

Astérisque

J. ILIOPOULOS

R. STORA

ADRIEN DOUADY

HUBERT AUPETIT

J.-L. VERDIER

J.-P. BOURGUIGNON

DANIEL FERRAND

HUBERT AUPETIT

GEOFFREY HORROCKS

WOLF BARTH

L. GRUSON

C. PESKINE

ADRIEN DOUADY (réd.)

**Les équations de Yang-Mills. A. Douady - J.-L.
Verdier - séminaire E.N.S. 1977-1978**

Astérisque, tome 71-72 (1980)

http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__71-72__1_0

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

astérisque
71-72

1980

les équations de Yang-Mills

A. DOUADY - J.-L. VERDIER

séminaire E.N.S 1977 - 1978

société mathématique de france

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	.-.....	
Exposé 1	.- Les équations de Yang-Mills dans la physique des particules élémentaires (J. Iliopoulos).	5
Appendice	.- Quelques remarques sur l'approximation semi- classique de la théorie de Yang-Mills quan- tique (R. Stora).....	13
Exposé 2	.- La transformation de Penrose (A. Douady)....	17
Exposé 3	.- La transformation de Penrose inverse (A. Douady).....	27
Exposé 4	.- Principaux résultats sur les fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ (H. Aupetit).....	35
Exposé 5	.- Construction de Horrocks et critère de Barth (A. Douady).....	77
Exposé 6	.- Théorème d'annulation (A. Douady).....	85
Exposé 7	.- Instantons (J.-L. Verdier).....	105
Exposé 8	.- Opérateurs différentiels et théorèmes d'annulation (J.-P. Bourguignon).....	135
Exposé 9	.- Constructions de fibrés de rang deux (D. Ferrand).....	149
Exposé 10	.- Fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_3^{\mathbb{C}}$ avec $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ (H. Aupetit et A. Douady).....	171
Exposé 11	.- Construction of bundles on \mathbb{P}^n (G. Horrocks).	197
Exposé 12	.- Stable vector bundles on \mathbb{P}_3 , some experimen- tal data (W. Barth).....	205
Exposé 13	.- Théorème de spécialité (L. Gruson et C. Peskine).....	219
Bibliographie	.-.....	231
Summary	.-.....	236

INTRODUCTION

Le but de ce séminaire est de faire le point sur la théorie des instantons. Soient M une variété riemannienne de dimension 4 et F un fibré vectoriel complexe sur M , à groupe structural SU_n . A une connexion \mathcal{A} sur F , on associe l'action $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \int_M |\mathcal{R}|^2$, où \mathcal{R} est la courbure de \mathcal{A} . Si M est compacte (ou si \mathcal{A} est soumise à des conditions au bord), les connexions pour lesquelles l'action est stationnaire sont celles qui vérifient l'équation de Yang-Mills

$$\nabla \star \mathcal{R} = 0.$$

Cette condition est en particulier satisfaite si

$$\mathcal{R} = \pm \star \mathcal{R}$$

(condition de Yang-Mills self-duale ou antiself-duale) ; les connexions correspondantes donnent un minimum absolu de l'action. Lorsque $M = S^4$, les solutions de l'équation de Yang-Mills self-duale sont également appelés instantons. On ignore encore s'il existe des solutions de l'équation de Yang-Mills non self-duales ni antiself-duales.

L'intention de l'exposé I est d'indiquer des motivations d'origine Physique pour la théorie. Sa compréhension n'est pas nécessaire pour le déroulement mathématique du séminaire.

Les exposés II à VII contiennent un développement de la théorie d'Atiyah-Penrose, qui ramène la classification des instantons à celle de certains fibrés algébriques sur $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. On donne ensuite des propriétés de ces fibrés : en particulier le théorème d'annulation de Manin-Drinfeld est complètement démontré. Il s'agit d'une exposition de résultats qui figurent dans la littérature (cf. bibliographie générale du séminaire).

Les autres exposés donnent des compléments indépendants les uns des autres :

INTRODUCTION

L'exposé VIII donne une autre démonstration du théorème d'annulation, utilisant plus de géométrie différentielle et moins de géométrie algébrique.

L'exposé IX étudie la construction de Serre pour les fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^n . Cette construction est utilisée dans l'exposé X pour donner, en suivant Hartshorne, une description d'un certain espace de modules. Il se trouve que, pour cette description, la construction de Serre est mieux adaptée que celle de Horrocks.

L'exposé XI étend la construction de Horrocks à des fibrés plus généraux que ceux considérés dans l'exposé V.

L'exposé XII contient des tables de résultats de Barth.

L'exposé XIII donne une démonstration, inspirée d'une ancienne démonstration de Halpern, du théorème 4 de l'exposé IV.

A. Douady.

J.-L. VERDIER.

LES ÉQUATIONS DE YANG-MILLS

DANS LA PHYSIQUE DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

par J. ILIOPOULOS

Le but de ce séminaire est d'exposer quelques problèmes de la physique des particules élémentaires qui pourraient intéresser les mathématiciens. Mon impression étant que la barrière la plus difficile est, probablement, celle du langage, j'ai essayé d'établir une correspondance entre les terminologies en usage chez les physiciens et les mathématiciens. Ces notes sont donc, en grande partie, un dictionnaire. J'ai dû introduire plusieurs notions de la théorie quantique des champs mais aucune démonstration n'est donnée et les arguments sont simplifiés au maximum.

1. Le cadre.

Les phénomènes physiques se passent dans l'espace-temps de Minkowski qui est décrit par \mathbb{R}^4 muni d'un pseudo-métrique $g_{\mu\nu}$ ($g_{00} = 1$; $g_{ii} = -1$ $i = 1, 2, 3$; $g_{\mu\nu} = 0$ $\mu \neq \nu$). Ce sera notre espace de base que nous désignerons par M . Pour des raisons techniques nous sommes amenés à remplacer l'espace \mathbb{R}^4 de Minkowski par un espace euclidien E^4 . Le passage de l'un à l'autre se fait par prolongement analytique, comme nous mentionnerons brièvement plus loin.

Les variables dynamiques de notre problème sont des champs classiques $\varphi(x)$. $x \in M$; $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ (I). On sera aussi amené à introduire un groupe G et \mathbb{R}^N sera un espace vectoriel associé à une représentation de dimension N de G . Ce langage, selon lequel les champs sont des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^N , est le plus souvent utilisé en physique. Cependant, pour l'étude des théories de jauge, le langage le plus approprié est celui des fibrés. $\begin{smallmatrix} F \\ | \\ M \end{smallmatrix}$ est un fibré vectoriel de fibre \mathbb{R}^N et de groupe G et le champ φ est une section.

Tout comme en Mécanique Classique, la dynamique est déterminée par un Lagrangien \mathcal{L} qui est une fonction à valeurs réelles des champs et de leurs dérivées premières (et, dans certains cas, du point x de l'espace-temps) :

$\mathcal{L}(x; \varphi; \partial_\mu \varphi)$ où $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Les équations du mouvement sont obtenues

à partir de \mathcal{L} par principe variationnel. Dans le langage des fibrés \mathcal{L} est défini comme $\mathcal{L} : J^1 F \longrightarrow R$ (II).

On dira que G est un groupe de symétrie s'il laisse l'action $S = \int \mathcal{L} d^4x$ invariante. Des exemples bien connus sont le groupe des translations $x \longrightarrow x + a$, ou le groupe de Lorentz $SO(3,1)$. Dans cet exposé on sera tout particulièrement intéressé aux groupes qui agissent uniquement le long de la fibre et n'affectent pas le point de l'espace de base. Nous appellerons ces symétries internes (ex. la symétrie dite "du spin isotopique", basée sur le groupe $SU(2)$, qui laisse invariantes les forces nucléaires).

2. Symétries locales ou symétries de jauge - Le Lagrangien de Yang-Mills.

Jusqu'à maintenant nous n'avons pas encore introduit de géométrie sur le fibré et nous n'avons aucun moyen de comparer des quantités qui se trouvent sur des fibres différentes. En physique, on dit dans ce cas que G est un groupe de symétrie globale. L'étude de l'action du groupe est réduite à celle d'une seule fibre. Il est beaucoup plus intéressant d'un point de vue esthétique d'enrichir cette structure et d'introduire une connection A sur le fibré principal. En physique, nous considérons A comme une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe G . Si $\{\varepsilon_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, k$ est une base orthonormée dans \mathfrak{g} on écrit

$$A = A_\mu^\alpha(x) \varepsilon_\alpha dx^\mu \quad (1)$$

où μ est un indice de vecteur dans \mathbb{R}^4 . On appelle les champs $A_\mu^\alpha(x)$ champs de jauge ou potentiels de jauge et le groupe G groupe de symétrie locale ou groupe de jauge.

Introduisons aussi la courbure W . C'est une 2-forme qu'on écrit comme :

$$W = \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^\alpha(x) \varepsilon_\alpha dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2)$$

Soit maintenant un Lagrangien $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ qui est supposé invariant sous l'action de G considéré comme un groupe de symétrie globale. Il est facile de vérifier que l'action S_{YM} donnée par

$$S_{YM} = \int \mathcal{L}(\varphi, D_\mu \varphi) d^4x - \frac{1}{4} \|W\|^2 \quad (3)$$

où D_μ est la dérivée covariante construite à l'aide de la connection A , est

invariante sous le groupe G considéré comme un groupe de jauge. L'expression (3) est l'action de Yang-Mills. Même en l'absence des champs φ , on peut écrire le Lagrangien de Yang-Mills pur comme

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a(x) W_a^{\mu\nu}(x) \quad (4)$$

En termes de $A_\mu^a(x)$ de l'équation (1), $W_{\mu\nu}^a(x)$ est donné par

$$W_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g f_{bc}^a A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (5)$$

où f_{bc}^a sont les constantes de structure du groupe G et nous avons introduit une constante arbitraire réelle g , appelée "constante de couplage". Les équations de mouvement qu'on obtient à partir de (4) par variation sont :

$$\partial^\mu W_{\mu\nu}^a - g f_{bc}^a A^{\mu b}(x) W_{\mu\nu}^c(x) = 0 \quad (6)$$

Exemple.— Considérons le cas où $G = U(1)$. Alors $f_{bc}^a = 0$ et (6) donne les équations de Maxwell en l'absence de sources ; $A_\mu(x)$ est le potentiel-vecteur, et $W_{0i} = E_i$ est le champ électrique et $W_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$ est le champ magnétique.

Avant de terminer ce paragraphe, je voudrais insister sur le fait que l'introduction des symétries de jauge n'est pas du tout un ornement ou une décoration inessentielle pour une théorie physique. Nous voyons déjà sur l'équation (3) que la théorie contient maintenant une nouvelle variable dynamique qui est le champ associé à la connection. Savoir donc si les symétries de jauge sont, ou ne sont pas, intéressantes pour la physique des particules élémentaires, est une question que seuls les résultats expérimentaux peuvent trancher. Nous savons depuis longtemps que l'électrodynamique était décrite par une théorie de jauge basée sur le groupe abélien $U(1)$. On croyait en revanche que les groupes de jauge non abéliens n'avaient pas d'application physique. Tous les progrès spectaculaires dans notre compréhension de la structure de la matière accomplis pendant les dix dernières années sont dûs au fait que nous avons enfin réalisé, à partir des arguments théoriques, que toutes les interactions entre particules élémentaires et non seulement les interactions électromagnétiques, sont décrites par une théorie de jauge. Cette réalisation a conduit à des prédictions qui ont été brillamment vérifiées par l'expérience, telles que la découverte des courants faibles neutres et des particules charmées.

3. Quantification.

Jusqu'à maintenant, nous considérons une théorie des champs classique. Nous allons

procéder à la quantification à l'aide d'une généralisation de l'intégrale des chemins de Feynman. Nous commençons par l'introduction d'une source J comme application $J : M \longrightarrow {}^*F$ où *F est le dual de F et nous considérons le Lagrangien $\mathcal{L}_J = \mathcal{L} + J\varphi$. Maintenant nous définissons $Z[J]$, fonctionnelle de J à valeurs dans \mathbb{C} , par

$$Z[J] = \frac{\int_e \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}_{J d^4x} \mathcal{D}[\varphi]}{\int_e \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L} d^4x \mathcal{D}[\varphi]} \quad (7)$$

où $\mathcal{D}[\varphi]$ est une mesure appropriée. Le postulat est que $Z[J]$ est la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green de la théorie quantique. En développant $Z[J]$ en puissances de J on obtient les fonctions de Green $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$:

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=0}^n [d^4x_i J(x_i)] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (8)$$

En écrivant les formules (7) et (8) j'ai utilisé le langage des physiciens où je considère les champs φ et les sources J comme des fonctions à valeurs sur \mathbb{R}^N se transformant selon des représentations conjuguées du groupe G . On démontre que, sous certaines conditions, nous avons suffisamment d'analyticité pour obtenir les fonctions de Green dans l'espace de Minkowski par prolongement analytique. Il s'agit en fait d'une rotation des composantes du temps de tous les x_i par $\pi/2$.

La définition des intégrales de l'équation (7) se heurte à deux sortes de difficultés, les "divergences ultraviolettes" et les "divergences infrarouges". Les secondes sont dues au volume infini de E^4 et peuvent avoir une signification physique. Par contre, les premières sont d'origine purement technique, et sont le résultat de notre formalisme trop simpliste. Elles sont dues au fait que nous avons introduit un degré de liberté (un champ φ) à chaque point de E^4 , donc même dans un volume fini, nous avons une infinité de degrés de liberté.

Afin de mettre en évidence ces difficultés, et comme un exemple de calcul de (7), considérons le cas où φ est un seul champ scalaire, le groupe G se réduit à l'identité et \mathcal{L} est une fonction quadratique de φ de la forme

$$-\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \text{ Nous trouvons, formellement}$$

$$\int_e \int_{\mathbb{R}^4} [\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - J\varphi] d^4x \mathcal{D}[\varphi] = (\det K)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(J, K^{-1}J)} \quad (9)$$

où K est l'opérateur $-\partial^2 + m^2$, et nous avons utilisé la mesure Gaussienne. Le problème est que $\det K$ est divergent. Il y a plusieurs façons de maîtriser ces difficultés. On maîtrise d'habitude les divergences infrarouges en restreignant E^4 à une région bornée Ω , de volume $|\Omega|$ avec des conditions appropriées au bord et en étudiant la limite $|\Omega| \nearrow E^4$. Pour les divergences ultraviolettes, le plus simple est de discrétiser E^4 en un réseau de maille a et d'étudier la limite $a \rightarrow 0$. Pour a fini, les intégrales fonctionnelles deviennent des intégrales ordinaires. Dans le cas de l'équation (9), on voit que $\det K$, qui est maintenant bien défini, est indépendant de J et s'en va avec le dénominateur de l'équation (7). Le rapport a une limite pour $a \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow E^4$.

4. La série des perturbations et l'algorithme de la renormalisation.

Lorsque \mathcal{L} contient des termes de degré plus grand que 2, on ne connaît pas d'évaluation exacte de l'intégrale fonctionnelle (III). On écrit alors

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (10)$$

où \mathcal{L}_0 est la partie quadratique et \mathcal{L}_I le reste, qu'on appelle "Lagrangien d'interaction". $Z[J]$ peut être développé en série

$$Z[J] \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int [\mathcal{L}_I]^{d^4x} e^{\int (\mathcal{L}_0 + J\varphi) d^4x} \mathcal{D}[\varphi] \quad (11)$$

et on est de nouveau amené à évaluer les intégrales Gaussiennes. La série (11) s'appelle "série des perturbations". Elle est bien définie, terme par terme, au sens des séries formelles, lorsque $a \neq 0$ et $|\Omega|$ est fini. La limite du volume infini peut être obtenue mais celle de $a \rightarrow 0$, en général, n'existe pas. La théorie de la renormalisation est un algorithme qui permet d'absorber toutes ces divergences ultraviolettes à des quantités non physiques, telles que la différence entre la masse d'un électron et celle qu'il aurait s'il n'y avait d'interaction électromagnétique. Toute grandeur physiquement mesurable admet un développement en perturbation dont chaque terme est bien défini.

L'algorithme de la renormalisation ne s'applique qu'à une petite classe des théories qui s'appellent "renormalisables". La première qui fut étudiée par ce processus est l'électrodynamique quantique. Son accord avec l'expérience est spectaculaire. Par exemple, la valeur expérimentale du moment magnétique de l'électron est $(1\ 159\ 652\ 410 \pm 200)10^{-12}$ fois sa valeur donnée par l'équation de Dirac tandis que l'électrodynamique quantique, si on retient les trois premiers

termes de (11), prédit $(1\ 159\ 652\ 359 \pm 282)10^{-12}$. La grande découverte des dernières années consiste à avoir démontré que les théories de Yang-Mills sont aussi renormalisables et peuvent décrire les interactions faibles et fortes dans un cadre unifié avec les interactions électromagnétiques.

5. Comportement de la série des perturbations.

Dans des modèles très simplifiés, on peut démontrer que la série (11) est sommable au sens de Borel. Pour les cas réalistes, ce résultat est peu probable. Le problème de savoir si la série des perturbations détermine une fonction de façon unique reste ouvert.

6. Effets non perturbatifs.

Revenons à la théorie de Yang-Mills. Supposons que, à volume Ω fini, nous avons imposé des conditions au bord du type Dirichlet. Normalement, on écrirait

$\varphi = 0$, mais ici il suffit d'imposer que la connection A s'annule à une transformation du groupe de jauge près, c'est-à-dire

$$A = g^{-1} dg \quad g \in G \quad (12)$$

en dehors de Ω . Ceci équivaut à compactifier l'espace de base M et de E^4 de passer à S^4 . Remarquez qu'une compactification analogue résulte même si on impose des conditions au bord différentes. Par exemple, à des conditions périodiques (à des transformations de jauge près) correspond une compactification de E^4 à T^4 . Les fibrés principaux sur S^4 sont classifiés par le nombre topologique entier

$$n = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^{\alpha}(x) * F_{\alpha}^{\mu\nu}(x) d^4x \quad (13)$$

Dans ce cas l'intégrale fonctionnelle (7) doit être modifiée et comporter une sommation sur les différents secteurs :

$$\sum_n \int_{[n]} e^{\dots} \mathcal{D}[A] \quad (14)$$

où $\int_{[n]} \mathcal{D}[A]$ est l'intégration sur les champs de jauge associés aux connections sur le fibré caractérisé par $n \in \mathbb{Z}$. Il est facile de voir que seul le secteur $n = 0$ contribue à l'évaluation de l'intégrale par la méthode des perturbations. En effet, essayons d'être plus général, par exemple en utilisant la méthode du col. Pour cela, il nous faut connaître tous les minima de l'action, c'est-à-dire

toutes les solutions des équations du mouvement qui donnent une action finie. Celles-ci étant homogènes, elles admettent toujours la solution zéro. La série des perturbations est équivalente au développement autour de cette solution qui appartient à $n = 0$. C'est seulement pendant ces dernières années que nous avons fait l'effort de ne pas ignorer toutes les autres solutions. Dans le cas de Yang-Mills, on peut regarder le problème simplifié

$$W_{\mu\nu}^a(x) = {}^*W_{\mu\nu}^a(x) \equiv \xi_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\rho\sigma a}(x) \quad (15)$$

Toute solution de (15) est aussi une solution de (6) mais il n'y a pas de preuve au sens inverse. De l'autre côté, personne n'a jamais fourni un contre-exemple. Toutes les solutions de (15) ont été trouvées et un algorithme pour leur construction explicite a été donné par Atiyah et collaborateurs. Il est vraisemblable que ces solutions, et les effets non-perturbatifs qu'elles engendrent, jouent un rôle très important dans la dynamique des systèmes physiques mais, d'un autre côté, il n'est pas du tout évident qu'elles dominent complètement l'intégrale fonctionnelle. D'autres points critiques, peut-être complexes, peuvent être importants, ou alternativement, des configurations des champs qui ne sont pas des solutions doivent être incluses. Ces observations sont basées sur l'étude des systèmes simples, par exemple des théories des champs à deux dimensions d'espace-temps, qui offrent des analogies avec Yang-Mills, mais tous ces mécanismes sont loin d'être compris dans les cas réalistes. Les problèmes que nous devons résoudre semblent très difficiles et une collaboration étroite entre mathématiciens et physiciens est, plus que jamais, indispensable.

Je remercie A. Douady, H. Epstein et R. Stora pour leurs conseils au cours de la préparation de ces notes.

NOTES :

(I) Je n'essaierai pas, dans cet exposé, d'établir le lien entre champs et particules. Je mentionne seulement que les champs introduits ici sont appropriés pour décrire les particules de spin entier (mésons, photons, etc.). Pour les particules de spin demi-entier (électrons, protons, etc.), on doit définir les champs sur une variété Grassmannienne.

(II) $J^1 F$ est l'espace des jets à l'ordre 1 de sections de F .

(III) Ceci est vrai pour les théories, physiquement intéressantes, définies sur E^4 . Il y a cependant des modèles simplifiés, définis sur E^2 , où on arrive à définir l'intégrale des chemins du type (7) exactement, sans faire appel à la théorie des perturbations.

QUELQUES REMARQUES SUR L'APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE DE LA THÉORIE
DE YANG-MILLS QUANTIQUE

par R. STORA

S'il est communément admis que la construction d'une théorie quantique de Yang et Mills passera vraisemblablement par la construction d'une théorie "sur réseau" à la Wilson [1], par un passage à la limite où la maille du réseau tend vers zéro, la construction d'une théorie perturbative, analogue à celle de l'électrodynamique quantique - série formelle dans la variable \hbar - fait apparaître des phénomènes nouveaux dus à la géométrie du problème.

Il s'agit d'abord de définir une intégrale fonctionnelle

$$Z = \int e^{-\frac{1}{4g^2\hbar} \|F\|^2} \mathcal{D}a \quad (1)$$

où $a = \sum a_\mu^\alpha(x) dx^\mu e_\alpha$

$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_4$ l'espace euclidien à quatre dimensions, $\{e_\alpha\}$ est une base de l'algèbre de Lie \mathcal{G} d'un groupe de Lie compact simplement connexe G (par exemple le groupe de couleur SU_3)

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu a_\nu^\alpha - \partial_\nu a_\mu^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha a_\mu^\beta a_\nu^\gamma$$

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$\|F\|^2 = \int d^4x \times \sum_\alpha F_{\mu\nu}^\alpha(x) F_{\mu\nu}^\alpha(x)$$

g : la constante de couplage

\hbar : la constante de Planck.

La définition d'une telle intégrale se heurte à deux sortes de difficultés :

- les difficultés ultraviolettes, qu'on doit maîtriser par une régularisation ultraviolette - par exemple, la discrétisation de E_4 en un réseau de maille a [1], puis la renormalisation $g \longrightarrow g(a)$ de sorte que la limite $a \longrightarrow 0$ existe ;
- les difficultés infrarouges qu'on maîtrise usuellement en restreignant E_4 à une région bornée Ω , de volume $|\Omega|$ et en étudiant la limite $\Omega \nearrow E_4$.

La définition de l'intégrale régularisée restreinte à Ω nécessite alors d'imposer des conditions au bord.

Par exemple, des conditions de type Dirichlet, dans le cas présent

$$a = g^{-1} dg$$

en dehors de Ω ou des conditions de type "périodique" aux bords d'un hypercube Ω de côté L [3] :

$$\begin{aligned} a(0, x_1 x_2 x_3) &= g_4^{-1}(x_1 x_2 x_3) a(L, x_1 x_2 x_3) \\ g_4(x_1 x_2 x_3) &+ g_4^{-1}(x_1 x_2 x_3) \\ dg_4(x_1 x_2 x_3) \end{aligned}$$

et des formules analogues pour relier $a(x_1, 0, x_2 x_3)$, $a(x_1, L, x_2 x_3)$ etc..., avec les conditions de compatibilité nécessaires sur $g_1 \dots g_4$.

Dans ces deux cas, populaires en mécanique statistique, modulo l'adaptation faite ici aux champs de jauge, on voit que la variable a définit une connexion sur un fibré principal de base $S^4 \simeq E_4 \cup \{\infty\}$ dans le cas Dirichlet*, T^4 dans le cas périodique, l'un et l'autre classifiés par le nombre topologique entier [3]

$$k = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^{\alpha}(x) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^{\alpha}(x) d^4x$$

L'"intégrale" (1) doit alors être modifiée et comporter une sommation :

$$Z_{\Omega} = \sum_k \int_{(k)}^{\text{reg}} e^{-\frac{1}{4g^2\hbar} \|F\|^2} \mathcal{D}a$$

où $\int_{(k)} \dots \mathcal{D}a$ dénote l'intégration sur les champs de Yang-Mills associés aux

connections sur le fibré caractérisé par $k \in \mathbb{Z}$.

La valeur moyenne d'une observable invariante de jauge $\mathcal{O}(a)$ est définie par

$$\langle \mathcal{O} \rangle \stackrel{?}{=} \lim_{\Omega \nearrow \infty} \lim_{\text{reg} \nearrow \infty} \frac{\sum_k \int_{(k)}^{\text{reg, ren.}} \mathcal{O}(a) e^{-\frac{1}{4g^2\hbar} \|F\|^2} \mathcal{D}a}{Z_{\Omega}}$$

si cette limite existe et est indépendante de la procédure $|\Omega| \nearrow \infty$, et des

* ou, d'ailleurs, en choisissant de compléter différemment en dehors de , n'importe quelle V_4 riemannienne de volume $O(|\Omega|)$.

conditions aux limites choisies.

Parmi les renormalisations nécessaires figurent la factorisation du volume du groupe de jauge [groupe des automorphismes du fibré de classe k]

La construction d'une série perturbative pour les fonctions de corrélation $\langle \theta(x_1) \dots \theta(x_4) \rangle$ passe par l'application formelle de la méthode du col, d'où l'intérêt de rechercher les points critiques de l'action $\|F\|^2$, pour lesquels l'action est finie. La construction des connections qui saturent le minimum de $\|F\|^2$ pour k donné est un pas important dans cette direction. Il est néanmoins vraisemblable que d'autres points critiques, peut-être complexes, doivent être inclus - ou, alternativement [2], des familles de configurations simulant un gaz où instantons ($k > 0$) et antiinstantons ($k < 0$) coexistent.

Ces observations sont basées sur l'étude de modèles bidimensionnels qui offrent des analogies avec le système de Yang et Mills, à savoir des modèles pour lesquels l'action est l'intégrale d'"énergie" pour les applications de $E_2(S^2)$ dans les plans projectifs complexes ou les grassmanniennes complexes [4] .

RÉFÉRENCES.

- [1] K. WILSON, P.R. D10 (1974), 2445 .
- [2] M.F. ATIYAH, Cours à Cargèse, août 1979 .
- [3] G. 't HOOFT, Nuclear Physics, à paraître, où la classification des fibrés sur T_4 est étendue au cas où le centre de G n'est pas réduit à l'identité.
- [4] B. BERG, M. LUSCHER, DESY 79/17, à paraître dans Com. Math. Phys.
- [5] V.A. FAHEEV, I.V. PROLOV, A.S. SCHWARZ, DESY 79/40, à paraître.

LA TRANSFORMATION DE PENROSE

par A. DOUADY

1. Les conditions de Yang-Mills.

Soit M une variété de dimension 4 sur \mathbb{R} , orientée et munie soit d'une métrique riemannienne, soit d'une pseudo-métrique de signature $+++ -$. Soient F un fibré vectoriel complexe de rang r sur M (on s'intéressera surtout au cas $r = 2$), et \mathcal{A} une connexion linéaire sur F , le tout de classe \mathcal{C}^∞ . Pour toute section s de F , on note ∇s la différentielle de s relativement à \mathcal{A} , et plus généralement pour toute forme différentielle ω sur M à valeurs dans F ou dans un fibré vectoriel associé à F , on note $\nabla \omega$ la différentielle extérieure de ω relativement à \mathcal{A} .

La forme de courbure $R \in \Omega^2(M; \mathcal{L}(F, F))$ est caractérisée par $\nabla \cdot \nabla s = R \cdot s$ pour toute section s de F . On a $\nabla R = 0$ (identité de Bianchi).

Pour toute forme différentielle $\alpha \in \Omega^2(M)$, on définit la forme $*\alpha \in \Omega^2(M; \mathbb{R})$ par la formule $(\forall \beta \in \Omega^2(M; \mathbb{R})) \beta \wedge *\alpha = (\beta \cdot \alpha) \sigma$, où $\sigma \in \Omega^4(M; \mathbb{R})$ est la "forme volume" (définie par l'orientation et la pseudo-métrique) et le produit scalaire $(\beta \cdot \alpha) \in \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ étant défini à partir du produit scalaire sur les espaces tangents. On a $**\alpha = \alpha$ dans le cas riemannien, et $**\alpha = -\alpha$ dans le cas minkowskien (signature $+++ -$) (cela provient du fait que l'expression qui donne σ dans le cas riemannien donnerait $\pm \sigma$ dans le cas minkowskien).

Cette opération $*$ peut s'étendre de deux façons aux formes à valeurs dans $\mathcal{L}(F, F)$. Pour $\omega \in \Omega^2(M; \mathcal{L}(F, F))$, on définit $*\omega$ par $*(\alpha \otimes u) = *\alpha \otimes u$ pour $\alpha \in \Omega^2(M; \mathbb{R})$ et u section du fibré $\mathcal{L}(F, F)$. Si F est muni d'une

métrique hermitienne sur les fibres, on définit $\ast \omega$ par $\ast(\alpha \otimes u) = \alpha \otimes u^\ast$, où $u^\ast(x)$ est l'adjointe de $u(x)$ pour $x \in M$.

On dit que la connexion \mathcal{A} satisfait à la condition de Yang-Mills si l'on a

$$(1) \quad \nabla(\ast R) = 0.$$

Plaçons-nous dans le cas riemannien. En vertu de l'identité de Bianchi, la condition (1) est satisfaite si l'on a

$$(2) \quad \ast R = R \quad (\text{condition de Yang-Mills auto-duale})$$

ou

$$(2') \quad \ast R = -R \quad (\text{condition de Yang-Mills anti-auto-duale}).$$

En changeant l'orientation de M , ce qui change l'opération \ast , les connexions qui vérifiaient 2 se mettent à vérifier 2' et réciproquement.

D'autre part, si F est muni d'une forme hermitienne μ sur les fibres et si la connexion \mathcal{A} est compatible avec cette forme (i.e. $\nabla \mu = 0$), la forme de courbure R est à valeurs dans le fibré $\mathcal{U}(F)$ des matrices antihermitiennes, de sorte que $\ast R = -\ast R$. Dans ce cas, en remplaçant l'opération \ast par \ast , on ne fait donc qu'intervertir les conditions (2) et (2').

Dans le cas minkowskien, on ne peut pas avoir 2 ou 2' sauf si $R = 0$, puisque $\ast \ast R = -R$. Mais on peut avoir

$$(3) \quad \ast R = iR \quad \text{ou} \quad (3') \quad \ast R = -iR.$$

On passe de (3) à (3') en changeant l'orientation de M , ou en remplaçant la structure complexe de F par la structure conjuguée (i.e. en posant $\lambda \cdot t = \bar{\lambda} \cdot t$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in F_x$). Il est impossible d'avoir (3) ou (3') pour une connexion compatible avec une structure hermitienne sur les fibres de F , puisque $\mathcal{U}(F)$ est une forme réelle de $\mathfrak{L}(F; F)$ (i.e. $\mathfrak{L}(F; F) = \mathcal{U}(F) \oplus i\mathcal{U}(F)$).

En physique, on s'intéresse au cas où $M = \mathbb{R}^4$ muni, soit de la métrique euclidienne, soit de la métrique minkowskienne à coefficients constants. Le

fibré F est celui où certaines "fonctions d'ondes" prendront leurs valeurs. On s'intéresse dans le cas euclidien aux connexions \mathcal{A} intégrables au voisinage de l'infini i.e. avec R à support compact, ou plutôt aux connexions avec R à décroissance "assez rapide". Dans le cas minkowskien, il serait peut-être raisonnable d'exiger que R décroisse dans les directions spatiales. Pour des raisons que je ne comprends pas bien, c'est surtout le cas euclidien qui intéresse les physiciens.

2. Compactification conforme de M .

Nous dirons que deux pseudométries γ et γ' sur M définissent la même structure conforme si $\gamma' = h\gamma$, où h est une fonction \mathcal{C}^∞ sur M à valeurs réelles strictement positives. L'opération $*$ ne dépend que de la structure conforme (et de l'orientation) de M .

Dans le cas euclidien, on plonge \mathbb{R}^4 dans S^4 en utilisant la projection stéréographique, qui est conforme. On obtient une condition de décroissance sur R en exigeant que le fibré F avec sa connexion se prolonge en un fibré vectoriel sur S^4 muni d'une connexion de classe \mathcal{C}^∞ . Cette condition de décroissance est assez faible. Répond-elle vraiment aux exigences des physiciens ?

Pour le cas minkowskien, nous prendrons $M = U_2$, muni de la pseudo-métrie invariante par translation et qui, sur l'algèbre de Lie est donnée par

$\begin{pmatrix} ia & b \\ -b & id \end{pmatrix} \mapsto -ad + b\bar{b}$, car il se trouve que ce cas se traite par des méthodes analogues à celles de S^4 .

L'espace \mathbb{R}^4 avec sa métrique minkowskienne à coefficients constants peut se plonger conformément dans U_2 , mais je ne sais pas bien décrire le comportement à l'infini d'un tel plongement.

Nous nous proposons d'indiquer une méthode qui permet de construire des fibrés vectoriels complexes sur S^4 ou sur U_2 , munis de connexions satisfaisant aux conditions (2) ou (3), à partir de fibrés vectoriels \mathbb{C} -analytiques

(ou ce qui revient au même d'après le théorème GAGA de J.-P. Serre, algébriques) sur $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$. Nous montrerons à l'exposé sur la transformation de Penrose inverse que l'on obtient par ce procédé toutes les solutions au problème dans le cas de S^4 . Au cours du séminaire, nous nous efforcerons de rassembler des résultats sur la classification des fibrés vectoriels algébriques (essentiellement de rang 2) sur $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ et d'examiner leurs conséquences en termes de solutions des équations de Yang-Mills.

3. Complexification de M .

Considérons la grassmannienne $Y = G_2\mathbb{C}^n$, ensemble de sous-espaces vectoriels de dimension 2 de \mathbb{C}^4 . Pour chaque point $y \in Y$, notons F_y le sous-espace de \mathbb{C}^4 correspondant (formellement $F_y = y$, mais je préfère avoir une notation différente). L'espace tangent $T_y Y$ s'identifie à $\mathcal{L}(F_y; \mathbb{C}^4/F_y)$. Si on choisit des bases dans F_y et \mathbb{C}^4/F_y , cela définit une forme quadratique $q_y : f \mapsto \det f$ non dégénérée sur $T_y Y = \mathcal{L}(F_y; \mathbb{C}^4/F_y)$. Si on change de bases, cela multiplie q_y par une constante ; ceci permet de définir sur Y une structure conforme algébrique (donnée par une forme quadratique non dégénérée sur le fibré tangent, à valeurs dans un fibré vectoriel algébrique de rang 1). Pour chaque $y \in Y$, $q_y^{-1}(0)$ (qui est bien défini) est un cône quadratique dans $T_y Y$, appelé cône isotrope de y . Comme Y est de dimension 4, il contient deux familles de plans.

On peut définir à partir de la structure conforme une opération $*$: $\Omega^2(U) \rightarrow \Omega^2(U)$ pour tout ouvert U de Y , $\Omega^2(U)$ désignant l'espace des formes différentielles holomorphes. On emploie le formalisme euclidien, de sorte que $**\alpha = \alpha$. (En fait, $*\alpha$ n'est défini qu'au signe près, mais comme Y est simplement connexe, on peut choisir une définition globale). Il résulte de la proposition du n°4 que les formes α satisfaisant à $*\alpha = \alpha$ sont celles qui s'annulent sur tous les plans de l'une des familles de plans contenues

dans les cônes isotropes, celles satisfaisant à $\alpha = -\alpha$ s'annulent sur les plans de l'autre famille.

Soit \mathbb{H} le corps des quaternions. Identifions \mathbb{C}^4 à \mathbb{H}^2 , et soit M le sous-espace de Y formé des sous-espaces \mathbb{H} vectoriels de dimension 1 de \mathbb{H}^2 (à gauche pour fixer les idées). Alors $M = \mathbb{P}^1 \mathbb{H} \approx S^4$, et la structure conforme algébrique de Y induit sur M la structure déduite de la métrique usuelle.

La variété M est une forme réelle de Y , c'est-à-dire que, pour $y \in M$, on a $T_y Y = T_y M \oplus iT_y M$; la conjugaison $\tau_y : T_y Y \rightarrow T_y Y$ conserve le cône isotrope, et préserve chacune des familles de plans contenus dans ce cône.

Considérons maintenant \mathbb{C}^4 comme $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ et munissons \mathbb{C}^2 de sa métrique hermitienne usuelle. Alors le groupe unitaire U_2 se plonge dans Y en associant à chaque $u : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ son graphe. Ici encore, $M' = U_2$ est une forme réelle, et la conjugaison conserve les cônes isotropes, mais cette fois-ci elle échange les deux familles de plans contenus dans ces cônes. La variété M' est homéomorphe à $S^3 \times S^1$. La structure conforme induite est de signature $(+, +, +, -)$: c'est la structure conforme définie par la pseudo métrique décrite au n°2. La variété M' , munie de cette pseudo métrique est isomorphe au quotient de $S^3 \times S^1$ par la relation d'équivalence identifiant (s, u) à $(-s, -u)$ pour $s \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$ et $u \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$, quand on munit $S^3 \times S^1$ de la pseudo métrique $ds^2 - du^2$.

Dans les deux cas, on a une involution anti-analytique $\tau : Y \rightarrow Y$ dont les points fixes sont les points de M (resp. M'). Mais dans le cas riemannien cette involution provient de la multiplication par j de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{H}^2 (qui n'est pas \mathbb{C} -linéaire), tandis que dans le cas minkowskien, cette involution est $F \mapsto \sigma(F^\perp)$ où $\sigma(x, y) = (y, x)$, elle ne provient pas d'une application de \mathbb{C}^4 dans lui-même. Nous verrons au n°5 (remarque), la relation entre cette différence et celle du comportement de τ envers les deux familles

de plans.

4. Un peu d'algèbre.

Munissons \mathbb{C}^4 de sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) et de la forme quadratique $q : x \mapsto \sum_{i=1}^2 x_i^2$. Notons A_0 le plan engendré par $(e_1 + ie_3, e_2 + ie_4)$. Notons $(A_i)_{i \in I}$ (resp. $(B_j)_{j \in J}$) la famille des transformés de A_0 par les éléments de $SO_4\mathbb{C}$ (resp. $O_4\mathbb{C} - SO_4\mathbb{C}$). Les A_i et les B_j sont les plans isotropes, i.e. les plans sur lesquels q s'annule identiquement.

PROPOSITION.- Soit f une forme bilinéaire alternée sur \mathbb{C}^4 . On a

$*f = f$ si et seulement si $\forall i, f|_{A_i} = 0$,
et $*f = -f$ si et seulement si $\forall j, f|_{B_j} = 0$.

LEMME 1.- Si f est nulle sur les A_i et les B_j , on a $f = 0$.

Démonstration.- Pour tout vecteur isotrope $\alpha \neq 0$, l'orthogonal de α pour f contient les deux plans isotropes passant par α , donc l'orthogonal de α pour q . Il en résulte que α est vecteur propre de l'application linéaire $\tilde{f} : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ définie par $f(x, y) = \langle x, \tilde{f}(y) \rangle$. Ceci entraîne que \tilde{f} est de la forme λI . Comme f est antisymétrique, on a nécessairement $\lambda = 0$.

LEMME 2.- Si $f = *f$, on a $f|_{A_0} = 0$.

Démonstration.- Posons $f_{ij} = f(e_i, e_j)$. On a

$$f|_{A_0} = 0 \Leftrightarrow f(e_1 + ie_3, e_2 + ie_4) = 0 \Leftrightarrow f_{12} - f_{34} + i(f_{14} - f_{23}) = 0$$

Or la condition $f = *f$ s'écrit $f_{12} = f_{34}$, $f_{14} = f_{23}$, $f_{13} = -f_{24}$.

Démonstration de la proposition.- Pour $u \in O_4\mathbb{C}$, notons u^*f la forme $(x, y) \mapsto f(u(x), u(y))$. On a $u^*(f) = (u^*f)$ si $u \in SO_4\mathbb{C}$, et $-u^*f$ si $u \in O_4\mathbb{C} - SO_4\mathbb{C}$. Si $*f = f$ (resp. $*f = -f$), on a $u^*f|_{A_0} = 0$ pour tout $u \in SO_4\mathbb{C}$ (resp. $u \in O_4\mathbb{C} - SO_4\mathbb{C}$), d'où $\forall i, f|_{A_i} = 0$ (resp. $\forall j, f|_{B_j} = 0$)

Réciproquement, mettons f sous la forme $f_1 + f_2$, avec $*f_1 = f_1$ et

$*f_2 = -f_2$. Alors f_1 est nul sur les A_i et f_2 sur les B_j . Si f est nul sur les A_i (resp. les B_j), la forme f_2 (resp. f_1) est nulle sur les A_i et les B_j , donc est nulle.

5. Un peu de géométrie.

Notons X l'espace $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$, et pour tout $y \in Y = G_2\mathbb{C}^4$, notons D_y la droite projective $P(F_y) \subset X$. Pour tout $x \in X$, l'espace $A_x = \{y \in Y \mid D_y \ni x\}$ est un plan projectif plongé dans Y . Pour tout plan projectif $P \subset X$ (correspondant à un hyperplan de \mathbb{C}^4), l'espace $B_P = \{y \mid D_y \subset P\}$ est un plan projectif plongé dans Y .

Soit $y_0 \in Y$. L'espace $C_{y_0} = \{y \in Y \mid D_{y_0} \cap D_y \neq \emptyset\}$ est une sous-variété de Y ayant en y_0 une singularité conique. En effet, soit $y_1 \in Y - C_{y_0}$, on a $\mathbb{C}^4 = F_{y_0} \oplus F_{y_1}$, et pour tout $y \in Y - C_{y_1}$, le plan F_y est le graphe d'une application linéaire φ_y de y_0 dans y_1 . La correspondance $y \mapsto \varphi_y$ est une carte algébrique représentant $Y - C_{y_1}$ sur $\mathcal{L}(F_{y_0}; F_{y_1}) = T_{y_0}Y$; une telle carte est appelée une "carte canonique" centrée en y_0 . On a $y \in C_{y_0}$ si et seulement si $\text{Det } \varphi_y = 0$, autrement dit l'image de C_{y_0} par une carte canonique centrée en y_0 est le cône isotrope de y_0 pour la structure conforme définie au n°3.

On a $C_{y_0} = \bigcup_{x \in D_{y_0}} A_x = \bigcup_{P \supset D_{y_0}} B_P$. En transportant par une carte canonique centrée en y_0 , ou simplement en prenant les plans tangents, on voit apparaître les deux familles de plans contenus dans le cône isotrope de y .

Remarque.— Dans le cas riemannien, l'involution anti-analytique $\tau : Y \rightarrow Y$ provient d'une involution $\tau : X \rightarrow X$, et on a évidemment $\tau(A_x) = A_{\tau(x)}$. Dans le cas minkowskien, on a $\tau(A_x) = B_P$, où $P = \sigma(x^\perp)$. On voit ainsi de façon géométrique pourquoi τ préserve chacune des familles de plans dans le cas riemannien et les échange dans le cas minkowskien.

6. La transformation de Penrose.

Posons $X = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, $Y = \mathbb{G}_2^4$, $Z = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in D_y\}$ et définissons $p : Z \longrightarrow X$ et $q : Z \longrightarrow Y$ par $p(x, y) = x$, $q(x, y) = y$.

Soit E un fibré vectoriel algébrique de rang 2 sur X . Pour tout $y \in Y$, le faisceau associé à $E|_{D_y}$ est isomorphe à un faisceau de la forme $\mathcal{O}(m_y) \oplus \mathcal{O}(n_y)$ avec $m_y \leq n_y$. La somme $m_y + n_y = C_1(E)$ est indépendante du choix de y , et $y \mapsto n_y$ est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski (cf. exposé 2), ce qui entraîne qu'elle a une valeur générique. Nous ferons sur E l'hypothèse suivante :

(H₁) Pour presque tout y , on a $m_y = n_y = 0$.

Autrement dit, on suppose que $E|_{D_y}$ est topologiquement trivial pour toute droite D_y , et analytiquement trivial pour au moins un y (donc pour presque tout y).

Notons S l'ensemble des $y \in Y$ tels que $n_y > 0$ (droites de saut). On peut montrer que S est une hypersurface de Y , et même lui affecter des coefficients de multiplicité pour en faire un diviseur (cf. exposé 2).

Notons \mathcal{F} le faisceau $q_* p^* \mathcal{E}$ sur Y . C'est un faisceau cohérent, localement libre de rang 2 sur $Y - S$ (*), d'où un fibré vectoriel F de rang 2 sur $Y - S$ défini par

$$F_y = H^0(D_y; \mathcal{O}_{D_y} \otimes \mathcal{E}) = \{\text{sections analytiques de } E \text{ sur } D_y\}.$$

Nous allons montrer que ce faisceau est naturellement muni d'une connexion linéaire algébrique satisfaisant 2. Pour y et y' éléments de $Y - S$ tels que $D_y \cap D_{y'} \neq \emptyset$, définissons $\alpha_{y, y'} : F_y \longrightarrow F_{y'}$ de la façon suivante :

- si $D_y \cap D_{y'} = \{x\}$, $\alpha_{y, y'} = \epsilon_{y', x}^{-1} \epsilon_{y, x}$, où $\epsilon_{y, x} : F_y \longrightarrow E_x$ est l'évaluation en x ;

- si $y = y'$, $\alpha_{y, y'} = 1_{F_y}$.

(*) En fait \mathcal{F} est localement libre sur $Y - S_2$, où $S_2 = \{y \mid n_y \geq 2\}$, mais ce fait nous intéresse peu car la connexion que nous allons construire sur $Y - S$ ne se prolonge pas à $Y - S_2$.

On vérifie que $\alpha_{y,y'}$ dépend de façon régulière du couple $(y,y') \in C \cap (Y-S)^2$, où $C = \{(y,y') | y' \in C_y\}$.

Pour $y \in Y-S$, les $(\alpha_{y,y'})_{y' \in C_y \cap (Y-S)}$ définissent une trivialisation de F sur $C_y \cap (Y-S)$. Comme cet espace contient le voisinage infinitésimal y d'ordre 1 de y , on a, pour tout $y \in Y-S$, une trivialisation de F_y sur V_y , dépendant de façon régulière de y , i.e. une connexion linéaire algébrique \mathcal{A} sur F .

Si y, y', y'' sont tels que $D_y, D_{y'}$ et $D_{y''}$ passent par un même point x , on a $\alpha_{yy''} = \alpha_{y',y''} \circ \alpha_{yy'}$, ce qui montre que \mathcal{A} est intégrable sur les plans de la forme A_x , $x \in X$. Par contre, si $D_y, D_{y'}, D_{y''}$ sont dans un même plan P , on n'a pas en général $\alpha_{yy''} = \alpha_{y',y''} \circ \alpha_{yy'}$, et \mathcal{A} n'est pas en général pas intégrable sur les plans de la forme B_p . Il en résulte, si on a pris les bonnes conventions de signe, que la forme de courbure R de \mathcal{A} vérifie $*R = R$.

7. Solutions de l'équation de Yang-Mills.

Soit M la forme réelle S^4 (resp. U_2) de Y . Si E est un fibré vectoriel algébrique sur X tel que $S \cap M = \emptyset$, on obtient un fibré \mathbb{R} -analytique F sur M muni d'une connexion \mathbb{R} -analytique \mathcal{A} dont la forme de courbure satisfait à la condition $*R = R$ (resp. $*R = iR$).

Remarquons que la condition $S \not\subset X$ entraîne $c_1(E) = 0$, donc le fibré E admet comme groupe structural $SL_2\mathbb{C}$. Il en est par suite de même de F . Nous verrons dans l'exposé n° VII comment se traduit pour E dans le cas de S^4 la condition que F admet une réduction à SU_2 .

LA TRANSFORMATION DE PENROSE INVERSE

par A. DOUADY

1. Notations.

On reprend les notations de l'exposé II :

- $X = P^3\mathbb{C}$;
- Y est la grassmannienne $G_2\mathbb{C}^4$ (ensemble des sous-espaces \mathbb{C} -vectoriels de dimension 2 de \mathbb{C}^4) ;
- Pour $y \in Y$, $D_y \subset X$ est la droite correspondante ;
- $Z = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in D_y\}$;
- $p : Z \longrightarrow X$ et $q : Z \longrightarrow Y$ sont les projections ;
- Pour $x \in X$, $\Lambda_x = \{y \in Y \mid x \in D_y\}$;
- Pour $P \subset X$ plan projectif, $B_P = \{y \in Y \mid D_y \subset P\}$;
- Pour $y \in Y$, $C_y = \{y' \mid D_y \cap D_{y'} \neq \emptyset\}$.

L'image de C_y par une carte canonique de Y centrée en y est le cône isotrope de y . On a $C_y = \bigcup_{x \in D_y} \Lambda_x = \bigcup_{P \supset D_y} B_P$, ce qui met en évidence les deux familles de plans contenus dans C_y .

- $M = P^1\mathbb{H} \subset Y$.

2. Correspondance entre ouverts de X et Y .

Soit U un ouvert de X , on notera $\alpha(U)$ l'ensemble des $y \in Y$ tels que $D_y \subset U$. L'ensemble $\alpha(U)$ est ouvert dans Y . En effet, pour tout ouvert $W \subset Z$, l'ensemble $q_!(w) = \bigcap q(\mathcal{C}_W)$ est ouvert dans Y car q est propre, et on a $\alpha(U) = q_!(P^{-1}(U))$.

Soit V un ouvert de Y , on posera $\beta(V) = \bigcup_{y \in V} D_y$. L'ensemble $\beta(V)$ est ouvert dans X , car $p : Z \longrightarrow X$ est une application ouverte

et $\beta(V) = p(q^{-1}(V))$.

Pour tout ouvert $U \subset X$, on a $\beta(\alpha(U)) \subset U$ et $\alpha(\beta(\alpha(U))) = \alpha(U)$.
 Pour $V \subset Y$ ouvert, on a $\alpha(\beta(V)) \supset V$ et $\beta(\alpha(\beta(V))) = \beta(V)$.

3. La transformation de Penrose.

Soit U un ouvert de X et posons $V = \alpha(U)$. Soit E un fibré \mathbb{C} -vectoriel de rang r analytique sur U . L'ensemble S des $y \in V$ tels que $E|_{D_y}$ soit non trivial (analytiquement) est un sous-ensemble analytique de V . Le faisceau $\mathcal{F} = q_* p^* \mathcal{E}$ est cohérent sur V et localement libre de rang r sur $V-S$, d'où un fibré \mathbb{C} -vectoriel F de rang r analytique sur $V-S$. Ce fibré est naturellement muni d'une connexion linéaire analytique \mathcal{A} , intégrable sur $A_x \cap (V-S)$ pour tout $x \in X$; par suite le tenseur de courbure R de \mathcal{A} satisfait à la condition $*R = R$ (cf. exposé II). La transformation de Penrose associe au fibré E sur U le fibré F sur $V-S$ muni de la connexion \mathcal{A} .

4. La transformation de Penrose inverse.

Soit V un ouvert de Y , posons $W = q^{-1}(V)$ et $U = p(W) = \beta(V)$.
 Faisons l'hypothèse suivante :

(SC) : Pour $x \in U$, l'espace $W(x) = A_x \cap V$ est connexe et simplement connexe.

Nous allons associer à tout fibré \mathbb{C} -vectoriel de rang r analytique F sur V , muni d'une connexion linéaire analytique \mathcal{A} dont le tenseur de courbure satisfait à la condition $*R = R$, un fibré vectoriel analytique E de rang r sur U . Le fibré F et la connexion \mathcal{A} étant donnés, la connexion \mathcal{A} est localement intégrable sur $A_x \cap V$ pour tout $x \in U$, donc le fibré q^*F sur W est muni d'une connexion $q^*\mathcal{A}$, intégrable sur chaque fibre de $p : W \rightarrow U$. On obtient le fibré E en prenant pour E_x l'espace vectoriel des sections de $q^*F|_{p^{-1}(x)}$ horizontales pour la connexion $q^*\mathcal{A}$;

cet espace est de rang r . .

Autrement dit l'espace total de E est quotient de l'espace total de q^*F par la relation d'équivalence dont les classes sont les feuilles du feuilletage \mathfrak{F} défini de la façon suivante : pour $z \in W$ et $\xi \in q^*F(z)$, l'espace $T_{\xi}\mathfrak{F}$ est le relèvement horizontal pour $q^*\mathcal{A}$ de $T_z(W|U)$.

Pour faire cette construction, on peut affaiblir l'hypothèse (sc) en la suivante :

(sc') : Pour $x \in U$, l'espace $W(x)$ est connexe et le système local défini sur $W(x)$ par q^*F muni de la connexion $q^*\mathcal{A}$ est trivial.

En appliquant à E la transformation de Penrose, on obtient un fibré \tilde{F} sur $\tilde{V}-S$, où $\tilde{V} = \alpha(U)$, muni d'une connexion $\tilde{\mathcal{A}}$. On a $\tilde{V}-S \supset V$, $\tilde{F}|_V$ s'identifie à F et $\tilde{\mathcal{A}}|_V$ à \mathcal{A} . Inversement, si on part d'un fibré E sur un ouvert U de X , en appliquant la transformation de Penrose, on obtient un fibré muni d'une connexion satisfaisant à $*R = R$ et (sc) ; en appliquant alors la transformation de Penrose inverse, on obtient $E|_{\beta(\alpha(U))}$.

5. Etude d'une fibration.

Dans $Y = G_2\mathbb{C}^4$, considérons la forme réelle $M = P^1\mathbb{H} \simeq S^4$.

PROPOSITION.- La projection $p : Z \longrightarrow X$ induit un homéomorphisme, \mathbb{R} -analytique ainsi que son inverse, de $q^{-1}(M)$ sur X .

Démonstration.- Tout sous-espace \mathbb{C} -vectoriel $L \subset \mathbb{C}^4 = \mathbb{H}^2$ de rang 1 sur \mathbb{C} est contenu dans un unique \mathbb{H} -espace vectoriel de rang 1 sur \mathbb{H} , à savoir $\mathbb{H}L = L \oplus jL$, et $L \oplus jL$ dépend de façon \mathbb{R} -linéaire de L .

COROLLAIRE 1.- On a une fibration $\mathbb{P}^3\mathbb{C} \longrightarrow S^4$ de fibre S^2 .

Remarque.- Cette fibration peut aussi être décrite de la façon suivante. On connaît les fibrations de Hopf : $\pi_{1,\mathbb{H}} : S^7 \longrightarrow S^4$ de fibre S^3 et $\pi_{3,\mathbb{C}} : S^7 \longrightarrow \mathbb{P}^3\mathbb{C}$ de fibre S^1 . La relation d'équivalence définie sur S^7

par $\pi_{3,\mathbb{C}}$ est plus fine que celle définie par $\pi_{1,\mathbb{H}}$, d'où une application $\mathbb{P}^3\mathbb{C} \longrightarrow S^4$ de fibre $S^3/S^1 = S^2$.

COROLLAIRE 2.- La variété M admet dans Y un système fondamental de voisinages tubulaires satisfaisant à la condition (SC) du numéro 4.

Démonstration.- On définit sur Y une distance d de la façon suivante :

Munissons \mathbb{C}^4 de la métrique hermitienne standard, et notons F_y le sous-espace de \mathbb{C}^4 correspondant à y . Pour y et y' dans Y , si F_y est le graphe d'une application linéaire $\varphi : F_{y'} \longrightarrow F_y^\perp$, on pose

$$d(y, y') = \frac{\|\varphi\|}{\sqrt{1 + \|\varphi\|^2}} ; \text{ et } d(y, y') = 1 \text{ si } F_y, F_{y'}^\perp \neq 0.$$

Pour $\epsilon > 0$, soit $V_\epsilon = \{y \mid d(y, M) < \epsilon\}$. Soit $x_0 \in X$ et $y_0 \in M$ l'unique point tel que $(x_0, y_0) \in Z$. Alors $V_\epsilon \cap A_{x_0}$ s'identifie à l'ensemble des $\varphi : F_{y_0} \longrightarrow F_0$ tels que $\varphi|_{L_{x_0}} = 0$ et $\|\varphi\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$, qui est convexe donc simplement connexe.

6. Connexions \mathbb{R} -analytiques sur S^4 vérifiant $*R = R$.

THÉORÈME.- Soit F un fibré \mathbb{C} -vectoriel de rang r , \mathbb{R} -analytique sur $M \simeq S^4$, muni d'une connexion \mathcal{A} , \mathbb{C} -linéaire, \mathbb{R} -analytique et dont le tenseur de courbure R satisfait à $*R = R$. Alors il existe un fibré vectoriel algébrique E sur X , unique à isomorphisme près, tel que l'ensemble S des droites de sauts de E ne rencontre pas M , et que F muni de \mathcal{A} s'identifie au fibré déduit de E par la transformation de Penrose, restreint à M .

Rappelons un lemme de théorie des faisceaux :

LEMME G.- Soient Y un espace paracompact, $M \subset Y$ un fermé, G un faisceau de groupes abéliens (resp. de groupes, resp. d'ensembles) sur Y . On a alors

$H^p(M;G) = \varinjlim H^p(V;G)$ (limite inductive sur les voisinages V de M dans Y)
pour tout p (resp. $p \leq 1$, resp. $p = 0$).

Cf. Godement, Théorie des faisceaux.

Démonstration du théorème.— Les fibrés \mathbb{C} -vectoriels de rang r , \mathbb{R} -analytiques sur M sont classifiés par les éléments de $H^1(M;G)$ où G est le faisceau sur M des applications \mathbb{R} -analytiques dans $GL_r \mathbb{C}$. Comme M est une forme réelle de Y , ce faisceau est la restriction à M du faisceau sur Y des applications \mathbb{C} -analytiques dans $GL_r \mathbb{C}$. Il résulte du lemme G que F est la restriction à M d'un fibré \mathbb{C} -analytique sur un voisinage ouvert V de M dans Y . Quitte à restreindre V , on peut alors, en vertu du même lemme, étendre la connexion \mathcal{A} en une connexion \mathbb{C} -analytique au-dessus de V . La condition $*R = R$ sera encore satisfaite. D'après le corollaire 2 de la proposition du n°5, on peut supposer que V satisfait à la condition (SC) . On a $\mathbb{P}(V) = X$, et la transformation de Penrose inverse donne un fibré \mathbb{C} -analytique E sur X qui répond à la question. D'après le théorème GAGA de J.-P. Serre ([]), E est de façon unique un fibré vectoriel algébrique.

Remarque.— La construction de Penrose et la construction de Penrose inverse sont fonctorielles. Il en résulte que, si E et E' sont des fibrés vectoriels sur X dont les ensembles de sauts S et S' satisfont à $S \cap M = S' \cap M = \emptyset$ et si (F, \mathcal{A}) et (F', \mathcal{A}') sont les fibrés munis de connexion sur M qui leur correspondent, tout morphisme $\varphi : F \longrightarrow F'$ \mathbb{R} -analytique et compatible avec les connexions \mathcal{A} et \mathcal{A}' provient d'un morphisme algébrique unique de E dans E' . Autrement dit on a une équivalence de catégories.

7. Analyticité automatique.

La proposition suivante montre que, dans le théorème du n°6, les hypothèses d'analyticité réelle sont inessentiellles.

PROPOSITION.— Soient $k \geq 1$, G un ouvert de M , F un fibré \mathbb{C} -vectoriel

de classe \mathcal{C}^{k+1} sur G , \mathcal{A} une connexion \mathbb{C} -linéaire de classe \mathcal{C}^k sur F dont le tenseur de courbure R (qui est de classe \mathcal{C}^{k-1}) satisfait à la condition $*R = R$. On peut alors mettre sur F une structure de fibré \mathbb{R} -analytique plus riche que sa structure \mathcal{C}^{k+1} , telle que \mathcal{A} devienne une connexion \mathbb{R} -analytique.

Le fibré q^*F sur $q^{-1}(G)$ est muni d'une connexion $q^*\mathcal{A}$, qui permet d'identifier, pour chaque point $\zeta \in q^*F$ au-dessus de $z = (x, y) \in q^{-1}(G)$, l'espace $T_\zeta(q^*F)$ à $T_z(q^{-1}(G)) \oplus F_y$. D'après la proposition du n°5, $T_z(p) : T_z(q^{-1}(G)) \rightarrow T_x X$ est un isomorphisme, d'où une structure complexe sur l'espace vectoriel $T_\zeta(q^*F)$. Cette structure complexe dépend de façon \mathcal{C}^k du point ζ , autrement dit on a une structure presque complexe Ψ de classe \mathcal{C}^k sur q^*F . Nous allons montrer que cette structure presque complexe est intégrable. Nous proposons une démonstration un peu lourde, mais qui correspond à l'intuition du rédacteur. Le lecteur préférera peut-être faire un calcul qui établit la condition d'intégrabilité à partir de la condition $*R = R$.

