'action de $\mathfrak{l}'_\theta$ sur $\mathfrak{g}^{2\overline{\alpha}_2}$ est triviale.
On en déduit que :

$$Z_{\mathfrak{g}^{2\overline{\alpha}_2}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{g}^{2\overline{\alpha}_2},$$

ce qui prouve que dans le cas $p = 2$, la sous-algèbre admissible n'est pas une sous-algèbre de Howe.

Remarquons qu'on aurait aussi pu dire que dans le cas $p = 2$, la sous-algèbre $\mathfrak{b} \simeq o(2) \times o((n-2p)-1)$ est réductive de centre non trivial, puisque $o(2)$ est commutative, et que d'après les considérations générales vues au paragraphe 1, si une sous-algèbre réductive est de Howe alors l'autre membre de la paire (i.e. $\mathfrak{a}$) a le même centre. Cela montre également que dans ce cas $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est pas une paire duale puiqu'ici $\mathfrak{a} \simeq A_1$.

Examinons maintenant les paires duales obtenues du point de vue de la S-irréductibilité.

Nous avons vu précédemment que l'isotropie générique de $X = (X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}, X_k) = (I_p, I_p, \ldots, I_p, (I_p, 0))$ est $\mathfrak{b} = o(p) \times o(2(n-kp)+1-p)$ réalisée comme en (6-1).
Si $(2k+1)p = 2n+1$ ("position limite à droite pour les racines encerclées") alors $\mathfrak{b}$ est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$. On en déduit que dans ce cas $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale S-irréductible. Si on pose $p = 2\ell + 1$, alors on a une paire duale de type $(o(2k+1), o(2\ell+1))$ et on verra grâce au §7 qu'il s'agit du produit tensoriel de deux formes symétriques en dimension $2k+1$ et $2\ell+1$. Le diagramme considéré ici est en dualité avec le diagramme analogue où on a échangé les rôles de p et ℓ.

Si $(2k+1)p < 2n+1$, considérons la sous-algèbre $\mathfrak{u}_0 = gl(p)^k \times o(p) \times o(2(n-kp)+1-p)$ de $\mathfrak{l}_\theta$ réalisée par le plongement naturel de $o(p) \times o(2(n-kp)+1-p)$ dans $o(2(n-kp)+1)$.
Le $\mathfrak{u}_0$-module $\mathfrak{u}_1$ engendré par $\mathfrak{u}_0$ et X est isomorphe à $(M_p)^k$, donc est distinct de $d_1(\theta)$. De même si on choisit $Y \in d_{-1}(\theta)$ de sorte que (Y, H_θ, X) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet, le $\mathfrak{u}_0$-module $\mathfrak{u}_{-1}$ engendré par $\mathfrak{u}_0$ et Y est distinct de $d_{-1}(\theta)$. Comme le rang de $\mathfrak{u}_0$ est égal au rang de $\mathfrak{l}_\theta$, c'est à dire au rang de $\mathfrak{g}$, on en déduit que la

sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{u}_0$,$\mathfrak{u}_1$ et $\mathfrak{u}_{-1}$ est une sous-algèbre régulière propre de $\mathfrak{g} = B_n$ qui contient $\mathfrak{a}$ (car les X_i et les Y_i sont dans $\mathfrak{u}_1$ et $\mathfrak{u}_{-1}$ respectivement) et $\mathfrak{b}$ (car $\mathfrak{b} \in \mathfrak{u}_0$).

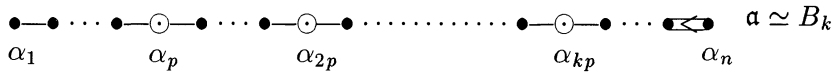
En conclusion $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est pas S-irréductible lorsque $(2k+1)p < 2n+1$.

Remarque 6.5.

Notons l'argument général utilisé ci-dessus. Si on se ramène, pour décider si une sous-algèbre admissible $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Howe , à un sous-diagramme irréductible qui n'est pas de type A_n et où la partie $\Psi \setminus \theta$ est l'unique racine de Ψ qui est connectéee à $-\omega$ dans le graphe de Dynkin complété, alors on sait d'après 5.16. que l'action de $\mathfrak{l}'_\theta$ sur $d_2(\theta)$ est triviale et on en conclut que $\mathfrak{a}$ n'est pas une sous-algèbre de Howe .

6.6. Type C_n

1) p pair, $(2k+1)p \leq 2n$.



$\mathfrak{a} \simeq B_k$

Ici on a :

$$\mathfrak{l}_\theta = (gl(p))^k \times sp(n-kp),$$

où $sp(n-kp)$ désigne l'algèbre de Lie des matrices symplectiques de type $(2n-2kp) \times (2n-2kp)$. Dans la convention 6.1. la représentation de $\mathfrak{l}_\theta$ sur $d_1(\theta)$ est :

$$\underbrace{(\Lambda_{p-1} \otimes \Lambda_1) \oplus \ldots \oplus (\Lambda_{p-1} \otimes \Lambda_1)}_{(k-1)\times} \oplus (\Lambda_{p-1} \otimes \Lambda_1).$$

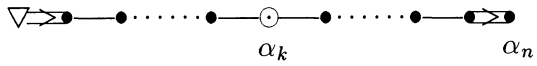
où le dernier Λ_1 désigne ici la représentation naturelle de $sp(n-kp)$ dans $\mathbb{C}^{2n-2kp}$.

Comme dans le cas précédent le calcul de $\mathfrak{b}$ se ramène au cas irréductible ($k=1$) qui a été fait par Sato et Kimura ([S-K], exemple 13 p.145). Finalement on trouve que $\mathfrak{b} \simeq sp(\frac{p}{2}) \times sp(n-kp-\frac{p}{2})$ est réalisé dans $\mathfrak{l}_\theta$ comme suit :

$$sp(\frac{p}{2}) \times sp(n-kp-\frac{p}{2}) \ni (a,b) \longmapsto (\underbrace{a,\ldots,a}_{k\times}, a, b) \in \mathfrak{l}_\theta$$

le dernier couple (a, b) étant plongé naturellement dans $sp(n - kp)$.

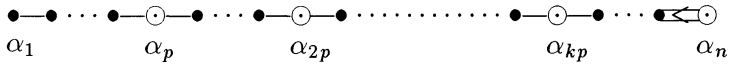
A nouveau, en utilisant comme dans le cas précédent la Proposition 3.7., on démontre qu'on a une paire duale si et seulement si le sous-diagramme irréductible (complété)



correspond lui aussi à une paire duale. Or ici on a : $d_{top}(\theta) = d_2(\theta) = \mathfrak{g}^{\overline{\omega}}$ où ω désigne la plus grande racine. La considération du graphe complété précédent montre que dans la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_2(\theta))$, seul $gl(p)$ agit dans $d_2(\theta)$ par la représentation $2\Lambda_1$ (Remarque 2.2.) qui est la représentation classique de $gl(p)$ dans l'espace S_p des matrices symétriques de type (p, p). On en déduit que dans la restriction de cette représentation à $\mathfrak{b}$, seul $sp(\frac{p}{2})$ agit sur $d_2(\theta) \simeq S_p$ et cette représentation est encore irréductible (elle est équivalente à la représentation adjointe de $sp(\frac{p}{2})$). On a donc $Z_{d_2(\theta)}(\mathfrak{b}) = 0$. On démontre alors comme dans les cas précédents qu'on a une paire duale de type $(B_k, C_{\frac{p}{2}} \times C_{n-kp-\frac{p}{2}})$.

Comme dans le cas B_n, on démontre que cette paire duale n'est S-irréductible que si les racines encerclées sont dans la "position limite à droite", c'est à dire si $(2k+1)p = 2n$. On a alors une paire duale de type $(o(2k+1), sp(\frac{p}{2}))$ dans $sp((2k+1)\frac{p}{2})$ et on verra grâce au § 7 qu'il s'agit du produit tensoriel d'un forme symétrique en dimension $2k+1$ et d'une forme alternée en dimension p.
Dans ce cas le diagramme considéré ici est en dualité avec le diagramme suivant où on a posé $k+1 = \frac{p}{2}$ et $p = 2k+1$ (dans ces égalités le premier entier correspond au diagramme suivant et le deuxième au diagramme considéré ici).

2) $n = (k+1)p$, $k \geq 0$, $p \geq 1$.

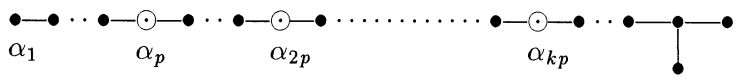


$\mathfrak{a} \simeq C_{k+1}$ C-admissible

Comme le diagramme est C-admissible on sait que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale. La sous-algèbre $\mathfrak{b} \simeq o(p)$ (plongée diagonalement) est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$. Donc $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (C_{k+1}, o(p))$ est S-irréductible (Prop. 5.20.). On verra grâce au §7 qu'il s'agit du produit tensoriel d'une forme alternée en dimension $2k+2$ et d'une forme symétrique en dimension p.
Lorsque $p = 2\ell+1$ le diagramme considéré ici est en dualité avec le précédent où on a posé $k = \ell$ et $p = 2k+2$ (dans ces égalités le premier entier correspond au diagramme précédent et le deuxième correspond au diagramme considéré ici).

6.7. Type D_n

1) $n \geq kp+2$, $(2k+1)p \leq 2n$.



$\mathfrak{a} \simeq B_k$ C-admissible si $p=1$

Pour décider si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale on traite ce cas de manière totalement analogue au cas 6.4. et on trouve :

- une paire duale de type $(B_k, o(p) \times o(2n-2kp-p))$ si $p \neq 2$.
- il n'y a pas de paire duale si $p=2$.

En ce qui concerne la S-irréductibilité, le même argument que pour B_n montre que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est pas S-irréductible si p est pair et si $(2k+1)p < 2n$.
Si $(2k+1)p = 2n$, ce qui implique que $p = 2\ell$ et qui constitue le cas "limite à droite" pour les racines encerclées, on montre comme dans le cas B_n que $\mathfrak{b}$ est S-irréductible dans $\mathfrak{l}'_\theta$ ce qui implique la S-irréductibilité de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (o(2k+1), o(2l))$ dans $o((2k+1)2\ell)$.
Nous verrons grâce au §7 qu'il s'agit du produit tensoriel de deux formes symétriques en dimensions $2k+1$ et 2ℓ.
Ce diagramme n'admet pas de diagramme dual puisque D_ℓ n'apparait jamais comme sous-algèbre admissible.
Suppsons à présent que $p = 2\ell+1$ est impair. Un calcul direct montre que $\mathfrak{b}$ est isomorphe à $o(2\ell+1) \times o(2n-4k\ell-2\ell-1)$ et que la projection de $\mathfrak{b}$ sur le "dernier" facteur $o(2n-4k\ell)$ de $\mathfrak{l}'_\theta$ est encore $o(2\ell+1) \times o(2n-4k\ell-2\ell-1)$. Ce plongement de $\mathfrak{b}$ dans $o(2n-4k\ell)$ correspond à une décomposition orthogonale de type

$$\mathbb{C}^{2n-4k\ell} = \mathbb{C}^{2\ell+1} \oplus \mathbb{C}^{2n-4k\ell-2\ell-1}$$

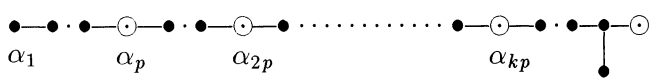
et on sait d'après [Dy] (Th. 7.2. p 159) que ce plongement est une S-sous-algèbre. On en déduit alors facilement que $\mathfrak{b}$ est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$, donc que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale S-irréductible (Prop. 5.20.).

Dans le cas $p=1$, le diagramme précédent est en dualité avec le diagramme où $p=1$ et où les $k' = n-k-1$ premiers sommets sont encerclés (cela découlera du §7).
Le lemme suivant sera utilisé dans le paragraphe 10.

Lemme 6.7.1. — *Considérons deux diagrammes du type précédent avec $p=1$ et où les k et $k+1$ premiers sommets sont encerclés. Alors on peut choisir les générateurs des sous-algèbres admissibles, qui sont respectivement de type B_k et B_{k+1}, de sorte que $B_k \subset B_{k+1}$.*

Démonstration. — Posons $\mathfrak{d}_i = Z_{D_n}(B_i)$ $i = k, k+1$. Il s'agit de montrer que $\mathfrak{d}_{k+1} \subset \mathfrak{d}_k$. Or $\mathfrak{d}_k$ est engendré par les vecteurs $X_{\pm\alpha_1}, \ldots, X_{\pm\alpha_{k-1}}, X_{\pm\alpha_k} + X_{\pm\widetilde{\alpha}}$ où $\widetilde{\alpha}$ est la plus grande racine du sous-système D_{n-k+1} (cela résulte de la classification des orbites dans l'espace préhomogène commutatif de type $D_{n,1}$ (cf. Table 2) que l'on trouve dans [M-R-S]). Il s'agit donc de montrer que $\mathfrak{d}_{k+1}$ commute avec ces vecteurs. Comme $\mathfrak{d}_{k+1} \subset D_{n-k-1}$, il est clair que $\mathfrak{d}_{k+1}$ commute aux vecteurs $X_{\pm\alpha_1}, \ldots, X_{\pm\alpha_k}$. Comme d'autre part la racine $\widetilde{\alpha}$ est uniquement connectée à α_{k+1}, la sous-algèbre $\mathfrak{d}_{k+1}$ commute aussi à $X_{\pm\widetilde{\alpha}}$. $\square$

2) $n = (k+1)p$, p pair, $p \geq 1$.

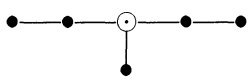


$\mathfrak{a} = C_{k+1}$ C-admissible

Le diagramme étant C-admissible on sait que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (C_{k+1}, C_{\frac{p}{2}})$ est une paire duale dans $C_{(k+1)p}$. Ici encore on montre que $\mathfrak{b}$ est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$ ce qui implique que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est S-irréductible.
Nous verrons grâce au §7 qu'il s'agit du produit tensoriel de deux formes alternées en dimension $2(k+1)$ et $p = 2\ell$.

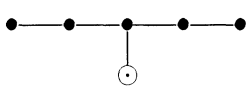
Considérons à présent le cas des algèbres exceptionnelles.

6.8. Type E_6

1) 

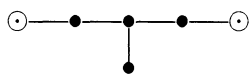
$\mathfrak{a} \simeq A_1$

Ici $\mathfrak{l}_\theta \simeq sl(3) \times sl(3) \times gl(2)$ et la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est $\Lambda_1 \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_1$ (cf. Remarque 2.2.). D'après [S-K] (Proposition 16 p.100) l'isotropie générique infinitésimale est isomorphe à $\mathbb{C}^2$, donc réductive à centre non trivial. D'après le Lemme 5.2. le couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ne peut donc être une paire duale.
Un autre argument consiste à dire que d'après le graphe complété (Planche V p.260 de [Bo2]) on a $[sl(3) \times sl(3), d_3(\theta)] = \{0\}$ et que $\mathfrak{b} \simeq \mathbb{C}^2$ est inclus dans $sl(3) \times sl(3)$ d'après les calculs effectifs de Sato et Kimura ([S-K] p.99), ce qui implique que $Z_{d_3(\theta)}(\mathfrak{b}) = d_3(\theta)$ et cela prouve bien qu'il n'y a pas de paire duale.

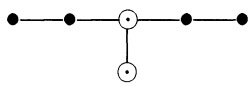
2) 

$\mathfrak{a} \simeq A_1$

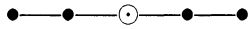
Ici $\mathfrak{l}_\theta \simeq gl(6)$ et la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est Λ_3. D'après [S-K] (Exemple 5, p. 145) l'isotropie générique $\mathfrak{b}$ est semi-simple et isomorphe à $sl(3) \times sl(3)$. Ici encore l'unique racine encerclée est celle sur laquelle se connecte la plus grande racine dans le graphe de Dynkin complété. On déduit de la Remarque 6.5. que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est pas une paire duale.

3)  $\mathfrak{a} \simeq A_2$

Ce diagramme étant C-admissible, nous savons d'après les calculs du §4 qu'il correspond à une paire duale (A_2, G_2). Prouvons que $\mathfrak{b} = G_2$ est une S-sous-algèbre de $D_4 = \mathfrak{l}'_\theta$. Si ce n'était pas le cas elle serait incluse dans une sous-algèbre régulière maximale propre de D_4. Or par des opérations élémentaires (cf. 5.4.) à partir du graphe complété de D_4, la seule sous-algèbre propre qu'on obtienne est $A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$. Or G_2 n'est pas inclus dans $A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$. D'après la Proposition 5.20. la paire duale considérée est S-irréductible.
Le diagramme considéré ici est en dualité avec le suivant $E_6 4)$ car d'après [Dy] (p 233) il n'existe qu'une seule S-sous-algèbre de E_6 qui est de type $A_2 \times G_2$ ce qui implique que cette algèbre est conjuguée à $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ dans les deux cas.

4)  $\mathfrak{a} \simeq G_2$

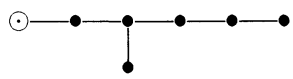
Le diagramme est C-admissible et d'après les calculs du §4 on obtient ici une paire duale de type (G_2, A_2).
Vu la configuration, l'isotropie générique est la même que celle du diagramme



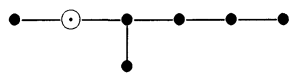
C'est à dire que $\mathfrak{b} = A_2$ est plongé diagonalement dans $\mathfrak{l}'_\theta = A_2 \times A_2$, ce qui montre, en utilisant la Remarque 5.10.b), que $\mathfrak{b}$ est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$. D'après la proposition 5.20., la paire duale $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (G_2, A_2)$ est S-irréductible.

Nous avons déjà vu que le diagramme considéré ici est en dualité avec le diagramme $E_6, 3)$ précédent.

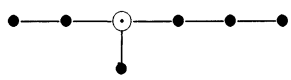
6.9. Type E_7

1)  $\mathfrak{a} = A_1$

Ici encore l'unique racine encerclée est celle qui est connectée à la plus grande racine dans le graphe complété.
D'après la Remarque 6.5. il n'y a pas de paire duale. Notons que la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est une représentation *Spin* de $o(12)$ et que d'après [S-K], exemple 23 p. 146, on a $\mathfrak{b} \simeq sl(6)$.

2)  $\mathfrak{a} \simeq A_1$

Ici $\mathfrak{l}_\theta \simeq gl(2) \times sl(6)$ et la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ (Convention 6.1.). Il s'agit de l'exemple 9 p.145 de [S-K] et l'isotropie générique $\mathfrak{b} \simeq sl(2) \times sl(2) \times sl(2)$. Le calcul explicite fait par Sato et Kimura ([S-K] p.92-93) prouve que $\mathfrak{b}$ est inclus dans $sl(6)$. La considération de la liste de racines de E_7 qu'on trouve dans la Planche VI p.264 de [Bo2] prouve que $d_{top}(\theta) = d_3(\theta)$ est de dimension 2 et surtout que $[sl(6), d_3(\theta)] = \{0\}$, ce qui prouve que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est pas une paire duale.

3)  $\mathfrak{a} \simeq A_1$

On a $\mathfrak{l}_\theta \simeq sl(3) \times sl(2) \times gl(4)$ et la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est $\Lambda_2 \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_1$. L'espace préhomogène correspondant à ce diagramme n'est pas réduit au sens de Sato et Kimura ([S-K], 2 p.35). Il est donc dans la même "castling class" ([S-K], p.39) qu'un espace préhomogène réduit que nous allons calculer. On a :

$$\begin{aligned} sl(3) \times sl(2) \times gl(4) \asymp sl(3) \times sl(2) \times gl(6-4) &\asymp gl(3) \times sl(2) \times sl(2) \\ &\asymp gl(3-2) \times sl(2) \times sl(2) \asymp gl(2) \times sl(2), \end{aligned}$$

où le signe $\asymp$ désigne une "castling transform". Le dernier espace préhomogène $(gl(2) \times sl(2), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1)$ a pour isotropie générique l'algèbre $sl(2)$ et, puisque d'après la Proposition 7 p.37 de [S-K] les "transformations de castling" ne changent pas l'isotropie générique, il en est de même pour $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$. Donc $\mathfrak{b} \simeq sl(2) \simeq A_1$.

Nous allons montrer que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, A_1)$ est une paire duale S-irréductible. L'argument n'étant pas très direct nous introduisons d'abord la notion d'index d'une sous-algèbre due à Dynkin [Dy].

