

Astérisque

ROBERT ROUSSARIE

Modèles locaux de champs et de formes

Astérisque, tome 30 (1975)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__30__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__30__1_0)

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

astérisque
30

1975

modèles locaux
de champs et de formes

Robert ROUSSARIE

Université de Dijon

société mathématique de france

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	3
CHAPITRE I : ÉQUATIONS SINGULIÈRES ASSOCIÉES A UN CHAMP DE VECTEURS	17
1. Le problème formel	18
2. Le problème plat	37
3. Quelques résultats en classe $\mathcal{C}^\infty$	58
CHAPITRE II : SINGULARITÉS DES GERMES DE CHAMPS DE VECTEURS	
EN $0 \in \mathbb{R}^2$	69
1. Etude formelle des champs de vecteurs	70
2. Les équations I^∞ et II^∞	88
3. Les résultats $\mathcal{C}^\infty$ relatifs aux germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$	125
CHAPITRE III : SINGULARITÉS GÉNÉRIQUES DE GERMES DE 2-FORMES	
FERMÉES	139
1. Les singularités du rang des 2-formes fermées	141
2. Constructions de chemins à singularité fixe	149
3. Réduction de l'équation $L_{Y_\tau} \omega_\tau = -\dot{\omega}_\tau$	160
4. Les résultats relatifs aux 2-formes fermées	171
BIBLIOGRAPHIE	178
ABSTRACT	181

INTRODUCTION

Cet article a été rédigé à partir des notes d'un cours Peccot fait au Collège de France en mars-avril 1975. Il est consacré à l'étude des germes en $0 \in \mathbb{R}^n$ de champs de vecteurs et de formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ (plus précisément, de 2-formes différentielles fermées). Comme l'indique le titre, on veut établir que sous certaines conditions précisées plus loin, un germe de champ de vecteurs ou de forme est isomorphe à un modèle simple, ici à un germe de champ ou de forme à coefficients polynomiaux. (Dire que deux germes α et β de champs ou de formes, en p et q respectivement, sont isomorphes, signifie qu'ils sont échangés par un germe de difféomorphisme envoyant p sur q ; on écrira : $\alpha \sim \beta$).

Dans tous les cas envisagés, l'existence d'un modèle à coefficients polynomiaux est la conséquence du fait que le germe étudié est de détermination finie, c'est-à-dire entièrement déterminé à isomorphisme près par son développement de Taylor arrêté à un ordre fini. L'exemple le plus simple d'une telle situation est fourni par un germe X de champs de vecteurs non singulier, c'est-à-dire tel que $X(0) \neq 0$. Dans ce cas, on peut démontrer, comme application directe du théorème d'existence des solutions d'une équation différentielle, que dans un système de coordonnées $(z_1, \dots, z_n)$ convenablement choisies, le germe X est égal au germe du champ $\frac{\partial}{\partial z_1}$. On peut donc dire dans ce cas que le champ X est déterminé par sa valeur en 0.

Par contre, un germe X singulier, c'est-à-dire tel que $X(0) = 0$, n'est manifestement plus déterminé par sa valeur en 0. Soit : $j^1 X(0) = \tilde{X}^1 = \sum_{i,j} a_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_i}$ le développement de Taylor à l'ordre 1 (ou 1-jet) d'un tel germe X . Posons $A(X) = (a_{ij})_{i,j}$. Soit g un germe de difféomorphisme en $0 \in \mathbb{R}^n$, conservant 0 : Posons $B = (\frac{\partial g_i}{\partial z_j}(0))_{i,j}$.

Alors :

$A(g_*X) = BAB^{-1}$ où g_*X est l'image de X par le difféomorphisme g .

Il en résulte que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matrice $A(X)$, comptées avec leur ordre de multiplicité, sont invariantes par isomorphisme de X . Il est naturel de se demander si des hypothèses convenables sur les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ impliquent que le germe X est déterminé par sa partie linéaire, c'est-à-dire est linéarisable. Le premier résultat important de linéarisation a été obtenu par H. Poincaré dans sa thèse en 1898 ([15] ; voir également [14]). Il peut s'énoncer ainsi :

Si X est un champ analytique réel tel que :

- i) Toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la partie linéaire de X sont dans $\mathbb{C}$ d'un même côté de l'axe des imaginaires.
- ii) Pour tout n -indice $(i_1, \dots, i_n)$ tel que $i_1 + \dots + i_n \geq 2$ et tout $j \in (1, \dots, n)$
on a :

$$\lambda_j - \sum_{k=1}^n i_k \lambda_k \neq 0. \quad (P_2)$$

Alors X est isomorphe à sa partie linéaire par un difféomorphisme analytique.

(En fait, Poincaré a démontré ce résultat dans le domaine complexe, la condition i) étant généralisée en : toutes les valeurs propres de la partie linéaire de X sont dans un même demi-plan ouvert limité par une droite passant par $0 \in \mathbb{C}$).

Pour la suite, il est important de remarquer que les conditions (P_2) de ii) impliquent que le jet infini $\tilde{X}$ de X en 0 est isomorphe à la partie linéaire de X par un difféomorphisme formel g . La condition de i) a pour conséquence que le difféomorphisme g est analytique.

Le résultat formel est transposable aux germes $\mathcal{C}^\infty$ mais la démonstration de l'existence d'un isomorphisme $\mathcal{C}^\infty$, lorsque i) et ii) sont vérifiées pour un germe X de classe $\mathcal{C}^\infty$, demande d'autres arguments. (Ce résultat $\mathcal{C}^\infty$ a été établi par S. Sternberg dans [21]).

Si on laisse maintenant tomber la condition i) ci-dessus, les conditions (P_2) de ii) impliquent encore que le champ est formellement linéarisable. Ce fait a été

INTRODUCTION

remarqué pour la première fois par Dulac en 1904 pour la dimension 2 dans le contexte un peu différent de l'étude de l'équation $Adx + Bdy = 0$. [4] . Par contre les conditions (P_2) seules, n'impliquent pas que le champ X soit analytiquement linéarisable. Des résultats de linéarisation analytique dans le domaine complexe, sous des conditions beaucoup plus restrictives que les conditions (P_2) ont été établies par G.D. Birkhoff en dimension 2 [1] , puis par G.D. Birkhoff et F.R. Bamforth, en dimension 3 [2] et enfin C.L. Siegel en dimension n quelconque [19] . On trouvera dans [2], une démonstration due à S. Sternberg du résultat de C.L. Siegel, basée sur une méthode de petits dénominateurs.

Si par contre nous revenons au problème de la linéarisation en classe $\mathcal{C}^\infty$, le résultat le plus important, assez inattendu, démontré par S. Sternberg dans et [21] est que le champ X est $\mathcal{C}^\infty$ -linéarisable dès que les seules conditions (P_2) sont vérifiées (c'est à dire, dès que X est formellement linéarisable). Dans le chapitre I ci-dessous, nous donnerons une démonstration de ce résultat.

Si les conditions (P_2) ne sont pas vérifiées, le germe X n'est en général pas linéarisable. On peut se demander à quelles conditions il est encore de détermination finie. Notons par $\hat{X}^k$ le k -jet en 0 du germe X , k -jet que l'on peut assimiler au développement de Taylor du champ, arrêté à l'ordre k , dans la base de $\mathbb{R}^n$ choisie. Nous dirons que :

DÉFINITION - Le germe du champ X en 0, de classe $\mathcal{C}^\infty$, est dit de k -détermination $(\mathcal{C}^\infty)$ finie, si, quel que soit le germe Y , tel que $\hat{Y}^k = \hat{X}^k$ alors X est isomorphe à Y . On dit aussi que le k -jet de X est $(\mathcal{C}^\infty)$ déterminé.

Remarquons que si le germe X est de k -détermination finie, il est isomorphe au germe polynomial de degré k , représentant $\hat{X}^k$ dans la base de $\mathbb{R}^n$ choisie.

Dans la suite, nous n'étudierons en détail les champs ne vérifiant pas les conditions (P_2) qu'en dimension 2. Le chapitre II est consacré à cette étude. Remarquons tout d'abord qu'à un germe de champ $X = a \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial z_2}$ en $0 \in \mathbb{R}^2$ on peut associer le germe de 1-forme $\omega = -bdz_1 + adz_2$.

L'étude du germe X à isomorphisme et multiplication par un germe de fonction $\neq 0$ près est équivalente à l'étude de la forme ω à isomorphisme et multiplication par un germe de fonction différent de 0 près, c'est-à-dire à l'étude de la structure de Pfaff définie par ω , ou encore, dans un langage plus ancien, à l'étude de l'équation différentielle $\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{b}{a}$. Sous cette dernière forme le problème a donné lieu à une abondante littérature depuis l'article de Briot et Bouquet datant de 1856 [3]. La plupart des résultats ont trait à la recherche et l'étude de solutions d'un type particulier. Cependant en relation directe avec les préoccupations du présent article, on doit signaler, outre les travaux de Poincaré et Dulac déjà cités, ceux de A. Seidenberg [10] et de l'école japonaise (M. Hukuhara et autres. Voir [7] en particulier). Dans la suite tous les résultats seront énoncés en termes de champs de vecteurs. D'après ce qui est dit plus haut, ils peuvent aussi être énoncés dans le langage des équations différentielles. Je n'indiquerai pas cette transcription, sauf exception. Les propriétés d'un germe de champ X ont été directement étudié par F. Takens, F. Dumortier entre autres. Seuls les résultats de ces deux auteurs seront utilisés et éventuellement généralisés par la suite.

Considérons tout d'abord un champ linéaire X_1 , de $\mathbb{R}^2$, différent de 0 et non isomorphe à $z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$. Soit $\tilde{V}_{X_1} = \{\tilde{X}, \text{ champ formel en } 0 \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{X}^1 = X_1\}$. Nous établissons dans le chapitre II, le résultat suivant :

THÉOREME - Soit X_1 un champ linéaire de $\mathbb{R}^2$ non nul et non isomorphe à $z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$. Il existe une filtration de $\tilde{V}_{X_1} : \tilde{V}_{X_1} = \sum_0 \supset \sum_1 \supset \dots \supset \sum_k \supset \dots$ par des ensembles algébriques $\sum_k$, $\text{cod } \sum_k = k$, invariants par l'action des germes de difféomorphismes tangents à l'identité en $0 \in \mathbb{R}^2$, et tels que si X est un germe dont le jet infini X en 0 appartient à $\sum_k \setminus \sum_{k+1}$, alors il existe un germe de fonction f , différent de zéro, tel que $f \cdot X$ soit de détermination finie.

On trouvera dans le chapitre II un résultat plus précis incluant le calcul de l'ordre de détermination de $f \cdot X$ en fonction de X_1 ainsi que la description précise d'un modèle polynomial pour $f \cdot X$, dépendant de deux paramètres réels seulement. Ce

INTRODUCTION

résultat généralise un résultat partiel de F. Takens dans le cas où X_1 est champ de rotation [23]. Remarquons que le théorème implique que tout jet de champ dont le 1-jet est non nul et non équivalent à $z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$ est stabilisable au sens défini par F. Takens dans [24] ; cet auteur a d'autre part montré qu'il existe des jets non stabilisables dès que la dimension n est supérieure ou égale à 3 [24].

Lorsque le 1-jet du germe X est davantage dégénéré que dans les hypothèses du théorème précédent, on ne connaît pas de résultats généraux de classification $\mathcal{C}^\infty$, même en dimension 2, faute de pouvoir établir des résultats formels préalables. Par contre, un théorème de réduction établi par F. Dumortier dans [5] (théorème qui semble avoir été démontré en partie en transcription aux équations différentielles par A. Seidenberg dans [18]) nous permettra d'établir qu'"en général", une propriété $\mathcal{C}^\infty$ pour les germes de champs en $0 \in \mathbb{R}^2$ est vraie, dès qu'elle est formellement vérifiée. Dans cette ligne, notre principal résultat est probablement le suivant :

THÉORÈME - Soit $X = a \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial z_2}$ un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^2$, tel que les fonctions a et b , nulles en 0 , engendrent un idéal $\{a, b\}$ contenant une puissance de l'idéal maximal $\mathcal{M}$ de l'anneau des germes de fonction $\mathcal{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}^2$. Supposons de plus que X possède au moins une séparatrice passant par l'origine. Alors, si α est une série formelle intégrale première formelle de X (c'est-à-dire telle que $\tilde{X}.\alpha = 0$), il existe un germe $\mathcal{C}^\infty$, f , en $0 \in \mathbb{R}^2$ de série de Taylor égale à α , telle que f soit intégrale première de X ($X.f = 0$).

Ce théorème admet une transcription intéressante en terme de 1-forme différentielle :

COROLLAIRE : Soit ω un germe de 1-forme différentielle en $0 \in \mathbb{R}^2$, $\omega = \alpha dz_1 + \beta dz_2$, tel que $\{\alpha, \beta\} \supset \mathcal{M}^\ell$ pour un certain ℓ . Supposons de plus que le feuilletage défini par l'équation $\omega = 0$ possède au moins une feuille séparatrice en 0 . Alors l'existence d'un intégrant formel pour ω implique l'existence d'un intégrant $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque . - Un résultat analogue, pour les germes de 1-formes analytiques complexes en $0 \in \mathbb{C}^n$ a été démontré très récemment par B. Malgrange (communication orale).

Voici un autre exemple de passage du formel au $\mathcal{C}^\infty$:

THÉORÈME - Soit $\tilde{V}_k$ l'espace des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$, de coordonnées (z_1, z_2) , dont les composantes sont des polynômes homogènes de degré $k \geq 1$. Il existe un ensemble algébrique $\Sigma_k \subset \tilde{V}_k$, $\Sigma_k \neq \tilde{V}_k$, tel que si X est un germe de champ vérifiant :

- i) le $(k-1)$ -jet de X est nul et le k -jet de X appartient à $\tilde{V}_k \setminus \Sigma_k$, et :
- ii) il existe un représentant dont aucune trajectoire n'admet l'origine, à la fois comme ensemble ω -limite et α -limite, alors X est formellement déterminé au sens suivant : si Y est un germe de champ dont le jet infini en 0 est égal à celui de X , il existe un germe de difféomorphisme en 0, envoyant les trajectoires de X sur celles de Y .

Remarque. - Il est facile de voir que la condition ii) est une condition ne portant que sur le k -jet de X (voir le chapitre II).

Nous établirons dans le chapitre III, des résultats relatifs aux 2-formes fermées. Une justification pour étudier simultanément des germes de champs de vecteurs et de 2-formes fermées, est, comme on le verra plus loin, que dans les deux cas on peut ramener le problème à l'étude d'équations différentielles singulières similaires. Le principal exemple de modèle simple pour un germe de 2-formes fermées est fourni par le célèbre théorème de Darboux :

Si ω est un germe de 2-forme fermée en $0 \in \mathbb{R}^{2p}$ tel que $\omega^p(0) \neq 0$ alors ω est isomorphe à la forme :

$$dz_1 \wedge dz_2 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$$

(l'isomorphisme étant $\mathcal{C}^\infty$, analytique suivant que le germe ω est $\mathcal{C}^\infty$, analytique).

Si l'on veut comparer ce résultat avec ceux relatifs aux germes de champs, on peut dire que le théorème de Darboux est l'équivalent du théorème d'existence des solutions d'une équation différentielle (dont il est une conséquence facile comme on le verra dans le chapitre III).

Le principal résultat établi dans le chapitre III, donne une démonstration partielle d'une conjecture faite par J. Martinet dans sa thèse [10]. On peut l'énoncer

INTRODUCTION

de la façon suivante :

THEOREME - Soit M^4 une variété de dimension 4. Alors, génériquement (au sens de R. Thom), une 2-forme fermée sur M^4 , α en chaque point de $M \setminus \Sigma_{221}(\omega)$ (où $\Sigma_{221}(\omega)$, ensemble des points paraboliques définis par J. Martinet, est un ensemble de points isolés), un germe équivalent à l'un des 4 germes suivants de 2-formes fermées en $0 \in \mathbb{R}^4$ de coordonnées (x, y, z, t) :

i) $dx \wedge dy + dz \wedge dt$

ii) $x dx \wedge dy + dz \wedge dt$

iii) $dx \wedge dy + z dy \wedge dz + d(xz + ty - z^3/3) \wedge dt$

iv) $dx \wedge dy + z dy \wedge dz + d(xz - ty - z^3/3) \wedge dt$

Les 4 germes de i) à iv) sont 2 à 2 non équivalents et sont stables.

Remarque - Les germes du type de i), ii), iii) et iv) se groupent sur des sous-variétés de codimensions 0, 1, 3 et 3 respectivement. L'écriture de la forme dans i) est une conséquence du théorème de Darboux et dans ii) d'un théorème de Martinet dans [10] .

J'ignore si les germes aux points de $\Sigma_{221}(\omega)$ admettent un modèle simple et si ces germes sont stables. Une réponse positive à ces questions (ce qui semble vraisemblable) résoudrait complètement la conjecture de Martinet.

Nous allons maintenant parler de la méthode suivie pour démontrer les résultats énoncés ci-dessus.

Désignons par $V(n)$ l'espace des germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^n$ et par $\mathcal{D}(n)$ l'espace des 2-formes fermées en $0 \in \mathbb{R}^n$. On désignera par $A(n)$ l'un ou l'autre de ces espaces. Le groupe $\text{Diff}(n)$ des germes des difféomorphismes préservant $0 \in \mathbb{R}^n$ opère naturellement sur $A(n)$ par :

$$g \cdot a = g * a \text{ pour } a \in V(n)$$

$$g \cdot a = (g^{-1})^* a \text{ pour } a \in \mathcal{D}(n)$$

Dire que deux germes sont isomorphes est équivalent à dire qu'ils appartiennent à la même orbite de l'action de $\text{Diff}(n)$ sur $A(n)$.

Soient $a_0, a \in A$. Pour montrer que a_0 et a sont isomorphes la méthode la plus efficace, utilisée par J. Mather pour les fonctions, consiste à relier a_0 et a par un chemin convenable a_τ et à remplacer la recherche de g (problème non linéaire) par la recherche d'un chemin de champs de vecteurs (problème linéaire) en dérivant par rapport au paramètre τ .

J'appellerai cette méthode : méthode de chemin. Pour la décrire on introduit les notations suivantes :

- $\text{Diff}_\tau(n)$ est l'espace des chemins $\mathcal{C}^\infty$ d'éléments de $\text{Diff}(n)$. Précisément $\text{Diff}_\tau(n)$ est l'espace des germes g_τ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$, le long de $\{0\} \times [0,1]$ tels que pour $\forall \tau \in [0,1]$ le germe $x \rightarrow g_\tau(n)$ appartienne à $\text{Diff}(n)$.
- $V_\tau(n), \mathcal{D}_\tau(n), \mathcal{E}_\tau(n)$ sont les espaces de chemins $\mathcal{C}^\infty$ d'éléments de $V(n), \mathcal{D}(n)$ et $\mathcal{E}(n)$ ($\mathcal{E}(n)$ désignant l'anneau des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}^n$). On désignera globalement ces espaces par $A_\tau(n)$.

Considérons maintenant un chemin $a_\tau \in A_\tau(n)$ allant de a_0 à $a_1 = a$. Il existe toujours un tel chemin, par exemple le chemin linéaire $a_\tau = (1-\tau)a_0 + \tau a$. Pour un tel chemin a_τ on recherche un chemin $g_\tau \in \text{Diff}_\tau(n)$ tel que $g_0 = \text{Id}$ et que $g_\tau \cdot a_0 = a_\tau$ (1)

(Si g_τ existe, a_0 et a sont isomorphes par g_1).

Au lieu de chercher g_τ directement, on transforme (1) par dérivation par rapport à τ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (g_\tau \cdot a) = \frac{\partial a}{\partial \tau}$$

On va modifier l'écriture du membre de gauche. Pour cela remarquons que si $\xi \in V(n)$ et μ_u est un chemin dans $\text{Diff}(n)$ pour u voisin de 0, tel que $\mu_0 = \text{Id}$ et que $\frac{\partial \mu_u}{\partial u}|_{u=0} = \xi$, la dérivation $\frac{\partial}{\partial u} (\mu_u \cdot \alpha)|_{u=0}$ pour $\alpha \in A$ ne dépend que de ξ . Cette dérivation $\xi \xrightarrow{\Theta_\alpha} \frac{\partial}{\partial u} (\mu_u \cdot \alpha)|_{u=0}$ définit une application linéaire de $V(n)$ dans $A(n)$ qui peut s'interpréter comme l'application tangente à l'orbite $g \rightarrow g \cdot \alpha$, en identifiant $V(n)$ à l'espace tangent en l'identité de $\text{Diff}(n)$.

Revenons au chemin g_τ . Par dérivation, on associe à g_τ un chemin Y_τ dans $V_\tau(n)$:

$$Y_\tau(g_\tau(x)) = \frac{\partial g_\tau}{\partial \tau}(x) \text{ avec } Y_\tau(0) = 0.$$

INTRODUCTION

ou encore $Y_\tau(x) = \frac{\partial g_\tau}{\partial \tau} (g_\tau^{-1}(x))$.

Inversement par intégration, $Y_\tau \in V_\tau$ définit un seul chemin g_τ tel que $g_0 = \text{Id}$.