LEMME.- Soient $p : W \rightarrow U$ une submersion de variétés \mathbb{C} -analytiques, F un fibré vectoriel sur W et B une connexion linéaire \mathbb{C} -analytique sur F . Notons R la forme de courbure relative (restriction de la forme de courbure à $T(W|U)$). Soit $z_0 \in W$. Si $R(z)$ est $\mathcal{O}(d(z, z_0)^{k-1})$, il existe une connexion linéaire \mathbb{C} -analytique B' sur F au voisinage de z_0 , de courbure relative nulle, telle que $B - B'$ soit $\mathcal{O}(d(z, z_0)^k)$.

Démonstration.- On peut supposer que $W = U \times V$, où V est un voisinage convexe de 0 dans \mathbb{C}^k , et $z_0 = (x_0, 0)$. Posons $\sigma(x) = (x, 0)$ pour $x \in U$. On définit par transport B -horizontal radial dans V un isomorphisme ω de $p^*\sigma^*F$ sur F . La connexion $p^*\sigma^*B$ sur $p^*\sigma^*F$ est relativement intégrable, et son image B' par ω répond à la question.

Démonstration de la proposition.— Soit $z_0 = (x_0, y_0) \in q^{-1}(G)$. Choisissons au voisinage de y_0 une trivialisation \mathcal{C}^{r+1} de F et une connexion \mathbb{R} -analytique B sur F qui coïncide avec \mathcal{A} jusqu'à l'ordre k . La connexion q^*B a une courbure relative R qui est $\mathcal{O}(z - z_0)^{k-1}$, donc il existe une connexion B' , relativement intégrable, telle que $B' - q^*B$ soit $\mathcal{O}(z - z_0)^k$. Il en résulte qu'il existe une structure presque complexe Ψ' sur q^*F , intégrable qui diffère de Ψ par $\mathcal{O}(z - z_0)^k$. D'après le théorème de "Frobenius complexe" de Newlander-Nirenberg, il y a pour les structures presque complexes une condition d'intégrabilité qui s'exprime en chaque point par une condition sur le jet à l'ordre 1 de Ψ : cette condition est donc satisfaite en chaque point de q^*F .

En identifiant $q^{-1}(W)$ à son image U dans X par p , on obtient un fibré vectoriel \mathbb{C} -analytique E sur U . La transformation de Penrose appliquée à E redonne F , muni d'une structure \mathbb{R} -analytique plus riche, et \mathcal{A} .

Référence.

- [1] J.-P. SERRE, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, Tome 6, (1955-56), p. 1 à 42.

PRINCIPAUX RÉSULTATS SUR LES FIBRÉS STABLES DE RANG 2 SUR $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

par Hubert AUPÉTIT

§1. Espaces projectifs.

a) Désignons par $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ l'espace projectif des droites de \mathbb{C}^{n+1} (en abrégé \mathbb{P}_n).

Soient $(x_0 \dots x_n)$ des coordonnées homogènes sur \mathbb{P}_n et pour chaque i soit U_i l'ouvert $\{x_i \neq 0\}$ de \mathbb{P}_n .

Le cocycle $u_{ij} = z_i/z_j$ sur le recouvrement (U_i) définit un fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$. On désignera son dual par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1)$ et on notera $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)$ le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)^{\otimes k}$ si $k \geq 0$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1)^{\otimes (-k)}$ si $k < 0$. Le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1)$ est le sous-fibré canonique de $\mathbb{P}_n \times \mathbb{C}^{n+1}$ qui, au-dessus du point $[d]$ de \mathbb{P}_n met la droite d de \mathbb{C}^{n+1} .

Nous ne distinguerons pas le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)$ du faisceau localement libre associé.

On a les propriétés suivantes :

- Tout fibré en droites sur \mathbb{P}_n est isomorphe à un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)$.
- Les sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ s'annulent sur les hyperplans de \mathbb{P}_n .
- Plus généralement, si S est une hypersurface de \mathbb{P}_n , il existe une section d'un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)$ dont le lieu des zéros est S elle-même. L'entier k est le degré de cette hypersurface.

b) On désignera dans toute la suite pour un faisceau cohérent \mathcal{F} , par $h^i(\mathcal{F})$ la dimension de $H^i(\mathbb{P}_n, \mathcal{F})$. On a alors les égalités suivantes :

$$\alpha) \quad h^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(q)) = 0 \quad \text{sauf pour } \begin{cases} p = 0 \text{ et } q \geq 0 \\ p = n \text{ et } q < -n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(q)) &= \binom{n+q}{q} \quad \text{si } q \geq 0 \\ \gamma) \quad h^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(q)) &= \binom{-q-1}{n} \quad \text{si } q < -n. \end{aligned}$$

Pour tout k -plan : $\mathbb{P}_k \xrightarrow{j} \mathbb{P}_n$, on a un isomorphisme entre $j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(p)$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(p)$; on notera $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(p) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(p)|_{\mathbb{P}_k}$.

c) L'espace $H^2(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z} et admet pour générateur $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))$. On a alors $H^{2k}(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \cdot h^k$ pour $k \leq n$.

Dorénavant les classes de Chern des fibrés sur \mathbb{P}_n seront considérées comme des entiers.

La référence pour tout ce paragraphe est [10,11] ainsi que [4, ch. V, § 1] pour le paragraphe c).

§2.-Grassmanniennes - drapeaux.

a) Désignons par $\text{Gr}(m,n)$ la grassmannienne des m -plans de \mathbb{P}_n . Le plongement de Plücker fait de $\text{Gr}(m,n)$ une sous-variété de $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{m+1}-1}$ et on note $\mathcal{O}_{\text{Gr}}(1)$ la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}^{\binom{n+1}{m+1}-1}$ à $\text{Gr}(m,n)$. Le fibré $\mathcal{O}_{\text{Gr}}(1)$ jouit alors des mêmes propriétés que celles de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ énoncées au paragraphe 1, a), et on peut ainsi transférer les notations et définitions de cet alinéa à $\text{Gr}(m,n)$. En particulier un "hyperplan" de $\text{Gr}(m,n)$ est l'intersection d'un hyperplan de $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{m+1}-1}$ et de l'image de $\text{Gr}(m,n)$. Une hypersurface de degré k de $\text{Gr}(m,n)$ est l'intersection d'une hypersurface de degré k de $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{m+1}-1}$ et de l'image de $\text{Gr}(m,n)$.

Remarquons que $\text{Gr}(n-1,n)$, ensemble des hyperplans de \mathbb{P}_n est isomorphe à l'espace projectif dual de \mathbb{P}^n construit sur le dual de \mathbb{C}^{n+1} . On notera $\text{Gr}(n-1,n) \simeq \mathbb{P}_n^*$ [4, ch. V, §2].

b) Soit $F(m,n) = \{(x, \pi) \in \mathbb{P}_n \times \text{Gr}(m,n) \mid x \in \pi\}$. Les projections $F \xrightarrow{p} \mathbb{P}_n$ et $F \xrightarrow{q} \text{Gr}(m,n)$ sont des fibrations localement triviales de fibrés respectives $\text{Gr}(m-1, n-1)$ et \mathbb{P}_m . Ce sont en particulier des morphismes plats. Pour un fibré vectoriel algébrique V sur \mathbb{P}_n , on notera V_F l'image réciproque p^*V de V par p .

Le fibré V_F est $\mathcal{O}_{\text{Gr}(m,n)}$ -plat et, par le théorème de semi-continuité des images directes [3], les fonctions

$$\begin{aligned} \pi \longmapsto h^i(V_F|_q^{-1}\pi) &= \dim H^i(q^{-1}\pi, V_F|_q^{-1}\pi) \\ &= \dim H^i(pq^{-1}\pi, V|_{pq^{-1}\pi}) \end{aligned}$$

de $\text{Gr}(m,n)$ dans \mathbb{Z} sont semi-continues supérieurement pour la topologie de Zariski de $\text{Gr}(m,n)$. En d'autres termes, ces fonctions ne montent pas au voisinage d'un point. De plus, sur l'ouvert $\{\pi \mid h^i(V_F|_q^{-1}\pi) \text{ minimal}\}$, le faisceau cohérent $R^i_{q*} V_F$ [3] est localement libre. La fibre en π du fibré associé est précisément $H^i(pq^{-1}\pi, V|_{pq^{-1}\pi})$.

§3. Droites de saut d'un fibré.

Soit V un fibré vectoriel algébrique de rang 2 sur \mathbb{P}_n . Dans toute la suite, on suppose que $n \geq 2$. On désignera par $\mathcal{O}(V)$ le faisceau localement libre associé. A toute droite ℓ de \mathbb{P}_n on peut associer un couple d'entiers unique (a,b) tel que $a \geq b$ et

$$V|_\ell \simeq \mathcal{O}_\ell(a) \oplus \mathcal{O}_\ell(b) \quad [5].$$

On notera $d(\ell)$ la différence $a(\ell) - b(\ell)$ et $d = \inf_{\ell \in \text{Gr}(1,n)} d(\ell)$.

On remarquera que les entiers $d(\ell)$ et d ne changent pas si l'on tensorise V par un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)$ (opération que nous appellerons "tordre le fibré V ").

PROPOSITION 1.- L'ensemble \mathcal{U} des droites ℓ pour lesquelles $d(\ell) = d$ est un ouvert de Zariski de $\text{Gr}(1,n)$.

Preuve.— Tordons V de manière à avoir, lorsque $d(\ell) = d$,

$$V|_{\ell} \simeq \mathcal{O}_{\ell}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\ell}(-d-1) .$$

Pour une droite ℓ telle que $d(\ell) > d$, on aura $V|_{\ell} \simeq \mathcal{O}_{\ell}(a) \oplus \mathcal{O}_{\ell}(b)$ avec $a - b > d$ et $a + b = c_1(V) = -d - 2$.

Par suite on aura

$$a \geq 0 \text{ et } h^0(V|_{\ell}) > 0 .$$

Il est clair que $h^0(V|_{\ell}) = h^0(V_{\mathbb{F}|q}^{-1}|_{\ell})$ et en utilisant le paragraphe 2, b), on voit que $\{\ell | h^0(V|_{\ell}) \geq 1\}$ est un fermé, ce qui prouve la proposition.

DÉFINITION.— Une droite ℓ telle que $d(\ell) > d$ est une droite de saut pour le fibré V .

PROPOSITION 2.— Si $d = 0$, l'ensemble $S = \text{Gr}(1, n) - \mathcal{U}$ des droites de saut est une hypersurface.

En tordant V , on peut supposer $V|_{\ell} \simeq \mathcal{O}_{\ell} \oplus \mathcal{O}_{\ell}$ pour $\ell \in \mathcal{U}$.

(1) Une droite de saut ℓ est alors caractérisée par $h^0(V(-1)|_{\ell}) > 0$.

Soit $\ell_0 \in S$. Il existe alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell_0}(-k) \xrightarrow{a} V|_{\ell_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell_0}(k) \longrightarrow 0 \text{ avec } k > 0 .$$

Par semi-continuité (§2, b)), $H^1(\ell, V(k)|_{\ell}) \simeq H^1(q^{-1}(\ell), V_{\mathbb{F}}(k)|_{q^{-1}\ell})$

reste nul au voisinage de ℓ_0 .

Comme $h^0(V(k)|_{\ell}) - h^1(V(k)|_{\ell})$ est constant en ℓ (Riemann-Roch sur \mathbb{P}_1 !), le nombre $h^0(V(k)|_{\ell})$ est constant au voisinage de ℓ_0 . Par suite (§2, b)), le faisceau $q_* V_{\mathbb{F}}(k)$ est localement libre en ℓ_0 . L'application définit un point de la fibre de $q_* V_{\mathbb{F}}(k)$ en ℓ_0 . Il existe donc une section locale α_{ℓ} de ce fibré passant par ce point. On a donc pour toute droite ℓ voisine de ℓ_0 une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell}(-k) \longrightarrow V|_{\ell} \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell}(k) \longrightarrow 0$$

qui, après tensorisation par $\mathcal{O}_{\ell}(-1)$, devient

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(-k-1) \xrightarrow{a_\ell} V(-1)|_\ell \xrightarrow{b_\ell} \mathcal{O}_\ell(k-1) \longrightarrow 0 ;$$

a_ℓ et b_ℓ dépendant algébriquement de ℓ .

Comme $k \geq 0$, on a $H^0(\ell, \mathcal{O}_\ell(h-1)) = 0$. On a donc une suite exacte

$$(2) \quad 0 \longrightarrow H^0(V(-1)|_\ell) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_\ell(k-1)) \xrightarrow{\delta_\ell} H^1(\mathcal{O}_\ell(-k-1))$$

avec δ_ℓ algébrique en ℓ .

Les deux espaces de droite sont en dualité de Serre ; ils ont donc même dimension et δ_ℓ est non injective si et seulement si $\det \delta_\ell = 0$. L'ensemble des droites ℓ voisines de ℓ_0 , pour lesquelles δ_ℓ est non injective, est donc une hypersurface d'équation $\det \delta_\ell = 0$.

D'après (1) et (2) , c'est l'ensemble des droites de saut voisines de ℓ_0 c.q.f.d.

On étudiera plus loin cette hypersurface en détail (§9, Th. 3) .

§4. Faisceaux normaux.

Avant d'aller plus loin dans l'étude des fibrés sur \mathbb{P}_n , rappelons quelques résultats sur les faisceaux cohérents sur une variété X lisse de dimension ≥ 2 (ou sur un espace normal). Soit $x \in X$; désignons par $\mathcal{C}(x)$ le faisceau "gratte-ciel" en x et par $\mathcal{F}(x)$ le tensorisé d'un faisceau cohérent \mathcal{F} par $\mathcal{C}(x)$. L'ensemble des x tels que le rang de $\mathcal{F}(x)$ soit minimal est un ouvert de Zariski de X . Cette valeur minimale est par définition le rang du faisceau. Si \mathcal{F} est sans torsion, il est localement libre en dehors des points d'une variété de codimension ≥ 2 . On pourra donc parler de sa première classe de Chern.

DÉFINITION.- Le faisceau cohérent \mathcal{F} est normal si, pour toute sous-variété fermée A de codimension ≥ 2 , le morphisme de restriction

$$\text{Res}_U : H^0(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(U-A, \mathcal{F})$$

est bijectif pour tout ouvert de Zariski U .

(Dans la terminologie de [6], le faisceau \mathcal{F} est A -clos pour tout A de

codimension ≥ 2).

Si \mathcal{F} est normal, il est sans torsion.

Le faisceau \mathcal{O}_X est normal et donc, tout faisceau localement libre sur X aussi. Pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} , le dual $\mathcal{F}^* = \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ est normal (exercice).

LEMME.- Si un faisceau normal est localement un faisceau d'idéaux, il est localement libre.

Supposons que, sur un ouvert U , on ait une injection $\mathcal{F}|_U \xrightarrow{i_U} \mathcal{O}_U$. Soit B le sous-espace de U où i_U s'annule et soit D le plus grand diviseur contenu dans B . Soit $A = B - D$. Alors $\text{codim } A \geq 2$ (le diviseur D est peut-être vide).

Le morphisme i_U induit une injection $\mathcal{F}|_U \otimes \mathcal{O}_U(-D) \xrightarrow{j_U} \mathcal{O}_U$, le faisceau $\mathcal{O}_U(-D)$ désignant l'idéal de D dans U . Le morphisme j_U est un isomorphisme en dehors de A . Les faisceaux $\mathcal{F}|_U \otimes \mathcal{O}_U(-D)$ et \mathcal{O}_U sont normaux et isomorphes sur $U - A$, avec $\text{codim } A \geq 2$. Ils sont donc isomorphes et on a $\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{O}_U(D)$ c.q.f.d.

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 3.- Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent de rang 1 sur une variété lisse de dimension $n \geq 2$.

- 1) \mathcal{F}^* est localement libre.
- 2) Si \mathcal{F} est normal, on a $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}^{**}$ et $c_1(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{F}^{**})$.
- 3) \mathcal{F} est localement libre si et seulement s'il est normal.

§5. Proposition utile.

Démontrons pendant qu'on est dans les faisceaux un résultat utile dans la suite.

PROPOSITION 4.- Soit $0 \rightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{O}(V) \xrightarrow{p} \mathcal{Q} \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux avec V fibré de rang 2 sur \mathbb{P}_n , \mathcal{K} et \mathcal{Q} deux faisceaux cohé-

rents de rang 1 sur \mathbb{P}_n .

Le faisceau \mathcal{Q} est sans torsion si et seulement si :

(i) \mathcal{K} est localement libre ;

(ii) $\text{codim}\{x | i_x = 0\} \geq 2$.

\Rightarrow (i) - Pour montrer (i), il suffit de montrer que \mathcal{K} est normal en vertu de la proposition 3. Soient A un fermé de $\text{codim} \geq 2$ et $\Gamma_A(\mathcal{K})$ le faisceau des sections de \mathcal{K} à support dans A ([7]). Soient $H_A^i(\mathcal{K})$ les foncteurs dérivés en \mathcal{K} du foncteur Γ_A . On a, j désignant l'inclusion $\mathbb{P}_n - A \rightarrow \mathbb{P}_n$, la suite canonique exacte ([7]) :

$$0 \longrightarrow \Gamma_A(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow j_* (\mathcal{K}|_{\mathbb{P}_n - A}) \longrightarrow H_A^1(\mathcal{K}) \longrightarrow 0$$

de sorte que \mathcal{K} est normal si et seulement si $\Gamma_A(\mathcal{K}) = 0$ et $H_A^1(\mathcal{K}) = 0$, pour tout fermé A de $\text{codim} \geq 2$. Comme le foncteur Γ_A est cohomologique ([7]), on a la longue suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_A(\mathcal{K}) \longrightarrow \Gamma_A(\mathcal{O}(V)) \longrightarrow \Gamma_A(\mathcal{Q}) \longrightarrow H_A^1(\mathcal{K}) \longrightarrow H_A^1(\mathcal{O}(V))$$

$$\Gamma_A(\mathcal{O}(V)) = 0 \text{ et } H_A^1(\mathcal{O}(V)) = 0 \text{ car } \mathcal{O}(V) \text{ est normal ;}$$

$$\Gamma_A(\mathcal{Q}) = 0 \text{ car } \mathcal{Q} \text{ est sans torsion.}$$

Donc

$$\Gamma_A(\mathcal{K}) = 0 \text{ et } H_A^1(\mathcal{K}) = 0 \text{ c.q.f.d.}$$

\Rightarrow (ii) - Si i s'annule sur l'hypersurface H d'équation $f \in H^0(\mathcal{O}(\lambda)) > 0$, on a le diagramme suivant, $\mathcal{O}(\kappa)$ désignant le fibré en droites \mathcal{K} :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\kappa) & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}(\lambda) & \longrightarrow & \frac{\mathcal{O}(\kappa + \lambda)}{f \cdot \mathcal{O}(\kappa)} = \mathcal{C} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow i/f & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\kappa) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}(V) & \xrightarrow{p} & \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & \nearrow & \\ & & & & \mathcal{R} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

\mathcal{R} est un sous-faisceau de \mathcal{Q} .

$\text{Ker}(p \circ i/f) = \text{Ker } g$ donc la correspondance naturelle de $R = \text{Im}(p \circ i/f)$ dans \mathcal{C} est une application.

On vérifie que c'est un isomorphisme ; comme \mathcal{C} est de torsion, \mathcal{R} est de torsion, ce qui n'est pas possible puisque \mathcal{Q} n'a pas de sous-faisceau de torsion.

⇐ On se ramène au

LEMME.- Soit $s \in H^0(V)$ tel que $\text{codim} \{x | s(x) = 0\} > 2$. Alors $V/s0$ est sans torsion.

Le complexe $0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{s} V \xrightarrow{s \wedge \cdot} \wedge^2 V$ est exact en vertu de l'hypothèse (exercice). Par suite $V/s0$ se plonge dans $\wedge^2 V$ localement libre ; il est donc sans torsion.

§6. Fibrés stables et semi-stables.

PROPOSITION 5.- Pour un fibré V de rang 2 sur \mathbb{P}_n , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout faisceau quotient \mathcal{Q} de $\mathcal{O}(V)$ de rang 1 sans torsion, on a $c_1(V) < 2c_1(\mathcal{Q})$.

2) Pour tout morphisme de faisceau injectif de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)$ dans $\mathcal{O}(V)$, on a $2k < c_1(V)$.

3) Si V_{norm} désigne le fibré $V(k)$ tel que $c_1(V(k)) = 0$ ou -1 , on a $h^0(V_{\text{norm}}) = 0$.

4) Si $\text{End } V$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de V , on a $\text{End } V = \mathbb{C}$ (c'est-à-dire que V n'a pas d'endomorphismes autres que les homothéties).

PROPOSITION 5'.- Pour un fibré V de rang 2 sur \mathbb{P}_n et de 1ère classe de Chern paire, les conditions suivantes sont équivalentes :

1') Pour tout faisceau quotient \mathcal{Q} de $\mathcal{O}(V)$ de rang 1 sans torsion, on

a $c_1(V) \leq 2c_1(\mathcal{Q})$.

2') Pour tout morphisme injectif de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ dans $\mathcal{O}(V)$, on a $2k \leq c_1(V)$.

3') $h^0(V_{\text{norm}}(-1)) = 0$.

DÉFINITION.- a) Un fibré vérifiant les conditions de la proposition 5 est appelé stable.

b) Un fibré vérifiant les conditions de la proposition 5' est appelé semi-stable.

La propriété 4) n'entraîne pas 1), 2), 3) sur un espace quelconque ($[8,9]$).

Un fibré non stable est appelé instable.

Exemples.- Les fibrés décomposables de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b)$ avec $|b - a| \leq 1$ sont semi-stables.

Le fibré tangent à \mathbb{P}_2 est stable.

Il existe des fibrés non stables et non décomposables sur \mathbb{P}_3 . (Horrocks, A construction for locally free sheaves, Topology 7).

Le fibré associé à une corrélation triviale sur \mathbb{P}_3 est stable (§13). On ne connaît pas de fibré stable sur \mathbb{P}_n avec $n \geq 5$.

§7. Démonstration de la proposition 5.

Pour prouver (1) \Leftrightarrow (2) , il suffit d'utiliser la proposition 4 et de remarquer qu'un morphisme $i : \mathcal{O}(k) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ nul sur une hypersurface de degré 1 induit un morphisme $j : \mathcal{O}(k+1) \rightarrow \mathcal{O}(V)$.

2 \Leftrightarrow 3 est facile.

2 \Rightarrow 4 . Supposons 2 vérifiée ; soit h un endomorphisme de V . Soit λ_{x_0} une valeur propre de l'endomorphisme h_{x_0} de V_{x_0} . La fonction $x \mapsto \det(h_x - \lambda_{x_0} \text{Id}_V)$ est algébrique sur \mathbb{P}_n , donc constante et vaut 0 en x_0 . Elle est constamment nulle.

Soit $\alpha = h - \lambda_{x_0} \text{Id}$. Si $\alpha \neq 0$, alors α est de rang 1. Le noyau \mathcal{K} de α est un sous-fibré de rang 1 de V et comme l'image \mathcal{Q} de α est un sous-faisceau de rang 1 de $\mathcal{O}(V)$, \mathcal{Q} est sans torsion. D'après le paragraphe 4, lemme, le faisceau \mathcal{Q}^{**} est localement libre et vérifie $c_1(\mathcal{Q}^{**}) = c_1(\mathcal{Q})$.

Appliquons 2 aux sous-fibrés \mathcal{K} et \mathcal{Q}^{**} de V :

$$c_1(\mathcal{K}) < c_1(V)$$

$$c_1(\mathcal{Q}^{**}) = 2c_1(\mathcal{Q}) < c_1(V).$$

D'où $c_1(\mathcal{K}) + c_1(\mathcal{Q}) = c_1(V) < c_1(V)$;

ce n'est pas possible, donc $\alpha = 0$ et h est une homothétie.

4) \Rightarrow 2). Soit $i : \mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$ un morphisme injectif de faisceaux tel que $c_1(V) < 2k$ et $\text{codim}\{i = 0\} \geq 2$.

Soit \mathcal{Q} le quotient de $\mathcal{O}(V)$ par $\mathcal{O}(k)$. Il est sans torsion (§4, prop. 4) et vérifie $c_1(\mathcal{Q}) < k$. Le fibré en droites \mathcal{Q}^{**} (paragr. 4) a une classe de Chern inférieure à celle de $\mathcal{O}(k)$. Il existe donc une injection de \mathcal{Q}^{**} dans $\mathcal{O}(k)$ (c'est là où intervient \mathbb{P}_n : on se sert du fait qu'un fibré en droites de classe de Chern ≥ 0 a une section). La composée

$$V \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}^{**} \longrightarrow \mathcal{O}(k) \longrightarrow V$$

est un endomorphisme de rang 1 de V : ce n'est pas une homothétie.

§8. Premières propriétés des fibrés stables.

PROPOSITION 6.- Soient D le disque unité et \mathcal{V} et \mathcal{W} deux fibrés sur $\mathbb{P}_n \times D$. Soit $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}|_{\mathbb{P}_n \times \{x\}}$ (resp \mathcal{W}_x). Si \mathcal{V}_x et \mathcal{W}_x sont stables pour tout x , isomorphes pour $x \neq 0$, ils sont isomorphes pour $x = 0$ (séparation de l'espace des fibrés stables).

Preuve.- Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{om}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Le faisceau \mathcal{H} est localement libre et véri-

fie par hypothèse $h^0(\mathcal{H}|_{\mathbb{P}_n \times \{x\}}) = 1$ pour $x \neq 0$. Si $\pi : \mathbb{P}_n \times D \longrightarrow D$ désigne la projection, le faisceau $\pi_* \mathcal{H}$ est localement libre de rang 1 hors de 0 et sans torsion. Il est donc localement libre en 0 et isomorphe à \mathcal{O}_D (comme tout fibré en droites sur D). En utilisant le morphisme d'évaluation $\pi^* \pi_* \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ et l'isomorphisme $\pi_* \mathcal{H} \simeq \mathcal{O}_D$, on obtient une section de \mathcal{H} et donc un morphisme non trivial h de \mathcal{V} dans \mathcal{W} .

En utilisant la stabilité, on voit que h est un isomorphisme en dehors de $\mathbb{P}_n \times \{0\}$. Soit $\mathcal{Q} = \text{Im } h_0$. Si $\text{rg } \mathcal{Q} = 0$, soit α l'ordre d'annulation de h sur $\mathbb{P}_n \times \{0\}$. En remplaçant h par h/z^α , on se ramène à $\text{rg } \mathcal{Q} \neq 0$. Si $\text{rg } \mathcal{Q} = 1$, en utilisant \mathcal{Q}^{**} et les propriétés 1) et 2) des fibrés stables, on trouve $c_1(\mathcal{V}_0) < c_1(\mathcal{W}_0)$ alors que $c_1(\mathcal{V}_x) = c_1(\mathcal{W}_x)$ partout ailleurs. C'est impossible.

Donc $\text{rg } \mathcal{Q} = 2$ et \mathcal{Q} est presque partout égal à \mathcal{W}_0 . Par suite $\det h$ s'annule au plus sur une variété de codimension ≥ 2 . Elle ne s'annule donc pas et h_0 est un isomorphisme.

PROPOSITION 7.- Soient S une variété réduite et \mathcal{V} un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}_n \times S$. Alors $\{s | \mathcal{V}|_{\mathbb{P}_n \times \{s\}} \text{ non stable}\}$ est fermé pour la topologie de Zariski de S (Même énoncé pour "non semi-stable").

Preuve.- Le faisceau $\mathcal{V}|_{\mathbb{P}_n \times \{s\}}^{\text{norm}}$ est \mathcal{O}_S -plat (resp $\mathcal{V}|_{\mathbb{P}_n \times \{s\}}^{\text{norm}(-1)}$) On utilise alors la semi-continuité de $s \longmapsto h^0(\mathcal{V}|_{\mathbb{P}_n \times \{s\}}^{\text{norm}}$ (resp $s \longmapsto h^0(\mathcal{V}|_{\mathbb{P}_n \times \{s\}}^{\text{norm}(-1)})$.

PROPOSITION 8. - Si V est de rang 2 sur \mathbb{P}_n stable sur un hyperplan, alors V est stable. (Même énoncé pour les semi-stables).

La réciproque est vraie pour un hyperplan générique de \mathbb{P}_n avec $n > 3$. Elle fera l'objet d'une étude plus détaillée dans le cas $n = 3$.

§9. Résultats principaux.

THÉOREME 1.- Soit V un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Le fibré V est semi-stable si et seulement si $d = 0$ ou 1.

THÉOREME 2.- Soit V un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$, sans droites de saut. Alors V est décomposable.

THÉOREME 3.- Soit V un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $d = 0$. L'ensemble S des droites de saut de V est le support d'un diviseur dans $\text{Gr}(1, n)$ de degré $c_2 - \frac{c_1^2}{4}$. Si $\mu_\ell(S)$ est la "multiplicité" de ce diviseur en ℓ , on a $d(\ell) < 2\mu_\ell(S)$.

Le diviseur $S(V)$ dépend analytiquement de V .

THÉOREME 4.- Si V est un fibré stable de rang 2 sur \mathbb{P}_3 distinct du fibré associé à une corrélation nulle (construit plus loin), il existe un ouvert \mathcal{U} de $\mathbb{P}_3^* = \text{Gr}(2, 3)$ tel que $V|_h$ soit stable pour $h \in \mathcal{U}$.

Le théorème 1 est dû à Grauert-Mulich. Une démonstration se trouve dans [1].

Le théorème 2 est dû à Van de Ven ([2]).

Les théorèmes 3 et 4 sont dûs à Barth ([1]).

Le théorème 4 est valable en toute généralité dans \mathbb{P}_n , avec $n \geq 4$, avec cette restriction qu'on ne connaît pas de fibrés stables sur \mathbb{P}_n avec $n \geq 5$.

La démonstration du théorème 1 fait l'objet du §10, celle du théorème 2 l'objet du §11, celle du théorème 3 l'objet du §12, et celle du théorème 4 l'objet du §14.

§10. Preuve du théorème de Grauert-Mulich (cf. §9).A) Construction dans la variété des drapeaux.

Soit V un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de type générique $(0, -d)$ avec $d \geq 1$ (nous dirons que V est de type (a, b) sur une droite ℓ si

$V|_{\ell} \simeq \mathcal{O}_{\ell}(a) \oplus \mathcal{O}_{\ell}(b)$. Prenons $m = 1$ dans la construction du §2 b). Le faisceau cohérent $q_* V_F$, de rang 1 car $d \geq 1$, est normal (§4) ; en vertu de la proposition 3 (§4), il est localement libre. Il existe donc un entier λ unique tel que $q_* V_F$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{Gr}(\lambda)$.

PROPOSITION 9.- Si $d \geq 2$, le faisceau $q_* V_F$ est trivial.

Preuve.- Soient \mathcal{E} le morphisme canonique $q^* q_* V_F$ dans V_F et Z l'ensemble des points de F où \mathcal{E} s'annule. Si $\ell \in \mathcal{U} = Gr - S$, ensemble des droites ordinaires de V , on a $q_* V_F(\ell) = H^0(\ell, V|_{\ell})$.

Par suite le morphisme \mathcal{E} en (x, ℓ) est non nul pour tout $x \in \ell$ et on a donc $q(Z) \subset S$.

a) LEMME 1.- Il existe un fermé T de S tel que

1) Si $\ell \in S - T$ et si V est de type $(k, -k-d)$ sur ℓ , la fibre $q^{-1}\ell \cap Z$ de $q|_Z$ est constituée de k points distincts ou non.

2) L'ensemble T est de codimension ≥ 2 dans Gr . En particulier Z est de codimension ≥ 2 dans F .

Soit ℓ une droite de P_n considérée comme point de Gr . Soit L une résolution libre locale du faisceau gratte-ciel $\mathbb{C}(\ell)$. Soit $K_* = q^* L_* \otimes V_F$.

Considérons les deux suites spectrales des foncteurs hyperdérivées de q_* , de termes

$$'E_2^{a,b} = R^a q_* H_{-b}(K_0) \quad \text{et} \quad ''E_2^{a,b} = H_{-a}(R^b q_* K_0)$$

On a $'E_2^{a,b} = 0$ pour $b \neq 0$ et $'E_2^{a,0} \simeq H^a(\ell, V|_{\ell})$. Comme q est plat, $R^1 q_* K_* = L_* \otimes R^b q_* V_F$. Le terme $''E_2^{a,b}$ s'écrit donc $\text{Tor}_{-a}^b(R^b q_* V_F, \mathbb{C}(\ell))$ et a pour aboutissement $H^*(\ell, V|_{\ell})$.

On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_2^1(R^1 q_* V_F, \mathbb{C}(\ell)) \longrightarrow q_* V_F \otimes \mathbb{C}(\ell) \xrightarrow{i} H^0(\ell, V|_{\ell}) \longrightarrow \text{Tor}_1^1(R^1 q_* V_F, \mathbb{C}(\ell)) \longrightarrow 0$$

Soit T le fermé des points ℓ de S où $\text{Tor}_2^1(R^1 q_* V_F, \mathbb{C}(\ell)) \neq 0$. C' est

l'ensemble des points ℓ tels que la dimension cohomologique de $R^1 q_* V_F$ en ℓ soit supérieure ou égale à 2. D'après [6], T est donc de codimension ≥ 2 . Soient $\ell \notin T$ et $x \in \ell$; la flèche i est alors injective de même que la flèche $i \otimes 1_{\mathbb{C}(x, \ell)}$, du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} [q_* V_F \otimes \mathbb{C}(\ell)] \otimes \mathbb{C}(x, \ell) & \xrightarrow{i \otimes 1_{\mathbb{C}(x, \ell)}} & H^0(\ell, V|_{\ell}) \otimes \mathbb{C}(x, \ell) \\ & \searrow \mathcal{E}_{(x, \ell)} & \downarrow \text{éval}_x \\ & & V_x \otimes \mathbb{C}(x, \ell) \end{array}$$

Notons $(k, -k-d)$ le type de V sur ℓ . L'image de $i \otimes 1_{\mathbb{C}(x, \ell)}$ est de dimension 1 donc engendrée par une section s de $V|_{\ell}$.

La flèche $\mathcal{E}_{(x, \ell)}$ s'annule alors exactement aux k zéros de la section s d'où le 1.

Si $\ell \in T$, la flèche i est nulle donc aussi $\mathcal{E}_{(x, \ell)}$ pour tout x . L'ensemble Z ne contient de fibres entières de q qu'au-dessus de T ; il est donc de codimension ≥ 2 dans F .

b) Rappel.— Soit E un fibré sur une variété X . Soit $P(E)$ le fibré en espaces projectifs des droites de E ; posons $E_{P(E)} = E \times_X P(E)$. Soient $S_{P(E)}$ le sous-fibré universel de $E_{P(E)}$, dont la fibre en un point de $P(E)$ est la droite de E correspondante, et $Q_{P(E)}$ le quotient $E_{P(E)}/S_{P(E)}$. L'espace tangent vertical $T_{\text{Rel}} P(E)$ relatif à la projection sur X est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}(S_{P(E)}, Q_{P(E)})$.

c) L'application $\mathcal{E}|_{F-Z}$ induit une application ε de $F-Z$ dans $P(V)$ commutant aux projections sur P_n uniquement déterminée par la formule $\varepsilon^* S_{P(V)} = \mathcal{E}|_{F-Z} (q^* q_* V_F)$. Si $\ell \in \mathcal{U}$, la droite $\mathcal{E}(x, \ell)$ de V_x est la

trace de l'unique sous-fibré trivial de $V|_{\ell}$ dans V_x .

d) LEMME 2.- Si $d \geq 2$, la dérivée $T_{\text{Rel}} \mathcal{E}$ de \mathcal{E} relative aux projections sur \mathbb{P}_n est nulle au-dessus du point générique de \mathbb{P}_n .

Soit x un point de \mathbb{P}_n par lequel passe une droite $\ell \in \mathcal{U}$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F - Z & \xrightarrow{\mathcal{E}} & P(V) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{P}_n & \end{array}$$

se restreint sur ℓ au diagramme

$$\begin{array}{ccc} F - Z & \xrightarrow{\mathcal{E}|_{\ell}} & P(V|_{\ell}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \ell & \end{array}$$

Il suffit de montrer que $T_{\text{Rel}} \mathcal{E}|_{\ell}$ est nulle.

C'est un morphisme de $T_{\text{Rel}}(F - Z)|_{\ell}$ dans $\mathcal{E}^* T_{\text{Rel}} P(V|_{\ell})$. Comme $F = P(T_{\mathbb{P}_n})$ et $T_{\mathbb{P}_n}|_{\ell} \simeq T\ell \oplus (n-1) \mathcal{O}_{\ell}(1)$ on a d'après b) :

$$T_{\text{Rel}} F|_{\ell} \simeq (n-1) \mathcal{O}_{\ell}(-1) \otimes \mathcal{O}_F|_{\ell}.$$

D'autre part

$$T_{\text{Rel}} P(V|_{\ell}) \simeq \text{Hom}(S_{P(V|_{\ell})}, Q_{P(V|_{\ell})}).$$

Comme $V|_{\ell} \simeq \mathcal{O}_{\ell} \oplus \mathcal{O}_{\ell}(-d)$, on a

$$\mathcal{E}^* S_{P(V|_{\ell})} = \mathcal{E}|_{F-Z|_{\ell}}^{(q^* q_* V_F)} \simeq \mathcal{O}_{\ell} \otimes \mathcal{O}_{F-Z|_{\ell}}$$

et

$$\mathcal{E}^* Q_{P(V|_{\ell})} \simeq \mathcal{O}_{\ell}(-d) \otimes \mathcal{O}_{F-Z|_{\ell}}.$$

Le morphisme $T_{\text{Rel}} \mathcal{E}|_{\ell}$ induit donc un morphisme de $(n-1) \mathcal{O}_{\ell}(-1)$ dans $\mathcal{O}_{\ell}(-d)$, nul car $d \geq 2$. Ceci prouve le lemme 2.

e) Fin de la preuve de la proposition 9 .

Soit $x \in \mathbb{P}_n$ au-dessus duquel ε est constante. L'espace $qp^{-1}\{x\}$ est un espace projectif P de dimension ≥ 1 ; d'après le lemme 1, si x est choisi suffisamment général, Z est de codimension ≥ 2 dans $p^{-1}x$. On a $q^*0_P(\lambda)|_{p^{-1}x - Z} \simeq \varepsilon^*S_{P(V_x)} \simeq 0_{P^{-1}x - Z}$. Les fibrés $q^*0_P(\lambda)$ et $0_{p^{-1}\{x\}}$, isomorphes en dehors des points d'une variété de codimension ≥ 2 , sont isomorphes.

(cf. par exemple §4).

On a donc $\lambda = 0$ et q_*V_P trivial, c.q.f.d.

B) Preuve du théorème de Grauert-Mülich.

Soit V un fibré de rang 2 sur \mathbb{P}_n .

a) V semi-stable $\Rightarrow d = 0$ ou 1 .

Si V est de type générique $(0, -d)$ avec $d \geq 2$, d'après la proposition 9, on peut trouver un morphisme injectif de $0_{\mathbb{P}_n}$ dans V ; d'après la condition 2' de la proposition 5', le fibré V n'est pas semi-stable.

b) $d = 0$ ou 1 = V semi-stable.

Supposons par exemple $d = 0$; soit i un morphisme injectif de $0_{\mathbb{P}_n}(K)$ dans V il se restreint sur une droite générique ℓ en un morphisme $\neq 0$ de $0_{\ell}(k)$ dans 0_{ℓ} d'où $2k \leq c_1(V)$. On conclut alors à l'aide de la condition 2' de la proposition 5'.

§11. Preuve du théorème de Van de Ven (cf. §9).

PROPOSITION 10.- a) Un fibré de rang 2 sans droite de saut sur \mathbb{P}_n avec $n \geq 3$ est décomposable.

b) Tout fibré de rang 2 sans droite de saut sur \mathbb{P}_2 et indécomposable est isomorphe à un $T_{\mathbb{P}_2}(a)$.

Preuve.— Soit V un fibré de rang 2 de type $(0, -d)$ sur toute droite de \mathbb{P}_n .

Nous utiliserons les deux résultats de topologie rappelés ci-après.

PROPOSITION 11.— Soit $G = G(2, \mathbb{C}^{n+1})$ la grassmannienne des 2-plans dans \mathbb{C}^{n+1} (ou des droites de \mathbb{P}_n). On désigne par $w_1 \in H^2(G, \mathbb{Z})$ et $w_2 \in H^4(G, \mathbb{Z})$ les classes de Chern du sous-fibré universel de rang 2 de $G \times \mathbb{C}^{n+1}$ sur G .

Alors

$$\mathbb{Z} [w_1, w_2] / R \simeq H^*(G, \mathbb{Z})$$

où l'idéal R des relations est engendré par des classes homogènes de degré total $\geq 2n$. En particulier, il n'y a pas de relation entre w_1^2 et w_2 , sauf pour $n = 2$, auquel cas $w_2 = w_1^2$.

PROPOSITION 12.— Soit F l'espace des drapeaux $\{h \subset k \subset \mathbb{C}^{n+1}\}$, avec $\dim h = 1$, $\dim k = 2$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}_n \\ q \downarrow & & \\ G & & \end{array}$$

où p et q sont les projections canoniques. On pose $u = c_1(p^* \mathcal{O}(1))$. On a

$$H^*((G, \mathbb{Z})[u] / (u^2 + u w_1 = w_2)) \simeq H^*(F, \mathbb{Z})$$

Démonstration de la proposition 10.—^(*) a) Supposons V sans droite de saut de type de scindage $(0, -d)$, avec $d > 0$. Soit $V' = p^*V$; l'image directe $L = q_*(V')$ est un fibré de rang 1 sur G , dont la classe de Chern s'écrit $c_1(L) = \alpha w_1$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$. De plus, le morphisme canonique sur F

$$\text{ev} : q^*(L) = L' \longrightarrow V'$$

est partout non nul. Par conséquent, le conoyau de ce morphisme est un fibré de rang 1 de classe de Chern, en posant $c_2(E) = c_2 u^2$

(*) Cette démonstration nous a été communiquée par J. Le Potier.

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - du + c_2 u^2}{1 + \alpha w_1} \\
&= 1 - (du + \alpha w_1) + c_2 u^2 + d\alpha u w_1 + \alpha^2 w_1^2 + \dots \\
&= 1 - (du + \alpha w_1) + (d\alpha - c_2) u w_1 + (\alpha^2 w_1^2 - c_2 w_2) + \dots
\end{aligned}$$

Il en résulte
$$\begin{cases} c_2 = d\alpha \\ \alpha^2 w_1^2 - c_2 w_2 = 0 \end{cases}$$

Supposons $n > 2$; alors d'après la prop. 11 , $\alpha = 0$. Par suite, le morphisme ev ci-dessus provient d'un morphisme injectif de fibrés :

$$\mathcal{O} \longrightarrow V$$

et par suite $V \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-d)$.

Supposons $n = 2$. Les relations ci-dessus s'écrivent $c_2 = d\alpha$ et $c_2 = \alpha^2$. Par suite, $\alpha(\alpha - d) = 0$. Si $\alpha = 0$, on termine comme dans le cas $n > 2$: V se scinde. Si $\alpha \neq 0$, $\alpha = d$. On considère alors le morphisme canonique au-dessus de \mathbb{P}_2

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{\varphi} & P(V) \\
& \searrow & \swarrow \\
& \mathbb{P}_2 &
\end{array}$$

défini par le sous-fibré $L' = q^*(L)$ de V' , et tel que $\varphi^* \mathcal{O}_{P(V)}(-1) = L'$. La différentielle verticale $d\varphi : T(F/\mathbb{P}_2) \longrightarrow T(P(V)/\mathbb{P}_2)$ s'interprète comme un morphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1, 2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d, 2d)$$

où l'on a posé $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a, b) = p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(a) \otimes \mathcal{O}_G(b)$. Il en résulte que pour $d > 1$, cette différentielle est nulle ; par suite, L' provient de \mathbb{P}_2 et $\alpha = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Par suite, $d = 1$. On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(0, -1) \longrightarrow V' \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(-1, 1) \longrightarrow 0$$

qui donne par image directe par $p: V \simeq T(-2)$.

b) Supposons $d = 0$. Alors $W = q_* V'$ est un fibré de rang 2 ; on a un isomorphisme sur F

$$ev: q^* W \simeq V'$$

Il en résulte que le fibré W est trivial sur l'espace projectif

$G_{x_0} = \{ \ell \in G, x_0 \in \ell \}$ où x_0 est un point de \mathbb{P}_n . L'isomorphisme ci-dessus donne une trivialisation de V' sur $q^{-1}(G_{x_0})$; le morphisme

$$q^{-1}(G_{x_0}) \longrightarrow \mathbb{P}_n$$

étant l'éclatement de x_0 dans \mathbb{P}_n , on voit que la trivialisation ci-dessus provient d'une trivialisation de V sur \mathbb{P}_n .

D'où la proposition.

§12. Preuve du théorème 3 : calcul du degré de la variété des droites de saut.

a) Supposons donné un fibré V semi-stable avec $C_1(V) = -2$. Soit S l'hyper-surface des droites de saut de V . Le faisceau cohérent $q_* V_F$ (cf. §10) est sans torsion et nul presque partout ; il est donc nul.

Soit $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow V \longrightarrow 0$ une résolution de V par des faisceaux localement libres avec $B = \bigoplus_{i=1}^b O(b_i)$, $b_i < 0$. On en déduit la suite exacte

$$(1) \quad 0 \longrightarrow R^1 q_* A_F \xrightarrow{\mathcal{S}} R^1 q_* B_F \longrightarrow R^1 q_* V_F \longrightarrow 0.$$

D'autre part, la restriction de la résolution de V à une droite ℓ donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(V|_\ell) \longrightarrow H^1(A|_\ell) \longrightarrow H^1(B|_\ell) \longrightarrow H^1(V|_\ell) \longrightarrow 0.$$

De la constance de $h^0(V|_\ell) - h^1(V|_\ell)$ et de $h^1(B|_\ell)$ quand ℓ varie, on déduit que $h^1(A|_\ell)$ est constant et donc $R^1 q_* A_F$ localement libre.

On déduit d'autre part du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(A|_\ell) & \longrightarrow & H^1(B|_\ell) & \longrightarrow & H^1(V|_\ell) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \\ R^1 q_* A_F \otimes C_1(\ell) & \longrightarrow & R^1 q_* B_F \otimes C_1(\ell) & \longrightarrow & R^1 q_* V_F \otimes C_1(\ell) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

que la fibre vectorielle du faisceau $R^1 q_* V_F$ en ℓ est $H^1(\ell, V|_\ell)$. Soit $T = R^1 q_* V_F$; le faisceau \mathcal{T} a pour support S . Comme $S \neq \text{Gr}$ est fermé, les faisceaux $R^1 q_* A_F$ et $R^1 q_* B_F$, localement libres, sont de même rang.

b) Plus généralement, soient S une sous-variété d'une variété G et \mathcal{T} un module cohérent porté par S .

Une résolution $0 \rightarrow L_2 \xrightarrow{\delta} L_1 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0$ de \mathcal{T} par des modules localement libres fournit une section D de $\wedge^{\max}_{L_2} \otimes (\wedge^{\max}_{L_1})^{-1}$ noté D_{L_1, L_2} .

LEMME 1.- a) Le fibré D_{L_1, L_2} ne dépend pas, à isomorphisme près, de la résolution choisie.

b) Si \mathcal{D} est le diviseur des zéros de D , si $\ell \in S$ et si X est un disque ouvert centré en ℓ coupant S transversalement, la multiplicité $\mu(\ell)$ de \mathcal{D} en ℓ est égale à $h^0(\mathcal{T}|_X)$.

Le a) découle du b).

Preuve du b).— Comme X est transversal à S la suite exacte

$$0 \rightarrow L_2 \xrightarrow{\delta} L_1 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0$$

se restreint à X . En trivialisant L_1 , L_2 , on obtient

$$0 \rightarrow r^0_X \xrightarrow{\epsilon} r^0_X \rightarrow \mathcal{T}|_X \rightarrow 0.$$

L'entier $\mu(\ell)$ est l'ordre d'annulation de $\det \epsilon$ en 0 . On en déduit, par récurrence par exemple, l'égalité $\mu(\ell) = h^0(\mathcal{T}|_X)$.

c) Dans le cas qui nous préoccupe, la résolution

$$0 \rightarrow R^1 q_* A_F \rightarrow R^1 q_* B_F \rightarrow R^1 q_* V_F \rightarrow 0$$

donne un diviseur à support S , indépendant de la résolution de V choisie, et, dont la multiplicité en un point $\ell \in S$ est $h^0(R^1 q_* V_F|_X)$ où X est un disque ouvert coupant S transversalement en ℓ .

Soient $z_1 \dots z_{2(n-1)}$ des coordonnées locales en ℓ telles que $X = \{ |z_1| < 1, z_2 = \dots = z_{2(n-1)} = 0 \}$

On a

$$h^0(\mathcal{C}|_X) = h^0\left(\frac{\mathcal{C}}{(z_2, \dots, z_{2(n-1)})\mathcal{C}}\right) \geq h^0\left(\frac{\mathcal{C}}{(z_1 \dots z_{2(n-1)})\mathcal{C}}\right)$$

$$h^0\left(\frac{\mathcal{C}}{(z_1, \dots, z_{2(n-1)})\mathcal{C}}\right) = h^0(\mathcal{C} \otimes \mathcal{O}(\ell)) = h^1(V|_\ell) \quad .$$

Si $(k-1, -k-1)$ est le type de V sur ℓ , on a $h^1(V|_\ell) = k$ d'où l'inégalité $d(\ell) \leq 2\mu(\ell)$ qui démontre la 2ème assertion du théorème 3.

d) Calculons le degré du diviseur construit en b). Soit ℓ une droite ordinaire de V ; si P est un plan contenant ℓ , le fibré $V|_P$ est semi-stable d'après le théorème 1. D'autre part, l'ensemble P^* des droites de P est une sous-variété de degré 1 de $\text{Gr}(1, n)$ (en effet $0_{\text{Gr}(1, n)}(1)|_{P^*} \simeq 0_{P^*}(1)$). Le degré de S dans $\text{Gr}(1, n)$ est donc égal au degré de la variété S_P des droites de saut de $V|_P$: on est ramené au cas $n = 2$.

e) Pour $n = 2$ le fibré A est décomposable.

Rappelons en effet le lemme des syzygies pour un module gradué.

Soient K un corps et $\Lambda = K[x_0 \dots x_p]$ l'anneau gradué des polynômes à $(p+1)$ -variables.

Soit M un module de type fini gradué sur Λ . Pour toute résolution projective L de longueur p de M , L_p est libre sur Λ .

Soit Γ le foncteur qui à un faisceau cohérent \mathcal{F} sur \mathbb{P}_2 associe le $C_1[x_0, x_1, x_2]$ -module gradué $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{F}(n))$. Le foncteur Γ est exact, définit une équivalence de catégories et transforme les faisceaux décomposables en somme de fibrés en droites, en Λ -modules libres. Il résulte du lemme énoncé plus haut que le fibré A du a) est décomposable sur \mathbb{P}_2 .

f) Notons $A = \bigoplus_i 0_{\mathbb{P}_2}(a_i)$ $B = \bigoplus_j 0_{\mathbb{P}_2}(b_j)$, $a_i, b_j < 0$.

Comme

$$\deg S = C_1(R^1 q_* B_F) - C_1(R^1 q_* A_F)$$

on a

$$\deg S = \sum_j C_1(R^1_{q_*} O_F(b_j)) - \sum_i C_1(R^1_{q_*} O_F(a_i)) \quad .$$

Calculons $C_1(R^1_{q_*} O_F(m))$ avec $m < 0$. Soient M la variété produit $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2^*$ et P et Q les projections. La sous-variété F de π est une hypersurface dont le faisceau d'idéaux est $P^* O_{\mathbb{P}_2}(-1) \otimes Q^* O_{\mathbb{P}_2^*}(-1)$. On a donc sur π la suite exacte

$$0 \longrightarrow P^* O_{\mathbb{P}_2}(m-1) \otimes Q^* O_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \longrightarrow P^* O_{\mathbb{P}_2}(m) \longrightarrow O_F(m) \longrightarrow 0$$

En prenant les images directes par Q on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow R^1_{q_*} O_F(m) \longrightarrow R^2_{Q_*} P^* O_{\mathbb{P}_2}(m-1) \otimes O_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \longrightarrow R^2_{Q_*} P^* O_{\mathbb{P}_2}(m) \longrightarrow 0$$

$$R^2_{Q_*} P^* O_{\mathbb{P}_2}(m-1) = h^2(O_{\mathbb{P}_2}(m-1)) \cdot O_{\mathbb{P}_2^*} \quad .$$

Donc
$$C_1(R^1_{q_*} O_F(m)) = -\frac{1}{2} m(m+1) \quad .$$

La formule $c(B) = c(A)c(V)$ liant les a_i, b_j aux classes de Chern de V donne alors $\deg S = c_2(V) - 1$ qui est le résultat annoncé pour $c_1 = -2$. Pour c_1 quelconque on remarque que $c_2(V) - \frac{c_1}{4}(V)$ ne change pas si l'on tord V .

§13. Classification des fibrés semi-stables dont l'hypersurface des droites de saut est de degré 1.

D'après le théorème 3, cela revient à classifier les fibrés semi-stables V dont les classes de Chern sont $c_2 = 1$ et $c_1 = 0$. On notera N_n l'ensemble des classes d'isomorphismes de tels fibrés.

A) Cas $n = 2$.

Une droite de \mathbb{P}_2^* représente l'ensemble des droites de \mathbb{P}_2 passant par un point x . L'application de N_2 dans l'ensemble des droites de \mathbb{P}_2^* qui à un fibré associe le diviseur de ses droites de saut définit donc une application S de N_2 dans \mathbb{P}_2 par composition.

PROPOSITION 13.- 1) Les fibrés semi-stables sur \mathbb{P}_2 vérifiant $c_2 = 1$ et $c_1 = 0$ sont instables.

2) L'application S est bijective.

Posons $x_0 = S(V)$. Comme la variété Σ des droites de saut V est lisse, on a pour tout $\ell \in \Sigma$, i.e. pour toute droite ℓ de \mathbb{P}_2 passant par x_0 , $\mu_\Sigma(\ell) = 1$. Il résulte du théorème 3 (§9) que pour tout $\ell \in \Sigma$, $d(\ell) = 2$. Soit X la variété des couples $(x, \ell) \in \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2^*$ tels que $x \in \ell$ et que $\ell \in \Sigma$. Notons $p : X \rightarrow \mathbb{P}_2$ et $q : X \rightarrow \Sigma$ les applications induites par les projections. La variété X peut encore se décrire comme l'éclatement de x_0 dans \mathbb{P}_2 . Posons $D = p^{-1}(x_0)$. L'application q est fibration en droite projective qui induit un isomorphisme de D sur Σ . Pour tout $\ell \in \Sigma$, on a $V|_\ell \simeq \mathcal{O}_\ell(1) \oplus \mathcal{O}_\ell(-1)$. Par suite $q_*p^*V(-1)$ est un fibré de rang 1 sur Σ donc de la forme $\mathcal{O}_\Sigma(-\lambda)$. Le morphisme d'évaluation $ev : q^*\mathcal{O}_\Sigma(-\lambda) \rightarrow p^*V(-1)$ est un isomorphisme sur un sous-fibré de rang 1 de $p^*V(-1)$. Le fibré quotient est de rang 1 et on a donc une suite exacte de fibrés

$$0 \rightarrow q^*\mathcal{O}_\Sigma(-\lambda) \rightarrow p^*V(-1) \rightarrow q^*\mathcal{O}_\Sigma(\lambda') \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(\nu) \rightarrow 0.$$

Comme la restriction de $p^*V(-1)$ à D est un fibré trivial de rang 2, on a $\lambda = \lambda'$ et $\lambda \geq 0$. De même en se restreignant à une fibre de q , on constate que $\nu = -2$. Notons v et d les classes d'équivalences rationnelles des fibres de q et de D . On a $c_1(q^*\mathcal{O}_\Sigma(-\lambda)) = -\lambda v$, $c_1(p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-2)) = -2v - 2d$. Comme $v^2 = 0$ et $v.d = 1$, on a

$$2 = c_2 p^*V(-1) = 2\lambda$$

et par suite $\lambda = 1$. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow q^*\mathcal{O}_\Sigma(-1) \rightarrow p^*V(-1) \rightarrow q^*\mathcal{O}_\Sigma(1) \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-2) \rightarrow 0.$$

Comme $R^1 p_* q^*\mathcal{O}_\Sigma(-1) = 0$, on en déduit une suite exacte

$$(*) \quad 0 \rightarrow p_* q^*\mathcal{O}_\Sigma(-1) \rightarrow V(-1) \rightarrow Q \rightarrow 0$$

où $p_*q^*0_{\Sigma}(-1)$ et Q sont localement libres de rang 1 en dehors de x_0 .
 Montrons que $p_*q^*0_{\Sigma}(-1)$ est un faisceau normal. Il suffit pour cela de montrer que $H^0(\mathbb{P}_2, p_*q^*0_{\Sigma}(-1)) = H^0(\mathbb{P}_2 - \{x_0\}, p_*q^*0_{\Sigma}(-1)) = 0$. Mais $p_*q^*0_{\Sigma}(-1)|_{\mathbb{P}_2 - \{x_0\}}$ est isomorphe à $0_{\mathbb{P}^2}(-1)|_{\mathbb{P}_2 - \{x_0\}}$ et comme $0_{\mathbb{P}^2}(-1)$ est normal, on a $H^0(\mathbb{P}_2 - \{x_0\}, 0_{\mathbb{P}^2}(-1)) = H^0(\mathbb{P}_2, 0_{\mathbb{P}^2}(-1)) = 0$. On en déduit les égalités cherchées car $p_*q^*0_{\Sigma}(-1)$ est sans torsion. Par suite (§4), $p_*q^*0_{\Sigma}(-1)$ est localement libre et comme il est isomorphe à $0_{\mathbb{P}_2}(-1)$ sur $\mathbb{P}_2 - \{x_0\}$, il est isomorphe à $0_{\mathbb{P}^2}(-1)$. En tensorisant (*) par $0_{\mathbb{P}^2}(-1)$ on obtient donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow 0_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{\sigma} V \longrightarrow Q' \longrightarrow 0,$$

et σ est une section qui ne s'annule qu'en x_0 avec la multiplicité 1 car $c_2(V) = 1$. Soit \bar{Q}' le bidual de Q' . Comme Q' est sans torsion, on a une injection de Q' dans \bar{Q}' , et comme Q' est localement libre en dehors de x_0 , le quotient $R = \bar{Q}'/Q'$ a pour support x_0 . On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow 0_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{\sigma} V \longrightarrow \bar{Q}' \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Comme le support de R est de codimension 2, cette suite exacte fournit un isomorphisme $\bigwedge^2 V \simeq 0_{\mathbb{P}^2} \otimes_{0_{\mathbb{P}^2}} \bar{Q}'$ et comme $c_1(V) = 0$, $0_{\mathbb{P}^2} \simeq \bigwedge^2 V \simeq \bar{Q}'$.

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow 0_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{\sigma} V \longrightarrow 0_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Comme x_0 est un zéro simple de σ , on constate que par un calcul en coordonnées locales que $R = \mathbb{C}(x_0)$.

Il en résulte tout d'abord que V est instable car il possède une section. Ensuite la construction précédente associe à V une extension, élément de $\text{Ext}^2(\mathbb{C}(x_0), 0_{\mathbb{P}^2})$, définie à un facteur scalaire près. Comme $\text{Ext}^2(\mathbb{C}(x_0), 0_{\mathbb{P}^2}) \simeq \mathbb{C}$, on en déduit que S est injective. Enfin pour $x \in \mathbb{P}_2$, notons I_x l'idéal des fonctions qui s'annulent en x . On a $\text{Ext}^1(I_x, 0_{\mathbb{P}^2}) = \mathbb{C}_1$, d'où une extension

$$0 \longrightarrow 0_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow V' \longrightarrow I_x \longrightarrow 0 \quad .$$

On constate que V' est un fibré de rang 2 tel que $c_1(V') = 0$, $c_2(V') = 1$ et par suite S est surjective.

B) Etude des hyperplans de $\text{Gr}(1, n)$ pour $n \geq 3$.