6.9.1. Index et notations de Dynkin.

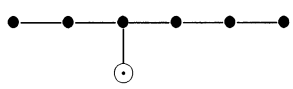
Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ deux algèbres de Lie simples telles que $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2$ et soient B_1 et B_2 leur formes de Killing respectives. Soit B_3 la restriction de B_2 à $\mathfrak{g}_1$. On a évidemment $B_3 = j_{1,2}B_1$ ou j est un entier ([Dy], Th. 2.2.) appelé l'index de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_2$, qui caractérise presque toujours la classe de conjugaison de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_2$ lorsque $\mathfrak{g}_2$ est de type exceptionnel (la conjugaison étant entendue au sens du groupe adjoint de $\mathfrak{g}_2$). Dans le cas d'une suite d'inclusions $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \mathfrak{g}_3$ l'index vérifie la propriété multiplicative suivante :

$$j_{1,3} = j_{1,2}j_{2,3} \tag{6-4}$$

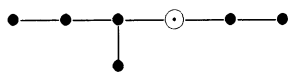
Dans l'article [Dy], Dynkin note l'index en exposant de $\mathfrak{g}_1$ (par exemple $A_1^{24} \subset E_7$ désigne l'unique sous-algèbre de type A_1 et d'index 24 dans E_7). Si l'index ne suffit pas à préciser la sous-algèbre en question (ce qui n'arrive que rarement), Dynkin rajoute des "prime" (par exemple $B_2^{'}$, $B_2^{''}$ ou $B_2^{'''}$ dans E_8).

Revenons à notre cas.

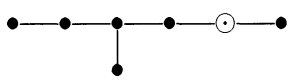
Dans la table ([Dy] p.233) des S-sous-algèbres de E_7 figure $A_1^{24} \times A_1^{15}$ et de plus cette algèbre est maximale dans E_7. Or la description de A_1^{24} qu'on trouve dans [Dy] (p 180) montre que A_1^{24} n'est autre que notre algèbre admissible $\mathfrak{a}$. D'après la proposition 5.19., la paire (A_1^{24}, A_1^{15}) est une paire duale S-irréductible. On en déduit que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale S-irréductible.
Nous verrons que le diagramme correspondant est en dualité avec $E_7 5$).

4)  $\mathfrak{a} = A_1$

Il s'agit de l'exemple 6 de [S-K] (p. 144-145). L'isotropie générique $\mathfrak{b}$ est de type G_2 et le plongement $G_2 \subset \mathfrak{l}_\theta \simeq gl(7)$ fournit la représentation irréductible de dimension 7 de G_2 (p. 20 et 83 de [S-K]). Ici $\mathfrak{b} = G_2$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathfrak{l}'_\theta \simeq sl(7)$, elle est donc S-irréductible (Remarque 5.10. b)), donc d'après la proposition 5.20., $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, G_2)$ est une paire duale S-irréductible.
Nous verrons que le diagramme considéré ici est en dualité avec $E_7 10$)

5)  $\mathfrak{a} = A_1$

Il s'agit de l'exemple 10 p. 145 de [S-K] . On y trouve le calcul de $\mathfrak{b}$ qui est ici de type A_1. Nous avons vu en 3) ci-dessus que (A_1^{24}, A_1^{15}) (notations de Dynkin) était une paire duale S-irréductible dans E_7. D'après le Corollaire 5.24. les sous-algèbres A_1^{24} et A_1^{15} doivent chacune apparaître comme sous-algèbre admissible. Or le diagramme considéré ici est le seul (mis à part E_7 3) où le couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est de type $A_1 \times A_1$. Donc on a que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (A_1^{15}, A_1^{24})$ est une paire duale S-irréductible et le diagramme considéré ici est bien en dualité avec celui considéré en 3).

6)  $\mathfrak{a} = A_1$

D'après [S-K], exemple 20 page 146, l'isotropie générique $\mathfrak{b}$ est de type $G_2 \times A_1$. Nous allons montrer que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale S-irréductible. Ici encore l'argument n'est pas très direct.
Commençons par considérer les tables des S-sous-algèbres des algèbres exceptionnelles fournies par Dynkin (p. 233). On y voit les inclusions suivantes :

$$G_2^1 \times A_1^8 \times A_1^{3''} \hookrightarrow F_4^1 \times A_1^{3''} \hookrightarrow E_7$$

$$G_2^1 \times A_1^8 \hookrightarrow F_4^1$$

chaque sous-algèbre étant une S-sous-algèbre dans les suivantes , $G_2^1 \times A_1^8$ étant maximale dans F_4^1 et $F_4^1 \times A_1^{3''}$ étant maximale dans E_7.
D'après la Proposition 5.19. (G_2^1, A_1^8) est alors une paire duale dans F_4^1 et $F_4^1 \times A_1^{3''}$ est une paire duale dans E_7
On en déduit que $Z_{E_7}(G_2^1 \times A_1^{3''}) = Z_{F_4}(G_2^1) = A_1^8$.
On a aussi $A_1^{3''} \times G_2^1 \subseteq Z_{E_7}(A_1^8)$. On en déduit la suite d'inclusions :

$$A_1^8 \subseteq Z_{E_7}(Z_{E_7}(A_1^8)) \subseteq Z_{E_7}(G_2^1 \times A_1^8) = A_1^8.$$

L'algèbre A_1^8 est donc une sous-algèbre de Howe. Montrons que $Z_{E_7}(A_1^8) = G_2^1 \times A_1^{3''}$.
On a les inclusions :

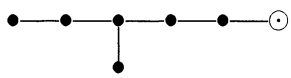
$$A_1^8 \times G_2^1 \times A_1^{3''} \subseteq A_1^8 \times Z_{E_7}(A_1^8) \subseteq E_7$$

(on notera que puisque $(A_1^8, Z_{E_7}(A_1^8))$ est une paire duale dont la première sous-algèbre de Howe est simple, on a bien $A_1^8 \cap Z_{E_7}(A_1^8) = \{0\}$, ce qui justifie la notation $A_1^8 \times Z_{E_7}(A_1^8)$).

Puisque, d'après Dynkin ([Dy], p. 233), la sous-algèbre $A_1^8 \times G_2^1 \times A_1^{3''}$ est maximale parmi les S-sous-algèbres de E_7 contenant le facteur A_1^8, on a bien $Z_{E_7}(A_1^8) = G_2^1 \times A_1^{3''}$. Nous avons ainsi mis en évidence une paire duale S-irréductible $(A_1^8, G_2^1 \times A_1^{3''})$.

D'après le Corollaire 5.24. l'algèbre A_1^8 est admissible. Or parmi les sous-algèbres admissibles de type A_1, celle que nous considérons ici est la seule dont l'isotropie générique $\mathfrak{b}$ est de type $G_2 \times A_1$ (cela nécessite de regarder toutes les sous-algèbres admissibles de type A_1 dans E_7, y compris celles considérés ci-dessous).

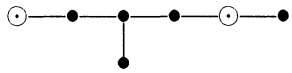
Finalement $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (A_1^8, G_2^1 \times A_1^{3''})$ est une paire duale S-irréductible dans E_7.

7)  $\mathfrak{a} = A_1$

Nous savons qu'il s'agit là d'un diagramme C-admissible et par conséquent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sera une paire duale (Théorème 4.1.) ; Il s'agit de l'exemple 27 p. 147 de [S-K], on y trouve le calcul de $\mathfrak{b}$ qui est ici de type F_4 (la représentation $(\mathfrak{l}'_\theta, d_1(\theta))$ est ici la fameuse représentation de dimension 27 de E_6).

En compulsant à nouveau les tables de Dynkin ([Dy], p. 233) on trouve la S-sous-algèbre maximale $F_4^1 \times A_1^{3''}$ déjà utilisée précédemment. D'après la Proposition 5.19. on en déduit que $(A_1^{3''}, F_4^1)$ est une paire duale S-irréductible. Mais d'après le Corollaire 5.24. l'algèbre $A_1^{3''}$ est alors admissible. Or l'algèbre $\mathfrak{a}$ que nous considérons ici est la seule sous-algèbre admissible de type A_1 dont le centralisateur $\mathfrak{b}$ est de type F_4. Donc $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (A_1^{3''}, F_4^1)$ est une paire duale S-irréductible.

Nous verrons que le diagramme considéré ici est en dualité avec E_7 12).

8)  $\mathfrak{a} = B_2$

La représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ n'est plus irréductible puisque le diagramme comprend deux racine encerclées . Il y a deux composantes irréductibles $d_1^1(\theta)$ et $d_1^2(\theta)$ (Proposition 2.5.) et $\mathfrak{l}'_\theta \simeq D_4 \times A_1 \simeq o(8) \times A_1$. La représentation

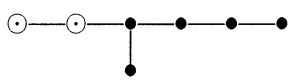
$(\mathfrak{l}'_\theta, d_1^1(\theta))$ est la représentation naturelle de $o(8)$ (A_1 n'agit pas sur $d_1^1(\theta)$) et la représentation $(\mathfrak{l}'_\theta, d_1^2(\theta))$ est $Spin \otimes \Lambda_1$ où $Spin$ désigne une représentation spinorielle de $o(8)$ et où Λ_1 désigne comme d'habitude la représentation naturelle de A_1.

L'isotropie générique de la première est $o(7) \times A_1 \times \mathbb{C}$ et la représentation $(o(7) \times A_1, d_1^2(\theta))$ est $(o(7) \times A_1, Spin \times \Lambda_1)$ où $Spin$ désigne ici la représentation spinorielle de $o(7)$. Cette dernière représentation figure dans la liste de Sato-Kimura (exemple 17 p. 146 de [S-K]). On y trouve le calcul de l'isotopie générique qui est ici $\mathfrak{b} \simeq A_2 \times \mathbb{C}$. L'algèbre $\mathfrak{b}$ est donc réductive non semi-simple.

D'après le Lemme 5.2. la paire $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est donc pas une paire duale.

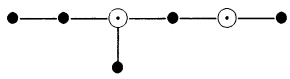
Remarque 6.9.2.

L'espace préhomogène $(Spin(7) \times gl(2), Spin \otimes \Lambda_1)$ qui apparaît comme isotropie partiel d'un espace préhomogène de type parabolique non irréductible fait partie des quelques exemples d'espaces préhomogènes de la liste de Sato-Kimura qui n'apparaisent pas comme espaces préhomogènes paraboliques irréductibles, c'est à dire qui ne figurent pas dans la Table 1.

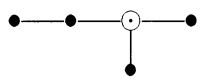
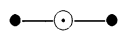
9)  $\mathfrak{a} = G_2$

Nous savons, puisque le diagramme est C-admissible, que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ va être une paire duale. Le calcul de $\mathfrak{b}$ est aisé, on trouve $\mathfrak{b} \simeq C_3 \simeq sp(3)$. Mais $sp(3)$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathfrak{l}'_\theta \simeq sl(6)$. Elle est donc S-irréductible dans $\mathfrak{l}'_\theta$ d'après la Remarque 5.10. b). La paire duale $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (G_2, C_3)$ est alors S-irréductible d'après la proposition 5.20.

Nous verrons que le diagramme considéré ici est en dualité avec le diagramme E_7 11) ci-dessous.

10)  $\mathfrak{a} = G_2$

Nous savons (Théorème 3.3.) que la sous-algèbre admissible G_2 est engendrée par les triplets (Y_1, H_1, X_1) et (Y_2, H_2, X_2) où $X_1 \in d_1^1(\theta)$ et $X_2 \in d_1^2(\theta)$. Considérons les sous-diagrammes irréductibles du diagramme considéré :

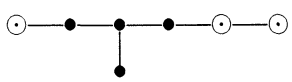
L'isotropie générique du deuxième (qui correspond à $d_1^2(\theta)$) est A_1 plongé diagonalement dans $\mathfrak{l}'_{\theta_2} \simeq A_1 \times A_1$. De ce fait l'action de l'isotropie partielle de $(\mathfrak{l}_\theta, d_1^2(\theta))$ sur $d_1^1(\theta)$ est simplement l'action de $(\mathfrak{l}_{\theta_1}, d_1^1(\theta)$ qui se lit sur le premier sous-diagramme irréductible. Dans ce premier sous-diagramme on a $\mathfrak{l}'_{\theta_1} \simeq A_2 \times A_1 \times A_1 \simeq sl(3) \times o(4)$ (car $A_1 \times A_1 \simeq o(4)$). La représentation $(\mathfrak{l}'_{\theta_1}, d_1^1(\theta))$ est alors la représentation $\Lambda_1 \otimes \Lambda_1$ de $sl(3) \times o(4)$, où Λ_1 désigne les représentations naturelles de $sl(3)$ et $o(4)$.
L'isotropie générique de $(\mathfrak{l}_{\theta_2}, d_1^1(\theta))$ est isomorphe à o(3) plongé comme suit dans $\mathfrak{l}'_{\theta_1} \simeq sl(3) \times o(4)$:

$$o(3) \ni A \mapsto (A, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \in sl(3) \times o(4)$$

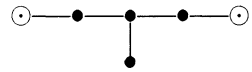
On voit ainsi que cette isotropie est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}^1_{\theta_1}$ (le fait que le plongement $o(3) \hookrightarrow o(4)$ est une S-sous-algèbre découlera du §7).
Considérons à nouveau l'algèbre $\mathfrak{l}'_\theta$ comme étant $A_2 \times \underbrace{A_1 \times A_1}_{o(4)} \times A_1$. Vu ce qui précède l'algèbre d'isotropie générique $\mathfrak{b}$ est (ou est L_θ-conjuguée) à l'algèbre isomorphe à A_1 obtenue par le plongement

$$A_1 \ni A \mapsto (\widetilde{A} \times A, A, A) \in A_2 \times A_1 \times A_1 \times A_1$$

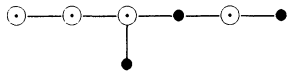
où $A \mapsto \widetilde{A}$ est l'isomorphisme classique entre $sl(2)$ et $o(3)$.
On en déduit que $\mathfrak{b}$ est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$. On en déduit par la Proposition 5.20. que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (G_2, A_1)$ est une paire duale S-irréductible.
Toujours en utilisant les tables de la p. 233 de [Dy] et la Proposition 5.19. on constate que dans E_7 il n'y a qu'une seule paire duale de type (A_1, G_2) (il s'agit de (A_1^7, G_2^1) dans les notations de Dynkin). On en déduit que le diagramme considéré ici est en dualité avec celui de E_7, 4).

11)  $\mathfrak{a} = C_3$

C'est un diagramme C-admissible que nous avons étudié en détail dans la démonstration du Théorème 4.1. Nous savons que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (C_3, G_2)$ est une paire duale. En fait l'isotropie générique $\mathfrak{b}$ est la même que celle du sous-diagramme irréductible E_6 3) :

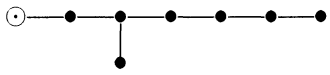


Nous avions alors montré que $\mathfrak{b} \simeq G_2$ est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta \simeq D_4$.
La Proposition 5.20. implique alors que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (C_3, G_2)$ est une paire duale S-irréductible. Toujours d'après [Dy] p.233 et la proposition 5.19. on constate qu'il n'y a qu'une seule paire duale S-irréductible de type (C_3, G_2) (dans les notations de Dynkin c'est la paire $(C_3^{1''}, G_2^1)$)). En conséquence le diagramme considéré ici est bien en dualité avec celui de E_7 9).

12)  $\mathfrak{a} = F_4$

Le diagramme est C-admissible, nous savons donc (Th. 4.1.) que nous avons affaire à une paire duale. L'isotropie générique se calcule facilement et on trouve $\mathfrak{b} \simeq A_1$ plongé diagonalement dans $\mathfrak{l}'_\theta = A_1 \times A_1 \times A_1$. On déduit de la Remarque 5.10.b) que $\mathfrak{b}$ est une S-sous-algèbre de $\mathfrak{l}'_\theta$, puis, grâce à la proposition 5.20., que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (F_4, A_1)$ est une paire duale S-irréductible dans E_7. Les mêmes arguments que précédemment permettent de l'identifier avec la paire $(F_4^1, A_1^{3''})$ dans les notations de [Dy] et, parce qu'il n'y a qu'une seule S-sous-algèbrede type $F_4 \times A_1$ dans E_7, on peut affirmer que le diagramme étudié ici est en dualité avec E_7 7).

6.10. Type E_8

1)  $\mathfrak{a} \simeq A_1$

Il s'agit de l'exemple 25 p. 146 de [S-K], d'où on tire que $\mathfrak{b} \simeq G_2 \times G_2$. La table 20 p. 182 de [Dy] montre que la sous-algèbre admissible $\mathfrak{a}$ est la sous-algèbre A_1^8 de Dynkin.
La table 39 p. 233 de [Dy] indique les inclusions suivantes :

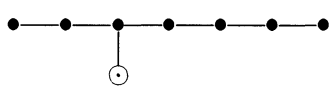
$$G_2^1 \times G_2^1 \times A_1^8 \hookrightarrow G_2^1 \times F_4^1 \hookrightarrow E_8$$

$$G_2^1 \times A_1^8 \hookrightarrow F_4^1$$

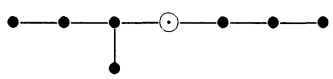
chacune de ces algèbres étant une S-sous-algèbre maximale de la suivante. On en déduit que $\mathfrak{b} = G_2^1 \times G_2^1$. La proposition 5.19. permet de dire que (G_2^1, F_4^1) est une paire duale (S-irréductible) dans E_8.
On a alors :

$$Z_{E_8}(G_2^1 \times G_2^1) = Z_{F_4}(G_2^1) = A_1^8.$$

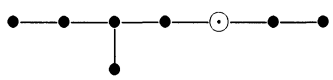
Finalement $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (A_1^8, G_2^1 \times G_2^1)$ est une paire duale S-irréductible dans E_8.

2)  $\mathfrak{a} \simeq A_1$

C'est l'exemple 7 p. 145 de [S-K], d'où l'on tire que $\mathfrak{b} \simeq A_2$. Le plus simple est ici encore d'utiliser les résultats de Dynkin. D'après la table 20 p. 183 de [Dy] on voit que $\mathfrak{a} = A_1^{16}$. De plus la table 39 p.233 de [Dy] indique que $A_1^{16} \times A_2^{6'}$ est une S-sous-algèbre maximale. On déduit alors de la Proposition 5.19 que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1^{16}, A_2^{6'})$ est une paire duale S-irréductible.

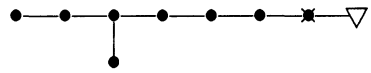
3)  $\mathfrak{a} \simeq A_1$

C'est l'exemple 11 p. 145 de [S-K]. Il ne correspond pas à une paire duale puisque $\mathfrak{b} = \{0\}$.

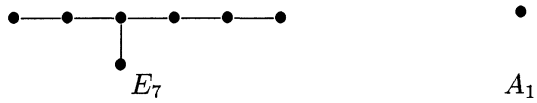
4)  $\mathfrak{a} \simeq A_1$

En fait d'après [Dy] (p. 183) on peut préciser : $\mathfrak{a} = A_1^{24}$.
D'autre part il s'agit ici de l'exemple 21 p. 146 de [S-K], d'où l'on tire que $\mathfrak{b} \simeq A_1 \times A_1$.
Il n'existe pas dans E_8 de S-sous-algèbre de type $A_1^{24} \times A_1 \times A_1$ dans la liste de Dynkin ([Dy] p. 233), Donc $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est certainement pas une paire duale S-irréductible. Mais nous allons montrer qu'il s'agit quand même d'une paire duale

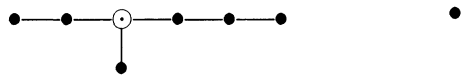
et nous allons indiquer comment elle se plonge dans une sous-algèbre régulière maximale de E_8 (cf. Théorème 5.12.) .
Considérons l'opération élémentaire sur E_8 décrite par le diagramme suivant :



où, comme dans la Remarque 5.14., le symbole ∇ désigne l'opposé $-\omega$ de la plus grande racine et où le sommet barré ✖ indique le sommet enlevé lors de l'opération élémentaire.
On obtient la sous-algèbre régulière maximale dont le diagramme de Dynkin (non connexe) est :



Il s'agit donc d'une sous-algèbre régulière de type $E_7 \times A_1$.
Or nous avons vu que A_1^{24} est déjà dans E_7, c'est en fait la sous-algèbre admissible correspondant au diagramme E_7 3). Le diagamme suivant



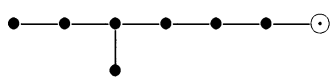
correspond alors à une sous-algèbre admissible $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de E_7 où $\mathfrak{a} = A_1^{24}$ et dont le centralisateur est $\mathfrak{b} = A_1^{15} \times A_1$. Le facteur A_1^{15} correspond au centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans E_7 et le facteur A_1 est le facteur correspondant à la racine isolée dans le diagramme ci-dessus. Mais en se rappelant que cette racine isolée,vue dans E_8, est l'opposé $-\omega$ de la plus grande racine, la table 20 p. 182 de [Dy] montre que cette algèbre A_1 est A_1^1 dans E_8.
Puisque $A_1^{15} \times A_1^1$ commute à A_1^{24} et que nous savons déjà que le centralisateur de A_1^{24} est de type $A_1 \times A_1$, on a $Z_{E_8}(A_1^{24}) = A_1^{15} \times A_1^1$. Mais d'après la Proposition 5.17., la paire (A_1^1, E_7) est une paire duale dans E_8. On a donc

$$Z_{E_8}(A_1^1 \times A_1^{15}) = Z_{E_7}(A_1^{15}) = A_1^{24}\,.$$

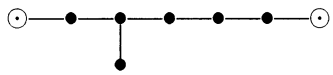
La paire $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (A_1^{24}, A_1^{15} \times A_1^1)$ est donc bien une paire duale non S-irréductible.