En utilisant la notation introduite plus haut, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (g_\tau \cdot a) \Big|_\tau &= \frac{\partial}{\partial s} g_{\tau+s} \cdot g_\tau^{-1} \cdot g_\tau a \Big|_{s=0} \quad (\text{L'action } g \cdot a \text{ est covariante}) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (g_{\tau+s} \circ g_\tau^{-1}) \cdot a_\tau \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

Posons $\varphi_s = g_{\tau+s} \circ g_\tau^{-1}$. On a $\frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{s=0} = Y_\tau$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (g_\tau \cdot a) \Big|_\tau = \Theta_{a_\tau} (Y_\tau)$$

D'où l'équation :

$$\Theta_{a_\tau} (Y_\tau) = \frac{\partial a_\tau}{\partial \tau} = \dot{a}_\tau \quad (2)$$

Inversement, si $Y_\tau \in V_\tau$, $Y_\tau(0) = 0$, vérifie (2), la famille $g_\tau \in \text{Diff}_\tau(n)$, $g_0 = \text{Id}$, obtenue par intégration de Y_τ vérifie la relation (1). On a donc :

LEMME - Avec les notations introduites plus haut, si $a_\tau \in A_\tau(n)$ et $g_\tau \in \text{Diff}_\tau(n)$ sont des chemins tels que $g_0 = \text{Id}$, et si Y_τ est le champ défini par $Y_\tau(g_\tau(x)) = \frac{\partial g_\tau}{\partial \tau}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $g_\tau a = a_\tau$
- (2) $\Theta_{a_\tau} (Y_\tau) = \dot{a}_\tau \quad (= \frac{\partial a_\tau}{\partial \tau})$

Ce lemme justifie la méthode du chemin : étant choisi un chemin a_τ entre a_0 et a , éléments de $A(n)$ à comparer, on résout l'équation (2) pour trouver un champ Y_τ , $Y_\tau(0) = 0$. Les deux étapes : choix de a_τ , résolution de l'équation (2) sont importantes (on verra, dans le chapitre III, que le choix de a_τ peut présenter quelques difficultés...). L'équation (2) en Y_τ , une fois une base de $\mathbb{R}^n$ choisie, se présente comme un système d'équations aux dérivées partielles (ici d'ordre 1) à n fonctions inconnues (les composantes de Y_τ) et à un nombre de lignes égal à la dimension de $A(n)$ comme $\mathcal{E}(n)$ -module.

Précisons l'opérateur Θ_{a_τ} dans le cas des champs de vecteurs et des formes :

a) Pour les champs de vecteurs.

Si $X, Y \in V(n)$ et φ_u une famille locale à paramètre u de difféomorphismes de $\text{Diff}(n)$,

tel que $\frac{\partial \varphi_u}{\partial u}|_{u=0} = Y$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi_u \star (X) = \Theta_X(Y) = -[Y, X] = [X, Y]$$

(ou $[X, Y]$ désigne le crochet de Lie des champs X et Y).

L'équation (2), pour un chemin X_τ , s'écrit :

$$[X_\tau, Y_\tau] = \dot{X}_\tau \quad (2)$$

Voyons comment la méthode du chemin s'applique pratiquement. Supposons que nous voulions démontrer que $X \in V(n)$ est de k -détermination finie. Soit $X' \in V(n)$ tel que $\tilde{X}^k = \tilde{X}'^k$.

Choisissons le chemin linéaire entre X et X' :

$$X_\tau = (1-\tau) X + \tau X' = X + \tau(X' - X)$$

On doit résoudre l'équation :

$$[X_\tau, Y_\tau] = \dot{X}_\tau = X' - X.$$

Pour ce faire, on pourra utiliser les faits suivants : $\tilde{X}_\tau^k \equiv \tilde{X}^k$,

$\dot{X}_\tau = X' - X \in \mathcal{M}^{k+1}V(n)$ ($\mathcal{M}$ désignant l'idéal maximal de $\mathcal{L}(n)$). (Voir chapitre I et II).

b) Pour les formes différentielles

Soit ω un germe de forme différentielle quelconque, $Y \in V(n)$ et φ_u comme plus haut. On a :

$\Theta_\omega(Y) = \frac{\partial}{\partial u} (\varphi_u^{-1})^* \omega = -L_Y \omega$, où $L_Y \omega$ désigne la dérivée de Lie de ω par rapport au champ Y .

L'équation (2) s'écrit donc ici :

$$L_{Y_\tau} \omega_\tau = -\dot{\omega}_\tau \quad (2)$$

Nous verrons, dans le chapitre III, que pour certain type de points singuliers de 2-formes fermées en $0 \in \mathbb{R}^{2p}$, l'équation (2) est équivalente à une équation en

$f_\tau \in \mathcal{L}_\tau(2p-1)$:

$$(3) \quad X_\tau \cdot f_\tau = h_\tau$$

où X_τ , un germe de champs en $0 \in \mathbb{R}^{2p-1}$ et le second membre h_τ dépendent de ω_τ . Le champ X_τ présente un ensemble de zéro de codimension 2.

Dans les problèmes étudiés concernant les champs ou les formes on est donc amené à résoudre des équations de la forme :

$$(I) : X_{\tau} \cdot f_{\tau} = h_{\tau}$$

ou bien $(II) : [X_{\tau}, Y_{\tau}] = Z_{\tau}.$

Dans ces équations, X_{τ} est un chemin de germes de champ de vecteurs donné, singulier en 0, h_{τ} , Z_{τ} sont donnés également, dans $\mathcal{Z}_{\tau}$ et V_{τ} respectivement et l'on cherche f_{τ} et Y_{τ} respectivement.

C'est l'analogie des équations singulières (I) et (II) qui justifie l'étude simultanée dans cet article des problèmes concernant les champs et les 2-formes fermées.

L'équation (2) se traduit donc par des équations différentielles singulières I ou II. Ici, apparaît une différence essentielle entre les problèmes concernant champs de vecteurs, formes différentielles étudiés dans cet article et les problèmes relatifs aux fonctions considérées par J. Mather. Dans ce dernier cas, l'équation (2) correspondante a le caractère d'un homomorphisme de modules (d'anneau de fonctions) et on peut utiliser pour la résoudre le théorème de préparation et toute une machinerie algébrique mise au point par Mather dans une série d'articles célèbres. Ici, cette machinerie est inopérante.

Pour en convaincre le lecteur, nous allons discuter l'équation suivante :

$$(I) \quad X.f = h \quad h \in \mathcal{M} \quad \text{et } f \text{ à chercher dans } \mathcal{Z}(n) \text{ pour le champ :}$$

$$X = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Considérons tout d'abord cette équation dans le domaine formel :

$$\text{Si } f = \sum a_{ij} z_1^i z_2^j \in \tilde{\mathcal{Z}} \text{ anneau des séries formelles}$$

$$\text{et } h = \sum b_{ij} z_1^i z_2^j \in \tilde{\mathcal{M}}, \text{ on considère l'équation :}$$

$$(\tilde{I}) : \tilde{X}.f = \tilde{h}$$

Cette équation est équivalente au système diagonal :

$$b_{ij} = (i\lambda_1 + j\lambda_2) a_{ij} \quad \text{pour } (i,j), i+j \geq 1.$$

Clairement, l'équation $(\tilde{I})$ a une solution (et une seule) si et seulement si pour

$$(i,j), i+j \geq 1 \quad i\lambda_1 + j\lambda_2 \neq 0 \text{ c'est-à-dire si et seulement}$$

$$\lambda_1/\lambda_2 \notin -\bar{\mathbb{Q}} = \{m \in \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\} \mid m \leq 0\}.$$

La solution est alors donnée par :

$$a_{ij} = b_{ij}/(i\lambda_1 + j\lambda_2) \quad (2)$$

Remarquons que si $\sum b_{ij} z_1^i z_2^j$ est une série convergente, la solution (1) n'est pas une série nécessairement convergente si $\lambda_1/\lambda_2 < 0$. Tout dépend du comportement du "petit dénominateur" $(i\lambda_1 + j\lambda_2)$ pour i et $j \rightarrow \infty$. Nous retrouvons ici des résultats du type de ceux de Poincaré, Siegel, etc... évoqués plus haut pour le problème de linéarisation :

Si $\lambda_1/\lambda_2 > 0$: on a convergence (Poincaré)

Si $\lambda_1/\lambda_2 < 0$ on a convergence si par exemple, il existe $c, \mu > 0$ tels que :

$$\text{pour } i, j \geq 1, \left| \frac{i}{j} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| \geq \frac{c}{j^\mu} \quad (\text{Siegel})$$

Revenons à l'équation (I) dans la classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut également la considérer pour $h \in \mathcal{M}^\infty$, c'est-à-dire pour un second membre plat en 0. Nous verrons, dans le chapitre I que l'équation a alors une solution $f \in \mathcal{M}^\infty$ dès que X est non dégénéré, ce qui est le cas si $\lambda_1/\lambda_2 \notin -\bar{\mathbb{Q}}$. Il en résulte finalement, que si $\lambda_1/\lambda_2 \notin -\bar{\mathbb{Q}}$ alors l'équation (I) a une solution $f \in \mathcal{C}(2)$ pour tout $h \in \mathcal{M}$.

Nous voyons maintenant ce qui distingue la résolution de l'équation différentielle (I) de la résolution des problèmes relatifs aux fonctions : la résolution de l'équation $\mathcal{C}^\infty$ ne suit pas la résolution analytique, les conditions de résolution étant différentes. De même la résolution formelle n'implique pas automatiquement la résolution $\mathcal{C}^\infty$ via un théorème de préparation, comme on le verra dans le chapitre I.

La méthode utilisée pour résoudre les équations I et II, qui sera développée en détail dans le chapitre I, est motivée par la brève discussion précédente. On traite tout d'abord le problème formel correspondant puis ensuite le problème sur les second membres plats. Plus précisément, supposons que le germe de champs X_τ admette pour ensemble de zéro le germe de $F = \mathbb{R}^p \times \{0\}$, $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} = \mathbb{R}^n$ pour $\forall \tau \in [0,1]$;

on introduit les espaces de champs tayloriens de fonctions et de champs le long de F : $\tilde{\mathcal{C}}(F)$ et $\tilde{\mathcal{V}}(F)$ ainsi que les familles à 1-paramètre d'éléments de ces espaces :

$\tilde{\mathcal{X}}_\tau(F)$ et $\tilde{\mathcal{Y}}_\tau(F)$ (voir chapitre I). Si $\tilde{X}_\tau \in \tilde{\mathcal{V}}_\tau(F)$ désigne le champ taylorien de X_τ .

Le problème formel associé à (I), (II) est l'étude de la résolution des équations :

$$(\tilde{I}) : \tilde{X}_\tau \cdot \tilde{F}_\tau = \tilde{h}_\tau$$

$$(\tilde{II}) \quad [\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \tilde{Z}_\tau \quad \text{dans } \tilde{\mathcal{C}}_\tau(F) \text{ et } \tilde{\mathcal{V}}_\tau(F) \text{ respectivement.}$$

INTRODUCTION

Soit maintenant $z = (z_1, \dots, z_{n-p})$ et $y = (y_1, \dots, y_p)$ des coordonnées des facteurs $\mathbb{R}^{n-p}$ et $\mathbb{R}^p$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_\tau(z)$ l'idéal de $\mathcal{E}_\tau(n)$ engendré par $(z_1, \dots, z_{n-p})$.

Le problème plat associé à (I) et (II) est la résolution des équations :

$$(I^\infty) \quad X_\tau \cdot f_\tau = h_\tau$$

$$(II^\infty) \quad [X_\tau, Y_\tau] = Z_\tau \quad \text{dans } \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \text{ et } \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \vee_\tau(n) \text{ respectivement.}$$

Maintenant, si l'équation (I) par exemple est résoluble pour $\forall \tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^k(z)$ et l'équation (I^∞) est résoluble, alors l'équation (I) est résoluble dans $\mathcal{M}_\tau^k(z)$. En effet, soit $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^k(z)$ et $\tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^k(z)$ son champ taylorien. Soit $\tilde{g}_\tau$ la solution de $(\tilde{I}) : \tilde{X}_\tau \cdot \tilde{g}_\tau = \tilde{h}_\tau$

Soit $W \tilde{g}_\tau \in \mathcal{E}_\tau$ un prolongement de g_τ donné par le théorème de prolongement de Whitney (voir [9]). Alors :

$$X_\tau \cdot W \tilde{g}_\tau - h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$$

Soit $g'_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$ la solution de :

$$(I^\infty) \quad X_\tau \cdot g'_\tau = X_\tau \cdot W \tilde{g}_\tau - h_\tau$$

Alors $f_\tau = W \tilde{g}_\tau - g'_\tau$ est solution de :

$$(I) \quad X_\tau f_\tau = h_\tau.$$

On peut faire la même remarque pour l'équation (II).

La justification de cette méthode consistant à résoudre séparément les équations formelles, puis les équations sur les seconds membres plats apparaîtra clairement dans le chapitre I (Cette séparation n'existe pas dans l'étude des fonctions, où la résolution $\mathcal{E}^\infty$ apparaît comme conséquence de la résolution formelle, grâce au théorème de préparation).

Nous avons déjà noté sur l'exemple de l'équation $(\lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}) \cdot f = h$ que les conditions de résolution des équations $\tilde{I}$ et I^∞ sont différentes : l'une, supposant que $\lambda_1/\lambda_2 \notin \bar{\mathbb{Q}}$ et l'autre, seulement que $\lambda_1/\lambda_2 \neq \pm \infty$ et 0. Une autre raison pour disjoindre les deux problèmes est la suivante : il n'existe pas en général d'opérateur intégral inverse de la dérivation par X :

Si $\varphi_u(m)$ est le flot de X , il est naturel de résoudre $X \cdot f = h$ par la formule :

$$f(m) = \int_{u(m)}^0 h(\varphi_u(m)) du \quad \text{où } u(m) \text{ est l'instant de rencontre de la}$$

trajectoire $u \rightarrow \varphi_u(m)$ avec l'une des bissectrices $\{z_1 \pm z_2 = 0\}$.

Or cette formule d'intégration n'est valide que pour $h \in \mathcal{M}^\infty$; en effet, elle correspond à une solution f s'annulant sur les bissectrices, alors qu'une solution f correspondant à un deuxième membre h non plat en 0 est en général non plat également en 0.

Le texte de l'article est découpé de trois chapitres. Le premier est consacré à l'étude générale des équations singulières du type (I) ou (II). On en déduit comme application une démonstration du théorème de linéarisation de Sternberg et d'autres résultats annexes ; en particulier on discute l'existence de difféomorphismes de linéarisation dépendant continuellement de la perturbation. Dans le second chapitre, on établit des résultats complémentaires pour les germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$ et dans le troisième chapitre les résultats concernant les 2-formes fermées.

Dans chaque chapitre, les énoncés des théorèmes finaux et leur démonstration sont contenues dans le dernier paragraphe. (Théorème 20,21,22,27 du chapitre I, théorèmes 29,30,33,36,40,41 du chapitre II, théorèmes 22,23,25 du chapitre III). Quelques uns d'entre eux ont été énoncé, ci-dessus, sous une forme parfois un peu différente.

Je tiens à remercier le personnel du secrétariat du département de Mathématique de Dijon pour sa collaboration à la préparation de cet article, et en particulier Mme Caumette qui a assuré la frappe du manuscrit avec un maximum de rigueur, dans un minimum de temps.

CHAPITRE I

ÉQUATIONS SINGULIÈRES ASSOCIÉES A UN CHAMP DE VECTEURS.

Soit X_τ une famille à 1-paramètre de germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^n$. Dans ce chapitre nous nous intéressons aux équations :

$$(I) \quad X_\tau \cdot f_\tau = h_\tau \quad \text{et} \quad (II) \quad [X_\tau, Y_\tau] = Z_\tau$$

associées à X_τ , lorsque cette famille présente une singularité en 0.

Nous avons dit dans l'introduction que l'équation (II) est liée à la recherche de modèle pour les champs. Nous verrons que l'équation (I) est liée à la recherche d'intégrales premières pour les champs de vecteurs et à l'étude de 2-formes fermées.

Dans tout ce qui suit, le champ X_τ admet comme ensemble de zéros, le germe $F \times [0,1] \subset \mathbb{R}^n \times [0,1]$ où $F = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} = \mathbb{R}^n$ et est non dégénéré transversalement à son ensemble singulier.

Comme nous l'avons dit plus haut, le problème posé par les équations (I) et (II) se décompose en un problème formel et un problème plat (c'est à dire pour des seconds membres plats le long de $F \times [0,1]$).

Le chemin X_τ se présente sous la forme : $X_\tau = X + P_\tau$ où X est le champ proposé à l'étude et P_τ une perturbation. Dans le problème formel une question naturelle traitée dans le premier paragraphe, est de rattacher la résolution des équations relatives à X_τ à celles relatives à X .

Si l'on considère les équations relatives à X , le cas le plus simple est celui où ce champ a une partie linéaire vérifiant les conditions (P_1) ou (P_2) définies plus loin.

Ces conditions expriment que la partie linéaire X_1 de X définit des opérateurs $f \rightarrow X_1.f$ et $Y \rightarrow [X_1, Y]$, formellement inversibles.

Nous traiterons également d'exemples de champs où les conditions (P_1) ou (P_2) ne sont pas remplies (De tels champs interviennent naturellement dans l'étude de 2-formes fermées).

Le deuxième paragraphe est consacré au problème plat. Il existe une grande différence entre deux situations possibles étudiées : champ hyperbolique ou elliptique transversalement au lieu des zéros. Dans le cas hyperbolique, nous verrons que les équations ont toujours des solutions. Dans le cas elliptique, l'existence de solutions dépend des termes d'ordre supérieur dans le jet du champ. Nous ne traiterons qu'un exemple de telle équation, intervenant naturellement dans l'étude des 2-formes fermées.

Dans le troisième paragraphe, nous tirons les premières conséquences de l'étude des équations (I) et (II), en démontrant par exemple le théorème de linéarisation de S. Sternberg. D'autres conséquences seront tirées au chapitre II pour les champs et au chapitre III pour les 2 formes fermées.

1. LE PROBLÈME FORMEL

1.1. Notations.

Nous désignons par :

$\mathcal{G}(n)$: l'anneau des germes de fonctions $\mathcal{G}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}^n$

$V(n)$: l'espace des germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{G}_\tau(n)$ et $V_\tau(n)$ les familles à 1-paramètre $\tau \in [0, 1]$ de germes de fonctions et de champs ($\mathcal{G}_\tau(n)$ est l'anneau des germes de fonctions de $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ le long de $\{0\} \times [0, 1]$ et $V_\tau(n) = \mathcal{G}_\tau(n) \otimes_{\mathcal{G}(n)} V(n)$)

Soit $F = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} = \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_p)$,

$z = (z_1, \dots, z_{n-p})$ des coordonnées sur $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ respectivement.

On considère naturellement $\mathcal{G}(n) \subset \mathcal{G}_\tau(n)$ et $V(n) \subset V_\tau(n)$ comme étant les familles constantes.

Si $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{G}(n)$ ou $\mathcal{G}_\tau(n)$ respectivement, on pose :
 $\mathcal{M}(f_1, \dots, f_k)$ ou $\mathcal{M}_\tau(f_1, \dots, f_k)$ l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_k$ dans $\mathcal{G}(n)$ ou $\mathcal{G}_\tau(n)$ respectivement. On notera $\mathcal{M}(z)$, $\mathcal{M}_\tau(z)$ l'idéal engendré par $z_1, \dots, z_{n-p}$, $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{M}(z)$, $\mathcal{M}_\tau(z)$ l'idéal engendré par $z_1, \dots, z_{n-p}$.

On définit maintenant les espaces de champs tayloriens le long de F en posant

$$\tilde{\mathcal{G}}^k(F) = \mathcal{G}(n) / \mathcal{M}^{k+1}(z) \quad \text{et} \quad \tilde{V}^k(F) = V(n) / \mathcal{M}^{k+1}(z) \quad V(n)$$

et les chemins de champs tayloriens en posant :

$$\tilde{\mathcal{G}}_\tau^k(F) = \mathcal{G}_\tau(n) / \mathcal{M}_\tau^{k+1}(z) \quad \text{et} \quad \tilde{V}_\tau^k(F) = V_\tau(n) / \mathcal{M}_\tau^{k+1}(z) \quad V_\tau(n)$$

On notera $\tilde{\mathcal{G}}^\infty(F)$, $\tilde{\mathcal{G}}_\tau^\infty(F)$, $\tilde{V}^\infty(F)$ et $\tilde{V}_\tau^\infty(F)$ par $\tilde{\mathcal{G}}(F)$, $\tilde{\mathcal{G}}_\tau(F)$, $\tilde{V}(F)$ et $\tilde{V}_\tau(F)$ respectivement.

Soit maintenant un champ $X_\tau = X + P_\tau$ ou $X \in \mathcal{M}(z) \quad V(n)$ et $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau(z) \quad V_\tau(n)$. Comme $X \cdot \mathcal{M}(z) \subset \mathcal{M}(z)$ et $X_\tau \cdot \mathcal{M}_\tau(z) \subset \mathcal{M}_\tau(z)$, le champ X opère naturellement par dérivation sur $\tilde{\mathcal{G}}^k(F)$ et par crochet de Lie sur $\tilde{V}^k(F)$.

De même X_τ opère sur $\tilde{\mathcal{G}}_\tau^k(F)$ et $\tilde{V}_\tau^k(F)$. Ces opérations ne dépendent que des champs tayloriens d'ordre k : $\tilde{X}^k$, $\tilde{X}_\tau^k$ associés à X et X_τ respectivement.