Rappelons (§2) qu'un hyperplan de Gr est donné par définition par une section

B du fibré $\Lambda^2 S_{\text{Gr}}^*$ où S_{Gr} désigne le sous-fibré universel de rang 2 de $\mathbb{C}^{n+1}_{\text{Gr}}$. Si Pluc désigne le plongement $\text{Gr} \hookrightarrow P(\Lambda^2 \mathbb{C}^{n+1})$ donné au §2 , on a

$$\Lambda^2 S_{\text{Gr}}^* = \text{Pluc}^* 0_{P(\Lambda^2 \mathbb{C}^{n+1})}(1) \quad \text{et} \quad H^0(\Lambda^2 S_{\text{Gr}}^*) \simeq \Lambda^2 \mathbb{C}^{n+1*} \quad .$$

Soit B une section $\neq 0$ de $\Lambda^2 S_{\text{Gr}}^*$. On désignera par \tilde{B} la forme bilinéaire alternée sur \mathbb{C}^{n+1} associée. Notons $[P]$ le point de $\text{Gr}(1, n)$ associé à un plan P de \mathbb{C}^{n+1} .

a) LEMME 1.- Une droite ℓ de \mathbb{C}^{n+1} est dans le noyau de \tilde{B} si et seulement si, pour tout plan P contenant ℓ , on a $B([P]) = 0$.

Il suffit en effet de constater que, si x et y sont deux vecteurs de \mathbb{C}^{n+1} dans un plan P , la valeur sur le couple (x, y) de la forme bilinéaire alternée $B([P])$ est $\tilde{B}(x, y)$.

b) LEMME 2.- Si un hyperplan de Gr est le diviseur des droites de saut d'un fibré semi-stable et si $n \geq 3$, la forme bilinéaire alternée associée sur \mathbb{C}^{n+1} est non dégénérée.

Preuve ^(*) .- Soit V semi-stable tel que $S(V)$ soit l'hyperplan H défini par une forme \tilde{B} et que $c_1(V) = 0$.

Si le noyau \tilde{B} contient une droite $L \subset \mathbb{C}^{n+1}$, il existe un sous-espace E de dimension 4 , contenant L et telle que \tilde{B}/E soit non nulle. Le fibré $V/P(E)$ est semi-stable (Th.1), et il suffit donc de démontrer le lemme lorsque $n = 3$.

(*) Démonstration communiquée par J.-L. VERDIER.

D'après le lemme 1, le noyau de \tilde{B} est un sous-espace de dimension 2 de \mathbb{C}^4 qui correspond à une droite $a \subset \mathbb{P}_3$. La variété des droites de saut est alors la variété des droites qui rencontrent a . C'est un cône quadratique C de dimension 3 de sommet a , de base une quadrique lisse de dimension 2. Notons $\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ la variété lisse obtenue en éclatant a dans C . Le morphisme π permet d'identifier $C - a$ à $\tilde{C} - \pi^{-1}(a)$. Posons $T = \pi^{-1}(a)$. Notons X la variété des couples $(X, \tilde{\ell})$ où $x \in \mathbb{P}_3$, $\tilde{\ell} \in \tilde{C}$ et $x \in \pi(\tilde{\ell})$. Notons $p : X \rightarrow \mathbb{P}_3$ et $q : X \rightarrow \tilde{C}$ les projections. Pour toute droite ℓ de \mathbb{P}_3 , $\ell \cap a = \emptyset$, notons $Q_\ell \subset C - a = \tilde{C} - T$ la quadrique des droites de \mathbb{P}_3 qui rencontrent a et ℓ .

Toutes les droites $\ell \neq a$, $\ell \cap a \neq \emptyset$, sont des points lisses de C . D'après le théorème 3, pour toutes ces droites on a $V/\ell = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1)$. Par suite pour tous les $\tilde{\ell}$ de $\tilde{C} - T$, $V(-1)/\pi(\tilde{\ell})$ est isomorphe à $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)$. Donc $q_* p^* V(-1)$ est un faisceau de rang 1 sur \tilde{C} , sans torsion et normal car q est une fibration et X est lisse. Donc $L = q_* p^* V(-1)$ est un faisceau localement libre de rang 1 (prop. 3). On en déduit une suite exacte de faisceaux sur X :

$$0 \rightarrow q^* L \xrightarrow{\text{ev.}} p^* V(-1) \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Le faisceau M est sans torsion de rang 1. Il s'injecte dans son bidual M^{**} qui est localement libre de rang 1. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow q^* L \xrightarrow{\text{ev.}} p^* V(-1) \rightarrow M^{**} \rightarrow R \rightarrow 0,$$

et comme le morphisme d'évaluation ne s'annule qu'en codimension 2, le support de R est de codimension ≥ 2 , contenu dans $q^{-1}(T)$. Comme

$$c_1(p^* V(-1)) = c_1(p^* \mathcal{O}(-2)), \text{ on a } M^{**} = q^* L^{-1} \otimes p^* \mathcal{O}(-2). \text{ D'où une suite exacte } (1) \quad 0 \rightarrow q^* L \rightarrow p^* V(-1) \rightarrow q^* L^{-1} \otimes p^* \mathcal{O}(-2) \rightarrow R \rightarrow 0.$$

Soit ℓ une droite de \mathbb{P}_3 , $\ell \not\subset C$. Alors $p^{-1}(\ell)$ est une quadrique qui se projette isomorphiquement sur $Q_\ell \subset \tilde{C}$ et qui est disjointe de $q^{-1}(T)$. Par

suite la restriction de R à $p^{-1}(\ell)$ est nulle. On a donc une suite exacte sur $p^{-1}(\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell$:

$$(2) \quad 0 \longrightarrow q^*L/p^{-1}(\ell) \longrightarrow p^*V(-1)/p^{-1}(\ell) \longrightarrow q^*L^{-1} \otimes p^*O(-2)/p^{-1}(\ell) \longrightarrow 0 .$$

LEMME 3 .- Soient K une quadrique lisse de dimension 2 , E un fibré trivial de rang 2 sur K , $N \subset E$ un sous-fibré de rang 1 . Alors N est trivial sur un système de génératrices de K .

Un tel sous-fibré fournit une application $K \xrightarrow{\gamma} \mathbb{P}_1$. Si γ est constante, N est trivial, sinon il existe deux points distincts y_1 , y_2 dans $\gamma(K)$. Soient g et g' les classes d'équivalences rationnelles des génératrices de K . Pour tout $y \in \mathbb{P}_1$, la classe d'équivalence rationnelle du diviseur $\gamma^{-1}(y)$ ne dépend pas de y . On a donc $[\gamma^{-1}(y_1)] = [\gamma^{-1}(y_2)] = \alpha g + \beta g'$, et comme $\gamma^{-1}(y_1) \cap \gamma^{-1}(y_2) = \emptyset$ on a, dans l'anneau de Chow de K , $(\alpha g + \beta g')^2 = 0$. Ce qui donne $2\alpha\beta gg' = 0$. Donc α ou β est nul, d'où le lemme 3 .

Notons g_π la classe d'équivalence rationnelle du système de génératrices sur $p^{-1}(\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell$ telle que $p^*O(-1)/p^{-1}(\ell) = 0_{p^{-1}(\ell)}(g_\pi)$, et g_p la classe d'équivalence de l'autre système. On a $L/\mathbb{Q}_\ell = 0(\alpha g_p + \beta g_\pi)$ pour deux entiers α et β convenables. Comme ℓ est une droite ordinaire de V , V/ℓ est un fibré trivial de rang 2 . La suite (2) donne donc une suite exacte de fibrés

$$0 \longrightarrow 0_{\mathbb{Q}_\ell}(\alpha g_p + \beta g_\pi + g_\pi) \longrightarrow 0_{\mathbb{Q}_\ell}^2 \longrightarrow 0_{\mathbb{Q}_\ell}(-\alpha g_p - \beta g_\pi - g_\pi) \longrightarrow 0 .$$

On voit donc (lemme 3) que deux cas seulement sont possibles : ou bien

$$L/\mathbb{Q}_\ell \simeq 0_{\mathbb{Q}_\ell}(\beta g_\pi) , \text{ ou bien } L/\mathbb{Q}_\ell \simeq 0_{\mathbb{Q}_\ell}(\alpha g_p - g_\pi) .$$

Rappelons que l'anneau de Chow de \mathbb{Q}_ℓ est

$$A^*(\mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Z}[g_p, g_\pi] / (g_p^2, g_\pi^2) ,$$

que \tilde{C} est le complété projectif d'un fibré vectoriel de rang 1 sur \mathbb{Q}_ℓ de bidegré (1,1) et que par suite

$$A^*(\tilde{C}) = \mathbb{Z}[g_p, g_\pi, t] / (g_p^2, g_\pi^2, t^2 + t(g_p + g_\pi))$$

où t est la classe de T , et qu'enfin X est un fibré projectif associé à un fibré vectoriel de classe de Chern $W_1 = t + g_p + g_\pi$, $W_2 = tg_\pi + g_p g_\pi$ et qu'on a donc

$$A^*(X) = A^*(\tilde{C})[h] / (h^2 - W_1 h + W_2)$$

où h est la classe de l'image inverse des hyperplans de \mathbb{P}_3 .

D'après ce qui précède, on voit que deux cas seulement sont possibles pour L ; ou bien $L = \beta g_\pi + \gamma t$, ou bien $L = \alpha g_p - g_\pi + \gamma t$. Enfin comme R est contenu dans $q^{-1}(T)$, il en résulte que sa classe $[R] \in A^2(X)$ est du type

$$[R] = -t.(mg_p + ng_\pi + rt) \quad .$$

On a $c_2(V(-1)) = 2h^2$. Donc $c_2(p^*V(-1)) = 2h^2$. De la suite exacte (1) résulte l'égalité

$$-[R] + c_2(p^*V(-1)) = -c_1(L)^2 - 2hc_1(L) \quad .$$

Remarquons que tg_p , tg_π , $g_p g_\pi$, ht , hg_p , hg_π forment une base de $A^2(X)$. Compte-tenu des relations le premier membre s'écrit

$$\begin{aligned} -[R] + c_2(p^*V(-1)) &= (m-r)tg_p + (n-r-2)tg_\pi - 2g_p g_\pi \\ &\quad + 2ht + 2hg_p + 2hg_\pi \quad . \end{aligned}$$

Le dernier membre s'écrit, dans le premier cas

$$-c_1(L)^2 - 2hc_1(L) = \gamma^2 tg_p + \gamma(\gamma - 2\beta)tg_\pi - 2\gamma ht - 2\beta hg_\pi$$

d'où une contradiction car $g_p g_\pi$ ne figure pas dans le dernier membre. Par

suite $L = \alpha g_p - g_\pi + \gamma t$. On a donc

$$\begin{aligned} -c_1(L)^2 - 2hc_1(L) &= \gamma^2 tg_p + \gamma^2 tg_\pi + 2\alpha g_p g_\pi \\ &\quad + 2\gamma ht - 2\alpha hg_p + hg_\pi \end{aligned}$$

d'où encore une contradiction car les coefficients de hg_π sont distincts.

C) Cas $n \geq 4$.

PROPOSITION 14.- Il n'existe pas de fibré semi-stable sur \mathbb{P}_n avec $n \geq 4$ tel que $c_2 = 1$ et $c_1 = 0$.

Supposons que V soit un fibré semi-stable sur \mathbb{P}_n vérifiant $c_2 = 1$ et $c_1 = 0$.

a) Si $n \geq 3$, d'après le B) lemme 2, il définit une forme alternée non dégénérée sur \mathbb{C}^{n+1} ; il n'existe pas de telle forme si n est pair; donc n est impair.

b) Soit alors ℓ une droite ordinaire de V ; d'après le théorème 1, si un hyperplan H contient ℓ , on a $V|_H$ semi-stable; $V|_H$ vérifie aussi $c_2(V|_H) = 1$ et $c_1(V|_H) = 0$.

D'après a), comme $n - 1$ est pair, il doit être ≤ 2 . On a donc $n \leq 3$ d'où la proposition 14.

D) Cas $n = 3$.

Notons E l'espace vectoriel \mathbb{C}^4 (qui peut d'ailleurs être remplacé par un espace vectoriel complexe de dimension 4).

L'ensemble des vecteurs décomposables de $\wedge^2 E^*$ définit une quadrique de $P(\wedge^2 E^*)$ dont le complémentaire est un ouvert \mathcal{H} affine de dimension 5. En vertu du lemme 2, l'application qui à un fibré associe le diviseur de ses droites de saut, définit une application S de N_3 dans \mathcal{H} .

PROPOSITION 15.- 1) Tout fibré semi-stable sur \mathbb{P}_3 vérifiant $c_2 = 1$ et $c_1 = 0$ est stable.

2) L'application S est bijective.

COROLLAIRES.- a) L'opération par transport de structure de $PGl(E)$ sur N_3 est transitive.

b) Le stabilisateur d'un point de N_3 pour cette action est $P\,Sp(E)$.
($Sp(E)$ désigne le groupe symplectique de E).

Commentaires.— L'application S munit donc N_3 d'une structure de variété analytique dont il est facile de voir qu'elle coïncide avec celle de Maruyama (cf. exposé ultérieur). En fait, on va montrer mieux : il existe une famille de fibrés $(V_B)_{B \in \mathcal{H}}$ qui est une déformation universelle de chacun des éléments de N_3 .

Remarquons aussi que la compactification naturelle de N_3 ne s'obtient pas en lui rajoutant des fibrés semi-stables.

a) Preuve de 15.1 .

Soit V un fibré vérifiant $c_2 = 1$ et $c_1 = 0$. Soit $s \neq 0 \in H^0(V)$; montrons que V n'est pas semi-stable. Comme $c_2 = 1$, la section s s'annule au moins en un point x . Si ℓ est une droite passant par x , la restriction de s à ℓ divisée par "l'équation" du point x sur la droite ℓ donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(1) \longrightarrow V|_\ell \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(-1) \longrightarrow 0 .$$

Le fibré V est donc de type $(1, -1)$ sur toute droite passant par x ; il n'est pas semi-stable d'après le lemme 2 .

b) Preuve de 15.2 .

On va construire une application réciproque à S .

b) α) Soit B une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur E ; elle définit un isomorphisme noté encore B de $E_{P(E)} = E \otimes \mathcal{O}_{P(E)}$ dans $E_{P(E)}^* = \text{Hom}(E, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{P(E)}$.

Notons i l'injection canonique du sous-fibré universel $S_{P(E)}$ (isomorphe à $\mathcal{O}_{P(E)}(-1)$) dans $E_{P(E)}$ et considérons la suite d'applications

$$S_{P(E)} \xrightarrow{i} E_{P(E)} \xrightarrow{B} E_{P(E)}^* \xrightarrow{t_i} S_{P(E)}^*$$

La flèche t_i (transposée de i) est surjective.

DÉFINITION.— Un complexe $L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow L_{-1}$ de fibrés où les première et seconde

flèches sont respectivement injective et surjective est une monade.

La cohomologie de ce complexe est un fibré de rang : $\text{rg} L_0 - \text{rg} L_1 - \text{rg} L_{-1}$ ([2]).

La donnée de B fournit donc la monade $S_{P(E)} \xrightarrow{i} E_{P(E)} \xrightarrow{t \circ i_B} S_{P(E)}^*$.
Sa cohomologie est un fibré V de rang 2.

On identifiera désormais $O_{P(E)}(-1)$ et $S_{P(E)}$.

b) β) LEMME 4.- 1) Le fibré V_B est stable et vérifie $c_2 = 1$ et $c_1 = 0$.

2) L'hypersurface des droites de saut de V_B est l'hyperplan de $\text{Gr}(1,3)$ défini par B .

Preuve β 1)..- Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & O_{P(E)}(-1) & \longrightarrow & K = \text{Ker } t \circ i_B & \longrightarrow & V_B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & O_{P(E)}(-1) & \longrightarrow & E_{P(E)} & \longrightarrow & Q = \frac{E_{P(E)}}{O_{P(E)}(-1)} \simeq T_{P(E)}(-1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & O_{P(E)}(1) & = & O_{P(E)}(1) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

(déballage de la monade)

Toutes ses lignes sont exactes.

On calcule facilement $c_1(V_B) = 0$ et $c_2(V_B) = 1$. La deuxième horizontale donne $h^0(Q) = 4$; la deuxième verticale donne alors $h^0(V_B) = 0$.

Ainsi V_B est stable.

2) Notons pour $x \in P(E)$ et $\ell \in \text{Gr}(1,3)$, d_x la droite de E correspondant à x et F_ℓ le plan de E correspondant à ℓ .

La droite ℓ , considérée comme point de Gr , est dans l'hyperplan défini par B si et seulement si $F_\ell \cap F_\ell^\perp \neq \{0\}$ (le signe \perp désigne l'orthogonalité pour la forme B). Il suffit donc pour montrer 2 de prouver

$$3) \quad E = F_\ell \oplus F_\ell^\perp \hookrightarrow V_B|_\ell \simeq 2\mathcal{O}_\ell.$$

\Rightarrow Supposons $E = F_\ell \oplus F_\ell^\perp$; comme $K_x = d_x^\perp$, on a pour tout $x \in \ell$, $K_x = d_x \oplus F_\ell^\perp$. On a donc l'isomorphisme $K|_\ell \simeq S_{P(E)}|_\ell \oplus (F_\ell^\perp \otimes \mathcal{O}_\ell)$. L'injection i de $S_{P(E)}$ dans K se restreint sur ℓ au plongement $S_{P(E)}|_\ell \hookrightarrow S_{P(E)}|_\ell \oplus (F_\ell^\perp \otimes \mathcal{O}_\ell)$. D'après la première horizontale du déballage de la monade de B , on a $V_B|_\ell \simeq F_\ell^\perp \otimes \mathcal{O}_\ell \simeq 2\mathcal{O}_\ell$.
 \Leftrightarrow s'obtient en remontant le raisonnement de \Rightarrow .

b) γ) Fin de la preuve de 15.2.

Notons \mathcal{V} le morphisme de \mathcal{H} dans N_3 qui à une forme B associe la classe dans N_3 du fibré V_B . D'après le lemme 4, il suffit de prouver le

LEMME 5.- Si un fibré V vérifie $c_2 = 1$ et $c_1 = 0$ et s'il est stable, il est isomorphe au fibré V_B obtenu en α avec la forme B associée à V .

Soit V vérifiant les hypothèses ci-dessus.

b) γ 1) SOUS-LEMME 1.- On a $h^1(V(k)) = 0$ pour $k \neq -1$, $h^1(V(-1)) = 1$.

Preuve.- Soit P un plan de $P(E)$; d'après la proposition 13 (§14), le fibré

$V|_P$ est extension d'un I_x ($x \in P$). La résolution

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 2\mathcal{O}_P(1) \longrightarrow I_x(2) \longrightarrow 0$$

donne $h^1(I_x(-1)) = 1$.

La suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow V|_P \longrightarrow I_x \longrightarrow 0$ donne alors $h^1(V(-1)|_P) = 1$.

La suite exacte $0 \longrightarrow V(-1) \longrightarrow V \longrightarrow V|_P \longrightarrow 0$ donne enfin $h^1(V(-1)) \leq 1$ (car $h^1(V(-1)) + h^1(V - 3) = 1$) et l'injection

$$0 \longrightarrow H^0(V|_P) \longrightarrow H^1(V(-1))$$

Comme $h^0(V|_P) = 1$ (prop. 13, §13), on a $h^1(V(-1)) \geq 1$ d'où $h^1(V(-1)) = 1$; la nullité des $h^1(V(k))$ pour $k \neq -1$ s'en déduit aussitôt par récurrence.

b) γ 2) Preuve du lemme 5.— Considérons le fibré $Q \simeq T_{P(E)}(-1)$ de D
 b) β 1. En tensorisant par V la suite exacte
 $0 \longrightarrow O_{P(E)}(-1) \longrightarrow E_{P(E)} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$, on obtient d'après le sous-lemme 1 et la stabilité de V l'égalité $h^0(V \otimes Q) = 1$.

Soit $s \neq 0 \in H^0(V \otimes Q)$; par composition avec l'isomorphisme $V \simeq V^*$, elle induit un morphisme de faisceaux s de $O(V)$ dans $O(Q)$.

SOUS-LEMME 2.- Le rang de \tilde{s} est 2 .

Supposons en effet que l'image de \tilde{s} soit un faisceau \mathcal{H} de rang 1 . Comme \mathcal{H} est sans torsion et V stable, on a $c_1(\mathcal{H}) > 0$ (prop. 5, §6) . Comme \mathcal{H}^* est un fibré de classe de Chern $-c_1(\mathcal{H})$ (prop. 3, §4) , on déduit de la suite exacte $0 \longrightarrow O_{P(E)}(-1) \longrightarrow E_{P(E)} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ l'égalité $h^0(\mathcal{H}^* \otimes Q) = 0$; cela contredit le fait que \mathcal{H} soit un sous-faisceau de Q d'où le sous-lemme.

D'après le sous-lemme 2 , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow O(V) \xrightarrow{s} O(Q) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{G} est un faisceau sans torsion de rang 1 ; en dualisant on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^* \longrightarrow O(Q^*) \longrightarrow O(V) \longrightarrow 0 .$$

Or d'après le sous-lemme 1, $h^1(V(k)) \neq 0$ équivaut à $k = -1$. On a donc

$\mathcal{G} \simeq O_{P(E)}(-1)$ et la suite exacte $0 \longrightarrow O_{P(E)}(-1) \longrightarrow Q^* \longrightarrow V_B \longrightarrow 0$ donne l'isomorphisme $V \simeq V_B$. Le lemme 5 est ainsi prouvé.

c) Remarques.— 1) Si V vérifie $c_2 = 1$ et $c_1 = 0$, les droites de $H^0(V(1))$ sont classifiées par les couples de droites orthogonales dans \mathbb{P}_3 pour la forme alternée associée à V .

2) Dans la terminologie de Barth, un fibré V_B est appelé "a null correlation bundle".

Une corrélation C de \mathbb{P}_3 est en effet un isomorphisme linéaire de \mathbb{P}_3 dans \mathbb{P}_3^* ; c'est donc la donnée d'une forme bilinéaire non dégénérée B de \mathbb{C}^4 . L'application C est "null" si, pour tout $x \in \mathbb{P}_3$, on a $x \in C(x)$, c'est-à-dire si et seulement si B est alternée.

§14. Preuve du théorème 4 : restriction d'un fibré stable à un hyperplan.

Comme il résulte du théorème 1, la restriction d'un fibré semi-stable à un hyperplan de \mathbb{P}_n contenant une droite ordinaire est semi-stable.

PROPOSITION 16.- 1) Sur \mathbb{P}_n avec $n \geq 4$, la restriction d'un fibré stable à l'hyperplan générique de \mathbb{P}_n est stable.

2) Sur \mathbb{P}_3 ce résultat est vrai si et seulement si le fibré V vérifie $4c_2(V) - c_1^2(V) \neq 4$.

Remarque.— Dans le cas $4c_2(V) - c_1^2(V) = 4$, on connaît le comportement de V sur les plans de \mathbb{P}_3 (§13 A et D).

Preuve de la proposition 16.— Le cas $c_1(V)$ impair rentrant dans le cas semi-stable, supposons que V soit un fibré stable sur \mathbb{P}_n , avec $n \geq 3$ et $c_1(V) = 0$. S'il existe un hyperplan sur lequel V est stable, ce sera vrai pour presque tout hyperplan d'après la proposition 7 (§8).

Supposons donc V instable sur tout hyperplan.

a) LEMME 1.- Pour tout hyperplan H sur lequel V est semi-stable, on a $h^0(V|_H) = 1$. Pour tout $\sigma \in H^0(V, H)$, $\sigma \neq 0$, le lieu des zéros de σ est de codimension 2 dans H .

Le fibré $V|_H$ a au moins une section $s \neq 0$; notons $Y = \{s = 0\}$.

a) α) $Y \neq \emptyset$. Si Y est vide, on a $c_2(V|_H) = 0$ d'où $c_2(V) = 0$. Donc

V ne possède pas de droite de saut (Th. 3) et d'après le théorème 2, il est décomposable. Mais V est stable par hypothèse ; l'assertion $Y = \emptyset$ est donc absurde.

a) β) $\text{Codim } Y = 2$. Il suffit d'après α de montrer que Y ne contient pas d'hypersurface. Pour cela soit $f \in H^0(O_{P_n}(k))$ ($k \geq 0$) telle que s s'annule sur $\{f = 0\}$; le morphisme s/f de $O_H(k)$ dans $V|_H$ est injectif ; par semi-stabilité on en déduit $k \leq 0$ d'où $k = 0$. c.q.f.d.

a) γ) $h^0(V|_H) = 1$. Soit s' une section $\neq 0$ de $V|_H$; la section $s \cap s'$ de O_H est constante donc identiquement nulle. Par suite, s et s' sont proportionnelles sur le corps des fonctions de H ; si une fonction rationnelle s'annule, elle le fait en codimension 1 seulement ; le coefficient de proportionnalité appartient donc à \mathbb{C} (d'après β) d'où le lemme 1.

b) En appliquant la construction de §10 A à $F = F(n-1, n)$ et V , on prouve de même que le faisceau $q_* V_F$ est localement libre de rang 1, donc isomorphe à un $O_{P_n}(\lambda)$. Sa fibre au point H générique de P_n^* est l'espace $H^0(H, V|_H)$.

LEMME 2.- En dehors du cas $n = 3$, $\deg S(V)_{\text{red}} = 1$ et $S(V)_{\text{red}}$ lisse, le fibré $q_* V_F$ est trivial.

Preuve.- α) Supposons $n \geq 4$. Soit P un sous-espace linéaire de codimension 2 de P_n contenant une droite ordinaire ℓ et une droite de saut ℓ' se coupant en x . Un tel sous-espace existe car il existe des droites ordinaires.

Notons J l'ensemble des hyperplans contenant P . Si $H \in J$, on a $V|_H$ semi-stable car H contient ℓ . Soit $\sigma_H \in H^0(V|_H)$ une section non nulle (Lemme 1). Alors $\sigma_H(x) \neq 0$. En effet si $\sigma_H(x) = 0$, alors $\sigma_H|_{\ell''} = 0$ pour toute droite ordinaire ℓ'' passant par x ; donc σ_H est nul sur un ouvert dense de H contrairement à l'hypothèse. La direction définie dans V_x par $\sigma_H(x)$ est la trace dans V_x de l'unique sous-fibré positif $V|_{\ell}^+$, de

$V|_{\ell'}$. Cette direction ne dépend donc pas de H et l'évaluation en x fournit une trivialisation de $q_* V_F|_J$. On a $\dim J = 1$, d'où $\lambda = 0$ et le lemme pour $n \geq 4$.

β) Supposons $n = 3$. Pour tout $x \in \mathbb{P}_3$, notons $C(x)$ l'espace (réduit) des droites de saut de V passant par x . Comme V est stable, pour tout x dans un ouvert de Zariski non vide U_V , $C(x)$ est une courbe. Pour $\ell \in C(x)$, on a $V|_{\ell} = \mathcal{O}_{\ell}(n(x)) \oplus \mathcal{O}_{\ell}(-n(x))$ avec $n(x) > 0$ et le sous-fibré $\mathcal{O}_{\ell}(n(x)) \subset V|_{\ell}$ est uniquement déterminé, notons-le V_{ℓ}^+ . Pour tout $\ell \in C(x)$, notons $d(\ell) \in \mathbb{P}(V_x)$ la direction $V_{\ell,x}^+ \subset V_x$. Nous allons montrer que sous les hypothèses du lemme 2, l'application $d : C(x) \rightarrow \mathbb{P}(V_x)$ est constante pour au moins un $x_0 \in U_V$. Supposons ce point acquis et démontrons le lemme 2. Soit ℓ une droite ordinaire pour V passant par x_0 et notons J' la variété des plans passant par ℓ . Pour $P \in J'$, $V|_P$ possède une section σ_P non nulle (lemme 1) et le lieu des zéros de cette section est fini (lemme 1). Donc $\sigma_P(x_0) \neq 0$ car sinon $\sigma_P|_{\ell} = 0$ puisque ℓ est une droite ordinaire. Comme P contient des droites de $C(x)$, $\sigma_P(x_0)$ appartient à la droite $d(C(x)) \in \mathbb{P}(V_x)$. Ceci fournit une trivialisation de $q_* V_F|_{J'}$, et comme J' est une droite de \mathbb{P}_3^* , on a $\lambda = 0$, d'où le lemme 2.

γ) Démontrons que $d : C(x) \rightarrow \mathbb{P}(V_x)$ est constante lorsque
 $\deg S(V)_{\text{red}} \geq 2$, pour un x convenable dans U_V . Les sous-espaces linéaires de codimension 2 de la grassmannienne des droites de \mathbb{P}_3 pour le plongement dans $\mathbb{P}(\wedge^2 E)$ sont en général constitués par l'ensemble des droites qui rencontrent deux droites ℓ_1 et ℓ_2 en position générale. Il existe donc un tel sous-espace $Q(\ell_1, \ell_2)$ tel que $Q(\ell_1, \ell_2) \cap S(V)_{\text{red}}$ soit un diviseur réduit, donc une courbe réduite de $Q(\ell_1, \ell_2)$. Le morphisme π qui à $\ell \in Q(\ell_1, \ell_2)$ associe $(\ell \cap \ell_1, \ell \cap \ell_2)$ est un isomorphisme de $Q(\ell_1, \ell_2)$ sur $\ell_1 \times \ell_2$. Pour un $x \in \ell_1$ en position générale, $\pi^{-1}(x) \cap (Q \cap S(V)_{\text{red}})$ est un schéma fini réduit.

Soit x_0 un tel point, notons $\Sigma(x_0)$ la variété des droites qui passe par x_0 et P_2 le plan engendré par x_0 et ℓ_2 . Ce qui précède montre que le schéma $\Sigma(x_0) \cap S(V)_{\text{red}} \cap P_2$ est fini et réduit, et comme $\Sigma(x_0) \cap P_2$ est une droite de $\text{Gr}(2,4)$, le nombre de points de $\Sigma(x_0) \cap S(V)_{\text{red}} \cap P$ est égal au degré de $S(V)_{\text{red}}$. Donc $\Sigma(x_0) \cap S(V)_{\text{red}}$ est une courbe réduite de degré ≥ 2 . Comme $C(x_0)$ est le schéma réduit associé à $\Sigma(x_0) \cap S(V)_{\text{red}}$, $C(x_0)$ est une courbe réduite de $\Sigma(x_0)$ de degré ≥ 2 .

Un plan P passant par x_0 en position générale par rapport à $C(x_0)$ coupe $C(x_0)$ en nombre fini de droites ℓ_1, \dots, ℓ_k , $k = \deg(S(V)_{\text{red}})$. Le fibré $V|_P$ possède une section non nulle σ_P qui s'annule en un nombre fini de points, (lemme 1) et cette section est non nulle en x_0 puisque par x_0 passent des droites ordinaires pour V . On a donc $d(\ell_1) = d(\ell_2) \dots = d(\ell_k)$ et comme ceci est vrai pour tout P en position générale par rapport à $C(x_0)$, l'application d est constante.

8) Démontrons que $d : C(x_0) \rightarrow \mathbb{P}(V_{x_0})$ est constante pour un x_0 convenable lorsque $\deg S(V)_{\text{red}} = 1$ et $S(V)_{\text{red}}$ n'est pas lisse. D'après le §13, $S(V)_{\text{red}}$ est constitué par l'ensemble des droites qui rencontrent une droite fixe a .

Soit P un plan contenant a . Toutes les droites de P sont des droites de saut pour V . Il en résulte que $V|_P$ n'est pas semi-stable (Th. 1). Soit k le plus petit entier tel que $h^0(P, V(k)) \neq 0$, et $\sigma \in H^0(P, V(k))$, $\sigma \neq 0$. On a $k < -1$ et σ ne s'annule qu'en un nombre fini x_1, \dots, x_m de points de P . Soit $x_0 \in P$, $x_0 \notin a$, $x_0 \neq x_i$, $1 \leq i \leq m$. La variété $C(x_0)$ est formée des droites de P passant par x_0 et pour tout $\ell \in C(x_0)$, $d(\ell)$ est engendré par $\sigma(x_0) \in V_{x_0}(k) \cong V_{x_0}$. Par suite $d : C(x_0) \rightarrow \mathbb{P}(V_{x_0})$ est constante.

c) Reprenons la démonstration de la proposition 16. Soit V un fibré stable

instable sur tout hyperplan, $c_1(V) = 0$ et supposons qu'on ne soit pas dans le cas $n = 3$, $\deg S(V)_{\text{red}} = 1$, $S(V)_{\text{red}}$ lisse. Alors, comme $q_* V_F$ est trivial (lemme 2), on a une section non nulle de V_F , d'où une section non nulle de V ce qui contredit la stabilité de V . Pour achever la démonstration il suffit donc de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 17.- Soit V un fibré sur \mathbb{P}_3 de rang 2, stable, tel que $c_1(V) = 0$. On suppose que

- 1) Pour tout plan $P \subset \mathbb{P}_3$, $V|_P$ n'est pas stable.
- 2) La variété (réduite) des droites de saut est lisse de degré 1.

Alors $c_2(V) = 1$.

Nous donnerons ici une démonstration communiquée par J. Le Potier.

Soit F la variété des drapeaux du type (point, plan) de \mathbb{P}_3 . Notons $p : F \rightarrow \mathbb{P}_3$, $q : F \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_3$ les projections. Soit B la forme bilinéaire non dégénérée associée à $S(V)_{\text{red}}$ (§13) et notons $W \subset F$ le graphe de la corrélation $\mathbb{P}_3 \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_3$ définie par B . Pour tout plan $P \subset \mathbb{P}_3$, $h^0(P, V) = 1$ (lemme 2), et pour $\sigma \in H^0(P, V)$, $\sigma \neq 0$, le lieu des zéros de σ est le point conjugué de P pour B . Il en résulte que $q_*(p^*V)$ est un fibré de rang 1 sur $\tilde{\mathbb{P}}_3$, donc de la forme $\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}_3}(\alpha \tilde{h})$ (\tilde{h} est la classe de la section hyperplane) et que le morphisme d'évaluation

$$\text{ev} : \mathcal{O}_F(\alpha \tilde{h}) \rightarrow p^*V = V_F$$

a pour lieu de zéro la variété W . En particulier sur $F - W$, $\mathcal{O}_F(\alpha \tilde{h})|_{F - W}$ est un sous-fibré de rang 1 de $V_F|_{F - W}$. Notons X la variété des drapeaux (x, ℓ) où $x \in \mathbb{P}_3$, ℓ est une droite de saut de V et $x \in \ell$. Pour tout point $(x, P) \in F - W$, le point x n'est pas le point conjugué de P . Il existe donc une seule droite de saut $\ell = s(x, P)$ passant par x et contenu dans P . On définit ainsi un morphisme $\pi : F - W \rightarrow X$ qui à (x, P) associe $(x, s(x, P))$. Le morphisme π est une submersion. La fibre de π au-dessus

d'un point (x, ℓ) est constituée par les plans P qui contiennent ℓ et tels que x ne soit pas conjugué de P . Notons $m : X \rightarrow \mathbb{P}_3$ la projection et $V_X = m^*V$. On a alors un isomorphisme canonique identifiant π^*V_X à $V_F|_{F-W}$.

LEMME 3.- Il existe un sous-fibré de rang 1 V^+ de V_X tel que

$$\pi^*L = O_F(\alpha \tilde{h})|_{F-W}.$$

En tout point (x, ℓ) la fibre de V_X est la fibre V_x de V en x . Pour démontrer le lemme, il suffit de voir que pour tout (x, ℓ) , $O_F(\alpha \tilde{h})/\pi^{-1}(x, \ell)$ est un sous-fibré constant de V_x : c'est-à-dire que pour tout plan P contenant ℓ et non conjugué de x , la droite de V_x engendrée par les valeurs en x des sections non nulles de V sur P , ne dépend pas de P . Notons V_ℓ^+ le sous-fibré de rang 1 de $V|_\ell$ de classe > 0 et facteur direct dans V . Pour tout P contenant ℓ et non conjugué de x , et toute section σ de $V|_P$, $\sigma \neq 0$, σ s'annule au point conjugué de P . Donc $\sigma(x) \neq 0$. Une telle section σ se restreint en une section σ/ℓ non nulle en x de $V|_\ell$. Donc σ/ℓ est une section de V_ℓ^+ non nulle en x et la droite engendrée par $\sigma(x)$ est $(V_\ell^+)_x$ et est donc indépendante de σ et de P .

Retenons de cela qu'il existe un sous-fibré V^+ de rang 1 de V_X qui en tout point $(x, \ell) \in X$ a pour fibre $V_{\ell, x}^+$. Soit S la variété des droites de saut. C'est une sous-variété de la quadrique $\text{Gr}(2, 4) \subset \mathbb{P}_5$ obtenue en intersectant $\text{Gr}(2, 4)$ avec un hyperplan de \mathbb{P}_5 en position générale. C'est donc une quadrique de dimension 3. Soit E le fibré canonique de rang 2 sur $\text{Gr}(2, 4)$, E_S sa restriction à S . Le fibré projectif associé à E_S s'identifie à X . Notons $n : X \rightarrow S$ la projection. Nous utiliserons l'énoncé suivant :

LEMME 4.- Soient $V_1 = c_1(E_S)$, $V_2 = c_2(E_S)$, $h = c_1(O(1)) \in H^2(\mathbb{P}_3, \mathbb{Z})$ la section hyperplane et notons encore h la classe $n^*h \in H^2(X, \mathbb{Z})$.

$$\text{On a alors } \begin{cases} H^*(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[V_1, V_2]/(V_1^2 - 2V_2, V_2^2) \\ H^*(X, \mathbb{Z}) = H^*(S, \mathbb{Z})[h]/h^2 + V_1h + V_2 \end{cases}.$$

D'après le lemme 4, on a $H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{0_1} \oplus \mathbb{Z}_h$. Donc $c_1(V^+) = av_1 + bh$. Comme V^+ est un sous-fibré de rang 1 de V_X et comme $c_1(V_X) = 0$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow V^+ \longrightarrow V_X \longrightarrow V^- \longrightarrow 0,$$

où V^- est le dual de V^+ . On a donc

$$(1+c_2h^2) = C.(V_X) = 1 - c_1(V^+)^2,$$

et par suite

$$1 + c_2h^2 = 1 - (av_1 + bh)^2.$$

En utilisant les relations $V_1^2 = 2V_2$ et $h^2 + V_1h + V_2 = 0$, on obtient

$$(c_2 - 2ab + b^2)hV_1 + (c_2 - 2a^2 + b^2)V_2 = 0.$$

Comme hV_1 et V_2 sont linéairement indépendants dans $H^2(S, \mathbb{Z})$, on a

$$\begin{cases} c_2 - 2ab + b^2 = 0, \\ c_2 - 2a^2 + b^2 = 0. \end{cases}$$

On a donc $a = 0$, $c_2 = -b^2$; ou bien $a = b$, $c_2 = b^2$. La première solution est à écarter car $c_2 > 0$. On a donc $c_1(V^+) = b(v_1 + h)$, $c_2(V) = b^2h^2$.

Soit $\ell \in S$. Alors $n^{-1}(\ell) \subset X$ s'identifie à la droite $\ell \subset \mathbb{P}_3$ et $V_X|_{n^{-1}(\ell)}$

s'identifie à V_ℓ^+ . De ce qui précède résulte que $V_\ell^+ = 0_\ell(b)$ avec $b^2 = c_2$.

Donc le saut de V sur les droites de saut est constant et indépendant de la droite considérée. Soient P un plan de \mathbb{P}_3 , σ une section non nulle de V sur P . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow 0_P \xrightarrow{\sigma} V \longrightarrow 0_P \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

où R est un anneau quotient de 0_P , de support le point x_0 conjugué de P , de longueur $c_2(V)$ et définie localement par deux équations f, g . On a donc

$R_{x_0} \cong \mathbb{C}\{u, w\}/(f, g)$. Toutes les droites passant par x_0 et contenues dans P

sont des droites de saut de V et comme le saut est constant et égal à $2b$, sur

toutes ces droites ℓ , $f|_\ell$, $g|_\ell$ s'annulent en x_0 à l'ordre $\leq b$, une

de ces fonctions s'annulant à l'ordre b . Par suite les termes initiaux de f

et g sont des polynômes non nuls de degré b en u et w . Il en résulte que la longueur de R_{x_0} est supérieure à $\frac{(b^2+1)(b^2+2)}{2} - 3$. On a donc

$$\frac{(b^2+1)(b^2+2)}{2} - 3 \leq b^2$$

d'où

$$c_2^2 + c_2 - 4 \leq 0$$

et par suite

$$c_2 = 1 \quad \text{c.q.f.d.}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. BARTH - Some properties of stable rank 2 vector bundles on \mathbb{P}_n ,
Math. Ann. 226 (1977)
- [2] G. HORROCKS - Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring,
Proc. London Math. Soc. 14, p.968 (1964).
- [3] A. DOUADY - Le théorème des images directes, Astérisque n°16. (exposé
au Séminaire Bourbaki).
- [4] P. GRIFFITHS et ADAMS - Topics in algebraic and analytic geometry,
Princeton univ. press (1974).
- [5] A. GROTHENDIECK - Classification des fibrés holomorphes sur la sphère
de Riemann, Ann. J. Math. 79 (1956).
- [6] A. GROTHENDIECK - E.G.A., ch.IV, §5-10, I.H.E.S. n°24 (1965).
- [7] R. HARTSHORNE - Local cohomology, Lecture notes 41 (1967).
- [8] M. MARUYAMA - Stable vector bundles on an algebraic surface, Nagoya
Math. J. 58 (1975).
- [9] M. MARUYAMA - On a family of algebraic vector bundles, Number theory
Akizuki volume - Tokio 1973.
- [10] J.P. SERRE - Faisceaux analytiques sur un espace projectif, Séminaire
E.N.S. 1953-54, exp. 18-19.
- [11] J.P. SERRE - F.A.C.
- [12] VAN DE VEN - On uniform vector bundles, Math. Ann. 195 (1971).

CONSTRUCTION DE HORROCKS ET CRITÈRE DE BARTH

par Adrien DOUADY

Notations.

On pose $T = \mathbb{C}^4$, $X = \mathbb{P}(T) = \mathbb{P}^3\mathbb{C}$. Pour tout espace V , on notera V_X ou simplement V le fibré vectoriel trivial de fibre V sur X . Si E est un fibré vectoriel, on note E^T son dual, \mathcal{E} le faisceau de ses sections algébriques régulières ou analytiques selon le goût du lecteur. Une forme symplectique sur un fibré E est une forme bilinéaire alternée, non dégénérée en chaque point.

1. La construction de Horrocks.

Soient $V = \mathbb{C}^{2n+r}$ muni d'une forme symplectique (donc r pair) et posons $W_0 = \mathbb{C}^n$. Soit $\varphi : T \times W_0 \rightarrow V$ une application bilinéaire telle que

- (i) Pour $t \in T$ non nul, l'application $\varphi_t : W_0 \rightarrow V$ est injective.
- (ii) Pour $t \in T$ non nul, $W_t = \varphi_t(W_0)$ est un sous-espace isotrope de V .

Pour $x \in X$, on pose $W_x = W_t$ pour t un représentant quelconque de x . Les W_x sont les fibres d'un fibré W sur X et φ identifie $W_0(-1)$ à W . On pose $E = W^\perp/W$. C'est un fibré de rang r sur X , muni d'une forme symplectique. On dit que E est obtenu à partir de φ par la construction de Horrocks.

PROPOSITION 1.- Avec les notations ci-dessus, soient x_1 et x_2 deux points distincts de X , et D la droite passant par x_1 et x_2 . Pour que $E|_D$ soit trivial, il faut et il suffit que W_{x_1} et $W_{x_2}^\perp$ soient supplémentaires dans V .

Démonstration.- a) Il suffit : soient t_1 et t_2 des représentants de x_1 et

x_2 , et $t = a_1 t_1 + a_2 t_2$. Alors $W_t \subset W_{t_1} + W_{t_2}$, ce qui permet de définir une application $\alpha_x : E_x \rightarrow V/W_{x_1} + W_{x_2}$ pour tout $x \in D$. La forme bilinéaire induite sur $W_{x_1} + W_{x_2}$ est non dégénérée, cet espace est de dimension $2n$, et W_x est isotrope de dimension n , donc W_x est égal à son orthogonal dans $W_{x_1} + W_{x_2}$, autrement dit $W_x^\perp \cap (W_{x_1} + W_{x_2}) = W_x$. Par suite α_x est injective; pour raisons de dimension c'est un isomorphisme, et on obtient ainsi une trivialisatation de $E|_D$.

b) Il faut : montrons que si W_{x_1} et $W_{x_2}^\perp$ ne sont pas supplémentaires, le fibré $E|_D$ n'est pas trivial. Soit $u \in W_{x_1} \cap W_{x_2}^\perp$ un vecteur non nul. On a $u \in W_x^\perp$ pour tout $x \in D$, donc u définit une section de $W|_D$. On ne peut avoir $u \in W_x$ pour tout $x \in D$, car u définirait une section non nulle de W , ce qui est impossible puisque $W \simeq W_0(-1)$. La section de E , définie sur D par u , n'est donc pas identiquement nulle, cependant elle s'annule en x_1 ce qui montre que $E|_D$ n'est pas trivial, c.q.f.d.

PROPOSITION 2.- Soit E un fibré de rang 2 sur X obtenu par la construction de Horrocks. Pour presque toute droite $D \subset X$, le fibré $E|_D$ est trivial.

Démonstration.- On a $c_1(E) = 0$ puisque E admet une forme symplectique.

D'après le théorème de Grauert-Müllich (exposé IV), il suffit de montrer que $H^0(X; \mathcal{E}(-1)) = 0$. Ceci résulte de la suite exacte

$$0 \longrightarrow W_0(-2) \longrightarrow W^\perp(-1) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow 0,$$

où $H^0(X; W^\perp(-1)) = 0$ puisque W^\perp est un sous-fibré du fibré trivial V_X , et $H^1(X; W_0(-2)) = 0$ puisque W_0 est trivial.

Remarque : J'ignore si l'hypothèse $r = 2$ est nécessaire.

2. Monades.

On appelle monade sur X un complexe de la forme

$$0 \longrightarrow W_0(-1) \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} M_0(+1) \longrightarrow 0$$

où V, W_0, M_0 sont des fibrés triviaux sur X , φ injectif et ψ surjectif.

Le fibré d'homologie $E = \text{Ker } \Psi / \text{Im } \varphi$ est le fibré défini par la monade.

Un fibré, obtenu par la construction de Horrocks, est défini par la monade

$$0 \longrightarrow W_0(-1) \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\varphi^T} W_0^T(+1) \longrightarrow 0$$

PROPOSITION 3.- Soient E un fibré de rang r sur X , défini par une monade

$$0 \longrightarrow W_0(-1) \longrightarrow V \longrightarrow M_0(+1) \longrightarrow 0$$

et α une forme symplectique sur E . Il existe alors une forme symplectique β sur V et une seule telle que E muni de α soit obtenu à partir de φ et β par la construction de Horrocks.

Remarque : Si V est le fibré trivial de fibre V_0 , une forme bilinéaire sur V est nécessairement une forme bilinéaire sur V_0 indépendante de $x \in X$.

Démonstration.- Posons $N = \text{Ker } \Psi$, $W = \text{Im } \varphi$, $M = M_0(+1)$, notons $\text{Alt}(M)$ le fibré des formes bilinéaires alternées sur V , nulles sur $N \times_X W$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Alt}(M) \longrightarrow \text{Alt}(V, N, W) \longrightarrow \text{Alt}(E) \longrightarrow 0.$$

Mais $\text{Alt}(M) = (\text{Alt}(M_0))(-2)$, donc $H^i(\text{Alt}(M)) = 0$ pour $i=0$ et 1 , et α provient d'une forme unique $\beta \in H^0(X; \text{Alt}(V, N, W)) \subset \text{Alt}(V_0)$.

Pour tout $x \in X$, on a $W_x = N_x^\perp$ puisque $\beta \in \text{Alt}(V, N_x, W_x)$ et que la forme α_n est non dégénérée. Enfin β est non-dégénérée, car s'il y avait un vecteur non nul $v \in V^\perp \subset V$, il appartiendrait à W_x pour tout x , donc définirait une section non nulle de W , ce qui est impossible puisque $W \approx W_0(-1)$.

Remarque : Si E est de rang 2, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) E admet une forme symplectique.
- (ii) Le fibré $\wedge^2 E$ est trivial.
- (iii) $c_1(E) = 0$.
- (iv) $\dim M_0 = \dim W_0$.

3. Le critère de Barth.

Soit E un fibré vectoriel de rang r sur X , muni d'une forme symplectique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons $H_k = H^1(X; \mathcal{E}(k))$. Par dualité de Serre, en remarquant que $E \approx E^T$ et que $\Omega_X^3 \approx \mathcal{O}(-4)$, on a $H^2(X; \mathcal{E}(k)) \approx H_{-4-k}$. L'espace vectoriel gradué $H = \bigoplus H_k$ est de dimension totale finie, et est un module gradué sur l'algèbre $\Lambda = \bigoplus H^0(X; \mathcal{O}(k)) = S(T^T)$.

THÉOREME.— On suppose que, pour presque toute droite $D \subset X$, le fibré $E|_D$ est trivial. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) E peut être obtenu par la construction de Horrocks.
- (ii) Le Λ -module H est engendré par H_{-1} .
- (iii) On a $H^1(X; \mathcal{E}(-2)) = 0$.

Ce théorème est la conjonction des propositions 4, 5, 6 et 3.

4. L'implication (i) \Rightarrow (iii).

PROPOSITION 4.— Soit E un fibré vectoriel sur $X = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ défini par une monade. On a $H^i(X; \mathcal{E}(-2)) = 0$ pour tout i .

Démonstration.— Avec les notations du n°2, on a les suites exactes

$$0 \longrightarrow N(-2) \longrightarrow V(-2) \longrightarrow M_0(-1) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow W_0(-3) \longrightarrow H(-2) \longrightarrow E(-2) \longrightarrow 0$$

Rappelons que $H^i(X; \mathcal{O}(k)) = 0$ pour $k = -1, -2, -3$, i quelconque. Comme les fibrés V , M_0 et W_0 sont triviaux, il en résulte que $H^i(X; \mathcal{N}(-2)) = 0$ pour tout i , puis que $H^i(X; \mathcal{E}(-2)) = 0$, c.q.f.d.

5. L'implication (iii) \Rightarrow (ii).

PROPOSITION 5.— Soit E un fibré vectoriel de rang r sur X . On suppose que $E|_D$ est trivial pour presque toute droite D , que $E \approx E^T$ et $H^1(X; \mathcal{E}(-2)) = 0$. Alors H est engendré comme Λ -module par H_{-1} .

Démonstration.— On a $H^0(X; \mathcal{E}(k)) = 0$ pour $k < 0$. En effet, une section de $\mathcal{E}(k)$ est nulle sur presque toute droite, donc nulle. De même, si $P \subset X$ est un plan contenant une droite D telle que $\mathcal{E}|_D$ soit trivial, on a $H^0(P; \mathcal{E}_P(k)) = 0$ pour $k < 0$.

On a $H^1(X; \mathcal{E}(k)) = 0$ pour $k \leq -2$, comme on le voit par récurrence descendante au moyen de la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(P; \mathcal{E}_P(k)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{E}(k-1)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{E}(k)) ,$$

où P est un plan comme ci-dessus.

Par dualité de Serre, on en déduit que $H^2(X; \mathcal{E}(k)) = 0$ pour $k \geq -2$.

Soient maintenant D une droite telle que $\mathcal{E}|_D$ soit trivial, P_1 et P_2 deux plans tels que $D = P_1 \cap P_2$, ξ_1 et $\xi_2 \in H^0(X; \mathcal{O}(1))$ des équations de P_1 et P_2 respectivement. On a une suite exacte à la Koszul, ou à la Mayer-Vietoris :

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \end{pmatrix} \mathcal{O}_{X(-2)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X(-1)}^2 \xrightarrow{(\xi_1, \xi_2)} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0 .$$

En tensorisant avec $\mathcal{E}(k)$, on obtient une suite exacte que l'on peut décomposer en deux suites exactes courtes :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{E}(k-2) \longrightarrow \mathcal{E}(k-1)^2 \xrightarrow{(\xi_1, \xi_2)} \mathcal{F}(k) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{F}(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathcal{O}_D(k)^r \longrightarrow 0 . \end{aligned}$$

Pour $k \geq 0$, on a $H^2(X; \mathcal{E}(k-2)) = 0$ donc $(\xi_1, \xi_2)_* : H_{k-1}^2 \rightarrow H^1(X; \mathcal{F}(k))$ surjectif, et $H^1(X; \mathcal{O}_D(k))^r = 0$, donc $\tau_* : H^1(X; \mathcal{F}(k)) \rightarrow H_k$ surjectif. Il en résulte que tout élément de H_k est de la forme $\xi_1 h_1 + \xi_2 h_2$, avec h_1 et $h_2 \in H_{k-1}$, c.q.f.d.

6. L'implication (ii) \Rightarrow (i) .

PROPOSITION 6.— Soit \mathcal{E} un fibré vectoriel de rang r sur X . On suppose que $H^0(X; \mathcal{O}(-1)) = 0$, $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}^T$, et que H est engendré comme A -module par H_{-1} . Alors \mathcal{E} peut être défini par une monade.

Remarque : La condition $E|_D$ trivial pour presque toute droite D entraîne $H^0(X; \mathcal{E}(-1)) = 0$, comme on l'a remarqué au début de la démonstration de la proposition 5 .

Démonstration.- Posons $M_0 = H_{-1}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0(+1)$. Les extensions du faisceau localement libre \mathcal{M} par \mathcal{E} sont classifiées par

$$\text{Ext}^1(\mathcal{M}; \mathcal{E}) = H^1(X; \mathcal{M}^T \otimes \mathcal{E}) = M_0^T \otimes H^1(X; \mathcal{E}(-1)) = \text{Hom}(M_0; H_{-1}) .$$

Soit $0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$ l'extension correspondant à l'identité de H_{-1} . En transposant, on obtient une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}^T \longrightarrow \mathcal{Q}^T \xrightarrow{u} \mathcal{E} \longrightarrow 0 .$$

L'application $u_* : \text{Ext}^1(\mathcal{M}; \mathcal{Q}^T) \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ est bijective. En effet, dans la suite exacte

$$H^1(X; \mathcal{H}om(\mathcal{M}; \mathcal{M}^T)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{H}om(\mathcal{M}; \mathcal{Q}^T)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{H}om(\mathcal{M}; \mathcal{E})) \longrightarrow H^2(X; \mathcal{H}om(\mathcal{M}; \mathcal{M}^T)),$$

les deux termes extrêmes sont de la forme $M_0^T \otimes M_0^T \otimes H^i(X; \mathcal{E}(-2)) = 0$. Ceci

permet de construire un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathcal{M}^T & = & \mathcal{M}^T & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Q}^T & \longrightarrow & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

LEMME.- Le fibré \mathcal{V} ainsi obtenu est trivial.

Démonstration.- Dans la suite exacte de cohomologie associée à

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(-1) \longrightarrow \mathcal{Q}(-1) \longrightarrow \mathcal{M}_0 \longrightarrow 0 ,$$

l'homomorphisme de liaison $d : M_0 \longrightarrow H_{-1}$ est l'identité par définition de

l'extension \mathcal{Q} . Tout élément $f \in A_{k+1}$ définit un morphisme de cette suite

exacte $0 \longrightarrow \mathcal{E}(k) \longrightarrow \mathcal{Q}(k) \longrightarrow \mathcal{M}(k) \longrightarrow 0$; il en résulte que dans la suite de cohomologie associée, l'homomorphisme de liaison

$$d : A_{k+1} \otimes M_0 = H^0(X; \mathcal{M}(k)) \longrightarrow H_k$$

est celui défini par la structure de A_1 -module de H_0 : il est surjectif par hypothèse.

Dans la suite exacte

$$H^0(X; \mathcal{M}(k)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{E}(k)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{Q}(k)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{M}(k)) ,$$

l'homomorphisme d est surjectif et $H^1(X; \mathcal{M}(k)) = 0$, donc $H^1(X; \mathcal{Q}(k)) = 0$.

Par dualité de Serre, $H^2(X; \mathcal{Q}^T(k)) = 0$ pour tout k . Les suites exactes

$$H^1(X; \mathcal{M}^T(k)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{V}(k)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{Q}(k))$$

et

$$H^2(X; \mathcal{Q}^T(k)) \longrightarrow H^2(X; \mathcal{V}(k)) \longrightarrow H^2(X; \mathcal{M}(k)) ,$$

où $H^1(X; \mathcal{M}^T(k)) = M_0^T \otimes H^1(X; \mathcal{E}(k-1)) = 0$

et $H^2(X; \mathcal{M}(k)) = M_0 \otimes H^2(X; \mathcal{V}(k+1)) = 0$,

montrent alors que $H^1(X; \mathcal{V}(k)) = H^2(X; \mathcal{V}(k)) = 0$ pour tout k .

D'après l'exposé 1 , le faisceau \mathcal{V} est de la forme $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathcal{O}_{(p_i)}$.

La suite exacte

$$H^0(X; \mathcal{E}(-1)) \longrightarrow H^0(X; \mathcal{Q}(-1)) \longrightarrow H^0(X; \mathcal{M}(-1)) \xrightarrow{\alpha} H^1(X; \mathcal{E}(-1))$$

où d est un isomorphisme et $H^0(X; \mathcal{E}(-1)) = 0$ par hypothèse donne

$H^0(X; \mathcal{Q}(-1))$, et la suite exacte

$$H^0(X; \mathcal{M}_0^T(-2)) \longrightarrow H^0(X; \mathcal{V}(-1)) \longrightarrow H^0(X; \mathcal{Q}(-1))$$

montre que $H^0(X; \mathcal{V}(-1)) = 0$. Il en résulte que $p_i \leq 0$ pour $1 \leq i \leq r$.

D'autre part, $c_1(E) = 0$ puisque $E \simeq E^T$, donc $c_1(Q)$ est égal à la dimension n de M_0 , et $c_1(V) = n - m = 0$. Comme $c_1(V) = \sum p_i$, on a $p_i = 0$ pour tout i , c.q.f.d.

Fin de la démonstration de la proposition. - Le fibré E est défini par la

monade $0 \longrightarrow M_0^T(-1) \longrightarrow V \longrightarrow M_0(+1) \longrightarrow 0$, c.q.f.d.

Remarque.- 1) Il résulte du fait que $H^0(X; \mathcal{E}(-1)) = H^0(X; \mathcal{Q}^T(-1)) = 0$ que les quatre extensions qui figurent dans le diagramme ci-dessus n'admettent pas d'automorphismes. On peut donc considérer l'espace vectoriel $V = H^0(X; \mathcal{U}^L)$ comme "naturellement" défini par E . On a en fait $V = H^1(X, E \otimes \Omega^1)$ comme on le montrera dans un exposé ultérieur.

2) Rappelons que $H_0 = H^1(X; \mathcal{E}(-1))$. Pour obtenir une description de V , observons que $H^0(X; \mathcal{M}_5^T) = H^1(X; \mathcal{M}_6^T) = 0$, d'où $V = H^0(X; \mathcal{Q})$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X; \mathcal{E}) \longrightarrow V \longrightarrow T^T \otimes H^1(X; \mathcal{E}(-1)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{E}) \longrightarrow 0$$

3) Sous les hypothèses du théorème et les conditions (i), (ii), (iii), j'ignore si $H^0(X; \mathcal{E}) = 0$ pour $r = 2$ dès que E n'est pas trivial, ou plus généralement si pour r quelconque on peut mettre E sous la forme $E_1 \oplus E_2$, avec E_1 trivial et $H^0(X; \mathcal{E}_2) = 0$. Cependant lorsque E est de rang 2 et possède une structure réelle, on verra plus tard que $H^0(X, \mathcal{E}) = 0$ (exposé VII, prop. 4.2).

THEOREME D'ANNULATION

par A. DOUADY

1. Notations et résultats.

On reprend pour l'essentiel les notations de l'exposé sur la transformation de Penrose :

$X = \mathbb{P}^3\mathbb{C}$, $Y = G_2\mathbb{C}^4$ (grassmannienne). Pour $y \in Y$, $\Phi_y = \Phi_y^- \subset \mathbb{C}^4$ est le plan correspondant, $\Phi_y^+ = \mathbb{C}^4/\Phi_y^-$, $\wedge_y = \wedge_y^+ = \wedge^2\Phi_y^+$ et $\wedge_y^- = \wedge^2\Phi_y^-$.

On pose $D_y = \mathbb{P}\Phi_y^- \subset X$ et $Z = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in D_y\}$ (variété de drapeaux).
 $p : Z \longrightarrow X$ et $q : Z \longrightarrow Y$ sont les projections. On note $C_y = \{y' \mid D_y \cap D_{y'} \neq \emptyset\}$.