5) $\mathfrak{a} \simeq A_1$

C'est l'exemple 28 p. 147 de [S-K] dont l'isotropie générique $\mathfrak{b}$ est de type $D_4 \simeq o(8)$. Or on sait (par exemple d'après [S-K] ou [Bo 3]) que les représentations fondamentales de D_4 sont trois représentations non-équivalentes de dimension 3 et la représentation adjointe de dimensin 28. Or ici l'espace $d_{top}(\theta) = d_3(\theta)$ est de dimension 2. On en déduit que $[\mathfrak{b}, d_3(\theta)] = \{0\}$, donc que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est pas une paire duale.

6)  $\mathfrak{a} = A_1$

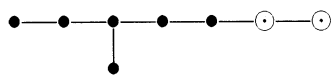
C'est l'exemple 29 p. 147 de [S-K] et on a $\mathfrak{b} \simeq E_6$. Mais ici l'unique racine encerclée est celle qui est connectée à la plus grande racine dans le diagramme complété. On déduit de la Remarque 6.5. que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est pas une paire duale.

7)  $\mathfrak{a} \simeq B_2$

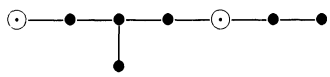
On a $\mathfrak{l}_\theta \simeq o(12) \times \mathbb{C}$ et la représentation de $\mathfrak{l}_\theta$ sur $d_1(\theta)$ est $\Lambda_1 \oplus Spin(12)$ où Λ_1 désigne la représentation naturelle de $o(12)$ et où $Spin$ est une représentation spinorielle de $o(12)$. L'isotropie générique de Λ_1 est $o(11)$ et la restriction de $Spin(12)$ à $o(11)$ est $Spin(11)$ (voir [S-K] p.114). On retombe ainsi sur l'exemple 22 p. 146 de [S-K] dont l'isotropie générique, qui est notre $\mathfrak{b}$, est de type $sl(5) \simeq A_4$. D'après la table 39 p. 233 de [Dy] il n'existe pas de S-sous-algèbre de type $B_2 \times A_4$ dans E_8. Donc si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale alors elle serait une paire duale dans une sous-algèbre régulière de rang 8 dans E_8 (cf. Th. 5.12.). Le Lemme 5.3. implique que cette sous-algèbre régulière doit nécessairement être connexe. Les seules possibilités sont alors A_8 et D_8. Il ressortira du §7 ci-dessous qu'il n'y a de paire duale S-irréductible de type (B_2, A_4) ni dans D_8 ni dans A_8. Le couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (B_2, A_4)$ n'est donc pas une paire duale dans E_8.

Remarque 6.10.1.

Notons ici encore que, ci-dessus, l'espace préhomogène $o(11) \times \mathbb{C}, Spin(11))$ qui apparaît comme isotropie partielle fait partie des quelques exemples d'espaces préhomogènes de la liste de Sato et Kimura qui n'apparaissent comme espaces préhomogènes paraboliques.

8)  $\mathfrak{a} \simeq G_2$

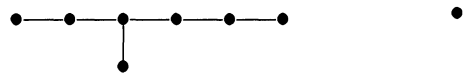
S'agissant d'un diagramme C-admissible, nous savons déjà que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sera une paire duale. On a $\mathfrak{l}_\theta \simeq E_6 \times \mathbb{C}$ et la représentation de $\mathfrak{l}_\theta$ dans $d_1(\theta)$ est la représentation de dimension 27 de E_6 dont l'isotropie générique est F_4 (exemple 27 p. 147 de [S-K]). Nous avons donc une paire duale (G_2, F_4). D'après [Dy] p.233 il existe dans E_8 une unique S-sous-algèbre de type $G_2 \times F_4$. Il s'agit, toujours dans les notations de Dynkin, de $G_2^1 \times F_4^1$. On déduit de la Proposition 5.19. que (G_2^1, F_4^1) est une paire duale. Le plongement de F_4 dans E_6 étant unique, on a que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (G_2^1, F_4^1)$ est une paire duale S-irréductible. Nous verrons que le diagramme considéré ici est en dualité avec E_8, 10).

9)  $\mathfrak{a} \simeq G_2$

On a $\mathfrak{l}_\theta \simeq o(8) \times sl(3) \times \mathbb{C}^2$ et la représentation sur $d_1(\theta)$ est $\Lambda_1 \oplus [Spin(8) \otimes \Lambda_1]$ où, comme d'habitude Λ_1 désigne les représentations naturelles de $o(8)$ et $sl(3)$. L'isotropie de la représentation naturelle de $o(8)$ est $o(7)$ et la restriction de $Spin(8)$ à $o(7)$ est $Spin(7)$. La représentation de l'isotropie de $d_1^1(\theta)$ sur $d_1^2(\theta)$ est donc $(o(7) \times gl(3), Spin(7) \otimes \Lambda_1$. Il s'agit là de l'exemple 18 p.146 de [S-K] d'où l'on tire que $\mathfrak{b} \simeq A_1 \times A_1$.

Le couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (G_2, A_1 \times A_1)$ n'est certainement pas une paire duale S-irréductible dans E_8, puisque la seule sous-algèbre de type G_2, qui apparait comme facteur dans la liste des S-sous-algèbres de E_8 ([Dy] p. 233) est G_2^1 dont le centralisateur est F_4^1. Nous allons montrer qu'il s'agit cependant bien d'une paire duale. Commençons par identifier la sous-algèbre $\mathfrak{a} \simeq G_2$ en terme d'index (voir 6.8.1). D'après la page 184 de [Dy], le $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal du G_2 admissible que nous avons ici est d'index 56 dans E_8, or ce $\mathfrak{sl}_2$-triplet est d'index 28 dans G_2 ([Dy] p. 176). On déduit alors de la relation (6-4) que notre G_2 est d'index 2 dans E_8. C'est donc G_2^2 dans les notations de Dynkin.

Toujours d'après [Dy] p. 233, $G_2^2 \times A_1^7$ est une S-sous-algèbre maximale de E_7. D'après la Proposition 5.19., (G_2^2, A_1^7) est alors une paire duale S-irréductible dans E_7. Mais vu que que le diagramme non connexe suivant



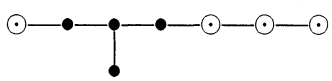
correspond à une sous-algèbre régulière maximale de E_8, on a ainsi une paire duale de type (E_7, A_1) (voir Prop. 5.15. ou 5.17.).

Mais alors, puiqu'on sait par le calcul de $\mathfrak{b}$ que $Z_{E_8}(G_2^2) \simeq A_1 \times A_1$, on sait qu'un des facteurs A_1 de $\mathfrak{b}$ est forcément le facteur correspondant à la racine isolée du diagramme précédent et que l'autre est A_1^7 qui correspond au centralisateur de G_2^2 dans E_7. Alors on a :

$$Z_{E_8}(A_1 \times A_1) = Z_{E_7}(A_1^7) = G_2^2 .$$

Donc $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (G_2^2, A_1^7 \times A_1^1)$ est bien une paire duale non S-irréductible. L'identification du dernier facteur comme étant A_1^1 provient du fait que la racine isolée dans le diagramme précédent est l'opposé $-\omega$ de la plus grande racine.

Remarque 6.10.2 L'espace préhomogène $(o(7) \times gl(3), Spin(7) \otimes \Lambda_1)$ qui apparaît comme isotropie partielle dans l'exemple précédent fait partie des quelques exemples d'espaces préhomogènes de la liste de Sato et Kimura qui n'apparaissent comme espaces préhomogènes paraboliques.

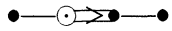
10)  $\mathfrak{a} = F_4$

Il s'agit d'un diagramme C-admissible considéré dans la démonstration du Théorème 4.1. On en tire que $\mathfrak{b} \simeq G_2$. D'après [Dy] p. 185 le $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal de $\mathfrak{a} \simeq F_4$ est d'index 156 dans E_8. Comme d'autre part ce $\mathfrak{sl}_2$-triplet est aussi d'index 156 dans F_4 ([Dy], p. 177), on tire de (6-4) que notre algèbre $\mathfrak{a}$ est F_4^1 dans les notations de Dynkin. Comme (F_4^1, G_2^1) figure parmi les S-sous-algèbres de E_8 ([Dy] p.233), on en déduit ici que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale S-irréductible. Comme E_8 ne possède qu'une seule S-sous-algèbre de type $F_4 \times G_2$ on en déduit que ce diagramme est en dualité avec $E_8 8$) ci-dessus.

6.11. Type F_4

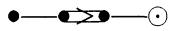
1) $\mathfrak{a} \simeq A_1$

Il s'agit de l'exemple 14 p. 145 de [S-K]. On en tire que $\mathfrak{b} \simeq A_2$. Mais ici la racine encerclée est l'unique racine connectée à l'opposé de la plus grande. Nous avons déjà vu (en utilisant la Prop. 5.17.) que dans cette situation $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est pas une paire duale.

2)  $\mathfrak{a} \simeq A_1$

C'est l'exemple 8 p. 145 de [S-K], d'où l'on tire que $\mathfrak{b} = \{0\}$. Donc $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est

pas une paire duale.

3)  $\mathfrak{a} \simeq A_1$

D'après la table des $\mathfrak{sl}_2$-triplets de F_4 ([Dy] p.177) on voit que $\mathfrak{a}$ est d'index 8 dans F_4. D'après [Dy] p. 233, il existe une S-sous-algèbre de type (A_1^8, G_2^1) dans F_4. On en déduit, en utilisant la Prop. 5.19., que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1^8, G_2^1)$ est une paire duale S-irréductible. Le diagramme considéré ici est en dualité avec F_4 4) ci-dessous.

4) $\mathfrak{a} \simeq G_2$

La représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est la représentation classique de $gl(3)$ dans les matrices symétriques dont l'isotropie générique $\mathfrak{b}$ est isomorphe à $o(3) \simeq A_1$. La restriction de la représentation naturelle de $\mathfrak{l}'_\theta \simeq sl(3)$ à $o(3)$ étant irréductible, on conclut à partir de la Remarque 5.10. b) et de la Proposition 5.20 que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (G_2^1, A_1^8)$ est une paire duale S-irréductible. Le diagramme considéré ici est donc bien en dualité avec le précédent.

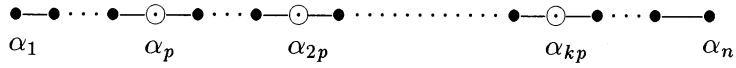
6.12. Type G_2

1) $\mathfrak{a} \simeq A_1$

La représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est la représentation $3\Lambda_1$ de $gl(2)$ (exemple 4 p.144 de [S-K]) dont l'isotropie $\mathfrak{b}$ est réduite à $\{0\}$. Le couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est donc pas une paire duale.

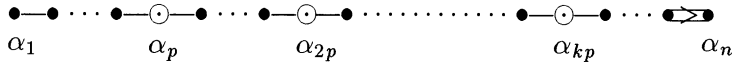
6.13. Table 5. Tableau récapitulatif.

Type A_n : $n = (k+1)p - 1, k \geq 1,\ n \geq 1,\ p \geq 1$.



Paire duale (A_k, A_{p-1}), S-irréductible, en dualité avec lui même par échange de k et p, produit tensoriel.

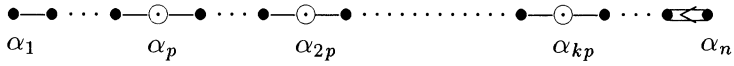
Type B_n : $n \geq kp$, $(2k+1)p \leq (2n+1)$, $p \geq 1$.



Paire duale $(o(2k+1), o(p) \times o(2(n-kp)+1-p))$ si $p \neq 2$, S-irréductible si et seulement si $p = 2\ell + 1$ et $(2k+1)p = 2(n+1)$, est alors en dualité avec lui même par échange de ℓ et k ; ce cas correspond aussi à un produit tensoriel.

Type C_n :

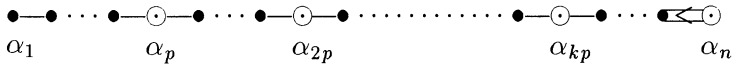
1) p pair, $(2k+1)p \leq 2n$.



paire duale $(o(2k+1), sp(\frac{p}{2}) \times sp(n - kp - \frac{p}{2}))$, S-irréductible si et seulement si $(2k+1)p = 2n$, est alors en dualité avec le diagramme suivant et correspond alors à un produit tensoriel.

---

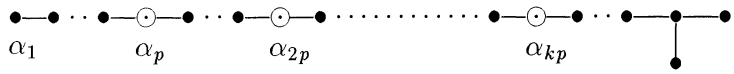
2) $n = (k+1)p$, $k \geq 0$, $p \geq 1$.



Paire duale $(sp(k+1), o(p))$, toujours S-irréductible, en dualité avec le diagramme précédent si p est impair, produit tensoriel.

Type D_n :

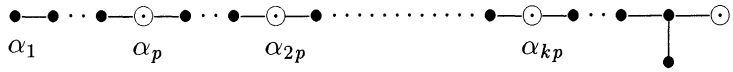
1) $n \geq kp+2$, $(2k+1)p \leq 2n$.



Paire duale de type $(o(2k+1), o(p) \times o(2n-2kp-p))$ si $p \neq 2$
non S-irréductible si p est pair et $(2k+1)p < 2n$
paire duale S-irréductible de type $(o(2k+1), o(2\ell))$ si $2\ell = p$ et $(2k+1)p = 2n$ ("position limite à droite"), correspond à un produit tensoriel dans ce cas.
paire duale S-irréductible de type $(o(2k+1), o(2\ell+1) \times o(2n-4k\ell-2k-2\ell-1))$ si $p = 2\ell+1$ est impair et si $(2k+1)p < 2n$.
Pour $p = 1$, les diagrammes ayant respectivement les k et $n-k-1$ premières racines encerclées, sont en dualité.

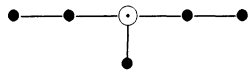
---

2) $n = (k+1)p$, p pair, $p \geq 1$.



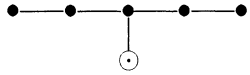
paire duale S-irréductible de type $(sp(k+1), sp(\frac{p}{2}))$, le diagramme considéré ici est en dualité avec lui même par échange des rôles de $\frac{p}{2}$ et $(k+1)$, produit tensoriel.

Type E_6 :

1) 

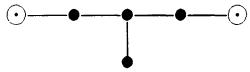
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, \mathbb{C}^2))$.

---

2) 

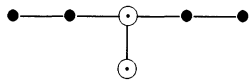
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, A_2 \times A_2))$.

---

3) 

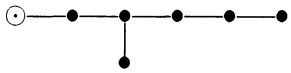
Paire duale S-irréductible de type (A_2, G_2), diagramme en dualité avec $E_6 4)$ ci-dessous.

---

4) 

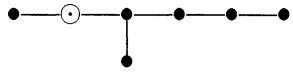
Paire duale S-irréductible de type (G_2, A_2), diagramme en dualité avec $E_6 3)$ ci-dessus.

Type E_7 :

1) 

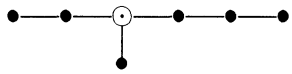
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, A_5))$.

---

2) 

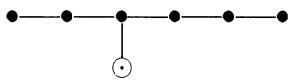
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, A_1 \times A_1 \times A_1))$.

---

3) 

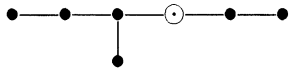
Paire duale S-irréductible de type (A_1, A_1) , diagramme en dualité avec $E_7 5)$.

---

4) 

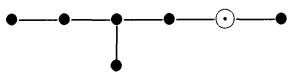
Paire duale S-irréductible de type (A_1, G_2), diagramme en dualité avec $E_7 10)$.

---

5) 

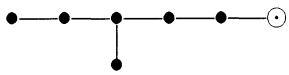
Paire duale S-irréductible de type (A_1, A_1), diagramme en dualité avec $E_7 3)$.

---

6) 

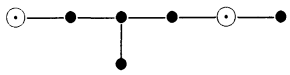
Paire duale S-irréductible de type $(A_1, G_2 \times A_1)$.

---

7) 

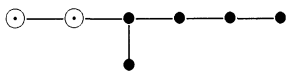
Paire duale S-irréductible de type (A_1, F_4), diagramme en dualité avec $E_7 12)$.

---

8) 

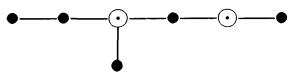
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (B_2, A_2 \times \mathbb{C}))$.

---

9) 

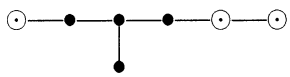
Paire duale S-irréductible de type (G_2, C_3), diagramme en dualité avec $E_7 11)$.

---

10) 

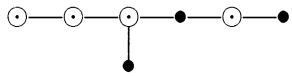
Paire duale S-irréductible de type (G_2, A_1), diagramme en dualité avec $E_7 4)$.

---

11) 

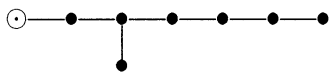
Paire duale S-irréductible de type (C_3, G_2), diagramme en dualité avec $E_7 9)$

---

12) 

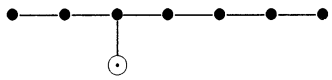
Paire duale S-irréductible de type (F_4, A_1), diagramme en dualité avec $E_7 7)$.

Type E_8 :

1) 

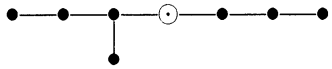
Paire duale S-irréductible de type $(A_1, G_2 \times G_2)$.

---

2) 

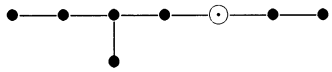
Paire duale S-irréductible de type (A_1, A_2).

---

3) 

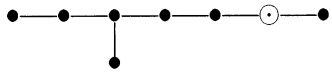
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, \{0\}))$.

---

4) 

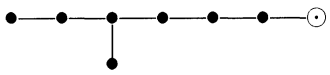
Paire duale <u>non S-irréductible</u> de type $(A_1, A_1 \times A_1)$.

---

5) 

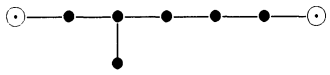
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, D_4))$.

---

6) 

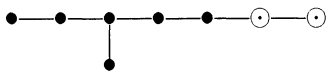
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, E_6))$.

---

7) 

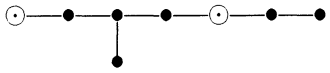
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (B_2, A_4))$

---

8) 

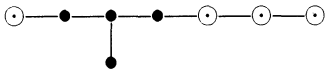
Paire duale S-irréductible de type (G_2, F_4), diagramme en dualité avec $E_8 10)$.

---

9) 

Paire duale <u>non S-irréductible</u> de type $(G_2, A_1 \times A_1)$.

---

10) 

Paire duale S-irréductible de type (F_4, G_2), diagramme en dualité avec $E_8 8)$.

<u>Type F_4</u> :

1)

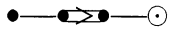
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, A_2))$.

---

2)

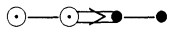
Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, \{0\}))$.

---

3) 

Paire duale S-irréductible de type (A_1, G_2), diagramme en dualité avec $F_4 4)$.

---

4) 

Paire duale S-irréductible de type (G_2, A_1), diagramme en dualité avec $F_4 3)$.

<u>Type G_2</u> :

1)

Pas de paire duale $((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, \{0\}))$.

---

7. Les paires duales S-irréductibles dans les algèbres de Lie classiques.

Les paires duales ont été classifiées dans les groupes classiques par différents auteurs (voir notamment [H1] et [M-V-W]). Nous donnons ici une classification dans le cadre des algèbres de Lie (paires S-irréductibles) qui est proche de celle de [M-V-W]. On mettra ainsi en évidence la *presque coïncidence* des notions d'irréductiblité et de S-irréductibilité dans le cas classique.