Le problème formel associé au champ X_τ est la résolution des équations :

$$(I) : \tilde{X}_\tau \cdot \tilde{f}_\tau = \tilde{h}_\tau$$

$$(II) : [\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \tilde{Z}_\tau$$

où $\tilde{X}_\tau \in \tilde{V}_\tau(F)$ désigne le champ taylorien de X_τ le long de $F \times [0, 1]$, $\tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau(z) \quad \tilde{\mathcal{G}}_\tau(F)$, $\tilde{Z}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau(z)$. $\tilde{V}_\tau(F)$ sont des seconds membres donnés

et $\tilde{f}_\tau \in \tilde{\mathcal{G}}_\tau(F)$, $\tilde{Y}_\tau \in \tilde{V}_\tau(F)$ sont inconnus.

1.2. Passage du champ X au champ X_τ .

Soit $X_\tau = X + P_\tau$ comme plus haut. Nous voulons relier les propriétés de X_τ à celles de X , moyennant certaines hypothèses.

Supposons par exemple que l'on veuille démontrer que X est de k -détermination finie. L'espace tangent à l'orbite de X sous l'action du groupe $\text{Diff}(n)$ des germes de difféomorphismes en $0 \in \mathbb{R}^n$ préservant 0 est le sous-espace $[X, \mathcal{M}(n) V(n)]$ de $V(n)$. La condition :

$$[X, \mathcal{M}(n) V(n)] \supset \mathcal{M}^{k+1}(n) V(n) \quad (1)$$

représente la condition de k -détermination finie infinitésimale. Si l'on pose $X_\tau = X + \tau(X_k - X)$ où X_k est le champ représentatif du jet $j^k X(0) = \tilde{X}^k$, l'équivalence de X et X_k est impliquée par :

$$[X_\tau, \mathcal{M}_\tau(n) V_\tau(n)] \supset \mathcal{M}_\tau^{k+1}(n) V_\tau(n) \quad (2)$$

Malheureusement ici, il n'est pas clair que l'on puisse déduire (2) de (1), même dans le cadre purement formel : c'est à dire déduire

$$(\tilde{2}) : [\tilde{X}_\tau, \tilde{\mathcal{M}}_\tau(n) \tilde{V}_\tau(n)] \supset \tilde{\mathcal{M}}_\tau^{k+1}(n) \tilde{V}_\tau(n) \text{ de}$$

$$(\tilde{1}) \quad [\tilde{X}, \tilde{\mathcal{M}}(n) \tilde{V}(n)] \supset \tilde{\mathcal{M}}^{k+1}(n) \tilde{V}(n).$$

Et de plus, il n'est pas clair non plus que l'on puisse ramener (1) et même ($\tilde{1}$) à une condition portant sur des jets d'ordre fini.

Pour obtenir un résultat, on va remplacer la condition ($\tilde{1}$) par une condition plus restrictive : on va supposer que l'inclusion de ($\tilde{1}$) est donnée au moyen d'un opérateur formel.

Remarquons tout d'abord que tout élément $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{G}}(F)$ se représente par un germe de série :

$$\tilde{f} = \text{germe en } 0 \sum_{i \in \mathcal{G}_{n-p}} a_i(y) z^i \quad \text{avec } a_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p),$$

espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^p$; $\mathcal{G}_{n-p}$ désigne l'ensemble des $(n-p)$ -

multi-indices $i = (i_1, \dots, i_{n-p})$; z^i est mis pour $z^i = z_1^{i_1} \dots z_{n-p}^{i_{n-p}}$

De même :

$\tilde{f}_\tau \in \tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$ est représentée par une série :

$$\tilde{f}_\tau = \text{germe le long de } \sum_{i \in \mathcal{G}_{n-p}} a_i(y, \tau) z^i \text{ avec } a_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p \times [0, 1])$$

et $\tilde{Y} \in \tilde{V}(n)$, $\tilde{Y} = \text{germe en } 0 \sum_{(i,j) \in \mathcal{G}_{n-p} \times [1, \dots, n]} a_{i,j}(y) z^i \frac{\partial}{\partial x_j}$
où $a_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p)$ et $(x_1, \dots, x_n)$ est mis pour $(y_1, \dots, y_p, z_1 \dots z_{n-p})$;

$$\tilde{Y}_\tau \in \tilde{V}_\tau(n), \quad \tilde{Y}_\tau = \text{germe le long de } \sum_{(i,j)} a_{i,j}(y, \tau) z^i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\text{où } a_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p \times [0, 1])$$

$\tilde{H}$ est un sous espace de $\tilde{\mathcal{E}}(F)$ ou de $\tilde{V}(F)$ déterminé par la donnée d'un sous ensemble J de $\mathcal{G}_{n-p}$ ou de $\mathcal{G}_{n-p} \times [1, \dots, n]$ de la façon suivante :

$$\tilde{H} = \text{germe en } 0 \sum_{i \in J} a_i(y) z^i \quad \text{ou bien :}$$

$$\tilde{H} = \text{germe en } 0 \sum_{(i,j) \in J} a_{i,j}(y) z^i \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

On désigne par $\tilde{H}_\tau$ le sous espace de $\tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$ ou de $\tilde{V}_\tau(F)$:

$$\tilde{H}_\tau = \text{germe } \sum_{i \in J} a_i(y, \tau) z^i \quad \text{ou bien :}$$

$$\tilde{H}_\tau = \text{germe } \sum_{(i,j) \in J} a_{i,j}(y, \tau) z^i \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Alors :

DÉFINITION 1. - Opérateur formel σ de degré $s \in \mathbb{Z}$ de $\tilde{\mathcal{M}}^{k_0}(z) \cap \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$ (où $\tilde{H} \subset \tilde{\mathcal{E}}(F)$ est un sous-espace défini comme ci-dessus, à l'aide de $J \subset \mathcal{G}_{n-p}$) :

C'est une application $\mathbb{R}$ -linéaire $\sigma : \tilde{\mathcal{M}}^{k_0} \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$, définie par l'intermédiaire d'opérateurs linéaires continus $\lambda_{j,i} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p)$ $(i,j) \in J \times J$ (où $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p)$ est munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts), de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } \sigma(\text{germe en } 0 \sum_{|i| \geq k_0} a_i(y) z^i) &= \text{germe en } 0 \sum_j b_j(y) z^j \\ \text{alors } b_j &= \sum_{|k| \leq |i| \leq |j| + s} \lambda_{ji}(a_i) \quad \text{où } |i| = i_1 + \dots + i_{n-p} \end{aligned}$$

Pour la bonne définition de σ , on doit supposer que les opérateurs $\lambda_{j,i}$ se localisent en $0 \in \mathbb{R}^p$, c'est à dire que pour toute boule B centrée en $0 \in \mathbb{R}^p$, il existe une boule B' , centrée en 0 , telle que $\lambda_{j,i}$ induise un opérateur de $\mathcal{C}^\infty(B')$ dans $\mathcal{C}^\infty(B)$. (Par exemple : les opérateurs de dérivations, l'opérateur $f \rightarrow \int_0^{y_1} f(n, y_2, \dots, y_p) dy_1$, etc...)

De la même façon, on peut définir des opérateurs σ de $\tilde{\mathcal{M}}^k_0(z) \tilde{V}(F) \cap \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$ pour $\tilde{H} \subset \tilde{V}(F)$ ainsi que σ_τ de : $\tilde{\mathcal{M}}^k_\tau(z) \cap \tilde{H}_\tau \rightarrow \tilde{H}_\tau$ et de $\tilde{\mathcal{M}}^k_\tau(z) \tilde{V}_\tau(F) \cap \tilde{H}_\tau \rightarrow \tilde{H}_\tau$ pour $\tilde{H}_\tau \subset \tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$ ou $\tilde{V}_\tau(F)$ respectivement.

Dans ces derniers cas, l'opérateur σ_τ est défini à l'aide d'opérateurs continus $\lambda_{j,i} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p \times [0,1]) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p \times [0,1])$ se localisant le long de $\{0\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^p \times [0,1]$.

Exemples. - a) Si $X \in \mathcal{M}^{k_1}_0(z) \{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-p}} \}$ est homogène de degré k_1 , alors la dérivation par $\tilde{X}$ est de degré $-k_1 + 1$ (si $k_1 \geq 1$).

b) Si $X \in \mathcal{M}^{k_1}_0(z) \{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \}$ est homogène de degré k_1 , la dérivation par $\tilde{X}$ est de degré $-k_1$.

c) Si $X \in \mathcal{M}^{k_1}_0(z) V(n)$ est homogène de degré k_1 , le crochet par $\tilde{X}$ est un opérateur de degré $-k_1 + 1$.

La proposition suivante montre que l'on peut comparer l'action de $\tilde{X}$ et celle de $\tilde{X}_\tau$, sous certaines conditions. Par soucis de généralité nous remplaçons ci-dessous ce champ $\tilde{X}$ par un champ $\tilde{T}_\tau$ pouvant dépendre de τ . Mais les principales applications seront pour $\tilde{T}_\tau \equiv \tilde{X}$, champ indépendant de τ :

PROPOSITION 2. - Soit $\tilde{T}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau(z) \tilde{V}(F)$ une famille de germes de champ taylorien de champ de vecteurs, s'annulant sur $F \times [0,1]$,

$F = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ et $\tilde{H}$ un sous-espace de $\tilde{\mathcal{E}}(F)$ ou $\tilde{V}(F)$ défini comme plus haut.

Supposons que l'opérateur $\tilde{f}_\tau \rightarrow \tilde{T}_\tau \cdot \tilde{f}_\tau$ ou bien $\tilde{Y}_\tau \rightarrow [\tilde{T}_\tau, \tilde{Y}_\tau]$ de $\tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$ ou de $\tilde{V}_\tau(F)$ dans $\tilde{V}_\tau(F)$ admette un inverse à droite σ_τ défini de $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^{k_0} \cap \tilde{H}_\tau$ (ou bien de $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^{k_0} \tilde{V}_\tau(F) \cap \tilde{H}_\tau$) dans $\tilde{H}_\tau$, de degré k_1 ($k_0 \geq 1, k_1 \geq 0$).

Alors :

i/ Si $\tilde{H} \subset \tilde{V}(F)$, $\lambda \geq \text{Sup}(k_1 + 2, k_0)$ et $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^\lambda(z) \tilde{V}_\tau(F)$ est tel que $[\tilde{P}_\tau, \tilde{H}_\tau] \subset \tilde{H}_\tau$, l'opérateur $\tilde{Y}_\tau \rightarrow [\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau]$, pour $\tilde{X}_\tau = \tilde{T}_\tau + \tilde{P}_\tau$, admet un inverse à droite σ'_τ de : $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^{k_0}(z) \tilde{V}_\tau(F) \cap \tilde{H}_\tau \rightarrow \tilde{H}_\tau$, de degré k_1

ii/ Si $\tilde{H} \subset \tilde{\mathcal{E}}(F)$, $\lambda \geq \text{Sup}(k_1 + 2, k_0)$, $\mu \geq \text{Sup}(k_1 + 1, k_0 - 1)$ et $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^\lambda(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-p}} \right\} + \tilde{\mathcal{M}}_\tau^\mu(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \right\}$ est tel que $[\tilde{P}_\tau, \tilde{H}_\tau] \subset \tilde{H}_\tau$, l'opérateur $\tilde{f}_\tau \rightarrow \tilde{X}_\tau \cdot \tilde{f}_\tau$ pour $\tilde{X}_\tau = \tilde{T}_\tau + \tilde{P}_\tau$ admet un inverse à droite σ'_τ de $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^{k_0}(z) \cap \tilde{H}_\tau \rightarrow \tilde{H}_\tau$, de degré k_1 .

Démonstration. - Considérons l'opérateur de dérivation (ii) seulement. La démonstration du résultat pour le crochet est analogue.

Soit $\tilde{f}_\tau \in \tilde{H}_\tau$. On va représenter $\tilde{f}_\tau$ par la suite des fonctions coefficients d'un représentant de $\tilde{f}_\tau$.

Plus exactement :

$$\tilde{f}_\tau = (a_0, \dots, a_k, \dots) \quad \text{où } a_k \text{ est la suite finie des fonc-}$$

$$\text{tions } a_k = (a_{i_1 \dots i_{n-p}}) \begin{cases} i_1 + \dots + i_{n-p} = k \\ (i_1 \dots i_{n-p}) \in J \end{cases}$$

$\tilde{T}_\tau$ s'annulant sur F est un opérateur de degré ≤ 0 . On désignera par $\tilde{T}_k(a_0, \dots, a_k)$ le terme d'ordre k de $\tilde{T}_\tau \cdot \tilde{f}_\tau$ (Comme la dérivation par $\tilde{T}_\tau$ est un opérateur de degré ≤ 0 , $\tilde{T}_k$ ne dépend que de $a_0, \dots, a_k$).

L'équation $\tilde{T}_\tau \cdot \tilde{f}_\tau = \tilde{h}_\tau$ avec :

$$\tilde{f}_\tau = (a_0, \dots, a_k, \dots) \quad \text{et} \quad \tilde{h}_\tau = (b_1, \dots, b_n, \dots)$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} b_1 &= \tilde{T}_1(a_0, a_1) & \text{avec } b_0 = \dots = b_{k_0-1} = 0 \\ &\vdots \\ b_k &= \tilde{T}_k(a_0, \dots, a_k) & \text{puisque } \tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^{k_0}(z) \cap \tilde{H}_\tau \\ &\vdots \end{aligned}$$

Soit σ_τ l'inverse à droite de la dérivation. Dire que σ_τ est de degré k_1 signifie que $\sigma_\tau \tilde{h}_\tau$ s'écrit :

$$\sigma_\tau \tilde{h}_\tau = (\sigma_0(b_0, b_1, \dots, b_{k_1}), \dots, \sigma_k(b_0, \dots, b_{k_1+k}), \dots)$$

$$\text{Soit maintenant } \tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^\lambda(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-p}} \right\} + \tilde{\mathcal{M}}_\tau^\mu(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \right\}$$

Les conditions $\lambda \geq k_1+2$ et $\mu \geq k_1+1$ impliquent, en posant $\bar{\lambda} = \inf(\lambda, \mu+1)$, que $\tilde{P}_\tau \cdot \tilde{h}_\tau$ s'écrit :

$$\tilde{P}_\tau \tilde{h}_\tau = (\tilde{P}_{\bar{\lambda}}(a_0, a_1), \dots, \tilde{P}_{\bar{\lambda}+k}(a_0, \dots, a_{k+1}), \dots)$$

Ecrivons le système associé au champ $\tilde{T}_\tau + \tilde{P}_\tau$:

$$\begin{aligned} b_1 &= \tilde{T}_1(a_0, a_1) \\ &\vdots \\ b_{\bar{\lambda}} &= \tilde{T}_{\bar{\lambda}}(a_0, \dots, a_{\bar{\lambda}+1}) + \tilde{P}_{\bar{\lambda}}(a_0, a_1) \\ b_{\bar{\lambda}+1} &= \tilde{T}_{\bar{\lambda}+1}(a_0, \dots, a_{\bar{\lambda}+2}) + \tilde{P}_{\bar{\lambda}}(a_0, a_1, a_2) \text{ etc...} \end{aligned}$$

avec $\tilde{h}_\tau \in (b_1, \dots, b_k, \dots) \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^{k_0}(z) \cap \tilde{H}_\tau$.

Comme $\bar{\lambda} \geq k_1+2$, les $(\bar{\lambda}-1)$ premières lignes du système associé à $\tilde{X}_\tau$ sont les mêmes que celles du système associé à $\tilde{T}_\tau$. Elles permettent de calculer $a_0, a_1, \dots, a_{\bar{\lambda}-k_1-1}$ par :

$$a_0 = \sigma_0(b_0, \dots, b_{k_1}), \dots, a_{\bar{\lambda}-k_1-1} = \sigma_{\bar{\lambda}-k_1-1}(b_0, \dots, b_{\bar{\lambda}-1})$$

D'autre part, remarquons que les fonctions coefficients $a_0, \dots, a_{\bar{\lambda}-k_1-1}$ ainsi calculées correspondent à des éléments de $\tilde{H}_\tau$.

On va maintenant calculer $a_{\bar{\lambda}-k_1}$ grâce à la $\bar{\lambda}$ ième ligne modulo les a_0 et a_1 déjà calculées (en effet $1 \geq \bar{\lambda}-k_1-1$) :

$$\bar{a}_{\bar{\lambda}-k_1} = \sigma_{\bar{\lambda}-k_1}(b_0, \dots, b_{\bar{\lambda}-1}, b_{\bar{\lambda}} - \tilde{P}_{\bar{\lambda}}(a_0, a_1))$$

La formule de définition de $\sigma'_{\tau, \bar{\lambda}-k}$ est donc :

$$\sigma'_{\tau, \bar{\lambda}-k_1}(b_0, \dots, b_{\bar{\lambda}}) = \sigma_{\bar{\lambda}-k_1}(b_0, \dots, b_{\bar{\lambda}-1}, b_{\bar{\lambda}} - P_{\bar{\lambda}}(\sigma_0(b_0, \dots, b_{k_1}), \sigma_1(-)))$$

Les autres a_k se calculent de la même façon, modulo les a_i déjà calculés.

Remarquons que le calcul est légitime car les coefficients $b_1, \dots, b_k$ définissent des éléments de $\tilde{\mathcal{M}}_{\tau}^{k_0}(z) \cap \tilde{H}_{\tau}$ ainsi que les termes $P_{\bar{\lambda}}(a_0, a_1)$, etc... (Ici on utilise l'hypothèse $\bar{\lambda} \geq k_0$). Il est d'autre part clair que le résultat $\tilde{f}_{\tau}$ appartient à $\tilde{H}_{\tau}$.

1.3. Champs vérifiant les conditions (P)

Dans ce qui précède nous avons vu que l'existence d'un inverse σ_{τ} pour l'action du champ $\tilde{X}_{\tau}$ était garantie à condition que l'action du champ $\tilde{X}$ ait elle-même un inverse et que la perturbation P_{τ} soit suffisamment plate le long de la singularité de X .

Nous allons considérer ici le cas le plus simple : celui où X est un champ linéaire et donner alors une condition nécessaire et suffisante pour que les opérateurs définis par la dérivation et le crochet soient inversibles.

Considérons tout d'abord le champ diagonal :

$$X = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \lambda_{n-p} z_{n-p} \frac{\partial}{\partial z_{n-p}} \quad \text{avec } \lambda_2, \dots, \lambda_{n-p} \in \mathbb{R}$$

dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Le champ X est nul sur $F = \mathbb{R}^p \times \{0\}$.

L'action de $\tilde{X}$ sur le monôme $a_i(y, \tau) z^i$ est donnée par :

$$\tilde{X} \cdot (a_i(y, \tau) z^i) = \left(\sum_{k=1}^{n-p} i_k \lambda_k \right) a_i z^i \quad \text{avec } i = (i_1, \dots, i_{n-p})$$

Donc l'équation $\tilde{X} \cdot f_{\tau} = h_{\tau}$ avec $\tilde{f}_{\tau} = \sum_{i \in \mathcal{G}_{n-p}} a_i(y, \tau) z^i$ et $h_{\tau} = \sum_j b_j(y, \tau) z^j$ est équivalente au système :

$$b_{j_1 \dots j_{n-p}} = \left(\sum_{k=1}^{n-p} j_k \lambda_k \right) a_{j_1 \dots j_{n-p}} \quad \text{pour } \forall (j_1 \dots j_{n-p}) \in \mathcal{G}_{n-p}$$

$$\text{Si } Y_\tau = \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_{i,j} z^i \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^p \beta_{i,j} z^i \frac{\partial}{\partial y_j} \quad \text{et } i \in \mathcal{G}_{n-p}$$

$$Z_\tau = \sum_{j=1}^{n-p} \bar{\alpha}_{i,j} z^i \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^p \bar{\beta}_{i,j} z^i \frac{\partial}{\partial y_j} \quad \text{et } i \in \mathcal{G}_{n-p}$$

Le crochet $[\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \tilde{Z}_\tau$ est équivalent au système :

$$\bar{\alpha}_{i,j} = \left[\sum_{k=1}^{n-p} (i_k \lambda_k) - \lambda_j \right] \alpha_{i,j} \quad \text{avec } i = (i_1, \dots, i_{n-p})$$

$$\bar{\beta}_{i,j} = \left[\sum_{k=1}^{n-p} i_k \lambda_k \right] \beta_{i,j}$$

Nous voyons que les équations (I) et (II) sont équivalentes à des systèmes diagonaux. L'équation (I) est résoluble sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau(z)$ si et seulement si pour $\forall (i_1, \dots, i_{n-p}) \in \mathcal{G}_{n-p} - \{(0, \dots, 0)\}$ on a $\sum_k i_k \lambda_k \neq 0$. L'inverse σ de $\tilde{\mathcal{M}}_\tau(z)$ dans $\tilde{\mathcal{M}}_\tau(z)$ est de degré 0.

De même l'équation (II) est résoluble si et seulement si pour $\forall j \in [1, \dots, n-p]$ et $\forall (i_1, \dots, i_{n-p}) \in \mathcal{G}_{n-p}$ tel que $|i| = i_1 + \dots + i_{n-p} \geq 2$ on a $\lambda_j - \sum_{k=1}^{n-p} i_k \lambda_k \neq 0$ et si pour tout $i = (i_1, \dots, i_{n-p})$, $|i| \geq 1$ on a $\sum_k i_k \lambda_k \neq 0$. L'inverse du crochet, de degré 0, est alors défini sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^k(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-p}} \right\} + \tilde{\mathcal{M}}_\tau(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \right\}$.