Pour tout espace vectoriel V , on note V^\top son dual.

On note E , un fibré vectoriel algébrique sur X , et S l'ensemble des $y \in Y$ tels que $E|_{D_y}$ ne soit pas algébriquement trivial. On pose $\mathcal{F} = q_*p^*\mathcal{E}$, ce faisceau est localement libre sur $Y-S$, d'où un fibré F sur $Y-S$, et ce fibré est muni de la connexion de Penrose ∇ .

Enfin Y contient $M = \mathbb{P}^1H \approx S^4$.

Le but de cet exposé est de démontrer le résultat suivant :

THEOREME 1 (Drinfeld, Manin).- On suppose que $S \cap M = \emptyset$ et que $F|_M$ peut être muni d'une forme hermitienne compatible avec la connexion. Alors $H^1(X; \mathcal{E}(-2))=0$.

Ceci permet, dans le cas où E est muni d'une forme symplectique (ce qui est toujours possible si $r = 2$), d'appliquer le critère de Barth qui montre que E peut être obtenu par la construction de Horrocks.

Dans tout l'exposé, nous supposons $S \cap M = \emptyset$. La deuxième hypothèse n'interviendra qu'à la fin.

2. Rappel sur les images directes et les suites spectrales.

Soient X (*) et S deux espaces, $\pi : X \rightarrow S$ une application continue et \mathcal{E} un faisceau sur X . Les faisceaux $\mathcal{R}^q_{\pi_*} \mathcal{E}$ est le faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto H^q(\pi^{-1}(V); \mathcal{E})$. On a une suite spectrale dont le terme E_2 est $(H^p(S; \mathcal{R}^q_{\pi_*} \mathcal{E}))$ aboutissant aux $H^n(X; \mathcal{E})$. En bas degré, ceci se réduit à une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(S; \pi_* \mathcal{E}) \rightarrow H^1(X; \mathcal{E}) \rightarrow H^0(S; \mathcal{R}^1_{\pi_*} \mathcal{E}) \rightarrow H^2(S; \pi_* \mathcal{E}) \rightarrow H^2(X; \mathcal{E}) .$$

D'autre part, une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2 \rightarrow \dots$$

de faisceaux sur X donne naissance à une suite spectrale de faisceaux sur S (suite spectrale relative de la résolution), dont le terme E_1 est $(\mathcal{R}^q_{\pi_*} \mathcal{E}^p)$, et qui aboutit aux $\mathcal{R}^n_{\pi_*} \mathcal{E}$.

Si X et S sont des espaces \mathbb{C} -analytiques, π analytique et propre, et \mathcal{E} un faisceau cohérent sur X , les faisceaux $\mathcal{R}^q_{\pi_*} \mathcal{E}$ sont analytiques cohérents sur S (théorème de Grauert). On n'aura à considérer ici que le cas où X et S sont des variétés, π une submersion propre, et \mathcal{E} un faisceau localement libre sur X (faisceau des sections analytiques d'un fibré E). Dans ce cas, la démonstration du théorème de Grauert se simplifie, mais ceci n'entraîne pas que les $\mathcal{R}^q_{\pi_*} \mathcal{E}$ sont localement libres sur S . Cependant, on a la description suivante :

pour $s \in S$, posons $X(s) = \pi^{-1}(s)$, notons $\mathcal{E}(s)$ le faisceau sur $X(s)$ des sections analytiques de $E|_{X(s)}$ (éventuellement prolongé par 0 à X). Pour q fixé, la dimension de $H^q(X(s); \mathcal{E}(s))$ est une fonction analytiquement semi-continue supérieurement de s . Sur l'ouvert S' fermé des s pour lesquels cette dimension prend sa valeur minimum, les espaces $H^q(X(s); \mathcal{E}(s))$ sont les fibres d'un fibré vectoriel $\mathcal{R}^q_{\pi_*} \mathcal{E}$ dont les sections analytiques forment le faisceau $\mathcal{R}^q_{\pi_*} \mathcal{E}$.

(*) Ce paragraphe est consacré à des généralités S , X et \mathcal{E} n'ont pas les significations particulières données au n°1.

3. Le faisceau $\mathcal{E}_0(-2)$.

Notons E_1 le fibré p^*E sur Z , et naturellement \mathcal{E}_1 le faisceau sur Z des sections analytiques de E_1 . Nous noterons \mathcal{E}_0 le sous-faisceau de \mathcal{E}_1 formé des sections localement constantes sur les fibres de p . Comme p est une submersion, on a $(\mathcal{E}_0)_{x,y} = \mathcal{E}_x$ pour $(x,y) \in Z$. En appliquant le même procédé à $\mathcal{E}(k)$, on obtient un faisceau noté $\mathcal{E}_0(k)$ sur Z . Comme p induit un homéomorphisme de $q^{-1}(M)$ sur X , on a

$$H^i(X; \mathcal{E}(k)) = H^i(q^{-1}(M); \mathcal{E}_0(k)) = \varinjlim H^i(q^{-1}(V); \mathcal{E}_0(k))$$

pour V voisinage de M dans Y .

Nous nous proposons de déterminer

$$H^1(X; \mathcal{E}(-2)) = H^1(q^{-1}(M); \mathcal{E}_0(-2)) .$$

Pour cela nous utiliserons la suite spectrale des images directes par

$$q_M : q^{-1}(M) \longrightarrow M .$$

Remarques.- 1) Pour tout faisceau \mathcal{G} sur Z , on a $\mathcal{R}_{q_M^*}^k(\mathcal{G}|_{q^{-1}(M)}) = (\mathcal{R}_{q_*}^k \mathcal{G})|_M$ (restriction sans extension des scalaires). Nous écrirons donc q pour q_M .

2) Le faisceau $\mathcal{E}_0(-2)$ n'est pas un faisceau de \mathcal{O}_Z -modules, on ne peut donc pas lui appliquer le théorème de Grauert.



PROPOSITION 1.- On a $H^1(X; \mathcal{E}(-2)) = H^0(M; \mathcal{R}_*^1 \mathcal{E}_0(-2))$.

Ceci résulte de la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(M; q_* \mathcal{E}_0(-2)) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{E}(-2)) \longrightarrow H^0(M; \mathcal{R}_*^1 \mathcal{E}_0(-2)) \longrightarrow H^2(M; q_* \mathcal{E}_0(-2))$$

et du lemme suivant :

LEMME 1.- On a $q_* \mathcal{E}_0(k) = 0$ sur $Y-S$ pour $k < 0$.

Démonstration.- Soit $y \in Y-S$. Comme E_1 est trivial sur $Z(y) = D_y$, on a $H^0(Z(y); \mathcal{E}_1(k)(y)) = 0$ pour $k < 0$. Or \mathcal{E}_1 est localement libre sur Z , donc $q_* \mathcal{E}_1$ est nul au voisinage de y . Comme \mathcal{E}_0 est un sous-faisceau de \mathcal{E}_1 , le faisceau $q_* \mathcal{E}_0$ est un sous-faisceau de $q_* \mathcal{E}_1$, donc est nul au voisinage de y . C.Q.F.D.

Pour déterminer $\mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{E}_0(-2)$, nous utiliserons la suite exacte de Poincaré

$$(3.1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{E}_0(-2) \longrightarrow \mathcal{E}_1(-2) \xrightarrow{\partial} \Omega^1_{Z|X} \otimes \mathcal{E}_1(-2) \xrightarrow{\partial} \Omega^2_{Z|X} \otimes \mathcal{E}_1(-2) \longrightarrow 0,$$

que nous écrirons

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_0(-2) \longrightarrow \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^2 \longrightarrow 0.$$

Les faisceaux \mathcal{C}^i sont localement libres sur Z (mais les ∂ ne sont pas \mathcal{O}_Z -linéaires!).

4. Calcul de quelques images par q .

On pose $\Omega^j_{Z|X}(i) = \Omega^j_{Z|X} \otimes \mathcal{C}_Z(i)$ pour $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \{0, 1, 2\}$. Nous allons déterminer notamment les faisceaux $q_* \Omega^j_{Z|X}(i)$ et $\mathcal{R}^1_{q*} \Omega^j_{Z|X}(i)$ pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, -1, -2$.

Remarque 3.— Ceci nous permettra de déterminer $q_*(\mathcal{E}_1 \otimes \Omega^j_{Z|X}(i))$ et $\mathcal{R}^1_{q*}(\mathcal{E}_1 \otimes \Omega^j_{Z|X}(i))$ sur $Y-S$. En effet, sur $Z - q^{-1}(S)$, le faisceau \mathcal{E}_1 s'identifie à $q^*(\mathcal{H})$, donc $q_*(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{G}) = \mathcal{H} \otimes q_* \mathcal{G}$ pour tout faisceau \mathcal{G} sur Z .

LEMME 2.— On a $\Omega^1_{Z|Y} = \mathcal{C}_Z(-2, 1)$.

Démonstration.— On a $T_{x,y} D_y = L_x^\top \otimes (\bar{\phi}_y^- / L_x)$. Or $L_x \otimes (\bar{\phi}_y^- / L_x) = \wedge_y^-$, d'où $T_{x,y} = L_x^{\otimes -2} \otimes \wedge_y^-$, c.q.f.d.

PROPOSITION 2.— Les faisceaux $q_* \mathcal{C}_Z(i)$ et $\mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{C}_Z(i)$ sont donnés par le tableau suivant :

$\mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{C}_Z(i)$	$s^k \bar{\phi}^-(i)$	$\mathcal{C}_Y(-1)$	0	0	0	0
$q_* \mathcal{C}_Z(i)$	0	0	0	\mathcal{C}_Y	$(\bar{\phi}^-)^\top$	$s^i \bar{\phi}^{-T}$
i	$-2 - k$ $k \geq 0$	-2	-1	0	1	$i \geq 1$

Démonstration.— Pour $y \in Y$, on a $\mathcal{O}_{D_y} \otimes \mathcal{O}_Z(i) = \mathcal{O}_{D_y}(i)$, et $H^0(D_y; \mathcal{O}(i)) = S^i(\Phi_y^{-T})$ pour $i \geq 0$, 0 pour $i < 0$, d'où les $q_* \mathcal{O}_Z(i)$. La dualité de Serre relative donne $(q_* \mathcal{G})^T = \mathcal{R}^1 q_* (\mathcal{G}^T \otimes \Omega_{Z|Y}^1)$ pour tout faisceau \mathcal{G} localement libre sur Z tel que $q_* \mathcal{G}$ soit localement libre. Ici, $\mathcal{R}^1 q_* \mathcal{O}_Z(-2-k, 1) = S^k \Phi_y^{-}$, d'où les $\mathcal{R}^1 q_* \mathcal{O}_Z(i)$ en vertu de la remarque 3, c.q.f.d.

PROPOSITION 3.— On a le tableau suivant :

$\mathcal{R}^1 q_* \Omega_{Z X}^1(i)$	0	0	0
$q_* \Omega_{Z X}^1(i)$	0	$\Phi_y^{+T}(-1)$	Ω_Y^1
i	-2	-1	0

Démonstration.— a) On a $T_{(x,y)} A_x = (\Phi_y^- / L_x)^T \otimes \Phi_y^+$, d'où $T_{x,y}^T A_x = \Phi_y^{+T} \otimes \Phi_y^- / L_x$. Or $L_x \otimes \Phi_y^- / L_x$ s'identifie à Λ_y^- , donc $\Phi_y^- / L_x = \Lambda_y^- \otimes L_x^T$, et $\Omega_{Z|X}^1 = (q_* \Phi^{+T})(1, -1)$.

On a $q_* \Omega_{Z|X}^1(i) = \Phi^{+T} \otimes q_* \mathcal{O}_Z(i+1, -1) = 0$ pour $i = -2$ et $\Phi^{+T} \otimes \mathcal{O}_Y(-1)$ pour $i = -1$. De même $\mathcal{R}^1 q_* \Omega_{Z|X}^1(i) = \Phi^{+T} \otimes \mathcal{R}^1 q_* \mathcal{O}_Z(i+1, -1) = 0$ pour tout $i \geq -2$. Enfin, pour $y \in Y$, on a $H^0(D_y; \Omega_{Z|X}^1 \otimes \mathcal{O}_{D_y}) = \Phi_y^{+T} \otimes H^0(D_y; \Phi_y^- / \mathcal{O}) = \Phi_y^{+T} \otimes \Phi_y^- = T_y^T Y$, d'où $q_* \Omega_{Z|X}^1 = \Omega_Y^1$ (en fait l'application $q^* : \Omega_Y^1 \rightarrow q_* \Omega_{Z|X}^1$ est un isomorphisme), c.q.f.d.

LEMME 4.— On a $\Omega_{Z|X}^2 = \mathcal{O}_Z(2, -3)$.

Démonstration.— On a $T_{x,y} A_x = L_x \otimes \Lambda_y^{-T} \otimes \Phi_y^+$, d'où

$$\Lambda^2(T_{x,y} A_x) = L_x^{\otimes 2} \otimes (\Lambda_y^-)^{\otimes -2} \otimes \Lambda^+ = L_x^{\otimes 2} \otimes (\Lambda_y^-)^{\otimes -3}, \text{ c.q.f.d.}$$

Remarque 4.— L'opération $*$: $\Omega_Y^2 \rightarrow \Omega_Y^2$ vérifie $*** = 1$. On a donc une décomposition $\Omega_Y^2 = \Omega_{Y+}^2 \oplus \Omega_{Y-}^2$ en parties paire et impaire pour cette opération. Le fibré Ω_Y^2 est localement libre de rang $\binom{4}{2} = 6$, les fibrés Ω_{Y+}^2 et Ω_{Y-}^2 sont localement libres de rang 3.

PROPOSITION 4.- On a le tableau suivant :

$\mathcal{R}^1_{q_*\Omega_Z^2 X}(i)$	0	0	0
$q_*\Omega_Z^2 X(i)$	$\mathcal{O}_Y(-3)$	$\mathcal{O}_Y^{-T}(-3)$	$S^{2\mathcal{O}_Y^{-T}}(-3) = \Omega_{Y-}^2 = \Omega_Y^2/\Omega_{Y+}^2$
i	-2	-1	0

Démonstration.- On a $\mathcal{R}^k_{q_*\Omega_Z^2|X}(i) = \mathcal{R}^k_{q_*}(\mathcal{O}_Z(2+i, -3))$, d'où le tableau extrait de celui de la proposition 2, avec $q_*\Omega_Z^2|X = S^{2\mathcal{O}_Y^{-T}}(-3)$. Le transport des 2-formes par q définit un morphisme $q^* : \Omega_Y^2 \longrightarrow q_*\Omega_Z^2|X$. Il résulte de l'exposé sur la transformation de Penrose, (n°4, prop.) que le noyau du morphisme de fibrés correspondant est le sous-fibré fermé des f tels que $*f = f$. Par suite on obtient un morphisme injectif $\Omega_Y^2 = \Omega_Y^2/\Omega_{Y+}^2 \longrightarrow q_*\Omega_Z^2|X$, et le morphisme de fibrés associés est encore injectif. Comme ces deux fibrés sont de rang 3, c'est un isomorphisme, c.q.f.d.

Remarque 5.- L'image directe de la résolution

$\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\partial} \Omega_Z^1|X \otimes \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\partial} \Omega_Z^2|X \otimes \mathcal{E}_1$ de \mathcal{E}_0 par q_* est $\mathcal{F} \longrightarrow \Omega_Y^1 \otimes \mathcal{F} \longrightarrow (\Omega_Y^2/\Omega_{Y+}^2) \otimes \mathcal{F}$. La première flèche est donnée par la connexion de Penrose ∇ , comme il résulte de la définition de cette connexion, et la deuxième flèche est déduite de la dérivation extérieure par rapport à cette connexion. On observera que $\nabla \nabla f = \mathcal{R} \otimes f$ pour f section de \mathcal{F} , $\mathcal{R} \otimes f \in \Omega_{Y+}^2 \otimes \mathcal{F}$ puisque $*\mathcal{R} = \mathcal{R}$; on retrouve le fait que la composée des deux flèches est nulle.

5. Une suite exacte.

Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_0(-2) \longrightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}^2 \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{E}^j = \Omega_Z^j|X \otimes \mathcal{E}_1(-2)$. Le terme \mathbb{E}^1 de la suite spectrale relative de cette résolution de $\mathcal{E}_0(-2)$ est donné par le tableau suivant :

\mathcal{R}^1_{q*}	$\mathcal{F}(-1)$	0	0
q_*	0	0	$\mathcal{F}(-3)$
	\mathcal{C}^0	\mathcal{C}^1	\mathcal{C}^2

PROPOSITION 5.- On a sur $Y-S$ une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{C}_0(-2) \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}(-3) \quad .$$

Ceci résulte de la suite spectrale, mais nous allons en donner une démonstration plus élémentaire, ce qui permettra d'obtenir une meilleure description de θ .

Démonstration.- On peut décomposer la résolution de \mathcal{C}_0 en suites exactes courtes :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{C}_0(-2) &\longrightarrow \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathcal{Z} &\xrightarrow{\iota} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\partial^1} \mathcal{C}^2 \longrightarrow 0 \quad . \end{aligned}$$

Il en résulte des suites exactes de faisceaux sur $Y-S$.

$$\begin{aligned} q_* \mathcal{Z} &\longrightarrow \mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{C}_0(-2) \longrightarrow \mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\partial_*} \mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{Z} \\ 0 \longrightarrow q_* \mathcal{Z} &\longrightarrow q_* \mathcal{C}^1 \longrightarrow q_* \mathcal{C}^2 \xrightarrow{\delta} \mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{C}^1 \\ &\quad \parallel \quad \quad \parallel \\ &\quad 0 \quad \mathcal{F}(-3) \quad \quad 0 \end{aligned}$$

La deuxième donne $q_* \mathcal{Z} = 0$ et $\mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{Z} = \mathcal{F}(-3)$; la première devient alors la suite exacte annoncée, avec $\theta = \delta^{-1} \circ \partial_*$.

Remarque 6.- Il est plus ou moins clair que θ doit être un opérateur différentiel d'ordre 2 . C'est en tout cas ce que nous constaterons au paragraphe 7.

6. Laplacien relatif à une forme $u \in H^0(Y; \mathcal{O}_Y(1))$.

La variété $Y = G_2 \mathbb{C}^4$ est munie naturellement d'une structure conforme algébrique (cf. exposé "Transformation de Penrose"). Mieux : on a une forme quadratique sur T_X à valeurs dans $\mathcal{O}_Y(2)$. En effet, pour $t \in T_{Y,y} = \text{Hom}(\mathfrak{E}_y^-; \mathfrak{E}_y^+)$, on a $\wedge^2 t \in \text{Hom}(\wedge_y^-; \wedge_y^+) = \wedge_y^{+\otimes 2}$. En polarisant, on obtient un morphisme de faisceaux : $\alpha : \mathcal{C}_Y \otimes \mathcal{C}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y(2)$, d'où un isomorphisme $\tilde{\alpha} : \mathcal{C}_Y(-2) \longrightarrow \Omega_Y^1$.

Rappelons que le fibré F sur $Y-S$ est muni d'une connexion : si $\varphi \in \mathcal{F}(V)$ avec $V \subset Y-S$, on a $\nabla \varphi \in \Omega_Y^1 \otimes \mathcal{F}(V)$. On pose alors $\text{grad} \varphi = (\hat{\alpha}^{-1} \otimes 1) \nabla \varphi \in \mathcal{C}_Y \otimes \mathcal{F}(-2)(V)$.

On peut aussi définir la divergence. Remarquons d'abord que $\Omega_Y^4 = \mathcal{C}_Y^4(-4)$ et que le produit intérieur permet d'identifier $\Omega_Y^4 \otimes \mathcal{C}_Y$ à Ω_Y^3 , de sorte que $\Omega_Y^3 = \mathcal{C}_Y^3(-4)$.

On définit $\text{div} : \mathcal{C}_Y \otimes \mathcal{F}(-4) \longrightarrow \mathcal{F}(-4)$ par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_Y \otimes \mathcal{F}(-4) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathcal{F}(-4) \\ \parallel & & \parallel \\ \Omega_Y^3 \otimes \mathcal{F} & \xrightarrow{\nabla} & \Omega_Y^4 \otimes \mathcal{F} \end{array} .$$

On ne peut pas définir de façon naturelle $\text{grad} \varphi$ pour $\varphi \in \mathcal{F}(k)$ ou $\text{div} \Psi$ pour $\Psi \in \mathcal{C}_Y \otimes \mathcal{F}(k)$ si $k \neq 0$ (resp. $k \neq -4$). En particulier, on ne peut pas définir $\Delta \varphi = \text{div} \text{grad} \varphi$ sans faire de choix.

Soit $u \in H^0(Y; \mathcal{O}_Y(1))$. On définit $\text{grad}_u : \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{C}_Y \otimes \mathcal{F}(-3)$ et $\text{div}_u : \mathcal{C}_Y \otimes \mathcal{F}(-3) \longrightarrow \mathcal{F}(-3)$ sur $Y-(S \cup H)$, où $H = u^{-1}(0)$, par $\text{grad}_u \varphi = u^{-1} \text{grad}(u\varphi)$ et $\text{div}_u \varphi = u \text{div}(u^{-1} \varphi)$. Ceci permet de définir $\Delta_u : \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F}(-3)$ par $\Delta_u \varphi = \text{div}_u(\text{grad}_u \varphi)$. Nous allons maintenant examiner comment Δ_u dépend de u . Il est évident que $\Delta_{\lambda u} = \Delta_u$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

PROPOSITION 6.- Soient u et $v \in H^0(Y; \mathcal{O}_Y(1))$, et notons h la fonction méromorphe $\frac{v}{u}$. Pour $\varphi \in \mathcal{F}(-1)$, on a

$$\Delta_v \varphi = \Delta_u \varphi + \frac{1}{h} (\Delta_u h - \frac{2}{h} \alpha(\text{grad} h, \text{grad} h)) \cdot \varphi .$$

Ici, $\Delta_u h = u^2 \text{div}(u^{-2} \text{grad} h)$.

Démonstration.- Pour $f \in \mathcal{C}_Y(V)$, $\varphi \in \mathcal{F}(-1)(V)$, $\Psi \in \mathcal{C}_Y \otimes \mathcal{F}(-3)(V)$, on a

$$\text{grad}_u(f\varphi) = f \cdot \text{grad}_u \varphi + \text{grad} f \otimes \varphi$$

$$\text{div}_u(f\Psi) = f \text{div}_u \Psi + \alpha(\text{grad} f, \Psi)$$

(ici on prend $\alpha : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}(-5) \longrightarrow \mathcal{F}(-3)$).

On en déduit, pour $v = hu$,

$$\text{grad}_Y \varphi = h^{-1} \text{grad}_u(h\varphi) = \text{grad}_u \varphi + \frac{1}{h} \text{grad } h \otimes \varphi$$

$$\text{div}_Y \Psi = h \text{div}_u(h^{-1}\Psi) = \text{div}_u \Psi - \frac{1}{h} \alpha(\text{grad } h, \Psi) \quad .$$

D'où la formule de la proposition, c.q.f.d.

Pour $y \in Y$, on note C_y l'ensemble des $y' \in Y$ tels que $D_y \cap D_{y'} \neq \emptyset$. Si on plonge Y dans $\mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^4) = \mathbb{P}^5 \mathbb{C}$, C_y est l'intersection de Y avec l'hyperplan projectif tangent à Y . Il existe donc un $u_y \in H^0(Y; \mathcal{O}_Y(1))$, unique à un facteur près, tel que $u_y^{-1}(0) = C_y$. On pose $\Delta_y = \Delta_{u_y}$ pour un tel u_y .

PROPOSITION 7.— Soient y_0 et y_1 deux points de Y . Les opérateurs Δ_{y_0} et $\Delta_{y_1} : \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F}(-3)$ coïncident sur $Y - (S \cup C_{y_0} \cup C_{y_1})$.

Démonstration.— Soit $y_\infty \in Y - (C_{y_0} \cup C_{y_1})$. Nous écrirons Φ_0 pour Φ_{y_0} , etc. On a $\mathbb{C}^4 = \Phi_0 \oplus \Phi_\infty$, et pour tout $y \in Y - C_\infty$, Φ_y est le graphe d'une application linéaire de Φ_0 dans Φ_∞ . On obtient ainsi une carte c représentant $Y - C_\infty$ sur $\text{Hom}(\Phi_0; \Phi_\infty)$. L'expression de C_0 dans cette carte est le cône $\eta^{-1}(0)$, où η est la forme quadratique $f \longmapsto \det f$ à valeurs dans $(\wedge^2 \Phi_0)^{\otimes -2}$, qu'on peut identifier à \mathbb{C} .

Choisissons u_0 et $u_\infty \in H^0(Y; \mathcal{O}_Y(1))$ s'annulant sur C_0 et C_∞ . L'expression de $h = \frac{u_0}{u_\infty}$ dans la carte c est une fonction algébrique régulière h telle que $h^{-1}(0) = \eta^{-1}(0)$, et avec multiplicité 1; on a donc $h = \lambda \eta$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et on peut supposer $\lambda = 1$. L'expression de $\text{grad } h$ (resp. $\Delta_\infty h$) dans la carte c est simplement le gradient (resp. le laplacien) de η relativement à la forme quadratique η . On trouve $\Delta \eta = \frac{2}{\eta} (\text{grad } \eta)^2 = 8$ (η n'est autre que le carré de la distance à 0). La proposition 6 donne $\Delta_0 = \Delta_\infty$, c.q.f.d.

COROLLAIRE.— Il existe un opérateur $\Delta_{\text{alg}} : \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F}(-3)$, défini au-dessus de $Y - S$, et dont la restriction à $(Y - S \cup C_y)$ est Δ_y pour tout $y \in Y$.

7. Plus de doute, c'est lui !

THEOREME 2.- L'opérateur $\theta = \delta^{-1} \circ \partial_* : \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F}(-3)$ de la proposition 5
est de la forme $k \cdot \Delta_{\text{alg}}$, où k est une constante non nulle indépendante
de \mathcal{E} .

La démonstration de ce théorème est l'objet de ce paragraphe. L'idée est de montrer que θ est l'extension à \mathcal{F} d'un opérateur différentiel $\mathcal{L}(1) \rightarrow \mathcal{L}(-3)$ indépendant de \mathcal{F} , et qui ne peut être, pour des raisons d'invariance, qu'un multiple du Laplacien. Mais la notion d'extension d'un opérateur différentiel à un fibré muni d'une connexion n'est valide que pour des opérateurs d'ordre 1 (le fibré tangent T_Y n'a pas de connexion naturelle), et nous allons être amenés à décomposer l'opérateur θ en deux opérateurs d'ordre 1, tout en prenant soin de faire cette construction de façon assez naturelle pour que les arguments d'invariance s'appliquent.

7.1. Produit tensoriel d'un opérateur d'ordre 1 par une connexion.

Soient M une variété, E, G , deux fibrés vectoriels, $L : E \rightarrow G$ un opérateur différentiel d'ordre 1, F un fibré muni d'une connexion. Notons $\mathcal{J}(L) : E \otimes \Omega^1 \rightarrow G$ le symbole principal de L . Il existe un et un seul opérateur d'ordre 1, noté

$$L \otimes \nabla : E \otimes F \longrightarrow G \otimes F$$

tel que, pour toute section locale e de E et f de F on ait

$$7.1.1. \quad L \otimes \nabla (e \otimes f) = L(e) \otimes f + \mathcal{J}(L) \otimes \text{Id}_F(e \otimes \nabla f).$$

Cet opérateur est appelé le produit tensoriel de L par ∇ .

Soient $\alpha : E' \rightarrow E$, $\beta : G \rightarrow G'$ des homomorphismes linéaires. Alors

$$7.1.2. \quad (\beta \circ L \circ \alpha) \otimes \nabla = (\beta \otimes \text{Id}_F) \circ L \otimes \nabla \circ \alpha \otimes \text{Id}_F.$$

Enfin, supposons que M, E, G, L, F, ∇ soient \mathbb{C} -analytique. Soit $q : M \rightarrow N$ un morphisme propre tel que q_*E , q_*G soient des fibrés. Soit F' un fibré \mathbb{C} -analytique sur N muni d'une connexion ∇' tel que $F = q^*F'$, $\nabla = q^*\nabla'$. On a alors la formule de projection

$$7.1.3 \quad q_*(L \otimes q^* \nabla') = (q_* L) \otimes \nabla' .$$

Toutes ces assertions sont élémentaires et leurs démonstrations sont laissées au lecteur. A titre d'exemple, notons que les opérateurs de divergence et gradient définis au n°6 pour les fibrés F munis de connexions sont des produits tensoriels des opérateurs de divergence et gradient pour le fibré trivial, par la connexion de F . De même avec les notations des numéros 4, 5, 6, considérons les suites exactes sur $Z = q^{-1}(S)$,

$$\mathcal{E}_1(-i) \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}_1 \otimes \Omega_{Z/X}^1(-i) \xrightarrow{\partial} \mathcal{E}_1 \otimes \Omega_{Z/X}^2(-i) \longrightarrow 0 .$$

Le faisceau \mathcal{E}_1 est le faisceau des sections de q^*F et est par suite muni d'une connexion. Les opérateurs ∂ de ces suites exactes sont des produits tensoriels des opérateurs correspondants pour le fibré trivial, par la connexion.

7.2. Complexe de Koszul.

Nous choisissons un point y_∞ , posons $\mathfrak{E}_\infty^+ = \mathfrak{E}_{y_\infty}^+$, $D_\infty = D_{y_\infty}$, etc... Remarquons que $Y - C_\infty$ est naturellement un espace affine sous $\mathbb{L}(\mathfrak{E}_\infty^+; \mathfrak{E}_\infty^-)$.

Le faisceau \mathcal{O}_{D_∞} admet sur X une résolution de Koszul :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-2) \otimes \wedge_\infty^\tau \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}_X(-1) \otimes \mathfrak{E}_\infty^{+\tau} \xrightarrow{\nu} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{D_\infty} \longrightarrow 0 .$$

Par image réciproque sur Z , on obtient un complexe

$$(7.2.1) \quad \mathcal{K} : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z(-2) \otimes \wedge_\infty^\tau \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}_Z(-1) \otimes \mathfrak{E}_\infty^{+\tau} \xrightarrow{\nu} \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

qui est acyclique en dehors de $p^{-1}(D_\infty) \subset q^{-1}(C_\infty)$.

Sur $Y - C_\infty$, on obtient par image directe

$$\begin{array}{ccccccc} q_* \mathcal{O}_Z(-1) \otimes \mathfrak{E}_\infty^{+\tau} & \longrightarrow & q_* \mathcal{O}_Z & \longrightarrow & \mathcal{R}^1 q_* \mathcal{O}_Z(-2) \otimes \wedge_\infty^\tau & \longrightarrow & \mathcal{R}^1 q_* \mathcal{O}_Z(-1) \otimes \mathfrak{E}_\infty^{+\tau} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & \mathcal{O}_Y & & \mathcal{O}_Y(-1) \otimes \wedge_\infty^\tau & & 0 \end{array}$$

d'où compte tenu de l'identification de la proposition 2, un isomorphisme

$$(7.2.2) \quad \delta_\infty : \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y(-1) \otimes \wedge_\infty^\tau .$$

D'autre part l'injection naturelle $\wedge_\infty^\tau \hookrightarrow (\wedge^2 \mathbb{C}^4)^\tau = H^0(Y; \mathcal{O}_Y(1))$ donne un morphisme

$$(7.2.3) \quad \omega_\infty : \mathcal{O}_Y(-1) \otimes \wedge_\infty^T \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

qui est un isomorphisme sur $Y - C_\infty$. Le composé $\omega_\infty \circ \delta_\infty : \mathcal{O}_Y^k \longrightarrow \mathcal{O}_Y$ est la multiplication par une fonction algébrique $Y - C_\infty \longrightarrow \mathbb{C}$, inversible sur l'espace affine $Y - C_\infty$, donc constante; notons c sa valeur. L'application $y_\infty \longmapsto c$ de Y dans \mathbb{C}^* est algébrique, donc constante. Autrement dit, on a

$$(7.2.4) \quad \delta_\infty = c \cdot \omega_\infty^{-1}$$

où c est une constante indépendante du choix de y_∞ . Quand on fait le calcul, on trouve $c = \pm 1$ ou $\pm 2i\pi$, suivant les conventions adoptées, notamment dans la dualité de Serre qui est intervenue dans l'identification de la proposition 2.

7.3. Un complexe double.

Considérons sur Z le complexe double de faisceaux

$$(7.3.1) \quad \begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}_1(-2) \otimes \wedge_\infty^T & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}_1 \otimes \Omega_{Z|X}^1(-2) \otimes \wedge_\infty^T & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}_1 \otimes \Omega_{Z|X}^2(-2) \otimes \wedge_\infty^T \\ \downarrow \mu^0 & & \downarrow \mu^1 & & \downarrow \mu^2 \\ \mathcal{E}_1(-1) \otimes \mathfrak{E}_\infty^{+T} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}_1 \otimes \Omega_{Z|X}^1(-1) \otimes \mathfrak{E}_\infty^{+T} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}_1 \otimes \Omega_{Z|X}^2(-1) \otimes \mathfrak{E}_\infty^{+T} \\ \downarrow \gamma^0 & & \downarrow \gamma^1 & & \downarrow \gamma^2 \\ \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}_1 \otimes \Omega_{Z|X}^1 & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}_1 \otimes \Omega_{Z|X}^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

obtenu en tensorisant (3.1) par (7.2.1). Comme les colonnes sont exactes sur $Z - C_\infty$, le complexe \mathcal{Q}'' obtenu en se restreignant aux deux dernière lignes est une résolution, sur $Z - q^{-1}(C_\infty)$, de la ligne du haut.

Sur $Z - q^{-1}(S)$, le faisceau \mathcal{E}_1 s'identifie à $q^* \mathcal{F}$. Sur $Z - q^{-1}(S \cup C_\infty)$, en vertu des résultats du §4, les termes de \mathcal{Q}'' sont q_* -acycliques (i.e.

$\mathcal{R}^1_{q*} \mathcal{Q}'' = 0$), et l'image directe par q de (7.3.1) est le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(-3) \otimes \Lambda_{\infty}^T \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \mu^2 \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} \otimes \tilde{\partial}^{+T}(-1) \otimes \tilde{\partial}_{\infty}^{+T} & \xrightarrow{\partial^0 \otimes \nabla} & \mathcal{F} \otimes \tilde{\partial}^{-T}(-3) \otimes \tilde{\partial}_{\infty}^{+T} \\
 & & \downarrow \approx 1 \otimes \nu^1 & & \downarrow 1 \otimes \nu^2 \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{F} \otimes \Omega_Y^1 & \xrightarrow{\partial^1 \otimes \nabla} & \mathcal{F} \otimes s^2 \tilde{\partial}^{-T}(-3) \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

où ∂^0 , ∂^1 , ν^2 , μ^2 sont les opérateurs que l'on obtient en prenant $\mathcal{E} = \mathcal{Q}$ (pour ∂^0 et ∂^1 cela résulte de la formule (7.1.3)).

PROPOSITION 8.- L'opérateur $\tilde{\theta}$ de la proposition 5 est donné sur $Y - (S \cup C_{\infty})$ par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & & \\
 \downarrow & \searrow \tilde{\theta} & \\
 \mathcal{F}(-1) \otimes \Lambda_{\infty}^T & \xrightarrow{\tilde{\theta} \otimes 1} & \mathcal{F}(-3) \otimes \Lambda_{\infty}^T
 \end{array}$$

où $\tilde{\theta}(f) = -(1 \otimes \mu^2)^{-1}(\partial^0 \otimes \nabla)(1 \otimes \nu^1)^{-1} \nabla f$.

Remarque 7.- Il résulte de l'exactitude de la colonne de droite de 7.3.2 et de la commutativité du diagramme que la formule donnée définit bien un opérateur $\tilde{\theta}$.

Démonstration.- On peut décomposer le diagramme 7.3.1 en deux, en introduisant les noyaux des deuxième flèches horizontales :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{E}_1(-2) \otimes \Lambda_{\infty}^T & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{Z} \otimes \Lambda_{\infty}^T & & 0 \rightarrow \mathcal{Z} \otimes \Lambda_{\infty}^T & \xrightarrow{\approx} & \mathcal{Q}^1 \otimes \Lambda_{\infty}^T \rightarrow \mathcal{Q}^2 \otimes \Lambda_{\infty}^T \rightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{Z}^{00} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{Z}^0 & & 0 \rightarrow \mathcal{Z}^0 & \xrightarrow{\approx} & \mathcal{Q}^{10} \rightarrow \mathcal{Q}^{20} \rightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{Z}^{01} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{Z}^1 & & 0 \rightarrow \mathcal{Z}^1 & \xrightarrow{\approx} & \mathcal{Q}^{11} \rightarrow \mathcal{Q}^{21} \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

La première partie donne la commutativité de

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\partial} & q_* \mathcal{Z}^1 \\
 \delta_\infty \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{R}^1_{q_*} \mathcal{E}_1(-2) \otimes \wedge_\infty^\tau & \xrightarrow{\partial_* \otimes 1} & \mathcal{R}^1_{q_*} \mathcal{Z} \otimes \wedge_\infty^\tau \\
 \parallel & & \\
 \mathcal{F}(-1) \otimes \wedge_\infty^\tau & &
 \end{array}$$

Reste à montrer la commutativité de

$$\begin{array}{ccc}
 q_* \mathcal{Z}^1 & & \\
 \delta \downarrow & \searrow \tilde{\theta}' & \\
 \mathcal{R}^1_{q_*} \mathcal{Z} \otimes \wedge_\infty^\tau & \xleftarrow{\delta \otimes 1} & q_* \mathcal{E}^2 \otimes \wedge_\infty^\tau
 \end{array}$$

où $\tilde{\theta}' = - (1 \otimes \mu^2)^{-1} (\partial^0 \otimes \nabla) (1 \otimes \nu^1)^{-1} \iota$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z} \otimes \wedge_\infty^\tau \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}} \mathcal{Z}^0 \oplus \mathcal{E}^1 \otimes \wedge_\infty^\tau \longrightarrow \mathcal{W} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{W} est le sous-faisceau de $\mathcal{Z}^1 \oplus \mathcal{Z}^{10} \oplus \mathcal{E}^2 \otimes \wedge_\infty^\tau$ formé des (u, v, w) tels que $\iota(u) = \nu^1(v)$ et $\partial v = \mu^2 w$.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z} \otimes \wedge_\infty^\tau & \xrightarrow{-\mu} & \mathcal{Z}^0 & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{Z}^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \pi_1 \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z} \otimes \wedge_\infty^\tau & \longrightarrow & \mathcal{Z}^0 \oplus \mathcal{E}^1 \otimes \wedge_\infty^\tau & \longrightarrow & \mathcal{W} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z} \otimes \wedge_\infty^\tau & \longrightarrow & \mathcal{E}^1 \otimes \wedge_\infty^\tau & \longrightarrow & \mathcal{E}^2 \otimes \wedge_\infty^\tau \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où π_1 et π_2 sont les projections, montre que

$$\begin{array}{ccc}
 q_* \mathcal{Z}_1 & & \\
 \pi_2 \circ \pi_1^{-1} \downarrow & \searrow & \mathcal{R}^1_{q_*} \mathcal{Z} \otimes \wedge_\infty^\tau \\
 q_* \mathcal{E}^2 \otimes \wedge_\infty^\tau & \xrightarrow{\delta_{-\mu, \nu}} &
 \end{array}$$

est commutatif. Or $\pi_1 : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{Z}^1$ est un isomorphisme, $\theta' = -\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, et

$\delta_{-\mu, \nu} = -\delta_{\mu, \nu}$, d'où la proposition.

7.4. Une rétraction naturelle. .

En tensorisant 7.2.1 par $\Omega_{Z|X}^2$, on obtient un complexe sur Z :

$$0 \longrightarrow \Omega_{Z|X}^2(-2) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge_{\infty}^T \xrightarrow{1 \otimes \mu} \Omega_{Z|X}^2(-1) \otimes_{\mathbb{C}} \delta_{\infty}^{+T} \xrightarrow{1 \otimes \nu} \Omega_{Z|X}^2 \longrightarrow 0$$

exact sur $Z - q^{-1}(C_{\infty})$. En prenant les images directes par q on obtient, compte tenu des identifications de la proposition 4, un complexe exact sur $Y - C_{\infty}$:

$$0 \longrightarrow \wedge_{\infty}^T \xrightarrow{\mu^2} \delta_{\infty}^{-T} \otimes_{\mathbb{C}} \delta_{\infty}^{+T}(-3) \xrightarrow{\nu^2} S^2 \delta_{\infty}^{-T}(-3) \longrightarrow 0$$

Les morphismes μ^2 et ν^2 sont, après tensorisation par $\mathcal{O}_Y(-3)$, ceux qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \wedge_{\infty}^T & \longrightarrow & \delta_{\infty}^{+T} \otimes \delta_{\infty}^{+T} \\ \mu^2 \searrow & & \downarrow i \otimes 1 \\ & & \delta_{\infty}^{-T} \otimes \delta_{\infty}^{+T} \\ & & \downarrow 1 \otimes i \\ & & \delta_{\infty}^{-T} \otimes \delta_{\infty}^{-T} \longrightarrow S^2 \delta_{\infty}^{-T} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \nearrow \nu^2 \end{array}$$

où $i : \delta_{\infty}^{-} \longrightarrow \delta_{\infty}^{+}$ est le transposé du morphisme naturel et les flèches horizontales sont les applications naturelles.

En composant la rétraction $\delta_{\infty}^{+T} \otimes \delta_{\infty}^{+T} \longrightarrow \wedge_{\infty}^T$ qui à un tenseur associe sa composante antisymétrique avec l'inverse de $i \otimes 1$, puis en tensorisant avec $\mathcal{O}_Y(-3)$, on obtient au-dessus de $Y - C_{\infty}$ une rétraction ρ de μ^2 .

La proposition 8 admet maintenant comme conséquence :

COROLLAIRE.- L'opérateur $\theta \otimes 1 \circ \delta_{\infty} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}(-3) \otimes \wedge_{\infty}^T$ est composé de deux opérateurs différentiels de degré 1 :

$$\nabla : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \Omega_Y^1$$

et

$$\theta_1^{\mathcal{F}} = (1 \otimes \rho) \circ (\partial^0 \otimes \nabla) \circ (1 \otimes \nu^1)^{-1} : \mathcal{F} \otimes \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{F}(-3) \otimes \wedge_{\infty}^T.$$

Remarque 3.- On voit que l'opérateur θ_1 est de la forme $\theta_1 \otimes \nabla$, où $\theta_1 : \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-3) \otimes \wedge_{\infty}^T$ est un opérateur différentiel indépendant de \mathcal{F} , défini sur $Y - C_{\infty}$.

7.5. Opérations de G_∞ .

Le groupe $G = \mathrm{SL}(4, \mathbb{C})$ opère sur X et sur tout ce qui lui est attaché fonctoriellement, notamment sur Y et sur Z . Cette opération respecte toutes les identifications du paragraphe 4 (il n'en serait pas de même pour $\mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$, notamment dans le lemme 4). Notons G_∞ le stabilisateur dans G du point $y_\infty \in Y$. Ce groupe opère par transport de structure sur \mathcal{O}_Y , $\mathcal{O}_Y(-1)$, \wedge_∞^T , etc. Il respecte sur $Y - C_\infty$ la structure d' "espace affine conforme", i.e. d'espace affine associé à un espace vectoriel muni d'une forme quadratique non dégénérée définie à un facteur près. Toutes les constructions que nous avons faites dans ce paragraphe sont invariantes par l'action de G_∞ . Il en est ainsi de l'opérateur $\theta_1 : \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \otimes \wedge_\infty^T$ de la remarque 8.

PROPOSITION 9.- Tout automorphisme de $Y - C_\infty$ pour sa structure d'espace affine conforme est induit par un élément de G_∞ .

Démonstration : notons Λ le groupe des automorphismes de $Y - C_\infty$ comme espace affine conforme. On a un homomorphisme $\varphi : G_\infty \longrightarrow \Lambda$ dont on veut montrer qu'il est surjectif. Le noyau de φ se compose des éléments de G_∞ qui opèrent trivialement sur Y , donc des homothéties de rapport ± 1 , $\pm i$. Comme G_∞ et Λ sont tous deux des groupes de Lie complexe de dimension 11, et que φ est analytique, $\varphi(G_\infty)$ est un sous-groupe ouvert de Λ . Mais Λ est connexe, donc $\varphi(G_\infty) = \Lambda$.

On voit maintenant que l'opérateur θ_1 , défini sur $Y - C_\infty$, est invariant par Λ .

7.6. Opérateurs invariants.

Soit V un espace affine sous un espace vectoriel V_0 muni d'une forme quadratique non dégénérée α . Le groupe $\Gamma = \mathrm{ASO}(\alpha)$ des transformations affines de V dont la transformation linéaire associée est déterminant 1 et préserve α opère sur le fibré tangent TV .

PROPOSITION 10.- a) Tout opérateur différentiel $M : \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_V$ de degré 1 invariant par Γ est de la forme $f \mapsto k \operatorname{grad} f$, où k est une constante.

b) Tout opérateur différentiel $L : \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_V$ de degré 1 invariant par Γ est de la forme $\xi \mapsto k \operatorname{div} \xi$, où k est une constante.

Nous donnerons seulement la démonstration de la partie b, qui est la seule que nous utiliserons. La démonstration de a est analogue.

Le symbole de L est un morphisme $\Omega_V \otimes \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_V$ invariant par l'action de Γ : c'est nécessairement, à un facteur près, l'accouplement canonique, qui est d'ailleurs le symbole de l'opérateur "divergence". Par suite L est de la forme $k \cdot \operatorname{div} + \varphi$, où $\varphi : \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_V$ est un opérateur de degré 0, i.e. un morphisme, invariant par l'action de Γ . Mais ceci entraîne $\varphi = 0$, c.q.f.d.

7.7. Démonstration du théorème 2.

Reprenons le diagramme commutatif sur $Y - (C_\infty \cup S)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{F} \otimes \Omega_Y^1 \\ \delta_\infty \downarrow & & \searrow \theta_1^{\mathcal{F}} = \theta_1 \otimes \nabla \\ \mathcal{F}(-1) \otimes \wedge_\infty^T & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & \mathcal{F}(-3) \otimes \wedge_\infty^T \end{array}$$

du corollaire de la proposition 8. On peut encore l'écrire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \otimes \wedge_\infty & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{F} \otimes \Omega_Y^1 \otimes \wedge_\infty \\ \delta_\infty \otimes 1 \downarrow & & \searrow \theta_1^{\mathcal{F}} = \theta_1 \otimes \nabla \\ \mathcal{F}(-1) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{F}(-3) \end{array}$$

et le compléter en

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} \otimes \wedge_{\infty} & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{F} \otimes \Omega_Y^1 \otimes \wedge_{\infty} \\
 \delta_{\infty} \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \delta_{\infty} \otimes 1 \\
 \mathcal{F}(-1) & & \mathcal{F}(-1) \otimes \Omega_Y^1 \\
 & \searrow \text{grad}_{\delta_{\infty}} & \downarrow \tilde{\alpha} \\
 & & \mathcal{F}(-3) \otimes \mathcal{C}_Y \\
 & \nearrow \theta & \nearrow \tilde{\theta}_1^{\mathcal{F}} = \tilde{\theta}_1 \otimes \nabla \\
 & & \mathcal{F}(-3)
 \end{array}$$

où $\tilde{\theta}_1$ est un opérateur différentiel $\mathcal{C}_Y(-3) \longrightarrow \mathcal{C}(-3)$ indépendant de \mathcal{F} , défini sur $Y - C_{\infty}$.

Soit $w \in H^0(Y; \mathcal{L}(1))$ une section telle que $w^{-1}(0) = C_{\infty}$. L'opérateur $L : \mathcal{C}_Y(-3) \longrightarrow \mathcal{C}_Y$ défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}_Y(-3) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_1} & \mathcal{C}_Y(-3) \\
 w^3 \downarrow & & \downarrow w^3 \\
 \mathcal{C}_Y & \xrightarrow{L} & \mathcal{C}_Y
 \end{array}$$

est invariant par l'action du groupe Λ des automorphismes de $Y - C_{\infty}$ comme espace affine conforme, et a fortiori par l'action du groupe $ASO(\alpha)$ contenu dans le précédent. Par suite L est de la forme $k \cdot \text{div}$, où k est une constante indépendante de \mathcal{F} , et $\tilde{\theta}_1 = k \text{div}_{\infty}$, d'où $\theta = k \Delta_{\infty}$ sur $Y - C_{\infty}$.

Reste à montrer que k n'est pas nul. Si k était nul, la proposition 1 et la proposition 5 donneraient $H^1(X; \mathcal{E}(-2)) = H^0(M; \mathcal{F}(-1))$. Mais M , forme réelle de Y , admet un système fondamental de voisinages de Stein et $H^0(M; \mathcal{F}(-1))$ est de dimension infinie dès que E est de rang $r > 0$, tandis que $H^1(X; \mathcal{E}(-2))$ est de dimension finie. Ceci achève de démontrer le théorème 2 énoncé au début du paragraphe 7.

8. Un théorème de positivité.

PROPOSITION 11.- On suppose $F|_M$ muni d'une forme hermitienne compatible avec la connexion. Alors, pour $\varphi \in H^0(M; \mathcal{F}(-1))$, non nul, on a

$$\int_M \langle \varphi | \Delta_{\text{alg}} \varphi \rangle < 0 .$$

Démonstration.- Posons $v = u_0 + u_\infty$. Dans la carte de M définie par la décomposition $C^4 = \Phi_0 \oplus \Phi_\infty$, on a $v = (1+r^2)u_\infty$, où r est la distance à l'origine. Ceci donne

$$\Delta_v \varphi = \Delta_\infty \varphi + \frac{1}{h} (\Delta_\infty h - \frac{2}{h} \alpha(\text{grad } h, \text{grad } h)) \cdot \varphi .$$

On a $\eta = \frac{1}{h} (\Delta_\infty h - \frac{2}{h} \alpha(\text{grad } h, \text{grad } h)) > 0$.

En effet, $h > h_0 = r^2$, donc $\frac{2}{h} < \frac{2}{h_0}$, et pour h_0 on trouve 0 (cf. proposition 7).

Par suite $\Delta_{\text{alg}} \varphi = \Delta_v \varphi - \eta \varphi$, avec $\eta > 0$. Or v ne s'annule en aucun point de M . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_M \langle \varphi | \Delta_{\text{alg}} \varphi \rangle &= \int_M \langle \varphi | \Delta_v \varphi \rangle - \int_M \eta \|\varphi\|^2 \\ &= - \left(\int_M \eta \|\varphi\|^2 + \|\text{grad}_v \varphi\|^2 \right) < 0 , \text{ c.q.f.d.} \end{aligned}$$

COROLLAIRE.- L'opérateur $\Theta : H^0(M; \mathcal{F}(-1)) \longrightarrow H^0(M; \mathcal{F}(-3))$ est injectif.

Le théorème énoncé au n° 1 est une conséquence de la proposition 1 , de la proposition 5, et de ce corollaire.

INSTANTONS

par J.-L. VERDIER

1. Énoncé des résultats.

1.1. Sur la sphère euclidienne S^4 , on considère les fibrés vectoriels complexes F de classe C^∞ , de rang 2, munis d'une forme hermitienne et d'une connexion \mathcal{A} compatible avec la structure hermitienne, dont la courbure \mathcal{R} est autoduale ($\ast \mathcal{R} = \mathcal{R}$ cf. exp. II). Un tel fibré est appelé un instanton. Notons $k \in \pi_3(S_3) = \mathbb{Z}$ le nombre de Pontrjagin de F et $I(k)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'instantons de nombre de Pontrjagin k .

1.2. Soit k un nombre entier ≥ 0 . Notons \mathbb{H} le corps des quaternions. Pour tout $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2$ et tout couple (A_1, A_2) de matrices quaternioniques à $k+1$ lignes et k colonnes ($A_i \in \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^k, \mathbb{H}^{k+1})$), posons $B(q) = A_1 q_1 + A_2 q_2$. Posons alors
$$\tilde{M} = \left\{ (A_1, A_2) \mid \forall q \neq 0, B(q)^\ast B(q) \in GL(k, \mathbb{R}) \right\}.$$

Notons $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(k+1)$ le groupe des matrices $(k+1) \times (k+1)$ quaternioniques a telles que $a^\ast a = \text{Id}$, et

$$\tilde{G} = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(k+1) \times GL(k, \mathbb{R}).$$

Le groupe \tilde{G} opère sur \tilde{M} par $(a, b)(A_1, A_2) = (aA_1b^{-1}, aA_2b^{-1})$.

Le sous-groupe $\{-1, +1\}$ plongé diagonalement dans \tilde{G} opère trivialement sur \tilde{M} . L'opération de \tilde{G} sur \tilde{M} se factorise donc par $G = \tilde{G} / \{-1, +1\}$. Posons $M = \tilde{M}/G$. Si $k < 0$ posons

$M = \mathcal{M}$.

1.3. THÉORÈME

1) Pour $k \geq 0$, \tilde{M} est une sous-variété non vide de $\text{Hom}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^k, \mathbb{H}^{k+1})^2$ et le groupe G opère proprement et librement sur \tilde{M} . Pour $k > 0$, le quotient $M = \tilde{M}/G$ est une variété de dimension $8k - 3$.

2) Il existe une bijection canonique entre $I(k)$ et M .

2. Structure réelle et quaternionique sur $X = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

2.1. On se donne un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire (à gauche) de \mathbb{H}^2 avec \mathbb{C}^4 . La multiplication (à gauche) par $j \in \mathbb{H}$ induit un automorphisme antilinéaire encore noté $j : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$, de carré (-1) .

Notons $\sigma : \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ l'application continue induite par j . On a $\sigma^2 = \text{id}$. Pour toute fonction analytique φ définie sur un ouvert U de X , $\sigma^* \varphi = \overline{\varphi \circ \sigma}$ est une fonction analytique définie sur $\sigma(U)$. Le couple (σ, σ^*) encore noté

$\sigma : \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est une forme réelle de $X = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, i.e. σ^* est antilinéaire et $\sigma^2 = \text{Id}_X$. Il existe donc une variété algébrique $X_{\mathbb{R}}$ définie sur \mathbb{R} telle que $X_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = X$ et telle que l'involution qu'on en déduit sur X soit σ . Cette involution n'a pas de point fixe , i.e. $X_{\mathbb{R}}$ n'a pas de point rationnel sur \mathbb{R} .

2.2. Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . Alors $\sigma^* \mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X et $\sigma^* \sigma^* \mathcal{F}$ est canoniquement isomorphe à \mathcal{F} . Appelons forme réelle sur \mathcal{F} un isomorphisme

$\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \sigma^* \mathcal{F}$ tel que $\sigma^* \lambda \circ \lambda = \text{Id}_{\mathcal{F}}$. Les formes réelles sur \mathcal{F} permettent de construire tous les faisceaux cohérents

$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ sur $X_{\mathbb{R}}$ munis d'un isomorphisme $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{F}$.

2.3. Appelons forme quaternionique sur \mathcal{F} , un isomorphisme $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \sigma^* \mathcal{F}$ tel que $\sigma^* \lambda \circ \lambda = -\text{Id}_{\mathcal{F}}$.

2.4. L'endomorphisme $j : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ induit des isomorphismes $j^{\otimes n} : \mathcal{O}_X(-n) \longrightarrow \sigma^* \mathcal{O}_X(-n)$. L'isomorphisme $j^{\otimes n}$ est une forme réelle ou quaternionique suivant que n est pair ou impair. Notons aussi, à titre d'exemple, que Ω'_X est muni d'une forme réelle car X est muni d'une forme réelle. On vérifie aisément que l'homomorphisme canonique $\Omega'_X \hookrightarrow \mathbb{H}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(-1)$ est compatible avec les formes réelles sur ces faisceaux.

2.5. PROPOSITION.- Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X tel que $\text{Aut}(\mathcal{F}) = \mathbb{C}^*$. Trois cas seulement, mutuellement exclusifs, sont possibles

- a) \mathcal{F} n'est pas isomorphe à $\sigma^* \mathcal{F}$,
- b) \mathcal{F} possède une forme réelle,
- c) \mathcal{F} possède une forme quaternionique.

De plus, dans les cas b) et c) la forme réelle ou quaternionique est uniquement déterminée à un scalaire de module 1 près.

Supposons qu'on ne soit pas dans le cas a) et soit $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \sigma^* \mathcal{F}$ un isomorphisme. Posons $\alpha = \sigma^* \lambda \circ \lambda$. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\lambda} & \sigma^* \mathcal{F} & \xrightarrow{\sigma^* \lambda} & \mathcal{F} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \sigma^* \lambda & & \downarrow \lambda \\ \sigma^* \mathcal{F} & \xrightarrow{\sigma^* \lambda} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\lambda} & \sigma^* \mathcal{F} \end{array}$$

implique $\lambda \circ \sigma^* \lambda = \alpha$. D'où $\sigma^* \lambda \circ \lambda = \bar{\alpha}$ et par suite $\alpha = \bar{\alpha}$ donc α est réel. En multipliant λ par $\mu \in \mathbb{C}^*$, on multiplie α par $\mu \bar{\mu}$. Quitte à changer λ , on peut donc se ramener au cas $\alpha = +1$ ou $\alpha = -1$ d'où la proposition.

2.6. La forme réelle σ sur X induit par transport de structure une forme réelle sur $Y = G_2 \mathbb{C}^4$. Les points fixes M de cette forme réelle sont les droites réelles de X , i.e. les droites de X stables par σ , i.e. les plans de $\mathbb{C}^4 = \mathbb{H}^2$ stables par j , i.e. les droites quaternioniques de \mathbb{H}^2 , i.e. les points de $\mathbb{P}^1 \mathbb{H} = S^4$.

2.7. PROPOSITION.- Soit E un fibré algébrique de rang 2 sur X trivial sur toutes les droites réelles. Soit (F, \mathcal{A}) (resp. (F', \mathcal{A}')) le fibré de rang 2 sur S^4 muni de sa connexion associé à E (resp. $\sigma^* E$) par la transformation de Penrose (exp. III). Alors F' est canoniquement isomorphe au conjugué de F et \mathcal{A}' est la connexion conjuguée de \mathcal{A} .

Démonstration par transport de structure.

2.8. Soient (F, \mathcal{A}) un instanton, E le fibré algébrique sur X de rang 2 associé à (F, \mathcal{A}) par la transformation de Penrose inverse (exp. IV). Au fibré $\wedge^2 F$ est associé $\wedge^2 E$, un fibré algébrique de rang 1 trivial sur toutes les droites réelles de X , donc trivial. Par transformation de Penrose inverse, $(\wedge^2 F, \wedge^2 \mathcal{A})$ est isomorphe au fibré constant de rang 1 muni de la connexion de Poincaré. Il existe donc sur (F, \mathcal{A}) une forme bilinéaire alternée non nulle horizontale, unique à un facteur scalaire près. Cette forme bilinéaire est de la forme $(\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha, \lambda \beta \rangle$ où λ est antilinéaire horizontale et on a $\lambda^* = -\lambda$. L'opérateur $\lambda^2 = -\lambda \lambda^*$ est donc hermitien négatif horizontal. Ses valeurs propres sont par suite constantes et négatives. Si elles sont distinctes, alors F est somme directe de deux sous-fibrés de rang 1, orthogonaux et horizontaux, donc F est un fibré trivial de rang 2 et $k = 0$. Si donc $k \neq 0$, λ^2 est une constante négative

et quitte à changer la forme alternée par un scalaire, on peut toujours se ramener au cas $\lambda^2 = -1$. En résumé on a démontré l'essentiel de la proposition suivante

2.9. PROPOSITION.- Soit (F, \mathcal{A}) un instanton. Il existe un automorphisme antilinéaire horizontal $\lambda : F \longrightarrow F$ tel que $\lambda^2 = -\text{Id}$ et $\lambda = -\lambda^*$.

L'étude du cas $k = 0$ est laissée au lecteur.

2.10. COROLLAIRE.- Soient (F, \mathcal{A}) un instanton et E le fibré algébrique sur X associé. Alors E possède une forme quaternionique.

Résulte de 2.7. et de la fonctorialité de la transformation de Penrose.

2.11. THÉORÈME.- Soit k un entier. La transformation de Penrose établit une bijection entre l'ensemble $I(k)$ des classes d'isomorphismes d'instantons de nombre de Pontrjagin k et l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés algébriques E sur $X = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ qui possèdent de plus les propriétés suivantes

- a) $C_2(E) = k$,
- b) E est trivial sur toute droite réelle,
- c) E possède une structure quaternionique.

Soient (F, \mathcal{A}) un instanton, E le fibré algébrique correspondant. Alors le fibré topologique sous-jacent à E est l'image inverse de F par l'application $X \longrightarrow S^4$ qui, à tout point x , associe l'unique droite réelle passant par x . Par suite $C_2(E) = C_2(F) = k$.