7.1. Les paire duales dans le cas A_n.

Théorème 7.1.1. — *Soit* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *une paire duale S-irréductible dans une algèbre de type* A_n. *Alors* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont admissibles.*

Démonstration. — On peut supposer que $\mathfrak{a}$ est simple. Si ce n'était pas le cas, et si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \ldots \times \mathfrak{a}_p$ était la décomposition de $\mathfrak{a}$ en idéaux simples alors on pourrait considérer la paire duale $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \times \ldots \times \mathfrak{a}_p \times \mathfrak{b})$ dont la première sous-algèbre de Howe est simple.
Les notations sont celles de la Proposition 5.23. Pour chaque élément $\overline{\beta}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ de la base de $\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}$ on définit le support $Supp(\overline{\beta}_i)$ de $\overline{\beta}_i$ comme étant l'ensemble des $\overline{\gamma}_j$ qui interviennent effectivement dans la décomposition de $\overline{\beta}_i$ dans la base $(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_k)$.
On a :

$$\{\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_k\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} Supp(\overline{\beta}_i)$$

car si $\overline{\gamma}_{i_0} \notin \bigcup_{i=1}^{k} Supp(\overline{\beta}_i)$, alors la sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{g}$ construite à partir de γ_{i_0} contiendrait $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, ce qui contredirait la S-irréductibilité.
Considérons alors $\overline{\beta} = \overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2 + \ldots + \overline{\beta}_k$. La forme linéaire $\overline{\beta}$ est dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}$, car nous avons supposé $\mathfrak{a}$ simple.
D'après ce qui précède on a :

$$\overline{\beta} = \overline{\gamma}_1 + \ldots + \overline{\gamma}_k + \overline{\rho}$$

où $\overline{\rho} \neq 0$ si et seulement si il existe une racine restreinte $\overline{\beta}_i$ qui n'est pas une des formes linéaires $\overline{\gamma}_j$. Mais si $\overline{\rho} \neq 0$ alors $\overline{\gamma}_1 + \ldots + \overline{\gamma}_k + \overline{\rho}$ n'est jamais une restriction de racine dans un système A_n (la restriction de la plus grande racine étant justement $\overline{\gamma}_1 + \ldots + \overline{\gamma}_k$).

Donc $\{\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_k\} = \{\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_k\}$, ce qui signifie exactement que $\mathfrak{a}$ est admissible. Mais il est facile de voir que si $\mathfrak{a}$ est admissible dans A_n, alors $\mathfrak{b}$ est simple. Les algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ jouent donc des rôles symétriques. $\square$

Notons $End(V)$ l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel complexe V. Si F est un sous-ensemble de $End(V)$, nous dirons que F est irréductible s'il n'existe pas de sous-espace vectoriel propre de V stable par F. Rappelons (cf. Remarque 5.10. b)) que pour une sous-algèbre de Lie de $End(V)$ les notions d'irréductibilité et de S-irréductibilté coïncident.

On obtient alors le corollaire suivant qui est évidemment bien connu par d'autres démonstrations (voir par exemple [M-V-W], Prop. 18, chap. 1).

Corollaire 7.1.2. — *Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ une paire duale irréductible de $End(V)$. Il existe alors des espaces vectoriels V_1 et V_2 tels que $V = V_1 \otimes V_2$ et tels que $\mathfrak{a} = End(V_1)$ et $\mathfrak{b} = End(V_2)$.*
Inversement pour toute décomposition $V = V_1 \otimes V_2$ de V en produit tensoriel, la paire $(End(V_1), End(V_2))$ est une paire duale.

7.2. Deux résultats.

Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie réductive de $End(V)$. Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ une paire duale de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ soit irréductible. Notons que sous ces hypothèses l'algèbre $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est une S-sous-algèbre (Remarque 5.10. b)),elle est donc semi-simple d'après le Théorème 7.3. de [Dy] et on en déduit que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$.
On pose :

$$\mathfrak{b}_1 = End_{\mathfrak{a}}(V) \quad \mathfrak{a}_1 = End_{\mathfrak{b}_1}(V)$$

où $End_{\mathfrak{a}}(V)$ (resp. $End_{\mathfrak{b}_1}(V)$) désigne les endomorphismes qui commutent à $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}_1$).

Proposition 7.2.1. — *Sous les hypothèses précédentes, le couple* $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$ *est une paire duale irréductible dans* $End(V)$ *et* $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{b}$.
De plus il existe des espaces vectoriels V_1 *et* V_2 *tels que* $V = V_1 \otimes V_2$ *et tels que* $\mathfrak{a}_1 = End(V_1)$ *et* $\mathfrak{b}_1 = End(V_2)$.

Démonstration. — Il est clair que par construction $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$ est une paire duale dans $End(V)$. On a aussi de manière évidente que $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{b}$ et que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_1$. Puisque $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est irréductible, l'algèbre $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1$ l'est aussi. D'après le Corollaire 7.1.2., il existe V_1 et V_2 tels que $V = V_1 \otimes V_2$ et $\mathfrak{a}_1 = End(V_1)$, $\mathfrak{b}_1 = End(V_2)$. Pour des raisons évidentes $\mathfrak{b}$ est irréductible dans $End(V_2)$. Cela implique, comme on va le voir, que $\mathfrak{a}_1 = End_{\mathfrak{b}_1}(V) = End_{\mathfrak{b}}(V)$. Soit f_i une base de $End(V_1)$ et g_j une base de $End(V_2)$. En écrivant qu'un élément $h = \sum \lambda_{ij} f_i \otimes g_j \in End_{\mathfrak{b}}(V)$ commute à tout élément $b = 1 \otimes b \in \mathfrak{b}$ on obtient l'égalité $(\sum_j \lambda_{ij} g_j)b = b(\sum_j \lambda_{ij} g_j)$. Puisque $\mathfrak{b}$ est irréductible sur V_2, le Lemme de Schur implique que $(\sum_j \lambda_{ij} g_j) = \xi_i.1\,(\xi_i \in \mathbb{C})$, c'est à dire que $h = \sum_i \xi_i f_i \otimes 1 \in End(V_1) = \mathfrak{a}_1$.
On a donc bien $\mathfrak{a}_1 = End_{\mathfrak{b}_1}(V) = End_{\mathfrak{b}}(V)$, ce qui implique que $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{a}$. $\square$

Un automorphisme σ de $End(V)$ est un endomorphisme bijectif σ de $End(V)$ qui vérifie $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \quad \forall x, \forall y \in End(V)$.

Une involution de $End(V)$ est un endomorphisme bijectif τ de $End(V)$ qui vérifie $\tau(xy) = \tau(y)\tau(x) \quad \forall x, \forall y \in End(V)$ et $\tau^2 = Id$.

Proposition 7.2.2.. — *Soient* τ_1 *et* τ_2 *deux involutions de* $End(V)$. *Il existe alors* $\beta \in GL(V)$ *vérifiant* $\beta^{-1}\tau_1(\beta) = \pm Id$ *tel que* $\tau_2(x) = \beta^{-1}\tau_1(x)\beta \quad \forall x \in End(V)$.

Démonstration. — Considérons l'application $\tau_1\tau_2$ qui est un automorphisme. D'après le Théorème de Skolem-Noether ([Sc]), il existe $\alpha \in GL(V)$ tel que $\tau_1\tau_2(x) = \alpha x \alpha^{-1} \quad \forall x \in End(V)$. D'où $\tau_2(x) = \tau_1(\alpha)^{-1}\tau_1(x)\tau_1(\alpha) \quad \forall x \in End(V)$, c'est à dire $\tau_2(x) = \beta^{-1}\tau_1(x)\beta$ en posant $\beta = \tau_1(\alpha)$. On a alors

$$x = \tau_2^2(x) = \beta^{-1}\tau_1(\beta)x\tau_1(\beta)^{-1}\beta \quad \forall x \in End(V)\,.$$

D'où

$$\beta^{-1}\tau_1(\beta) = \lambda Id \quad \lambda \in \mathbb{C}\,,$$

c'est à dire que $\tau_1(\beta) = \lambda\beta$, ce qui donne $\beta = \tau_1^2(\beta) = \lambda\tau_1(\beta) = \lambda^2\beta$, d'où $\lambda = \pm 1$. $\square$

7.3. Description en termes d'algèbres unitaires des paires duales S-irréductibles des algèbres de Lie classiques.

Dans ce paragraphe on suppose que l'espace vectoriel V est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée notée $<,>$ qui est supposée être soit symétrique, soit antisymétrique.

On considère alors l'algèbre de Lie unitaire de V qui est définie par :

$$\mathfrak{u}(V) = \{x \in End(V), < xu, v > + < u, xv >= 0\,, \forall u \in End(V)\,,\ \forall v \in End(V)\}.$$

Les trois possibilités sont donc les suivantes (n étant un entier > 0) :

- $<,>$ est symétrique et $\dim(V) = 2n$, alors $\mathfrak{u}(V) \simeq o(2n) \simeq D_n$
- $<,>$ est symétrique et $\dim(V) = 2n+1$, alors $\mathfrak{u}(V) \simeq o(2n+1) \simeq B_n$
- $<,>$ est antisymétrique et $\dim(V) = 2n$, alors $\mathfrak{u}(V) \simeq sp(n) \simeq C_n$.

7.3.1. Un cas très particulier.

Supposons que la forme soit symétrique et que $\dim(V) = 2n = 2p + 2q + 2$. On a alors l'inclusion suivante :

$$o(2p+1) \times o(2q+1) \subset o(2n)$$

qui correspond à une décomposition orthogonale $V = V_1 \oplus V_2$ où $\dim(V_1) = 2p+1$ et $\dim(V_2) = 2q+1$.

Alors d'après Dynkin ([Dy] Th. 7.2. p. 159) les assertions suivantes sont vérifiées :

- l'algèbre $o(2p+1) \times o(2q+1) \simeq B_p \times B_q$ est une S-sous-algèbre de $o(2n) \simeq D_n$ et il est facile de voir que (B_p, B_q) est une paire duale dans D_n.

- Mieux encore (cf. [Dy], loc.cit.), une sous-algèbre de $(o(2p+1) \times o(2q+1))$ est une S-sous-algèbre de D_n si et seulement si elle est irréductible dans $V_1 \simeq \mathbb{C}^{2p+1}$ et dans $V_2 \simeq \mathbb{C}^{2q+1}$.

Cela permettra ultérieurement (voir la Proposition 7.3.3. ci-dessous) de déterminer les paires duales S-irréductibles de D_n qui sont contenues dans $o(2p+1) \times o(2q+1)$.

Théorème 7.3.2. — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ qu'on suppose muni d'une forme bilinéaire $<,>$ non dégénérée qui est soit symétrique, soit antisymétrique.*
Soit $\mathfrak{u}(V)$ l'algèbre unitaire de cette forme. Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ une paire duale S-irréductible (ce qui implique semi-simple) de $\mathfrak{u}(V)$. Alors, sauf dans le cas où $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \subseteq o(2p+1) \times o(2q+1) \subseteq D_n \simeq \mathfrak{u}(V)$ considéré en 7.3.1., il existe des espaces vectoriels V_1 et V_2 et des formes $<,>_1$ et $<,>_2$ sur ces espaces respectifs tels que :

- $V = V_1 \otimes V_2$
- $<,> = <,>_1 \otimes <,>_2$
- $\mathfrak{a} = \mathfrak{u}(V_1)$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{u}(V_2)$.

Inversement, pour toute décomposition $V = V_1 \otimes V_2$ telle que $<,> = <,>_1 \otimes <,>_2$, la paire $(\mathfrak{u}(V_1), \mathfrak{u}(V_2))$ est une paire duale S-irréductible dans $\mathfrak{u}(V)$.

Démonstration. — Supposons d'abord qu'il existe une décomposition orthogonale (pour $<,>$) $V = V_1 \oplus V_2$ qui est invariante par $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Mais alors $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{u}(V_1) \times \mathfrak{u}(V_2)$.
Supposons par exemple que $<,>$ soit une forme alternée, c'est à dire que $\dim(V) = 2n = 2n_1 + 2n_2$ où $2n_1 = \dim(V_1)$ et $2n_2 = \dim(V_2)$ et que $\mathfrak{u}(V) \simeq C_n$. Donc $\mathfrak{u}(V_1) \simeq C_{n_1}$ et $\mathfrak{u}(V_2) \simeq C_{n_2}$. Mais alors $C_{n_1} \times C_{n_2} \simeq \mathfrak{u}(V_1) \times \mathfrak{u}(V_2)$ est une sous-algèbre semi-simple de même rang que $\mathfrak{u}(V)$. Elle est donc nécessairement régulière et cela implique $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est pas S-irréductible.
On peut appliquer le raisonnement précédent à tous les cas (sauf un), où $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{u}(V_1) \times \mathfrak{u}(V_2) \subseteq \mathfrak{u}(V)$ ($V = V_1 \oplus V_2$ étant une décomposition orthogonale) et en déduire que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ n'est pas S-irréductible. La seule exception étant le cas où $\dim(V) = 2n$ et $\dim(V_1) = 2p+1$ et $\dim(V_2) = 2q+1$ car alors la sous-algèbre $\mathfrak{u}(V_1) \times \mathfrak{u}(V_2) \simeq B_p \times B_q$ n'a plus le même rang que $\mathfrak{u}(V)$. Ce cas est exactement celui évoqué en 7.3.1. et il est écarté par hypothèse.
Il n'y a donc pas de décomposition orthogonale propre invariante par $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.
Mais il pourrait y avoir un sous-espace $E \subset V$ invariant par $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ tel que $E \cap E^{\perp} = E^0 \neq \{0\}$. Donc E^0 est un sous-espace totalement isotrope propre invariant par $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Soit $\mathfrak{p}(E^0)$ le stabilisateur de E^0 dans $\mathfrak{u}(V)$. On sait ([Bo3] ch. 8 §13) que $\mathfrak{p}(E^0)$ est une sous-algèbre parabolique maximale. La sous-algèbre $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ est une sous-algèbre semi-simple incluse dans $\mathfrak{p}(E^0)$ On sait alors ([Bo1] §6, n. 8, Corollaire 1) que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ est contenue dans une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{p}(E^0)$, donc n'est pas S-irréductible.
Finalement, nous avons prouvé qu'il n'y a pas de sous-espace propre invariant par $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ donc que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ est irréductible.
D'après la proposition 7.2.1. il existe une décomposition $V = V_1 \otimes V_2$ telle que

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{u}(V) \cap End(V_1) \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{u}(V) \cap End(V_2)$$

$$End(V_1) = End_{\mathfrak{b}}(V) \quad End(V_2) = End_{\mathfrak{a}}(V)\,.$$

A partir de $<,>$ on définit classiquement une involution τ sur $End(V)$ en posant

$$< xu, v > \quad = \quad < u, \tau(x)v > \ \forall u, v \in V \ ; \forall x \in End(V)\,.$$

On peut remarquer que

$$\mathfrak{u}(V) = \{x \in End(V) \,|\tau(x) = -x\}$$

ce qui implique notamment que toute sous-algèbre de $\mathfrak{u}(V)$ est stable par τ.
Nous allons maintenant montrer que $End(V_1)$ et $End(V_2)$ (plongés respectivement dans $End(V)$ par $x \longmapsto x \otimes 1$ et $y \longmapsto 1 \otimes y$) sont invariants par τ. Montrons le par exemple pour le premier de ces espaces. Soit $x \in End(V_1) = End_{\mathfrak{b}}(V)$.
On a :

$$xb = bx \ \forall b \in \mathfrak{b}$$

d'où :

$$\tau(b)\tau(x) = \tau(x)\tau(b) \ \forall b \in \mathfrak{b}$$

c'est à dire $b\tau(x) = \tau(x)b \forall b \in \mathfrak{b}$. Donc $\tau(x) \in End_{\mathfrak{b}}(V)$.
Notons τ_i la restriction de τ à V_i $(i = 1, 2)$. Choisissons maintenant des bases de V_1 et V_2 et définissons t_1 et t_2 comme étant les transpositions ordinaires de $\mathfrak{u}(V_1)$ et $\mathfrak{u}(V_2)$ définies par ce choix de base (autrement dit on munit V_1 et V_2 de formes quadratiques non dégénérées).
D'après la Proposition 7.2.2. il existe $\beta_1 \in GL(V_1)$ tel que $\beta_1^{-1} t_1(\beta_1) = \pm 1$ et tel que $\tau_1(x) = \beta_1^{-1} t_1(x) \beta_1 \ \forall x \in End(V_1)$.
On en déduit que, si on pose $< u, v >_i = {}^t u \beta_i v$ (u et v étant des vecteurs de V_i écrits dans les bases précédentes et β_i désignant par abus de notation la matrice de β_i dans ces bases), alors $<,>_i$ est une forme linéaire non dégénérée sur V_i (symétrique ou antisymétrique selon que $\tau_i(\beta_i) = \pm \beta_i$) dont l'involution associée est τ_i. Posons $(,) = <,>_1 \otimes <,>_2$. Il est facile de voir que l'involution associée à $(,)$ est égale à τ. On en déduit classiquement que $(,) = \lambda <,> \quad , \lambda \in \mathbb{C}$.
Quitte à modifier par des scalaires les formes $<,>_1$ et $<,>_2$, on peut supposer que $<,> = <,>_1 \otimes <,>_2$.
On a alors

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{u}(V) \cap End(V_1) = \mathfrak{u}(V_1) \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{u}(V) \cap End(V_2) = \mathfrak{u}(V_2)\,.$$

La partie directe du Théorème en découle.

Inversement, il est facile de voir que sous les hypothèses du Théorème la paire $(\mathfrak{u}(V_1), \mathfrak{u}(V_2))$ est une paire duale. Cette paire est S-irréductible, car l'algèbre $\mathfrak{u}(V_1) + \mathfrak{u}(V_2)$ est irréductible sur V, alors que si c'était une R-sous-algèbre elle serait réductible ([Dy], Th. 7.1. p 159). $\square$

Si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale correspondant à un produit tensoriel nous la noterons $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq \mathfrak{u}(V_1) \otimes \mathfrak{u}(V_2)$

Nous allons maintenant étudier de plus près le cas très particulier vu en 7.3.1.

Proposition 7.3.3. — *Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ une paire duale S-irréductible de D_n incluse dans $B_p \times B_q$ (notations de 7.3.1., $p + q + 1 = n$).*
Alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2$ où $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$ (resp. $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)$) est une paire duale S-irréductible de B_p (resp. B_q).
Dans ce cas il existe des entiers p_1 et p_2 tels que $2p + 1 = (2p_1 + 1)(2p_2 + 1)$ et $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) \simeq B_{p_1} \otimes B_{p_2}$ et des entiers q_1 et q_2 tels que $2q + 1 = (2q_1 + 1)(2q_2 + 1)$ et $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) \simeq B_{q_1} \otimes B_{q_2}$.
Inversement, si $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) \simeq B_{p_1} \otimes B_{p_2}$ est une paire duale S-irréductible de B_p (avec $2p + 1 = (2p_1 + 1)(2p_2 + 1)$) et si $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2) \simeq B_{q_1} \otimes B_{q_2}$ est une paire duale S-irréductible de B_q (avec $2q + 1 = (2q_1 + 1)(2q_2 + 1)$), alors $(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$ est toujours une paire duale S-irréductible dans D_{p+q+1}.

Démonstration. — D'après le Lemme 5.3., une paire duale incluse dans $B_p \times B_q$ est bien de la forme $(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$. Mais $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{b}_1$ est une S-sous-algèbre de B_p, car si $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}_1$ était une R-sous-algèbre de B_p elle serait réductible sur $\mathbb{C}^{2p+1}$ ([Dy] Th. 7.1. p 158). De même $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)$ est S-irréductible dans B_q. La première assertion du Théorème en résulte.
La deuxième est immédiate puisque l'on sait, d'après le Théorème 7.3.2. précédent, que toutes les paires duales S-irréductibles de B_p sont des produits tensoriels. Démontrons à présent la partie inverse du Théorème. Le plongement de $B_p \times B_q$ dans D_n correspond à une décomposition orthogonale

$$\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^{2p+1} \oplus \mathbb{C}^{2q+1} .$$

Soit

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2) \simeq (B_{p_1} \times B_{q_1}, B_{p_2} \times B_{q_2})$$

une paire duale S-irréductible de $B_p \times B_q$. Etant donné que dans ce cas $(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \oplus (\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$ est toujours une S-sous-algèbre de D_n puisque les deux termes de cette somme directes sont irréductibles sur $\mathbb{C}^{2p+1}$ et sur $\mathbb{C}^{2q+1}$ (respectivement) ([Dy] Th. 7.2. p. 159), il ne s'agit que de démontrer que le commutant de $B_{p_1} \times B_{q_1}$ (et de $B_{p_2} \times B_{q_2}$) est inclus dans $B_p \times B_q$. Si ce n'était pas le cas il existerait un élément $X \in Hom(\mathbb{C}^{2p+1}, \mathbb{C}^{2q+1})$ qui vérifierait $AX = XB$ pour tout élément $A \in B_{p_1}$ et tout élément $B \in B_{q_1}$, ce qui implique notamment que AX est toujours nul et donc que $X = 0$. $\square$

Remarque 7.3.4.