Les conditions peuvent être écrites pour un chemin de germes de champ quelconque s'annulant sur $F \times [0, 1]$. Soit X_τ un tel germe représenté par un champ sur un certain voisinage $W \times [0, 1]$, W voisinage de 0, s'annulant sur $F \times [0, 1]$. En chaque point $(W \cap F) \times [0, 1]$ sont définies les valeurs propres $\lambda_1(y, \tau), \dots, \lambda_{n-p}(y, \tau)$ de la partie linéaire du représentant, transversalement à F (Les autres valeurs propres sont toujours nulles).

DÉFINITION 3. - Soit $X_\tau \in V_\tau(n)$ un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^n$, s'annulant sur $F \times [0, 1]$, $F = \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Soient $\lambda_1(y, \tau), \dots, \lambda_{n-p}(y, \tau)$ les valeurs propres de la partie linéaire d'un représentant de X_τ , dans un voisinage de 0.

i/ On dira que X_τ vérifie les conditions (P_1) si X possède un représentant pour lequel : pour tout $(i_1, \dots, i_{n-p}) \in \mathfrak{S}_{n-p}$ tel que $|i| = i_1 + \dots + i_{n-p} \geq 1$ on ait $\sum_k i_k \lambda_k(y, \tau) \neq 0$ pour $\forall (y, \tau) \in (F \cap W) \times [0, 1]$ où $W \times [0, 1]$ est le voisinage de définition d'un représentant de X_τ .

ii/ On dira que X_τ vérifie les conditions (P_2) si X_τ possède un représentant pour lequel, pour tout $(i_1, \dots, i_{n-p}) \in \mathfrak{S}_{n-p}$ tel que $|i| \geq 2$ et tout $j \in [1, 2, \dots, n-p]$ on ait $\lambda_j(y, \tau) - \sum_k i_k \lambda_k(y, \tau) \neq 0$ pour $(y, \tau) \in (F \cap W) \times [0, 1]$.

Remarques.

- 1) Les conditions (P_2) impliquent les conditions (P_1)
- 2) Les conditions (P_1) impliquent que toutes les valeurs propres sont différentes de zéro. Le champ X est normalement non dégénéré, le long de sa singularité F .

Soit T_τ un champ linéaire, non nécessairement diagonalisé, ayant sur un voisinage $W \times [0, 1]$, un représentant de la forme :

$$T_\tau = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}(y, \tau) z_j \frac{\partial}{\partial z_i} \quad \text{avec } (y, \tau) \in (W \cap F) \times [0, 1].$$

Désignons par $\tilde{\xi}(z)_k$ les polynômes de degré $\leq k$ en $z = \{z_1, \dots, z_{n-p}\}$ et par $\tilde{V}(z)_k$ les champs formels à coefficients dans $\tilde{\xi}(z)_k$:
 $\tilde{V}(z)_k = \tilde{\xi}(z)_k \left\{ \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\}$. La dérivation par T_τ induit, pour $\forall (y, \tau) \in W \cap F \times [0, 1]$, une application linéaire $\rho_{X,k}(y, \tau)$ de $\tilde{\xi}(z)_k$ dans $\tilde{\xi}(z)_k$. De même, le crochet par X envoie, pour tout $(y, \tau) V(z)_k$ dans $\tilde{V}(z)_{k+1}$. On définit une application linéaire $\rho_{X,k}(y, \tau)$ en faisant suivre le crochet de la projection naturelle de $\tilde{V}(z)_{k+1}$ sur $\tilde{V}(z)_k$. Alors :

LEMME 4. - Les valeurs propres de l'application $\rho_{X,k}(y, \tau)$ de $\tilde{\xi}(z)_k$ dans $\tilde{\xi}(z)_k$, associée à la dérivation par T_τ sont égales à $\sum_{j=1}^n i_j \lambda_j(y, \tau)$ pour $\forall i = (i_1, \dots, i_{n-p})$, $|i| \leq k$. Les valeurs propres de l'application $\rho_{X,k}(y, \tau)$ de $\tilde{V}(z)_k$ dans $\tilde{V}(z)_k$, associée au crochet par

T_τ , sont égales à $\lambda_j(y, \tau) - \sum_{i=1}^{n-p} i_\ell \lambda_\ell(y, \tau)$ et à $\sum_\lambda i_\lambda \lambda_\lambda(y, \tau)$ pour
 $\forall i = (i_1, \dots, i_{n-p})$, $|i| \leq k$ et $\forall j = 1, \dots, n-p$ si $\dim F > 0$. (Si
 $\dim F = 0$, les valeurs propres sont uniquement égales à
 $\lambda_j(y, \tau) - \sum_{i=1}^{n-p} i_\ell \lambda_\ell(y, \tau)$; $(y, \tau) \in W \cap F \times [0, 1]$, où $W \times [0, 1]$ est le
domaine d'un représentant de T_τ).

Démonstration. - Le résultat est vrai dans le cas d'un champ diagonal réel comme on l'a vu plus haut. On peut l'étendre facilement au cas diagonal complexe donc lorsque les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes et distinctes de 0. Il demeure vrai par continuité lorsque des valeurs propres s'annulent ou deviennent multiples.

Il en résulte que si le champ T_τ vérifie les conditions (P_1) (respectivement (P_2)) la dérivation, (respectivement le crochet) admet un inverse de degré 0. En appliquant la proposition 2 on trouve donc :

PROPOSITION 5. - Soit $T_\tau = \sum \alpha_{i,j}(y, \tau) z_j \frac{\partial}{\partial z_i}$ un champ linéaire en z vérifiant les conditions (P_1) (respectivement les conditions (P_2)).
Alors si $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^2(z) \{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-p}} \} + \tilde{\mathcal{M}}_\tau(z) \{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \}$, la dérivation par le champ $\tilde{X}_\tau = \tilde{T}_\tau + \tilde{P}_\tau$ admet un inverse σ_τ sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau$, de degré 0. Si $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^2(z) \tilde{V}_\tau(F)$, le crochet par $\tilde{X}_\tau$ admet un inverse σ_τ sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^2(z) \tilde{V}_\tau(F)$ de degré 0.

On tirera, à la fin de ce chapitre, les conséquences pratiques de ce résultat, en ce qui concerne par exemple les propriétés de linéarisation des champs.

1.4. Champs ne vérifiant pas les conditions (P).

Nous allons maintenant nous intéresser à des champs pour lesquels les conditions (P) ne sont pas vérifiées .

Supposons tout d'abord que les conditions (P_1) ou (P_2) soient vé-

rifiées à partir de $|i| \geq k$ pour le champ linéaire $X = \sum_{i,j} a_{i,j}(y) z_j \frac{\partial}{\partial z_i}$. Alors, d'après le lemme 4, l'opérateur de dérivation par X ou de crochet est inversible sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^k(z)$ et $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^k(z) \tilde{V}_\tau$ respectivement. Un cas particulier important de cette situation est celui où X est une contraction ou une dilatation hyperbolique, c'est à dire celui où toutes les valeurs propres ont une partie réelle de même signe. Alors les conditions (P_1) sont toujours vérifiées et les conditions (P_2) le sont pour $|i| \geq k$ k assez grand :

PROPOSITION 6. - Soit $X = \sum_{i,j} a_{i,j}(y) z_j \frac{\partial}{\partial z_i}$ un champ linéaire tel que les valeurs propres $\lambda_1(0), \dots, \lambda_{n-p}(0)$ aient toutes une partie réelle différente de 0 et de même signe. Alors si k est le plus petit entier strictement supérieur à $\sup_i |\operatorname{Re} \lambda_i(0)| / \inf_i |\operatorname{Re} \lambda_i(0)|$, le crochet par $\tilde{X}$, admet un inverse à droite σ_τ , de degré 0, défini sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^k(z) \tilde{V}_\tau$.

Démonstration. - Si $|i| \geq k$ et $j \in [1, \dots, n-p]$

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(\lambda_j(0) - \sum_s i_s \lambda_s(0))| &\geq - \sup_j |\operatorname{Re} \lambda_j(0)| + |i| \inf_s |\operatorname{Re} \lambda_s(0)| \\ &\geq - \sup_j |\operatorname{Re} \lambda_j(0)| + k \inf_s |\operatorname{Re} \lambda_s(0)| \end{aligned}$$

On peut choisir un représentant de X sur un voisinage W , tel qu'en tout point $y \in W \cap F$ on ait encore :

$$- \sup_j |\operatorname{Re} \lambda_j(y)| + k \inf_s |\operatorname{Re} \lambda_s(y)| > 0$$

Il en résulte que les conditions (P_2) sont vérifiées pour $|i| \geq k$.

Dans le cas où X n'est pas contractant ni dilatant, il est possible qu'il existe une infinité de relations (P_1) ou (P_2) non satisfaites. Par exemple si $\sum \lambda_j i_j = 0$ pour un multi-indice $(i_1, \dots, i_{n-p})$ on a encore $\sum_m \lambda_j i_j = 0$ pour $\forall m \in \mathbb{N}$ et pour $\forall \lambda_k : \lambda_k - \lambda_k - \sum_j m \lambda_j i_j = 0$. De plus, contrairement à ce qui se passe dans le cas contractant ou dilatant, les conditions (P_1) et (P_2) vérifiées en $0 \in \mathbb{R}^p$ n'impliquent pas

les mêmes conditions aux points y voisins. Cela suggère que la situation peut être très complexe si l'on permet aux $\lambda_j(y)$ de varier en fonction de y . Nous ne traiterons dans ce qui suit que quelques exemples de champs pour lesquels les λ_j sont indépendants de y . Ces champs sont liés directement à l'étude des 2-formes fermées comme on le verra au chapitre III.

Soit un chemin de champ T_τ , présentant une singularité de codimension 2, $F \times [0,1]$ et s'écrivant :

$$T_\tau = z_1^2 X_{20,\tau}(y) + z_1 z_2 X_{11,\tau}(y) + z_2^2 X_{02,\tau}(y) + \varepsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ et $X_{20,\tau}(y)$, $X_{11,\tau}(y)$ et $X_{02,\tau}(y)$ des germes de champ le long de $\{0\} \times [0,1] \subset F \times [0,1]$.

Le champ T_τ admet $F \times [0,1]$ comme ensemble de zéros et est normalement non dégénéré ; T_τ , τ fixé, ne vérifie pas les conditions (P_1) (et donc pas (P_2) non plus) car les valeurs propres λ_1 , λ_2 sont telles que $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Cependant nous allons voir que la présence du terme d'ordre 2 permet en général d'inverser l'opérateur de dérivation :

PROPOSITION 7. - Soit $T_\tau = z_1^2 X_{20,\tau} + z_1 z_2 X_{11,\tau} + z_2^2 X_{02,\tau} + \varepsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$ un champ comme ci-dessus. Supposons que $X_{20,\tau}(0) - \varepsilon X_{02,\tau}(0) \neq 0$. Alors l'opérateur de dérivation par $\tilde{T}_\tau$ admet un inverse σ_τ défini sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau(z) \cong \tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$ de degré 2, tel que si $\tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^5(y,z)$ alors $\sigma_\tau \tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^4(y,z)$.

Démonstration. - Nous allons nous limiter au cas hyperbolique ($\varepsilon = +1$). Dans ce cas on peut diagonaliser la partie linéaire par le changement réel de coordonnées :

$$z_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad z_2 = \frac{z_1 - z_2}{2}$$

(Dans le cas elliptique, $\varepsilon = -1$, le plus simple est de complexifier $\mathbb{R}^n$ puis de ne retenir que les solutions réelles. Le champ étant alors diagonalisable la résolution est analogue à celle que l'on va décrire ;

on omet d'indiquer partout le paramètre τ).

Après le changement de coordonnées, et en conservant les variables

$y_1, \dots, y_p, z_1, z_2$ le champ s'écrit :

$$z_1^2 X'_{20} + z_1 z_2 X'_{11} + z_2^2 X'_{02} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

avec : $X'_{20} = X_{20} + X_{11} + X_{02}$, $X'_{11} = X_{20} - X_{02}$

et $X'_{02} = X_{20} - X_{11} + X_{02}$

La condition $(X_{20} - X_{02})(0)$ est équivalente à $X'_{11}(0) \neq 0$

Ecrivons l'action de $\tilde{T}_\tau$ sur $\tilde{f} = \sum_{i,j} a_{i,j}(y, \tau) z_1^i z_2^j \in \tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$

$\tilde{T}_\tau \cdot \tilde{f} = \tilde{h}$ avec $\tilde{h} = \sum_{i,j} b_{i,j}(y, \tau) z_1^i z_2^j$ donné par le système Σ :

$$b_{i,j} = X'_{20} \cdot a_{i-2,j} + X'_{11} \cdot a_{i-1,j-1} + X'_{02} \cdot a_{i,j-2} + (i-j)a_{i,j}$$

avec la convention : $a_{i,j} = 0$ si i ou $j < 0$.

Comme $X'_{11}(0) \neq 0$, on peut supposer choisies des coordonnées $(y_1, \dots, y_p)$

et un représentant de $\tilde{T}_\tau$ tel que $X'_{11,\tau} = \frac{\partial}{\partial y_1}$.

Ecrivons les premières lignes du système Σ :

$$\begin{aligned}
 b_{10} &= a_{10} \\
 b_{01} &= -a_{01} \\
 b_{20} &= X'_{20} a_{00} \quad 2a_{20} \\
 b_{11} &= X'_{11} a_{00} \quad 0 \cdot a_{11} \\
 b_{02} &= X'_{02} a_{00} \quad -2a_{02} \\
 b_{30} &= X'_{20} a_{10} \quad 3a_{30} \\
 b_{21} &= X'_{11} a_{10} + X'_{20} a_{01} \quad a_{21} \\
 b_{12} &= X'_{02} a_{10} + X'_{11} a_{01} \quad -a_{12} \\
 b_{03} &= X'_{02} a_{01} \quad -3a_{03} \\
 b_{40} &= X'_{20} a_{20} \quad 4a_{40} \\
 b_{31} &= X'_{11} a_{20} + X'_{20} a_{11} \quad 2a_{31} \\
 b_{22} &= X'_{02} a_{22} + X'_{11} a_{11} + X'_{20} a_{02} \quad 0a_{22} \\
 b_{13} &= X'_{02} a_{11} + X'_{11} a_{02} \quad -2a_{13} \\
 b_{04} &= X'_{02} a_{02} \quad -4a_{04}
 \end{aligned}$$

Désignons par Σ_k le bloc des $(k+1)$ lignes correspondantes aux indices (i,j) , $i+j = k$. Le système Σ se décompose en 2 sous-systèmes : $\Sigma_{\text{imp.}} = \bigcup_{k \text{ impair}} K_k$ et $\Sigma_{\text{pair}} = \bigcup_{k \text{ pair}} \Sigma_k$.

Pour $\Sigma_{\text{imp.}}$, on peut construire un inverse σ_i de degré 0 : Σ_1 est inversible, Σ_3 est inversible modulo a_{01} et a_{10} , etc... Pour Σ_{pair} , la situation est différente car la matrice diagonale $b_{i,j} = (i-j)a_{i,j}$ n'est pas inversible si $i+j$ est pair. Ceci va être compensé par la présence du terme $X'_{11}a_{i-1,i-1}$ sur la ligne (i,i) . On peut construire un inverse σ_p de degré 2 pour Σ_{pair} , de la façon suivante :

On considère dans Σ_2 la ligne :

$$b_{11} = X'_{11}a_{00} \quad \text{avec} \quad X'_{11} = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

On détermine a_{00} par : $a_{00}(y) = \int_0^{y_1} b_{11}(n, y_2, \dots, y_p) dn$. Puis, modulo a_{00} ainsi calculé, on trouve a_{20} et a_{02} :

$$a_{20} = \frac{1}{2} (b_{20} - X'_{20}a_{00}) \quad \text{et} \quad a_{02} = \frac{1}{2} (b_{02} - X'_{02}a_{00})$$

Passons au bloc Σ_4 .

La ligne : $b_{22} = X'_{02}a_{20} + X'_{11}a_{11} + X'_{20}a_{02}$ permet de calculer a_{11} modulo a_{20} et a_{02} déjà trouvés, par la formule :

$$a_{11}(y) = \int_0^1 (b_{22} - X'_{02}a_{20} - X'_{20}a_{02})(n, y_2, \dots, y_p) dn ,$$

ce qui détermine, grâce aux autres lignes, a_{40} , a_{31} , a_{13} , a_{04} . Et ainsi de suite, on construit l'opérateur σ_p . Le degré 2 de cet opérateur vient du fait que $a_{i,i}$ est calculé grâce à la ligne $(i+1, i+1)$.

L'inverse σ_τ est donné par $\sigma_\tau = \sigma_i \oplus \sigma_p$.

Enfin, remarquons que si $\tilde{h}_\tau = \sum b_{i,j} z_1^i z_2^j \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^5(y, z)$, c'est à dire $b_{k,\ell} \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^{5-k-\ell}(y)$, la solution $\sigma_\tau \tilde{h}_\tau$ appartient à $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^4(y, z)$. En effet : $a_{00}(y) = \int_0^1 b_{11}(n, y_2, \dots, y_p) dn$ et comme $b_{11} \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(y)$, on a $a_{00} \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^4(y)$.

Puis a_{10} et $a_{01} \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^4(y)$ car b_{10} et $b_{01} \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^4(y)$;

$$X'_{20}a_{00} \text{ et } X'_{02}a_{00} \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(y) \implies a_{20} \text{ et } a_{02} \in \mathcal{M}_\tau^3(y)$$

$$a_{11} \in \mathcal{M}_\tau^2(y) \text{ car } b_{22} \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau(y)$$

et a_{30} , a_{21} , a_{12} , $a_{03} \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^2(y)$

Ce qui fait que $\sigma_\tau \tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^4(z, y)$.

D'après la proposition 2, nous savons que si $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(z) \{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \} + \tilde{\mathcal{M}}_\tau^4(z) \{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \}$, alors la dérivation par $\tilde{X}_\tau = \tilde{T}_\tau + \tilde{P}_\tau$ admet un inverse σ'_τ sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau(z)$. Nous allons améliorer légèrement ce résultat en jouant sur le fait que le système Σ est formé d'opérateurs de degré 0 (multiplication sur des nombres) et de degré 1 (dérivation). Cette amélioration est essentielle pour la suite :

PROPOSITION 8. - Soit $T_\tau = z_1^2 X_{20,\tau} + z_1 z_2 X_{11,\tau} + z_2^2 X_{02,\tau} + \epsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}$ $\epsilon = \pm 1$, comme plus haut et $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(z) \tilde{V}_\tau(F)$. Alors la dérivation par $\tilde{X}_\tau = \tilde{T}_\tau + \tilde{P}_\tau$ admet un inverse σ'_τ , d'ordre 2, défini sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau$ et tel que si $\tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^5(y, z)$ alors $\sigma'_\tau \tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^4(y, z)$.

Démonstration. - Dans le système Σ correspondant à la dérivation par rapport à $\tilde{T}_\tau$ on groupe les termes exprimant les $b_{i,j}$, $i+j = k$ par rapport aux $a_{i,j}$, $i+j = k$: ils forment la diagonale du système. Puis les termes exprimant les $b_{i,j}$, $i+j = k$ en fonction des $a_{i,j}$, $i+j = k-1$: ils forment la première sous-diagonale, etc...

L'adjonction de la dérivation par $\tilde{T}_\tau$ n'ajoute rien à la diagonale ni à la première sous-diagonale car $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(z) \tilde{V}_\tau(F)$.

Dans la deuxième sous-diagonale apparaissent des opérateurs de degré 0 (multiplication par des fonctions). Cette remarque permet d'imaginer facilement un opérateur $\sigma'_\tau : \Sigma_1$ est inchangé ainsi que Σ_2 . Dans Σ_3 , on peut toujours résoudre modulo les $a_{i,j}$ déjà calculés : a_{10} et a_{01} .

Passons à Σ_4 . L'équation permettant de calculer a_{11} dans le système associé à $\tilde{T}_\tau$ était :

$$b_{22} = X'_{11} a_{11} \text{ mod}(a_{20}, a_{02})$$

qui était une équation régulière ($X'_{11} \neq 0$).

Elle est remplacée par :

$$b_{22} = X'_{11} a_{11} + \lambda_{2,\tau}(y) a_{11} \text{ mod}(a_{20}, a_{02}, a_{10}, a_{01}, a_{00})$$

où $\lambda_{2,\tau}(y)$ est une fonction dépendant de P_τ .

Soit :

$$b_{22}(y) + P_2(y) = X'_{11} a_{11} + \lambda_2 a_{11}$$

où $P_2(y)$ dépend des $a_{i,j}$ déjà trouvés.

Cette équation reste régulière. Si

$$A_{2,\tau}(y) = \exp \left[- \int_0^{y_1} \lambda_{2,\tau}(n, y_2, \dots, y_p) dn \right]$$

on peut poser :

$$a_{11} = A_{2,\tau}(y) \int_0^{y_1} A_2^{-1}(n, y_2, \dots, y_p) [b_{22}(n, y_2, \dots) - P_2(n, y_2, \dots)] dn$$

Plus généralement, on aura une ligne :

$b_{i+1,i+1} = X'_{11}a_{i,i} + \lambda_i(y)a_{i,i}$ modulo les $a_{i,j}$ déjà calculés qui est une équation différentielle régulière en $a_{i,i}$ pouvant se résoudre comme ci-dessus.