Soient (F, \mathcal{A}) un fibré de rang 2 sur S^4 muni d'une connexion \mathcal{A} autoduale et \langle, \rangle_1 , \langle, \rangle_2 deux structures hermitiennes horizontales sur F . Il existe alors un automorphisme

horizontal u de (F, \mathcal{A}) qui transporte $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ sur $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Par suite les classes d'isomorphismes d'instantons (isomorphismes respectant les connexions et les structures hermitiennes) correspondent biunivoquement aux classes d'isomorphismes de fibrés munis de connexions autoduales (isomorphismes respectant seulement la connexion) qui de plus possèdent une structure hermitienne horizontale. Comme on a montré que les classes d'isomorphismes de fibrés sur S^4 munis de connexions autoduales correspondent biunivoquement par la transformation de Penrose aux classes d'isomorphismes de fibrés algébriques sur X possédant la propriété b) (exp. II et III), il suffit de montrer que (F, \mathcal{A}) possède une structure hermitienne si et seulement si le fibré algébrique E associé possède une structure quaternionique. On a vu que si (F, \mathcal{A}) est un instanton, alors E possède une structure quaternionique (2.10.). Réciproquement soit $\lambda : E \longrightarrow \sigma^* E$ une structure quaternionique. Alors λ induit un automorphisme de F horizontal antilinéaire que nous noterons μ . On a $\mu^2 = -\text{id}_F$. On peut donc munir F d'une structure de fibré de rang 1 sur les quaternions en imposant que la multiplication par $j \in \mathbb{H}$ soit l'automorphisme μ . Comme E est trivial sur les droites réelles, on a $C_1(E) = 0$. Donc $\Lambda^2 E$ est le fibré trivial sur X ; il est muni de la structure réelle $\Lambda^2 \lambda$. Donc $(\Lambda^2 E, \Lambda^2 \lambda)$ est isomorphe à (O_X, σ^*) (2.5.). En d'autres termes, il existe une forme bilinéaire alternée sur E telle que $(\lambda^{-1} \circ \sigma^* \alpha, \lambda^{-1} \circ \sigma^* \beta) = \sigma^*(\alpha, \beta)$. Par suite il existe une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur F , horizontale, telle que $(\mu \alpha, \mu \beta) = \overline{(\alpha, \beta)}$. Donc $\alpha, \beta \longmapsto \langle \alpha, \beta \rangle = (\alpha, \mu \beta)$ est une forme sesquilinéaire horizontale non dégénérée. Comme pour

tout $\alpha \neq 0$, $\mu\alpha$ n'est pas colinéaire à α , on a
 $\langle \alpha, \alpha \rangle = (\alpha, \mu\alpha) \neq 0$. Il existe donc un nombre réel ρ tel que
 $\alpha, \beta \mapsto \rho \langle \alpha, \beta \rangle$ soit une forme hermitienne positive horizontale,
 c.q.f.d.

2.12. Remarques. - 1) Pour k négatif strictement, il n'y a pas de
 fibré E de rang 2 sur X tel que $C_2(E) = k$ et que E soit
 trivial sur toutes les droites réelles (exp. IV^{*)}. Il n'y a donc pas
 d'instanton de nombre de Pontrjagin < 0 .

2) Les fibrés E de rang 2 sur X tels que $C_2(E) = 0$ et
 que E soit trivial sur toutes les droites réelles sont des sommes
 de 2 fibrés triviaux de rang 1 : en effet la variété des droites
 de saut de E est vide (degré = 0)^{*} et on conclut par le théorème
 de Van de Ven. Donc les instantons de nombre de Pontrjagin nul sont
 des sommes directes de 2 fibrés triviaux de rang 1 munis de la
 connexion de Poincaré.

3) On a vu dans l'exposé IV que les fibrés E de rang 2 sur X
 tels que $C_2(E) = 1$ et que $C_1(E) = 0$ sont classés par les formes
 bilinéaires alternées non dégénérées sur \mathbb{C}^4 à multiple scalaire
 près. Un fibré E correspondant à la forme bilinéaire
 $\alpha, \beta \mapsto (\alpha, \beta)_E$ est isomorphe à $\sigma^* E$ si et seulement si il existe
 $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(\alpha, \beta)_E = \lambda (j\alpha, j\beta)_E$ où $j \in \mathbb{H}$ opère sur $\mathbb{C}^4 = \mathbb{H}^2$.
 Un tel λ est de module 1 et on peut le rendre égal à 1 en
 multipliant $(\alpha, \beta)_E$ par un scalaire convenable. La multiplication
 par j induit sur $(\wedge^2 \mathbb{C}^4)^*$ une structure réelle ; l'ensemble des
 points fixes est un espace vectoriel réel isomorphe à \mathbb{R}^6 . Les
 formes non dégénérées correspondent au complémentaire d'un cône
 quadratique non dégénéré de $(\wedge^2 \mathbb{C}^4)^*$. Par suite les fibrés E
^{*)} Exp IV, § 9, Th. 2 et 3.

isomorphes à σ^*E correspondent aux points de \mathbb{RP}^5 situés dans le complémentaire d'une quadrique réelle Q . Les points de Q correspondent aux formes bilinéaires non nulles, dégénérées, réelles, sur \mathbb{C}^4 et par suite aux plans réels de \mathbb{C}^4 i.e. aux droites réelles de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ i.e. aux points de S^4 . Donc cette quadrique réelle est difféomorphe à S^4 . Cette quadrique est donc de signature $(1,5)$. Il en résulte que le complémentaire a deux composantes connexes ; qu'une des composantes est difféomorphe à un disque de dimension 5 et que l'autre composante est une variété ouverte de dimension 5 qui a le type d'homotopie de \mathbb{RP}^4 . On vérifie que les fibrés correspondants aux points de ces deux composantes connexes possèdent des structures quaternioniques. Les instantons correspondent donc à ceux qui de plus sont triviaux sur les droites réelles (2.11.). D'après l'exposé IV, § 14, lemme 4, les instantons correspondent donc aux formes bilinéaires alternées, réelles, b telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^4 - \{0\}$, $b(\alpha, j\alpha) \neq 0$. Comme $b(\alpha, j\alpha) \in \mathbb{R}$, on a donc $b(\alpha, j\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^4 - \{0\}$ quitte à multiplier éventuellement b par -1 . L'ensemble des conditions $\left\{ \forall \alpha \in \mathbb{C}^4 - \{0\}, b(\alpha, j\alpha) > 0 \right\}$ définit un cône convexe de \mathbb{R}^6 et par suite les instantons de nombre de Pontrjagin 1 correspondent aux points de la composante contractile de $\mathbb{RP}^5 - Q$ i.e. aux points d'un disque ouvert de dimension 5. On verra dans la suite que ce disque est la variété M (n° 1).

3. Fibrés symplectiques.

3.1. On appelle fibré symplectique sur un espace S un fibré E , muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée $E \times E \longrightarrow 0_S$.

Les isomorphismes de fibrés symplectiques doivent donc préserver la forme symplectique. Lorsque E est de rang 2 et symplectique on a un isomorphisme $\wedge^2 E \simeq \mathcal{O}_S$ et par suite $C_1(E) = 0$. Réciproquement tout fibré de rang 2 sur $X = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ dont le C_1 est nul, peut être muni d'une structure symplectique uniquement définie à un scalaire près.

3.2. PROPOSITION.- Soient S un espace analytique ou algébrique complexe, \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 deux fibrés symplectiques de rang 2 sur $X \times S$ tels que pour tout $s \in S$, $\mathcal{E}_{1,s}$ et $\mathcal{E}_{2,s}$ soient des fibrés stables sur $X \times \{s\}$. Alors le foncteur qui à tout $S' \longrightarrow S$ associe l'ensemble des isomorphismes de $\mathcal{E}_{1,S'}$ sur $\mathcal{E}_{2,S'}$ est représentable par un espace $\text{Isom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \longrightarrow S$ qui est un revêtement de degré 2 d'un fermé de S .

Soit $\pi_S : X \times S \longrightarrow S$ la projection. D'après le théorème de semi-continuité, il existe localement sur S un complexe de faisceaux cohérents localement libres $K^\bullet = K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \longrightarrow K^2 \longrightarrow K^3$ tel que pour tout $S' \xrightarrow{u} S$, $\mathcal{H}^i(u^* K^\bullet) = R^i \pi_{S'} \mathcal{H}^i(\mathcal{E}_{1,S'}, \mathcal{E}_{2,S'})$. Soient F^0, F^1 les fibrés dont les faisceaux de section sont K^0 et K^1 respectivement, $u : F^0 \longrightarrow F^1$ l'homomorphisme de fibrés correspondant à l'homomorphisme $K^0 \xrightarrow{d^0} K^1$, H^0 le sous-espace de l'espace total de F^0 , image inverse de la section nulle de F^1 par u . Les différentes définitions locales de H^0 se recollant et définissant un espace global $H^0 \longrightarrow S$ qui est un espace vectoriel au-dessus de S dont les fibres sont des espaces vectoriels de dimension variable. L'espace H^0 représente le foncteur suivant. Pour tout $S' \longrightarrow S$, les morphismes $S' \longrightarrow H^0$ au-dessus de S correspondent biunivoquement aux morphismes de

fibrés $\mathcal{E}_{1,S} \longrightarrow \mathcal{E}_{2,S}$. En particulier pour tout $s \in S$, la fibre H_s^0 est en bijection canonique avec les homomorphismes de $\mathcal{E}_{1,s}$ dans $\mathcal{E}_{2,s}$. Comme $\mathcal{E}_{1,s}$ et $\mathcal{E}_{2,s}$ sont des fibrés stables, H_s^0 est de dimension 0 ou 1. Il en résulte que H^0 est l'espace total d'un fibré vectoriel de rang 1 sur un sous-espace fermé T de S : Cela se voit en remarquant que H^0 est le spectre (relatif) de la \mathcal{O}_S -algèbre $\text{Sym}(\mathcal{F})$ où \mathcal{F} est le faisceau cohérent sur S , $\text{Coker } d^0 : K^1 \longrightarrow K^0$. On a pour tout $s \in S$, $\text{rg } \mathcal{F}_s = 0$ ou 1. Par suite \mathcal{F}_s est un faisceau localement libre de rang 1 sur un sous-espace fermé T . Sur tout ouvert U de T on a $\Gamma(U, H^0) = \text{Hom}(\mathcal{E}_{1,U}, \mathcal{E}_{2,U})$. L'application $f \longmapsto \wedge^2 f$ de $\text{Hom}(\mathcal{E}_{1,U}, \mathcal{E}_{2,U})$ dans $\text{Hom}(\mathcal{O}_{X \times U}, \mathcal{O}_{X \times U}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ définit une application $\det : H^0 \longrightarrow T \times \mathbb{A}^1$, compatible avec les projections sur T et qui sur chaque fibre est quadratique non dégénérée. Posons $I = \det^{-1}(T \times \{1\})$. C'est un revêtement d'ordre 2 de T qui représente les isomorphismes de \mathcal{E}_1 dans \mathcal{E}_2 .

4. Fibrés de Yang-Mills.

4.1. DÉFINITION.- On appelle fibré de Yang-Mills sur $X = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ un fibré symplectique de rang 2, trivial sur presque toute droite tel que $H^1(E(-2)) = 0$.

Il revient au même de dire que E est symplectique semi-stable et que $H^1(E(-2)) = 0$ (IV, § 9, th. 1) ou encore que E est symplectique et que $H^0(E(-1)) = H^1(E(-2)) = 0$ (IV, § 6, prop. 5') ou encore que E est symplectique et peut être défini par une monade.

4.2. PROPOSITION.- Soient E_1 et E_2 deux fibrés de Yang-Mills tels que $C_2(E_2) > 0$ pour $i = 1, 2$. Notons $\mathcal{H}om(E_1, E_2)$ le fibré des homomorphismes de E_1 dans E_2 . Posons

$$h^i(E_1, E_2) = \text{rg. } H^i(\mathcal{H}om(E_1, E_2)) = \text{rg } \text{Ext}^i(E_1, E_2) .$$

$$1) \text{ On a } h^3(E_1, E_2) = 0 .$$

2) On a $h^0(E_1, E_2) = 1$ ou 0 suivant que E_1 est isomorphe à E_2 ou non.

$$3) \text{ On a } h^1(E_1, E_2) = 4C_2(E_1) + 4C_2(E_2) - 4 + h^0(E_1, E_2) + h^2(E_1, E_2) .$$

En particulier les fibrés de Yang-Mills non triviaux sont stables.

Montrons d'abord, par l'absurde, que les fibrés de Yang-Mills E non triviaux sont stables. La démonstration nous a été indiquée par D. Ferrand. Soit $s : \mathcal{O}_X \longrightarrow E$ une section non nulle. Comme $H^0(E(-1)) = 0$, l'image de cette section est un sous-faisceau de rang 1 localement libre maximal de E et par suite on a une suite exacte

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} E \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

où C est une courbe de X localement intersection complète de degré $C_2(E)$ donc non vide. Soit ω_C le faisceau dualisant de C . De $(*)$ on tire $\omega_C = \mathcal{O}_C(-4)$. Soit \mathcal{I}_C le faisceau d'idéaux de C . De $(*)$ on tire deux suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} E \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0 \quad 0 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

et de l'égalité $H^1(E(-2)) = 0$, on tire $H^1(\mathcal{I}_C(-2)) = 0$ donc

$H^0(\mathcal{O}_C(-2)) = 0$. Pour tout $n \geq -2$, on a $H^1(\mathcal{O}_C(n))$ dual de $H^0(\mathcal{O}_C(-n-4))$ (car $\omega_C = \mathcal{O}_C(-4)$) et $H^0(\mathcal{O}_C(-n-4)) = 0$ car $-n-4 \leq -2$ et $H^0(\mathcal{O}_C(-2)) = 0$. Soit Y une composante irréductible de C . On a $H^1(\mathcal{O}_Y(n)) = 0$ pour $n \geq -2$. En parti-

culier $H^1(\mathcal{O}_Y) = 0$ donc $Y \simeq \mathbb{P}^1$, mais alors on ne peut avoir $H^1(\mathcal{O}_Y(-2)) = 0$; contradiction.

Comme les fibrés de Yang-Mills E non triviaux sont stables, on a $\text{End} E = \mathbb{C}$. On en déduit aussitôt les assertions sur les $h^0(\mathcal{H}\text{om}(E_1, E_2))$. Or $H^3(\mathcal{H}\text{om}(E_1, E_2))$ est dual de $H^0(\mathcal{H}\text{om}(E_2, E_1)(-4))$ et comme une section de $\mathcal{H}\text{om}(E_2, E_1)$ ne s'annule en un point de X que si elle s'annule partout, on a $H^3(\mathcal{H}\text{om}(E_1, E_2)) = 0$. Par ailleurs on a $C_1(\mathcal{H}\text{om}(E_1, E_2)) = 0$, $C_2(\mathcal{H}\text{om}(E_1, E_2)) = 2C_2(E_1) + 2C_2(E_2)$, $C_3(\mathcal{H}\text{om}(E_1, E_2)) = 0$; d'où le calcul du h^1 par le théorème de Riemann-Roch.

4.3. PROPOSITION.— La transformation de Penrose établit une bijection entre les classes d'isomorphismes d'instantons et les classes d'isomorphismes de fibrés de Yang-Mills E tels que

- 1) E possède une structure quaternionique,
- 2) E est trivial sur toute droite réelle.

D'après 2.11., le transformé inverse d'un instanton est un fibré E trivial sur toute droite réelle qui possède une structure quaternionique. D'après l'exp. VI on a $H^1(E(-2)) = 0$. Comme $C_1(E) = 0$, E possède une structure symplectique unique à un facteur scalaire près. Donc les classes d'isomorphismes non nécessairement symplectiques de tels objets correspondent biunivoquement aux classes d'isomorphismes symplectiques. La proposition résulte donc de 2.11.

5. Module des fibrés de Yang-Mills.

5.1. Soient $k > 0$ un entier, W un espace vectoriel de dimension k , V un espace vectoriel de dimension $2k + 2$, muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée. Posons $T = \mathbb{C}^4$. Soit

$\mathcal{V} \subset \text{Hom}_{\mathbb{C}}(T \otimes W_0, V)$ la variété algébrique des applications linéaires

$\psi : T \otimes W \longrightarrow V$ telles que pour tout $t \in T$, $\psi(t \otimes w)$ soit un sous-espace isotrope de V . La variété \mathcal{V} est une sous-variété fermée de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(T \otimes W_0, V)$. C'est donc une variété affine. Notons \tilde{Y}^M l'ensemble des $\psi \in \mathcal{V}$ tels que pour tout $t \in T - \{0\}$, $w \longrightarrow \psi(t \otimes w)$ soit injectif. Il résulte du théorème des images directes d'ensembles algébriques par les morphismes propres que \tilde{Y}^M est un ouvert de Zariski de \mathcal{V} .

5.2. Posons $\tilde{G}_{\mathbb{C}} = \text{Gl}(W) \times \text{Sp}(V)$. Le groupe $\{-1, +1\}$ plongé diagonalement dans le centre de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ est invariant. Posons $G = \tilde{G}_{\mathbb{C}} / \{-1, +1\}$. Le groupe $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ opère algébriquement sur \mathcal{V} par $(g_1, g_2) \cdot \psi = g_2 \circ \psi \circ g_1^{-1}$. Le sous-groupe $\{-1, +1\}$ opère trivialement. On en déduit par passage au quotient une opération algébrique de $G_{\mathbb{C}}$ sur \mathcal{V} . L'ouvert \tilde{Y}^M est stable par l'opération de $G_{\mathbb{C}}$.

5.3. Pour tout $\psi \in \tilde{Y}^M$, notons E_{ψ} le fibré sur X , cohomologie de la monade associée à :

$$0 \longrightarrow W \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{\psi} V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \xrightarrow{t_{\psi}} W \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow 0.$$

Le fibré E_{ψ} est un fibré de Yang-Mills. On obtient ainsi un fibré symplectique E sur $X \times \tilde{Y}^M$ tel que pour tout $\psi \in \tilde{Y}^M$, E_{ψ} soit un fibré de Yang-Mills. L'opération du groupe $G_{\mathbb{C}}$ sur \tilde{Y}^M se relève en une opération de $G_{\mathbb{C}}$ sur $(X \times \tilde{Y}^M, E)$, triviale sur X . On notera que le sous-groupe central $\{-1, +1\}$ n'agit pas trivialement sur E .

5.4. PROPOSITION.- Le groupe $G_{\mathbb{C}}$ opère proprement et librement sur \tilde{Y}^M .

La correspondance qui à une monade associe son fibré de coho-

mologie est une équivalence de la catégorie des monades dans la catégorie des fibrés de Yang-Mills (cf. § 7). Comme les fibrés de Yang-Mills sont stables (4.2.), le stabilisateur de tout $\psi \in \tilde{Y\tilde{M}}$ dans $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ est le sous-groupe central diagonal ; d'où la liberté. Sur $\tilde{Y\tilde{M}} \times \tilde{Y\tilde{M}}$ notons E_1, E_2 les familles algébriques de fibrés de Yang-Mills déduites de E (5.3.) par les deux projections. Il existe alors une variété algébrique $\text{Isom}(E_1, E_2)$ qui est un revêtement d'ordre 2 d'une sous-variété fermée de $\tilde{Y\tilde{M}} \times \tilde{Y\tilde{M}}$ (3.2.). Sur $\text{Isom}(E_1, E_2)$, on a l'isomorphisme classifiant qui fournit un morphisme algébrique de $\text{Isom}(E_1, E_2) \longrightarrow \tilde{G}_{\mathbb{C}}$ en vertu de l'équivalence de catégories entre les monades et les fibrés de Yang-Mills. Par ailleurs on a un morphisme algébrique $\text{Isom}(E_1, E_2) \longrightarrow \tilde{Y\tilde{M}}$ obtenu en composant l'application canonique $\text{Isom}(E_1, E_2) \longrightarrow \tilde{Y\tilde{M}} \times \tilde{Y\tilde{M}}$ avec la première projection. Ces morphismes donnent donc un morphisme de $\text{Isom}(E_1, E_2) \longrightarrow \tilde{Y\tilde{M}} \times \tilde{G}_{\mathbb{C}}$ qui est inverse du morphisme $\tilde{Y\tilde{M}} \times \tilde{G}_{\mathbb{C}}$ déduit de la propriété universelle de $\text{Isom}(E_1, E_2)$. Donc le morphisme $\tilde{Y\tilde{M}} \times \tilde{G}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \tilde{Y\tilde{M}} \times \tilde{Y\tilde{M}}$ $((\psi, g) \longmapsto (\psi, g\psi))$ est un revêtement d'ordre 2 d'une sous-variété algébrique fermée de $\tilde{Y\tilde{M}} \times \tilde{Y\tilde{M}}$. En particulier il est propre.

5.5. Posons $YM = \tilde{Y\tilde{M}} / \tilde{G}_{\mathbb{C}}$ et notons $\pi : \tilde{Y\tilde{M}} \longrightarrow YM$ l'application de passage au quotient. Comme tout fibré de Yang-Mills est donné par une monade, les points de YM correspondent biunivoquement aux classes d'isomorphismes de fibrés de Yang-Mills. Pour tout $x \in YM$, on notera E_x un fibré de Yang-Mills dans la classe d'isomorphisme correspondante.

5.6. THÉORÈME.- Il existe sur YM une structure de variété algébrique quasi-projective et sur π une structure de morphisme de

variétés algébriques telles que π fasse de $Y\tilde{M}$ un fibré principal de groupe $G_{\mathbb{C}}$ et de base YM .

Soit F le fermé $\mathcal{U} - YM$. Pour tout $\psi \in Y\tilde{M}$, l'orbite $\tilde{G}_{\mathbb{C}} \psi$ est disjointe de F .

Comme $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ est réductif, il existe une fonction algébrique f sur \mathcal{U} , nulle sur F invariante par $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$, non nulle en ψ ([3]). Soit U l'ouvert affine $\{f \neq 0\}$. Il est stable par $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ et contient ψ . L'opération de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ sur U est propre. Donc tout point de YM est stable pour l'action de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ au sens de [3]. Il suffit alors d'appliquer les résultats de loc. cit.

5.7. PROPOSITION.- Pour tout $x \in YM$ il existe un voisinage (transcendant) V_x de x dans YM et une famille analytique E_{V_x} de fibrés de Yang-Mills paramétrée par V_x , faisant de (V_x, E_{V_x}) un module de déformation universelle de E_x .

Comme $Y\tilde{M}$ est un fibré principal de groupe \tilde{G} sur YM , en tout point $x \in YM$, il existe une section locale s de π définie sur un voisinage V_x convenable. On pose alors $E_{V_x} = s^*E$ (5.3.). La famille obtenue ne dépend pas, à isomorphisme près, de la section choisie et sur $\pi^{-1}(V_x)$ on a $E \simeq \pi^*E_{V_x}$. Soient (Z, z) un germe d'espace analytique et E_Z une déformation paramétrée par Z de E_x . Quitte à diminuer Z , on peut supposer que cette déformation est décrite par la déformation d'une monade (cf. § 7), et donc qu'il existe un morphisme $f: Z \rightarrow Y\tilde{M}$ tel que $\pi \circ f(3) = x$ et $f^*E \simeq E_Z$. Donc on a un morphisme $\pi \circ f: Z \rightarrow YM$ tel que $(\pi \circ f)^*E_{V_x} \simeq E_Z$ et un tel morphisme est uniquement déterminé par la famille E_Z c.q.f.d.

5.8. THÉORÈME.- 1) En tout point $x \in \text{YM}$, on a

$$8k - 3 \leq \dim_x \text{YM} \leq 8k - 3 + h^2(E_x, E_x) .$$

2) En tout point $x \in \text{YM}$ la dimension de l'espace tangent de Zariski en x est $8k - 3 + h^2(E_x, E_x)$.

3) En tout point $x \in \text{YM}$, tel que le fibré E_x corresponde à un instanton, YM est lisse de dimension $8k - 3$.

Il résulte de 5.7. que, en tout point $x \in \text{YM}$, l'espace formel associé à (YM, x) est un module de déformation universel formel de E_x . Il résulte de la théorie des déformations formelles que l'espace tangent de Zariski à ce module formel est de dimension $h^1(E_x, E_x) = \text{rg Ext}^1(E_x, E_x)$, d'où la deuxième assertion d'après 4.2. De plus on sait que ce module peut être décrit par une équation sur cet espace tangent de Zariski, à valeurs dans $\text{Ext}^2(E_x, E_x)$ qui est de rang $h^2(E_x, E_x)$; d'où la première assertion. Pour démontrer la troisième assertion, il suffit donc de montrer qu'en tout point $x \in \text{YM}$ correspondant à un instanton F , on a $\text{Ext}^2(E_x, E_x) = H^2(X, \mathcal{H}\text{om}(E_x, E_x)) = 0$.

A $\mathcal{H}\text{om}(E_x, E_x) = E_x \otimes E_x$ correspond la transformation de Penrose $F \otimes F$. Il résulte alors du théorème d'annulation (exp. VI) que $H^1(X, \mathcal{H}\text{om}(E_x, E_x)(-2)) = 0$ et comme $\mathcal{H}\text{om}(E_x, E_x)$ est isomorphe à son dual, on a $H^2(X, \mathcal{H}\text{om}(E_x, E_x)(-2)) = 0$ par dualité de Serre. Supposons $k > 1$ de sorte que E_x n'est pas associé à une corrélation nulle (exp. IV, § 14). Comme E_x est stable (4.2.), il existe un hyperplan $P \subset X$ tel que E_x/P soit stable (exp. I, § 9, th. 4). On a alors deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{H}\text{om}(E_x, E_x)(-2) &\longrightarrow \mathcal{H}\text{om}(E_x, E_x)(-1) \longrightarrow \mathcal{H}\text{om}(E_x/P, E_x/P)(-1) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathcal{H}\text{om}(E_x, E_x)(-1) &\longrightarrow \mathcal{H}\text{om}(E_x, E_x) \longrightarrow \mathcal{H}\text{om}(E_x/P, E_x/P) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

d'où deux suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^2(X, \mathcal{H}om(E_X, E_X)(-1)) \longrightarrow H^2(P, \mathcal{H}om(E_X/P, E_X/P)(-1)) \\ H^2(X, \mathcal{H}om(E_X, E_X)(-1)) &\longrightarrow H^2(X, \mathcal{H}om(E_X, E_X)) \longrightarrow H^2(P, \mathcal{H}om(E_X/P, E_X/P)) \end{aligned}$$

Par dualité de Serre, $H^2(P, \mathcal{H}om(E_X/P, E_X/P)(-1))$ est dual de $H^0(P, \mathcal{H}om(E_X/P, E_X/P)(-2))$ et $H^2(P, \mathcal{H}om(E_X/P, E_X/P))$ est dual de $H^0(P, \mathcal{H}om(E_X/P, E_X/P)(-3))$. Comme E_X/P est stable, ces espaces sont nuls, par suite $h^2(E_X, E_X) = 0$. Le cas particulier $k = 1$ a été traité en 2.12., remarque 3) : on a vu que dans ce cas YM est lisse de dimension 5 (cf. 5.9. ci-dessous).

5.9. On peut montrer facilement que YM est le "module grossier" des fibrés de Yang-Mills, ce qui en donne une caractérisation intrinsèque indépendante des descriptions par les monades. Ainsi l'espace étudié en 2.12. décrit à l'aide du diviseur des droites de saut, est un module grossier donc isomorphe à YM ($k = 1$). L'espace étudié dans l'exposé X décrit à l'aide des courbes associées aux fibrés est un module grossier donc isomorphe à YM ($k = 2$).

6. Structure réelle sur le module des fibrés de Yang-Mills.

6.1. Avec les notations du § 5, notons \bar{W} , \bar{V} les espaces complexes conjugués de W et V respectivement ; munissons \bar{V} de la forme bilinéaire $\alpha, \beta \longmapsto \overline{(\alpha, \beta)}$ et donnons nous $\sigma_1 : W \longrightarrow \bar{W}$ un isomorphisme et $\sigma_2 : V \longrightarrow \bar{V}$ un isomorphisme symplectique. Alors l'application $\psi \longmapsto \sigma_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ j \otimes \sigma_1$ est un morphisme antilinéaire de $Y\tilde{M}$ dans $Y\tilde{M}$. Ce morphisme passe au quotient et fournit un isomorphisme antilinéaire $\sigma : YM \longrightarrow YM$. On constate immédiatement que σ est une forme réelle ($\sigma^2 = Id$) qui ne dépend pas du choix de σ_1 et σ_2 . La variété réelle qu'on en déduit est

notée $YM_{\mathbb{R}}$. L'ensemble de ses points réels est noté $YM(\mathbb{R})$.

6.2. Par construction, $YM(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $x \in YM$ tels que E_x soit isomorphe à $\sigma^* E_x$ (§ 2), donc possède une structure réelle ou quaternionique (2.5.). Le type réel ou quaternionique de E_x est constant sur les composantes connexes de $YM(\mathbb{R})$. Pour étudier les instantons, on s'intéresse aux composantes de type quaternionique (4.3.). Comme la condition de trivialité sur les droites réelles de E_x est ouverte en x , les instantons correspondent aux points d'un ouvert de la réunion des composantes connexes de type quaternionique.

6.3. Donnons alors une structure quaternionique sur V , $j : V \longrightarrow \bar{V}$ telle que $(j\alpha, j\beta) = \overline{(\alpha, \beta)}$ et telle que $\alpha, \beta \longmapsto (\alpha, j\beta)$ soit une forme hermitienne positive non dégénérée, et de plus une structure réelle $\sigma : W \longrightarrow W$. Alors on constate que $\psi \longmapsto -j \circ \bar{\psi} \circ j \otimes \sigma$ est une structure réelle sur \tilde{YM} . Notons \tilde{M} les points réels de \tilde{YM} pour cette structure et posons $M = \pi(\tilde{M})$. Notons $Sp_{\mathbb{R}}(V)$ le groupe des automorphismes symplectiques de V qui commutent à j et $Gl(W_{\mathbb{R}})$ le groupe des automorphismes de W qui commutent à σ . Posons $\tilde{G} = Gl(W_{\mathbb{R}}) \times Sp_{\mathbb{R}}(V)$, $G = \tilde{G} / \{-1, +1\}$. C'est un sous-groupe de $G_{\mathbb{C}}$. Il est clair que \tilde{M} est stable par G .

6.4. THÉORÈME.- 1) M est une sous-variété réelle, ouverte lisse, de $YM(\mathbb{R})$ de dimension $8k - 3$.

2) \tilde{M} est un fibré principal de base M de groupe G .

3) Un fibré E_x , $x \in YM$, correspond à un instanton si et seulement si $x \in M$.

6.5. Soient E un fibré de Yang-Mills, et

$$0 \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{\Phi} S \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \longrightarrow R^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow 0,$$

la monade associée (exp. V). Notons $\alpha, \beta \mapsto (\alpha, \beta)$ la forme bilinéaire alternée sur S . Soit $\lambda : E \longrightarrow \sigma^* E$ une structure quaternionique. Quitte à multiplier λ par un scalaire de module 1,

on peut supposer que λ^2 est la conjugaison sur X . Par functorialité de la monade, on en déduit une structure quaternionique

$j : S \longrightarrow S$ telle que $(j\alpha, j\beta) = \overline{(\alpha, \beta)}$, $\alpha, \beta \in S$. Par suite

$\alpha, \beta \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle = (\alpha, j\beta)$ est une forme hermitienne non dégénérée. Quitte, éventuellement, à multiplier λ par -1 , on peut toujours

supposer qu'il existe un $\alpha \in S$ tel que $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$.

6.6. THÉORÈME.- Le fibré E correspond à un instanton si et seulement si la forme hermitienne $\alpha, \beta \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$ est positive.

6.7. Montrons que 6.6. entraîne 6.4. Soit $\psi \in \tilde{Y}^M$ tel que

$\psi = -j \circ \psi \circ j \otimes \sigma$. L'endomorphisme j de V induit sur E_ψ une structure quaternionique et comme la forme hermitienne

$\alpha, \beta \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$ est positive par construction, il résulte de

6.6. que E_ψ correspond à un instanton. Réciproquement si E_ψ correspond à un instanton, l'espace V se trouve muni d'après 6.5.

et 6.6. d'une forme hilbertienne $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ et d'une structure

quaternionique j_E . De même W est muni d'une forme réelle σ_E

et on a $\psi = -j_E \circ \psi \circ j \otimes \sigma_E$. Il existe un automorphisme v de

V qui transporte la forme hilbertienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$

et la structure quaternionique j sur j_E . Cet automorphisme est

alors nécessairement symplectique. De même il existe un automorphisme

w de W qui transporte la structure réelle de σ sur σ_E . Il

existe donc un $g \in G_{\mathbb{C}}$ qui transforme ψ en un point de \tilde{M} d'où

3). L'assertion 1) résulte de 6.2. et 5.8. (3). Il existe un voisinage de M dans YM qui est lisse et stable par la structure réelle. Donc \tilde{M} apparaît comme l'ensemble des points réels d'une variété lisse. C'est donc une variété réelle lisse. Le groupe G agit librement et proprement sur \tilde{M} (5.4.) et par des arguments analogues à ceux présentés ci-dessus, on voit que le quotient est M d'où 2).

6.8. Commençons la démonstration de 6.6. et montrons que si la forme hermitienne $\alpha, \beta \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$ est positive, alors E est un instanton. Il suffit pour cela de voir que E est trivial sur les droites réelles de X (4.3.). Soit $\Phi : R \otimes_{\mathbb{C}} T \rightarrow S$ l'homomorphisme linéaire définissant la monade. Pour tout $t \in T - \{0\}$ posons $R_t = R \otimes t$. L'espace R_t ne dépend que de l'image \bar{t} de t dans X . D'après l'exposé V, prop. 1, pour que E soit trivial sur la droite de X passant par les points \bar{t} et $j\bar{t}$, il faut et il suffit que $\Phi(R_t)$ et l'orthogonal de $\Phi(R_{jt})$ pour la forme symplectique soient supplémentaires. Remarquons alors que la forme symplectique sur S est $\alpha, \beta \mapsto -\langle \alpha, j\beta \rangle$. Par suite l'orthogonal de $\Phi(R_{jt})$ pour la forme symplectique est l'orthogonal de $j\Phi(R_{jt}) = \Phi(R_{-t}) = \Phi(R_t)$ pour la forme hermitienne. Comme cette forme hermitienne est positive, l'orthogonal de $\Phi(R_t)$ est bien supplémentaire de $\Phi(R_t)$.

6.9. Pour tout a, b dans $R \otimes_{\mathbb{C}} T$ posons $H(a, b) = \langle \Phi(a), \Phi(b) \rangle$. On obtient ainsi une forme hermitienne sur $R \otimes T$ en général dégénérée. On a

$$(1) \quad H(\sigma \otimes j(a), \sigma \otimes j(b)) = H(b, a) \quad .$$

6.10. Lemme. - a) Pour tout $t \in T - \{0\}$, R_t est orthogonal à
 R_{jt} pour H .

b) Pour tout $t \in T - \{0\}$, la restriction de H à R_t est
non dégénérée.

c) Pour tout $t \in T - \{0\}$, la restriction de H à l'orthogo-
nal de $R_t \oplus R_{jt}$ a un signe constant indépendant de t .

La propriété a) résulte du fait que pour tout t , $\Phi(R_t)$ est isotrope pour la forme symplectique de S . La propriété b) résulte du fait que E est trivial sur toute droite réelle de X ; d'après l'exposé V, il faut que pour cela que pour tout $t \in T - \{0\}$, l'orthogonal de $\Phi(R_{jt})$ pour la forme symplectique, c'est-à-dire l'orthogonal de $\bar{\Phi}(R_t)$ pour la forme hermitienne, soit supplémentaire de $\bar{\Phi}(R_t)$. Démontrons 3). La restriction de H à l'orthogonal de $R_t \oplus R_{jt}$ est l'image inverse par $\bar{\Phi}$ de la restriction de la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à l'orthogonal de $\bar{\Phi}(R_t) \oplus \bar{\Phi}(R_{jt})$. Posons $F_t = \bar{\Phi}(R_t) \oplus \bar{\Phi}(R_{jt})$. C'est un sous-espace de dimension 2 de S stable par j . Comme la restriction de la forme hermitienne de S sur $\bar{\Phi}(R_t) \oplus \bar{\Phi}(R_{jt})$ est non dégénérée, la restriction de cette forme à F_t est non dégénérée. Pour $f \in F_t$ on a $\langle f, f \rangle = - \langle f, j \cdot j f \rangle$. Comme $f, g \mapsto \langle f, g \rangle$ est non dégénérée sur F_t , la forme bilinéaire alternée $(f, g) \mapsto \langle f, j g \rangle$ est non dégénérée. Donc si f et g ne sont pas colinéaires, on a $\langle f, j g \rangle \neq 0$ car F_t est de dimension 2. Comme $j f$ n'est pas colinéaire à f si $f \neq 0$, on a $\langle f, j j f \rangle \neq 0$; donc $\langle f, f \rangle \neq 0$. Comme $\langle f, f \rangle$ est un nombre réel, $f \mapsto \langle f, f \rangle$ garde un signe constant sur $F_t - \{0\}$. Ce signe dépend continuellement de t , donc il est

constant par connexité.

6.11. PROPOSITION.- Soient R un espace vectoriel complexe muni d'une forme réelle σ , H une forme hermitienne sur $R \otimes_{\mathbb{C}} T$ qui possède la propriété (1). On suppose que H possède la propriété

a) et b) du lemme 6.10. et la propriété :

c') Pour tout $t \in T - \{0\}$, la restriction de H à l'orthogonal de $R_t \oplus R_{jt}$ est positive.

Alors H est une forme hermitienne positive.

6.12. Montrons comment la proposition 6.11. permet d'achever la démonstration de 6.6. D'après 6.11. la forme hermitienne H a un signe constant sur les W_t qui est aussi celui qu'elle a sur les orthogonaux des $W_t \oplus W_{jt}$. Donc avec les notations de 6.10., la forme hermitienne de S a le même signe sur $\Phi(R_t), \Phi(R_{jt}), F_t$. Elle est donc positive non dégénérée d'après le choix fait en 6.5.

6.13. La démonstration de (6.11.) que nous copions sur [2] repose sur un calcul miraculeux. Notons k la dimension de R . Soient

$e_1, e_2 = je_1, e_3, e_4 = je_3$ une base de T . Posons

$D_0 = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2, D_\infty = \mathbb{C}e_3 + \mathbb{C}e_4$. On a

$R \otimes T = R \otimes D_0 \oplus R \otimes D_\infty = R \otimes e_1 \oplus R \otimes e_2 \oplus R \otimes e_3 \oplus R \otimes e_4$.

Ceci permet, en choisissant une base réelle de R , d'écrire la matrice de H sous formes de matrices par blocs.

6.14. Lemme.- La propriété a) de H (6.11.) équivaut au fait que la matrice de H soit de la forme

$$H = \begin{pmatrix} A & N^* \\ N & M \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_k & 0 \\ 0 & M_k \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} B & C \\ -C^* & B^* \end{pmatrix},$$

$$A_k = A_k^*, \quad M_k = M_k^*.$$

Le lemme se démontre en calculant. On utilise (1) .

6.15. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Posons

$$X(x) = \begin{pmatrix} x_4 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_4 - ix_3 \end{pmatrix},$$

$$\tau(x) = \begin{pmatrix} 1_{D_0} & 0 \\ X(x) & 1_{D_\infty} \end{pmatrix},$$

$$D(x) = \tau(x) D_0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $D(x)$ est un plan de T stable par j , donc correspond à une droite réelle de X . On obtient ainsi une paramétrisation de toutes les droites réelles de X sauf D_∞ . Pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ soit $H(x)$ la forme hermitienne sur $W \otimes T$ telle que

$$H(x)(a, b) = H(\text{Id}_R \otimes \tau(x)(a), \text{Id}_R \otimes \tau(x)(b)).$$

La matrice de $H(x)$ est alors

$$\begin{pmatrix} A(x) & N^*(x) \\ N(x) & M \end{pmatrix},$$

avec

$$A(x) = A + {}^t(\text{Id}_R \otimes X(x)) \cdot N + N^* \cdot \text{Id}_R \otimes \bar{X}(x) + |x|^2 M,$$

$$N(x) = N + M(\text{Id}_R \otimes \bar{X}(x)).$$

6.16. Lemme. - 1) La propriété b) de H (6.11.) entraîne que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $\det A(x) \neq 0$.

2) La propriété c') de H entraîne que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ la
matrice

$$M = N(x) A(x)^{-1} N(x)^*$$

est hermitienne positive.

En effet pour tout x la restriction de H à $W \otimes D_x$ doit être non dégénérée d'où 1). L'assertion 2) se démontre en déterminant l'orthogonal de $W \otimes D_0$ pour $H(x)$ et en calculant la restriction de $H(x)$ à cet orthogonal.

6.17. Lemme.- La matrice $\Delta_x A(x)^{-1}$ est hermitienne négative
(Δ_x = laplacien par rapport à x) .

Posons

$$N_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} iC - iC^* & 0 \\ 0 & iC - iC^* \end{pmatrix}, \quad N_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} C + C^* & 0 \\ 0 & C + C^* \end{pmatrix}$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} iB - iB^* & 0 \\ 0 & iB - iB^* \end{pmatrix}, \quad N_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B + B^* & 0 \\ 0 & B + B^* \end{pmatrix}.$$

Posons $P_i = \frac{\partial}{\partial x_i} X(x)$, $1 \leq i \leq 4$ (matrices de Pauli) . Remarquons que $\text{Id}_R \otimes P_i$ commute à toute matrice $2k \times 2k$ du type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. On a

$$(2) \quad \begin{cases} X(x) = \sum_{i=1}^4 x_i P_i, \\ \sum_{i=1}^4 \text{Id}_R \otimes \bar{P}_i \cdot N_i = N \\ {}^t P_i \bar{P}_j + {}^t P_j \bar{P}_i = 2 \delta_{ij}. \end{cases}$$

On déduit alors de (6.15.) et de (2)

$$(3) \quad A(x) = A + 2 \sum_{i=1}^4 x_i N_i + |x|^2 M$$

En particulier pour tout x , $A(x)$ et $A(x)^{-1}$ sont du type

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}. \text{ On déduit donc de (2)}$$

$$(4) \quad M - N(x)A(x)^{-1}N(x)^* = M - \sum_{ij} (N_i + x_i M) A(x)^{-1} (N_j + x_j M) \text{Id}_R \otimes \bar{P}_i {}^t P_j$$

Soit θ l'opérateur sur les matrices $2k \times 2k$ qui, à une matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \text{ associe } \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} + \alpha_{22} \end{pmatrix}. \text{ Si } U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

on a $\theta(UV) = U \theta(V)$. On a

$$(5) \quad \theta(\text{Id}_R \otimes \bar{P}_i {}^t P_j) = 2 \delta_{ij} \text{Id}_R.$$

On déduit de (4) et (5)

$$(6) \quad \theta(M - N(x)A(x)^{-1}N(x)^*) = 2M - 2 \sum_1^4 (N_i + x_i M) A(x)^{-1} (N_i + x_i M).$$

Comme θ transforme les matrices hermitiennes positives en matrices hermitiennes positives, le deuxième membre de (6) est positif.

La matrice $A(x)$ est hermitienne non dégénérée (6.16.). Pour montrer que $\Delta_x A(x)^{-1}$ est négative, il suffit donc de montrer que

$$S(x) = -A(x)(\Delta_x A(x)^{-1})A(x)$$

est hermitienne positive. On a

$$(7) \quad S(x) = \Delta_x A(x) - 2 \sum_1^4 \frac{\partial}{\partial x_i} A(x) \cdot A(x)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} A(x).$$

Donc, d'après (3)

$$(8) \quad S(x) = 8M - 8 \sum_1^4 (N_i + x_i M) A(x)^{-1} (N_i + x_i M).$$

En comparant avec (6), on constate que $S(x)$ est positive !

6.18. Achéons la démonstration de 6.11. Par la formule de Stokes

on a pour $\rho > 0$,

$$(9) \quad \int_{|x| \leq \rho} (\Delta_x A(x)^{-1}) d\sigma = \int_{|x|=\rho} (\overrightarrow{\text{grad}} A(x)^{-1} \cdot \frac{\vec{x}}{|x|}) ds.$$

On a, pour $\rho \rightarrow \infty$,

$$\overrightarrow{\text{grad}} A(x)^{-1} = -\frac{2\vec{x}}{|x|^4} M^{-1} + O(|x|^{-3}).$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^4} (\Delta_x A(x)^{-1}) d\varphi = -\lambda M^{-1}, \quad \lambda > 0.$$

Il résulte alors de 6.17. que M^{-1} donc M est positif et d'après les propriétés a), b) et c') de H , que H est positive.

6.19. Lorsqu'on explicite la construction de la variété \tilde{M} de (6.3.) on retrouve la variété \tilde{M} introduite au § 1. Le théorème 1.3. se trouve ainsi essentiellement démontré à ceci près qu'il nous faut montrer que \tilde{M} n'est pas vide. Prenons $k+1$ droites réelles distinctes dans X et $k+1$ paramètres réels $\neq 0$. A l'aide de ces données on peut construire un fibré E sur X muni d'une structure quaternionique, trivial sur toutes les droites réelles, tel que le lieu des zéros d'une section convenable de $E(k+1)$ soit les $k+1$ droites réelles données à l'avance (exp. IX). On obtient ainsi une famille d'éléments de $I(k)$ (Solutions de 't Hooft).

6.20. Indiquons sans démonstration une description de l'application canonique $\tilde{M} \longrightarrow I(k)$. On obtiendrait une démonstration en appliquant la transformation de Penrose à la monade définissant un fibré (exp. II et V). Notons $\mathbb{H}P^k$ la variété des sous-espaces quaternioniques de dimension k de \mathbb{H}^{k+1} . Sur $\mathbb{H}P^k$ on a donc un sous-fibré quaternionique Q de rang k du fibré trivial \mathbb{H}^{k+1} . Posons $F(k) = \mathbb{H}^{k+1}/Q$. A l'aide d'une métrique hilbertienne sur \mathbb{H}^{k+1} compatible avec la multiplication par j , on peut considérer $F(k)$ comme un sous-fibré de rang quaternionique 1 de \mathbb{H}^{k+1} . Notons alors $\mathcal{A}(k)$ la connexion sur $F(k)$ déduite de la connexion triviale sur \mathbb{H}^{k+1} par projection orthogonale. La donnée d'un point

de \tilde{M} (1.2.) fournit une application différentiable

$$S^4 \simeq \mathbb{H}P^1 \xrightarrow{m} \mathbb{H}P^k .$$

Donc $m^*F(k)$ est fibré de rang complexe 2, muni d'une connexion et d'une forme hermitienne positive non dégénérée horizontale. On vérifie que cette connexion est autoduale et par suite que $m^*F(k)$ est un instanton.

7. Complément sur les monades.

7.1. PROPOSITION (Beylinson [1]).- Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur $X = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Il existe une suite spectrale fonctorielle en \mathcal{F} de terme

$$E_1^{p,q} = H^q(\Omega_X^{-p}(-p) \otimes \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{X(+p)} ,$$

telle que $E_\infty^{p,q} = 0$ pour $p + q \neq 0$ et $E_\infty^{p,-p}$ le gradué associé à une filtration convenable de \mathcal{F} .

Soient Δ la diagonale de $X \times X$ et $p : X \times X \rightarrow X$ la première projection. On a une suite exacte

$$\Omega_X^1(1) \boxtimes \mathcal{O}_X(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{X \times X} \rightarrow \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0 ;$$

d'où un complexe de Koszul, résolution de \mathcal{O}_Δ :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \Omega_X^3(3) \boxtimes \mathcal{O}_X(-3) \rightarrow \Omega_X^2(2) \boxtimes \mathcal{O}_X(-2) \rightarrow \Omega_X^1(1) \boxtimes \mathcal{O}_X(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{X \times X} \rightarrow \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0 .$$

Comme $\mathcal{C}_{or_i}^{\mathcal{O}_{X \times X}}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_{X, \mathcal{O}_\Delta}) = 0$ pour $i > 0$, on obtient en tensorisant (1) par \mathcal{F} une résolution de $\mathcal{F}_\Delta = (\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_\Delta$. On a $R_{p*}^i \mathcal{F}_\Delta = 0$ pour $i \neq 0$ et $p_* \mathcal{F}_\Delta = \mathcal{F}$. La suite spectrale du foncteur dérivé R_{p*} appliquée à la résolution de \mathcal{F}_Δ est la suite spectrale annoncée.

7.2. PROPOSITION.- Soit E un fibré de Yang-Mills. La suite spectrale de 7.1. appliquée à $E(-2)$ fournit un complexe de longueur 3 dont la cohomologie est E et qui dépend fonctoriellement de E .

$$0 \longrightarrow H^2(E(-3)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow H^1(E \otimes \Omega_X^1) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \longrightarrow H^1(E(-1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow 0.$$

Il s'agit de calculer les $H^q(\Omega_X^{-p}(-p-2) \otimes E)$. Ils sont donnés par le tableau suivant :

					↑ q
	0	0	0	0	3
	$H^2(E(-3))$	$H^1(E \otimes \Omega_X^1)$	$H^1(E(-1))$	0	2
	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0
	- 3	- 2	- 1	0	→ p

• $p = 0$. On a $H^q(\Omega_X^{-p}(-p-2) \otimes E) = H^q(E(-2))$. Comme E est semi-stable on a $H^0(E(-2)) = 0$. Par définition $H^1(E(-2)) = 0$. Par dualité on en déduit $H^2(E(-2)) = H^3(E(-2)) = 0$.

• $p = -1$. On a $H^q(\Omega_X^{-p}(-p-2) \otimes E) = H^q(\Omega_X^1(-1) \otimes E)$. De plus on a une suite exacte $0 \longrightarrow \Omega_X^1(-1) \longrightarrow T^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow 0$. En tensorisant par E et en prenant la suite exacte de cohomologie, on obtient, compte tenu de $H^q(T^* \otimes_{\mathbb{C}} E(-2)) = T^* \otimes_{\mathbb{C}} H^q(E(-2)) = 0$,

$$H^0(\Omega_X^1(-1) \otimes E) = 0, \quad H^1(\Omega_X^1(-1) \otimes E) = 0,$$

$$H^1(E(-1)) \xrightarrow{\sim} H^2(\Omega_X^1(-1) \otimes E), \quad H^3(\Omega_X^1(-1) \otimes E) \simeq H^2(E(-1)).$$

Ce dernier terme est nul car sinon on obtiendrait un $E_{\infty}^{-1,3} \neq 0$

contrairement à 7.1.

• $p = -2$. On a $H^q(\Omega_X^{-p}(-p-2) \otimes E) = H^q(\Omega_X^2 \otimes E)$. De plus on a une suite exacte $0 \longrightarrow \Omega_X^2 \longrightarrow \wedge^2 T^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(-2) \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow 0$. En tensorisant par E et en prenant la suite exacte de cohomologie, on

obtient $H^0(\Omega_X^2 \otimes E) = 0$, $H^0(\Omega_X^1 \otimes E) \xrightarrow{\sim} H^1(\Omega_X^2 \otimes E)$,
 $H^1(\Omega_X^1 \otimes E) \xrightarrow{\sim} H^2(\Omega_X^2 \otimes E)$. Comme on a une injection
 $\Omega_X^1 \otimes E \hookrightarrow T_X^* \otimes E(-1)$, on a $H^0(\Omega_X^1 \otimes E) = 0$. Enfin
 $H^3(\Omega_X^2 \otimes E)$ est dual de $H^0(\Omega_X^1 \otimes E) = 0$.
 • $p = -3$. On a $H^q(\Omega_X^{-p}(-p-2) \otimes E) = H^q(E(-3))$. On a
 $H^0(E(-3)) = 0$ car E est semi-stable. Le dual de $H^1(E(-3))$ est
 $H^2(E(-1))$ dont on a vu qu'il est nul. Le dual de $H^3(E(-3))$ est
 $H^0(E(-1)) = 0$.

7.3. COROLLAIRE.- La catégorie des monades est équivalente à la catégorie des fibrés de Yang-Mills.

La proposition 7.2. décrit un foncteur des fibrés vers les monades (exp. V) . Le foncteur quasi-inverse consiste à prendre la cohomologie de la monade.

7.4. PROPOSITION.- Soient (S, s_0) un germe d'espace analytique et $s \mapsto E_s$ une famille analytique plate de fibrés de Yang-Mills. Il existe une famille analytique plate de monades $s \mapsto M_s$ dont la cohomologie est $s \mapsto E_s$.

Variante à paramètre des prop. 7.1. et 7.2.

- [1] A. A. BEYLINSON. Coherent sheaves on \mathbb{P}^M and problems of linear algebra, Funktional Anal. 12, vol. 1978.

- [2] V. G. DRINFEL'D and Ju. I. MANIN. Instantons and sheaves on \mathbb{CP}^3 , Proceedings of Copenhagen Summer Meeting in Algebraic Geometry, Springer Lecture Notes. To appear.

- [3] D. MUMFORD. Geometric Invariant Theory, Ergebnisse, Springer-Verlag, 1965.

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET THÉORÈMES D'ANNULATION

par J.P. BOURGUIGNON

Cet exposé introduit aux théorèmes d'annulation tels qu'ils sont prouvés en géométrie riemannienne, en utilisant les formules de Weitzenböck, spécialement pour les 2-formes différentielles à valeurs vectorielles et les champs de spineurs (théorème d'A. Lichnerowicz). La notion d'opérateur différentiel naturel permet de mieux utiliser les propriétés algébriques spéciales de la dimension 4 .

Il doit (!) faciliter la lecture des pages 34 à 36 de [2] .

Dans tout l'exposé, (M, g) est une variété riemannienne compacte orientée de dimension n et G un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Si $\pi : E \rightarrow M$ est un G -fibré et ∇ une G -connexion sur ce fibré, alors la fonctionnelle de Yang-Mills $\mathcal{Y}\mathcal{M}$ est donnée par

$$\mathcal{Y}\mathcal{M}(\nabla) = \int_M \|\mathbf{R}^\nabla\|^2$$

où \mathbf{R}^∇ est la courbure de ∇ (2-forme à valeurs dans le fibré en algèbres de Lie \mathfrak{g} des automorphismes infinitésimaux de E) et $\|\cdot\|$ la norme déduite du choix d'une norme sur \mathfrak{g} et de la métrique g sur la base.

Les points critiques de $\mathcal{Y}\mathcal{M}$ sont les connexions ∇ telles que \mathbf{R}^∇ soit harmonique (en tant que 2-forme à valeurs vectorielles) : \mathbf{R}^∇ est toujours fermée (c'est l'identité de Bianchi).

Nous rappelons que la codifférentielle δ^∇ peut s'écrire sur les 2-formes

$$\delta^\nabla = - * d^\nabla *$$

où d^∇ désigne la différentielle extérieure associée à la connexion ∇ et $*$ est l'opérateur de Hodge défini par la métrique et l'orientation appliquant

les p -formes dans les $(n-p)$ -formes.

Remarquons que $*$, opérant sur les k -formes lorsque $n = 2k$, ne dépend que de la structure conforme.

La condition d'harmonicité peut encore s'écrire

$$\begin{cases} d^\nabla R^\nabla = 0 \\ d^\nabla * R^\nabla = 0 \end{cases}.$$

Nous noterons, pour simplifier, V l'espace vectoriel euclidien orienté $(T_m M, g_m, *_{\mathfrak{m}})$ où m est un point de M .

Si M est de dimension 4, $*$ est une involution de $\wedge^2 V$ de telle sorte que nous avons la décomposition

$$\wedge^2 V = \wedge^+ \oplus \wedge^-$$

correspondant aux sous-espaces propres de $*_{\mathfrak{m}}$. Les espaces \wedge^+ et \wedge^- sont des espaces de représentation irréductibles non isomorphes de $SO(V)$. (Remarquons qu'avec l'isomorphisme bien connu de $\wedge^2 V$ avec $\mathfrak{so}(V)$, la décomposition précédente coïncide avec celle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(V)$, isomorphe à \mathfrak{so}_4 , en ses deux facteurs simples isomorphes à \mathfrak{so}_3).

Dans ce cas, si nous posons $R^\nabla = R^{\nabla+} + R^{\nabla-}$, l'équation des champs de Yang Mills s'écrit

$$d^\nabla R^{\nabla+} = 0 \quad (\text{ou de façon équivalente } d^\nabla R^{\nabla-} = 0)$$

(en effet, si la 2-forme $R^{\nabla+}$ est fermée, elle est aussi cofermée ; comme R^∇ est fermée, $R^{\nabla-}$ est aussi fermée, donc cofermée et R^∇ elle-même est cofermée).

1. Opérateurs différentiels naturels riemanniens.

Il est souvent important de montrer que le noyau d'un opérateur différentiel A elliptique auto-adjoint d'ordre 2 est réduit à $\{0\}$.

Nous supposons ici que A est universellement défini sur les variétés riemanniennes (nous dirons aussi naturel) au sens précis suivant :

"pour toutes variétés riemanniennes (M, g) et (M', g') (même ouvertes) et pour tout difféomorphisme $\varphi : M \longrightarrow M'$ qui est une isométrie (i.e. tel que $\varphi^*g' = g$), alors φ s'étend aux fibrés sur les sections desquels A opère et $A_{(M, g)}$ et $A_{(M', g')}$ sont échangés par φ ".

Comme exemples de tels opérateurs, citons la différentielle extérieure des formes différentielles extérieures (elle ne dépend que de la structure différentielle), la codifférentielle δ , la dérivation covariante de Levi-Civita D .

La notion précédente peut être raffinée pour les variétés riemanniennes orientées (ou possédant d'autres structures géométriques) de façon évidente.

Ces opérateurs naturels ont une propriété importante qui rend leur étude complètement algébrique. Avant d'énoncer cette propriété, il nous faut rappeler les différentes notions de symbole pour un opérateur différentiel.

Soient $\pi_E : E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel C^∞ sur M et \mathcal{L} l'espace de ses sections C^∞ . On définit le fibré $\pi_E^k : J^k E \longrightarrow M$ des k-jets de sections de π_E de la façon suivante : $J_m^k E$ est le quotient de \mathcal{L} par la relation d'équivalence $\overset{k}{\sim}_m$ définie par

$$(s \overset{k}{\sim}_m s') \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{les dérivées partielles des sections } s \text{ et } s' \\ \text{de } E \text{ coïncident en } m \text{ jusqu'à l'ordre } k \text{ inclus} \end{array} \right).$$

Les changements de cartes entre trivialisations s'obtiennent par dérivation des changements de cartes du fibré (cf. [3] ou [8]).

Il existe une application naturelle évidente notée $j_k : \mathcal{L} \longrightarrow J^k E$ (espace des sections de π_E^k), appelé opérateur différentiel universel d'ordre k.

La suite des fibrés de jets s'organise en une famille de suites exactes

$$0 \longrightarrow S^k T^*M \otimes E \longrightarrow J^k E \longrightarrow J^{k-1} E \longrightarrow 0$$

où la première inclusion peut être vue ainsi : soient $s_m \in E_m$ et $\xi \in T_m^*M$; prenons une section s telle que $s(m) = s_m$ et une fonction f telle que $f(m) = 0$ et $df(m) = \xi$. A $\xi \otimes \dots \otimes \xi \otimes s$, nous associons la classe dans $J^k E$ de la section $f^k s$.

Soient maintenant deux fibrés $C^\infty \pi_E : E \rightarrow M$ et $\pi_F : F \rightarrow M$.
L'opérateur Λ de \mathcal{C} dans \mathcal{F} est dit différentiel d'ordre k si, pour s dans \mathcal{C} ,

$$\Lambda(s) = \Sigma_\Lambda(j^k(s))$$

pour un morphisme Σ_Λ de fibrés vectoriels entre $\pi_E^k : J^k E \rightarrow M$ et $\pi_F : F \rightarrow M$. On dit que Σ_Λ est le symbole total de Λ .

La restriction du symbole total au sous-fibré $S^k T^*M \otimes E$ de $J^k E$ est notée σ_Λ et appelée le symbole principal de Λ . (Comme $S^k T^*M \otimes E$ ne fait intervenir que des objets d'ordre 0, on dit quelquefois que le symbole principal est intrinsèque).