Notons qu' on sait, par ce qui précède, que les paires duales S-irréductibles des algèbres classiques sont les produits tensoriels (sauf dans le cas D_n où la situation est un peu plus compliquée) et que d'autre part on connait par le §6 et la Table 5 des paires duales S-irréductibles de même type provenant de sous-algèbres admissibles. Ceci permet de les identifier et justifie les mentions "produit tensoriel" de la Table 5.

8. Enoncé et démonstration du Théorème Principal.

Théorème 8.1. (Théorème Principal). —
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ une paire duale S-irréductible de $\mathfrak{g}$. Considérons les cas suivants :

a.— $\mathfrak{g}$ est de type D_n et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est le produit tensoriel de deux formes symétriques en dimensions paires.

b.— $\mathfrak{g}$ est de type D_n et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$ est une paire duale S-irréductible propre de $B_p \times B_q$ (i.e. $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \neq B_p \times B_q$). Ici le plongement de $B_p \times B_q$ dans D_n est celui de 7.3.1. (donc $p + q + 2 = n$).

b'.— $\mathfrak{g}$ est de type D_n et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$ est une paire duale S-irréductible propre de $B_p \times B_q$ (ici encore le plongement est celui de 7.3.1.) où les quatre sous-algèbres $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ sont distinctes de $\{0\}$, B_p et B_q.

c.— $\mathfrak{g}$ est de type E_7 et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, G_2 \times A_1)$ (cas E_7 6) de la table 5).

d.— $\mathfrak{g}$ est de type E_8 et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, G_2 \times G_2)$ (cas E_8 1) de la table 5).

e.— $\mathfrak{g}$ est de type E_8 et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \simeq (A_1, A_2)$ (cas E_8 2) de la table 5).

Alors

— l'algèbre $\mathfrak{a}$ <u>et</u> l'algèbre $\mathfrak{b}$ sont des sous-algèbres admissibles <u>sauf</u> dans les cas a.,b.,c., d., e. ci-dessus.

— l'une des deux algèbres $\mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{b}$ au moins est admissible <u>sauf</u> dans les cas a., b'. ci-dessus.

Démonstration. —

Commençons par les algèbres classiques.

Le Théorème est vrai dans le cas A_n, d'après le Théorème 7.1.1.

Dans le cas B_n on sait d'après le Théorème 7.3.2. que les seules paires duales S-irréductibles sont les produits tensoriels. On trouve ces paires comme algèbres admissibles en consultant la Table 5.

Dans le cas C_n également, toutes les paires duales S-irréductibles sont les

produits tensoriels (qui sont forcément les produits tensoriels d'une forme symétrique et d'une forme antisymétrique). On retrouve ces paires sous formes d'algèbres admissibles dans les deux diagrammes de type C_n figurant dans la Table 5.

Venons en au cas de D_n qui est un peu plus compliqué. En tous cas on sait (§7) que les produits tensoriels sont des paires duales S-irréductibles. Comme $D_n \simeq o(2n)$ il faut considérer les cas du produit tensoriel de deux formes symétriques en dimension paires ($D_k \otimes D_m \hookrightarrow D_n$ avec $n = 2km$), du produit tensoriel d'une forme symétrique en dimension impaire et d'une forme symétrique en dimension paire ($B_k \otimes D_m \hookrightarrow D_n$ avec $n = (2k+1)m$) et du produit tensoriel de deux formes antisymétriques ($C_k \otimes C_m \hookrightarrow D_n$ avec $n = 2km$).

Dans le premier cas aucune des sous-algèbres D_k et D_m ne sont admissibles puisque d'après la Table 3 le type D n'apparait jamais comme sous-algèbre admissible.

Dans le deuxième cas, d'après ce qui vient d'être dit, seule la sous-algèbre B_k peut éventuellement être une sous-algèbre admissible. Et elle apparait effectivement d'après la Table 5 (Type D_n1), position "limite à droite").

Dans le troisième cas les deux sous-algèbres de Howe C_k et C_m apparaissent effectivement d'après la Table 5 (Type D_n2)).

Considérons maintenant le plongement $B_k \times B_m \hookrightarrow D_n$, avec $n = k + m + 1$ correspondant à une décomposition orthogonale d'un espace de dimension paire en deux sous-espaces de dimensions impaires (voir 7.3.1.) et plus spécialement le cas des paires duales $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \subseteq B_k \times B_m$ (voir Prop. 7.3.3.)

Le cas où $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (B_k, B_m)$ correspond au diagramme $D_n, 1)$ où l'on a pris $p = 1$. Les algèbres B_k et B_m jouant des rôles symétriques, les deux sous-algèbres de Howe de la paire apparaissent comme sous-algèbres admissibles.

Considérons le cas où $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ est une paire duale propre de B_k et où $\mathfrak{b} \simeq B_m$. Alors on sait que $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \simeq B_{k_1} \otimes B_{k_2}$ avec $(2k_1+1)(2k_2+1) = (2k+1)$; on a donc une paire duale S-irréductible de type $(B_{k_1}, B_{k_2} \times B_m)$. On trouve alors l'algèbre B_{k_1} comme sous-algèbre admissible dans la Table 5 (D_n1) avec p impair $\neq 1$). Dans ce cas la deuxième sous-algèbre de Howe $B_{k_2} \times B_m$ ne peut être une sous-algèbre admissible puisque ces dernières sont toujours simples (Th. 3.3.).

Ce dernier argument exclus également le cas b'. de l'énoncé.

Nous avons démontré le résultat voulu dans le cas des algèbres classiques.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ soit une algèbre exceptionnelle. Nous allons encore nous servir de la Table 39 de Dynkin ([Dy] p. 233) qui donne la liste des S-sous-algèbres des algèbres exceptionnelles ainsi que les inclusions entre elles. Dans la suite de la démonstration nous dirons simplement [Table Dy] lorsque nous utilisons cette référence.

cas E_6

D'après [Table Dy], la seule S-sous-algèbre maximale non-simple de E_6 est $G_2^1 \oplus A_2^{2''}$ et on sait d'après la proposition 5.19. que dans ce cas $(G_2^1, A_2^{2''})$ est une paire duale S-irréductible. D'autre part il n'y a qu'une seule S-sous-algèbre de E_6 qui est de type $G_2 \times A_2$. Comme nous obtenons des paires duales S-irréductibles de ce type où G_2 (6.8.4)), resp. A_2 (6.8.3)) est admissible on en déduit que G_2^1 et $A_2^{2''}$ sont admissibles.

On constate [Table Dy] que les S-sous-algèbres non maximales de E_6 qui ne sont pas simples sont toutes produit de deux algèbres simples dont l'une au moins est de type A_1. Si elles correspondaient à une paire duale, la sous-algèbre A_1 serait admissible d'après le Corollaire 5.24. Or nous avons vu au §6 (voir la Table 5) qu'il n'y avait pas de sous-algèbre admissible de type A_1 qui est une sous-algèbre de Howe.

cas E_7

Les S-sous-algèbres maximales de E_7 qui ne sont pas simples sont les suivantes :

$$G_2^1 \oplus C_3^{1''}, \qquad F_4^1 \oplus A_1^{3''}, \qquad G_2^2 \oplus A_1^7, \qquad A_1^{24} \oplus A_1^{15} .$$

Les algèbres simples écrites ci-dessus sont des sous-algèbres de Howe (Prop. 5.19.), que nous avons toutes décrites comme sous-algèbres admissibles au §6 (voir 6.9. cas 9),11), 12), 7), 10), 4),3), 5) respectivement).
D'après [Table Dy], parmi les S-sous-algèbres non maximales de E_7 figurent $A_1^{28} \times A_1^8 \times A_1^{3''}$ et $G_2^1 \times A_1^8 \times A_1^{3''}$. Nous avons vu ci-dessus que $Z_{E_7}(G_2^1)$ était $C_3^{1''}$ ce qui signifie que si la S-sous-algèbre $G_2^1 \times A_1^8 \times A_1^{3''}$ correspond effectivement à une paire duale, on peut prendre $\mathfrak{a} \simeq A_1$. Comme les autres S-sous-algèbres non maximales de E_7 sont produits de deux algèbres simples dont l'une au moins est de type A_1 (cf. [Table Dy]), on en déduit par le Corollaire 5.24. que si une S-sous-algèbre non maximale correspond à une paire duale, alors un des facteurs de type A_1 est admissible. En consultant la Table 5, on trouve l'unique cas qui manquait à savoir $(A_1^8, G_2^1 \times A_1^{3''})$ qui correspond à l'exception *c.* de l'énoncé.

cas E_8

Les S-sous-algèbres maximales non simples de E_8 sont (cf. [Table Dy]) :

$$G_2^1 \times F_4^1, \qquad A_2^{6'} \times A_1^{16} .$$

D'après la Prop. 5.19. ces couples correspondent à des paires duales S-irréductibles.

Les algèbres G_2^1 et F_4^1 ont été décrites comme sous-algèbres admissibles au §6 (voir 6.10 cas 8) et 10) respectivement). Pour la paire $(A_2^{6'}, A_1^{16})$ seule la deuxième algèbre apparait comme sous-algèbre admissible (voir 6.10. cas 2)) ; il s'agit de l'exception *e.* de l'énoncé.
Comme dans le cas E_7 précédent la lecture attentive de [Table Dy] montre que si une S-sous-algèbre non maximale de E_8 correspond à une paire duale, alors l'une de ses sous-algèbres de Howe est de type A_1 et est donc admissible (Cor. 5.24.) La consultation de la Table 5 nous donne le seul cas $(A_1^8, G_2^1 \times G_2^1)$ (voir 6.10. cas 1)) qui correspond à l'exception *d.* de l'énoncé. Notons que l'algèbre $G_2^1 \times G_2^1$ ne peut être admissible puisqu'elle n'est pas simple.

Les cas F_4 et G_2 sont analogues. Seule l'algèbre F_4 contient une (unique) paire duale S-irréductible de type (A_1, G_2) dont les deux sous-algèbres de Howe sont admissibles). $\square$

9. Le cas du produit tensoriel de deux formes symétriques en dimensions paires : étude détaillée.

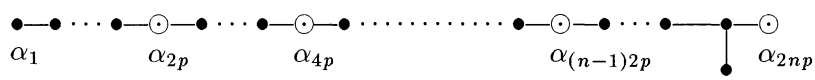
Nous avons vu dans le Théorème 5.4. que si $\mathfrak{a}$ était une sous-algèbre de Howe semi-simple, alors toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$ de $\mathfrak{a}$ était le centre d'une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$.

Le Théorème 8.1. (Théorème principal) dit que sous l'hypothèse de S-irréductibilité "presque toute" paire est constituée de sous-algèbres admissibles, qui sont des cas particuliers de sous-algèbres vérifiant la condition précédente.

Le même Théorème 8.1. nous apprend qu'une exception majeure est la paire $(o(2n), o(2p)) \simeq (D_n, D_p)$ dans $o(4np) \simeq D_{2np}$ qui correspond au produit tensoriel de deux formes symétriques en dimensions paires. Dans ce cas aucune des deux sous-algèbres de Howe n'est admissible, puisque le type D n'apparaît jamais parmi les sous-algèbres admissibles.

Nous allons indiquer dans ce paragraphe, de manière précise, comment D_n et D_p se réalisent dans D_{2np} et comment la paire (D_n, D_p) est reliée à la paire (C_n, C_p), correspondant au produit tensoriel de deux formes alternées, qui est S-irréductible et dont les deux sous-algèbres de Howe sont admissibles.
Cette dernière paire correspond dans D_{2np} au diagramme C-admissible suivant

(9 − 1)



Nous commençons par réaliser D_{2np} comme l 'algèbre de Lie des matrices de dimension $4np$ de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A & Y \\ Z & -{}^tA \end{pmatrix}$$

où $A \in gl(2np)$ et où Y et Z sont antisymétriques de dimension $2np$. Dans une telle matrice on note $A = (a_{ij})$, $Y = (y_{ij})$, $Z = (z_{ij})$ les coefficients des blocs correspondants.

Nous réalisons C_n comme l'algèbre de Lie des matrices de dimension $2n$ de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} B & V \\ W & -{}^tB \end{pmatrix}$$

où $B \in gl(n)$ et où V et W sont des matrices symétriques de dimension n. Dans une telle matrice on note $B = (b_{ij})$, $V = (v_{ij})$, $W = (w_{ij})$ les coefficients des blocs correspondants.

Considérons alors le plongement $C_n \hookrightarrow D_{2np}$ réalisé par

$$(9-2) \qquad C_n \ni \begin{pmatrix} B & V \\ W & -{}^tB \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (b_{ij}I_{2p}) & (v_{ij}J_{2p}) \\ (w_{ij}J_{2p}) & (-{}^tb_{ij}I_{2p}) \end{pmatrix} \in D_{2np}$$

où I_{2p} désigne la matrice identité de dimension $2p$ et où $J_{2p} = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ -I_p & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que les quatre blocs qui figurent dans la matrice de droite de (9-2) sont de dimension $2np$.

En se rappelant aussi que $C_p = \{A \in gl(2p),\ AJ_{2p} + J_{2p}{}^tA = 0\}$ on voit facilement que

$$Z_{D_{2np}}(C_n) = \{ \begin{pmatrix} A & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & A & & & \\ & & & -{}^tA & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -{}^tA \end{pmatrix},\ A \in C_p\} \simeq C_p.$$

Nous avons ainsi réalisé le plongement $(C_n, C_p) \hookrightarrow D_{2np}$ correspondant au diagramme (9-1).

Dans l'exemple précédent une sous-algèbre de Cartan de C_n est la sous-algèbre $\mathfrak{h}_\theta$, centre de la sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}_\theta$ correspondant au diagramme (9-1). Elle est constituée des matrices diagonales de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{2p} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_n I_{2p} & & & \\ & & & -\lambda_1 I_{2p} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n I_{2p} \end{pmatrix}.$$

La sous-algèbre D_n que nous allons construire aura pour sous-algèbre de Cartan la même sous-algèbre $\mathfrak{h}_\theta$. Rappelons que l'algèbre D_n peut réalisée comme suit :

$$D_n = \{\begin{pmatrix} A & Y \\ Z & -{}^tA \end{pmatrix},\ A \in gl(n), Y \text{ et } Z \text{ antisymétriques}\}.$$

Le plongement est alors le suivant :

$$D_n \ni \begin{pmatrix} A & Y \\ Z & -{}^tA \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (a_{ij} I_{2p}) & (y_{ij} I_{2p}) \\ (z_{ij} I_{2p}) & (-{}^t a_{ij} I_{2p}) \end{pmatrix} \in D_{2np}\,.$$

Il est facile de voir que

$$Z_{D_{2np}}(D_n) = \{\begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} \in D_{2np}\,,\ A \in D_p\}$$

et qu'inversement $Z_{D_{2np}}(Z_{D_{2np}}(D_n)) \ = \ D_n$.

La paire duale (D_n, D_p) ainsi construite possède la propriété qu'aucune de ses sous-algèbres de Howe n'est admissible. Neanmoins l'algèbre $\mathfrak{h}_\theta$ associée au diagramme (9-1) est une sous-algèbre de Cartan de D_n, la même que celle de C_n dans la paire duale admissible (C_n, D_p) associée au même diagramme, ce qui illustre le Théorème 5.4.

Remarque 9.1. — *Plongement faible*

Il est bien connu que le système de racines D_n n'est pas un sous-système de C_n, c'est à dire un sous-ensemble clos et symétrique, ce qui revient à dire qu'on ne peut pas plonger une algèbre de type D_n comme une sous-algèbre régulière dans une algèbre de type C_n.
La description précédente des plongements de (D_n, D_p) et (C_n, C_p) dans D_{2np} met en évidence une espèce de *plongement faible* de D_n dans C_n, au sens où il

existe une algèbre $\mathfrak{g} \simeq D_{2np}$ qui contient D_n et C_n, un centre $\mathfrak{h}_\theta$ d'une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$, tels que $\mathfrak{h}_\theta$ soit une sous-algèbre de Cartan de D_n et C_n, et tels que les systèmes de racines correspondants vérifient $\mathcal{R}(D_n, \mathfrak{h}_\theta) \subset \mathcal{R}(C_n, \mathfrak{h}_\theta)$, sans bien sûr, que le premier système soit clos dans le second.

10. Constructions de tours duales.

10.1. Définitions

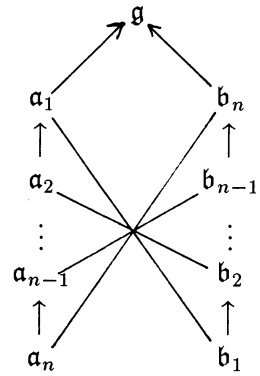
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Rappelons que deux paires duales $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$ et $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)$ de $\mathfrak{g}$ sont dites "see-saw" ou "balançoire" si $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2$. Autrement dit on obtient la "tour duale" à deux étages suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{g} & \\
\mathfrak{a}_1 \arrow[ur] \arrow[dr, dash] & & \mathfrak{b}_2 \arrow[ul] \arrow[dl, dash] \\
\mathfrak{a}_2 \arrow[u] \arrow[ur, dash] & & \mathfrak{b}_1 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où les flèches sont des inclusions et où les traits obliques indiquent la dualité.

La notion de paires "see-saw" a été introduite par S. Kudla ([Ku]). La traduction "paires balançoire" se trouve dans [M-V-W].

Nous nous proposons ici d'indiquer quelques procédés qui fournissent des suites $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ de paires duales telles que $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i-1}$ et $\mathfrak{b}_{i-1} \subset \mathfrak{b}_i$. En terme de diagramme ces suites correspondent à la tour duale :



10.2. Quelques remarques concernant la plus grande racine.

Nous reprenons les notations habituelles : $\mathfrak{g}$ (simple), $\mathfrak{h}$, $\mathcal{R}$, Ψ, $\mathcal{R}^{\pm}$ qui ont été définies en 1.2. Soit ω la plus grande racine de $\mathcal{R}$ relativement à Ψ.

Dans ce paragraphe nous supposerons de plus que $\mathfrak{g}$ n'est ni du type A_n, ni du type C_n.

Dans ce cas nous désignerons par α_0 l'unique racine simple qui est connectée à $-\omega$ dans le diagramme de Dynkin complété.

Dans les cas où $\mathfrak{g}$ est de type exceptionnel on note α_1 l'unique racine simple qui est connectée à α_0 dans le diagramme de Dynkin.

Dans les cas B_n et D_n il y a deux racines simples connectées à α_0, que nous notons α_1^1 et α_1^2.

Proposition 10.2.1. — *Soit D le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ où on a encerclé les racines α_0 et α_1 dans les cas exceptionnels et les racines α_0, α_1^1 et α_1^2 dans les cas B_n et D_n.*
Alors le diagramme D est un diagramme C-admissible.

Démonstration. — La démonstration la plus courte est certainement celle qui procède cas par cas, en regardant si les diagrammes obtenus sont C-admissibles dans la table 3.

Le cas de G_2 est de toute façon trivial puisque la diagramme obtenu est celui où on a encerclé toutes les racines et qui correspond au cas trivial $\theta = \emptyset$.

Nous donnons néanmoins une démonstration a priori de cette proposition pour E_6, E_7, E_8 et F_4 (qui pourrait être modifiée pour traiter les cas B_n et D_n). Cette démonstration a aussi le mérite de mettre en évidence une polarisation canonique de l'algèbre de Heisenberg assciée à ω (voir la Remarque 10.2.4. ci-dessous).

Lemme 10.2.2. — *Le coefficient de α_1 dans la plus grande racine ω est 3.*

Démonstration du Lemme. — Posons $\theta = \Psi \setminus \{\alpha_0, \alpha_1\}$. Ecrivons la plus grande racine sous la forme $\omega = 2\alpha_0 + m\alpha_1 + \gamma$ où $\gamma \in < \theta >$. Le coefficient 2 pour α_0 est une conséquence du fait que si on pose $\theta_0 = \Psi \setminus \{\alpha_0\}$ alors $d_{top}(\theta_0) = d_2(\theta_0)$ (on a vu en 5.16. que $d_1(\theta_0) + d_2(\theta_0)$ est une algèbre d'Heisenberg).

Désignons par $(\ , \ )$ la forme bilinéaire sur $\mathfrak{h}^*$ induite par la forme de Killing.

On a

$$(\omega, \alpha_0) = 2(\alpha_0, \alpha_0) + m(\alpha_1, \alpha_0) > 0$$

car $(\gamma, \alpha_0) = 0$ et $(\omega, \alpha_0) > 0$ (α_0 et $-\omega$ sont reliées dans le diagramme complété...). D'autre part $n(\alpha_1, \alpha_0) = \frac{2(\alpha_1, \alpha_0)}{(\alpha_0, \alpha_0)} = -1$ puisque α_1 et α_0 sont reliées par une arête simple dans le diagramme de Dynkin. On en déduit que

$$2(\alpha_0, \alpha_0) + m(\alpha_1, \alpha_0) = 2(\alpha_0, \alpha_0) - \frac{m}{2}(\alpha_0, \alpha_0) > 0$$

ce qui implique que $2 > \frac{m}{2} > 0$, donc $m = 1, 2$ ou 3.