Il est d'autre part très facile de vérifier que si $\tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^5(y,z)$ alors $\sigma'_\tau \tilde{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^4(y,z)$, comme il a été fait dans la démonstration de la proposition 7.

Nous allons maintenant montrer que le chemin X_τ du lemme précédent peut être simplifié par un changement de coordonnées. Au lieu d'aborder directement l'équation $[\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \tilde{Z}_\tau$, trop difficile, nous allons montrer que la proposition 8 ci-dessus permet de construire une intégrale première formelle de $\tilde{X}_\tau$. Soit donc :

$\tilde{T}_\tau = z_1^2 X_{20,\tau} + z_1 z_2 X_{11,\tau} + z_2^2 X_{02,\tau} + \varepsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$ comme ci-dessus, $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(z) \tilde{V}_\tau(F)$ et $\tilde{X}_\tau = \tilde{T}_\tau + \tilde{P}_\tau$. Remarquons que :

$$\tilde{h}_\tau = \tilde{X}_\tau \cdot (z_1^2 - \varepsilon z_2^2) \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^4(z_1, z_2)$$

et résolvons $\tilde{X}'_\tau \cdot \tilde{f}_\tau = \tilde{h}_\tau$ par l'opérateur σ'_τ construit dans la proposition 8 :

Si $\tilde{f}_\tau = \sigma'_\tau \tilde{h}_\tau$, il est facile de vérifier que $\tilde{f}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^2(z_1, z_2)$. Mais de plus, si l'on regarde la construction explicite de σ'_τ la solution $\tilde{f}_\tau = \sum a_{i,j}(y, \tau) z_1^i z_2^j$ est telle que :

$$a_{00} \equiv 0, a_{10} \equiv a_{01} \equiv 0, a_{20} \equiv a_{02} \equiv 0, \text{ et } a_{11}(0, \tau) = 0$$

D'où $\tilde{f}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(y, z_1, z_2)$.

Il en résulte que le champ taylorien $\tilde{g}_\tau = z_1^2 - \varepsilon z_2^2 - \tilde{f}_\tau$ s'annule quadratiquement le long de $F \times [0, 1]$ et est non dégénéré (de Morse) aux points $\{0\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^n \times [0, 1]$: on peut représenter $\tilde{g}_\tau$ par un champ taylorien le long de $F \times [0, 1]$ qui est de Morse en tout point de $F \times [0, 1]$. Et de plus $\tilde{g}_\tau$ est une intégrale première formelle de $\tilde{X}_\tau$ car $\tilde{X}_\tau \cdot \tilde{g}_\tau = 0$.

En appliquant le lemme de Morse (à paramètres y et τ) on obtient un

chemin de germes de difféomorphismes G_τ à l'origine tel que $\tilde{G}_{\tau\star}\tilde{X}_\tau = \tilde{X}'_\tau$,
et que G_τ fixe les variables y, τ :

$$G_\tau \begin{cases} Z_1 = Z_1(z_1, z_2, y, \tau) \\ Z_2 = Z_2(z_1, z_2, y, \tau) \end{cases}$$

et tel que $\tilde{X}'_\tau(z_1^2 - \epsilon z_2^2) \equiv 0$.

Cela signifie que le champ X'_τ s'écrit :

$$\tilde{X}'_\tau = \tilde{Y}_\tau + \mu(\tau, y, z_1, z_2) \left[\epsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \right]$$

$$\mu(\tau, 0, 0, 0) \neq 0$$

et $\tilde{Y}_\tau$ parallèle à F est de la forme :

$$\tilde{Y}_\tau = z_1^2 X_{20, \tau} + z_1 z_2 X_{11, \tau} + z_2^2 X_{02, \tau} \bmod \tilde{\mathfrak{M}}_\tau^3(z_1, z_2)$$

Considérons un nouveau changement de coordonnées H_τ de la forme :

$$H_\tau \begin{cases} Y_1 = y_1(y, \tau, z_1, z_2) \\ \vdots \\ Y_p = y_p(y, \tau, z_1, z_2) \\ Z_1 = z_1 \quad Z_2 = z_2 \end{cases} \quad \text{avec } Y_1(0, \tau, 0, 0) = 0 \\ \text{et } \det\left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_j}(0, \tau, 0, 0)\right) \neq 0$$

On cherche H_τ pour que :

$$H_{\tau\star}\left(\frac{1}{\mu_\tau} X'_\tau\right) = z_1^2 X_{20}(0) + \dots + z_2^2 X_{02}(0) + \epsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

On a :

$$H_{\tau\star}\left(\frac{1}{\mu_\tau} X'_\tau\right) = \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{\mu_\tau} X'_\tau \cdot Y_i\right) \frac{\partial}{\partial y_i} + \epsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

Compte tenu de $(Z_i = z_i)$ on doit résoudre :

$$(1) \quad \frac{1}{\mu_\tau} X'_\tau \cdot Y_i = \alpha_i \text{ où } \alpha_i \text{ est la composante de } z_1^2 X_{20}(0) + z_1 z_2 X_{11}(0) + z_2^2 X_{02}(0) \text{ sur } \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Comme $\left[z_1^2 X_{20}(0) + \dots + z_2^2 X_{02}(0)\right] \cdot y_i = \frac{1}{\mu_\tau} X'_\tau \cdot y_i \bmod \tilde{\mathfrak{M}}_\tau^3(y, z)$, on est conduit à chercher Y_i sous la forme :

$$Y_i = y_i + \varphi_i \text{ et l'équation (1) devient :}$$

$$\frac{1}{\mu_\tau} X'_\tau \varphi_i = (\alpha_i - \frac{1}{\mu_\tau} X'_\tau y_i) \in \mathcal{M}_\tau^3(y, z_1, z_2)$$

D'après la proposition 8, il existe une solution $\varphi_i \in \mathcal{M}_\tau^2(y, z_1, z_2)$ et $Y_i = y_i + \varphi_i$ définit bien un difféomorphisme.

On a donc le résultat :

LEMME 9. - Soit $\tilde{T}_\tau = z_1^2 X_{20,\tau} + z_1 z_2 X_{11,\tau} + z_2^2 X_{02,\tau} + \varepsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$ avec $X_{20,\tau}(0) - \varepsilon X_{02,\tau}(0) \neq 0$ et $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(y) \tilde{V}_\tau(F)$. Alors il existe un chemin de germes de difféomorphismes fixant l'origine : G_τ , avec $dG_\tau(0) = \text{Id}$ et un chemin $\tilde{\mu}_\tau \in \tilde{\mathcal{G}}_\tau(F)$, $\mu_\tau(0) \neq 0$ tels que :

$$\frac{1}{\mu_\tau} \tilde{G}_{\tau\#} (\tilde{T}_\tau + \tilde{P}_\tau) = z_1^2 X_{20,\tau}(0) + z_1 z_2 X_{11,\tau}(0) + z_2^2 X_{02,\tau}(0) + \varepsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Ce lemme nous sera utile dans le paragraphe suivant pour traiter les équations posées par un champ X_τ elliptique. Si T_τ est un chemin comme plus haut, mais avec $P_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(z) V_\tau$, en classe $\mathcal{E}^\infty$, le lemme 9 montre que l'on peut trouver un chemin de difféomorphismes G_τ et un chemin μ_τ tels que

$$\frac{1}{\mu_\tau} G_{\tau\#} X_\tau = z_1^2 X_{20}(0) + z_1 z_2 X_{11}(0) + z_2^2 X_{02} + \varepsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + P'_\tau$$

avec $P'_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$.

2. LE PROBLÈME PLAT

Soit X_τ un chemin de germes en $0 \in \mathbb{R}^n$ ayant pour ensemble de zéros le germe de $F \times [0, 1]$ où $F = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Nous allons maintenant considérer les équations :

$$(I^\infty) : X_\tau \cdot f_\tau = h_\tau$$

pour $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$ à résoudre avec $f_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$ et

$$(II^\infty) : [X_\tau, Y_\tau] = Z_\tau \text{ pour } Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) V_\tau(n) \text{ à résoudre avec } Y_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) V_\tau(n).$$

Dans ce chapitre, nous ferons l'hypothèse que la singularité $F \times [0, 1]$ est transversalement non dégénérée, c'est à dire que le 1-jet

de X_τ en $0 \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$j^1 X_\tau(0) = \sum_{i,j} a_{i,j}(\tau) z_i \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{i,j} b_{i,j}(\tau) z_i \frac{\partial}{\partial y_j}$$

et que la matrice $(a_{i,j}(\tau))_{i,j}$ est non dégénérée pour $\forall \tau \in [0,1]$. (Nous traiterons au chapitre suivant de cas de champs plus dégénérés).

Le cas le plus simple est celui où les valeurs propres $\lambda_1(\tau), \dots, \lambda_{n-p}(\tau)$ de la matrice $(a_{i,j}(\tau))_{i,j}$ ont toutes une partie réelle différente de zéro : nous dirons qu'un tel chemin est hyperbolique. Dans ce cas, sans hypothèse supplémentaire sur X_τ , les équations (I^∞) et (II^∞) sont résolubles. La situation devient bien plus compliquée lorsque certaines valeurs propres sont imaginaires. Nous ne traiterons ici que la seule équation (I^∞) correspondant au chemin elliptique déjà étudié formellement plus haut.

2.2. Le cas hyperbolique.

Nous voulons démontrer :

THÉORÈME 10. - Soit X_τ un chemin dans $V_\tau(n)$ de zéros le germe de $F \times [0,1]$ et hyperbolique. Alors si $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$ ou bien si $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)V_\tau(n)$ les équations :

$$(I^\infty) : X_\tau f_\tau = h_\tau$$

ou bien $(II^\infty) : [X_\tau, Y_\tau] = Z_\tau$ sont résolubles avec $f_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$ et $Y_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)V_\tau(n)$ respectivement.

Démonstration. - La démonstration est assez longue et va se faire en plusieurs étapes. L'idée est de construire la solution f_τ par exemple, par intégration de h_τ le long des trajectoires d'un représentant de X_τ . En fait, cette intégration ne sera utilisée que dans le cas particulier décrit dans la proposition qui suit. La solution du cas général sera obtenue comme somme de solutions particulières.

PROPOSITION 11. - Soit $F = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ et $X_\tau = X'_\tau + X''_\tau$ un chemin de germes de champs tel que :

i/ $X'_\tau \in \mathcal{M}_\tau(z) \{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-p}} \}$ et est normalement contractant à la singularité (les valeurs propres de la partie linéaire $\lambda_1(\tau), \dots, \lambda_{n-p}(\tau)$ ont une partie réelle < 0).

ii/ $X''_\tau \in \{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \}$ (ce champ ne s'annulant pas nécessairement sur $F \times [0,1]$).

Alors les équations I $^\infty$ et II $^\infty$ ont des solutions $f_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$ et $Y_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \cap V_\tau(n)$ pour $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$ et $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \cap V_\tau(n)$.

Démonstration de la proposition. - On choisit un représentant du germe X_τ , encore noté X_τ , défini sur un produit $V = B_1 \times B_2 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \times [0,1]$ où B_1 est une boule en $0 \in \mathbb{R}^p$, B_2 une boule en $0 \in \mathbb{R}^{n-p}$.

$$\text{Soit } \rho^2 = z_1^2 + \dots + z_{n-p}^2.$$

On peut choisir B_1 et B_2 de rayons suffisamment petits, pour qu'ils existent deux constantes $C_1, C_2 : 0 < C_2 < C_1$ pour lesquelles, dans V , on ait :

$$-C_1^2 \rho^2 \leq X_\tau \cdot \rho^2 \leq -C_2 \rho^2.$$

Ceci est possible car X_τ est supposé avoir une composante parallèle au facteur $\mathbb{R}^{n-p}$ contractante (Si $\varepsilon > 0$ est fixé, on peut choisir B_1, B_2 telles que $-C_1 = 2 \sup_{i,\tau} \operatorname{Re}(\lambda_i(\tau)) + \varepsilon$ et $-C_2 = 2 \inf_{i,\tau} \operatorname{Re}(\lambda_i(\tau)) - \varepsilon$)

Soit maintenant une fonction ψ sur $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\psi \equiv 1$ dans la boule $\frac{1}{2} B_1$ (boule de rayon moitié), $\psi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^p \setminus B_1$, que pour $\forall y \in \mathbb{R}^p : 0 \leq \psi(y) \leq 1$.

Si X'_τ et X''_τ sont les composantes de X_τ parallèles respectivement à $\mathbb{R}^{n-p}$ et à $\mathbb{R}^p$, posons :

$$T_\tau = X'_\tau + \psi X''_\tau$$

Le champ T_τ est égal à X_τ sur $V' = \frac{1}{2} B_1 \times B_2 \times [0,1]$.

Ce champ T_τ vérifie encore :

$$-C_1 \rho^2 \leq T_\tau \rho^2 \leq -C_2 \rho^2 \quad (1)$$

Mais surtout, il est facile de voir que si $m \in V$ et si $\varphi_u(m)$ désigne le flot de Y_τ , la $\frac{1}{2}$ trajectoire positive : $\{\varphi_u(m) \mid u \geq 0\}$ appartient tout entière à V et que $\varphi_u(m) \rightarrow B_1 \times \{0\} \times \{\tau\}$ (τ composante de m) pour $u \rightarrow +\infty$, uniformément par rapport à $m \in V$.

1) Nous allons tout d'abord considérer l'équation I^∞ .

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que, quelle que soit la fonction $h \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \mathcal{C}^\infty(V)$, il existe $f \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \mathcal{C}^\infty(V)$ telle que $T_\tau f = h$ sur V ($\mathcal{C}^\infty(V)$ désigne l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur V et $\mathcal{M}_\tau(z)$ l'idéal engendré dans cet espace par z_1 et z_2 . On ne note pas l'indice τ pour alléger l'écriture).

Comme chaque orbite de T_τ tend vers $B_1 \times \{0\} \times \{\tau\}$ pour $u \rightarrow +\infty$, on va chercher f par la formule intégrale :

$$f(m) = - \int_0^\infty h(\varphi_u(m)) du \quad (2)$$

Il est bien clair que si cette intégrale définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de m , cette fonction f vérifie $T_\tau f = h$.

Nous allons tout d'abord montrer que l'intégrale définit une fonction continue de m en vérifiant qu'elle est uniformément convergente par rapport à m , pour $u \rightarrow +\infty$.

Pour cela, nous allons estimer la façon dont $\varphi_u(m)$ tend vers $B_1 \times \{0\} \times \{\tau\}$ (c'est à dire la façon dont $\rho(\varphi_u(m))$ tend vers 0 pour u tendant vers $+\infty$).

Des inégalités (1) on tire par intégration :

$$\rho(m) e^{-\frac{C_1}{2} u} \leq \rho(\varphi_u(m)) \leq \rho(m) e^{-\frac{C_2}{2} u} \quad (3)$$

Maintenant, puisque $h \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \mathcal{C}^\infty(V)$, si $|h|_1$ désigne la borne supérieure des valeurs absolues des dérivées premières de h sur V on a :

$$|h(m)| \leq (n-p) |h|_1 \rho(m)$$

D'où l'on tire :

$$|h(\varphi_u(m))| \leq (n-p) |h|_1 \rho(m) e^{-\frac{C_2}{2}u}$$

Le majorant est une fonction uniformément convergente d'où le résultat: $f(m)$ est définie et continue par rapport à m . De plus $f(m)=0$ si $m \in \{0\} \times \{B\}_2 \times [0,1]$.

Nous allons maintenant établir l'existence des dérivées de tout ordre de f . Si g est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur V , on désigne par $\frac{\partial^\alpha g}{\partial m^\alpha}(m)$ la dérivée partielle correspondant au multi-indice α ; Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}$.

On désigne par :

$$|g|_r = \sup_{\substack{|\alpha| \leq r \\ m \in V}} \left| \frac{\partial^\alpha g}{\partial m^\alpha}(m) \right|$$

Pour montrer que f admet des dérivées partielles de tout ordre on doit prouver que, quel que soit α :

$$\int_0^\infty \frac{\partial^\alpha}{\partial m^\alpha} h(\varphi_u(m)) du \text{ converge uniformément pour } u \rightarrow \infty$$

Développons $\frac{\partial^\alpha}{\partial m^\alpha} h(\varphi_u(m))$ en fonction des dérivées partielles de h et de φ_u et majorons :

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial m^\alpha} h(\varphi_u(m)) \right| \leq (n+1)^\alpha \sup_{|\beta| \leq |\alpha|} \left| \frac{\partial^\beta h}{\partial m^\beta}(\varphi_u(m)) \right| \left[\sup_{|\gamma| \leq |\alpha|} \left| \frac{\partial^\gamma \varphi_u}{\partial m^\gamma}(m) \right|^{|\alpha|} \right]$$

Comme h est plat le long de $F \times [0,1]$ on peut estimer :

$$\left| \frac{\partial^\beta h}{\partial m^\beta}(m) \right| \leq \frac{(n-p)^k}{2^k} |h|_{|\beta|+k} \rho(m)^k$$

Puis, en utilisant la majoration (3) :

$$\left| \frac{\partial^\beta h}{\partial m^\beta}(\varphi_u(m)) \right| \leq \frac{(n-p)^k}{2^k} |h|_{|\beta|+k} \rho(m)^k e^{-\frac{kC_2}{2}u}$$

D'où en désignant par η_1 le rayon de la boule B_1 :

$$\left| \frac{\partial^\beta h(\varphi_u(m))}{\partial m^\beta} \right| \leq \frac{(n-p)^k}{2^k} |h|_{|\alpha|+k} \eta_1^k e^{-\frac{kC_2}{2}u}$$

et

$$\left| \frac{\partial^\gamma \varphi_u(m)}{\partial m^\gamma} \right| \leq |\varphi_u|_{|\alpha|}$$

Nous devons estimer $|\varphi_u|_{|\alpha|}$. Pour ce faire, on part de l'équation de définition du flot :

$$\frac{d\varphi_u}{du} = T(\varphi_u(m))$$

D'où l'on tire par dérivation :

$$\frac{d}{du} \frac{\partial}{\partial m} \varphi_u(m) = \frac{\partial T}{\partial n}(\varphi_u(m)) \cdot \frac{\partial \varphi_u}{\partial m}$$

où $\frac{\partial T}{\partial n}$ désigne la matrice des dérivées premières de T et $\frac{\partial \varphi_u}{\partial m}$ la matrice des dérivées premières de φ_u .

Cette équation différentielle est linéaire. On peut estimer facilement la croissance de ces solutions et on trouve :

$$\left| \frac{\partial}{\partial m} \varphi_u \right|_0 = |\varphi_u|_1 \leq e^{(n+1)|T|_1 u}$$

Plus généralement, en dérivant successivement l'équation de définition de φ_u et en estimant les solutions des équations différentielles obtenues, on montre que, pour $\forall r \in \mathbb{N}$, il existe une constante $D_r > 0$ telle que :

$$|\varphi_u|_r \leq e^{D_r |T|_r u} \quad (4)$$

En regroupant les diverses majorations obtenues, on trouve que :

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial m^\alpha} h(\varphi_u(m)) \right| \leq (n+1)^{|\alpha|} \frac{(n-p)^k}{2^k} |h|_{|\alpha|+k} \eta_1^k \exp \left[|\alpha| D_{|\alpha|} |T|_{|\alpha|} - \frac{kC_2}{2} \right] u$$

On obtient ainsi une majoration par une fonction indépendante de m et d'intégrale convergente pourvu que k soit choisi assez grand :

$k > \frac{2|\alpha| D_\alpha |T|_\alpha}{C_2}$. (Remarquons que on peut trouver $C_\alpha > 0$ tel que

$$|T|_\alpha \leq C_\alpha |X_\tau|_\alpha)$$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour montrer qu'elle est plate le long de $F \times [0,1]$, on utilise la majoration :

$$|h(\varphi_u(m))| \leq \frac{(n-p)^k}{2^k} |h|_k \rho(m)^k e^{-\frac{kC_2}{2}u}$$

d'où :

$$|f(m)| \leq \left[\frac{(n-p)^k}{2^k} |h|_k \int_0^\infty e^{-\frac{kC_2}{2}u} du \right] \rho(m)^k$$

ce que montre que $f(m)$ est $O(\rho(m)^k)$ quel que soit k .

Ceci achève la démonstration de la proposition dans le cas de l'équation (I $^\infty$).

2) Passons maintenant à l'équation (II $^\infty$).

Si T_τ est le champ associé à X_τ comme plus haut, on cherche à résoudre :

$$[T_\tau, Y_\tau] = Z_\tau \quad \text{avec } Y_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)X_\tau(B)$$

pour $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)X_\tau(B)$ où $X_\tau(B)$ désigne l'espace de chemins de champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur $B = B_1 \times B_2$.

On désignera T_τ , Y_τ et Z_τ , par T, Y et Z et pour $m = (y, z, \tau)$ un point de $V = B_1 \times B_2 \times [0,1]$.