Dans ce formalisme une connexion ∇ sur un fibré $\pi_E : E \rightarrow M$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 défini sur π_E à valeurs dans $p_M^* \otimes \pi_E : T^*M \otimes E \rightarrow M$ dont le symbole principal est l'identité : en effet, pour s dans \mathcal{C} et f dans $C^\infty(M)$,

$$\nabla(fs) = f\nabla s + df \otimes s.$$

Une connexion apparaît ainsi comme une scission de la suite exacte

$$0 \longrightarrow T^*M \otimes E \longrightarrow J^1 E \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

En fait, le choix d'une connexion sur E permet d'écrire

$$J^k E = \bigoplus_{i=0}^k (S^i T^*M \otimes E),$$

en utilisant à chaque cran pour scinder la suite exacte l'opérateur

$\nabla^k = S^k \circ \nabla \circ \dots \circ \nabla$ obtenu en itérant ∇ , puis en symétrisant pour avoir un opérateur de E dans $S^k T^*M \otimes E$.

En tant qu'opérateur différentiel d'ordre i de E dans $S^i T^*M \otimes E$, ∇^i a pour symbole principal l'identité.

Une connexion sur E ayant été choisie, l'opérateur Λ peut s'écrire

$$\Lambda = \sigma_\Lambda \circ \nabla^k + \sigma_\Lambda^1(\nabla) \circ \nabla^{k-1} + \dots$$

En effet l'opérateur $\sigma_{\Lambda^0} \nabla^k$ a même symbole principal que Λ ; par suite $\Lambda - \sigma_\Lambda \circ \nabla^k$ est un opérateur différentiel d'ordre $k-1$ et ainsi de suite.

La suite des symboles $\sigma_{\Lambda}^i(\nabla)$ est dite la suite des symboles de Λ associée à ∇ .

Grâce à cette notion, nous pouvons énoncer :

PROPOSITION (cf. [9]).- Tout opérateur différentiel naturel riemannien a pour suite de symboles associée à la connexion de Levi-Civita des applications qui sont invariantes sous l'action du groupe orthogonal et réciproquement.

Cette proposition permet de déterminer les opérateurs différentiels naturels d'ordre k définis sur le fibré E : il suffit de décomposer en sous-espaces irréductibles successivement les espaces $S^i T^*M \otimes E$ ($i \leq k$) : le projecteur sur chaque sous-espace irréductible donne un tel opérateur et tout opérateur est combinaison de ces projecteurs.

Ainsi pour $E = \wedge^k T^*M$ (qui est irréductible sous $O(V)$) pour déterminer les opérateurs naturels d'ordre 1 il faut décomposer $V \otimes \wedge^k V$ sous l'action de $O(V)$: on trouve un facteur isomorphe à $\wedge^{k+1} V$, un facteur isomorphe à $\wedge^{k-1} V$ et un autre facteur seulement (exercice : le décrire par une identité à la Bianchi). Les opérateurs différentiels associés à ces projecteurs sont respectivement d , $-\delta$, $D-d+\delta$.

En dimension 4, pour le cas orienté, il y a un raffinement car $\wedge^2 V$ n'est pas irréductible.

2. Formules de Weitzenböck.

Nous revenons maintenant à notre motivation initiale qui est d'établir des théorèmes d'annulation. Nous allons utiliser des formules dite de Weitzenböck. On regroupe sous ce nom la comparaison de divers laplaciens (des opérateurs différentiels naturels d'ordre 2 dont le symbole principal est la métrique g). Il est facile de voir que :

i) la différence de deux laplaciens est forcément un opérateur d'ordre 0 (car $T^*M \otimes E$ ne contient pas de facteur isomorphe à E) ;

ii) cet opérateur d'ordre 0 s'exprime à partir de la courbure riemannienne si les laplaciens ont été obtenus par composition d'opérateurs d'ordre 1.

Pour prouver que $\text{Ker } \Delta = \{0\}$, on le compare à un laplacien positif (par exemple un opérateur obtenu en composant un opérateur elliptique d'ordre 1 avec son adjoint) et on cherche à montrer que l'expression en la courbure est elle aussi positive par des hypothèses convenables.

La motivation originelle était bien sûr de prouver la nullité de certains nombres de Betti : pour cela, on compare le laplacien de de Rham $d\delta + \delta d$ opérant sur $C^\infty(\wedge^k TM)$ au laplacien D^*D (d'après le développement précédent c'est essentiellement la seule comparaison possible).

Nous avons la formule de Weitzenböck suivante : pour les 2-formes différentielles extérieures

$$(d\delta + \delta d)\omega = D^*D\omega - \omega \circ (R - \frac{1}{2} \text{Ric} \otimes g)$$

où l'expression en courbure appelle les commentaires suivants :

i) Dans le cas du fibré tangent la courbure est une transformation de $\wedge^2 V$ dans $\wedge^2 V$ (par l'isomorphisme déjà mentionné de $\wedge^2 V$ avec $\Pi(V)$), qui à cause de la symétrie de la connexion vérifie une autre identité due à Bianchi (la première) : pour tout X, Y, Z dans V ,

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0.$$

Cette relation implique que R est une transformation symétrique de $\wedge^2 V$. Il se trouve être intéressant de voir $S^2 \wedge^2 V$ comme la partie homogène de degré 2 d'une algèbre, dite algèbre de courbure, $KV = \bigoplus_{i=0}^n S^2 \wedge^i V$, de telle sorte que

$$(KV)_0 = \mathbb{R}, \quad (KV)_1 = S^2 V, \quad (KV)_2 = S^2 \wedge^2 V.$$

Le produit noté \otimes entre éléments h et k de $(KV)_1$ est défini par

$$(h \otimes k)_{XYZT} = h_{XZ}k_{YT} + h_{YT}k_{XZ} - h_{XT}k_{YZ} - h_{YZ}k_{XT},$$

d'où le terme $\text{Ric} \otimes g$ dans la formule précédente (on rappelle que

$$\text{Ric}_{XY} = \sum_{i=1}^n g(R_{e_i X} e_i, Y).$$

ii) Il est aussi important de noter les décompositions en sous-espaces $O(V)$ -irréductibles :

$$S^2V = \mathbb{R} \cdot g \oplus S_0^2V$$

où S_0^2V désigne l'espace des tenseurs symétriques à trace nulle ;

$$S^2 \wedge^2 V = \mathbb{R} \cdot g \otimes g \oplus (S_0^2V \otimes g) \oplus \mathcal{W} \oplus \wedge^4 V$$

où \mathcal{W} est l'espace des tenseurs de courbure conforme de Weyl. La première identité de Bianchi traduit justement que R est orthogonal à $\wedge^4 V$ (donc est dans la somme des trois autres sous-espaces). La décomposition de la courbure est la suivante : avec $\text{Ric} = \frac{\text{Scal}}{n} g + \text{Ric}_0$, où Scal désigne la courbure scalaire (la trace de la courbure de Ricci par rapport à g),

R s'écrit

$$R = W + \frac{1}{n-2} \text{Ric}_0 \otimes g + \frac{\text{Scal}}{2n(n-1)} g \otimes g.$$

Le cas de dimension 4 prend un intérêt particulier car l'espace $S^2 \wedge^2 V$ admet une décomposition plus fine sous $SO(V)$: l'involution $*$ est justement le générateur de $\wedge^4 V$ et la composition avec $*$ dans $S^2 \wedge^2 V$ préserve \mathcal{W} (en effet les éléments de $S_0^2V \otimes g$ anticommulent à $*$ alors que ceux de \mathcal{W} commutent), donnant naissance aux sous-espaces \mathcal{W}^+ et \mathcal{W}^- où cette composition avec $*$ est respectivement l'identité et moins l'identité. Nous avons alors la décomposition en composantes $SO(V_4)$ -isotypiques

$$S^2 \wedge^2 V_4 = \underbrace{\mathbb{R} \cdot * \oplus \mathbb{R} \cdot g \otimes g}_{21} \oplus (S_0^2V \otimes g) \oplus \mathcal{W}^+ \oplus \mathcal{W}^-$$

$$21 = 1 + 1 + 9 + 5 + 5$$

avec en regard la dimension des espaces.

La décomposition de R s'écrit dans ce cas

$$R = W^+ + W^- + \frac{1}{2} \text{Ric}_0 \otimes g + \frac{\text{Scal}}{24} g \otimes g.$$

Pour revenir à la formule de Weitzenböck des 2-formes, le terme en courbure qui y apparaît est $R - \frac{1}{2} \text{Ric} \otimes g$, dont la décomposition en composantes irréductibles est

$$R - \frac{1}{2} \text{Ric} \otimes g = W + \frac{4-n}{2(n-2)} \text{Ric}_0 \otimes g + \frac{2-n}{2n(n-1)} \text{Scal} g \otimes g.$$

Il apparaît donc qu'en dimension 4 la partie Ric_0 n'intervient pas puisqu'alors

$$R - \frac{1}{2} \text{Ric} \otimes g = W + \frac{\text{Scal}}{12} g \otimes g$$

(rappelons qu'avec notre convention $g \otimes g = 4\text{Id}_\wedge^2 V$). Cela reflète le fait qu'en dimension 4 les 2-formes harmoniques sont des invariants conformes.

Si nous revenons à la fonctionnelle de Yang-Mills, il est aussi intéressant d'appliquer une formule de Weitzenböck à l'équation des champs de Yang-Mills $(d^\nabla \delta^\nabla + \delta^\nabla d^\nabla)R^\nabla = 0$. Le laplacien qui y apparaît est celui des 2-formes à valeurs vectorielles (ici à valeurs dans une algèbre de Lie) pour lequel la formule de Weitzenböck s'écrit (ici $X, Y \in V$)

$$((d^\nabla \delta^\nabla + \delta^\nabla d^\nabla)\omega)_{XY} = (\nabla^* \nabla \omega)_{XY} - \omega_0 \left(R - \frac{1}{2} \text{Ric} \otimes g \right)_{XY} + \sum_{i=1}^n [R^\nabla_{e_i X}, \omega_{e_i Y}] - [R^\nabla_{e_i Y}, \omega_{e_i X}].$$

Dans la formule précédente, nous avons séparé parmi les termes en courbure ceux qui proviennent de la base et ceux qui proviennent du fibré (sur S^4 munie de la métrique standard, le terme de la base vaut 4ω). Leur interaction joue un grand rôle dans la théorie de Yang-Mills (cf. [4]).

3. Spineurs harmoniques.

Le but de ce paragraphe est d'établir le théorème suivant dû à

A. Lichnerowicz (cf. [7]).

THÉORÈME.— Soit M une variété spinorielle compacte à courbure scalaire positive. Alors, il n'existe sur M aucun spineur harmonique.

Nous commençons par un rappel sur les algèbres de Clifford et les spineurs d'un point de vue algébrique (cf. [6]).

Soit (V, g) un espace euclidien de dimension n (g peut être en fait une forme bilinéaire symétrique arbitraire). L'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle par l'idéal engendré par les éléments $x \otimes x + g(x, x) \cdot 1$ (où $x \in V$) est appelée l'algèbre de Clifford $C(V, -g)$ (l'intérêt du signe $-$ n'apparaîtra pas dans ces brefs commentaires, voir [1]). Cette algèbre est universelle

pour les applications définies sur V à valeurs dans une algèbre à unité rendant la forme quadratique associée à g un carré parfait.

D'un point de vue constructif, $C(V, -g)$ peut aussi être définie comme suit : soit (e_i) une base orthonormée de (V, g) ; l'algèbre de Clifford s'identifie aux mots formés sur les lettres e_1, \dots, e_n et 1 avec les relations

$$\begin{aligned} e_i e_j + e_j e_i &= 0 \quad \text{si } i \neq j \\ e_i^2 &= -1. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que tous les mots peuvent être pris de longueur au plus n et qu'en fait $C(V, -g)$ est de dimension 2^n .

Il suit de la définition de $C(V, -g)$ que $O(V)$ opère sur elle. On voit facilement que $C(V, -g)$ et l'algèbre extérieure $\wedge^* V$ sont des espaces de représentation isomorphes (en fait $\wedge^* V$ n'est rien d'autre que $C(V, 0)$).

L'algèbre de Clifford hérite de l'algèbre tensorielle une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation, car l'idéal par lequel on quotiente est formé d'éléments de degré pair. On pose

$$C(V, -g) = C^+ \oplus C^-;$$

il est clair que V se plonge dans C^- .

D'après le théorème de structure (cf. [1] ou [6]), les algèbres de Clifford réelles sont toutes des algèbres ou des sommes de 2 algèbres de matrices sur \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H} avec périodicité 8 pour le type.

Par contre, si on complexifie les algèbres de Clifford, leur structure se simplifie (exemple d'une telle simplification :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \\ (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Si on pose $\tilde{C}(V, -g) = C(V, -g) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (en fait $\tilde{C}(V, -g) = C(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$), alors pour $n = 2k$, $\tilde{C}(V^{2k}, -g)$ est une algèbre de matrices $2^k \times 2^k$ sur \mathbb{C} et, pour $n = 2k+1$, $\tilde{C}(V^{2k+1}, -g)$ est une somme de deux algèbres isomorphes à $\tilde{C}(V^{2k}, -g)$.

Nous nous limitons par simplicité au cas où la dimension de V est paire.

L'espace vectoriel Φ tel que $\tilde{C}(V^{2k}, g) \simeq \text{End}(\Phi)$ est dit espace des spineurs associé à (V^{2k}, g) . L'espace projectif $P(\Phi)$ s'identifie aux idéaux minimaux à gauche de $\text{End}(\Phi)$, donc de $C(V, -g)$; il est donc facilement identifiable et est un espace de représentation de $O(V)$.

Par contre, il est plus difficile d'atteindre l'espace des spineurs. Un modèle de l'espace Φ peut être construit comme suit : pour la forme bilinéaire complexe $g_{\mathbb{C}}$, il existe une base de Witt de $V_{\mathbb{C}}$ de telle sorte que

$$g_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^n z_i z_{k+i}.$$

Si on pose $f = z_1 \cdot \dots \cdot z_k$ (où le point désigne le produit dans l'algèbre de Clifford), alors on peut identifier Φ à $\{u.f \mid u \in \tilde{C}(V, -g)\}$, l'action de $\tilde{C}(V, -g)$ sur Φ se faisant par multiplication à gauche. On remarque que Φ se décompose en $\Phi^+ \oplus \Phi^-$ où $\Phi^{\pm} = \tilde{C}^{\pm}(V, -g).f$, les éléments de Φ^+ (resp. de Φ^-) s'appelant les spineurs positifs (resp. négatifs). Remarquons que les éléments de C^- appliquent Φ^+ dans Φ^- .

L'espace des spineurs n'est pas un espace de représentation de $SO(V)$; par contre le normalisateur de V dans $\tilde{C}(V, -g)$ est un groupe appelé $\text{Pin}(V)$ qui opère sur Φ . Le sous-groupe compact maximal de $\text{Pin}(V)$ (qui peut aussi s'obtenir comme sous-groupe de $\text{Pin}(V)$ agissant trivialement sur les scalaires) est appelé le groupe $\text{Spin}(V)$. Son algèbre de Lie s'identifie à $\mathfrak{Spin}(V)$ de la façon suivante : si t dans $\mathfrak{Spin}(V)$ s'écrit $t = \sum_{1 \leq i < j \leq 2k} a_{ij} e_i \wedge e_j$ pour une base orthonormée (e_i) de V , on peut lui associer l'élément $\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 2k} a_{ij} e_i \cdot e_j$ de $\mathfrak{Spin}(V)$. Le groupe $\text{Spin}(V)$ est un revêtement à deux feuillets non trivial de $SO(V)$ (son revêtement universel en fait puisque $\pi_1(SO(V)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Nous nous proposons maintenant de globaliser ces constructions sur une variété M . Pour que le fibré principal en groupes SO_n sur M admette un

revêtement à deux feuillets qui soit un fibré principal en groupes Spin_1 (on dit alors que M est une variété spinorielle), il faut et il suffit que la seconde classe de Stiefel-Whitney de M , $w_2(M)$, soit nulle (cf. [7]).

Par exemple \mathbb{CP}^k n'est spinorielle que si k est impair (pour les variétés complexes, $w_2(M)$ est la réduction modulo 2 de $c_1(h)$) ; les surfaces complexes $K3$, par exemple, sont spinorielles.

Soit M une variété spinorielle : elle est donc munie de fibrés vectoriels en spineurs $\varphi_M : \tilde{\Phi}_M \rightarrow M$ (et aussi en spineurs positifs et négatifs). La connexion de Levi-Civita se remonte au fibré Spin_n -principal et donc munit les fibrés en spineurs sur M de connexions naturelles notées encore D : ainsi D applique les sections de $\varphi_M : \tilde{\Phi}_M \rightarrow M$ dans celles de $P_M^* \otimes \varphi_M : T^*M \otimes \tilde{\Phi}_M \rightarrow M$.

Si on compose maintenant D avec la multiplication de Clifford μ (qui applique $T^*M \otimes \tilde{\Phi}_M$ dans $\tilde{\Phi}_M$), on obtient l'opérateur de Dirac $P = \mu \circ D$ qui est donc un opérateur différentiel d'ordre 1 auto-adjoint sur le fibré en spineurs : si (e_i) est une base localement orthonormée, et ψ un champ de spineurs, alors

$$P\psi = \sum_{i=1}^n e_i \cdot D_{e_i} \psi.$$

D'après une remarque précédente, P applique $\tilde{\Phi}_M^+$ dans $\tilde{\Phi}_M^-$ (et respectivement).

Le symbole total de P^2 , Σ_{P^2} , est donné par

$$\begin{aligned} \Sigma_{P^2}(\xi \otimes \eta \otimes \varphi) &= \xi \cdot \eta \cdot \varphi \\ &= -g(\xi, \eta) \varphi + (\xi \wedge \eta) \cdot \varphi, \end{aligned}$$

d'où la formule de Weitzenböck pour P^2

$$P^2 \varphi = D^* D \varphi + R(\varphi).$$

Il reste seulement à évaluer le terme en courbure des fibrés en spineurs : pour cela, on utilise l'identification des algèbres de Lie de $\text{SO}(V)$ et $\text{Spin}(V)$ en remplaçant dans l'écriture de la courbure les produits extérieurs par des produits de Clifford. En utilisant les symétries de la courbure, on obtient

$$R(\varphi) = \frac{\text{Scal}}{4} \varphi .$$

Le théorème d'A. Lichnerowicz suit alors immédiatement puisque l'opérateur P^2 est positif comme somme d'un opérateur non-négatif et d'un opérateur positif dès que la courbure scalaire est positive.

Il est intéressant d'appliquer le théorème de l'indice à P restreint aux champs de spineurs positifs (P est un opérateur elliptique puisque son carré P^2 est un laplacien). L'indice de P est égal à $\dim \mathcal{H}^+ - \dim \mathcal{H}^-$ (où \mathcal{H}^\pm désigne l'espace des spineurs annulés par P , dits spineurs harmoniques positifs ou respectivement négatifs) ; il s'identifie au \hat{A} -genre de M , qui s'exprime en fonction des nombres de Pontrjaguine de M . D'un point de vue géométrique, le théorème d'A. Lichnerowicz peut alors s'énoncer de la façon suivante (cf.[7]) :

THEOREME.- Soit M une variété spinorielle compacte dont le \hat{A} -genre n'est pas nul. Alors, il n'existe sur M aucune métrique riemannienne à courbure scalaire non-négative et positive en un point.

Pour une étude détaillée des spineurs harmoniques, voir [5] .

RÉFÉRENCES

- [1] M. ATIYAH, R. BOTT, P. SHAPIRO - Clifford modules, Topology suppl. vol.3 (1964).
- [2] M. ATIYAH, N. HITCHIN, I.M. SINGER - Self duality in four dimensional Riemannian geometry, Proc. R. Soc. Lond., A362 (1978), 425-461.
- [3] J.P. BOURGUIGNON - Riemannian geometry, differential operators and elementary representations theory, à paraître.
- [4] J.P. BOURGUIGNON, H.B. LAWSON, J. SIMONS - Stability and gap phenomena for Yang-Mills fields, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., (1979)
- [5] N. HITCHIN - Harmonic spinors, Adv. in Math., n°14, (1974).
- [6] S. KIRILLOV - Éléments de la théorie des représentations, Mir, Moscou (1972).
- [7] A. LICHNEROWICZ - Spineurs harmoniques, Note aux C.R.A.S. Paris, t.257 (1963), 7-9.
- [8] R.S. PALAIS - Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Princeton Math. Studies, n°57 (1965).
- [9] P. STREDDER - Natural differential operators on Riemannian manifolds and representations of the orthogonal and special orthogonal groups, J. of Diff. Geom., 10 (1975), 647-660.

CONSTRUCTIONS DE FIBRÉS DE RANG DEUX

par Daniel FERRAND

Introduction.

Soit E un fibré de rang deux sur $X = \mathbb{P}_K^n$. Quitte à tordre E , on peut supposer que E possède une cosection régulière $s : E \rightarrow \mathcal{O}_X$; soit C le schéma d'annulation de s . Dans le paragraphe 1, on montre comment la donnée de C , de $\wedge^2 E$ et d'un isomorphisme $\mathcal{O}_C \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Ext}}^2(\mathcal{O}_C, \wedge^2 E)$ lié à la situation permettent de reconstruire E et s .

Si $f : X' \rightarrow X$ est l'éclatement de X le long de C , $f^*(E)$ est extension du diviseur exceptionnel L' de f par $f^*(\wedge^2 E) \otimes L'^{-1}$, d'où un élément $\epsilon \in H^1(X', f^*(\wedge^2 E) \otimes L'^{-2})$.

On montre dans le paragraphe 3 à quelles conditions f et ϵ permettent de reconstruire E et s ; on montre surtout que ce point de vue est strictement équivalent au précédent.

Enfin dans un dernier paragraphe, on indique comment utiliser effectivement ces constructions.

Ce texte n'est pas fidèle à l'exposé oral; il est plus précis dans ce qu'il expose (cf. 2.2.2, 3.3 et §4); mais il n'aborde pas les constructions par "transformations élémentaires" ni par image directe d'un inversible.

Plan.

1 La construction de Serre et Horrocks.	IX-02
2 Variances.	IX-05
3 Eclatement le long du schéma d'annulation.	IX-08
4 Mode d'emploi et exemples.	IX-14
5 Bibliographie.	IX-20

1. La construction de Serre et Horrocks ([8] et [5]).

On se fixe un schéma de base localement noethérien X .

1.1. Soit E un fibré de rang deux sur X . Une cosection $s : E \rightarrow \mathcal{O}_X$ est dite régulière si, au-dessus de tout ouvert affine U de X tel que $E|_U$ soit libre, l'image par s d'une base de $E|_U$ est une suite régulière dans \mathcal{O}_U .

On note C le schéma d'annulation de s , c'est-à-dire le sous-schéma fermé de X défini par l'idéal $I = \text{Im}(s)$.

Pour que s soit régulière, il faut et il suffit que le complexe de Koszul associé à s

$$0 \longrightarrow \wedge^2 E \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

soit une résolution gauche de \mathcal{O}_C .

Ce complexe est auto-dual : l'isomorphisme $E \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(E, \wedge^2 E)$ s'étend en un isomorphisme de complexes, où on a posé $L = \wedge^2 E$,

$$\begin{array}{ccccc} L & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ \underline{\text{Hom}}(\mathcal{O}_X, L) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(E, L) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(L, L) \end{array}$$

et fournit donc, lorsque s est régulière, un isomorphisme de \mathcal{O}_C -modules

$$\varphi_s : \mathcal{O}_C \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Ext}}^2(\mathcal{O}_C, L)$$

Le couple (E, s) , où s est une cosection régulière, détermine donc

- un sous-schéma C de codimension 2 dans X ,
- un \mathcal{O}_X -module inversible L ,
- un isomorphisme de \mathcal{O}_C -modules $\varphi_s : \mathcal{O}_C \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Ext}}^2(\mathcal{O}_C, L)$.

On va voir que, réciproquement, les données (C, L, φ_s) déterminent E et s , sous des hypothèses raisonnables.

1.2. On se fixe, pour la suite, un \mathcal{O}_X -module inversible L et un sous-schéma C de codimension 2 dans X , défini par un idéal noté I .

Le couple (E, s) cherché sera déterminé (à un isomorphisme près) par une

classe d'extensions de I par L , c'est-à-dire par un élément convenable de $\text{Ext}^1(I, L)$. D'autre part, on a un isomorphisme canonique $\text{Ext}^1(I, L) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^2(\underline{O}_C, L)$, si bien que tout repose sur l'application évidente

$$1.2.1. \quad \text{Ext}^1(I, L) \longrightarrow \text{Hom}(\underline{O}_C, \text{Ext}^1(I, L)) .$$

Soit $\epsilon = (L \xrightarrow{s'} E \xrightarrow{s} I)$ une (classe d') extension de I par L . Expliquons l'application φ_ϵ qui lui est associée par 1.2.1.

Soit

$$1.2.2. \quad \sigma : \wedge^2 E \longrightarrow L$$

l'application définie localement par la formule : $s'\sigma(x \wedge y) = s(x)y - s(y)x$.

En composant σ et l'application canonique $E \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(E, \wedge^2 E)$, on obtient une application

$$\sigma' : E \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(E, L)$$

qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$1.2.3. \quad \begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{s} & \underline{O}_X & \xrightarrow{\text{can}} & \underline{O}_C & \longrightarrow & 0 \\ \sigma' \downarrow & & \parallel & & \downarrow \varphi_\epsilon & & \\ \underline{\text{Hom}}(E, L) & \xrightarrow{(s', 1)} & \underline{\text{Hom}}(L, L) & \xrightarrow{d_\epsilon} & \text{Ext}^1(I, L) & & \end{array}$$

THEOREME 1.3. (Serre).- Sous les hypothèses de 1.2, pour que E soit localement libre de rang deux, il faut et il suffit que φ_ϵ soit un isomorphisme et que $\dim \text{proj}_{\underline{O}_X}(\underline{O}_C) = 2$.

Notons que si X est régulier et si C est de Cohen-Macaulay, alors la seconde condition est automatiquement vérifiée ; plus particulièrement, si $X = \mathbb{P}_k^3$, elle signifie simplement que la courbe C n'a pas de point associé immergé.

Supposons E localement libre. Alors $\wedge^2 E$ est inversible donc le schéma d'annulation Z de $\sigma : \wedge^2 E \longrightarrow L$ est soit vide, soit de codimension un dans X ; la commutativité de 1.2.3 implique que $Z \subset C$, donc que $Z = \emptyset$, c'est-à-dire que σ est un isomorphisme. Par suite, σ' est aussi un isomorphisme ;

enfin, comme $\underline{\text{Ext}}^1(E, L) = 0$, φ_e est un isomorphisme.

Réciproquement, si φ_e est un isomorphisme, d_e est surjectif et l'exactitude de la suite

$$\underline{\text{Hom}}(L, L) \xrightarrow{d_e} \underline{\text{Ext}}^1(I, L) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}^1(E, L) \longrightarrow \underline{\text{Ext}}^1(L, L) = 0$$

implique que $\underline{\text{Ext}}^1(E, L) = 0$.

Pour vérifier que E est localement libre, on peut se restreindre aux schémas locaux $\text{Spec}(A)$ où $A = \underline{O}_{X, x}$. Par hypothèse, $\dim_{\text{proj}}_A(E) \leq 1$; comme A est local, il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow A^n \longrightarrow A^m \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Or, $\underline{\text{Ext}}^1(E, A) = 0$; donc cette suite est scindée.

Explicitons le noyau et le conoyau de 1.2.1.

LEMME 1.4.- Soient X un schéma localement noethérien, L un \underline{O}_X -module inversible et F un \underline{O}_X -module cohérent tel que

$$1.4.1. \quad \dim_{\text{proj}}_{\underline{O}_X}(F) = 2 = \text{codim}(\text{Supp}(F), X).$$

Alors $\underline{\text{Ext}}^i(F, L) = 0$ pour $i \neq 2$. De plus, le foncteur contravariant

$$F \longmapsto \underline{\text{Ext}}^2(F, L)$$

est exact et reflexif sur la catégorie des modules cohérents vérifiant les conditions 1.4.1.

La seconde assertion est une conséquence immédiate de la première. D'autre part, la nullité de $\underline{\text{Ext}}^i(F, L)$ pour $i > 2$ provient de l'hypothèse sur la dimension projective; la nullité pour $i < 2$ est un peu longue à démontrer en général, mais est facile si, par exemple X est régulier: localement l'idéal $\text{Ann}(F)$ contient alors une suite régulière de longueur deux.

COROLLAIRE 1.5.- Outre les hypothèses de 1.2, supposons que $\dim_{\text{proj}}_{\underline{O}_X}(\underline{O}_C) = 2$. Alors, l'application canonique

$$L = \underline{\text{Hom}}(\underline{O}_X, L) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(I, L)$$

est un isomorphisme, et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(X, L) \longrightarrow \text{Ext}^1(I, L) \longrightarrow \text{Hom}(\underline{O}_C, \underline{\text{Ext}}^1(I, L)) \longrightarrow H^2(X, L)$$

La première assertion provient de 1.4 et la seconde de la suite des termes de bas degrés de la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(X, \underline{\text{Ext}}^q(I, L)) \Rightarrow \text{Ext}^n(I, L) \quad .$$

Résumé 1.6.— Soient X un schéma localement noethérien, L un \underline{O}_X -module inversible et C un sous-schéma de X défini par l'idéal I . On suppose que

$$\dim_{\text{proj}} \underline{O}_X(\underline{O}_C) = 2 = \text{codim}(C, X) \quad .$$

On se donne enfin un isomorphisme $\varphi : \underline{O}_C \longrightarrow \underline{\text{Ext}}^2(\underline{O}_C, L)$. Alors

i) si $H^2(X, L) = 0$, il existe une classe d'extensions de I par L

$$\epsilon = (L \longrightarrow E \longrightarrow I)$$

telle que E soit localement libre et $\varphi_\epsilon = \varphi$.

ii) Si, de plus, $H^1(X, L) = 0$, ϵ est déterminée de façon unique.

iii) Enfin, si $H^0(X, L) = 0$, l'extension elle-même n'a pas d'automorphisme non trivial.

2. Variances.

On montre ici qu'en général L est déterminé à isomorphisme près par C , que C et L étant donnés, ainsi que deux isomorphismes φ et ψ les fibrés correspondants ne sont pas nécessairement isomorphes, et enfin que si le fibré E donné est instable, on peut lui associer une section régulière "canonique".

2.1. Soient E un fibré de rang deux, $s : E \longrightarrow \underline{O}_X$ une cosection régulière et $I = \text{Im}(s)$. Il est clair que s induit un isomorphisme

$$E|_C = E/I_E \xrightarrow{\bar{s}} I/I^2 = N_{C/X} \quad .$$

En particulier, on a un isomorphisme

$$\det(\bar{s}) : \det(E)|_C \xrightarrow{\sim} \det(N_{C/X}) \quad .$$

Par suite, si $\text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(C)$ est injectif, $\det(E)$ est déterminé à isomorphisme près par C ; cette hypothèse est vérifiée si $X = \mathbb{P}_k^n$, avec

$n \geq 3$; par contre, si on s'intéresse aux fibrés sur une surface X , $\text{Pic}(C) = 0$ et la donnée de L est alors essentielle.

2.2. Dans ce numéro, on suppose que $X = \mathbb{P}_k^n$, avec $n \geq 3$. Soient E un fibré de rang deux, $L = \det(E)$, et $s : E \rightarrow \underline{O}_X$ une cosection régulière d'image I .

LEMME 2.2.1.- Posons $c = c_1(E)$. Pour que E soit stable, il faut et il suffit que $c < 0$ et que $H^0(X, I^2(-c)) = 0$.

C'est une simple reformulation de la définition.

Soit $u \in H^0(C, \underline{O}_C^*)$ une section inversible sur C ; comme $H^i(X, L) = 0$ pour $i = 1$ et 2 , l'isomorphisme $u \otimes_s$ détermine une unique classe d'extensions de I par L , dont on note un représentant par

$$L \xrightarrow{t'} F \xrightarrow{t} I ;$$

il résulte de ce qui précède que F est un fibré de rang deux.

PROPOSITION 2.2.2.- Supposons que $c_1(E) \geq 0$ ou que E est stable. Alors F est isomorphe à E si et seulement si u est dans l'image de l'application

$$k^* = H^0(\underline{O}_X^*) \longrightarrow H^0(\underline{O}_C^*) .$$

Nous donnerons en 4.6.2 un exemple où C_{red} est une droite dans \mathbb{P}^3 et où cette application n'est pas surjective.

Notons ϵ et ϵ' les classes des extensions définies par $L \xrightarrow{s'} E \xrightarrow{s} I$ et $L \xrightarrow{t'} F \xrightarrow{t} I$. Supposons que $u \in k^*$. Comme l'isomorphisme 1.2.1 est k -linéaire, l'image de ue est $u \otimes_s$, donc $\epsilon' = ue$; mais le fibré associé à ue est isomorphe à E , donc la condition est suffisante.

Supposons réciproquement qu'il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow F$. Comme $s'(L) \subset IE$, le composé tfs' définit une application $L = \underline{O}_X(c) \rightarrow I^2$; si $c \geq 0$, on a $tfs' = 0$ puisque $I^2 \not\subset \underline{O}_X$; si E est stable, 2.2.1 implique encore $tfs' = 0$; par suite, il existe $a, b \in k^*$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \xrightarrow{s'} & E & \xrightarrow{s} & I \\
 a \downarrow & & f \downarrow & & b \downarrow \\
 L & \xrightarrow{t'} & F & \xrightarrow{t} & I
 \end{array}$$

On en déduit que, dans $\text{Ext}^1(I, L)$, on a $e' = ab^{-1}e$, donc que $u = ab^{-1}ek^*$, puisque, de nouveau, l'isomorphisme 1.2.1 est k -linéaire.

2.3. Pour tenter une classification des fibrés de rang deux en utilisant le schéma d'annulation d'une de leurs sections régulières, il faut exhiber une section "canonique" ; c'est en général impossible ; cependant, il existe pour tout fibré de rang deux E un plus petit entier r tel que $H^0(X, E(r)) \neq 0$ (si $X = \mathbb{P}_k^n$) et les éléments $\neq 0$ de $V = H^0(X, E(r))$ sont des sections régulières de $E(r)$; posant $P = \mathbb{P}_k(V^\vee)$, on a donc une section canonique du fibré $E(r) \otimes \mathcal{O}_P(1)$ sur $X \times P$.

Schwartzenger a remarqué dans [7] que si E est indécomposable et si $k \rightarrow \text{End}(E)$ n'est pas bijectif, alors l'espace V introduit plus haut est de rang 1.

Citons, sans démonstration, un résultat plus précis que celui de loc. cit. :

PROPOSITION 2.3.1.- Soient X un schéma propre, lisse et géométriquement connexe sur un corps k , E un fibré de rang deux indécomposable, et I l'ensemble des éléments non inversibles de $\text{End}(E)$. Alors

- i) I est un idéal bilatère et de carré nul.
- ii) Si $I \neq 0$, $\text{End}(E) = k + I$; en particulier c'est un anneau commutatif.
- iii) Si $s : L \rightarrow E$ est le noyau d'un endomorphisme non nul $u \in I$, et si on note \bar{s} l'application composée $E \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(E, \wedge^2 E) \xrightarrow{(s, 1)} \text{Hom}(L, \wedge^2 E) = \wedge^2 E \otimes L$, alors l'application $\text{Hom}(\wedge^2 E \otimes L, L) \rightarrow I$, $f \mapsto s f \bar{s}$ est un isomorphisme en particulier, pour tout $v \in I$, $v \neq 0$, $\text{Ker}(v) = L$.
- iv) Si $X = \mathbb{P}_k^n$ et si k est algébriquement clos, $I = H^0(X, \mathcal{O}_X(-c-2r))$ où $c = c_1(E)$ et r est le plus petit entier tel que $H^0(X, E(r)) \neq 0$.

3. Eclatement le long du schéma d'annulation.

Dans ce paragraphe, on interprète de façon plus géométrique l'application

$$\mathrm{Ext}^1(I, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{O}_C, \mathrm{Ext}^1(I, L))$$

en utilisant le schéma $f: X' \rightarrow X$ obtenu en faisant éclater X le long de C :
Supposant

C régulièrement immergé dans X , $C' = f^{-1}(C) \rightarrow C$ est un fibré en droites projectives sur C , par suite, $H^1(C', \Omega_{C'/C}^1)$ contient un élément privilégié, la "classe canonique"; le fibré est construit comme image directe $f_*(E')$ d'un fibré E' sur X' qui s'insère dans une suite exacte $0 \rightarrow L'' \rightarrow E' \rightarrow \underline{O}_X \rightarrow 0$ dont la restriction au diviseur exceptionnel C' donne une extension isomorphe à celle fournie par la classe canonique.

Cette interprétation permet de relier la construction de Serre-Horrocks avec celle de Schwarzenberger ([7]).

3.1. Soit X un schéma localement noethérien. Une immersion fermée $C \subset X$ est dite régulière si l'idéal I de C dans X est localement engendré par une suite régulière.

Cette propriété est vérifiée si C est un diviseur sur X , ou si C et X sont réguliers. Pour que l'immersion $C \subset X$ soit régulière, il faut et il suffit que le faisceau conormal

$$N_{C/X} = I/I^2$$

soit un \underline{O}_C -module localement libre et que $\dim_{\mathrm{proj}_{\underline{O}_X}}(\underline{O}_C) < \infty$ ([2]); on a alors

$$\mathrm{rang}(N_{C/X}) = \mathrm{codim}(C, X) = \dim_{\mathrm{proj}_{\underline{O}_X}}(\underline{O}_C).$$

La forme locale du théorème de Serre (1.3) donne un autre critère : supposons que C soit de codimension 2 dans X . Alors l'immersion $C \subset X$ est régulière si et seulement si $\mathrm{Ext}^2(\underline{O}_C, \underline{O}_X)$ est un \underline{O}_C -module inversible et $\dim_{\mathrm{proj}_{\underline{O}_X}}(\underline{O}_C) = 2$.

Le résultat suivant, qui est à la base de la théorie de la dualité de Grothendieck, relie les deux points de vue précédents et sera l'outil essentiel

pour la suite.

Soit C un sous-schéma fermé de codimension r dans X . Il existe un morphisme de foncteurs en les \underline{O}_X -modules quasi-cohérents F

$$3.1.1. \quad \underline{\text{Ext}}^r(\underline{O}_C, F) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\wedge^r N_{C/X}, F|_C)$$

qui est un isomorphisme si l'immersion $C \subset X$ est régulière ([4] et [1]).

Lorsque C est de codimension 2 dans X , l'application composée

$$3.1.2. \quad \text{Ext}^1(I, L) \xrightarrow{1.2.1} \text{Hom}(\underline{O}_C, \text{Ext}^1(I, L)) \xrightarrow{3.1.1} \text{Hom}(\wedge^2 N_{C/X}, L|_C)$$

possède la propriété suivante : soient, avec les notations de 1.2,

$$\epsilon = (L \xrightarrow{s'} E \xrightarrow{s} I) \text{ une classe d'extensions de } I \text{ par } L, \quad \sigma : \wedge^2 E \rightarrow L$$

l'application associée par 1.2.2 et $\psi_\epsilon : \wedge^2 N_{C/X} \rightarrow L|_C$ l'image de ϵ par

3.1.2. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$3.1.3. \quad \begin{array}{ccc} \wedge^2 N_{C/X} & \xrightarrow{\psi_\epsilon} & L|_C \\ \wedge^2 s|_C \nearrow & & \nearrow \sigma|_C \\ & \wedge^2 E|_C & \end{array}$$

3.2. Soit $f : X' \rightarrow X$ le schéma obtenu en faisant éclater un schéma (localement noethérien) X le long d'un sous-schéma fermé C ; on a donc

$$X' = \text{Proj}(R)$$

$$\text{où } R = \bigsqcup_{n \geq 0} I^n.$$

$$\text{On pose : } L' = \underline{I\mathcal{O}}_{X'}.$$

C'est un idéal inversible dans $\underline{O}_{X'}$; il définit le diviseur exceptionnel

$$C' = C \times_X X'.$$

Posant $U = X - C$, f induit un isomorphisme $X' - C' = f^{-1}(U) \rightarrow U$.

Supposons que l'immersion $C \subset X$ soit régulière. Alors le morphisme canonique $\text{Sym}(I) \rightarrow R$ est un isomorphisme [6], de sorte que X' s'identifie à $\mathbb{P}_X(I)$ et C' s'identifie à $\mathbb{P}_C(N_{C/X})$, les quotients inversibles universels étant respectivement

$$I \otimes \underline{O}_{X'} \rightarrow \underline{I\mathcal{O}}_{X'} = L' \quad \text{et} \quad f^*(N_{C/X}) = I/I^2 \otimes \underline{O}_{X'} \rightarrow \underline{I\mathcal{O}}_{X'}/I^2 \underline{O}_{X'} = L'|_{C'}.$$

Supposons que $C \subset X$ soit une immersion régulière de codimension 2. Posons

$N = N_{C/X} = I/I^2$. Alors, on a une suite exacte

$$3.2.1. \quad 0 \longrightarrow f^*(\wedge^2 N) \otimes L'^{-1} \longrightarrow f^*(I) \longrightarrow L' \longrightarrow 0$$

et un isomorphisme

$$3.2.2. \quad \Omega_{C'/C}^1 = f^*(\wedge^2 N) \otimes L'^{-2}.$$

En effet, comme I est localement engendré par deux éléments, $\wedge^2 I \longrightarrow \wedge^2 N$

est un isomorphisme ; on en déduit, d'après Koszul, une application

$f^*(\wedge^2 N) \otimes L' \longrightarrow Z$, où Z est le noyau de $f^*(I) \longrightarrow L'$; on vérifie que Z

est annulé par I ; d'autre part, comme L' est inversible, par réduction

au-dessus de C' , on obtient encore une suite exacte

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow f^*(N) \longrightarrow L'|_{C'} \longrightarrow 0.$$

Comme $f^*(N)$ et $L'|_{C'}$ sont des $\mathcal{O}_{C'}$ -modules localement libres de rang deux

et un respectivement, on voit que l'application $f^*(\wedge^2 N) \otimes L'^{-1} \longrightarrow Z$ est un isomorphisme.

Rappelons enfin les propriétés cohomologiques de f : soit F un \mathcal{O}_X -module localement libre. Alors

$$3.2.3. \quad f_*(f^*(F) \otimes L'^{\otimes n}) = \begin{cases} F & , \text{ si } n \leq 0 \\ I^n F & , \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$$

$$3.2.4. \quad R^1 f_*(f^*(F) \otimes L'^{-1}) = 0$$

$$3.2.5. \quad R^i f_*(f^*(F) \otimes L'^{\otimes n}) = 0 \text{ si } i \geq 1 \text{ et } n \geq 0.$$

Les deux numéros suivants sont consacrés à la démonstration de la

PROPOSITION. 3.3.- Soit $C \subset X$ une immersion régulière de codimension deux.

Soient L un \mathcal{O}_X -module inversible $f : X' \longrightarrow X$ le schéma obtenu en faisant éclater X le long de C . Gardons les notations de 3.2 et posons

$$L'' = f^*(L) \otimes L'^{-2}.$$

Alors, on a un diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}^1(I, L) & \xrightarrow{1.2.1} & \text{Hom}(\underline{O}_C, \text{Ext}^1(I, L)) \\
 \downarrow \S & & \downarrow \S \\
 H^1(X', L'') & \xrightarrow{\text{restriction à } C'} & H^1(C', L''|_{C'})
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes précisés plus bas.

3.4. L'isomorphisme $\text{Ext}^1(I, L) \xrightarrow{\sim} H^1(X', L'')$. Soient $e = (L \xrightarrow{s'} E \xrightarrow{s} I)$ une classe d'extensions de I par L et $\sigma : \wedge^2 E \rightarrow L$ l'application associée (1.2.2). En composant $f^*(s)$ et l'application canonique $f^*(I) \rightarrow L'$, on obtient une application surjective $f^*(E) \rightarrow L'$; comme L' est inversible, cette application est localement scindée et le début du complexe de Koszul

$$f^*(\wedge^2 E) \otimes L'^{-1} \rightarrow f^*(E) \rightarrow L' \rightarrow 0$$

est une suite exacte; par somme amalgamée, on obtient le diagramme suivant

où les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 f^*(\wedge^2 E) \otimes L'^{-1} & \longrightarrow & f^*(E) & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f^*(\sigma) \otimes 1 & & \downarrow & & \parallel & & \\
 f^*(L) \otimes L'^{-1} & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

De plus, i est injective car $f^*(L) \otimes L'^{-1}$ est inversible et $i|_{f^{-1}(U)}$ est injective. L'extension de \underline{O}_X , par $f^*(L) \otimes L'^{-2} = L''$ fournie par la ligne du bas de 3.4.1 est l'élément de $H^1(X', L'')$ associé à e .

En prenant l'image directe de la ligne du bas de 3.4.1, et en tenant compte de 3.2.3 et 3.2.4, on trouve une extension de I par L :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & f_*(f^*(L) \otimes L'^{-1}) & \longrightarrow & f_*(E') & \longrightarrow & f_*(L') \longrightarrow R^1 f_*(f^*(L) \otimes L'^{-1}) \\
 & & \parallel & & & & \parallel & \parallel \\
 & & L & & & & I & 0
 \end{array}$$

Le lecteur vérifiera que les deux applications ainsi construites sont réciproques l'une de l'autre.

3.5. L'isomorphisme $\text{Hom}(\underline{O}_C, \underline{\text{Ext}}^1(I, L)) \longrightarrow H^1(C', L''|C')$. Notons encore par f le morphisme canonique $C' = \mathbb{P}_C(N) \longrightarrow C$. On a

$$3.5.1. \quad R^i f_*(L''|C') = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ \underline{\text{Hom}}(\wedge^2 N, L|C) & \text{si } i = 1 \end{cases}.$$

En effet, en posant $\omega = \Omega_{C'}^1/C$, et en tenant compte de 3.2.2, on voit que l'on a

$$L''|C' = f^*(L) \otimes L'^{-2}|C' = \omega \otimes f^*(\underline{\text{Hom}}(\wedge^2 N, L|C)).$$

Or, $R^i f_*(\omega) \cong 0$ pour $i \neq 1$ et $R^1 f_*(\omega) = \underline{O}_C$ puisque $C' \longrightarrow C$ est un fibré en droites projectives.

La suite spectrale de Leray et 3.5.1 donnent des isomorphismes

$$H^1(C', L''|C') \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^1 f_*(L''|C')) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\underline{O}_C, \underline{\text{Hom}}(\wedge^2 N, L|C)).$$

D'autre part, d'après 3.1.1, on a un isomorphisme

$$\underline{\text{Ext}}^1(I, L) = \underline{\text{Ext}}^2(\underline{O}_C, L) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\wedge^2 N, L|C).$$

D'où, par composition, l'isomorphisme cherché.

Pour vérifier que le carré 3.3.1 est commutatif, il faut d'abord expliciter l'isomorphisme, indiqué plus haut

$$\text{Hom}(\wedge^2 N, L|C) \longrightarrow H^1(C', L''|C').$$

Le $H^0(C, \underline{O}_C)$ -module libre de rang un $H^1(C', \omega)$ admet pour base la classe de l'extension canonique

$$0 \longrightarrow \omega \longrightarrow f^*(N) \otimes L'^{-1} \longrightarrow \underline{O}_{C'} \longrightarrow 0$$

Soit $\psi : \wedge^2 N \longrightarrow L|C$ une application linéaire. Posons

$$3.5.2. \quad \psi' = f^*(\psi) \otimes 1 : f^*(\wedge^2 N) \otimes L'^{-2} = \omega \longrightarrow f^*(L) \otimes L'^{-2}|C' = L''|C'.$$

L'image de ψ dans $H^1(C', L''|C')$ est la classe de l'extension donnée par la seconde ligne du diagramme de somme amalgamée suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega & \longrightarrow & f^*(N) \otimes L'^{-1} & \longrightarrow & \underline{O}_{C'} \longrightarrow 0 \\ & & \psi' \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L''|C' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \underline{O}_{C'} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Maintenant soit $e = (L \xrightarrow{s'} E \xrightarrow{s} I)$ une classe d'extensions de I par

L . Koszul et 3.2.1 permettent d'écrire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f^*(\wedge^2 E) \otimes L'^{-2} & \longrightarrow & f^*(E) \otimes L'^{-1} & \longrightarrow & \underline{O}_X & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f^*(\wedge^2 s) \otimes 1 & & \downarrow f^*(s) \otimes 1 & & \parallel & & \\
 0 \longrightarrow & f^*(\wedge^2 N) \otimes L'^{-2} & \longrightarrow & f^*(I) \otimes L'^{-1} & \longrightarrow & \underline{O}_X & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

L'empilage de ce diagramme restreint à C' et du précédent donne, compte tenu de 3.1.3, le diagramme 3.4.1 restreint à C' ; d'où la commutativité annoncée.

Ce dictionnaire étant établi, on peut traduire 1.6 :

Résumé 3.6.— Soient X un schéma localement noethérien, L un \underline{O}_X -module inversible, $C \subset X$ une immersion régulière de codimension deux et $f : X' \rightarrow X$ le schéma obtenu en faisant éclater X le long de C . On note :

$$L' = I \underline{O}_{X'}, \quad L'' = f^*(L) \otimes L'^{-2}, \quad N = I/I^2$$

$$C' = \mathbb{P}_{C'}(N) = f^{-1}(C)$$

$$\omega = \Omega_{C'/C}^1 = f^*(\wedge^2 N) \otimes L'^{-2}.$$

On se donne un isomorphisme $\psi : \wedge^2 N \rightarrow L|_C$, et on note (cf. 3.5.2)

$$H^1(\psi') : H^1(C', \omega) \rightarrow H^1(C', L''|_{C'})$$

l'isomorphisme qui lui est associé. Alors :

i) si $H^2(X, L) = 0$, il existe $\epsilon' \in H^1(X', L'')$ dont la restriction à C' est l'image par $H^1(\psi')$ de la classe canonique ; de plus, si l'extension

$$0 \longrightarrow L'' \longrightarrow E' \longrightarrow \underline{O}_{X'} \longrightarrow 0$$

représente ϵ' , alors $f_{*}(E' \otimes L')$ est un \underline{O}_X -module localement libre de rang deux et par image directe, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow f_{*}(E' \otimes L') \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

ii) Si $H^1(X, L) = 0$, ϵ' est déterminé de façon unique par ψ .

Remarques 3.7.1.— Cette présentation sera peut-être préférée à la première par ceux qui sont plus familiers avec les H^1 qu'avec les Ext^1 ; mais on contrôle en général assez mal les éclatements ; si X et C sont réguliers, il en est de même de X' ; mais si C n'est pas régulier, X' n'est plus nécessairement

normal.

3.7.2. On peut démontrer directement que $f_*(E' \otimes L')$ est localement libre : en effet, c'est clair au-dessus de l'ouvert schématiquement dense U ; il suffit donc de voir que, pour tout $x \in C$, $H^0(f^{-1}(x), E' \otimes L' \otimes k(x))$ est de rang deux ; or, d'après l'hypothèse $E' \otimes L'|_C$ est isomorphe à $f^*(N)$.

3.8. Cas des surfaces : la construction de Schwarzenberger ([7]).

Supposons que X soit une surface propre et lisse sur un corps algébriquement clos k . Un sous-schéma fermé C de codimension deux dans X est alors fini sur k , donc $C = \text{Spec}(A)$ où A est une k -algèbre finie.

On peut montrer que $\text{Ext}^2(\underline{O}_C, L)$, où L est un \underline{O}_X -module inversible, est isomorphe au faisceau associé au A -module $\text{Hom}_k(A, k)$; par suite (critère de Serre), $C \subset X$ est une immersion régulière si et seulement si $\text{Hom}_k(A, k)$ est un A -module libre (nécessairement de rang un).

Supposons l'immersion $C \subset X$ régulière, et soit $X' \rightarrow X$ l'éclatement de X le long de C ; en général X' n'est pas régulière, mais, d'après un théorème de Zariski, on peut trouver un morphisme $X'' \rightarrow X'$ tel que le composé $X'' \rightarrow X' \rightarrow X$ soit une suite d'éclatements le long de points (réduits) ; en particulier, X'' est lisse.

Le lecteur pourra vérifier que la construction de 3.6 est très proche de celle de loc. cit., à condition de remplacer X' par X'' et de tenir compte dans l'énoncé de tous les diviseurs exceptionnels qui interviennent dans $X'' \rightarrow X'$ ainsi que des composantes de L' sur les sus-dits.

4. Mode d'emploi et exemples.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que $X = \mathbb{P}_k^3$, où k est un corps algébriquement clos.

4.1. Un sous-schéma fermé C de codimension deux dans X sera dénommé une courbe ; une courbe dans X n'est pas supposée réduite ni connexe.

Si C est une courbe dans X , la dimension projective du \mathcal{O}_X -module \mathcal{O}_C est toujours inférieure ou égale à 3 ; pour qu'elle soit égale à 2, il faut et il suffit que C soit de Cohen-Macaulay, autrement dit que C n'ait pas de points associés immergés ; cette dernière condition signifie ceci : pour tout ouvert U dans C qui est dense pour la topologie de Zariski, l'application de restriction

$$H^0(U, \mathcal{O}_C) \longrightarrow H^0(U \cap V, \mathcal{O}_C)$$

est injective pour tout ouvert V de C .

L'anneau $H^0(C, \mathcal{O}_C)$ est une k -algèbre finie, en général distincte de k ; c'est un anneau local si et seulement si C est connexe ; si C est connexe et réduite, il est isomorphe à k .

4.2. Module dualisant [1].

Soit C une courbe de Cohen-Macaulay dans X . Le \mathcal{O}_C -module

$$\omega_C = \underline{\text{Ext}}^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_X(-4))$$

s'appelle un module dualisant pour C ; il est en effet muni d'une application

$$\eta_C : H^1(C, \omega_C) \longrightarrow k$$

telle que, pour tout \mathcal{O}_C -module cohérent F , l'accouplement

$$H^i(C, F) \times \text{Ext}^{1-i}(F, \omega_C) \longrightarrow H^1(C, \omega_C) \xrightarrow{\eta_C} k$$

soit parfait pour $i = 0$ et 1 .

Si F est localement libre, on a donc des isomorphismes

$$H^i(C, F) \longrightarrow H^{1-i}(C, F^\vee \otimes \omega_C),$$

où " $^\vee$ " désigne le dual à valeurs dans k .

Le couple (ω_C, η_C) est défini à isomorphisme unique près par C ; il ne dépend pas du plongement $C \subset X$.

Si C est lisse sur k , alors ω_C est isomorphe à Ω_C^1 ; de plus, la suite exacte

$$0 \longrightarrow N_{C/X} \longrightarrow \Omega_X^1|_C \longrightarrow \Omega_C^1 \longrightarrow 0$$

et l'isomorphisme $\omega_X \cong \underline{O}_X(-4)$ montrent qu'on a un isomorphisme

$$\omega_C \otimes \det(N_{C/X}) \xrightarrow{\sim} \underline{O}_C(-4) \quad .$$

4.3. Le critère de Serre (1.3) se traduit de la façon suivante : soit C une courbe de Cohen-Macaulay dans X . C est localement une intersection complète dans X (i.e. l'immersion $C \subset X$ est régulière) si et seulement si ω_C est un \underline{O}_C -module inversible ; le faisceau conormal $N_{C/X}$ est alors localement libre de rang 2 et on a un isomorphisme (cf. 3.1.1).

$$\omega_C \otimes \det(N_{C/X}) \xrightarrow{\sim} \underline{O}_C(-4) \quad .$$

Pour que C soit le schéma d'annulation d'un fibré de rang 2 il faut et il suffit que ω_C se prolonge en un faisceau inversible sur X (déterminé à isomorphisme près par C) ; plus précisément, les classes d'extensions de I par $\underline{O}_X(c)$

$$0 \longrightarrow \underline{O}_X(c) \longrightarrow E \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

où E est localement libre de rang 2, sont en correspondance bi-univoque avec les isomorphismes de \underline{O}_C -modules

$$\omega_C \xrightarrow{\sim} \underline{O}_C(-c-4) \quad .$$

4.4. Soient C une courbe de X , définie par l'idéal I , et

$$0 \longrightarrow \underline{O}_X(c) \longrightarrow E \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

une suite exacte où E est localement libre de rang 2. Alors

a) $c_1(E) = c$ et $c_2(E) = \deg(C)$.

b) E est stable si et seulement si, pour toute surface S contenant C (i.e. telle que C soit un sous-schéma de S), on a

$$0 < -c_1(E) < 2\deg(S) \quad .$$

c) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E est décomposable.

ii) C est intersection complète.

iii) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $H^1(X, E(n)) = 0$.

iv) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application canonique $H^0(X, \underline{O}_X(n)) \longrightarrow H^0(C, \underline{O}_C(n))$ est surjective.

Il y a essentiellement deux procédés pour construire des courbes dont le module dualisant se prolonge : celui, inauguré par Horrocks [5], qui consiste à prendre une réunion d'intersections complètes deux à deux disjointes, et le doublement d'une courbe dans une direction normale donnée.

4.5. Soient C_1, \dots, C_r des courbes dans X , deux à deux disjointes, n un entier et, pour tout i , $\varphi_i : \omega_{C_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{C_i}(n)$ un isomorphisme. Soit C la réunion des C_i . Les φ_i donnent un isomorphisme $\varphi : \omega_C \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_C(n)$; donc C est le schéma d'annulation d'une cosection d'un fibré de rang 2, E ; on a $c_1(E) = -4 - n$, $c_2(E) = \sum \deg(C_i)$; notons que si $r \geq 2$, alors E est indécomposable puisque $H^0(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C)$ n'est pas surjectif.

Plus concrètement, si chaque C_i est une droite dans X , alors le choix, pour chaque i de deux plans d'intersection C_i détermine une résolution gauche de \mathcal{O}_{C_i}

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1) \oplus \mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{C_i} \longrightarrow 0$$

à laquelle est attaché un isomorphisme $\omega_{C_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{C_i}(-2)$. Si E est le fibré associé à la réunion des C_i et à ces isomorphismes, on a

$$c_1(E) = -2, \quad c_2(E) = r, \quad E \text{ est stable si } r \geq 2.$$

Indiquons l'exemple grâce auquel Horrocks montre que, pour tout couple d'entiers c_1, c_2 tels que $c_1 c_2$ soit pair, il existe un fibré de rang deux indécomposable ayant ces entiers pour classes de Chern.

Soient D_1, \dots, D_r des droites deux à deux disjointes ; pour chaque i , on fait le choix de deux formes linéaires f_i et g_i telles que les plans qu'elles définissent aient D_i pour intersection.

Soient c et m_1, \dots, m_r des entiers tels que, pour tout i , on ait $0 < m_i < c$. Soit C_i la courbe intersection des surfaces d'équation $f_i^{m_i} = 0$ et $g_i^{c-m_i} = 0$; pour chaque i , on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-c) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-m_i) \oplus \mathcal{O}_X(m_i - c) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{C_i} \longrightarrow 0.$$

Si E est le fibré de rang 2 associé à la réunion des C_i et aux isomor-

phismes déduits de ces résolutions, on a

$$c_1(E) = -c \quad , \quad c_2(E) = \sum_1^r m_i (c - m_i) \quad .$$

4.6. Doublement d'une courbe dans une direction normale donnée [3] .

4.6.1. Soit C une courbe localement intersection complète dans X , de faisceau conormal N . Soient n un entier et $u : N \longrightarrow \omega_C(n)$ une application surjective (pour n assez grand, de telles applications existent). Désignons par C' la courbe définie par l'idéal I' noyau de l'application

$$I \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{u} \omega_C(n) \quad .$$

On a donc $I'^2 \subset I' \subset I$, et u induit un isomorphisme $I/I' \xrightarrow{\sim} \omega_C(n)$.

On montre dans loc. cit. que ω_C est isomorphe à $\mathcal{O}_C(-n)$ si et seulement si l'application composée déduite de u

$$H^1(X, I(-n)) \longrightarrow H^1(C, N(-n)) \longrightarrow H^1(C, \omega_C)$$

est nulle. Si tel est le cas, C' est le schéma d'annulation d'une cosection d'un fibré de rang 2 , E , vérifiant $c_1(E) = n-4$ et $c_2(E) = 2\deg(C)$.

4.6.2. Les exemples les plus explicites de fibrés fournis par ce procédé s'obtiennent en "doublant un diviseur sur une surface" : considérons le cas où C est intersection complète de deux surfaces d'équations $f = 0$ et $g = 0$ de degré p et q respectivement.

Soit S une surface de degré d contenant C ; une équation de S peut donc s'écrire sous la forme $tf - sg = 0$ pour des polynômes homogènes s et t convenables.

On suppose que C est un diviseur sur S , i.e. que les surfaces d'équation $s = 0$, $t = 0$, $f = 0$ et $g = 0$ ont une intersection vide.

La suite exacte des faisceaux conormaux

$$0 \longrightarrow N_{S/X}|_C \longrightarrow N_{C/X} \longrightarrow N_{C/S} \longrightarrow 0$$

donne un isomorphisme

$$N_{C/S} \cong \mathcal{O}_C(d-p-q) \quad ;$$

elle se récrit donc

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(-d) \xrightarrow{\begin{pmatrix} t \\ -s \end{pmatrix}} \mathcal{O}_C(-p) \oplus \mathcal{O}_C(-q) \xrightarrow{u} \omega_C(n) \longrightarrow 0$$

avec $n = d + 4 - 2(p + q)$, puisque $\omega_C = \mathcal{O}_C(p + q - 4)$.