Montrons que m ne peut pas être égal à 1.
Si c'était le cas on aurait donc $\omega = 2\alpha_0 + \alpha_1 + \gamma$. Considérons la racine $\delta = \alpha_0 + \alpha_1$. Alors puisque $(\omega, \delta) = (\omega, \alpha_0) > 0$ on a que $\omega - \delta = \alpha_0 + \gamma$ est une racine. Ceci n'est pas possible car le support $Y(\alpha_0 + \gamma)$ de $\alpha_0 + \gamma$ n'est pas connexe ([Bo2] chap. 6 §1.6 Corollaire 3).

Montrons que m ne peut pas être égal à 2.
Si c'était le cas on aurait donc $\omega = 2\alpha_0 + 2\alpha_1 + \gamma$. On sait que $(\omega, \alpha_0) = \frac{1}{2}(\omega, \omega)$ ([J] Lemma 2.2.). Cela implique que $\omega - \alpha_0 \in \mathcal{R}$ et on a alors $(\omega - \alpha_0, \alpha_0) = \frac{1}{2}(\omega, \omega) - (\alpha_0, \alpha_0) < 0$ car $||w|| = ||\alpha_0||$ dans les cas étudiés.

D'autre part $(\omega - \alpha_0, \alpha_0) = (2\alpha_1 + \alpha_0 + \gamma, \alpha_0) = 2(\alpha_1, \alpha_0) + (\alpha_0, \alpha_0) = -(\alpha_0, \alpha_0) + (\alpha_0, \alpha_0) = 0$ ce qui est contradictoire avec ce qui précède.

Le Lemme 10.2.2. est donc démontré.

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des racines intervenant dans $d_1(\theta_0)$. L'ensemble $\mathcal{H}$ est réunion des deux ensembles disjoints $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ définis de la manière suivante :

$$\mathcal{H}_1 = \{\delta \in \mathcal{H} \,|\, \delta - \alpha_0 \in \mathcal{R}^+ \cup \{0\}\} \qquad \mathcal{H}_2 = \{\delta \in \mathcal{H} \,|\, \delta - \alpha_0 \notin \mathcal{R}^+ \cup \{0\}\}$$

Lemme 10.2.3. —
1) $\delta \in \mathcal{H}_1 \Longleftrightarrow (\delta, \alpha_0) > 0$
2) $\delta \in \mathcal{H}_2 \Longleftrightarrow (\delta, \alpha_0) \leq 0$
3) $\delta \in \mathcal{H}_1 \Longleftrightarrow \omega - \delta \in \mathcal{H}_2$

Démonstration du Lemme. — Les assertions 1) et 2) sont évidemment équivalentes.

a) Montrons que si $\delta \in \mathcal{H}_2$, alors $\omega - \delta \in \mathcal{H}_1$. Notons d'abord que $\omega - \delta$ est une racine, puisque $(\omega, \delta) = \frac{1}{2}(\omega, \omega)$ ([J] loc. cit). La condition $\delta \in \mathcal{H}_2$ implique que $(\alpha_0, \delta) \leq 0$. Mais alors $(\omega - \delta, \alpha_0) = (\omega, \alpha_0) - (\delta, \alpha_0) > 0$. Donc $w - \delta - \alpha_0 \in \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$, d'où $\omega - \delta \in \mathcal{H}_1$.

b) Inversement supposons que $(\alpha_0, \delta) \leq 0$ et que $\delta \in \mathcal{H}_1$. Alors $\delta - \alpha_0 \in \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$ et $(\delta - \alpha_0, \alpha_0) = (\delta, \alpha_0) - (\alpha_0, \alpha_0) < 0$, ce qui implique que $\delta - 2\alpha_0 \in \mathcal{R}$ (l'hypothèse $\delta - 2\alpha_0 = 0$ étant ecartée car $2\alpha_0$ n'est pas une racine).
Mais $\delta - 2\alpha_0$ est une racine dont le coefficient suivant α_0 est -1 et qui comprend certainement une autre racine de Ψ avec un coefficient > 0, ce qui est impossible.
Nous avons ainsi prouvé les assertions 1) et 2) du Lemme.

c) Il reste à montrer que si $\delta \in \mathcal{H}_1$ alors $\omega - \delta \in \mathcal{H}_2$. Supposons donc que δ et $\omega - \delta \in \mathcal{H}_1$. On a alors $(\delta, \alpha_0) > 0$ et $(\omega - \delta, \alpha_0) > 0$ d'après les deux premières assertions du Lemme. On a :

$$1 = \frac{2(\omega, \alpha_0)}{(\alpha_0, \alpha_0)} > \frac{2(\delta, \alpha_0)}{(\alpha_0, \alpha_0)} > 0$$

(la première égalité traduisant le fait que $-\omega$ et α_0 sont reliées par une racine simple), ce qui impliquerait que $n(\delta, \alpha_0)$ n'est pas un entier !
Le Lemme 10.2.3. est ainsi démontré.

Suite de la démonstration de la Proposition 10.2.1.

La Proposition est équivalente à dire que le coefficient de α_1 dans la plus grande racine de $< \theta_0 >$ est 1. Supposons le contraire, alors il existe une racine de $< \theta_0 >$ de la forme $2\alpha_1 + \mu$ où $\mu \in < \theta >$.
On a donc $(2\alpha_1 + \mu, \alpha_0) = (2\alpha_1, \alpha_0) < 0$. Mais alors $\nu = 2\alpha_1 + \alpha_0 + \mu \in \mathcal{R}$, mais par construction $\nu - \alpha_0 \in \mathcal{R}$, ce qui signifie que $\nu \in \mathcal{H}_1$.
Regardons $\omega - \nu$. On a, d'après le Lemme 5.2.1.,

$$\omega - \nu = (3\alpha_1 + 2\alpha_0) - (2\alpha_1 + \alpha_0) + \mu' = \alpha_1 + \alpha_0 + \mu'$$

où $\mu' \in < \theta >$. D'après le Lemme 10.2.3., $\omega - \nu \in \mathcal{H}_2$, c'est à dire que $\omega - \nu - \alpha_0 \notin \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$. Or

$$(\omega - \nu, \alpha_0) = (\alpha_1 + \alpha_0, \alpha_0) = -\frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{2} + (\alpha_0, \alpha_0) > 0 .$$

Cela serait équivalent à $\omega - \nu \in \mathcal{H}_1$, ce qui serait en contradiction avec $\nu \in \mathcal{H}_1$ d'après le Lemme précédent. $\square$

Remarque 10.2.4. —

Considérons l'algèbre de Heisenberg $H_\omega = d_1(\theta_0) \oplus d_2(\theta_0) = d_1(\theta_0) \oplus \mathfrak{g}^\omega$ dont le centre est $\mathfrak{g}^\omega$. Les constructions précédentes indiquent une polarisation naturelle de $d_1(\theta_0)$:

$$d_1(\theta_0) \;=\; \mathfrak{g}^{\mathcal{H}_1} \;\oplus\; \mathfrak{g}^{\mathcal{H}_2} \;,$$

ce qui signifie que $\dim \mathfrak{g}^{\mathcal{H}_1} = \dim \mathfrak{g}^{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2}\dim d_1(\theta_0)$, $[\mathfrak{g}^{\mathcal{H}_1}, \mathfrak{g}^{\mathcal{H}_1}] = [\mathfrak{g}^{\mathcal{H}_2}, \mathfrak{g}^{\mathcal{H}_2}] = 0$ et $[\mathfrak{g}^{\mathcal{H}_1}, \mathfrak{g}^{\mathcal{H}_2}] = \mathfrak{g}^\omega$.
Plus précisément si X_ω désigne un élément non nul de $\mathfrak{g}^\omega$, on peut choisir des éléments $X_\gamma \in \mathfrak{g}^\gamma$ pour $\gamma \in \mathcal{H}_1$ et des éléments $X_{\omega-\gamma} \in \mathfrak{g}^{\omega-\gamma}$ pour $\omega - \gamma \in \mathcal{H}_2$ tels que

$$[X_\gamma, X_{\omega-\gamma'}] \;=\; \delta_{\gamma,\gamma'} X_\omega \;.$$

Une description un peu différente de cette polarisation est donnée (sans démonstration) dans [K-S].

Dans tous les cas exceptionnels sauf G_2, nous posons $\theta = \Psi \setminus \{\alpha_0, \alpha_1\}$ et dans les cas B_n et D_n nous posons $\theta = \Psi \setminus \{\alpha_0, \alpha_1^1, \alpha_1^2\}$. Convenons aussi de désigner par α_1^1 la première racine dans les numérotations usuelles des racines de B_n et D_n (par exemples celles de [Bo2]). Avec ces notations on a :

Proposition 10.2.5. — *Dans tous les cas exceptionnels sauf G_2 et dans les cas B_n et D_n, en définissant la partie θ de Ψ comme précédemment, la sous-algèbre $\mathfrak{l}'_\theta$ est une sous-algèbre de Howe dont le commutant est*
- la sous-algèbre de type A_2 engendrée par $-\omega$ et α_0 dans les cas exceptionnels (sauf G_2).
- la sous-algèbre de type A_3 engendrée par $-\omega$, α_0 et α_1^1 dans les cas B_n et D_n.

Démonstration. — Les sous-algèbres $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ décrites dans l'énoncé sont des sous-algèbres régulières de même rang que $\mathfrak{g}$ qui sont obtenues par une seule opération élémentaire (5.7.). Le résultat se déduit alors de la proposition 5.15. Notons qu'on ne peut pas appliquer ce résultat au cas G_2 car la sous-algèbre $\mathfrak{l}'_\theta$ est réduite à $\{0\}$. $\square$

10.3. Un premier ensemble de tours duales.

Soient les parties θ_0 et θ ($\theta \subset \theta_0$) de Ψ comme elles ont été définies dans le paragraphe précédent. D'après la proposition 5.17., la sous-algèbre $\mathfrak{l}'_{\theta_0}$ est une

sous-algèbre de Howe, le centralisateur de $\mathfrak{l}'_{\theta_0}$ étant la sous-algèbre de type A_1 engendrée par $(X_{-\omega}, H_\omega, X_\omega)$.

D'après la Proposition 10.2.5. ci-dessus, la sous-algèbre $\mathfrak{l}'_\theta$ (qui est incluse dans $\mathfrak{l}'_{\theta_0}$) est également une sous-algèbre de Howe. D'autre part, d'après la proposition 10.2.1. et le théorème 4.1., la sous-algèbre d'isotopie générique de $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est également une sous-algèbre de Howe. En définitive, nous avons construit les tours duales suivantes.

(10−3−1)

$$\begin{tikzcd}
 & B_n & \\
A_1 \times B_{n-2} \arrow[ur] \arrow[dr, dash] & & B_3 \arrow[ul] \arrow[dl, dash] \\
B_{n-3} \arrow[u] \arrow[rr, dash] & & A_3 \arrow[u] \\
D_{n-3} \arrow[u] \arrow[urr, dash] & & A_1 \arrow[u] \arrow[ull, dash]
\end{tikzcd}$$

(10−3−2)

$$\begin{tikzcd}
 & D_n & \\
A_1 \times D_{n-2} \arrow[ur] \arrow[dr, dash] & & B_3 \arrow[ul] \arrow[dl, dash] \\
D_{n-3} \arrow[u] \arrow[rr, dash] & & A_3 \arrow[u] \\
B_{n-4} \arrow[u] \arrow[urr, dash] & & A_1 \arrow[u] \arrow[ull, dash]
\end{tikzcd}$$

(10 − 3 − 3)

$$\begin{tikzcd}
 & E_6 & \\
A_5 \arrow[ur] \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[ul] \arrow[dl, dash] \\
A_2 \times A_2 \arrow[u] \arrow[rr, dash] & & A_2 \arrow[u] \\
A_2 \arrow[u] \arrow[urr, dash] & & A_1 \arrow[u] \arrow[ull, dash]
\end{tikzcd}$$

(10 − 3 − 4)

$$\begin{tikzcd}
 & E_7 & \\
D_6 \arrow[ur] \arrow[dr, dash] & & G_2 \arrow[ul] \arrow[dl, dash] \\
A_5 \arrow[u] \arrow[rr, dash] & & A_2 \arrow[u] \\
C_3 \arrow[u] \arrow[urr, dash] & & A_1 \arrow[u] \arrow[ull, dash]
\end{tikzcd}$$

$(10-3-5)$

$$\begin{tikzcd}
 & E_8 & \\
E_7 \arrow[ur] & & G_2 \arrow[ul] \\
E_6 \arrow[u] \arrow[urr, dash] & & A_2 \arrow[u] \arrow[ull, dash] \\
F_4 \arrow[u] \arrow[uurr, dash] & & A_1 \arrow[u] \arrow[uull, dash]
\end{tikzcd}$$

$(10-3-6)$

$$\begin{tikzcd}
 & F_4 & \\
C_3 \arrow[ur] & & G_2 \arrow[ul] \\
A_2 \arrow[u] \arrow[urr, dash] & & A_2 \arrow[u] \arrow[ull, dash] \\
A_1 \arrow[u] \arrow[uurr, dash] & & A_1 \arrow[u] \arrow[uull, dash]
\end{tikzcd}$$

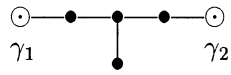
$(10-3-7)$

$$\begin{tikzcd}
 & G_2 & \\
A_1 \arrow[ur] & & G_2 \arrow[ul] \\
\{0\} \arrow[u] \arrow[urr, dash] & & A_1 \arrow[u] \arrow[ull, dash]
\end{tikzcd}$$

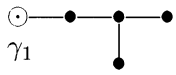
10.4. Où l'on agrandit la première tour duale dans E_6.

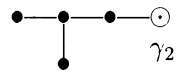
Partons de la tour duale (10-3-3) dans E_6. Dans cette tour la construction évoquée au début de 10.3. donne l'algèbre G_2 comme la sous-algèbre admissible associée au diagramme où on a encerclé les racines α_0 et α_1. Pour continuer la construction on considère cette fois-ci G_2 comme l'isotropie générique du diagramme C-admissible suivant :

$(10-4-1)$



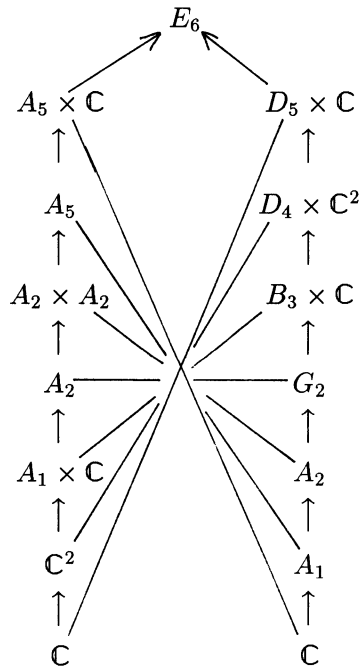
où l'algèbre admissible est de type A_2 (cela est possible d'après la table 5 où l'on voit que les deux constructions sont en dualité).
Dans ce cas la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ n'est pas irréductible, les composantes irréductible du diagramme précédent étant (voir les notations précédent 2.5.) :





et l'isotropie générique de ces deux diagrammes est de type B_3 d'après le §4. Elles contiennent évidemment la sous-algèbre G_2. On notera cependant que ces deux sous-algèbres de type B_3 sont conjuguées dans E_6 par l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl.
Notons aussi que chacun des diagrammes ci-dessus correspond à une paire duale de type (A_1, B_3) dans la partie semi-simple (D_5) d'une sous-algèbre de Levi de E_6. D'après le Lemme 5.2. on obtient une paire duale de type $(A_1 \times \mathbb{C}, B_3 \times \mathbb{C})$ dans E_6. En rajoutant des paires duales évidentes correspondant à des sous-algèbres de Levi, on obtient la tour duale suivante.

$(10-4-2)$



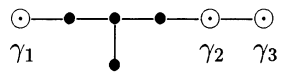
On peut noter que les algèbres de type B_3 précédemment décrites ne sont pas des sous-algèbres de Howe. En effet on a $Z_{E_6}(B_3) \subset Z_{E_6}(G_2) = A_2$, et la considération du diagramme complété de E_6 montre que la représentation $(B_3, \mathfrak{g}^{\overline{\omega}})$ est irréductible et non triviale, donc ne contient pas de vecteur B_3-invariant. On en déduit que l'algèbre $Z_{E_6}(B_3)$ est isomorphe à l'algèbre de type A_1 engendrée par l'un des $\mathfrak{sl}_2$-triplets (Y_i, H_i, X_i) $(i = 1, 2$, selon le choix de B_3, notations du Théorème 3.3.). On en déduit que l'algèbre $Z_{E_6}(A_1)$ contient

l'algèbre $Z_{A_2}(A_1)$ qui est non réduite à $\{0\}$ et non contenue dans B_3, donc B_3 n'est pas de Howe.

10.5. Où l'on agrandit la première tour duale dans E_7

Considérons la tour duale (10-3-4) de E_7. Dans cette tour, comme précédemment dans E_6, nous allons considérer l'algèbre G_2 comme le centralisateur de la sous-algèbre C-admissible de type C_3 décrite par le diagramme

$(10-5-1)$

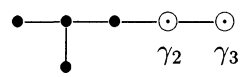


Cela est possible du fait de la dualité du diagramme précédent avec le diagramme E_7 9) de la Table 5.
On montre par un calcul que parmi les racines restreintes $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3$ qui sont les racines de C_3, c'est la racine $\overline{\gamma}_3$ qui est la racine longue. Dans cette situation, contrairement au cas E_6, les racines γ_1 et γ_2 ne jouent pas des rôles symétriques, ce qui nous amène à distinguer deux cas, chacun de ces cas donnant naissance à une ou plusieurs tours duales.

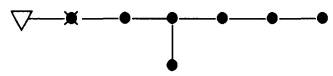
10.5.1.

Il est clair que l'isotropie partielle de $(\mathfrak{l}_\theta, d_1^2(\theta))$ du diagramme (10-5-1) est de type B_3 (voir la fin de la démonstration du Th. 4.1.) et que cette algèbre B_3 est aussi l'isotropie générique du sous-diagramme C-admissible suivant de D_6 :

$(10-5-2)$



la sous-algèbre admissible (de D_6) correspondante étant de type B_2. Comme ce sous-diagramme correspond à la partie semi-simple d'une sous-algèbre de Levi maximale de E_7, on obtient ainsi une paire duale $(B_2 \times \mathbb{C}, B_3 \times \mathbb{C})$.
Puisque B_3 est une isotropie partielle du diagramme (10-5-1), on a $G_2 \subset B_3$, donc $Z_{E_7}(B_3) \subset Z_{E_7}(G_2) = C_3$. Mais il est facile de voir à partir du diagramme complété de E_7 que la sous-algèbre régulière maximale de C_3 de type $A_1 \times B_2$, où B_2 correspond à $\{\overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3\}$ vérifie $A_1 \times B_2 \subset Z_{E_7}(B_3) \subset C_3$. On en déduit que $Z_{E_7}(B_3) = A_1 \times B_2$. Pour montrer qu'inversement on a aussi $B_3 = Z_{E_7}(A_1 \times B_2)$ considérons l'opération élémentaire décrite par le diagramme :



Cela donne une paire duale de type (A_1, D_6) dans E_7 (Prop. 5.15.) et on voit (en comparant avec le diagramme complété du diagramme C_3 correspondant à $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3$) que la sous-algèbre A_1 de cette dernière paire duale est la sous-algèbre qui figure dans $Z_{E_7}(B_3)$. On en déduit que $Z_{E_7}(A_1 \times B_2) = Z_{D_6}(B_2) = B_3$. On a ainsi mis en évidence une paire duale $(B_3, A_1 \times B_2)$.

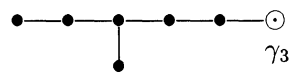
Il y a alors trois manières de plonger B_3 dans une sous-algèbre de Howe.

La première est simplement le plongement $B_3 \subset B_3 \times \mathbb{C}$ où $B_3 \times \mathbb{C}$ est la sous-algèbre de Howe décrite précédemment. Ici B_3 est l'isotropie générique du diagramme (10-5-2). Mais ce diagramme est en dualité avec le même diagramme D_6 où on a encerclé les trois premières racines dans la numérotation habituelle de Bourbaki (voir Table 5,type D_n 1)), ce qui permet de considérer B_3 comme une sous-algèbre admissible. Mais alors on a un plongement $B_3 \hookrightarrow B_4$ par le Lemme 6.7.1., ce qui fournit la suite $B_3 \times \mathbb{C} \hookrightarrow B_4 \times \mathbb{C} \hookrightarrow D_6 \times \mathbb{C}$ de sous-algèbres de Howe.