Si $(m, u) \in V \times \mathbb{R}^+$, on désignera par $\bar{T}_i(u, m)$ le vecteur obtenu par la translation du vecteur $\frac{\partial}{\partial x_i}$ le long de la trajectoire de T du point m au point $\varphi_u(m)$. (x_i , $i \in [1, \dots, n]$, est mis pour y_j ou z_k).

$$\bar{T}_i(u, m) = \varphi_u(m) \star \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

Soit $A_{j,i}(u, m)$ la matrice telle que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j A_{j,i}(u, m) \bar{T}_j(u, m)$$

Pour tout $(u, m) \in \mathbb{R}^+ \times V$, la matrice $A_{j,i}$ est inversible, $\mathcal{C}^\infty$ en u et m ,
 $(A_{j,i}(0))_{j,i} = \text{Id}$ et on peut établir des majorations :

$$|A_{j,i}|_r = \sup_{\substack{|\alpha| \leq r \\ m \in V}} \left| \frac{\partial^\alpha A_{j,i}}{\partial m^\alpha} \right| \leq e^{K_r |T|_r} u \quad (5)$$

où K_r est une constante positive.

On peut définir le crochet de T et $\bar{T}_i$ et l'on a :

$$[T, \bar{T}_i] = 0.$$

Aussi, il est intéressant d'écrire l'équation $[X, Y] = Z$ en utilisant comme base les $\bar{T}_i$:

$$\text{Si } Y = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad Z = \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

on a :

$$[T, Y]_{\varphi_u(m)} = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial u} \sum_i A_{j,i}(u, m) f_i(\varphi_u(m)) \right) \bar{T}_j(u, m)$$

De même :

$$Z(\varphi_u(m)) = \sum_{i,j} A_{j,i} g_i(\varphi_u(m)) \bar{T}_j(u, m)$$

L'équation de crochet est donc équivalente à :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\sum_i A_{j,i}(u, m) f_i(\varphi_u(m)) \right] = \sum_i A_{j,i} g_i(\varphi_u(m))$$

D'où en intégrant de 0 à ∞ et en tenant compte de $A_{j,i}(0, m) = \text{Id}$ et de $\varphi_u(m) = m$; on obtient :

$$f_i(m) = - \sum_k \int_0^\infty A_{i,k}(u, m) g_k(\varphi_u(m)) du \quad (6).$$

Maintenant, pour montrer que cette formule intégrale définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$, plate le long de $F \times [0, 1]$, on procède comme dans le 1) en utilisant les estimations (4) et (5) pour $\left| \frac{\partial^\beta \varphi_u}{\partial m^\beta} \right|$ et $\left| \frac{\partial^\alpha A_{j,i}}{\partial m^\alpha} \right|$ respectivement, ainsi que la platitude des fonctions g_k le long de $F \times [0, 1]$. Ceci achève la démonstration de la proposition 11.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 10 et considérons donc un germe de champs X_τ normalement hyperbolique à $F \times [0,1]$. Tout d'abord, en utilisant les théorèmes d'existence de variétés attractantes et dilatantes $\mathcal{C}^\infty$ pour un champ normalement hyperbolique à sa variété de zéros (cf. [6]) on peut choisir des coordonnées : $(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-p}, \tau)$ pour un certain k , $0 \leq k \leq n-p$, de façon que

$$F_1 = \{z_1 = \dots = z_k = 0\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{z_{k+1} = \dots = z_{n-p} = 0\}$$

soient les variétés invariantes de X_τ , respectivement les variétés dilatantes et contractantes de X_τ (Si $k = 0$, on convient que $F_1 = \{0\}$ et X_τ est normalement contractant).

L'intersection $F = F_1 \cap F_2$ est la variété des zéros de X_τ . Décomposons X_τ en :

$X_\tau = X'_\tau + X''_\tau$ où X'_τ est la composante parallèle à F_1 et X''_τ la composante parallèle à F_2 .

Le champ $-X'_\tau$ est normalement contractant à F_2 et le champ X''_τ est normalement contractant à F_1 . D'après la proposition précédente, l'équation I^∞ est résoluble pour $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1, \dots, z_k)$ et $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_{k+1}, \dots, z_{n-p})$ et l'équation II^∞ pour $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1, \dots, z_k) V_\tau(n)$ et $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_{k+1}, \dots, z_{n-p}) V_\tau(n)$. Mais il est facile de voir que tout $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1, \dots, z_{n-p})$ se décompose en une somme $h_\tau = h_1 + h_2$ où :

$$h_1 \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1, \dots, z_k) \quad \text{et} \quad h_2 \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_{k+1}, \dots, z_{n-p})$$

(Utiliser par exemple la technique d'éclatement de la singularité que l'on décrira au chapitre suivant en dimension).

Il en résulte que les équations I^∞ et II^∞ sont résolubles pour

$$\forall h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1, \dots, z_{n-p}) \quad \text{et} \quad \forall Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1, \dots, z_{n-p}) V_\tau(n).$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

2.2. Un problème elliptique.

Nous allons maintenant étudier l'équation (I^∞) pour le champ $X_\tau = T_\tau + P_\tau$ avec

$$T_\tau = z_1^2 X_{20,\tau} + z_1 z_2 X_{11,\tau} + z_2^2 X_{02,\tau} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

où $X_{20,\tau}$, $X_{11,\tau}$, $X_{02,\tau}$ sont des champs constants parallèles à F et tels que $X_{20,\tau} + X_{02,\tau} \neq 0$. et où $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) V_\tau(n)$ est une perturbation plate le long de $F \times [0,1]$. La grande différence dans la solution de l'équation (I^∞) par rapport au cas hyperbolique traité précédemment réside dans le fait que les majorations par des exponentielles sont insuffisantes dans le cas présent. On devra donc raffiner les estimations (ce qui nécessite la platitude de P_τ).

Le champ étudié est d'autre part assez particulier. On pourra trouver un autre exemple de tel problème elliptique dans [23].

THÉORÈME 12. - Soit $T_\tau = z_1^2 X_{20,\tau} + z_1 z_2 X_{11,\tau} + z_2^2 X_{02,\tau} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$ un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ de coordonnées $(y_1, \dots, y_{n-2}, z_1, z_2)$ tel que $X_{20,\tau}, X_{11,\tau}, X_{02,\tau}$ soient des champs indépendants de y , parallèles à $\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}$ et que $X_{20,\tau} + X_{02,\tau} \neq 0$.
Soit $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) V_\tau(n)$ et $X_\tau = T_\tau + P_\tau$. Alors l'équation (I^∞) : $X_\tau \cdot f_\tau = h_\tau$ admet une solution $f_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$ pour tout $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$.

Démonstration. - La composante de T_τ parallèle au plan (z_1, z_2) définit une rotation. Nous allons voir que l'hypothèse $X_{20,\tau} + X_{02,\tau} \neq 0$ implique que les orbites de T_τ spiralent dans l'axe de la direction du vecteur $X_{20,\tau} + X_{02,\tau}$.
 Supposons que les coordonnées $(y_1, \dots, y_p)$ soient choisies telles que $X_{20,\tau} + X_{02,\tau} = \frac{\partial}{\partial y_1}$. Alors :

LEMME 13. - Il existe $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau \in \mathbb{R}_\tau$ telles que si

$f_{\tau}(y, z_1, z_2) = y_1 + \alpha_{\tau} z_1^2 + \beta_{\tau} z_1 z_2 + \gamma_{\tau} z_2^2$, $T_{\tau} \cdot f_{\tau}$ soit une forme quadratique définie positive ou négative en z_1, z_2 .

Démonstration. - Soit $(\alpha_{20,\tau} z_1^2 + \alpha_{11,\tau} z_1 z_2 + \alpha_{02,\tau} z_2^2)$ la composante de T_{τ} sur $\frac{\partial}{\partial y_1}$. L'hypothèse $X_{20,\tau} + X_{02,\tau} = \frac{\partial}{\partial y_1}$ implique que $\alpha_{20,\tau} + \alpha_{02,\tau} = 1$. Soit f_{τ} comme dans l'énoncé.

$$\begin{aligned} T_{\tau} \cdot f_{\tau} &= (\alpha_{20,\tau} z_1^2 + \alpha_{11,\tau} z_1 z_2 + \alpha_{02,\tau} z_2^2) - z_2 (2\alpha_{\tau} z_1 + \beta_{\tau} z_2) + z_1 (\beta_{\tau} z_1 + 2\gamma_{\tau} z_2) \\ &= (\alpha_{20,\tau} + \beta_{\tau}) z_1^2 + (\alpha_{11,\tau} - 2\alpha_{\tau} - 2\gamma_{\tau}) z_1 z_2 + (\alpha_{02,\tau} - \beta_{\tau}) z_2^2 \end{aligned}$$

On doit choisir α_{τ} , β_{τ} , γ_{τ} tels que :

$$(\alpha_{11,\tau} - 2\alpha_{\tau} - 2\gamma_{\tau})^2 - 4(\alpha_{20,\tau} + \beta_{\tau})(\alpha_{02,\tau} - \beta_{\tau}) < 0$$

On choisit tout d'abord α_{τ} , γ_{τ} tels que $\alpha_{11,\tau} - 2\alpha_{\tau} - 2\gamma_{\tau} = 0$ puis β_{τ} , tel que : $(\alpha_{20,\tau} + \beta_{\tau})(\alpha_{02,\tau} - \beta_{\tau}) > 0$

Un tel choix de β_{τ} est possible grâce à l'hypothèse $\alpha_{20,\tau} + \alpha_{02,\tau} \neq 0$.

Le lemme précédent conduit à adopter un nouveau système de coordonnées, où y_1 est remplacé par f_{τ} , les autres coordonnées étant inchangées. Le champ T_{τ} s'écrit toujours :

$$T_{\tau} = X_{20,\tau} z_1^2 + X_{11,\tau} z_1 z_2 + X_{02,\tau} z_2^2 - z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

où X_{20}, X_{11}, X_{02} sont constants et parallèles à F et où T_{τ} a une composante $A_{\tau}(z_1, z_2)$ sur $\frac{\partial}{\partial y_1}$ telle que $A_{\tau}(z_1, z_2)$ soit une forme quadratique définie positive ou négative. Posons $z_1 = \rho \cos \theta$ et $z_2 = \rho \sin \theta$

$$T_{\tau} = \rho^2 [\cos^2 \theta X_{20,\tau} + \cos \theta \sin \theta X_{11,\tau} + \sin^2 \theta X_{02,\tau}] + \frac{\partial}{\partial \theta}$$

avec une composante : $\rho^2 A_{\tau}(\cos \theta, \sin \theta)$ sur $\frac{\partial}{\partial y_1}$ telle que $A_{\tau}(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$ pour $\forall \theta \in S^1$.

C'est à dire, si ε est le signe de A_{τ} , il existe des constantes α_1 et α_2 : $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ telles que :

$$\alpha_1 \rho^2 < \epsilon A_\epsilon(z_1, z_2) < \alpha_2 \rho^2.$$

Dorénavant, on supposera que $\epsilon > 0$. Dans le cas contraire, il suffit d'effectuer dans toute la suite des changements de signe évidents.

De même, $\exists \alpha_3 > 0$ tel que pour $\forall i \in [2, \dots, p]$, $T_\tau y_i < \alpha_3 \rho^2$

Soit un représentant du germe P_τ sur un voisinage $V \times [0, 1]$ de $\{0\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^n \times [0, 1]$, où V est un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. On désignera par X_τ le champ $T_\tau + P_\tau$ sur $V \times [0, 1]$.

On peut choisir V suffisamment petit pour que, sur tout $V \times [0, 1]$ on ait :

$$\alpha_1 \rho^2 \leq X_\tau y_1 \leq \alpha_2 \rho^2 \quad \text{et que} \quad X_\tau y_i \leq \alpha_3 \rho^2 \quad \text{pour } i=2, \dots, p$$

(Un tel choix est possible puisque P_τ est plat le long de $F \times [0, 1]$: $X_\tau y_i$ est la composante de X_τ sur $\frac{\partial}{\partial y_i}$).

On désignera par $\varphi_u(m)$ le flot de X_τ dans $V \times [0, 1]$ ($m \in V \times [0, 1]$) et par $\bar{\varphi}_u(m)$ celui de T_τ , lorsque nécessaire. On adoptera les coordonnées $(y_1, \dots, y_p, \rho, \theta, \tau)$.

Le flot $\varphi_u(m)$ a pour coordonnées :

$$\varphi_u(m) = (y_{1,u}(m), \dots, y_{p,u}(m), \rho_u(m), \theta_u(m), \tau)$$

Les inéquations précédentes se traduisent par :

$$\alpha_1 \rho_u(m)^2 \leq \frac{d}{du} y_{1,u}(m) \leq \alpha_2 \rho_u(m)^2 \quad \text{et} \quad \frac{d}{du} y_{i,u}(m) \leq \alpha_3 \rho_u(m)^2 \quad (i \geq 2)$$

valable tant que $\varphi_u(m) \in V \times [0, 1]$.

Soit un sous voisinage $W \subset V$, de la forme :

$$W = [-\eta, +\eta] \times B_1 \times B_2$$

où $[-\eta, +\eta] \subset [0, 1]$, $B_1 \subset \{y_2, \dots, y_p\}$ et $B_2 \subset \{z_1, z_2\}$ sont des boules de rayon η , η_1 et η_2 centrées à l'origine des plans de coordonnées $\{y_1\}$, $\{y_2, \dots, y_p\}$ et $\{z_1, z_2\}$ respectivement. Posons

$$\frac{1}{2} W = [-\eta, +\eta] \times \frac{1}{2} B_1 \times \frac{1}{2} B_2$$

On cherche W de façon que chaque trajectoire issue d'un point de

$\frac{1}{2} W \times [0,1]$ quitte $W \times [0,1]$ par un point de

$$\partial_1 W \times [0,1] = \{+\eta\} \times B_1 \times B_2 \times [0,1].$$

Pour cela, nous allons estimer les variations de $\rho_u(m)$ et $y_{i,u}(m)$ dans un tel voisinage $W \times [0,1]$.

Tout d'abord, comme P_τ est plat sur $F \times [0,1]$, on peut estimer :

$$|P_\tau(m)|_0 \leq \frac{2^4}{4!} |P_\tau|_4 \rho(m)^4$$

où $|P_\tau(m)|_k$ désigne le sup. des valeurs absolues des dérivées d'ordre k des composantes de P_τ .

Il s'ensuit que :

$$\frac{d\rho_u^2}{du} = 2 \sum_{i=1}^2 Z_{i,u} \frac{d}{du} Z_i \quad \text{est majoré par :}$$

$$\left| \frac{d\rho_u^2}{du} \right| \leq 4 \cdot \frac{2^4}{4!} |P_\tau|_4 \rho_u^5$$

soit :

$$-D_W \rho_u^4 \leq \frac{d\rho_u^2}{du} \leq D_W \rho_u^4 \quad (1)$$

avec

$$D_W = 4 \cdot \frac{2^4}{4!} |P_\tau|_4 \eta_2 \quad (2)$$

Remarquons que $D_W \rightarrow 0$ si $\eta_2 \rightarrow 0$.

Par intégration de (1) on trouve :

$$\rho(m)^2 \frac{1}{1+D_W \rho(m)^2 u} \leq \rho_u(m)^2 \leq \rho(m)^2 \frac{1}{1-D_W \rho(m)^2 u} \quad (3)$$

Inégalités valables tant que le point $\varphi_u(m) \in W \times [0,1]$.

$$\text{Pour que } \frac{1}{2} \rho(m)^2 \leq \rho_u(m)^2 \leq 2 \rho(m)^2 \quad (4)$$

$$\text{il suffit donc que } D_W \rho(m)^2 u \leq \frac{1}{2} \text{ soit : } u \leq \frac{1}{2D_W \rho(m)^2} \quad (5)$$

Tant que cette majoration est valable et que $\varphi_u(m) \in W \times [0,1]$ on peut écrire que :

$$\frac{1}{2} \alpha_1 \rho(m)^2 \leq \frac{dy_{1,u}}{du} \leq 2 \alpha_2 \rho(m)^2 \quad \text{et} \quad \frac{dy_{i,u}}{du} \leq 2 \alpha_3 \rho(m)^2 \quad \text{pour } 2 \leq i \leq p$$

Soit, après une intégration :

$$y_1(m) + \frac{1}{2} \alpha_1 \rho(m)^2 u \leq y_{1,u}(m) \leq y_1(m) + 2 \alpha_2 \rho(m)^2 u$$

et

$$y_{i,u}(m) \leq y_i(m) + 2 \alpha_3 \rho(m)^2 u \quad \text{pour } 2 \leq i \leq p$$

Donc pour que $|y_{i,u}(m)| < \eta_1$, $i \geq 2$, il suffit que :

$$(|y_i(m)| \leq \frac{1}{2} \eta_1) : \frac{1}{2} \eta_1 + 2 \alpha_3 \rho(m)^2 u < \eta_1 \quad \text{c'est à dire :}$$

$$u < \frac{\eta_1}{4 \alpha_3 \rho(m)^2}$$

D'autre part, pour que $y_{1,u}$ devienne plus grand que $+\eta$, il suffit que :

$$y_1(m) + \frac{1}{2} \alpha_1 \rho(m)^2 u \geq \eta$$

$$\text{Soit} \quad u \geq \frac{4\eta}{\alpha_1 \rho(m)^2}$$

On est donc assuré que l'orbite $\varphi_u(m)$ par une point $m \in \frac{1}{2} W \times [0,1]$

quitte sans retour W par la partie $\partial_1 W = \{+\eta\} \times B_1 \times B_2 \times [0,1]$ tout en vérifiant (4), si

$$\frac{4\eta}{\alpha_1 \rho(m)^2} \leq \frac{1}{2D_W \rho(m)^2} \quad \text{et} \quad \frac{4\eta}{\alpha_1 \rho(m)^2} < \frac{\eta_1}{4\alpha_3 \rho(m)^2}$$

Soit, compte tenu de la valeur $D_W = \frac{2^6}{4!} |P_\tau|_4 \eta_2$:

$$\eta_2 < \frac{4!}{2^9} \frac{\alpha_1}{|P_\tau|_4} \frac{1}{\eta} \quad \text{et} \quad \frac{4\eta}{\alpha_1} < \frac{\eta_1}{4\alpha_3}$$

D'où le lemme :

LEMME 14. - Soit W un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ de la forme $[-\eta, +\eta] \times B_1 \times B_2$ où B_1 et B_2 sont des boules de rayons η_1 et η_2 centrés à l'origine des

plans $\{y_2, \dots, y_p\}$ et $\{z_1, z_2\}$ et $[-n, +n] \subset Oy_1$. Alors si n , n_1 et n_2 sont
choisis tels que $n_2 < \frac{41}{2^9} \frac{\alpha_1}{|P_\tau|_4} \frac{1}{n}$ et $\frac{4n}{\alpha_1} < \frac{n_1}{4\alpha_3}$, la $\frac{1}{2}$ trajectoire po-
sitive issue d'un point $m \in \frac{1}{2} W \times [0, 1]$ ($\frac{1}{2} W = [-n, +n] \times \frac{1}{2} B_1 \times \frac{1}{2} B_2$)
monte en spiralant le long de l'axe Oy_1 et quitte $W \times [0, 1]$, défini-
tivement, par un point de $\partial_1 W \times [0, 1] = \{+n\} \times B_1 \times B_2 \times [0, 1]$ au bout
d'un temps $u(m)$, que l'on peut majorer par : $u(m) \leq \frac{L}{\rho(m)^2}$ (avec
 $L = \frac{4n}{\alpha_1}$) . Durant son parcours dans $W \times [0, 1]$, c'est à dire pour
 $0 \leq u \leq u(m)$, le point $\varphi_u(m)$ vérifie constamment :

$$\frac{1}{2} \rho(m)^2 \leq \rho_u(m)^2 \leq 2 \rho(m)^2.$$

On choisit une fois pour toute un voisinage W comme dans le lemme
 14 et on désigne par $\mathcal{C}_c^\infty(W \times [0, 1])$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur
 $W \times [0, 1]$, de support contenu dans $(\text{int } W) \times [0, 1]$ et par
 $\mathcal{C}^\infty(\frac{1}{2} W \times [0, 1])$, l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\frac{1}{2} W \times [0, 1]$.
 Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que, quelle que soit
 $h \in \mathcal{C}_c^\infty(W \times [0, 1])$, il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\frac{1}{2} W \times [0, 1])$ telle que $X_\tau.f = h$
 sur $\frac{1}{2} W \times [0, 1]$.

Le lemme précédent justifie la formule :

$$f(m) = - \int_0^\infty h(\varphi_u(m)) du \quad (5)$$

pour $\forall m \in \frac{1}{2} W \times [0, 1]$ et $h \in \mathcal{C}_c^\infty(W \times [0, 1])$.

En effet chaque trajectoire $\varphi_u(m)$ issue de $m \in \frac{1}{2} W \times [0, 1]$ quitte
 $W \times [0, 1]$ au bout d'un temps fini si $m \notin F \times [0, 1]$.

Pour intégrer jusqu'à $+\infty$, il suffit de prolonger $h(\varphi_u(m))$ par zéro
 pour u assez grand. Si $m \in F \times [0, 1]$, la formule est encore valable
 et donne $f(m) = 0$.

En fait, puisque $\varphi_u(m)$ quitte W au bout d'un temps $u(m) \leq \frac{L}{\rho(m)^2}$ on a :

$$f(m) = - \int_0^{u(m)} h(\varphi_u(m)) du$$

La majoration de $u(m)$ montre que l'intégrale définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de $F \times [0,1]$.