La courbe C' dont l'idéal I' est défini par le noyau de u est le carré du diviseur C sur la surface S :

$$I' = (f^2, g^2, fg, tf - sg) .$$

D'après 4.6.1, et en tenant compte du fait que $H^1(X, I(-n)) = 0$ puisque C est intersection complète, on a un isomorphisme

$$\omega_{C'} \cong \mathcal{O}_{C'}(-n)$$

et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(n-4) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{C'} \longrightarrow 0$$

où E est un fibré de rang deux.

La définition de C' conduit au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^0(\mathcal{O}_C(d-p-q)) & & & & \\ & & \downarrow \S & & & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(N_{C/S}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_{C'}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_C) \\ & & & & \uparrow k & \nearrow & \\ & & & & & & \end{array}$$

Par suite, si $d \geq p + q$, $H^0(N_{C/S}) \neq 0$, donc $k \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{C'})$ n'est pas surjectif et, en particulier, E est indécomposable.

Pour examiner la question de la stabilité de E , on peut supposer $p \leq q$. Le plus petit degré d'une surface contenant C' est donc $\inf(2p, d)$; comme $c_1(E) = d - 2(p + q)$, on voit que E est stable si et seulement si

$$0 < 2(p + q) - d < 2\inf(2p, d)$$

c'est-à-dire si

$$\sup(2p, 2(q - p)) < d < 2(p + q)$$

$$\text{ou si } \frac{2}{3}(p + q) < d \leq 2p .$$

Examinons le cas explicite du "doublement d'une droite sur une surface cubique" :

soient C la droite : $T_0 = T_1 = 0$, et S la surface : $T_3^2 T_0 - T_2^2 T_1 = 0$

($p = q = 1$, $d = 3$).

Tout fibré E donnant lieu à la suite exacte ci-dessus est stable et vérifie $c_1(E) = -1$ et $c_2(E) = 2$; mais un tel fibré n'est pas unique (à isomorphisme près) : en effet, $H^0(C', \mathcal{O}_{C'}) = k + V$, où $V = H^0(N_{C/S}) = H^0(\mathcal{O}_C(1))$ est un espace vectoriel de rang deux, idéal de carré nul dans cet anneau ; donc l'application $v \mapsto 1 + v$ établit un isomorphisme

$$V \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{O}_C^*,)/k^*$$

par suite, d'après 2.2.2, l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels fibrés est un tore sous le groupe additif V .

4.6.3. Les fibrés, obtenus en doublant un diviseur sur une surface, peuvent aussi être construits par la méthode de Horrocks : gardons les notations de 4.6.2 et supposons, pour simplifier, que $d < p + q$; soit h l'unique section de $E(p + q)$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & & \\ h \downarrow & \searrow fg & \\ E(p + q) & \longrightarrow & I'(p + q) \end{array}$$

On vérifie facilement que le schéma d'annulation de h est la réunion des courbes disjointes définies par l'annulation de f et t d'une part, et g et s d'autre part.

5. Bibliographie.

- [1] A. ALTMAN et S. KLEIMAN - Introduction to Grothendieck duality theory, Lecture Notes in Math., n°146, Springer-Verlag, 1970.
- [2] D. FERRAND - Suites régulières et intersections complètes, Notes aux C.R.A.S. de Paris, t. 264, (6 Mars 1967).
- [3] D. FERRAND - Courbes gauches et fibrés de rang deux, Note aux C.R.A.S. de Paris, t. 281 (8 Sept. 1975).
- [4] A. GROTHENDIECK - Fondements de la géométrie algébrique.

- [5] G. HORROCKS - A construction for locally free sheaves, Topology, vol. 7 (1968).
- [6] A. MICALI - Sur les algèbres universelles, Ann. Inst. Fourier (1964).
- [7] R.L.E. SCHWARZENBERGER - Vector bundles on algebraic surfaces, Proc. London Math. Soc. 1961.
- [8] J.-P. SERRE - Sur les modules projectifs, Séminaire Dubreil-Pisot, 1960/61.

FIBRÉS STABLES DE RANG 2 SUR $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

AVEC $c_1 = 0$, $c_2 = 2$

par H. AUPETIT, d'après R. HARTSHORNE.

Rédaction revue et complétée par A. DOUADY

Programme.

Le but de cet exposé est d'abord de décrire l'espace $M(2)$ des modules pour les fibrés de rang 2 sur $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, stables et dont les classes de Chern sont $c_1 = 0$ et $c_2 = 2$. On montrera en particulier qu'il est lisse, irréductible, de dimension 13 sur \mathbb{C} , non simplement connexe. On étudiera ensuite ceux de ces fibrés correspondant aux instantons (cf. exposés de Douady et Verdier). On montrera en particulier que la variété réelle $I(2)$ est lisse de dimension 13 sur \mathbb{R} , et on déterminera son type d'homotopie.

1. Courbes associées à un fibré.

1.1. Schéma d'annulation d'une section.

Soit E un fibré stable de rang 2 sur $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ vérifiant $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = 2$. D'après un résultat de Barth (exposé Barth), on a $h^1(E(-2)) = 0$.

On en déduit par restriction à un plan sur lequel E est semi-stable que $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \leq -2$. En particulier $h^2(E(1)) = h^1(E(-5)) = 0$.

Le théorème de Riemann-Roch sur \mathbb{P}^3 fournit alors l'égalité

$$h^0(E(1)) - h^1(E(1)) = 2.$$

Le fibré $E(1)$ a donc des sections globales non nulles, soit s l'une d'elles et notons Y le schéma d'annulation de s . Comme E est stable, Y est une courbe, nous entendons par là que Y est de dimension 1 et sans composante immergée; la courbe Y est localement intersection com-

plète, notons \underline{I} son idéal.

On a la suite exacte (exposé):

$$(1) \quad 0 \rightarrow \underline{O}_{P^3} \xrightarrow{s} E(1) \rightarrow \underline{I} \otimes \Lambda^2 E(1) \rightarrow 0$$

et l'égalité $\deg Y = c_2(E(1)) = 3$. On identifiera, de manière non canonique, $\Lambda^2 E(1)$ et $\underline{O}_{P^3}(2)$.

La stabilité de E et la suite exacte (1) donnent $h^0(\underline{I}(1)) = 0$.

Nous avons vu à l'exposé que le fibré canonique ω_Y de Y est isomorphe à $\underline{O}_Y(-2)$ (i.e. $\underline{O}_{P^3}(-2) \otimes \underline{O}_Y$).

En résumé, à toute section non nulle s de $E(1)$, on peut associer la courbe $Y = s^{-1}(0)$ qui est de degré 3, localement intersection complète et satisfaisant à $\omega_Y \cong \underline{O}_Y(-2)$. Nous verrons au n° (1.3) que ceci implique pour la courbe Y .

1.2. Courbes de degré 2 et 3 dans P^3_C .

1.2.1. Les courbes de degré 2 dans P^3_C sont:

- a) les coniques irréductibles (elles sont planes);
- b) les courbes réunion de 2 droites distinctes, coplanaires ou non;
- c) les droites doubles, i.e. les courbes non réduites γ telles que

la courbe réduite associée soit une droite d et que le cycle défini par γ soit $2d$. Si γ est une droite double et d sa réduite, pour chaque point $x \in d$, l'espace ^{projectif} tangent $\hat{T}_x \gamma$ est un plan contenant d et l'application $x \mapsto \hat{T}_x \gamma$ de d dans l'espace projectif de dimension 1 des plans contenant d a un degré α que l'on nommera le "nombre d'enlacement" de γ .

Dans la suite, le mot "conique" désignera une courbe plane de degré 2, i.e. une conique irréductible, la réunion de 2 droites coplanaires ou une droite double d'enlacement 0.

1.2.2. Les courbes de degré 3 dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ sont:

(A) les cubiques irréductibles:

- a) les cubiques irréductibles gauches (elles sont unicursales);
- b) les cubiques irréductibles planes.

(B) les courbes formées d'une conique C et d'une droite $d \not\subset C$: la droite peut

- c) ne pas rencontrer la conique;
- d) la rencontrer.

(C) les courbes formées de trois droites distinctes ou confondues: ce peut être:

- e) trois droites deux à deux non coplanaires;
- f) une droite double γ d'enlacement $\alpha \geq 1$ et une droite simple d ne rencontrant pas γ ;
- g) -id- d rencontrant γ .
- h) une droite triple.

(les autres cas sont couverts par le cas (B)).

1.3. Quelles courbes de degré 3 apparaissent?

PROPOSITION 1.- Soit s une section non nulle de $E(1)$ et posons $Y = s^{-1}(0)$. Dans la classification 1.2.2., le type de Y est nécessairement (e), (f) avec $\alpha = 1$, ou (h).

1.3.1.

On a $h^0(I(1)) = 0$, donc Y n'est pas plane, ce qui exclut le cas (b)

On a d'autre part $h^0(I(2)) \neq 0$ d'après (1), autrement dit Y est contenu dans une quadrique. Les droites doubles tracées sur une quadrique régulière sont d'enlacement 1, et sur une quadrique singulière deux droites se rencontrent toujours: on ne peut donc avoir le type (f) qu'avec $\alpha = 1$.

1.3.2. Supposons Y de la forme $d \cup C$, où d est une droite simple et C une courbe ne contenant pas d mais telle que $d \cap C \neq \emptyset$. En dérivant la section s , on obtient un morphisme du fibré normal N_d dans $E(1)|_d$, qui est injectif aux points de $d - (d \cap C)$, et non injectif aux points de $d \cap C$. Comme $N_d = \mathcal{O}_d(1)^2$, ceci est en contradiction avec l'hypothèse $c_1(E) = 0$. Par suite, les cas (d) et (g) sont éliminés.

Pour éliminer les cas (a) et (c), nous allons utiliser la condition $\omega_Y = \mathcal{O}_Y(-2)$.

1.3.4. Soient Z une cubique irréductible gauche et $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ une paramétrisation de Z . En notant ω_Z le fibré canonique de Z , on a $f^*(\omega_Z) = \omega_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Comme $f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3k)$, on voit que ω_Z n'est pas de la forme $\mathcal{O}_Z(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Par suite Y n'est pas du type (a).

1.3.5. Soient d une droite et C une conique formant une courbe du type (c). Le fibré canonique ω_C de C est isomorphe à $\mathcal{O}_C(-1)$: on le voit en utilisant une paramétrisation de C si C est une conique lisse, par spécialisation dans les autres cas. Par suite Y ne saurait être du type (c).

Ceci achève la démonstration de la Proposition 1. Remarquons qu'en fait cette démonstration ne donne pas d'information sur les possibilités dans le cas (h).

1.4. Droites triples dans une quadrique.

Si Z est un sous-schéma de X , on notera $V_k(Z, X)$ le voisinage infinitésimal d'ordre k de Z dans X , i.e. le sous-schéma de X défini par l'idéal \underline{I}^{k+1} si Z est défini par \underline{I} ; on notera $N(Z, X)$ le fibré normal de Z dans X , fibré dual du faisceau $\underline{I}/\underline{I}^2$.

1.4.1. Soit $\gamma \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ une droite triple et notons d la droite réduite associée. Si $\gamma \neq V_1(d, \mathbb{P}^3)$, on a $\dim T_a(\gamma) = 2$ pour presque tout point $a \in d$, ce qui permet de définir le nombre d'enlacement α de γ comme au n° 1.2.1.

LEMME.- Si γ est localement intersection complète, on a $\dim T_a(\gamma) = 2$ pour tout $a \in d$, et si de plus γ n'est pas plane, on a $\alpha \geq 1$.

Soit Δ une droite ne rencontrant pas d et H un plan variable contenant Δ . Posons $A = H \cap \gamma$ et soit a le point $H \cap d$, point réduit associé à A . Le schéma A est un point triple dans H , donc A peut être

- $V_1(a, H)$,
- de la forme $V_2(a, C)$, où C est une courbe lisse dans H .

Si γ est intersection complète en a , il en est de même de A , ce qui exclut $A = V_1(a, H)$ et entraîne que $\dim T_a(\gamma) = 2$.

Le jet à l'ordre 2 de la courbe C définit une application homogène de degré 2 de $T_a C$ dans $T_a H / T_a C$, ou encore de $N_a(d, \gamma)$ dans $N_a(\gamma, \mathbb{P}^3)$.

En faisant varier H , on obtient une section régulière σ du fibré $F = N(d, \gamma)^{\otimes -2} \otimes N(\gamma, \mathbb{P}^3)$. Le degré du fibré $N(d, \gamma)$ est $1 - \alpha$, celui de $N(\gamma, \mathbb{P}^3)$ est $1 + \alpha$, donc celui de F est $1 + \alpha - 2(1 - \alpha) = 3\alpha - 1$.

Si $\alpha = 0$, on a nécessairement $\sigma = 0$, et γ est une courbe plane.

(On peut remarquer que le fibré F ne dépend pas du choix de Δ , mais la section σ en dépend).

1.4.2.

LEMME.- Soit γ une droite triple contenue dans une quadrique $Q \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, et notons d la droite réduite associée à γ . On suppose la quadrique Q singulière et $\gamma \neq V_1(d, \mathbb{P}^3)$. Alors $\alpha = 0$.

Si Q est un cône de sommet s à base lisse, la droite d passe par s , et on a $T_a\gamma = T_aQ$ pour tout $a \neq s$. Le plan projectif $\hat{T}_a\gamma$ est alors indépendant de $a \in d - \{s\}$. (Dans ce cas, la courbe γ ne peut pas être plane).

Si Q est de la forme $P_1 \cup P_2$, où P_1 et P_2 sont des plans projectifs distincts, la conclusion est immédiate sauf si $d = P_1 \cap P_2$. En tout point $a \in d$ où $\dim T_a\gamma = 2$, on a $T_a\gamma = T_aP_1$ ou $T_a\gamma = T_aP_2$: s'il n'en était pas ainsi, γ serait contenue dans une surface lisse S coupant transversalement P_1 et P_2 , et la multiplicité de d dans $S \cap Q$ serait au plus 2. Bien sûr, on a $\hat{T}_a\gamma = P_1$ pour presque tout a ou bien $\hat{T}_a\gamma = P_2$ pour presque tout a .

Si Q est un plan double, notons P le plan réduit associé. Pour tout $a \in d$ où $T_a\gamma$ est de dimension 2, on a pour la même raison $T_a\gamma = T_aP$, et l'application $a \mapsto \hat{T}_a\gamma$ est constante.

1.4.3. La proposition suivante résulte des lemmes 1.4.1 et 1.4.2:

PROPOSITION 2.- Soit γ une droite triple contenue dans une quadrique $Q \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Si γ est intersection complète et non plane, Q est lisse.

1.5. Quadrique contenant les schémas d'annulation des sections.

On note toujours E un fibré stable de rang 2 sur $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ vérifiant $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = 2$.

PROPOSITION 3.- Pour chaque section non nulle s de $E(1)$, il existe une quadrique Q et une seule contenant $Y = s^{-1}(0)$. Cette quadrique est lisse et Y est formé de trois droites distinctes ou confondues appartenant à une même famille de génératrices de Q .

La quadrique Q est la même pour toutes les sections non nulles de $E(1)$.

1.5.1. Soit s une section non nulle de $E(1)$, posons $Y = s^{-1}(0)$ et soit I l'idéal définissant Y . On a vu au n° 1.2.3 que $h^0(I(2)) \neq 0$, donc Y est contenu dans une quadrique Q . Montrons que Q est lisse.

Si Y est réunion de trois droites deux à deux disjointes, Q ne peut pas être un cône car les trois droites passeraient par le sommet, ni une réunion de deux plans distincts ou confondus car deux au moins des droites seraient coplanaires.

Si Y est réunion disjointe d'une droite simple d et d'une droite double γ , la quadrique Q ne peut être un cône, ni un plan double, ni une réunion $P_1 \cup P_2$ avec P_1 et P_2 deux plans tels que $P_1 \cap P_2$ soit la droite réduite associée à γ , car dans chacun de ces cas les deux droites auraient un point en commun. La quadrique Q ne peut pas non plus être de la forme $P_1 \cup P_2$ avec $\gamma \cap P_1$ de dimension 0, car alors le nombre d'enlacement de γ serait 0, ce qui contredirait la Proposition 1.

Enfin, si Y est une droite triple, Q est lisse d'après la Proposition 2. La Proposition 1 affirme que l'on a épuisé tous les cas.

La courbe Y est nécessairement de la forme $d_1 \cup d_2 \cup d_3$, ou $d_1 \cup V_1(d_2, Q)$, ou $V_2(d)$, où les d_i sont des droites disjointes contenues dans Q , donc appartenant à une même famille de génératrices.

1.5.2.- Soit Q une quadrique régulière, notons \underline{A} et \underline{B} ses deux familles de génératrices, et soit Y une courbe contenue dans Q formée de trois génératrices distinctes ou confondues de la famille \underline{A} . Alors Q est la seule quadrique contenant Y . En effet, si Q' est une quadrique contenant Y , chaque génératrice de la famille \underline{B} de Q coupe Q' en au moins trois points distincts ou confondus, donc est contenue dans Q' , d'où $Q \subset Q'$ et $Q = Q'$. Ceci prouve l'unicité de la quadrique contenant Y .

1.5.3.- Nous allons maintenant montrer que la quadrique Q contenant $Y = s^{-1}(0)$ contient aussi $Y' = s'^{-1}(0)$ pour toute autre section non nulle s' de $E(1)$. Si s et s' ne sont pas proportionnelles, $u = s \wedge s'$ est une section non nulle de $\Lambda^2(E(1))$. Comme $c_1(E) = 0$, on a $c_1(E(1)) = 2$, et $\Lambda^2(E(1)) \cong \underline{Q}(2)$. Par suite, $u^{-1}(0)$ est une quadrique, qui contient évidemment Y et Y' .

Ceci achève la démonstration de la Proposition 3.

Remarque: Avec les notations ci-dessus, la quadrique $u^{-1}(0) = Q$ est réduite. Ceci prouve qu'en chaque point, une au plus des deux sections s et s' s'annule. Autrement dit $Y \cap Y' = \emptyset$.

2. L'espace des modules.

2.1. Le triplet associé à un fibré.

2.1.1. (Pinceaux linéaires de diviseurs) Soient X une variété analytique irréductible compacte, D_1 et D_2 des diviseurs positifs distincts sur X tels que $\underline{Q}(D_1)$ et $\underline{Q}(D_2)$ soient isomorphes, de sorte que D_1 et D_2 peuvent être considérés comme les diviseurs de deux sections s_1 et s_2 d'un même fibré F . On dit que l'ensemble des diviseurs des sections de la forme $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ est le pinceau linéaire de diviseurs engendré par D_1 et D_2 .

Soient F un fibré vectoriel de rang 1 sur X , V un espace vectoriel de dimension 2 et $v: V \rightarrow H^0(X; F)$ un homomorphisme injectif. Pour $\xi \in \mathbb{P}(V)$, notons D_ξ le diviseur de $v(t)$ pour t un représentant quelconque de ξ . Les D_ξ forment un pinceau linéaire de diviseurs et tout pinceau linéaire peut être obtenu de cette façon. Pour que deux morphismes $v: V \rightarrow H^0(X; F)$ et $v': V' \rightarrow H^0(X; F)$ définissent le même pinceau de diviseurs, il faut et il suffit qu'ils aient même image. Notons V_X le fibré trivial de fibre V sur X et soit $\tilde{v}: V_X \rightarrow F$ le morphisme défini par v ; soient a_1 et a_2 deux vecteurs formant une base de V , D_1 et D_2 les diviseurs associés. Pour que \tilde{v} soit surjectif, il faut et il suffit que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Si $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, les diviseurs du pinceau sont deux à deux disjoints: pour chaque $\xi \in \mathbb{P}(V)$, le diviseur D_ξ est l'image réciproque de ξ par le morphisme $\varphi_v: x \mapsto \text{Ker } \tilde{v}_x$ de X dans $\mathbb{P}(V)$. Si $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, tous les diviseurs du pinceau contiennent $D_0 = D_1 \cap D_2$, et les $D_\xi - D_0$ forment un pinceau linéaire de diviseurs deux à deux disjoints.

2.1.2. Soit E un fibré vectoriel satisfaisant aux conditions de (1.1), et notons Q la quadrique régulière qui contient $Y_s = s^{-1}(0)$ pour toute section non nulle s de $E(1)$. Pour chaque s , Y_s est formé de trois droites d'une même famille A de génératrices de Q , et cette famille ne dépend pas du choix de s : cela résulte de la remarque (1.5.3), ou peut se voir en remarquant que l'espace projectif de $H^0(E(1))$ est connexe. Notons B l'autre famille.

Soient A et B les quotients isomorphes à \mathbb{P}_E^1 de Q par les relations d'équivalence dont les classes sont les droites de A et de B respectivement, $\alpha: Q \rightarrow A$ et $\beta: Q \rightarrow B$ les morphismes canoniques. On identifie Q à $A \times B$ par l'isomorphisme (α, β) ; les génératrices de la famille A sont alors les droites de la forme $\{a\} \times B$.

Tout fibré de rang 1 sur Q est isomorphe à un fibré de la forme $\mathcal{O}_Q(p, q) = \alpha^* \mathcal{O}_A(p) \otimes \beta^* \mathcal{O}_B(q)$, avec un couple (p, q) unique.

2.1.3.- L'espace vectoriel $V = H^0(E(1))$ est de dimension 2. En effet, on a vu au n° (1.1) que $h^0(E(1)) \geq 2$, et pour $x \notin Q$ l'application $\delta_x: V \rightarrow (E(1))_x$ est injective, ce qui prouve l'inégalité inverse.

Cette application δ_x est un isomorphisme pour $x \notin Q$; pour $x \in Q$ elle est de rang 1. En effet, si s et s' sont deux sections non proportionnelles de $E(1)$, on a vu au n° (1.5.3) que $s \wedge s'$ s'annule sur Q , et que s et s' ne s'annulent pas simultanément.

Pour $x \in Q$, notons F_x l'image de δ_x . Les F_x forment un sous-fibré F de rang 1 de $E(1)|_Q$. Ce fibré est isomorphe à $\mathcal{O}_Q(3, 0)$. En effet, si $s \in V$ est une section non nulle, $s|_Q$ est une section de F qui s'annule en trois points distincts ou confondus de chaque droite de la forme $A \times \{b\}$, et ne s'annule pas sur presque toute droite de la forme $\{a\} \times B$. L'espace vectoriel $H^0(Q; F)$ est de dimension 4, et l'application canonique $v: V \rightarrow H^0(Q; F)$ est injective puisque aucune section de $E(1)$ ne s'annule sur Q .

Le fibré F est de la forme $\alpha^*(F_1)$, où F_1 est un fibré sur A isomorphe à $\mathcal{O}_A(3)$ (prendre l'image directe du faisceau F). L'espace $H^0(Q; F)$ s'identifie à $H^0(A; F_1)$, et à v correspond un homomorphisme injectif $u: V \rightarrow H^0(A; F_1)$, qui définit sur A un pinceau linéaire \mathcal{D} de diviseurs de degré 3. D'après la remarque (1.5.3), ces diviseurs sont deux à deux disjoints.

2.1.4.-DÉFINITION..- Nous dirons que (Q, A, D) est le triplet associé au fibré E .

2.2. Le fibré associé à un triplet.

Cette construction nous a été indiquée par D. Ferrand.

2.2.1.- Soient $Q \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ une quadrique régulière, A l'un des deux facteurs quotients de Q isomorphes à \mathbb{P}^1 , et D un pinceau linéaire de diviseurs de degré 3 sur A , deux à deux disjoints. Nous allons associer au triplet (Q, A, D) un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.

Soit F_1 un fibré vectoriel sur A isomorphe à $\mathcal{O}_A(3)$ (L'espace projectif A n'étant pas associé naturellement à un espace vectoriel, le fibré $\mathcal{O}_A(3)$ lui-même n'est défini qu'à un isomorphisme près). Notons F le fibré $\alpha^*(F_1)$ sur Q . Soient $V = \mathbb{C}^2$ et $v: V \rightarrow H^0(Q; F) = H^0(A; F_1)$ un homomorphisme injectif définissant D . Le morphisme composé $u: V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_Q \xrightarrow{\tilde{v}} F$ est surjectif, notons E_1 le faisceau $\text{Ker } u$.

On a localement une suite exacte $0 \rightarrow E_1 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^2 \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow 0$, d'où une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow E_1 \rightarrow \mathcal{I}_Q \rightarrow 0$. Comme \mathcal{I}_Q est localement libre de rang 1, on voit que E_1 est localement libre de rang 2. Nous noterons encore E_1 le fibré correspondant et nous poserons $E = E_1(1)$. Nous dirons que E est un fibré vectoriel associé au triplet (Q, A, D) . Ce fibré est bien déterminé à isomorphisme près.

2.2.2. PROPOSITION 1.- a) Le fibré E est stable, on a $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = 2$.

b) Le triplet associé à E est (Q, A, D) .

Soit $q \in H^0(\mathbb{P}^3; \mathcal{O}(2))$ une équation de Q . Pour tout $t \in V$, qt est une section de $E_1(2) = E(1)$. L'application $t \mapsto qt$ est un isomorphisme de V sur $H^0(E(1))$. En effet, $H^0(E(1))$ est le noyau de $v_{**}: V \otimes H^0(\mathbb{P}^3; \mathcal{O}(2)) \rightarrow H^0(F(2))$. Soit (t_1, t_2) une base de V , notons D_1 et D_2 les diviseurs correspondants. Soit $s = t_1 \otimes q_1 + t_2 \otimes q_2 \in V \otimes H^0(\mathbb{P}^3; \mathcal{O}(2))$. Pour que $v_{**}(s) = 0$, il faut que $q_1 v(t_1) = -q_2 v(t_2)$. Comme D_1 et D_2 sont disjoints, ceci exige que le diviseur de q_1 majore $\alpha^*(D_2)$. D'après (1.5.2), ceci n'est possible que si q_1 est multiple de q , et de même pour q_2 .

Soit $t \in V$ un vecteur non nul. Le schéma d'annulation de la section qt du fibré E_1 est contenu dans Q .

La suite exacte $0 \rightarrow E_1 \rightarrow V_{\mathbb{P}^3} \rightarrow F \rightarrow 0$ donne une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1(F, \mathcal{O}_Q) \xrightarrow{d} E_1 \otimes \mathcal{O}_Q \rightarrow V_Q \rightarrow F \rightarrow 0.$$

On a $\text{Tor}_1(F, \mathcal{O}_Q) = F(-2)$, et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} \otimes V_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{q} & E_1(2) \\ \downarrow \tilde{U} & & \downarrow \\ 0 \rightarrow F & \xrightarrow{d} & E_1(2) \otimes \mathcal{O}_Q \end{array}$$

qui montre que le schéma d'annulation de la section qt de $E(1)$ est celui de $\tilde{U}(t)$, à savoir le diviseur $\alpha^*(D_t)$ de Q .

Si (t_1, t_2) est une base de V , la section $\omega = qt_1 \wedge qt_2$ de $\wedge^2(E(1))$ a pour diviseur Q . Par suite, $c_1(E(1)) = 2$, d'où $c_1(E) = 0$. Pour chaque section non nulle s de $E(1)$, l'espace $s^{-1}(0)$ est de codimension 2, donc E est stable (exposé). Les courbes $s^{-1}(0)$ sont de degré 3, donc $c_2(E(1)) = 3$ et $c_2(E) = 2$. Il résulte de la description ci-dessus de $s^{-1}(0)$ que le triplet associé à E est bien (Q, A, \mathcal{O}) .

2.2.3. PROPOSITION 2.- Soient E_0 un fibré satisfaisant aux conditions de (1.1), (Q, A, D) le triplet associé, et E un fibré associé au triplet (Q, A, D) . Alors E est isomorphe à E_0 .

Notons F_0 le sous-fibré de $E_0|_Q$ engendré par les sections globales de $E_0(1)$. Pour construire E , on peut prendre $F = F_0$, et $V = H^0(\underline{P}^3; E_0(1))$ avec pour v la restriction. Alors E_1 est le sous-faisceau de $E_0(1)$ formé des sections nulles sur Q , autrement dit $E_1 = E_0(1)(-Q) \approx E_0(-1)$, d'où $E = E_1(1) \approx E_0$.

2.3. Description de $M(2)$.

2.3.1. Les propositions 1 et 2 affirment que l'on a obtenu une bijection entre l'ensemble $M(2)$ des classes d'isomorphie de fibrés satisfaisant aux conditions de (1.1) et l'ensemble M des triplets (Q, A, D) satisfaisant aux conditions de (2.2.1).

2.3.2. L'ensemble M est naturellement muni d'une structure de variété analytique de dimension 13. En effet, l'espace des quadriques dans $\underline{P}^3_{\mathbb{C}}$ s'identifie à $\underline{P}(H^0(\underline{P}^3; \underline{O}(2))) = \underline{P}^9_{\mathbb{C}}$. Dans cet espace, les quadriques régulières forment un ouvert de Zariski R . L'espace R s'identifie également à l'espace homogène $GL(4, \underline{\mathbb{C}})/O(4, \underline{\mathbb{C}}).C^*$, qui a même type d'homotopie que $U_4/O_4.U_1$. Ceci permet de calculer ses invariants topologiques, en particulier $\pi_1(R) = \mathbb{Z}/(4)$. Les couples (Q, A) où $Q \in R$ et A est l'un des deux facteurs \underline{P}^1 de Q forment un revêtement \tilde{R} de degré 2 de R . C'est un revêtement connexe, car le groupe $GL(4, \underline{\mathbb{C}})$ opère transitivement sur \tilde{R} . On a $\pi_1(\tilde{R}) = \mathbb{Z}/(2)$.

Pour chaque couple (Q, A) , l'ensemble des pincesaux linéaires de diviseurs de degré 3 sur A s'identifie à

la grassmannienne des plans vectoriels dans $H^0(A; \underline{0}(3))$. Dans cette grassmannienne les familles de diviseurs deux à deux disjoints forment un ouvert de Zariski U . L'espace U est une variété de dimension 4, irréductible donc connexe. L'espace M est fibré sur A de fibre U : c'est une variété lisse de dimension $9 + 4 = 13$, connexe et non simplement connexe. (*)

2.3.3. On peut transporter à $M(2)$ la structure analytique de M . La structure ainsi obtenue sur $M(2)$ possède une propriété universelle locale:

Si S est un espace analytique, on appelle famille analytique de fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^3 paramétrée par S un fibré vectoriel E analytique sur $S \times \mathbb{P}^3$, pour chaque $s \in S$, on note alors E_s le fibré induit sur $\{s\} \times \mathbb{P}^3$. Si E est une famille analytique de fibrés sur \mathbb{P}^3 satisfaisant aux conditions du n° (1,1), l'application de S dans $M(2)$ qui à s associe la classe de E_s est analytique. Si $s_0 \in S$, tout germe de morphisme de S dans $M(2)$ peut être obtenu ainsi. La démonstration de ce fait peut se faire en utilisant le théorème des fonctions implicites, et éventuellement le théorème des images directes.

2.3.4. Le groupe $PGL(3, \mathbb{C})$ opère sur $M(2)$. Le stabilisateur d'un point de $M(2)$ pour cette action est de dimension 3. Son orbite est de dimension 12, et l'action n'est donc pas transitive.

(*) Je remercie P.E. NEWSTEAD de m'avoir signalé une erreur dans la première version de ce texte. Il obtient $\pi_1(M(2)) \simeq \mathbb{Z}/(6)$.

3. Droites de saut.

3.1. Caractérisation des droites de saut.

3.1.1. Gardons les notations du n° (2.1.2). Si d est une droite de \mathbb{P}^3 , non contenue dans Q , on notera x_d et x'_d les points d'intersection de d avec Q .

PROPOSITION 1. - Soit d une droite de \mathbb{P}^3 .

a) Si $d \notin Q$, la droite d est une droite de saut si et seulement si elle admet une section non nulle s de $E(1)$ telle que x_d et x'_d soient sur deux des trois génératrices d'annulation de s . Elle est alors de type $(1, -1)$ (i.e. $E|_d \approx \mathcal{O}_d(1) \oplus \mathcal{O}_d(-1)$).

b) Si d est une génératrice de B , elle est de type $(2, -2)$.

c) Une droite appartenant à A est droite de saut si et seulement si elle est droite d'annulation double ou triple d'une section non nulle de $E(1)$. Elle est alors de type $(1, -1)$.

Démonstration: (a): Soit s une section non nulle de $E(1)$ s'annulant en x_d , et notons k le nombre de points d'annulation de s dans d . Si $f \in H^0(d, \mathcal{O}_d(k))$ est une équation de $s^{-1}(0)$, on a un morphisme s/f de $\mathcal{O}_d(k)$ dans le fibré $E(1)|_d$, et une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_d(k) \rightarrow E(1)|_d \rightarrow \mathcal{O}_d(2-k) \rightarrow 0.$$

Comme $k \geq 1$, cette suite exacte est nécessairement scindée, d'où (a).

(b): Si $d \in B$, pour les mêmes raisons qu'en (a), elle est de type $(2, -2)$.

(c): Si $d \notin A$, il existe une section s' de $E(1)$ ne s'annulant en aucun point de d ; ce qui montre que d est de type $(1, -1)$ ou $(0, 0)$. Dans la grassmannienne des droites de \mathbb{P}^3 , les droites de saut forment un diviseur S (exposé IV). Soit $a \in d$ et notons P_a le plan projectif des droites passant par a . Alors $S \cap P_a$ est une courbe, donc d est droite de saut si et seulement si elle est limite de droites de saut passant par a et non contenues dans Q .

3.2. Description du diviseur θ des droites de saut.

3.2.1. LEMME.- Soient P un plan projectif, $C \subset P$ une conique régulière et \underline{D} un pinceau linéaire de diviseurs deux à deux disjoints de degré 3 sur C . Dans le plan dual P^* , l'ensemble Γ des droites d de P telle que $d \cap C$ soit composé de 2 des 3 points d'un diviseur de \underline{D} est une conique régulière.

Démonstration: Soient P_1 et P_2 deux polynômes de degré 3. La fonction

$$R: (x, y) \mapsto \frac{P_1(x) P_2(y) - P_1(y) P_2(x)}{x - y}$$

est un polynôme de degré au plus 2 par rapport à chacune des variables. Par suite $R(x, y)$ est de la forme $\tilde{R}(x+y, xy)$, où \tilde{R} est polynôme de degré au plus 2.

Identifions C à $P^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par un isomorphisme f , et pour toute droite d de P , notons x_d et x'_d les points d'intersection de C avec d . Si on prend pour P_1 et P_2 des polynômes dont les diviseurs dans \mathbb{C} appartiennent à \underline{D} , on a $d \in \Gamma$ si et seulement si $R(x_d, x'_d) = 0$, i.e. $\tilde{R}(x_d + x'_d, x_d x'_d) = 0$. Or $d \mapsto (x_d + x'_d, x_d x'_d)$ est un isomorphisme du plan affine $A \subset P^*$ formé des droites ne passant pas par $f(\infty)$ sur \mathbb{C}^2 , donc $\Gamma \cap A$ est une conique affine dans A . En faisant varier f , on voit que Γ est une conique.

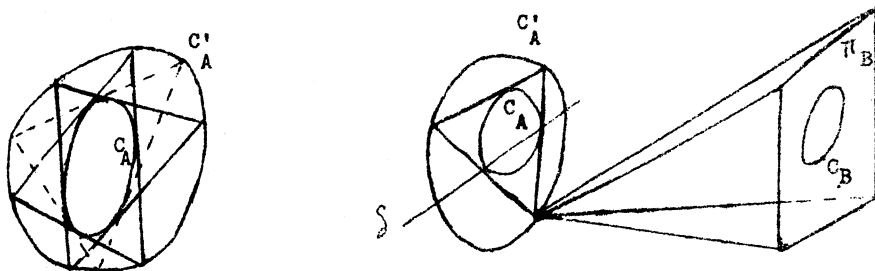
Si Γ contenait une droite, il lui correspondrait un pinceau linéaire \underline{D}' de diviseurs de degré 2 sur C telle que tout diviseur de \underline{D}' soit majoré par un diviseur de \underline{D} . Mais ceci mène à une contradiction: prenons un diviseur de \underline{D} formé de trois points distincts, comme chaque point appartient à un diviseur de \underline{D}' , il y a deux diviseurs de \underline{D}' qui ont un point commun. Mais alors tous les diviseurs de \underline{D}' contiennent ce point, ce qui est absurde puisque les diviseurs de \underline{D} sont disjoints.

$$\text{LE CAS } c_1 = 0, c_2 = 2$$

3.2.2. Rappelons que le plongement de Plücker fait de la grassmannienne $Y = \text{Gr}(1,3)$ des droites dans \mathbb{P}^3 une quadrique régulière dans \mathbb{P}^5 ; deux points de Y sont conjugués par rapport à cette quadrique si et seulement si les droites de \mathbb{P}^3 qu'ils représentent sont concourantes.

Soit E un fibré satisfaisant aux conditions de (1,1) et reprenons les notations de (2,1,2). Les familles A et B sont représentées par des coniques C_A et C_B de \mathbb{P}^5 contenues dans Y , et dont les plans Π_A et Π_B sont conjugués par rapport à Y . La famille \mathcal{D} de diviseurs sur C_A permet de définir une conique $\Gamma \subset \Pi_A^*$ via le lemme (3.2.1). La transformation par polaire réciproque par rapport à C_A est un isomorphisme de Π_A^* sur Π_A ; notons C'_A la conique image de Γ par cet isomorphisme.

La proposition 1 peut s'interpréter en disant qu'une droite $d \subset \mathbb{P}^3$ est une droite de saut de E si et seulement si le point qui la représente dans \mathbb{P}^5 appartient à l'espace projectif de dimension 3 conjugué par rapport à Y d'une droite $\delta \subset \mathbb{P}^5$ appartenant à Γ ; cet espace est l'espace projectif engendré par Π_B et le pôle de δ dans Π_A . Autrement dit, la variété S des droites de saut de E est l'intersection de Y avec le joint de C'_A avec Π_B (réunion des droites de \mathbb{P}^5 joignant un point de C'_A à un point de Π_B). Ce joint J est dans \mathbb{P}^5 une hypersurface de degré 2.



3.2.3. Soit x un point de \mathbb{P}^3 . Dans le plan projectif des droites de \mathbb{P}^3 passant par x , les droites de saut forment une conique S_x (les droites de saut passant par x sont les génératrices du cône de base S_x).

PROPOSITION 2.- La conique S_x est décomposée si et seulement si $x \in Q$

Démonstration: Si $x \in Q$, la génératrice $d_1 \in A$ passant par x appartient à un diviseur $(d_1, d_2, d_3) \in D$. Les droites de saut passant par x sont celles contenues dans les plans P_2 et P_3 engendrés par (x, d_2) et (x, d_3) respectivement (si $d_2 = d_1$, prendre $P_2 = T_x Q$).

Si $x \notin Q$, on montre comme dans la démonstration du lemme (3.2.1) que S_x ne peut pas contenir une droite.

3.2.4. Si deux fibrés satisfaisant aux conditions de $(1,1)$ ont même diviseur S , ils ont même quadrique Q d'après la Prop. 2 ci-dessus, et on vérifie alors facilement qu'ils ont même triplet associé, donc sont isomorphes.

Un fibré stable vérifiant $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$ est caractérisé à isomorphisme près par son diviseur S (exposé IV). On vient de voir qu'il en est de même pour $c_2 = 2$. Cette propriété reste-t-elle vraie pour $c_2 > 2$?

4. La chasse aux instantons.

4.1. Rappels sur les structures réelles.

Voici un bref rappel de ce qui nous sera nécessaire dans les structures réelles sur les variétés holomorphes.

4.1.1. Une structure réelle sur une variété holomorphe X est un isomorphisme antiholomorphe j de X tel que $j^2 = 1_X$. Si X est munie d'une structure réelle j et si E est un fibré holomorphe sur X , une structure réelle (resp. quaternionique) sur E est un isomorphisme antiholomorphe antilinéaire J de E au dessus de j tel que $J^2 = 1_E$ (resp. $J^2 = -1_E$).

4.1.2. Si $k \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{P}^{2k}_{\mathbb{C}}$ n'a, à isomorphisme près, qu'une seule structure réelle (donnée par la conjugaison naturelle), tandis que $\mathbb{P}^{2k+1}_{\mathbb{C}}$ en a deux: (z_0, \dots, z_{2k+1}) désignant des coordonnées homogènes, elles sont données, à isomorphisme près, par $(z_0, \dots, z_{2k+1}) \mapsto (\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_{2k+1})$ et $(z_0, \dots, z_{2k+1}) \mapsto (-\bar{z}_1, \bar{z}_0, \dots, -\bar{z}_{2k+1}, \bar{z}_{2k})$. Nous nommerons la première la structure standard et la seconde non standard. La première a des points réels (i.e. invariants par j) et la seconde n'en a pas.

Le choix d'une structure réelle sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ induit une structure réelle ou quaternionique sur le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, sous-fibré du fibré trivial $\mathbb{C}^{n+1}_{\mathbb{P}^n}$. On vérifie sans peine que la structure standard induit sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ une structure réelle et que, pour n impair, la structure non standard induit une structure quaternionique.

4.1.3. Plus généralement, la donnée d'une structure réelle sur \mathbb{P}^n induit une structure réelle ou quaternionique sur les objets naturellement attachés à \mathbb{P}^n : grassmanniennes, fibrés $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$, espace $M(2)$, etc... (cf. exposé n°VII)

4.1.4. Notons \mathbb{H} le corps des quaternions ($\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$), et identifions \mathbb{C}^4 à \mathbb{H}^2 par $(z_0, z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_0 + z_1j, z_2 + z_3j)$. La multiplication par j induit sur \mathbb{P}^3 la structure non standard. Elle induit une structure standard sur $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^4)$ et une structure réelle sur la quadrique $\text{Gr}(1,3) \subset \mathbb{P}^5$.

L'isomorphisme $\mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{H}^2$ induit une fibration $q: \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{H}}$ dont les fibres sont les droites de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ invariantes par j . Un point réel de $\text{Gr}(1,3)$ pour cette structure est donc une fibre de q .

4.1.5. Notation: Si M est une variété holomorphe munie d'une structure réelle, on notera $M_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des points réels de M pour la structure considérée.

4.2. Quadriques réelles dans \mathbb{P}^3 non standard.

4.2.1.

Notons X l'espace $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ muni de la structure réelle non standard j obtenue en identifiant \mathbb{C}^4 à \mathbb{H}^2 . L'involution j définit sur $\mathbb{Q}_X(2)$ une structure réelle, et sur l'espace $\mathbb{P}^9_{\mathbb{C}}$ des quadriques dans X une structure réelle standard. L'espace des quadriques dans X définies sur \mathbb{R} , i.e. invariantes par j , est donc isomorphe à $\mathbb{P}^9_{\mathbb{R}}$.

4.2.2. Soit $Q \subset X$ une quadrique définie sur \mathbb{R} . Si \bar{Q} est singulière, elle est de la forme $P \cup jP$, où P est un plan. En effet, si a est un point singulier de Q , le point ja en est un autre, donc Q est formée de deux plans (a priori distincts ou confondus). Si P est l'un d'eux, le plan jP est différent de P et contenu dans Q , donc $Q = P \cup jP$. Par suite, l'ensemble $\Sigma \subset \mathbb{P}^9_{\mathbb{R}}$ des coniques singulières définies sur \mathbb{R} est homéomorphe à $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}/(j)$, en particulier il est de dimension 6 sur \mathbb{R} . L'espace $R_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}^9_{\mathbb{R}} - \Sigma$ des quadriques régulières définies sur \mathbb{R} est connexe et on a $\pi_1(R_{\mathbb{R}}) = \pi_1(\mathbb{P}^9_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}/(2)$.

4.2.3. Soit Q une quadrique régulière définie sur \underline{R} dans X . Chacune des familles \underline{A} et \underline{B} de génératrice de Q est stable par j : en effet, si on avait $d \in \underline{A}$ et $jd \in \underline{B}$, le point $d \cap jd$ serait un point de Q invariant par j , or il n'y en a pas dans X .

Identifions Q à $A \times B$ comme au n° 2.1.2. La structure réelle de Q induit sur chacune des droites projectives A et B quotient de Q une structure réelle. Si D est une droite projective munie d'une structure réelle standard (resp. non standard), le fibré $\underline{O}_D(1)$ admet une structure réelle (resp. quaternionique). Or le fibré $\underline{O}_X(1)|_Q$, qui admet une structure quaternionique, est isomorphe à $\underline{O}_A(1) \otimes \underline{O}_B(1)$. Il en résulte que la structure réelle induite est la structure standard pour l'une des droites A et B et la structure non standard pour l'autre.

L'espace $\tilde{R}_{\underline{R}}$ des couples (Q, A) où Q est une quadrique régulière définie sur \underline{R} et A l'une des deux droites quotient de Q est donc un revêtement trivial de degré 2 de $R_{\underline{R}}$.

4.2.4. La structure réelle j de X donne naissance à une structure réelle τ sur la grassmannienne $Y = Gr(1,3) \underline{P}^5$. L'espace $Y_{\underline{R}}$ s'identifie à $\underline{P}^1_{\underline{H}} = S^4$. Soient $Q \subset X$ une quadrique régulière définie sur \underline{R} et A le quotient de Q qui est une droite projective munie de la structure standard. Alors $A_{\underline{R}}$ est un cercle tracé sur $Y_{\underline{R}}$ (intersection de $Y_{\underline{R}}$ avec un plan projectif $P \subseteq \underline{P}^5_{\underline{R}}$). On obtient ainsi une bijection entre l'espace $R_{\underline{R}}$ et l'ensemble Ω des cercles tracés sur $Y_{\underline{R}}$ ayant une infinité de points réels. On le voit en remarquant que trois droites projectives deux à deux disjointes sont contenues dans une quadrique unique. Cette bijection est un homéomorphisme pour la topologie naturelle de Ω .

Plongeons $Y_{\underline{R}} = S^4$ dans \underline{R}^5 . On peut rétracter par déformation l'espace Ω sur l'espace des grands cercles, i.e. la grassmannienne des plans vectoriels dans \underline{R}^5 (ou des droites projectives dans $\underline{P}^5_{\underline{R}}$).

4.2.5. Soit E un fibré vectoriel satisfaisant aux conditions de (1.1), et soit (Q, A, \underline{D}) le triplet associé. Si $j^*(\bar{E})$ est isomorphe à E , le triplet (Q, A, \underline{D}) est stable par j , en particulier Q est défini sur \underline{R} . Si E admet une structure quaternionique, $E(1)$ admet une structure réelle, et il en est de même du sous-fibré F de $E(1)|_Q$ défini en (2.1.3). Or F est isomorphe à $\underline{O}_A(3) \oplus \underline{O}_B$. On en déduit que la structure de A est standard.

4.3. Pinceaux de diviseurs définis sur \underline{R} .

4.3.1. Soit A une droite munie d'une structure réelle standard τ . Les fibrés $\underline{O}_A(k)$ admettent une structure réelle, donc tout pinceau linéaire de diviseurs sur A stable par τ est engendré par des diviseurs stables par τ (diviseurs définis sur \underline{R}).

PROPOSITION 1.- Soient D_1 et D_2 deux diviseurs disjoints sur A , définis sur \underline{R} et de même degré k . Notons \underline{D} le pinceau linéaire engendré par D_1 et D_2 . Les conditions suivantes sont équivalentes:

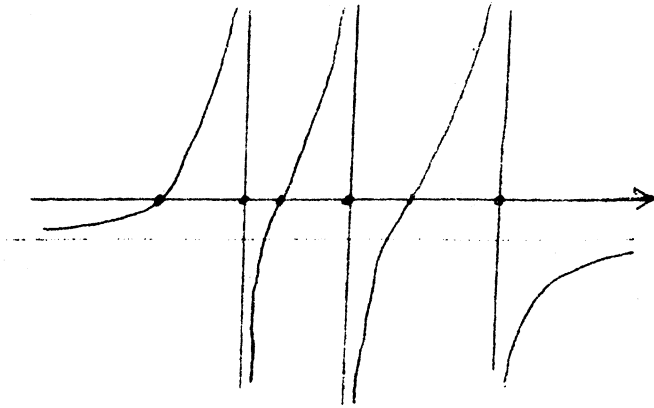
(i) Aucun diviseur de \underline{D} ne contient deux points non réels conjugués ou un point réel double.

(ii) Tout diviseur de $\underline{D}_{\underline{R}}$ est composé de k points réels distincts.

(iii) Les diviseurs D_1 et D_2 sont composés de points réels distincts, et quand on parcourt $A_{\underline{R}}$ on rencontre alternativement un point de D_1 et un point de D_2 .

Démonstration: (iii) \Rightarrow (ii) : Soient f_1 et f_2 des sections de $\underline{O}_A(k)$ admettant pour diviseur D_1 et D_2 respectivement, et posons $h = f_1/f_2$. La fonction méromorphe h admet des zéros aux points de D_1 et des pôles aux points de D_2 . Son graphique a l'allure suivante:

LE CAS $c_1 = 0, c_2 = 2$



Le théorème des valeurs intermédiaires montre que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le diviseur $h^{-1}(\lambda)$ contient au moins k points réels distincts. Comme il est de degré k , il n'en contient pas plus.

(ii) \Rightarrow (i): c'est immédiat en observant que si un diviseur $D \in \underline{D}$ contient deux points non réels conjugués, ou un point réel, il appartient à $\underline{D}_{\mathbb{R}}$.

(i) \Rightarrow (iii): La première assertion de (iii) est évidente, démontrons par l'absurde la seconde. Si par exemple a et a' sont deux points de D_1 tels qu'il n'y ait pas de point de D_2 dans l'intervalle $[a, a']$, la fonction $h = f_1/f_2$ admet un extrémum λ sur $[a, a']$, et $h^{-1}(\lambda)$ est un diviseur de \underline{D} qui contient un point réel double.

4.3.2. PROPOSITION 2.- L'espace (M) des oinceaux linéaires de diviseurs sur A , définis sur \mathbb{R} et satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition 1, est contractile.

Démonstration: Identifions $A_{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Notons \mathcal{O}_1 l'ensemble des triplets (D, D_1, D_2) où $D \in \mathcal{O}$ est le pinceau engendré par D_1 et D_2 , avec $\infty \in D_1$. L'espace \mathcal{O}_1 s'identifie à l'espace des suites strictement croissantes $(b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k)$ de $2k-1$ termes dans \mathbb{R} . Cet ensemble est un ouvert convexe, donc contractile.

Notons \mathcal{O}_2 l'espace des couples (D, D_1) avec $\infty \in D_1 \in D \in \mathcal{O}$. La projection $(D, D_1, D_2) \mapsto (D, D_1)$ est une fibration de fibre \mathbb{R} , donc une équivalence d'homotopie. D'autre part $(D, D_1) \mapsto D$ est un homéomorphisme de \mathcal{O}_2 sur \mathcal{O} .

4.4. Type d'homotopie de $I(2)$.

4.4.1. On note $I(2)$ le sous-espace de $M(2)$ formé des points qui correspondent aux fibrés E sur $X = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ satisfaisant aux conditions de (1.1), et en outre aux conditions suivantes:

- (1) E admet une structure quaternionique au dessus de la structure réelle non standard j de X ;
- (2) E n'admet aucune droite de saut définie sur \mathbb{R} .

Ce sont les fibrés qui correspondent via la transformation de Penrose aux instantons de nombre de Pontrjagyn 2.

4.4.2. THEOREME.- L'espace $I(2)$ est une variété analytique réelle de dimension 13, qui a le type d'homotopie de la grassmannienne G_2^5 des plans vectoriels de dimension 2 dans \mathbb{R}^5 .

$$LE \text{ CAS } c_1 = 0, c_2 = 2$$

Soient E un fibré satisfaisant aux conditions de (1.1) et (Q, A, \underline{D}) le triplet associé. Pour que E soit isomorphe à $j^* \bar{E}$, il faut et il suffit que Q soit définie sur \underline{R} (ce qui entraîne que A aussi) et que \underline{D} soit défini sur \underline{R} . Pour que E admette une structure quaternionique, il faut et il suffit qu'en outre, A soit le quotient de Q qui est une droite projective standard. Si toutes ces conditions sont satisfaites, il résulte de la caractérisation donnée au n° 3.1.1 que, pour que E n'admette pas de droite de saut définie sur \underline{R} , il faut et il suffit que \underline{D} satisfasse à la condition (i) de la Prop. 1 du n° 4.3.1.

En résumé, $I(2)$ s'identifie au sous-espace de $M_{\underline{R}}$ formé des triplets (Q, A, \underline{D}) tels que A soit une droite projective standard et que \underline{D} satisfasse aux conditions équivalentes de la Prop. 1 du n° 4.3.1. Cet espace est donc fibré sur l'espace $R_{\underline{R}}$ des quadriques régulières définies sur \underline{R} , avec pour fibre l'espace \mathcal{Q} défini en 4.3.2. (avec $k = 3$). Or $R_{\underline{R}}$ est une variété analytique réelle de dimension 9 qui a le type d'homotopie de $G_2 R^5$ (n° 4.2.4), et \mathcal{Q} est une variété de dimension 4 sur \underline{R} contractile (n° 4.3.2). Ceci démontre le théorème.

CONSTRUCTION OF BUNDLES ON \mathbb{P}^n .

by Geoffrey HORROCKS

Let V be $(n+1)$ -dimensional vector space over a field k and \mathbb{P}^n the corresponding vector space. Form the exterior algebra

$$\Lambda(V(1)) \quad (V(1) \quad V \otimes_k \mathcal{O}(1)) ,$$

and let $\partial = 1_V \in \text{Hom}(V, V) = \Gamma(\mathbb{P}^n, V(1))$. The complex $K = \{\Lambda^i V(1), \partial\}$ is the Koszul complex. Let

$$T = \text{coker}(\partial: \mathcal{O} \rightarrow V(1)) .$$

T is the tangent bundle and it together with its twisted i -th exterior powers $T^{(i)}(r)$ ($1 \leq i \leq n-1$) form the building blocks for vector bundles on \mathbb{P}^n .

Order the bundles $T^{(i)}(r)$ according to the order on the partitions $\{1^{i_1} 0^{n-i_1-i-r}\}$ i.e. $T^{(i)}(r) \leq T^{(j)}(s)$ if $i < j$ or $i = j$ and $r \geq s$. By a trivial bundle T I mean a direct sum of Hopf bundles $\mathcal{O}(p)$. (*)

Theorem. Let E be a vector bundle without a trivial direct summand.

Then there exists a trivial bundle T such that $E \oplus T$ has a nest

$$E \oplus T = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \dots \supseteq F^N = 0$$

with F^i/F^{i+1} a twisted exterior power and $F^i/F^{i+1} \leq F^{i+1}/F^{i+2}$.

$N = \dim \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ r \in \mathbb{Z}}} H^i(\mathbb{P}^n, E(r))$ and the factors are unique up to isomorphism.

Proof. Take a resolution L of E^* by trivial sheaves which is exact as a resolution of graded modules. The dual L^* can be dismantled into Koszul complexes.

(*) Les mots "fibré trivial" et "monade" sont employés ici avec un sens plus large que dans les exposés précédents, notamment l'exposé V (N.D.L.R.).

The difficulty with applying this theorem is the lack of a method for detecting trivial direct summands of bundles. However, it shows the existence of total algebraic families of vector bundles on \mathbb{P}^n . (See G. Trautman, Darstellung von Vektorraumbündeln über $\mathbb{C}^n - \{0\}$, Archiv der Math. 1973 pp 303-13.)

A more useful form is obtained by defining Eilenberg-MacLane bundles on \mathbb{P}^n to be bundles M such that only one of the total cohomology modules

$$H^i(\mathbb{P}^n, M^*) \quad (1 \leq i \leq n) \text{ with } M^* = \bigoplus_r M(r)$$

is non-zero. In particular $T^{(i)}(r)$ is an Eilenberg-MacLane bundle. Then

Theorem. There exists a trivial bundle T such that

$$E \oplus T = G^n \supseteq G^{n-1} \supseteq \dots \supseteq G^0 = 0$$

such that G^i/G^{i-1} is an Eilenberg-MacLane bundle with

$$H^j(\mathbb{P}^n, (G^{i+1}/G^i)^*) \cong \delta_{ij} H^i(\mathbb{P}^n, E^*) \quad (1 \leq j \leq n).$$

The series (G^i) is unique up to trivial direct summands.

In particular consider the case $n = 3$. Then $E \oplus T$ is an extension

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow E \oplus T \rightarrow M_2 \rightarrow 0$$

The bundle M_2 is obtained as the 3rd syzygy of its total cohomology module H^2

$$0 \rightarrow M_2 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow H^2(\mathbb{P}^3, M_2^*) \rightarrow 0$$

and M_1 as the second syzygy of H^1 . Further

$$\text{Ext}^1(M_2, M_1) \cong \text{Ext}_S^2(H^2(\mathbb{P}^3, M_2^*), H^1(\mathbb{P}^3, M_1^*)), \quad S = \bigoplus_r \mathcal{O}(r)$$

In general if H^r, H^s $r < s$ are the only non-vanishing total cohomology modules then the bundles E with these cohomology modules are classified up to trivial direct summands by elements of

$$\text{Ext}_S^{s-r+1}(H^s(\mathbb{P}^n, E^*), H^r(\mathbb{P}^n, E^*)).$$

Consider the special case in which $H^r(\mathbb{P}^n, E^*) \cong k, H^s(\mathbb{P}^n, E^*) \cong k$. Then $\text{Ext}_S^{s-r+1}(k, k) \cong \wedge^{s-r+1} V$.

Form the complex

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow V_1 \otimes (1) \xrightarrow{\wedge^2} \dots \xrightarrow{\wedge^2} \wedge^{n-1-s} V \otimes (n-1-s) \xrightarrow{\wedge^2} \omega \\ \rightarrow \wedge^{n+1-r} V \otimes (n-s) \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^{n+1} V \otimes (n+r-s) \rightarrow 0$$

Provided $\omega : \wedge^{n-s} V \rightarrow \wedge^{n+1-r} V$ is injective the unique cohomology sheaf is a vector bundle E_ω with

$$H^s(\mathbb{P}^n, E_\omega(m)) \cong k, \quad m = -n-r+s, \quad 0 \text{ otherwise,}$$

$$H^r(\mathbb{P}^n, E_\omega(m)) = k, \quad m = -n-1, \quad 0 \text{ otherwise.}$$

The special case $r = 1, s = n-1$ gives

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \wedge^n V \otimes (1) \rightarrow \wedge^{n+1} V \otimes (2) \rightarrow 0.$$

$E_\omega(-1)$ is the null-correlation bundle S , when ω is a non-degenerate 2-form φ . Taking $\omega = \varphi^r, s = n-r$ gives the associated 'reduced' r -th exterior power of S tensored with $O(r)$.

A more useful technique particularly in dimensions at most 4 is that of killing the total H^1 and H^{n-1} . Since H^{n-1} is dual to H^1 it is enough to deal with H^1 . Let g_1, \dots, g_p be homogeneous generators of $H^1(\mathbb{P}^n, E^*)$ with $g_i \in H^1(\mathbb{P}^n, E(n_i))$. They determine an extension

$$0 \rightarrow E \rightarrow E' \rightarrow \bigoplus_{i=1}^p O(-n_i) \rightarrow 0$$

in which $H^1(\mathbb{P}^n, E'^*) = 0$ and the cohomology up to degree $n-1$ is isomorphic to that of E . So we can kill H^1, H^{n-1} to obtain a bundle F and a monad

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} T' \rightarrow 0$$

with T, T' trivial such that α, β are injective and surjective (resp.) and $\text{Ker } \beta / \text{Im } \alpha = E$.

When $n = 3$ F has to be trivial - because its total cohomology in the range $1 \leq r \leq n-1$ vanishes. So all bundles on \mathbb{P}^3 arise from monads

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{\alpha} T'' \xrightarrow{\beta} T' \rightarrow 0$$

The monads correspond to 'markings' of the bundles with sets of generators of H^1, H^2 . If E is of rank 2 the monads are self-dual up to twisting and the bundles correspond to isomorphisms $\alpha : T'' \rightarrow T'^*(r)$ such that $\alpha^*(r) \circ \alpha = 0$ (Barth has some unpublished results relating to this construction).

The Riemann-Roch theorem implies certain necessary conditions on the chern classes of vector bundles. It is known that the conditions are sufficient for the classes of rank 2 bundles on \mathbb{P}^3 and from Grauert and Schneider that they are not sufficient on \mathbb{CP}^4 for rank 2. The preceding techniques can be used to give new Chern classes for rank 2 bundles on \mathbb{P}^4 in characteristic 2 and to show in particular that the discriminant can be negative.