Pour la seconde manière, considérons la paire duale (D_6, A_1) correspondant à une opération élémentaire déja décrite précédemment. On a bien sûr l'inclusion $B_3 \subset D_6$. L'algèbre D_6 étant la partie semi-simple d'une sous-algèbre de Levi correspondant à un parabolique maximal on obtient aussi une paire duale $(D_6 \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$ (Lemme 5.2.) où, bien entendu, $\mathbb{C}$ désigne aussi la sous-algèbre de Cartan de l'algèbre A_1.

Le troisième plongement est $B_3 \subset F_4$ où l'algèbre F_4 est la sous-algèbre d'isotropie de la sous-algèbre C-admissible de type A_1 correspondant au diagramme

$(10-5-3)$



Il s'agit pour cela de montrer que B_3 commute à un élément générique de la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ correspondant au diagramme précédent qui est un espace préhomogène de type commutatif régulier (Table 2, Remarque 2.4.). Un tel élément générique a été calculé dans [M-R-S]. Il s'écrit $X = X_{\gamma_3} + X_\beta + X_\omega$, où γ_3 est la racine définissant $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$, c'est à dire la racine encerclée du diagramme (10-5-3), où β est la plus petite des racines fortement orthogonales à γ_1 dont l'espace radiciel est dans $\mathfrak{n}_\theta^+$ et où ω est la plus grande racine. Cela provient du fait que dans ce cas le nombre maximal de racines fortement orthogonales dans $\mathfrak{n}_\theta^+$ est trois ([M-R-S]). Un calcul simple montre que dans les notations des Planches de Bourbaki [Bo2]

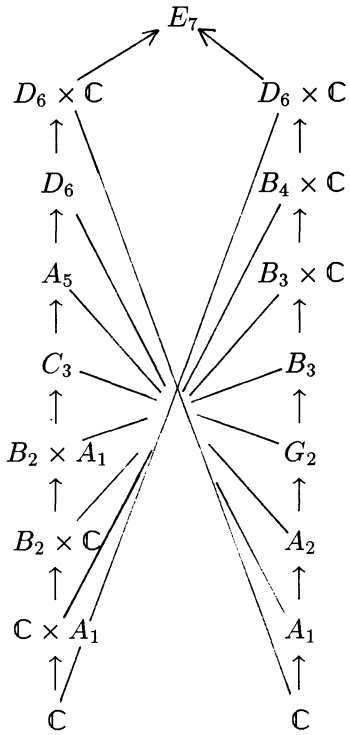
$$\beta = \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ & & 1 & & & \end{array}$$

On remarquera que β est la plus grande racine de l'algèbre régulière D_6 définie par le support de β. Soit D_4 l'unique sous-algèbre régulière de type D_4 de D_6, elle contient B_3. La considération des diagrammes complétés de D_6 et de E_7 montre que $[D_4, X_\beta] = [D_4, X_\omega] = 0$. D'autre part, l'égalité $[B_3, X_{\gamma_3}] = 0$ est claire . Ainsi on a bien $B_3 \subset F_4$.

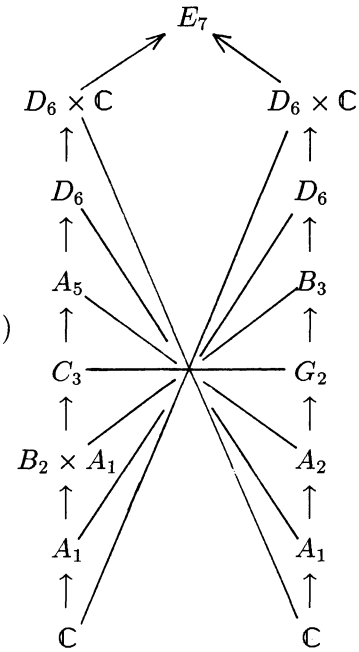
L'inclusion $F_4 \subset E_6 \times \mathbb{C}$, où l'algèbre $E_6 \times \mathbb{C}$ est une sous-algèbre de Levi est évidente ($E_6 \times \mathbb{C}$ étant en dualité avec $\mathbb{C}$ d'après le Lemme 5.2.).

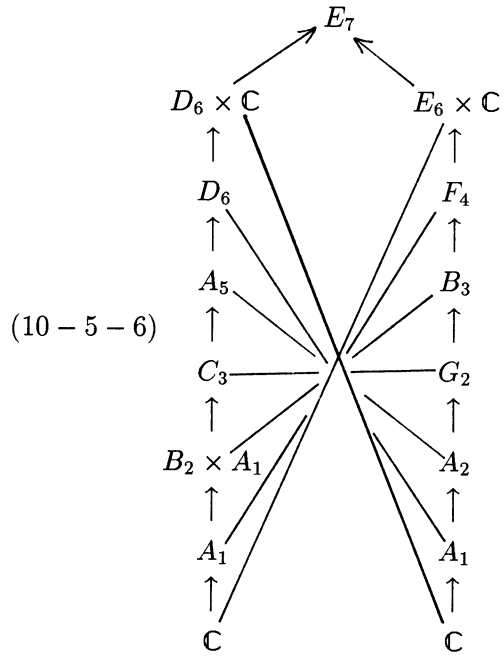
Finalement on a obtenu les tours duales suivantes :

(10−5−4)



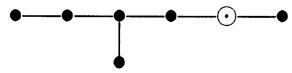
(10−5−5)



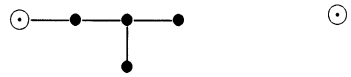


10.5.2.

Considérons maintenant la sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}_\theta \simeq D_5 \times A_1 \times \mathbb{C}$ associée au diagramme

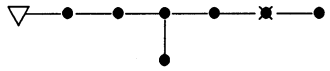


et dans la partie semi-simple $\mathfrak{l}'_\theta \simeq D_5 \times A_1$ considérons le diagramme C-admissible (non connexe)



qui correspond à une paire duale $(A_1 \times A_1 \times \mathbb{C}, B_3 \times \mathbb{C})$ dans E_7.
Ici B_3 est a nouveau une isotropie partielle du diagramme (10-5-1). On a donc $G_2 \subset B_3$ où G_2 est l'isotropie totale de ce diagramme, donc $Z_{E_7}(B_3) \subset Z_{E_7}(G_2) \subset C_3$. Mais il est facile de voir à partir du diagramme complété de E_7 que la sous-algèbre régulière maximale de C_3 de type $A_1 \times B_2$, où B_2 correspond à $\{\overline{\omega}, \overline{\gamma}_1\}$ vérifie $A_1 \times B_2 \subset Z_{E_7}(B_3) \subset C_3$. On en déduit que

$Z_{E_7}(B_3) = A_1 \times B_2$. Pour montrer qu'inversement on a aussi $Z_{E_7}(A_1 \times B_2) = B_3$, considérons l'opération élémentaire décrite par le diagramme



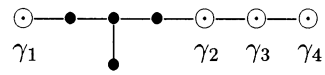
qui donne une paire duale de type (D_6, A_1) dans E_7. On en déduit comme en 10.5.1. que $Z_{E_7}(A_1 \times B_2) = Z_{D_6}(B_2) = B_3$, ce qui donne une paire duale $(A_1 \times B_2, B_3)$. Comme en 10.5.1. on poursuit la construction de tours duales soit en plongeant B_3 dans $B_3 \times \mathbb{C}$, soit dans D_6, soit dans F_4. Mais les deux derniers plongements ne fournissent pas de nouvelles tours duales car les deux sous-algèbres de type B_3, à savoir l'isotropie générique de $d_1^2(\theta)$ étudiée en 10.5.1. et celle correspondant à l'isotropie générique de $d_1^1(\theta)$ étudiée ici, sont conjuguées dans le groupe adjoint de E_7 par l'automorphisme qui provient de l'unique automorphisme non trivial du graphe de Dynkin complété. On obtient la tour duale suivante.

$$
(10-5-7)\qquad
\begin{tikzcd}
 & E_7 & \\
D_6 \times \mathbb{C} \arrow[ur] & & D_5 \times A_1 \times \mathbb{C} \arrow[ul] \\
D_6 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & D_5 \times \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ddll] \\
A_5 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & B_3 \times \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ddll] \\
C_3 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & B_3 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
A_1 \times B_2 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & G_2 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
A_1 \times A_1 \times \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ddrr] & & A_2 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
A_1 \times \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ddrr] & & A_1 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
\mathbb{C} \arrow[u] & & \mathbb{C} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

10.6. Où l'on agrandit la première paire duale dans E_8

Considérons la tour duale (10-3-5) de E_8. Dans cette tour, comme précédemment dans E_7, nous allons maintenant considérer l'algèbre G_2 comme le centralisateur de la sous-algèbre C-admissible de type F_4 associée au diagramme

$(10-6-1)$



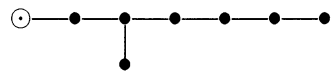
(cela est possible du fait de la dualité du diagramme précédent avec le diagramme E_8 8) de la Table 5)

On montre par un calcul que, parmi les racines restreintes $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}_2$, $\overline{\gamma}_3$, $\overline{\gamma}_4$ qui forment une base de F_4, ce sont les racines $\overline{\gamma}_3$ et $\overline{\gamma}_4$ qui sont longues.

Dans cette situation, comme dans E_7, les racines γ_1 et γ_2 ne jouent pas le même rôle, ce qui nous ammène à distinguer deux cas, chacun donnant naissance à plusieurs tours duales.

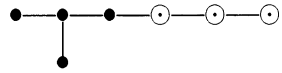
10.6.1.

Commençons par regarder la sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l} \simeq D_7 \times \mathbb{C}$ associée au diagramme admissible suivant :



Dans cette sous-algèbre $\mathfrak{l}$ on a une paire duale $(B_3 \times \mathbb{C}, B_3 \times \mathbb{C})$ (qui est aussi une paire duale dans E_8) associée au diagramme C-admissible suivant de D_7 :

$(10-6-2)$



L'algèbre B_3 qui correspond à l'isotropie générique du diagramme précédent est aussi l'isotropie partielle $(\mathfrak{l}_\theta, d_1^2(\theta))$ du diagramme (10-6-1). On a donc $G_2 \subset B_3$, d'où $Z_{E_8}(B_3) \subset Z_{E_8}(G_2) = F_4$.

On voit à partir du diagramme complété de E_8 que la sous-algèbre régulière maximale de type B_4 de F_4 vérifie $B_4 \subset Z_{E_8}(B_3) \subset Z_{E_8}(G_2) = F_4$. On en déduit que $Z_{E_8}(B_3) = B_4$.

Pour montrer qu'inversement on a aussi $B_3 = Z_{E_8}(B_4)$ on commence par remarquer que les sous-algèbres B_4 et F_4 ont une même sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_\theta \simeq \mathbb{C}^4$ qui est le centre de la sous-algèbre de Levi associée au diagramme (10-6-1). On en déduit que $Z_{E_8}(B_4) \subset Z_{E_8}(\mathfrak{h}_\theta) = D_4 \times \mathbb{C}^4$, où D_4 désigne la sous-algèbre régulière de E_8 engendrée par les racines non encerclées de (10-6-1).

Donc

$$Z_{E_8}(B_4) = Z_{D_4}(B_4) = B_3 \,.$$

Nous avons ainsi mis en évidence une paire duale de type (B_3, B_4).
Comme pour E_7 on a alors trois manière de plonger B_3 dans une sous-algèbre de Howe.

La première est simplement le plongement $B_3 \subset B_3 \times \mathbb{C}$ évoqué précédemment. Ici B_3 est obtenu comme isotropie générique du diagramme (10-6-2). Mais comme ce diagramme est auto-dual (Table 5, type D_n 1)), on peut aussi considérer B_3 comme la sous-algèbre admissible de D_7 associée au même diagramme (10-6-2) et poursuivre par les inclusions suivantes de sous-algèbres de Howe :

$$B_3 \subset B_3 \times \mathbb{C} \subset B_4 \times \mathbb{C} \subset B_5 \times \mathbb{C} \subset D_7 \times \mathbb{C}$$

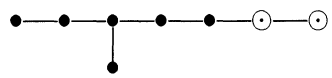
où B_3, B_4, B_5 sont les sous-algèbres C-admissibles de D_7 correspondant aux diagrammes où on a encerclé les trois,quatre ou cinq premières racines (numérotation traditionnelle). Les inclusions sont justifiées par le Lemme 6.7.1.

La deuxième manière d'agrandir la tour est de considérer la suite de sous-algèbres de Howe

$$B_3 \subset D_5 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_7 \times \mathbb{C}\,,$$

où les sous-algèbres de Howe D_5, E_6, E_7 sont uniquement déterminées par le fait qu'elles apparaissent lors d'une seule opération élémentaire.

Le troisième plongement est $B_3 \subset F_4$ où F_4 est l'isotropie générique du diagramme



correspondant à une algèbre admissible de type G_2. Cette inclusion se démontre comme dans le cas E_7 (10.5.1).

Finalement on construit les tours duales suivantes :

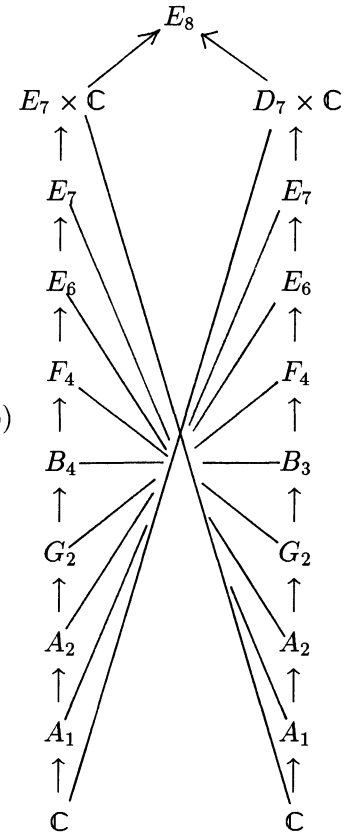
$(10-6-3)$

$$\begin{tikzcd}
 & E_8 & \\
E_7 \times \mathbb{C} \arrow[ur] & & D_7 \times \mathbb{C} \arrow[ul] \\
E_7 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & B_5 \times \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ddll] \\
E_6 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & B_4 \times \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ddll] \\
F_4 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & B_3 \times \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ddll] \\
B_4 \arrow[u] \arrow[rr] & & B_3 \arrow[u] \\
B_3 \times \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ddrr] & & G_2 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
B_2 \times \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ddrr] & & A_2 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
A_1 \times \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ddrr] & & A_1 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
\mathbb{C} \arrow[u] & & \mathbb{C} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$(10-6-4)$

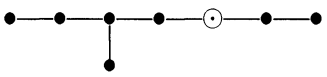
$$\begin{tikzcd}
 & E_8 & \\
E_7 \times \mathbb{C} \arrow[ur] & & E_7 \times \mathbb{C} \arrow[ul] \\
E_7 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & E_7 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
E_6 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & E_6 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
F_4 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & D_5 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
B_4 \arrow[u] \arrow[rr] & & B_3 \arrow[u] \\
A_3 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & G_2 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
A_2 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & A_2 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
A_1 \arrow[u] \arrow[ddrr] & & A_1 \arrow[u] \arrow[ddll] \\
\mathbb{C} \arrow[u] & & \mathbb{C} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

(10 − 6 − 5)



10.6.2.

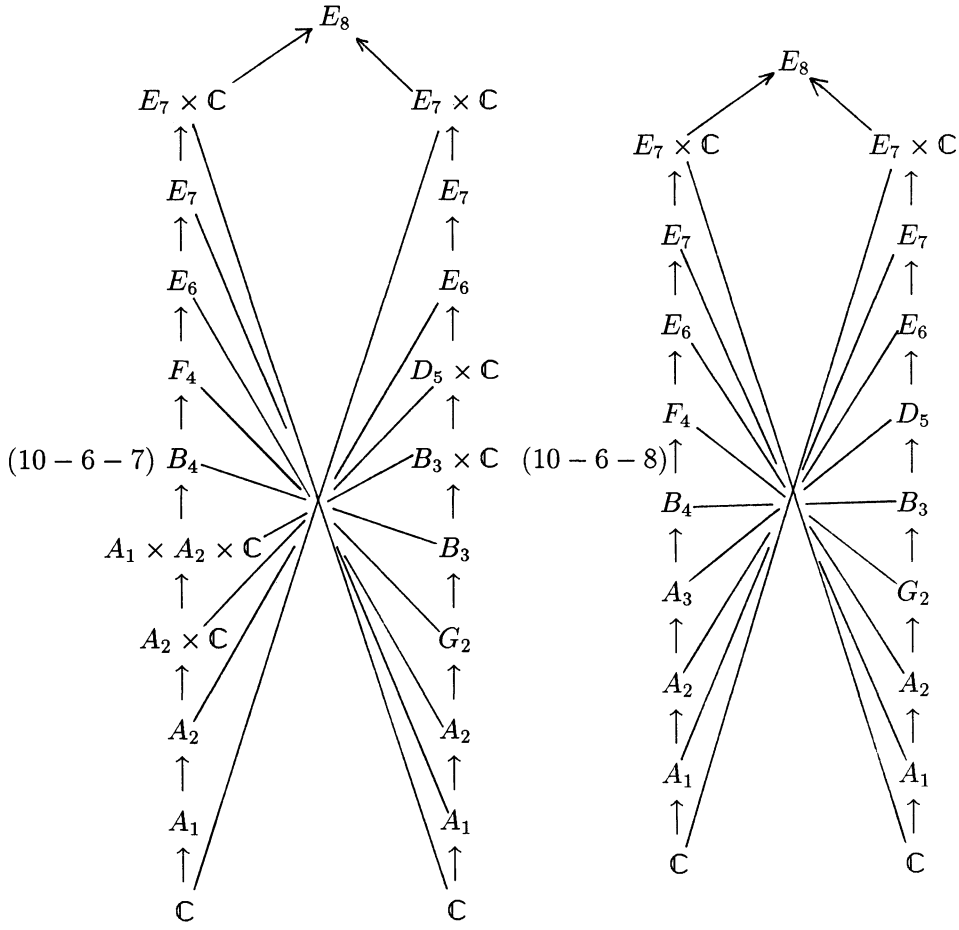
Commençons par considérer la sous-algèbre de Levi maximale $\mathfrak{l} \simeq D_5 \times A_2 \times \mathbb{C}$ associée au diagramme admissible suivant



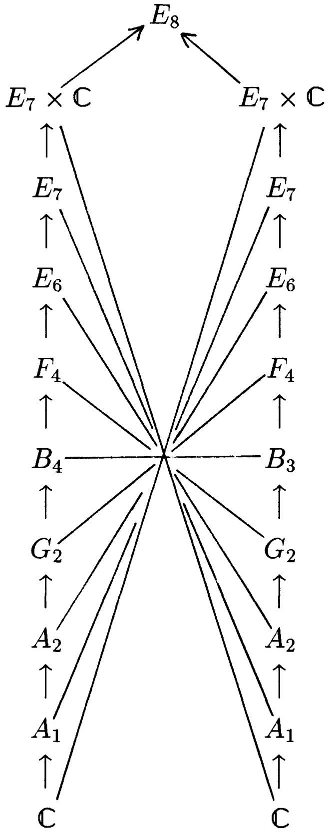
Dans cette algèbre $\mathfrak{l}$ on a la paire duale $(A_1 \times A_2 \times \mathbb{C}, B_3 \times \mathbb{C})$ associée au diagramme C-admissible (non connexe) suivant de $\mathfrak{l}' \simeq D_5 \times A_2$:

(10 − 6 − 6)

L'algèbre B_3 qui correspond à l'isotropie générique du diagramme (10-6-6) est aussi l'isotropie partielle $(\mathfrak{l}_\theta, d_1^1(\theta))$ du diagramme (10-6-1). On a donc $G_2 \subset B_3$. Donc $Z_{E_8}(B_3) \subset Z_{E_8}(G_2) \subset F_4$. On voit à partir du diagramme complété de E_8 que la sous-algèbre régulière de type $A_1 \times A_3$ de la sous-algèbre admissible F_4 vérifie $A_1 \times A_3 \subset Z_{E_8}(B_3) \subset F_4$. Mais cette sous-algèbre régulière n'est pas maximale dans F_4 et, en utilisant l'élément du groupe E_6 qui échange l'isotropie partielle considérée ici avec celle considérée en 10.6.1 on voit que $Z_{E_8}(B_3) = B_4$. Inversement,comme en 10.6.1. on montre que $Z_{E_8}(B_4) = B_3$ et on les trois suites d'inclusions de sous-algèbres de Howe :
$B_3 \subset B_3 \times \mathbb{C} \subset D_5 \times \mathbb{C} \subset E_6 \subset E_7$,
$B_3 \subset D_5 \subset E_6 \subset E_7$,
$B_3 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7$
qui donnent les tours duales suivantes.