Il reste à démontrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et plate le long de $F \times [0,1]$ sur $\frac{1}{2} W \times [0,1]$ en montrant que f tend vers 0 ainsi que toutes ses dérivées pour $m \rightarrow F \times [0,1]$.

Commençons par démontrer la continuité de f (aux points de $F \times [0,1]$).

Comme h est plate le long de $F \times [0,1]$, on a :

$$|h(\varphi_u(m))| \leq \frac{2^3}{3!} |h|_3 \rho(\varphi_u(m))^3$$

tant que $\varphi_u(m) \in W$

en utilisant les majorations du lemme 14 :

$$|f(m)| = \left| \int_0^\infty h(\varphi_u(m)) du \right| \leq \int_0^{u(m)} |h(\varphi_u(m))| du$$

d'où :

$$|f(m)| \leq \frac{8 \cdot 2^3}{3!} \frac{L}{\rho(m)^2} \cdot |h|_3 \rho(m)^3$$

$$|f(m)| \leq \frac{2^6}{3!} L |h|_3 \rho(m)$$

Ce qui montre que $f(m) \rightarrow 0$ pour $m \rightarrow F \times [0,1]$ et donc que f est continue.

Pour montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et plate le long de $F \times [0,1]$, il suffit de montrer que pour tout multi-indice α , l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\partial^\alpha}{\partial m^\alpha} h(\varphi_u(m)) du$ est définie, converge uniformément pour $u \rightarrow \infty$ et tend vers 0 pour $m \rightarrow F \times [0,1]$.

Pour cela, nous devons estimer les dérivées $\frac{\partial^\alpha \varphi_u}{\partial m^\alpha}$ par rapport aux dérivées partielles correspondantes à T_τ : $\frac{\partial^\alpha \overline{\varphi_u}}{\partial m^\alpha}$.

Nous allons commencer par comparer φ_u avec $\overline{\varphi_u}$:

LEMME 15. - Soit $m \in \frac{1}{2} W \times [0,1]$. Alors si $u \leq u(m)$, on a :

$$|\varphi_u(m) - \overline{\varphi_u}(m)| \leq K_k \rho(m)^k$$

(Où $|\varphi_u(m) - \overline{\varphi_u}(m)|$ désigne le sup. des coordonnées de $\mathbb{R}^n \times [0,1]$ et

$$K_k = C_k |P_\tau|_{k+2} \text{ avec } C_k : \text{constante numérique}.$$

Démonstration. - Sous les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$\rho(\varphi_u(m)) \leq 2 \rho(m) \text{ et } u \leq u(m) \leq \frac{L}{\rho(m)^2}$$

Nous allons comparer les composantes $y_{i,u}(m), \dots, \theta_u(m)$ de $\varphi_u(m)$ aux composantes $\bar{y}_{i,u}(m), \dots, \bar{\theta}_u(m)$ de $\bar{\varphi}_u(m)$.

Commençons par la composante radiale ρ .

De $\bar{\rho}_u \equiv \rho(m)$ et de

$$|P_\tau(m)| \leq \frac{2^{(k+2)}}{(k+2)!} |P_\tau|_{k+2} \rho^{k+2}$$

on tire :

$$\left| 2 \rho_u \frac{d\rho_u}{du} \right| = \left| \frac{d\rho_u^2}{du} \right| \leq \left| 2 \sum z_i \frac{dz_i}{du} \right| \leq 2 \frac{2^{(k+2)}}{(k+2)!} |P_\tau|_{k+2} \rho_u^{k+3}$$

$$\text{Soit : } \left| \frac{d\rho_u}{du} \right| \leq \frac{2^{2(k+2)}}{(k+2)!} |P_\tau|_{k+2} \rho^{k+2} \quad . \text{ Par intégration on a :}$$

$$|\rho_u - \rho| \leq K_{\rho,k} \rho(m)^k$$

$$\text{où } K_{\rho,k} = M_k |P_\tau|_{k+2} \text{ avec } M_k = \frac{2^{2(k+2)}}{(k+2)!} L$$

Considérons la variable θ :

$$\frac{d\bar{\theta}_u}{du} = 1 \text{ et } 1 - P_k \rho(\varphi_u(m))^{k+1} \leq \frac{d\theta_u}{du} \leq 1 + P_k \cdot \rho(\varphi_u(m))^{k+1}$$

où P_k est proportionnel à $|P_\tau|_{k+2}$

D'où :

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\theta_u}{du} - \frac{d\bar{\theta}_u}{du} \right| &\leq P_k \left[\rho(\varphi_u(m)) - \rho(m) + \rho(m) \right]^{k+1} \\ &\leq P_k [1 + K_{\rho,1}]^{k+1} \rho(m)^{k+1} \end{aligned}$$

D'où, par intégration:

$$|\theta_u(m) - \bar{\theta}_u(m)| \leq K_{\theta,k} \rho(m)^{k-1}$$

où $K_{\theta,k}$ est proportionnel à $|P_\tau|_{k+2}$

Maintenant pour y_i on a de même :

$$|y_{i,u} - \bar{y}_{i,u}| \leq K_{y_i,k} \rho(m)^k$$

D'où, au total, on trouve une constante K_k , proportionnelle à $|P_\tau|_{k+2}$ telle que :

$$|\varphi_u(m) - \bar{\varphi}_u(m)| \leq K_k \rho(m)^k.$$

Nous allons maintenant passer aux dérivées premières de $\varphi_u(m)$.
Posons $\lambda_u(m) = \frac{\partial \varphi_u}{\partial m}$ la matrice $(n+1) \times (n+1)$ des dérivées premières du flot ; $\lambda_u(m)$ est assujettie à l'équation :

$$\frac{d}{du} \lambda_u(m) = \frac{\partial X_\tau}{\partial m} (\varphi_u(m)) \cdot \frac{\partial \varphi_u}{\partial m} \quad (6)$$

Posons $A(u,m) = \frac{\partial X_\tau}{\partial m} (\varphi_u(m))$ et $\bar{A}(u,m) = \frac{\partial X}{\partial m} (\bar{\varphi}_u(m))$

La matrice $\bar{A}(u,m)$ est telle que :

$|\bar{A}(u,m)| \leq M\rho$ où M est une constante numérique (dépendant de la forme quadratique $A(z_1, z_2)$ introduite plus haut). $|\bar{A}|$ désigne la borne supérieure des valeurs absolues des coefficients. Mais surtout, si $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, on voit facilement que $\bar{A}(u,m) \cdot \bar{A}(u_2,m) = 0$ (Ce qui traduit le caractère elliptique du champ T_τ).

Ecrivons : $A(u,m) = \bar{A}(u,m) + \varepsilon(u,m)$.

Nous allons pour commencer estimer $\varepsilon(u,m)$:

LEMME 16. - Il existe une constante M_k de la forme $M_k = (A_k + B_k |P_\tau|_2) |P_\tau|_{2k}$
 A_k, B_k étant des constantes numériques, telle que :

$$|\varepsilon(u,m)| \leq M_k \rho(m)^k \quad \text{pour } u \leq u(m)$$

Démonstration. -

$$\begin{aligned} \varepsilon(u,m) &= \frac{\partial X_\tau}{\partial m} (\varphi_u(m)) - \frac{\partial T_\tau}{\partial m} (\bar{\varphi}_u(m)) \\ &= \frac{\partial X_\tau}{\partial m} (\varphi_u(m)) - \frac{\partial X_\tau}{\partial m} (\bar{\varphi}_u(m)) + \frac{\partial X_\tau}{\partial m} (\bar{\varphi}_u(m)) - \frac{\partial T_\tau}{\partial m} (\bar{\varphi}_u(m)) \end{aligned}$$

Comme $P_\tau = X_\tau - T_\tau$ est plat, pour $\forall k$ on a :

$$\left| \frac{\partial}{\partial m} \tau(m) \right| \leq \frac{2^k}{k!} |P_\tau|_{k+1} \rho(m)^k$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial X_\tau}{\partial m}(\varphi_u(m)) - \frac{\partial T_\tau}{\partial m}(\varphi_u(m)) \right| &\leq \frac{2^k}{k!} |P_\tau|_{k+1} \rho(\varphi_u(m))^k \\ &\leq \frac{2^{2k}}{k!} |P_\tau|_{k+1} \rho(m)^k \end{aligned} \quad (7)$$

Considérons maintenant $\frac{\partial X_\tau}{\partial m}(\varphi_u(m)) - \frac{\partial X_\tau}{\partial m}(\bar{\varphi}_u(m))$.

Par la formule des accroissements finis, on a :

$$\left| \frac{\partial X_\tau}{\partial m}(\varphi_u(m)) - \frac{\partial X_\tau}{\partial m}(\bar{\varphi}_u(m)) \right| \leq (h+1) |X_\tau|_2 |\varphi_u(m) - \bar{\varphi}_u(m)|$$

D'où en utilisant le lemme 15 :

$$\left| \frac{\partial X_\tau}{\partial m}(\varphi_u(m)) - \frac{\partial X_\tau}{\partial m}(\bar{\varphi}_u(m)) \right| \leq (h+1) |X_\tau|_2 K_k \rho(m)^k \quad (8)$$

On obtient le résultat en regroupant les inégalités (7) et (8).

Nous allons maintenant estimer les dérivées premières de φ_u .

Pour cela intégrons l'équation différentielle (6) donnant $\lambda(u, m)$:

$$\lambda(u, m) = \text{Id} + \int_0^u A(s, m) \lambda(s, m) ds$$

La solution $\lambda(u, m)$ peut être calculée sous forme de série :

$$\lambda(u, m) = \text{Id} + \sum_{r \geq 1} C^r(u, m)$$

$$\text{où } C^r(u, m) = \int_0^u A(u_{r-1}, m) \int_0^{u_{r-1}} A(u_{r-2}, m) \dots \int_0^{u_1} A(s, m) ds du_1 \dots du_{r-1}$$

Développons $C^r(u, m)$ compte tenu de $A(u, m) = \bar{A}(u, m) + \varepsilon(u, m)$. Nous obtenons 2^r termes où sous les symboles intégraux se trouvent soit $\bar{A}(u_i, m)$, soit $\varepsilon(u_i, m)$. Le fait capital est le suivant : chaque fois que deux $\bar{A}(u_i, m)$ sont consécutifs, le terme est nul, en raison de la relation : $\bar{A}(u_i, m) \cdot \bar{A}(u_j, m) = 0$. Donc, un terme non nul dans le développement de $C^r(u, m)$, pour $n \geq 2$, contient nécessairement moins de $\left[\frac{n}{2} \right] + 1$ facteurs

$\bar{A}$ et donc plus de $\left[\frac{n}{2}\right]$ facteurs ϵ . ($[r]$ désigne la partie entière de $r \in \mathbb{R}^+$).

En utilisant les majorations : $|\bar{A}| \leq M_\rho$ et $|\epsilon| \leq M_k \rho(m)^k$, on obtient que chaque terme est majoré par :

$$(n+1)^r \frac{u^r}{r!} N_k^r \rho(m)^{\left[(k-1)\left[\frac{r}{2}\right] + r\right]} \quad \text{pour } \forall k \quad (N_k = \text{Sup} \{M, M_k\})$$

Comme $u \leq \frac{L}{\rho(m)^2}$, chaque terme est majoré par :

$$\frac{(n+1)^r L^r N_k^r}{r!} \rho(m)^{\left[(k-1)\left[\frac{r}{2}\right] - r\right]}$$

Compte tenu que C^r comporte au plus 2^r termes, nous obtenons :

$$|C^r| \leq \frac{(2(n+1)L N_k)^r}{r!} \rho(m)^{\left[(k-1)\left[\frac{r}{2}\right] - r\right]}$$

et comme $(k-1)\left[\frac{r}{2}\right] - r \geq \frac{k-5}{2}$

$$|C^r| \leq \frac{(2(n+1)L N_k)^r}{r!} \rho(m)^{\frac{k-5}{2}}$$

d'où $\left| \sum_{r \geq 2} C^r \right| \leq \exp(2(n+1)L N_k) \rho(m)^{\frac{k-5}{2}}$

Maintenant, remarquons que :

$$\begin{aligned} \lambda(u, m) - \bar{\lambda}(u, m) &= \int_0^u \epsilon(s, m) ds + \sum_{r \geq 2} C^r(u, m) \\ (\bar{\lambda}(u, m) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_u(m)}{\partial m}) \end{aligned}$$

et comme : $\left| \int_0^u \epsilon(s, m) ds \right| \leq \frac{M_k}{L} \rho(m)^{k-2} \quad (u \leq u(m))$

On en déduit le lemme suivant :

LEMME 17. - Il existe une constante L_k ($L_k = \text{Sup}(\exp 2(n+1) L N_{2k+5}, \frac{M_{k+2}}{L})$) telle que : $|\lambda(u, m) - \bar{\lambda}(u, m)| \leq L_k \rho(m)^k$ pour $u \leq u(m)$.

En particulier, cette différence est bornée et comme $\bar{\lambda}(u, m)$ est bornée, il en est de même de $\lambda(u, m)$ dans toute domaine utile.

Nous allons utiliser tout de suite cette estimation de $\frac{\partial \varphi_u}{\partial m}$ pour montrer

que la fonction $f(m) = -\int_0^\infty h(\varphi_u(m))du$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial m} h(\varphi_u(m))du \text{ converge uniformément et tend vers 0 pour } m \rightarrow F \times [0,1]$$

$$\text{Or } \frac{\partial}{\partial m} h(\varphi_u(m)) = \frac{\partial h}{\partial m}(\varphi_u(m)) \cdot \frac{\partial \varphi_u}{\partial m}$$

$$\text{et } \left| \frac{\partial h}{\partial m}(\varphi_u(m)) \right| \leq (n+1) |h|_4 |\rho(\varphi_u(m))|^3 \leq 8(n+1) |h|_4 \rho(m)^3$$

$$\text{et } \left| \frac{\partial \varphi_u}{\partial m} \right| \text{ reste borné par une constante, disons K.}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial m} h(\varphi_u(m))du \right| &\leq (n+1) \int_0^{u(m)} \left| \frac{\partial h}{\partial m} \right| \cdot \left| \frac{\partial \varphi_u}{\partial m} \right| du \\ &\leq 8(n+1)^2 K \frac{|h|_4}{L} \rho(m) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché.

Pour montrer que $\int_0^\infty \frac{\partial^\alpha}{\partial m^\alpha} h(\varphi_u(m))du$ converge pour tout multi-indice α , nous devons estimer les dérivées successives de φ_u . Le plus simple est de partir de la formule : $\frac{\partial \varphi_u}{\partial m} = \text{Id} + \sum_{r \geq 1} C^r(u, m)$ utilisée précédemment et de dériver cette série terme à terme pour montrer que les dérivées successives de φ_u restent bornées. Cela peut se faire par récurrence de la façon suivante : Supposons que pour $\forall \alpha, |\alpha| < r$ on ait montré que $\frac{\partial^\alpha \varphi_u(m)}{\partial m^\alpha}$ est bornée par une constante Q_α (dépendant des dérivées d'un certain ordre de P_τ).

Soit β , tel que $|\beta| = r$. Alors $\frac{\partial^\beta \varepsilon}{\partial m^\beta}$ ne fait intervenir qu'une somme de produit de dérivées de P_τ d'ordre $\leq r$, et de dérivées de φ_u d'ordre $< r$, avec dans chaque terme une dérivée de P_τ en facteur. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence il en résulte que $\left| \frac{\partial^\beta \varepsilon}{\partial m^\beta} \right| \leq R_{\beta, k} \rho(m)^k$ pour une certaine constante $R_{\beta, k}$.

Soit maintenant un multi-indice $\gamma, |\gamma| = r$; dérivons la série par l'opérateur $\frac{\partial^\gamma}{\partial m^\gamma}$. Nous obtenons une sommation de termes, intégrales ne

faisant intervenir que des dérivées d'ordre $\leq r$ de $\bar{A}(u, m)$ et de $\varepsilon(u, m)$.

On peut alors estimer la somme de cette série, comme il a été fait plus haut pour la série ΣC^r , en utilisant $\bar{A}_i(u_i, m)$ $\bar{A}(u_j, m) = 0$ et les majorations des $\frac{\partial \beta \varepsilon}{\partial m^\beta}$ et $\frac{\partial \gamma \bar{A}}{\partial m^\gamma}$ (Ces dernières dérivées restant toujours bornées).

On en déduit :

LEMME 18. - Pour tout multi-indice γ , $|\gamma| \geq 1$, la dérivée $\frac{\partial \gamma}{\partial m^\gamma} \varphi_u(m)$ reste bornée pourvu que $u \leq u(m)$, par un majorant dépendant de la norme $|P_\tau|_{r(\gamma)}$ pour $r(\gamma)$ assez grand.

Il est très facile alors de montrer que :

LEMME 19. - Pour tout multi-indice γ , $|\gamma| \geq 1$, $\int_0^\infty \frac{\partial \gamma}{\partial m^\gamma} h(\varphi_u(m)) du$ est uniformément convergente et tend vers 0 pour $m \rightarrow F \times [0, 1]$.

Démonstration. - On développe la dérivée et on obtient une sommation de termes, produit de dérivées $\frac{\partial \gamma_h}{\partial m^\gamma} (\varphi_u)$ et $\frac{\partial \gamma''}{\partial m^{\gamma''}} \varphi_u$. Les premières peuvent être majorées par $\rho(m)^3$ à un facteur près et les secondes sont bornées pour $u \leq u(m)$. Mais puisque l'intégration se limite à $[0, u(m)]$ avec $u(m) \leq \frac{L}{\rho(m)^2}$ on a ainsi le résultat souhaité.

3. QUELQUES RÉSULTATS EN CLASSE $\mathcal{C}^\infty$.

Nous allons tirer ici les conséquences immédiates des résultats des deux paragraphes précédents. D'autres conséquences moins directes seront obtenues dans le chapitre II en ce qui concerne les champs de vecteurs et dans le chapitre III en ce qui concerne les 2-formes fermées.

On pourra se reporter à l'introduction générale pour y trouver le pas-

sage de la solution de l'équation II à l'obtention d'un chemin de difféomorphismes, passage qui sera utilisé dans ce qui suit sans plus de commentaires.

Nous établissons tout d'abord un théorème de linéarisation qui est une généralisation directe de celui de Sternberg [21]:

THÉORÈME 20. - Soit X un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^n$, dont l'ensemble des zéros est le germe de $F = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} = \mathbb{R}^n$. Soient $(y_1, \dots, y_p)$ des coordonnées sur $\mathbb{R}^p$ et $(z_1, \dots, z_{n-p})$ des coordonnées sur $\mathbb{R}^{n-p}$. Supposons $X = X_0 + X_1$ avec :

i/ $X_0 = \sum_{j=1}^{n-p} a_{i,j}(y) z_j \frac{\partial}{\partial z_i}$ telle que la matrice $(a_{i,j}(y))_{i,j}$ ait des valeurs propres $\lambda_1(y), \dots, \lambda_{n-p}(y)$ (pour un représentant de X_0) vérifiant $(P_2) : \lambda_j(y) - \sum_k C_k \lambda_k(y) \neq 0$ pour tout multi-indice $(i_1, \dots, i_{n-p})$, $i_1 + \dots + i_{n-p} \geq 2$ et $\forall y$ dans le domaine de définition du représentant.

ii/ $X_1 \in \mathcal{M}(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_p} \right\} + \mathcal{M}^2(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-p}} \right\}$

Alors il existe un germe de difféomorphisme g en $0 \in \mathbb{R}^n$, préservant 0 , tel que $g_* X_0 = X$.

Démonstration. - Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe un premier difféomorphisme h tel que $h_* X = X_0$ modulo $\mathcal{M}(z)^2 V(n)$.

$$X = \sum a_{i,j}(y) z_j \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum b_{i,j}(y) z_j \frac{\partial}{\partial y_i} \text{ modulo } \mathcal{M}(z)^2 V(n)$$

Il suffit de montrer qu'il existe un difféomorphisme formel $\tilde{h}$, tel que :

$$\tilde{h}_* \left(\sum a_{i,j} z_j \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum b_{i,j} z_j \frac{\partial}{\partial y_i} \right) = X_0 \text{ modulo } \tilde{\mathcal{M}}^2(z) \tilde{V}(F) \quad (1)$$

On cherche $\tilde{h}$ de la forme :

$$Y_1 = y_1 + \varphi_1, Y_2 = y_2 + \varphi_2, \dots, Y_p = y_p + \varphi_p, Z_1 = z_1, \dots, Z_{n-p} = z_{n-p}$$

avec $\varphi_i \in \tilde{\mathcal{M}}(z)$.

La condition (1) est équivalente à :

$$\tilde{X} \cdot (y_i + \varphi_i) = 0 \text{ modulo } \tilde{\mathcal{M}}(z)^2$$

$$\text{Soit } X \cdot \varphi_i = -Xy_i \text{ modulo } \tilde{\mathcal{M}}(z)^2 \quad (2)$$

La dérivation $\varphi \rightarrow X_0 \cdot \varphi$ admet un inverse de degré 0 sur $\tilde{\mathcal{M}}(z)$.

Comme $X - X_0 \in \tilde{\mathcal{M}}(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \right\} + \tilde{\mathcal{M}}(z)^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-p}} \right\}$, la dérivation par le champ X admet également un inverse de degré 0 sur $\tilde{\mathcal{M}}(z)$ en vertu de la proposition 2. L'équation (2) a donc une solution $\varphi_i \in \tilde{\mathcal{M}}(z)$.