First form the general Koszul complex: choose $y_i \in \Gamma O(n_i)$ so that y_0, \dots, y_n is an S-sequence, and let K be

$$\{\wedge \sum_{j=0}^n O(n_j) \xi_j \partial\} \quad \partial = \sum y_j \xi_j.$$

Let $T^{(i)} = \text{coker } (\partial : \wedge^{i-1} \rightarrow \wedge^i)$. Consider the part of the complex

$$\wedge^i = \wedge^i \left(\sum_{j=0}^n O(n_j) \xi_j \right) \xrightarrow{\alpha} T^{(i)} \xrightarrow{\beta} \wedge^{i+1} \left(\sum_{j=0}^n O(n_j) \xi_j \right) = \wedge^{i+1}.$$

Suppose ξ_j is given weight-deg y_j . Any isobaric i -form φ in ξ_0, \dots, ξ_n coefficients in S with weights given by their degrees determines a homomorphism $\varphi : O(r) \rightarrow T^{(i)}(p)$ with $p-r$ equal to the weight of the form. Further an isobaric $(n-1)$ form ψ determines a homomorphism $\psi : T^{(i)}(p) \rightarrow O(s)$ by $\beta \wedge \varphi$ and its weight is $S - \sum n_j - p$. Since $\beta \wedge \alpha = \partial$, the composition $\psi \cdot \varphi$ is $\psi \wedge \varphi \partial$.

Take $n = 4$ and

$$y_0 = x_0, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 \quad \text{and} \quad y_3, y_4 \text{ of degree 2.}$$

Let

$$\theta_1 = \xi_{0\wedge} \xi_1 + \xi_{2\wedge} (y_0 \xi_3 + y_1 \xi_4) : O(2) \rightarrow T^{(2)}$$

$$\theta_2 = \xi_{1\wedge} \xi_3 + \xi_{0\wedge} \xi_4 : O(3) \rightarrow T^{(2)}$$

$$\theta_1 : T^{(2)} \rightarrow O(5)$$

$$\theta_2 : T^{(2)} \rightarrow O(4)$$

(i) The morphism

$$(\theta_1, \theta_2) : O(2) \oplus O(3) \rightarrow T^{(2)}$$

is locally split.

We have to verify that if

$$(\lambda\theta_1 + \mu\theta_2) \wedge \theta \equiv 0 \pmod{m_x} \text{ (the maximal ideal at } x\text{)}$$

then $\lambda = \mu = 0$.

(ii) If the characteristic is 2 then

$$\theta_1^2 = \theta_2^2 = 0$$

and

$$\begin{aligned} \theta_1 \wedge \theta_2 &= y_1(2304) + y_2(2413) \\ &= \partial \wedge^2 \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4. \end{aligned}$$

So $\theta_2 \circ \theta_1 = 0$. Thus we have a monad

$$0(2) \oplus 0(3) \rightarrow T^{(2)} \rightarrow 0(4) \oplus 0(5).$$

The cohomology is a bundle F of rank 2 and taking h as the generator of the Chow ring and $t = h^2/4$ we observe

$$\begin{aligned} c(P(-j \tfrac{1}{2})) &= \frac{\sqrt{\{(1-t)^7(1-3^2t)^3(1-3^2t)^{-2}(1-5^2t)^{-3}(1-7^2t)\}}}{(1-t)(1-3^2t)} \\ &= 1 + 15t \end{aligned}$$

so $c(F) = 1 + 5t + 10t^2$.

Now observe that for θ_1, θ_2 to be isobaric it is enough to choose the degrees a, b, c, d, e of y_0, \dots, y_4 so that

$$\begin{aligned} -a-b &= -c-d+a & -c+b-e \\ b+d &= a+e. \end{aligned}$$

CONSTRUCTION OF BUNDLES ON P^n

The bundles F arising from the construction have Chern polynomials given by

$$cF(-r/2) = 1 - \frac{1}{8}(6r^2 - 16\Sigma ab)h^2 + \{(r_1 + r_5 - r/2)^2 + (r_1 + r_2 - r/2)^2\}h^2$$

with $r = \Sigma a$. Taking $a = b = p$, $c = q$, $d = e = 3p - q$ gives

$$1 + (6pq - 9q^2/4)h^2$$

so there exist bundles in characteristic 2 on \mathbb{P}^4 with negative discriminant.

G. Horrocks

Newcastle upon Tyne, Dec. 1977

STABLE VECTOR BUNDLES ON \mathbb{P}_3 ,

SOME EXPERIMENTAL DATA

par Wolf BARTH

Notation.

$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

$P = \mathbb{P}_3$.

$R = \bigoplus_k \Gamma(\mathcal{O}_P(k))$, ring of homogeneous polynomials.

\mathcal{I}_C sheaf of ideals of a curve $C \subset P$.

K_C canonical sheaf of the curve C .

F locally free \mathcal{O}_P -sheaf of rank 2 with

$$c_1(F) = 0 \quad , \quad c_2(F) = n \quad , \quad h^0(F) = 0 \quad .$$

$H^i(F(*)) = \bigoplus_k H^i(F(k))$ viewed as R -module.

$\rho(k) = \rho(F, k) =$ number of homogeneous generators of degree k for the R -module $H^1(F(*))$

$$= \dim \{ H^1(F(k)) / \Gamma(\mathcal{O}_P(1)) \otimes H^1(F(k-1)) \} \quad .$$

$f : F \longrightarrow F^*$ the symplectic form on F determined by an isomorphism

$$\det F \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_P \quad .$$

$[x]$ largest integer function for $x \in \mathbb{R}$.

$GL(A)$ group of automorphisms of the vector bundle A .

$O(B, b)$ group of automorphisms of the vector bundle B leaving invariant the form b .

1. A numerical character attached to F .

In [2] there is defined a sequence of n integers k_j for F :

$$\chi = \begin{cases} -k_{n/2} \leq \dots \leq -k_2 \leq -k_1 = 0 = k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{n/2} \\ \quad \quad \quad \text{(if } n \text{ is even)} \\ -k_{(n-1)/2} \leq \dots \leq -k_2 \leq -k_1 \leq k_0 = 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{(n-1)/2} \\ \quad \quad \quad \text{(if } n \text{ is odd)} \end{cases}$$

This sequence has the two properties :

Symmetry, expressed by the fact that $-k \in \chi$ if k belongs to χ . (This reflects the self-duality $f : F \rightarrow F^*$) .

Connectedness, i.e., $k_{j+1} \leq k_j + 1$ for all $j \geq 1$, if n is even, resp. $j \geq 0$, if n is odd. (This is a consequence of the stability condition $h^0(F) = 0$) .

The meaning of χ for F , as described in [2], is this : form the rank- n bundle

$$K = \bigoplus_{k \in \chi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}^{\otimes k}(k)$$

on \mathbb{P}_1 . Then for all $i \geq 0$

$$H^1(F(-1-i)) = \Gamma(K(-i)) .$$

In this way the dimensions $h^1(F(-1-i))$, $i \geq 0$, are determined by χ .

In particular

$$h^1(F(-1-i)) = 0 \text{ if } i > k_{[n/2]} .$$

(Notice that $k_{[n/2]} \leq [n-1/2]$ by connectedness). Now put for $0 \leq k \leq k_{[n/2]}$

$$s(k) = \text{number of times } k \text{ appears in } \chi .$$

Then, in particular

$$s(k_{[n/2]}) = h^1(F(-1 - k_{[n/2]}))$$

is the dimension of the homogeneous part in $H^1(F(\ast))$ of lowest degree. Hence

$$p(-1 - k_{[n/2]}) = s(k_{[n/2]}) .$$

The degrees of the other generators for $H^1(F(\ast))$ are in general not uniquely

STABLE VECTOR BUNDLES ON P_3

n	χ	$h^1(F(i))$ for $i =$				$g(i)$ for $i =$				α
		-4	-3	-2	-1	-4	-3	-2	-1	
1	0				1				1	0
2	00				2				2	0
3	000				3				3	0
	-101				1 3			1		1
4	0000				4				4	0
	-1001				1 4			1	0, 1	1
5	00000				0 5				5	0
	-10001				1 5			1	1, 2	1
	-11011				2 5			2		0
	-21012				1 3 6		1			1
6	000000				6				6	0
	-100001				1 6			1	2, 3	1
	-110011				2 6			2	0, 1	0
	-210012				1 3 7		1		0, 1	1
7	0000000				7				7	0
	-1000001				1 7			1	3, 4	1
	-1100011				2 7			2	0, 1, 2	0
	-1110111				3 7			3		1
	-2100012				1 3 8		1		0, 1, 2	1
	-2110112				1 4 8		1	0, 1		0
	-2210122				2 5 9		2			1
	-3210123				1 3 6 10	1				0
8	00000000				8				8	0
	-10000001				1 8			1	4, 5	1
	-11000011				2 8			2	0, 1, 2, 3	0
	-11100111				3 8			3	0, 1	1
	-21000012				1 3 9		1		0, 1, 2, 3	1
	-21100112				1 4 9		1	0, 1	0, 1	0
	-22100122				2 5 10		2		0, 1	1
	-32100123				1 3 6 11	1			0, 1	0

TABLE 1

determined by χ , or equivalently by the dimensions $h^1(F(-1-i))$. However, using a simple generalisation of [2, proposition 1.4] one still gets the bounds

$$s(i) - 2 \sum_{j \geq i+1} s(j) \leq \rho(-1-i) \leq s(i) - 1$$

in the range $0 \leq i < k_{[n/2]}$. (Here the minimal value possible for $\rho(-1-i)$ occurs in the "general case", whereas larger values should correspond to more special F).

In table 1, the possible values of $\rho(-1-i)$ are computed for $1 \leq n \leq 8$. If there is no entry in some column, then the corresponding dimension is zero. The last column gives the invariant $a(F) = h^1(F(-2)) \bmod 2$ of Atiyah-Rees [1] distinguishing between the two topological bundles with the same Chern classes.

2. Space curves.

If $m \gg 0$ the bundle $F(m)$ will admit a section t vanishing of order one on a non singular space curve C :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_P \xrightarrow{t} F(m) \longrightarrow \mathcal{I}_C(2m) \longrightarrow 0 .$$

The invariants of C will be

$$\deg C = n + m^2 ,$$

$$K_C = \mathcal{O}_C(2m - 4) .$$

There are isomorphisms of graded R -modules

$$\begin{aligned} \bigoplus_k H^1(F(k)) &\longrightarrow \bigoplus_k H^1(\mathcal{I}_C(m+k)) \\ \Gamma(\mathcal{O}_C(*))/\text{restr}_C(R) &\longrightarrow H^1(\mathcal{I}_C(*)) \end{aligned}$$

so generators of degree k for $H^1(F(*))$ correspond to generators for $\Gamma(\mathcal{O}_C(*))/\Gamma(\mathcal{O}_P(*))$ of degree $m+k$.

Example ($m = 2$) : Here $C = E_1 \cup \dots \cup E_r$ will be a union of disjoint non-singular elliptic curves E_j of degrees e_j such that $e_1 + \dots + e_r = n+4$. Using that C cannot lie on a quadric surface (this would imply $h^0(F) \neq 0$) one finds

$$\begin{aligned} h^1(F(k)) &= 0 \text{ for } k < -2 \\ h^1(F(-2)) &= h^1(\mathcal{I}_C) = r-1 \\ h^1(F(-1)) &= h^1(\mathcal{I}_C(1)) = h^0(\mathcal{O}_E(1)) - 4 = n . \end{aligned}$$

The numbers of generators are

$$\begin{aligned} \rho(-2) &= h^1(F(-2)) = r-1 , \\ \rho(-1) &= \sum_j \dim \Gamma(\mathcal{O}_{E_j}(1))/\text{restr } \Gamma(\mathcal{O}_P(1)) = \\ &= \sum_{e_j \geq 4} (e_j - 4) , \\ \rho(k) &= 0 \text{ for } k \geq 0 . \end{aligned}$$

(It is easy to see that $\Gamma(\mathcal{O}_{E_j}(k)) \otimes \Gamma(\mathcal{O}_P(1)) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{E_j}(k+1))$ is surjective for $k \geq 1$) . The resulting numbers for $3 \leq n \leq 8$ are given in table 2 .

If C contains non cubic component, then the minimal $\rho(-1)$ within the

n	r	e_1	e_2	e_3	e_4	χ	$\mathfrak{g}^{(-1)}$
3	2	4	3			-101	0
4	2	4 5	4 3			-1001 "	0 1
5	2	5 6	4 3			-10001 "	1 2
	3	3	3	3		-11011	0
6	2	5 6 7	5 4 3			-100001 " "	2 2 3
	3	4	3	3		-110011	0
7	2	6 7 8	5 4 3			-1000001 " "	3 3 4
	3	4 5	4 3	3 3		-1100011 "	0 1
8	2	6 7 8 9	6 5 4 3			10000001 " " "	4 4 4 5
	3	4 5 6	4 4 3	4 3 3		-11000011 " "	0 1 2
	4	3	3	3	3	-1-100111	0

TABLE 2

bounds of section 1 actually occurs.

In the remaining sections bundles F will be described under the assumption that $H^1(F(*))$ has no generators of degrees ≥ 0 . Although this is probably true for small n , I do not know how restrictive this assumption is in general. The corresponding problem for space curves is this:

Given a non singular subcanonical space curve C of degree $> m^2$ with $K_C = \mathcal{O}_C(2m - 4)$, not on a surface of degree m . Then: are the linear systems $|\mathcal{O}_C(m + k)|$ for $k \geq 0$ generated by $\Gamma(\mathcal{O}_P(1)) \otimes \Gamma(\mathcal{O}_C(m + k - 1))$?

3. Monads.

Horrocks [5] has shown that every bundle F on P is the cohomology of a monad (= short complex of bundles)

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{c} C$$

with A, B, C direct sums of line bundles. In fact

$$C = \bigoplus_k \rho(F, k) \mathcal{O}_P(-k),$$

$$A = \bigoplus_k \rho(F^*, k) \mathcal{O}_P(k).$$

There is also the more general approach [4] to prove this. Such a monad is determined by F uniquely up to homotopy, i.e., every morphism $F_1 \rightarrow F_2$ is induced by a morphism of monads

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 \end{array}$$

which is unique up to homotopy (dotted arrows). If the monads are minimal (i.e., the ranks of A, B , and C are minimal), then it is not hard to check that an isomorphism $F_1 \rightarrow F_2$ is induced by an isomorphism of monads. In our case ($\text{rank } F = 2$, $C_1(F) = 0$) this can be applied to the symplectic form $f: F \rightarrow F^*$. So f is induced by an isomorphism of monads

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{c} & C \\
 \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow \\
 C^* & \xrightarrow{c^T} & B^* & \xrightarrow{a^T} & A^*
 \end{array}$$

In particular $C = \Lambda^*$ and B is self-dual. Now A and C are determined by the integers $\rho(k)$, and for B there are then finitely many possibilities only. In fact

$$\begin{aligned}
 \text{rank } B &= \text{rank } F + \text{rank } \Lambda + \text{rank } C \\
 &= 2 + 2 \text{ rank } \Lambda
 \end{aligned}$$

is even, and we can write

$$\begin{aligned}
 B &= B^+ \oplus B^- , \quad B^- = (B^+)^* \\
 B^+ &= \bigoplus \mathcal{O}_P(l_i) \quad \text{with } l_i \geq 0 .
 \end{aligned}$$

Then for the total Chern classes one finds (x denotes the positive generator of $H^2(P, \mathbb{Z})$) :

$$\begin{aligned}
 c(F) &= c(B)/c(\Lambda) \cdot c(C) \\
 &= \prod_i (1 - l_i^2 x^2) / \prod_k (1 - k^2 x^2)^{\rho(k)}
 \end{aligned}$$

or

$$\sum_i l_i^2 = \sum_k \rho(k) \cdot k^2 - n .$$

Table 3 gives all possibilities for minimal monads associated with bundles F with $1 \leq n \leq 8$. The bundles B^+ and C are described by the degrees of their direct rank -1 summands. The numerical character χ is abbreviated ${}_0^S(0) {}_1^S(1) {}_2^S(2) \dots$. The columns "existence" and "hom(C,B)" refer to sections 4 and 5. This table 3 is extracted from table 1 under the assumption, that the generators given there are the only ones (no positive generators), without further justification.

STABLE VECTOR BUNDLES ON P_3

n	χ	C	$\sum \ell_i^2$	B^+	existence	$\dim(C, B)$
1	0	1	0	00	∞	0
2	0^2	11	0	000	∞	0
3	0^3	111	0	0000	∞	0
4	0^4	1111	0	00000	∞	0
5	0^5	11111	0	000000	∞	0
	$0^1 1^2$	22	3	111	ell	0
6	0^6	111111	0	0000000	∞	0
	$0^2 1^2$	22	2	011	ell	0
		221	3	0111	?	3
7	0^7	1111111	0	00000000	∞	0
	$0^3 1^2$	22	1	001	ell	0
		221	2	0011	ell	2
		2211	3	00111	?	6
	$0^1 1^2 2$	3	2	11	γ_1	0
		32	6	112	?	1
	$0^1 2^2 3$	4	3	03	γ	0
8	0^8	11111111	0	000000000	∞	0
	$0^4 1^2$	22	0	000	ell	0
		221	1	0001	ell	1
		2211	2	00011	ell	4
		22111	3	000111	?	2
	$0^2 1^2 2$	3	1	01	γ_2	0
		31	2	011	} ?	2
		32	5	012		1
		321	6	0112		7
	$0^2 1^2 3$	4	8	22	no	0
		41	3	221	no	1

TABLE 3 , $a=0$

n	χ	C	$\sum \ell_i^2$	B^+	existence	$\text{ham}(C, B)$
3	01	2	1	01	$\beta 2$	0
4	$0^2 1$	2 2 1	0 1	00 00 1	$\beta 1$ $\beta 2$	0 1
5	$0^3 1$ 012	2 1 2 1 1 3	0 1 4	000 000 1 02	$\beta 1$ $\beta 2$ γ	0 2 0
6	$0^4 1$ $0^2 12$	2 1 1 2 1 1 1 3 3 1	0 1 3 4	000 000 1 - 002	$\beta 1$ $\beta 2$ no ?	0 3 4
7	$0^5 1$ 01^3 $0^3 12$ 012^2	2 1 1 1 2 1 1 1 1 2 2 2 3 3 1 3 1 1 3 1 1 3 3	0 1 5 2 3 4 4 11	00000 00000 1 0012 11 11 1 11 1 1 0002 0113	$\beta 1$ $\beta 2$ no no no no no no	0 4 3 0 3 8 8 2
8	$0^6 1$ $0^2 1^3$ $0^4 12$ $0^2 12^2$	2 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 2 1 3 3 1 3 1 1 3 1 1 1 3 1 1 1 3 3 3 3 1	0 1 4 4 5 5 1 2 3 4 4 10 11	000000 000000 1 1111 0002 1111 1 00012 01 011 0111 01111 00002 013 0113	$\beta 1$ $\beta 2$ all no ? no no no no ? no no	0 5 0 3 5 8 0 2 6 12 12 2 14

TABLE 3 , $a = 1$

4. Existence.

Up to now nothing has been said about the existence of monads as described in table 3 . The following constructions show that at least some of them actually appear::

a) Starting with $n+1$ skew lines in P (or equivalently with the t' Hooft Ansatz) one gets bundles with $h^1(F(-2)) = 0$ for every $n \geq 1$.
(Type α in table 3).

b) Starting with two non singular elliptic curves of degrees $e_1, e_2 \geq 3$ one gets bundles with $h^1(F(-2)) = 1$ for every $n = e_1 + e_2 - 4 \geq 3$. If one of the curves is a plane cubic, then $\rho(-1) = n - 3$ (type $\beta 2$ in table 3), in all other cases $\rho(-1) = n - 4$ (type $\beta 1$) . From table 2 one gets some more bundles (marked by "ell" in table 3) .

c) Monads with rank $A = \text{rank } C = 1$, rank $B = 4$ are produced very easily.

Put

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{O}_P(-1) \quad , \quad C = \mathcal{O}_P(1) \quad , \quad 1 > 0 \quad , \\ B &= B^+ \oplus B^- \quad , \quad B^+ = \mathcal{O}_P(1_1) \oplus \mathcal{O}_P(1_2) \quad , \quad 1 > 1_1 \geq 0 \quad , \\ a &= (e, f, g, h) \quad , \quad c = (-h, -g, f, e) \quad , \end{aligned}$$

with e, f, g, h homogeneous polynomials of degrees $1 - 1_1$, $1 - 1_2$, $1 + 1_2$, $1 + 1_1$ without common zero.

A "large" family of bundles (type γ) was constructed in this way in [3] . The resulting bundles will be stable if $1_1 + 1_2 < 1$ (and e, f irreducible), if $1_1 + 1_2 > 1$ they will always be unstable. So types γ_1 and γ_2 are obtained, whereas the monad for $a = 0$, $n = 9$, $A = \mathcal{O}(-4)$ and $B^+ = \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(2)$ gives unstable bundles. The monads γ_1 and γ_2 have no analog for $a = 1$, because they describe bundles with $h^1(F(-2)) = 4$.

The bundles of type γ_1 were also constructed by Hartshorne. Bundles arising from a) and b) are studied more systematically by Hartshorne and Iversen.

5. Dimensions.

The coarse moduli-scheme for bundles F can ("in principle") be constructed by finding the space of all monads and then identifying monads giving isomorphic bundles. The problem is, to find (for given A, B, C) all maps a, c with $c \circ a = 0$. The situation is a little complicated, if $\text{Hom}(C, B) = 0$, (last column of table 3) because such monads admit no homotopies. It can be shown [3] : if $\text{Hom}(C, B) = 0$, then

1) the form $b : B \longrightarrow B^*$ is determined uniquely by $f : F \longrightarrow F^*$ and it is symplectic too,

2) c is the transpose of a w.r.t. b ,

3) two monads give isomorphic bundles if and only if they are in the same orbit under the natural operation of $GL(A) \times O(B, b)$,

4) the stabiliser subgroups of this operation are finite (in fact all stabilisers coincide with the central subgroup $\pm (\text{id}, \text{id})$).

So the dimension of the family of bundles F coming from monads, with A, B, C fixed, equals

$$\dim\{\text{epimorphisms } c : B \longrightarrow C \text{ such that } c \circ b \circ c^T = 0\} \\ - \dim GL(C) - \dim O(B, b) .$$

The problem now is to describe all c satisfying $c b c^T = 0$. For $c : B \longrightarrow C$ arbitrary, the map $c b c^T$ is an element of $\Gamma(\wedge^2 C)$. It is the obstruction against build a monad out of c . Up to now this obstruction is not understood at all. (Fortunately, if $\text{rank } A = \text{rank } C = 1$, it does not exist). Table 4 shows, for all monads satisfying $\text{Hom}(C, B) = 0$ (in the range $1 \leq n \leq 8$) the dimensions

$$h = \dim \text{Hom}(B, C)$$

$$\lambda = h^0(\wedge^2 C)$$

$$g = \dim GL(C)$$

$$s = \dim O(B, b) = h^0(S^2 B) \quad (\text{see [3]})$$

$$\mu = h - \lambda - g - s .$$

STABLE VECTOR BUNDLES ON \mathbb{P}_3

n	a	type	C	B	h	λ	g	s	μ	$8n-3$
3	1	β_2	2	-1001	44	0	1	22	21	21
5	0	ell	22	-1-1-1111	144	35	4	69	36	37
	1	γ	3	-2002	100	0	1	59	<u>40</u>	
6	0	ell	22	-1-10011	136	35	4	53	44	45
7	0	ell	22	-100001	128	35	4	37	52	53
		γ_1	3	-1-111	90	0	1	34	<u>55</u>	
		γ	4	-3003	194	0	1	128	<u>65</u>	
8	0	ell	22	000000	120	35	4	21	60	61
		γ_2	3	-1001	85	0	1	22	<u>62</u>	
	1	ell	222	-1-1-111111	288	105	9	69	<u>105</u>	

TABLE 4

The dimension μ is the correct dimension (of the corresponding family of bundles in the coarse moduli scheme) if

a) monads of the type considered actually exist,

b) $h-\lambda$ is the correct dimension of $\{\text{maps } c\}$, e.g., if $\text{rank } C =$.

So rows 1,3,6,7,9 of table 4 give correct dimensions. In the other cases, the dimension can be bigger than μ .

Table 4 does not show the families of type α and β_1 , because then $\mu = 8n - 3$. This is the dimension of the families of bundles with $h^2(F \otimes F^*) = 0$. It has been shown by P. Wever (letter from Hartshorne 1977) that the families of type α and β_1 indeed contain bundles with $H^1(F \otimes F^*)$ vanishing. So there are families of this type of dimension $8n-3$, smooth and Zariski-open in their moduli-space.

Some of the dimensions μ are already bigger than $8n-3$, and they cannot lie in the closure of the smooth components of dimension $8n-3$. (This happens the first time for $n=5$). So, in general, the coarse moduli space for stable bundles with fixed underlying topological bundle must be reducible.

Hartshorne has obtained the same dimension ($55 > 53 = 8n-3$) for the family γ_1 by another method.

REFERENCES

- [1] M.F. ATIYAH, E. REES - Vector bundles on projective 3-space, Inv. Math. 35, 131-153 (1976).
- [2] W. BARTH, G. ELENCAJG - Concernant la cohomologie des fibrés algébriques stables sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. In : Variétés analytiques compactes, Nice (1977).
- [3] W. BARTH, K. HULEK - Monads and moduli of vector bundles, to appear.
- [4] A.A. BEILINSON - Coherent sheaves on \mathbb{P}_n and problems of linear algebra. Preprint (1978).
- [5] G. HORROCKS - Construction of bundles on \mathbb{P}^n . This seminar (1977).

THÉORÈME DE SPÉCIALITÉ

par L. GRUSON et C. PESKINE

W. Barth a démontré que tout fibré stable de rang deux sur \mathbb{P}_n ($n \geq 2$) est de discriminant < 0 ([1], cor. 1 du th. 3) : rappelons qu'il ramène ce résultat au cas connu $n = 2$, par un théorème de stabilité de la restriction à un hyperplan général d'un fibré stable de rang deux.

Soit C une courbe de \mathbb{P}_3 ; on sait que pour que C soit section d'un fibré E de rang deux, il faut et il suffit qu'il existe un entier e tel que le \mathcal{O}_C -module $\mathcal{O}_C(e)$ soit dualisant ; dans ce cas $c_1(E) = e + 4$ et $c_2(E)$ est le degré de C . On voit facilement (cf. 2.6) que l'énoncé de Barth pour $n = 3$ est équivalent à l'énoncé ci-dessous, pour les courbes sections de fibrés :

Théorème de spécialité - Soit C une courbe intègre de \mathbb{P}_3 ; on note d le degré de C , e le plus grand entier tel que $H^1(\mathcal{O}_C(e)) \neq 0$, s le plus petit degré des surfaces contenant C ; alors s minore la plus petite racine du trinôme $x^2 - (e + 4)x + d$.

Cet énoncé figure dans le mémoire de Halphen sur la classification des courbes gauches algébriques [6], p. 401. La démonstration de Halphen prête à une objection de "position générale". Plus précisément, Halphen affirme au chapitre III de [6] qu'il est possible de construire, à partir d'une projection plane générale de la courbe donnée, une double suite (S_i, β_i) de courbes planes ($0 \leq i \leq s-1$) vérifiant des identités explicites p. 318, et telle que S_i et β_i se coupent proprement pour $0 \leq i \leq s-2$; mais la démonstration qu'il donne de ce dernier point (essentiel) est insuffisante ([6], p. 354). Par contre, le chap. II de [6] contient une démonstration complète d'un cas particulier du théorème de spécialité (si $e > \frac{d}{3} - 1$, la courbe C est sur une quadrique) ; en nous fondant sur cette démonstration, nous avons donné une démonstration de

l'énoncé complet au §1 de [5] que nous reproduisons textuellement au n°2 de cet exposé. Le n°1 contient une discussion sommaire des énoncés de [6] concernant les valeurs prises par le genre des courbes gauches algébriques de degré donné.

1. Les énoncés de Halphen.

Nous voulons résumer et discuter sommairement les énoncés de Halphen [6], qui concernent les valeurs prises par les genres des courbes lisses connexes de \mathbb{P}_3 , de degré d , non sur une surface de degré $< s$ (l'existence de telles courbes implique évidemment $\binom{s+2}{3} \leq (s-1)d+1$). L'objectif de Halphen : "énumérer et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré" (p. 266) est plus ambitieux : il s'agit, sans ambiguïté, de déterminer les composantes irréductibles de l'ouvert du schéma de Hilbert de \mathbb{P}_3 formé des courbes lisses connexes ; Halphen affirme aussi, p. 301, avoir prouvé que toute courbe intégrale de \mathbb{P}_3 a une déformation lisse (aucune preuve de cet énoncé ne figure dans [6]). Ces assertions de Halphen peuvent être prises au sérieux, mais il est beaucoup plus difficile de les discuter que celles auxquelles nous nous limitons ici.

Nous poserons :

$G(d,s) = \sup (\text{genre de } C, \text{ pour } C \text{ lisse connexe de degré } d, \text{ non sur une surface de degré } < s)$,

$G_{CM}(d,s) = \sup (\text{genre de } C, \text{ pour } C \text{ arithmétiquement normale de degré } d, \text{ non sur une surface de degré } < s)$.

Halphen annonce p. 266 le résultat suivant :

Énoncé 1 (de majoration du genre) - Sous l'hypothèse $s(s-1) < d$, on a

$$G(d,s) = G_{CM}(d,s) = \frac{1}{2}((r-1)(r-2) + (d-r)(s+t-4))$$

où t est l'entier immédiatement supérieur à $\frac{d}{s}$ et $r = st - d$. Ce maximum est réalisé par les courbes liées à une courbe plane de degré r par deux

surfaces de degrés respectifs s et t , et par ces courbes seules (sur la "liaison", cf. [11]).

Cet énoncé implique le théorème de spécialité, car $ed \leq 2g - 2$.

Pour $s = 2$, cet énoncé est le cas $n = 3$ d'un théorème de Castelnuovo [3] sur la majoration du genre d'une courbe lisse connexe de \mathbb{P}_n non sur un hyperplan ; la démonstration de Halphen, p. 290, est complète.

Pour $s > 2$, Halphen utilise une généralisation habile de son argument pour $s = 2$, fondée sur sa construction géométrique du chap. III (et prêtant aux mêmes objections de "position générale" que sa démonstration du théorème de spécialité). Il obtient ainsi une majoration de $G(d, s)$, qui lui donne la valeur de $G(d, s)$ pour $s = 3, 4, 5$, mais non pour $s \geq 6$.

Pour traiter le cas $s \geq 6$, Halphen s'aide alors d'un énoncé qu'il "admet comme évident" (p. 402) : pour tout s , $G(d, s)$ est le genre d'une courbe située sur une surface de degré s . En fait on peut déduire élémentairement l'énoncé 1 de ce dernier énoncé, pour lequel l'épithète "évident" est agressif...

Dans [7] Harris démontre l'énoncé 1 en reprenant la méthode de section hyperplane de Castelnuovo [3] ; la version de [7] dont nous disposons prête à certaines objections (l'argument de section plane nous semble incomplet et le calcul final contient une erreur). Dans [5] nous donnons une démonstration de l'énoncé 1, fondée sur le même principe que celle de Harris, et utilisant le "lemme des trisécantes généralisé" de Laudal [8] dont Harris ne disposait pas. (Il serait utile d'éviter le lemme de Laudal, dont la démonstration est difficile ; nous pensons que l'interprétation algébrique d'une extension convenable de la construction géométrique de Halphen devrait permettre de prouver l'énoncé 1 sans recours aux sections planes).

Lorsque $s(s-1) > d$, la valeur de $G(d, s)$ n'est pas connue.

Halphen remarque, p. 264, que sous l'hypothèse $(s-1)d + 3 \leq 2 \binom{s+2}{3}$, on a $H^1(\mathcal{O}_C(s-1)) = 0$ pour toute courbe lisse connexe C de degré d , non

sur une surface de degré $< s$ (th. de Clifford). On en déduit l'inégalité $G(d,s) < 1 + (s-1)d - \binom{s+2}{3}$; nous ignorons si c'est une égalité.

Pour les valeurs intermédiaires de s , Halphen affirme, p. 256, que sa méthode de démonstration de l'énoncé 1 donne un algorithme permettant le calcul cas par cas de $G(d,s)$; il ne décrit pas cet algorithme, mais se contente de l'illustrer (pp. 438-442) par l'exemple $d = 120$. Sa méthode se heurte à l'objection usuelle de position générale, à laquelle s'ajoute ici le problème que pose une récurrence effectuée sur le degré d : cette récurrence fait intervenir des courbes intermédiaires qui peuvent n'être pas réduites !

Dans [5] nous calculons $G_{CM}(d,s)$ pour tous (d,s) et nous donnons des exemples où $G_{CM}(d,s) < G(d,s)$ (et bien sûr $\binom{s+1}{2} \leq d$!).

Le "problème des lacunes" est la recherche des nombres $g < G(d,s)$ tels qu'il n'existe pas de courbe lisse connexe de degré d et de genre g , non sur une surface de degré $< s$: ces nombres sont les lacunes pour (d,s) .

La classification des courbes tracées sur une quadrique (Chasles) montre que les genres de ces courbes sont les nombres $(p-1)(d-p-1)$, où $1 \leq p \leq \frac{d}{2}$; les nombres ne figurant pas dans cette série, et compris entre $G(d,3)+1$ et $G(d,2)$ sont donc des lacunes pour $s = 2$.

Halphen énonce, p. 265, le résultat suivant :

Énoncé 2 (des lacunes) - Pour tous $s \geq 3$ et $g \leq G(d,s) - \binom{s-1}{2}$, il existe une courbe lisse connexe de degré d , de genre g , non sur une surface de degré $< s$.

Il approche cet énoncé de manière empirique (sauf dans le cas $s = 3$, que nous discuterons plus loin) : admettant de proche en proche l'existence de courbes de petits degrés et de genres variables sur des surfaces convenables de degré s , il tord le module inversible dont une telle courbe est section. La faiblesse de cette approche est de viser un énoncé plus exigeant que l'énoncé 2 (qui affirmerait l'existence de courbes de degré d et de genre g

sur une surface de degré s).

Dans le cas $s = 3$, Halphen entreprend au chapitre IV de construire des courbes lisses connexes de degré d et de genre arbitraire $g \leq G(d, 3)$, tracées sur une surface cubique. Il est connu que c'est impossible, comme le remarque Hartshorne (dans le cas des surfaces cubiques lisses) : par exemple il n'existe pas de courbe elliptique de degré 10 sur une surface cubique, ce qui ne met nullement en défaut l'énoncé 2 (il existe des courbes elliptiques de degré 10 sur certaines surfaces quartiques). L'erreur de Halphen est assez grossière : utilisant comme intermédiaires les courbes tracées sur une surface cubique à droite double (qu'il classifie aisément), il prétend déformer certaines de ces courbes en courbes tracées sur une surface cubique lisse, tout en conservant "l'indice de spécialité" e .

Il est possible de classifier les courbes tracées sur une surface cubique ; on en déduit que les genres de ces courbes prennent toutes les valeurs situées entre $G(d, 3)$ et (disons) $G(d, 7)$. Cela ne suffit bien sûr pas à prouver l'énoncé 2 pour $s = 3$; toutefois il n'est pas exclu que cet énoncé puisse être obtenu par une approche voisine de celle de Halphen. Par exemple, l'énoncé 2 pour $s = 4$ (et a fortiori pour $s = 3$, d'après ce qui précède) résulterait de l'existence de courbes non spéciales, tracées sur une surface quartique lisse, de degré arbitraire d et de genre arbitraire $g \leq d - 3$ (pour Halphen, l'existence de telles courbes est une évidence, cf. p. 394).

2. Le théorème de spécialité.

Soit V une variété intègre de codimension deux de $\mathbb{P}^r = \text{Proj}(k[X_0, \dots, X_r])$ ($r \geq 3$) . On suppose que l'origine O , de coordonnées $(0, 0, \dots, 0, 1)$, n'est pas un point de V et que la projection de sommet O dans l'hyperplan à l'infini \mathbb{P}^{r-1} induit un morphisme birationnel de V sur son image \bar{V} . L'idéal de V dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}$ est alors défini par un polynôme $F \in k[X_0, \dots, X_{r-1}]$,

homogène de degré $d = \deg(V)$. Nous allons décrire sommairement, dans cette situation, une construction effectuée par Halphen lorsque $r=3$ ([6], chap. 3).

Suivant Halphen, nous noterons (h_0) la sous-variété de V dont l'idéal est le conducteur de \mathcal{O}_V dans $\mathcal{O}_{\bar{V}}$. Soit I le plus grand idéal gradué de $k[X_0, \dots, X_{r-1}]$ définissant (h_0) , et soit u_0 un élément homogène, non nul, de degré minimum de I . Comme le conducteur de \mathcal{O}_V dans $\mathcal{O}_{\bar{V}}$ est isomorphe à $\omega_V(r-d)$, où ω_V est un faisceau dualisant sur V , le degré de u_0 est, en vertu du théorème de dualité, $d-r-e(V)$, où $e(V) = \max\{i \text{ tels que } H^{r-2}(\mathcal{O}_V(i)) \neq 0\}$. D'autre part I/F est par définition muni d'une structure de module sur $k[X_0, \dots, X_r]$; on peut donc choisir, pour tout entier $i \geq 1$, un élément u_i de I , homogène de degré $d+i-r-e(V)$, dont la classe modulo F est le produit de la classe de u_0 par X_r^i . On forme alors la matrice persymétrique $(u_{i+j})_{i,j \geq 0}$. Cette matrice est de rang un modulo F , donc pour tout entier $p \geq 1$, ses p -mineurs sont divisibles par F^{p-1} , d'après le lemme suivant :

LEMME 1.1.- Soient A un anneau, P un idéal premier de A et $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ une matrice, à coefficients dans A , de rang $\leq m'$ modulo P ; on a
 $\det((a_{i,j})) \in P^{(m-m')}$ (puissance symbolique).

On peut supposer A local d'idéal maximal P . On écrit alors $(a_{ij}) = (b_{ij}) + (c_{ij})$, où $(b_{i,j})_{i,j}$ est de rang m' et $c_{ij} \in P$ pour tout (i,j) . Le lemme se déduit de l'égalité $\det((a_{i,j})) = \sum_{I,J} B_{I,J} \cdot C_{CI,CJ}$, où $B_{K,L}$, resp. $C_{K,L}$, est le mineur de (b_{ij}) , resp. (c_{ij}) défini par les lignes d'indices $\in K$ et les colonnes d'indice $\in L$. Nous pouvons maintenant démontrer une inégalité reliant

$e = e(V) = \max\{n \text{ tels que } H^{r-2}(\mathcal{O}_V(n)) \neq 0\}$,
 et $s = s(V) = \text{minimum des degrés des hypersurfaces contenant } V$.

THÉORÈME 2.2. (de spécialité). Si $P(X)$ est le polynôme $X^2 - (e+r+1)X + d$,

on a $s \leq [P(n)]_+ + n$ pour tout entier positif n . De plus lorsque $P(n) < 0$, l'égalité a lieu si et seulement si V est intersection complète d'hypersurfaces de degrés respectifs s et d/s .

Pour tout couple d'entiers positifs (p, q) , considérons la matrice

$$M_{p,q} = \begin{pmatrix} u_0, u_1, \dots, \dots, u_{q-1} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{p-1}, u_p, \dots, \dots, u_{p+q-2} \end{pmatrix}$$

Nous aurons besoin du résultat suivant dont une partie est par exemple démontrée dans ([4], chap. 15, §11, Folg. 2) .

LEMME 2.3.- Soient m et n deux entiers positifs tels que $m \leq n$, que rang $(M_{m,n}) = m$ et que $\det(M_{m+1,m+1}) = \dots = \det(M_{n,n}) = 0$. Alors $M_{m+1,n}$ est de rang m , et si $(\delta_0, \dots, \delta_m)$ est l'unique relation, à coefficients homogènes de p.g.c.d. un dans $k[X_0, \dots, X_{r-1}]$, entre les lignes de $M_{m+1,n}$, il existe un polynôme non nul B tel que $\det(M_{n,m}) = B \cdot F^{m-1} \cdot \delta_m^{n-m+1}$.

Faisons une récurrence sur $m-n$. Pour $m-n = 0$, il est évident que $M_{m+1,n}$ est de rang m et la deuxième partie de l'énoncé se déduit du fait que les mineurs maximaux de $(M_{m+1,m})$ forment une relation entre les lignes de $M_{m+1,m}$. Supposons maintenant $n > m$. Si $M_{m+1,n}$ est de rang $m+1$, alors par hypothèse de récurrence $M_{m+2,n}$ est de rang $m+1$, et si $(\omega_0, \dots, \omega_{m+1})$ est l'unique relation à coefficients homogènes, de p.g.c.d. un, dans $k[X_0, \dots, X_{r-1}]$ entre les lignes de $M_{m+2,n}$, on a $\omega_{m+1} = 0$ car $\det(M_{m+1,m+1}) = 0$. Ceci contredit $\text{rang}(M_{m+1,n}) = m+1$, donc $\text{rang}(M_{m+1,n}) = m$. Soit alors $(\delta_0, \dots, \delta_m)$ la relation décrite dans l'énoncé entre les lignes de $M_{m+1,n}$. Considérons la matrice $(m-n+1) \times (n+1)$:

$$N = \begin{pmatrix} \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_m, 0, \dots, 0 \\ 0, \delta_0, \dots, \delta_m, 0, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, 0, \delta_0, \dots, \delta_m \end{pmatrix}$$

On vérifie immédiatement l'égalité $M_{m,n+1} \cdot t_N = 0$. D'après ([9] n°230, p.231, ou [2] §8, ex. 13), il existe des polynômes homogènes en (X_0, \dots, X_{r-1}) , premiers entre eux, Q et R tels que pour toute partie I à m éléments de $[0, n]$ on a :

$$Q \cdot D_I(M_{m,n+1}) = \pm R \cdot D_{CI}(N),$$

où $D_I(M_{m,n+1})$ (resp. $D_{CI}(N)$) désigne le mineur maximal de $M_{m,n+1}$ (resp. N) porté par les colonnes d'indices situés dans I (resp. CI le complémentaire de I dans $[0, n]$). Il est clair que les mineurs maximaux de N engendrent l'idéal $(\delta_0, \dots, \delta_m)^{n-m+1}$, donc que le p.g.c.d. de ces mineurs est 1 ce qui entraîne que Q est une constante non nulle. Comme R est non nul, l'assertion est démontrée compte tenu de 1.1.

Démontrons maintenant le théorème. Sous les hypothèses du lemme précédent, montrons que V est contenue dans une hypersurface de degré $\leq e + r - n + \frac{P(n+1)}{n+1-m}$. Soit $(\delta_0, \dots, \delta_m)$ la relation donnée dans le lemme entre les lignes de $M_{m+1,n}$. L'hypersurface d'équation $\delta_0 + \delta_1 X_r + \dots + \delta_m X_r^m$ contient V car

$$u_0(\delta_0 + \dots + \delta_m X_r^m) = \delta_1(u_0 X_r - u_1) + \dots + \delta_m(u_0 X_r^m - u_m).$$

Cette hypersurface a pour degré $m + d^0(\delta_m) \leq m + \frac{P(m)}{n-m+1}$ (en vertu du lemme). En simplifiant, on trouve $s \leq e + r - n + \frac{P(n+1)}{n+1-m}$.

Supposons d'abord qu'il existe un entier t tel que $P(t) < 0$; soit alors n maximal pour cette propriété. Comme $\det(M_{n,n})/F^{n-1}$ est de degré $P(n)$, on a $\det(M_{n,n}) = 0$. Soit m un entier maximal tel que $m < n$ et que $\det(M_{m,m}) \neq 0$. On a alors $s \leq e + r - n + \frac{P(n+1)}{n+1-m}$. Mais

$$P(n+1) < P(n+1) - P(n) = 2n+1 - (e+r+1) < n+1-m$$

(cette dernière inégalité étant vérifiée car n est strictement contenu entre les racines de P et m est inférieur ou égal à la plus petite racine). On en déduit $s \leq e + r - n$ ce qui entraîne que s est \leq à la plus petite racine de P , et en particulier $s \leq [P(1)]_+ + 1$ pour tout entier 1 .

S'il n'existe pas d'entier t tel que $P(t) \leq 0$, soit n un entier tel que $n^2 - (e + r)n + d = P(n) + n$ soit minimum. Si $\det(M_{n,n}) \neq 0$, soit $(\delta_0, \dots, \delta_n)$ la relation décrite dans le lemme entre les lignes de $M_{n+1,n}$. L'hypersurface d'équation $\delta_0 + \delta_1 X_r + \dots + \delta_n X_r^n$ contient V . Comme $d^0 \delta_n \leq d^0(\det M_{n,n} / F^{n-1}) = P(n)$, c'est terminé. Si $\det(M_{n,n}) = 0$, considérons comme précédemment le plus grand entier m tel que $m < n$ et $\det(M_{m,m}) \neq 0$. On sait que $s \leq e + r - n + \frac{P(n+1)}{n+1-m}$. Il suffit alors de remarquer que le terme de droite de cette inégalité croît avec m et que sa valeur pour $m = n$ est $n + P(n)$.

Il ressort de ce que nous venons de démontrer que s est toujours \leq à la plus petite racine de P lorsqu'il y en a une. On en déduit que pour $P(n) \leq 0$ l'égalité $s = [P(n)]_+ + n$ est réalisée si et seulement si $s = n$ est la plus petite racine de P . Montrons que cette propriété caractérise les intersections complètes d'hypersurfaces de degrés respectifs s et $d/s = e + r + 1 - s$.

Soit S une hypersurface de degré s contenant V , et soit J l'idéal de V sur S . La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow J^V \longrightarrow \omega_V(r+1-s) \longrightarrow 0 \quad (*)$$

montre que $J^V(s-r-1-e)$ a une section de degré $d-s(e+r+1-s) = P(s)$.

Il est immédiat que $P(s) = 0$ si et seulement si $J \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S(e+r+1-s)$, et le théorème est démontré.

Remarque 2.4.- La suite exacte $(*)$ ci-dessus, et la conséquence qu'on en tire $-P(s) \geq 0$, l'égalité ayant lieu si et seulement si V est intersection complète d'hypersurfaces de degrés s et d/s sont valables pour toute variété V (éventuellement non réduite) purement de codimension 2, contenue dans une hyper-

surface intègre de degré s . On retrouve là un résultat bien connu (voir par exemple [10], vanishing lemma D, p. 122).

Remarque 2.5.— Dans le chapitre 3 de son mémoire, Halphen considère ce théorème comme évident pour les courbes de \mathbb{P}^3 , car il affirme $\det(M_{i,i}) \neq 0$ pour tout $i \leq s$, lorsque la projection \bar{C} de la courbe n'a que des points doubles ordinaires. Nous ne savons pas si cette assertion est vraie pour un centre de projection général, mais on constate facilement qu'elle est fautive pour un centre de projection particulier.

Exemple.— Soit C l'intersection de deux surfaces quartiques générales de \mathbb{P}^3 , et soit O n'appartenant pas à C un point double sur l'unique surface quartique contenant C et passant par O . Alors la projection de \bar{C} , de centre O , n'a que des points doubles ordinaires et $\det(M_{3,3}) = 0$.

Toutefois le chapitre 2 du même mémoire contient une démonstration correcte du théorème de spécialité lorsque $P(3) < 0$.

Remarque 2.6.— Lorsque V est section d'un fibré E de rang 2 sur \mathbb{P}^r (i.e. lorsque $\mathcal{O}_V(e)$ est un module dualisant sur V), la partie du théorème qui traite du cas où P a des racines est une conséquence immédiate d'un résultat de Barth ([1], cor. 1 du th. 3). On a en effet $c_1(E) = e + r + 1$ et $c_2(E) = d$, donc P a des racines si et seulement si le discriminant $c_1^2 - 4c_2$ de E est positif. Le résultat signifie alors que E est instable donc que $2s \leq c_1$ ce qui démontre le théorème compte tenu de $P(s) \geq 0$.

Références

- [1] W. BARTH - Some properties of stable rank-2 vector bundles on \mathbb{P}_n ,
Math. Ann., 226 (1977), pp. 125-150.
- [2] BOURBAKI - Algèbre, chapitre III (ancienne édition).
- [3] G. CASTELNUOVO - Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti...,
Rendiconti Circ. mat. Palermo, 7 (1893), pp. 89-110.
- [4] F.R. GANTMACHER - Matrizenrechnung, t.2, VEB Verlag der Wissenschaften.
- [5] L. GRUSON et C. PESKINE - Genre des courbes de l'espace projectif, Proc.
Tromsø conference on alg. geom., 1977, à paraître (Lecture notes,
Springer).
- [6] G.H. HALPHEN - Mémoire sur la classification des courbes gauches algébri-
ques, Oeuvres complètes, t.III, pp. 261-455.
- [7] J. HARRIS - Thesis, Harvard University, 1977 (preprint).
- [8] O.A. LAUDAL - A generalized tri-secant lemma, Proc. Tromsø conference
on algebraic geometry, 1977, à paraître (Lectures notes, Springer)
- [9] TH. MUIR - A treatise on the theory of determinants, Dover.
- [10] D. MUMFORD - Curves on algebraic surfaces, Annals of math. studies n°59,
Princeton.
- [11] C. PESKINE et L. SZPIRO - Liaison des variétés algébriques, Inv. math.
26 (1973), pp. 271-302.

BIBLIOGRAPHIE

- M.F. ATIYAH, Geometry of Yang-Mills fields, Proc. International Conf. Math. Physics, Rome (1976).
- M.F. ATIYAH, V.G. DRINFELD, N.J. HITCHIN and Yu. I. MANIN, Construction of Instantons, Phys. Lett. 65 A, n° 3 (1978), 185-187.
- M.F. ATIYAH, N. HITCHIN and I.M. SINGER, Deformations of instantons, Proc. Nat. Acad. Sci. 74 (1977), 2662-2663.
- M.F. ATIYAH, N. HITCHIN and J.M. SINGER, Self-duality in four-dimensional Riemannian Geometry, Proc. Roy. Soc. (to appear).
- M. F. ATIYAH, and J.S.D. JONES, Topological aspects of Yang-Mills theory (to appear).
- M.F. ATIYAH and E. REES, Vector bundles on projective 3-space, Invent. Math., 35, (1976), 131-153.
- M.F. ATIYAH and R. WARD, Instantons and algebraic geometry, Commun. Math. Phys. 55, (1977), 117-124.
- W. BARTH, Some properties of stable rank-2 vector bundles on \mathbb{P}_n , Math. Ann. 226, (1977), 125-150.
- W. BARTH, Moduli of vector bundles on the projective plane, Invent. Math. 42, (1977), 63-91.
- W. BARTH and K. HULCK, Monads and Moduli of vector bundles, Manuscr. Math. 25, (1978), 323-347.
- W. BARTH and A. VAN DE VEN, A decomposability criterion for algebraic 2-bundles on projective spaces, Invent. Math. 25, (1974), 91-106.
- W. BARTH and A. VAN DE VEN, On the geometry in codimension 2 of Grassmann manifolds, in "Classification of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds", Lecture Notes in Math. 412, Springer-Verlag, Heidelberg, New-York, (1974), 1-35.
- A.A. BELAVIN, A.M. POLYAKOV, A.S. SCHWARTZ, Yu. TYUPKIN, Pseudo-particle solutions of the Yang-Mills equations, Phys. Lett., B 59 n° 1, (1975), 85-87.
- A.A. BELAVIN, V.E. ZAKHAROV, JEPT Letters, 25 : 12 (1977), 603-607.
- C.W. BERNARD, N.H. CHRIST, A.H. GUTH, E.J. WEINBERG, Instanton parameters for arbitrary gauge groups, (Preprint CU-TP-105, Columbia University, 1977).

BIBLIOGRAPHIE

- I.N. BERNSTEIN, I.M. GELFAND, S.I. GELFAND, Algebraic bundles over \mathbb{P}_n and problems of linear algebra, Funkcional Anal., 12, Vol. 3, (1978).
- A.A. BEILINSON, Coherent sheaves on \mathbb{P}_n and problems of linear algebra, Funkcional Anal. 12, Vol. 3, (1978).
- J.P. BOURGUIGNON, H.B. LAWSON and J. SIMONS, Stability and Gap Phenomena for Yang-Mills Fields, (à paraître).
- C.G. CALIAN, R. DASHEN and D.J. GROSS, Toward a theory of the strong interactions (Preprint C00 - 2220-115, 1977).
- E.F. CORRIGAN, D.B. FAIRLIC, R.C. YATES and P. GADDARD, The construction of self-dual solution to $SU(2)$ Gauge theory, Commun. Math. Phys., 58, (1978), 223-240.
- V.G. DRINFELD and Yu. I. MANIN, A description of instantons, (Preprint N 72, 1978).
- V.G. DRINFELD and Yu. I. MANIN, Self-dual Yang-Mills fields on the sphere, Funkcional Anal. 12, Vol. 2, (1978), 78-89.
- V.G. DRINFELD and Yu. I. MANIN, On locally free sheaves on \mathbb{CP}^3 associated with the Yang-Mills fields, UMN (Translated as Russian Math. Surveys), Vol. 2, (1978), 241-242.
- V.G. DRINFELD and Yu. I. MANIN, Instantons and sheaves on \mathbb{CP}^3 , à paraître dans Proceedings of Copenhagen Summer Meeting in Algebraic Geometry, Springer, Lecture Notes.
- G. ELENWAJG, Les fibrés uniformes de rang 3 sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ sont homogènes, Math. Ann. 231, (1978), 217-227.
- D. FERRAND, Courbes gauches et fibrés de rang 2, C.R. Acad. Sci. Paris, 281, (1975), A 345-347.
- D. GIESEKER, On the moduli of vector bundles on an algebraic surface, Annals of Math., 106, (1977), 45-60.
- H. GRAUERT, H. and G. MÜLICH, Vektorbündel vom Rang 2 über dem n-dimensionalen Komplex-projectiven Raum, Manuscr. Math., 16, (1975), 75-100.
- R. HARTSHORNE, A property of A-sequences, Bull. Soc. Math. France, 94, (1966), 61-66.
- R. HARTSHORNE, Varieties of small codimension in projective space, Bull. AMS, 80, (1974), 1017-1032.

BIBLIOGRAPHIE

- R. HARTSHORNE, The classification of curves in \mathbb{P}^3 and related topics (Lecture Notes in Japanese by M. ISHIDA and E. SATO), Math. Res. Lec. Notes, 2 Kyoto Univ., (1977), 74 pp.
- R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math., 52, Springer-Verlag, Heidelberg, New-York, (1977), xvi + 496 pp.
- R. HARTSHORNE, Stable vector bundles and instantons, Commun. Math. Physics (to appear).
- R. HARTSHORNE, Stable vector bundles of rank 2 on \mathbb{P}^3 .
- G. HORROCKS, Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, Proc. London Math. Soc., 14, (1964), 689-713.
- G. HORROCKS, A construction for locally free sheaves, Topology I, (1968) 117-120.
- G. HORROCKS, Examples of rank three vector bundles on five dimensional projective space, (Preprint).
- G. HORROCKS and D. MUMFORD, A rank 2 vector bundles on \mathbb{P}^4 with 15,000 symmetries, Topology, 12, (1973), 63-81.
- S.L. KLEIMAN, Geometry on Grassmannians and applications to splitting bundles and smoothing cycles, Publ. Math. IHES, 36, (1969), 281-298.
- J. LE POTIER, Fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.
- M. MARUYAMA, On a family of algebraic vector bundles (in) Number Theory, Algebraic Geometry, and Commutative Algebra, in honor of Y. Akisuki, Kinokuniya, Tokyo, (1965), 95-146.
- M. MARUYAMA, Stable vector bundles on an algebraic surface, Nagoya Math. J., 58, (1975), 25-68.
- M. MARUYAMA, Openness of a family of torsion free sheaves, J. Math. Kyoto Univ., 16, (1976), 627-637.
- M. MARUYAMA, Moduli of stable sheaves, I, J. Math. Kyoto Univ., 17, (1977), 91-126.
- M. MARUYAMA, Moduli of stable sheaves, II, (Preprint).
- D. MUMFORD, Lectures on curves on an algebraic surface, Annals of Math. Studies, 59, Princeton Univ. Press. Princeton, (1966), 200 pp.
- D. MUMFORD, Varieties defined by quadratic equations, (with an Appendix by G. Kempf) in Questions on Algebraic Varieties, C.I.M.E. ed. Cremonese, Rome, (1970), 29-100.

- D. MUMFORD, Theta Characteristics of an algebraic curve, Ann. Sc. ENS, 4, (1971), 181-192.
- M.S. NARASIMHAN and C.S. SESHADRI, Stable and unitary vector bundle on a compact Riemann Surface, Annals of Math., 82, (1965), 540-567.
- C. PESKINE and L. SZPIRO, Liaison des variétés algébriques (I), Invent. Math., 26, (1974), 271-302.
- A.M. POLYAKOV, Compact Gauge fields and the infrared catastrophe, Phys. Lett. 59B n° 1, (1975), 82-84.
- A. M. POLYAKOV, Interaction of Goldstone particles in two dimensions. Application for few magnets and massive Yang-Mills, Phys. Lett. 59B n° 1, (1975), 79-80.
- A. P. RAO, Liaison among curves in \mathbb{P}^3 , (Preprint).
- B. SAINT-DONNAT, On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve, Math. Ann., 206, (1963), 157-175.
- E. SATO, On the decomposability of infinitely extendable vector bundles on projective spaces and Grassmann varieties, J. Math., Kyoto Univ., 17, (1977), 127-150.
- E. SATO, The decomposability of an infinitely extendable vector bundle on the projective space, II, (Preprint).
- E. SATO, On infinitely extendable vector bundles on G/P , (Preprint).
- A.S. SCHWARTZ, Phys. Lett., 67B, (1977), 172-174.
- J.-P. SERRE, Sur les modules projectifs, Séminaire Dubreil-Pisot (1960/61), Secr. Math. Paris (1961), exposé 2.
- R. STORA, Yang-Mills instantons, geometrical aspects, (Preprint 77/P. 943, Centre de Physique Théorique, CNRS).
- F. TAKEMOTO, Stable vector bundles on algebraic surfaces, Nagoya Math. J., 47, (1972).
- H. TANGO, On morphisms from the projective space \mathbb{P}^n to the Grassmann variety $Gr(n,d)$, (Preprint).
- G. TRAUTMANN, Moduli for vector bundles on $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, Math. Annal. 237, (1978), 167-186.
- A.N. TYURIN, Finite dimensional vector bundles over infinite varieties, (Preprint).

BIBLIOGRAPHIE

- G.P. WEVER, The moduli of a class of rank 2 vector bundles on projective 3 spaces, thesis, Univ. Calif. Berkeley, (1977).
- E. WITTEN, Some exact multi instanton solutions of classical Yang-Mills theory, (Preprint Harvard).

SUMMARY

The aim of this seminar is to give a survey of Instantons theory. Let M be a riemannian 4-dimensional manifold and F a complex vector bundle over M , with structure group SU_n . The action of a connection \mathcal{A} on F is $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \int_M |\mathcal{R}|^2$, where \mathcal{R} is the curvature of \mathcal{A} . If M is compact (or if \mathcal{A} is submitted to boundary conditions), the connections for which the action is stationary are those which satisfy the Yang-Mills equation

$$\nabla \star \mathcal{R} = 0.$$

This condition is implied by

$$\mathcal{R} = \pm \star \mathcal{R}$$

(self-dual or anti-self-dual Yang-Mills equation) ; solutions of this equation are an absolute minimum of the action. It is not known whether there exist solutions of the Yang-Mills equation which are not self-dual or anti-self-dual.

The intention of lecture I is to indicate motivations, originated in Physics, for the theory.

Lectures II to VII develop the Atiyah-Penrose theory, which reduces the classification of Instantons to that of some algebraic vector bundles over $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Some properties of these bundles are then given, in particular a complete proof of the AHMD vanishing theorem. This part is an exposition of published results (cf. the bibliography).

Other lectures give complements independant from each other : lecture VIII gives an independant proof of the vanishing theorem, with more differential geometry and less algebraic geometry. Lecture IX mentions the Serre-construction for fiber bundles over \mathbb{P}^n . This construction is used in lecture X to give, following Hartshorne, a description of some module space (it so happens that, in

this case, Serre's construction is more appropriate than Horrocks'). Lecture XI extends the Horrocks' construction to bundles more general than those mentioned in lecture V . Lecture XII gives tables of results by Barth. Lecture XIII contains an alternate proof of theorem 4 in lecture IV, based on an old argument by Halphern.

A. DOUADY.

J.-L. VERDIER.