(10 – 6 – 9)



Remarque 10.6.2.1. —
Pour construire, comme nous l'avons fait, ces tours dans E_8, nous avons utilisé le passage isotropie-admissible correspondant à deux diagrammes en dualité, parfois à deux reprises comme dans la partie droite de (10-6-3).

11. Paires duales associées aux orbites des espaces préhomogènes commutatifs

Nous avons introduit les espaces préhomogènes commutatifs au paragraphe 2. Rappelons qu'il s'agit des espaces préhomogènes de type parabolique correspondant à la situation où $\mathfrak{n}_\theta^+ = d_{top}(\theta) = d_1(\theta)$ est commutatif.

La classification de ces espaces constitue la Table 2. Notons que nous partons ici d'un tel espace préhomogène commutatif non nécessairement régulier.

Nous allons attacher une sous-algèbre de Howe à chaque L_θ-orbite de $\mathfrak{n}_\theta^+$. Dans la notation traditionnelle des espaces hermitiens symétriques, nous aurons attaché une sous-algèbre de Howe à chaque $K_{\mathbb{C}}$-orbite de $\mathfrak{p}^+$ (voir Remarque 2.4.6.).

Nous commençons par rappeler brièvement la classification de ces orbites. Les démonstrations se trouvent dans [M-R-S] et [R-S]. Nous utilisons les notations des paragraphes 1 et 2.

Soit α_0 la racine encerclée du diagramme de départ. Soit $\mathcal{R}_1$ l'ensembles des racines fortement orthogonales à α_0 (c'est aussi l'ensemble des racines orthogonales à α_0). L'ensemble $\mathcal{R}_1$ est un système de racines dans le sous-espace qu'il engendre. Posons

$$\mathfrak{h}_1 = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_1} \mathbb{C} H_\alpha \qquad \mathfrak{g}_1 = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_1} \mathfrak{g}^\alpha .$$

Alors $\mathfrak{g}_1$ est une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_1$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathcal{R}_1$ est le système de racines de $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$. Posons $\Phi_1^+ = (\mathcal{R}^+ \setminus < \theta >^+) \cap \mathcal{R}_1$ et $\theta_1 = \Psi \cap \mathcal{R}_1$. Si $\Phi_1^+ = \emptyset$, alors θ_1 est une base de $\mathcal{R}_1$ et la construction que nous sommes en train de décrire est terminée. Si $\Phi_1^+ \neq \emptyset$, on montre qu'il existe une unique racine $\alpha_1 \in \Phi_1^+$ telle que toute racine de Φ_1^+ soit la somme de α_1 et d'une combinaison linéaire d'éléments de θ_1.

Il en résulte que $\Psi_1 = \{\alpha_1\} \cup \theta_1$ est la base de $\mathcal{R}_1$ telle que les racines positives correspondantes soient les éléments de $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}^+$.

La situation $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \Psi_1, \alpha_1)$ est alors analogue à la situation $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Psi, \alpha_0)$. Avec

des notations évidentes on obtient un nouvel espace préhomogène commutatif $(\mathfrak{l}_{\theta_1}, \mathfrak{n}^+_{\theta_1})$ et on poursuit jusqu'à l'arrêt de la construction. La dernière étape sera notée $(\mathfrak{l}_{\theta_n}, \mathfrak{n}^+_{\theta_n})$ et l'entier n joue un rôle important dans cette théorie.

Posons

$$Z_0 = 0, Z_1 = X_{\alpha_0}, Z_2 = X_{\alpha_0} + X_{\alpha_1}, \ldots, Z_{n+1} = X_{\alpha_0} + X_{\alpha_1} + \ldots + X_{\alpha_n}.$$

Théorème 11.1. — ([M-R-S] Th. 2.8.)
Les éléments Z_0,Z_1,... ,Z_n constituent un système de représentants des L_θ-orbites dans $\mathfrak{n}^+_\theta$. L'élément Z_{n+1} est le représentant de l'orbite ouverte.

Pour $p = 0, \ldots, n$, introduisons les notations suivantes :

$$X^+_p = \textstyle\sum_{i=0}^p X_{\alpha_i} \qquad X^0_p = \sum_{i=0}^p H_{\alpha_i} \qquad X^-_p \sum_{i=0}^p X_{-\alpha_i}$$

$$Y^+_p = \textstyle\sum_{j=p+1}^n X_{\alpha_j} \quad Y^0_p = \sum_{j=p+1}^n H_{\alpha_j} \quad Y^-_p = \sum_{j=p+1}^n X_{-\alpha_j}$$

Le choix des éléments radiciels sont faits de sorte que $[X_{-\alpha_i}, X_{\alpha_i}] = H_{\alpha_i}$ pour $i = 0, \ldots, n$. Puisque les racines $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont fortement orthogonales les triplets (X^-_p, X^0_p, X^+_p) et (Y^-_p, Y^0_p, Y^+_p) sont des $\mathfrak{sl}_2$-triplets qui commutent. On notera que les éléments $X^+_p = Z_{p+1}$ forment un système de représentants des L_θ-orbites de $\mathfrak{n}^+_\theta$ et que les deux précédents $\mathfrak{sl}_2$-triplets apparaissent ainsi comme étant associés à l'orbite de Z_{p+1}.

Introduisons également l'élément $H_0 = X^0_n = X^0_p \oplus Y^0_p \quad (p = 0, \ldots, n-1)$. On sait qu'on a l'égalité $H_\theta = H_0$ si et seulement si l'espace préhomogène $(\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{n}^+_\theta)$ est régulier ([R-S] Prop. 2.2.).

Soit V un sous-espace $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$-stable de $\mathfrak{g}$. Nous notons V^i, l'espace propre de H_0 pour la valeur propre i. On a la décomposition suivante ([R-S] Prop. 2.2.).

$$(11-1) \qquad \mathfrak{n}^+_\theta = \mathfrak{n}^{+1}_\theta \oplus \mathfrak{n}^{+2}_\theta \quad \mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{l}^{-1}_\theta \oplus \mathfrak{l}^0_\theta \oplus \mathfrak{l}^{+1}_\theta \quad \mathfrak{n}^-_\theta = \mathfrak{n}^{-1}_\theta \oplus \mathfrak{n}^{-2}_\theta$$

(afin de ne pas alourdir les notations, nous avons posé $\mathfrak{n}^{-1}_\theta = \mathfrak{n}^{-1}_\theta$ et $\mathfrak{n}^{-2}_\theta = \mathfrak{n}^{-2}_\theta$).
On remarquera que les espaces propres impairs sont réduits à $\{0\}$ dans le cas régulier (et seulement dans ce cas).

Posons d'autre part pour $i, j \in \mathbb{Z}$:

$$K(i,j) = \{X \in \mathfrak{g},\ [X_p^0, X] = iX\,, [Y_p^0, X] = jX\}\,.$$

La même démonstration que celle de la relation (3-2) p.113 de [M-R-S] montre que nécessairement $|i| + |j| \leq 2$.

On en déduit les décompositions suivantes :

$$(11-2) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{n}_\theta^{-2} &= K(-2,0) \oplus K(-1,-1) \oplus K(0,-2) \\ \mathfrak{l}_\theta^{-1} \oplus \mathfrak{n}_\theta^{-1} &= K(-1,0) \oplus K(0,-1) \\ \mathfrak{l}_\theta^{0} &= K(1,-1) \oplus K(0,0) \oplus K(-1,1) \\ \mathfrak{l}_\theta^{+1} \oplus \mathfrak{n}_\theta^{+1} &= K(1,0) \oplus K(0,1) \\ \mathfrak{n}_\theta^{+2} &= K(2,0) \oplus K(1,1) \oplus K(0,2) \end{aligned}$$

Désignons (pour $p = 0, \ldots, n$) par $\mathfrak{g}_p^{pair}$ la sous-algèbre

$$\mathfrak{g}_p^{pair} = Z_{\mathfrak{g}}(H_\theta - H_0) = K(-2,0) \oplus K(0,-2) \oplus K(0,0) \oplus K(2,0) \oplus K(0,2)\,.$$

La sous-algèbre $\mathfrak{g}_p^{pair}$ est réductive et nous notons $\mathfrak{z}_p$ son centre. Soit $\mathfrak{a}_p$ la sous-algèbre de type A_1 engendrée par le triplet (X_p^-, X_p^0, X_p^+). Le résultat principal de ce paragraphe est alors :

Théorème 11.2 . — *L'algèbre $\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p$ est une sous-algèbre de Howe de $\mathfrak{g}$.*

Remarque 11.3 . —
Supposons que $(\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{n}_\theta^+)$ soit régulier et considérons l'orbite ouverte de cet espace préhomogène. Alors $H_0 = H_\theta = X_n^0$. Dans cette situation le Théorème 11.1. précédent se ramène exactement au Théorème 4.3.

Démonstration du Théorème 11.2. —

Puisque $X_p^0 \in \mathfrak{a}_p$ et que $H_\theta - H_0 \in \mathfrak{z}_p$, on a l'inclusion :

$$(11-3) \qquad Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p) \subset K(0,-2) \oplus K(0,0) \oplus K(0,2)$$

Soit $\mathfrak{a}^p$ la sous-algèbre de type A_1 engendrée par le triplet (Y_p^-, Y_p^0, Y_p^+).

On a aussi :

$$(11-4). \qquad \mathfrak{a}^p \oplus \mathfrak{z}_p \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p)$$

Mais les algèbres $\mathfrak{a}^p$ et $\mathfrak{a}_p$ jouant des rôles symétriques on a aussi :

$$(11-5). \qquad Z_{\mathfrak{g}}(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p)) \subset K(-2,0) \oplus K(0,0) \oplus K(2,0)$$

Posons $\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair} = K(-2,0) \oplus K(0,0) \oplus K(2,0)$. L'inclusion (11-5) donne :

$$(11-6) \qquad Z_{\mathfrak{g}}(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p)) = Z_{\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}}(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p)) \subset Z_{\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}}(Z_{\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p))$$

(la dernière inclusion étant purement ensembliste).
D'autre part la décomposition triangulaire

$$\mathfrak{g}_p^{pair} = K(0,-2) \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair} \oplus K(0,2)$$

prouve que $\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}$ est une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}_p^{pair}$ et de plus, l'action adjointe de $\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}$ sur K(0,2) (ce dernier est commutatif) est irréductible (voir la démonstration page 100 de [M-R-S]).
La sous-algèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair} \oplus K(0,2)$ est donc une sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{g}_p^{pair}$.
Le centre de $\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}$ est alors égal à $\mathfrak{z}_p \oplus \mathbb{C}Y_p^0$ (il est clair que Y_p^0 commute à $\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}$).
Donc

$$(11-7) \qquad \widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair} = \mathfrak{z}_p \oplus \mathbb{C}Y_p^0 \oplus [\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}, \widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}].$$

Posons $\widetilde{S}_p = [\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}, \widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}]$. On a alors

$$(11-8) \qquad Z_{\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}}(Z_{\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p)) = \mathfrak{z}_p \oplus \mathbb{C}Y_p^0 \oplus Z_{\widetilde{S}_p}(Z_{\widetilde{S}_p}(\mathfrak{a}_p)).$$

Soit maintenant $x \in Z_{\mathfrak{g}}(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p)) \subset Z_{\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}}(Z_{\widetilde{\mathfrak{g}}_p^{pair}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p))$ (relation (11-6)) et écrivons cet élément dans la décomposition (11-8) :

$$x = x_{\mathfrak{z}_p} + cY_p^0 + x'$$

où $x_{\mathfrak{z}_p} \in \mathfrak{z}_p$, $c \in \mathbb{C}$ et $x' \in Z_{\widetilde{S}_p}(Z_{\widetilde{S}_p}(\mathfrak{a}_p))$.

D'après le Théorème 4.3. on a

$$Z_{\widetilde{S}_p}(Z_{\widetilde{S}_p}(\mathfrak{a}_p)) = \mathfrak{a}_p\,.$$

Donc $x' \in \mathfrak{a}_p$. Puisque $Y_p^+ \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p)$, on déduit de l'égalité $[x, Y_p^+] = 0$ que $c = 0$.

Nous venons de montrer que

$$Z_{\mathfrak{g}}(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p)) = \mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p\,.$$

□

Proposition 11.4. — *On a :*

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p) = K(0,-2) \oplus Z_{K(0,0)}(\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p) \oplus K(0,2)\,.$$

Démonstration. — D'après la relation (11-3), il suffit de prouver que $K(0,-2)$ et $K(0,2)$ commutent à $\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{z}_p$. La commutation avec $\mathfrak{z}_p$ est évidente d'après la définition de $\mathfrak{z}_p$. Pour prouver que, par exemple, l'espace $K(0,2)$ commute à $\mathfrak{a}_p$, il suffit de prouver que $K(0,2)$ commute à X_p^0 ce qui relève de la définition de $K(0,2)$, et que $K(0,2)$ commute à $X_p^+ \in K(0,2)$, ce qui découle de l'égalité $[K(0,2), K(0,2)] = \{0\}$. □

Remarque 11.5. (sur la dimension de $\mathfrak{z}_p$). —

Commençons par introduire une $\mathbb{Z}$-graduation sur $\mathfrak{g}$ en posant

$$(11-9) \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

où

$$\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{n}_\theta^{-1} \oplus \mathfrak{l}_\theta^{+1} \qquad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n}_\theta^{-2} \oplus \mathfrak{l}_\theta^0 \oplus \mathfrak{n}_\theta^{+2} \qquad \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_\theta^{+1} \oplus \mathfrak{l}_\theta^{-1}\,.$$

On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une $\mathbb{Z}$-graduation, donc notamment que $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_1$ sont des algèbres commutatives.

En fait la graduation (11-9) est non triviale (i.e. $\mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$) si et seulement si $(\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{n}_\theta^+)$ est non régulier. Dans ce cas cette graduation correspond à une sous-algèbre parabolique maximale, ce qui fait que le centre $Z(\mathfrak{g}_0)$ de $\mathfrak{g}_0$ est de dimension 1. Par ailleurs, l'inclusion $Z(\mathfrak{g}_0) \subset \mathfrak{g}_p^{pair} \subset \mathfrak{g}_0$ prouve que $Z(\mathfrak{g}_0) \subset \mathfrak{z}_p$.

Ainsi $\mathfrak{z}_p$ est au moins de dimension 1 si $(\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{n}_\theta^+)$ est non régulier.

On en déduit que, quitte à se restreindre à $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ et à considérer la graduation induite par la graduation $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n}_\theta^{-2} \oplus \mathfrak{l}_\theta^0 \oplus \mathfrak{n}_\theta^{+2}$, qui correspond à une situation régulière, on peut supposer que l'espace préhomogène $(\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{n}_\theta^+)$ est régulier. Considérons dans ce cas la $\mathbb{Z}$-graduation suivante de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \tag{11 - 10}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{-2} &= K(0,-2) \\
\mathfrak{g}_{-1} &= K(1,-1) \oplus K(-1,-1) \\
\mathfrak{g}_0 &= K(-2,0) \oplus K(0,0) \oplus K(2,0) \\
\mathfrak{g}_1 &= K(-1,1) \oplus K(1,1) \\
\mathfrak{g}_2 &= K(0,2)
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une $\mathbb{Z}$-graduation à deux crans et on remarque que

$$\mathfrak{g}_p^{pair} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2 \,.$$

Si la graduation (11-10) de $\mathfrak{g}$ correspond à une sous-algèbre parabolique maximale, il est facile de voir que $\mathfrak{z}_p = \{0\}$. Si par contre la graduation (11-10) correspond à une sous-algèbre parabolique non maximale (on ôte deux racines de la base...), alors $\mathfrak{g}_0$ a un centre de dimension 2, et en écrivant qu'un élément de ce centre commute à $\mathfrak{g}_2$, il reste un centre $\mathfrak{z}_p$ de $\mathfrak{g}_p^{pair}$ de dimension 1.

Un calcul montre que (dans le cas régulier) seules les situations où $\mathfrak{g} \simeq A_n$ fournissent un centre $\mathfrak{z}_p$ non réduit à $\{0\}$.

Bibliographie

[Bo1] N. BOURBAKI. — *Groupes et algèbres de Lie ch. 1* , Hermann, Paris, 1960.

[Bo2] N. BOURBAKI. — Groupes et algèbres de Lie ch. 4, 5, 6. *Groupes et algèbres de Lie ch. 4, 5, 6* , Masson, Paris 1981.

[Bo3] N. BOURBAKI. — G *roupes et algèbres de Lie ch. 7 et 8,* , Hermann, Paris 1975.

[Dy] E.B. DYNKIN. — *Semi-simple subalgebras of semi-simple Lie algebras*, A.M.S. transl. Volume 6, 1957, p.11-244.

[H1] R. HOWE. — *θ-series and invariant theory*, Proc. Symp. Pure Math.,33, part 1, 1979, p. 275-285.

[H2] R. HOWE. — *Tanscending classical invariant theory*, J.of the Am. Math. Soc., vol 2,number 3, Juillet 1989 (preprint beaucoup plus ancien).

[H-U] R. HOWE - T. UMEDA. — *The Capelli identity, the double commutant theorem and the multilicity free action*, Math. Ann., 290, 1991, p. 565-619.

[He] S. HELGASON. — Differential Geometry and Symmetric Spaces, *Academic Press, New-York,* 1962.

[J] A. JOSEPH. — *The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. t.9, 1976, p. 1-30.

[K] B. KOSTANT. — *The principal three dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex Lie group*, Amer. J. Math., vol. 81, 1959, p. 973-1032.

[K-S] D. KAZHDAN - G. SAVIN. — *The smallest representation of simply laced groups*, Israel Mathematical Conference Proceedings, Piatetski-Shapiro Festschrift 2, 1990, p. 209-233.

[Ku] S. KUDLA. — *Seesaw dual reductive pairs*, Automorphic Forms of Several Variables, Taniguchi Symposium, Katata, Birkhauser, 1984, p. 244-268.

[M-V-W] C. MOEGLIN - M.F. VIGNERAS - J.L. WALDSPURGER. — *Correspondances de Howe sur un corps p-adique* Lect. Notes in Math., 1291, Springer-Verlag, 1987.

[M-R-S] I. MULLER - H. RUBENTHALER - G. SCHIFFMANN. — *Structure des espaces préhomogènes associés à certaines algèbres de Lie graduées*, Math. Ann. 274, 1986, p. 95-123.

[Ra-Sch] S. RALLIS - G. SCHIFFMANN . — *The orbit and θ correspondence for some dual pairs* , Article à paraître.

[Ru1] H. RUBENTHALER . — *Espaces préhomogènes de type parabolique* , Thèse, Université de Strasbourg, 1982.

[Ru2] H. RUBENTHALER. — *Espace vectoriels préhomogènes, sous-groupes paraboliques et $\mathfrak{sl}_2$-triplets* , C. R. Acad. Sci. Paris, 290, 1980, p. 127-129.

[Ru3] H. RUBENTHALER. — *Espaces préhomogènes de type parabolique*, Lect. Math. Kyoto Univ. 14, 1982, p. 189-221.

[Ru4] H. RUBENTHALER. — *Construction de certaines sous-algèbres remarquables dans les algèbres de Lie semi-simples*, J. Alg., 81, 1983, p. 268-278.

[Ru5] H. RUBENTHALER. — *Analyse harmonique sur les groupes de Lie et les espaces symétriques*, Mémoire Soc. Math. de France, Nouvelle Série, 15, 1984, p. 255-275.

[Ru6] H. RUBENTHALER. — *Une classification des paires duales dans les algèbres de Lie réductives*, C. R. Acad. Sc. Paris t. 315, Série I p. 645-648, 1992.

[R-S] H. RUBENTHALER - G. SCHIFFMANN. — *Opérateurs différentiels de Shimura et espaces préhomogènes*, Inv. Math. 90, 1987, p. 409-442.

[S] G. SAVIN. — *An analogue of the Weil representation for G_2*, J. reine angew. Math. 434 (1993), 115-126

[Sc] W. SCHARLAU. — *Quadratic and Hermitian Forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaft 270, Springer Verlag, 1985.

[S-K] M. SATO - T. KIMURA. — *A classification of irreductible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J., 65, 1977, p. 1-155.

[T] J. TITS. — *Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples* in Séminaire Bourbaki, exposé 119, 1955.

[Vi] E.B. VINBERG. — *On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras*, Soviet Math. Dokl. 16, 1975, p. 1517-1520.

[Wa] J-L. WALDSPURGER. — *Représentation métaplectique et conjecture de Howe,* Séminaire Bourbaki, exposé 674, novembre 1985, (Asterisque 152/153, p 85-99)

[W] N. WALLACH. — *Polynomial differential operators associated with hermitian symmetric spaces*, in Representation Theory of Lie groups and Lie Algebras, 76-94, World Sci. Publishing, River Edge NJ, 1992.

Hubert Rubenthaler
Institut de Recherche Matématique Avancée
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex, France
E-mail : rubenth@math.u-strasbg.fr
Fax :[33]88 61 90 69