Donc, on peut supposer que $X - X_0 \in \mathcal{M}(z)^2 V(n)$

Soit $X_\tau = X_0 + \tau(X - X_0)$

$$P_\tau = \tau(X - X_0) \in \mathcal{M}_\tau(z)^2 V_\tau(n).$$

Comme le crochet par $\tilde{X}_0$ admet un inverse d'ordre 0 sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau(z)^2 \bar{V}_\tau(F)$ et que $\tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau(z)^2 \tilde{V}_\tau(F)$, le crochet par $\tilde{X}_\tau$ admet un inverse σ_τ , sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau(z)^2 \tilde{V}_\tau(F)$, toujours d'après la proposition 2.

L'équation :

$$[\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \dot{\tilde{P}}_\tau = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tau} \quad \text{a donc une solution } \tilde{Y}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau(z)^2 \tilde{V}_\tau(F)$$

Soit Y_τ un prolongement $\mathcal{C}^\infty$ de $\tilde{Y}_\tau$.

$$\text{Alors } H_\tau = [X_\tau, Y_\tau] - \dot{P}_\tau \in \mathcal{M}_\tau(z)^\infty V_\tau(n).$$

Comme le chemin X_τ est hyperbolique, puisque les conditions P_2 sont vérifiées, l'équation :

$$[X_\tau, G_\tau] = H_\tau \quad \text{a une solution } G_\tau \in \mathcal{M}_\tau(z)^\infty V_\tau(n)$$

d'après le théorème 10.

Le chemin $K_\tau = Y_\tau - G_\tau$ vérifie

$$[X_\tau, K_\tau] = \dot{P}_\tau \quad \text{et } K_\tau \in \mathcal{M}_\tau(z)^2 V_\tau(n)$$

Par intégration de K_τ on obtient un chemin de difféomorphismes g_τ tel que $g_\tau(0) = 0$ et $dg_\tau(0) = \text{Id}$ (car $K_\tau \in \mathcal{M}_\tau(z)^2 V_\tau(n)$) et tel que

$$g_{\tau*} X_0 = X_{\tau}.$$

Il suffit de prendre $g = g_1$.

Voici un autre résultat du même type :

THÉOREME 21. - Soit X un germe en $0 \in \mathbb{R}^n$ tel que l'ensemble des zéros de X soit le germe de $F = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ comme plus haut. Supposons qu'en $0 \in \mathbb{R}^n$, le champ soit normalement non dégénéré et que les valeurs propres $\lambda_1(0), \dots, \lambda_{n-p}(0)$ de la partie linéaire transverse à la singularité aient toutes une partie réelle soit > 0 , soit < 0 (champ dilatant ou contractant). Alors si $k+1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $\sup_i |\operatorname{Re} \lambda_i| / \inf_i |\operatorname{Re} \lambda_i|$ le champ X est équivalent à un champ $X_k = \sum_{|\alpha| \leq k} a_{\alpha,i}(y) z^\alpha \frac{\partial}{\partial z_i}$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p})$ un $(n-p)$ -multi-indice) par un germe de difféomorphisme fixant 0 .

Démonstration. - Comme dans la démonstration du théorème 20, on montre tout d'abord qu'il existe un difféomorphisme formel $\tilde{g}$ de la forme :

$$Y_1 = y_1 + \varphi_1, \dots, Y_p = y_p + \varphi_p, \quad Z_i = z_i$$

avec $\varphi_j \in \tilde{\mathcal{M}}_b(z)$ tel que pour tout $i, i \in [1, \dots, p]$ on ait :

$$\tilde{X}.Y_i = 0 \quad \text{soit} \quad \tilde{X}.\varphi_i = -\tilde{X}y_i \quad (1)$$

Cette égalité implique que $\tilde{g}_* \tilde{X}$ a une composante nulle sur $\mathbb{R}^p \times \{0\}$. En effet, si $X_0 = \sum a_{i,j}(y) z_j \frac{\partial}{\partial z_i}$ est la composante parallèle à $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ de la partie linéaire de X , la dérivation par $\tilde{X}_0$ admet un inverse sur $\tilde{\mathcal{M}}_b(z)$ de degré 0 (car l'hypothèse faite sur les valeurs propres $\lambda_1(0), \dots, \lambda_{n-p}(0)$ implique X_0 vérifie les conditions (P_1) du paragraphe 1). Comme $X - X_0 \in \tilde{\mathcal{M}}_b(z) \{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \} + \tilde{\mathcal{M}}_b(z)^2 \{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-p}} \}$ la dérivation par X admet également un inverse sur $\tilde{\mathcal{M}}_b(z)$ d'après la proposition 2, et les équations (1) sont résolubles.

Le champ $\tilde{g}_* \tilde{X}$ a un champ taylorien $\tilde{X}^1$ d'ordre 1 le long de F égal à $\tilde{X}_0$

et est parallèle à $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$.

D'après la proposition 6, le crochet par $\tilde{X}_0$ est inversible sur $\tilde{\mathcal{M}}_{\tau} \tilde{V}_{\tau}(F)$ par un inverse de degré 0. Il est facile de voir qu'il en est de même pour le crochet par le champ $X_k = \sum_{\alpha, i} a_{j, i}(y) z^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z_i}$, champ taylorien d'ordre k de $\tilde{g}_{\star} \tilde{X}$ et donc en utilisant la proposition 2 puis une intégration, que X_k est équivalent à $\tilde{X}$ par un difféomorphisme formel. Autrement dit, il existe un germe de difféomorphisme h, préservant 0, tel que :

$$h_{\star} X = X_k + P \quad \text{où} \quad P \in \mathcal{M}_0^{\infty}(z) \cap V(n)$$

Pour démontrer que $h_{\star} X$ est équivalent à X_k , il suffit maintenant d'appliquer le théorème 10 au chemin hyperbolique $X_k + \tau P$ comme on l'a fait dans la démonstration du théorème 20.

Pour finir, nous allons établir le résultat suivant, qui trouvera son application au chapitre III :

THÉORÈME 22. - Soit

$T_{\tau} = z_1^2 X_{20, \tau}(y) + z_1 z_2 X_{11, \tau}(y) + z_2^2 X_{02, \tau}(y) + \varepsilon z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$ un chemin de germes de champ en $0 \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ les facteurs $\mathbb{R}^{n-2}$ et $\mathbb{R}^2$ ayant pour coordonnées $(y_1, \dots, y_{n-2})$ et (z_1, z_2) respectivement. Les champs $X_{20, \tau}, X_{11, \tau}, X_{02, \tau}$ sont des chemins de germes de champs le long de $\{0\} \times [0, 1] \subset F \times [0, 1]$ où $F = \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$ tels que $X_{20, \tau}(0) - \varepsilon X_{02, \tau} \neq 0$; $\varepsilon = \pm 1$ ($+1$: cas hyperbolique, -1 : cas elliptique). Soit P_{τ} , $P_{\tau} \in \mathcal{M}_{\tau}^3(z_1, z_2) V_{\tau}(n)$ et $X_{\tau} = T_{\tau} + P_{\tau}$. Alors l'équation $X_{\tau} \cdot f_{\tau} = h_{\tau}$ admet une solution $f_{\tau} \in \mathcal{C}_1(n)$ pour tout $h_{\tau} \in \mathcal{M}_{\tau}(z_1, z_2)$. De plus si $h_{\tau} \in \mathcal{M}_{\tau}^5(y, z_1, z_2)$ on peut trouver une solution $f_{\tau} \in \mathcal{M}_{\tau}^4(y, z_1, z_2)$ (y mis pour $(y_1, \dots, y_p))$.

Démonstration. - Soit $h_{\tau} \in \mathcal{M}_{\tau}(z_1, z_2)$. Par la proposition 7, il existe un champ taylorien α_{τ} solution de :

$\tilde{X}_\tau \cdot \alpha_\tau = \tilde{h}_\tau$ (et tel que $\alpha_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^h(y, z_1, z_2)$ si $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^5(y, z_1, z_2)$)

Soit f_τ un prolongement $\mathcal{C}^\infty$ de α_τ : $\tilde{f}_\tau = \alpha_\tau$.

Alors $g_\tau = X_\tau \cdot f_\tau - h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1, z_2)$. Pour conclure il suffit qu'il existe $\ell_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1, z_2)$ solution de :

$$X_\tau \ell_\tau = g_\tau \quad (1)$$

Si $\varepsilon = +1$, le chemin X_τ est hyperbolique et l'existence de ℓ_τ est assurée par le théorème 10.

Si X_τ est elliptique ($\varepsilon = -1$), le lemme 9 nous apprend qu'il existe un chemin de germes de difféomorphismes G_τ et un chemin $\mu_\tau \in \mathcal{Z}_\tau(n)$, avec $\mu_\tau(0) \neq 0$ tels que :

$$\frac{1}{\mu_\tau} G_\tau X_\tau = X'_\tau = z_1^2 X_{20\tau}(0) + z_1 z_2 X_{11\tau}(0) + z_2^2 X_{02\tau}(0) + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + P_\tau$$

avec $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) V_\tau(n)$

Soit alors $g'_\tau = g_\tau \circ G_\tau^{-1} \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$.

Le théorème 12 nous apprend que l'équation $X'_\tau \ell'_\tau = \frac{1}{\mu_\tau} h'_\tau$ a une solution $\ell'_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$. Alors, si $\ell_\tau = \ell'_\tau \circ G_\tau$, $\ell_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z)$ est solution de l'équation (1). Ce qui achève la démonstration du théorème.

Pour clore ce chapitre, nous allons montrer que dans les théorèmes 20 et 21 ci-dessus, le difféomorphisme de conjugaison peut être trouvé continu par rapport à la perturbation. Nous allons nous limiter au résultat de linéarisation d'un champ à singularité isolée (c'est à dire au théorème de linéarisation de Sternberg), mais les considérations développées ci-dessous s'appliquent à tous les problèmes analogues, en particulier aux résultats sur les formes différentielles établis dans le chapitre III.

Considérons un champ linéaire X sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions (P_2) . Si B est une boule centrée en $0 \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $\chi(B)$ l'es-

pace des champs de vecteurs sur B , muni de la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{C}^\infty$ sur B et par $\mathcal{M}(B)$ l'idéal des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur B , s'annulant en 0 . Pour tout $k \geq 0$, $\mathcal{M}(B)^k \chi(B)$ est un sous espace linéaire fermé de $\chi(B)$. On désigne également par $\text{Diff}_0(B)$ l'espace des difféomorphismes fixant l'origine, de B dans $\mathbb{R}^n$. On peut alors énoncer le théorème de linéarisation sous la forme suivante : Soit X un champ linéaire vérifiant les conditions (P_2) . Alors il existe des boules B, B', B'' centrées en $0 \in \mathbb{R}^n$, $\bar{B}' \subset \text{int. } B$, $\bar{B}'' \subset \text{int. } B'$, et un voisinage $\mathcal{U}$ de $0 \in \mathcal{M}(B)^2 \chi(B)$ tel que pour tout $P \in \mathcal{U}$, il existe $g \in \text{Diff}_0(B')$ vérifiant $g(B') \supset B''$ et $g_\star(X) = X + P$ sur B'' .

Le seul changement par rapport à l'énoncé du théorème 22 ci-dessus tient dans l'affirmation que les supports des difféomorphismes g et g^{-1} peuvent être choisis localement indépendants de P : cela résulte facilement de la démonstration du théorème 20.

On se pose maintenant la question suivante : peut-on choisir g continuellement par rapport à P ? Pour répondre à cette question, nous allons suivre à nouveau les étapes de la démonstration du théorème 22, dans le cas où $F = \{0\}$. La première étape est une étape formelle. Notons tout d'abord que l'application $\pi : P \rightarrow \tilde{P}$ qui à chaque $P \in \chi(B)$ fait correspondre son champ formel $\tilde{P}$ en 0 , $\tilde{P} \in \tilde{V}(n)$, est une application continue (B étant une boule quelconque centrée en $0 \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{V}(n)$ étant munie de la topologie naturelle des jets infinis, limite projectives des topologies sur les jets d'ordre finis. En fait, on sait bien que $\tilde{V}(n)$ s'identifie topologiquement au quotient $\chi(B)/\mathcal{M}(B)^\infty \chi(B)$, grâce au théorème de prolongement de Borel). Le champ $\tilde{X}_\tau = \tilde{X} + \tau \tilde{P}$ dépend continuellement de $\tilde{P}$ donc de P ; si on revient à la démonstration de la proposition 2, il est facile de vérifier que l'opérateur σ_τ , inverse à droite du crochet formel par $\tilde{X}_\tau$ dépend continuellement de $\tilde{X}_\tau$. Donc la solution Y_τ de l'équation :

$[X_\tau, Y_\tau] = \dot{\tilde{P}}_\tau = P$, donnée par $\tilde{Y}_\tau = \sigma_\tau \tilde{P}$ dépend continuellement de P . L'intégration de $\tilde{Y}_\tau$ fournit un chemin $\tilde{g}_\tau \in \widetilde{\text{Diff}}_0(n)$ tel que $\tilde{g}_{\tau*} \tilde{X} = \tilde{X}_\tau$ dépendant continuellement de $\tilde{Y}_\tau$. En particulier, si $\tilde{g} = \tilde{g}_1$ on a $\tilde{g}_{*} \tilde{X} = \tilde{X} + \tilde{P}$ et $\tilde{g}$ dépend continuellement de P . On peut résumer cela dans le lemme suivant :

LEMME 23. - Il existe une application continue $\rho_1 : \mathcal{M}(B)^2 \chi(B) \rightarrow \widetilde{\text{Diff}}_0(n)$ telle que $\rho_1(P)_* \tilde{X} = \tilde{X} + \tilde{P}$.

Pour se ramener à une conjugaison $\mathcal{C}^\infty$ on doit prolonger $\tilde{g} = \rho_1(P)$. Le théorème de prolongement de Borel permet d'affirmer qu'un tel prolongement existe par exemple dans $\text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$. C'est à dire que l'application $\pi : \text{Diff}_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \widetilde{\text{Diff}}_0(n)$ qui à un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ préservant 0, associe son jet ∞ en 0 est une application surjective. Cette application n'admet pas de section linéaire continue ($\text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^n$ qui en fait un espace de Fréchet). Cependant une telle application linéaire continue et surjective possède toujours une inverse à droite continue (mais non linéaire) (voir dans E. Michael [11] le théorème 3.2 et la première remarque du dernier paragraphe page 364). C'est l'utilisation d'une telle section qui va nous permettre d'assurer la continuité, comme me l'a suggéré M. Hermann que je remercie ici. Soit donc μ une section continue de l'application π . Posons $\rho_2(P) = \mu \circ \rho_1(P)^{-1}$. Le champ $\rho_2(P)_*(X+P)$ est défini sur le voisinage $\rho_2(P)(B)$ de l'origine. Pour lever cette dépendance par rapport à P , on remarque tout d'abord que si B_1 est une boule centrée en 0, telle que $\bar{B}_1 \subset \text{int. } B$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\text{Id} \in \text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$ tel que pour $\forall g \in \mathcal{V}$, $g(B) \supset \bar{B}_1$. Comme ρ_2 est continu, il existe un voisinage $\mathcal{U}_1$ de $0 \in \mathcal{M}(B)^2 \chi(B)$ tel que $\rho_2(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{V}$. On peut donc finalement énoncer :

LEMME 24. - Soit B_1 une boule centrée en $0 \in \mathbb{R}^n$, $\bar{B}_1 \subset \text{int } B$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $0 \in \mathcal{M}(B)^2 \chi(B)$ et une application continue

$\rho_2 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$ telle que :

- 1) $\rho_1(P)(B) \supset \bar{B}_1$ pour $\forall P \in \mathcal{U}_1$
- 2) $\rho_1(P)_* (X+P) = X$ modulo $\mathcal{M}(B)^\infty \chi(B_1)$ sur B_1

Soit une boule B_1 comme dans le lemme précédent. Nous allons nous restreindre aux champs $X+P$ avec $P \in \mathcal{M}(B)^\infty \chi(B)$. On pose à nouveau $X_\tau = X + \tau P$ et l'on veut résoudre d'une façon continue par rapport à P :

$$[X_\tau, Y_\tau] = \dot{X}_\tau = P$$

Pour cela il convient de revenir à la démonstration du théorème 10. Désignons par $\chi_\tau(B)$ l'espace des champs $\mathcal{C}^\infty$ sur $B \times [0,1]$, parallèles au facteur B et par $\mathcal{M}_\tau(B)$ l'idéal des fonctions sur $B \times [0,1]$, nulles sur $\{0\} \times [0,1]$ pour toute boule B centrée en $0 \in \mathbb{R}^n$. Une lecture attentive des démonstrations de la proposition 11 et du théorème 10 convaincra le lecteur que l'on y démontre en fait le résultat technique suivant :

LEMME 25. - Soit B_1 une boule centrée en $0 \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}_2$ de $0 \in \mathcal{M}_\tau(B_1)^\infty \chi_\tau(B_1)$ et une boule B_2 , centrée en $0 \in \mathbb{R}^n$, $\bar{B}_2 \subset \text{int } B_1$, telle que pour tout X_τ , $X_\tau - X \in \mathcal{U}_2$ il existe un opérateur continu :

$$\sigma(X_\tau) : \mathcal{M}_\tau(B_1)^\infty \chi_\tau(B_1) \rightarrow \mathcal{M}_\tau(B_2)^\infty \chi_\tau(B_2)$$

inverse du crochet par X_τ sur $B_2 \times [0,1]$ (C'est à dire tel que :

$[X_\tau, \sigma(X_\tau)(Z_\tau)] = Z_\tau$ sur $B_2 \times [0,1]$ pour tout $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau(B_1)^\infty \chi_\tau(B_1)$ tel que :

$$|\sigma(X_\tau)(Z_\tau)|_{B_2, p} \leq K_{p,k} |Z_\tau|_{B_1, q(p,k)} \rho^k$$

pour $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau(B_1)^\infty \chi_\tau(B_1)$.

($|Y_\tau|_{B,p}$ désigne la borne supérieure des valeurs absolues des dérivées d'ordre $\leq p$ des composantes de $Y_\tau \in \chi_\tau(B)$, sur B). La constante $K_{p,k}$ dépend de $|X_\tau|_{B_1, \ell(p,k)}$; les nombres $q(p,k)$, $\ell(p,k)$ sont des fonctions de $N \times N \rightarrow N$.

Soit donc $P \in \mathcal{M}(B_1)^\infty \chi(B_1)$. L'application $P \rightarrow X_\tau = X + \tau P$ est une continue et on peut trouver un voisinage $\mathcal{U}_3$ de $0 \in \mathcal{M}(B_1)^\infty \chi(B_1)$ tel que si $P \in \mathcal{U}_3$ alors $X_\tau \in \mathcal{U}_2$ (Voisinage défini dans le lemme précédent). Les inégalités énoncées dans le lemme, pour $\forall k, p$ assez grands, permettent de montrer que l'application $P \rightarrow \sigma(X_\tau)(P)$ est continue. (En fait, pour chaque X_τ , $\sigma(X_\tau)$ est un opérateur continu. D'autre part, la continuité de $X_\tau \rightarrow \sigma(X_\tau)$ suit de la continuité de l'intégration le long des trajectoires d'un champ sur une intervalle de temps fini, par rapport aux conditions initiales et de la majoration uniforme, permise au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, par la présence du facteur ρ^k dans l'inégalité ; on rappelle en effet que $\sigma(X_\tau)$ est défini à l'aide d'intégrations le long des trajectoires de X_τ). L'intégration du champ $Y_\tau = \sigma(X_\tau)(P)$ définit un difféomorphisme $\rho_3(P)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et tel que :

$$\rho_3(P)_*(X) = X + P$$

sur l'image du domaine de définition de $\rho_3(P)$, qui est un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ dépendant de P . Comme Y_τ dépend continuellement de P , on peut se débarrasser comme plus haut de cette dépendance en restreignant éventuellement $\mathcal{U}_3$ et en se limitant à une boule B_3 , $\bar{B}_3 \subset B_1$.

On peut alors énoncer :

LEMME 26. - Soit B_1 une boule centrée en $0 \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe des boules B_2, B_3 centrées en $0 \in \mathbb{R}^n$, $\bar{B}_2 \subset \text{int } B_1$, $\bar{B}_3 \subset \text{int } B_2$, un voisinage $\mathcal{U}_3$ de $0 \in \mathcal{M}(B_1)^\infty \chi(B_1)$ et une application

$\rho_3 : \mathcal{U}_3 \rightarrow \text{Diff}_0(B_2)$ tels que :

$$1) \rho_3(P)(B_2) \supset \bar{B}_3 \text{ pour } \forall P \in \mathcal{U}_2$$

$$2) \rho_3(P)_*(X+P) = X \text{ sur } B_3.$$

Clairement, en combinant les lemmes 24 et 26 on obtient le résultat final exprimant la continuité de la linéarisation de $X+P$:

THÉOREME 27. - Soit X un champ linéaire en $0 \in \mathbb{R}^n$, vérifiant les conditions (P_2) . Soit B une boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en $0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $0 \in \mathcal{M}(B)^2 \chi(B)$, des boules B', B'' telles que $\bar{B}'' \subset \text{int } B'$ et $\bar{B}' \subset \text{int } B$ et une application continue

$\rho : \mathcal{M}(B)^2 \chi(B) \rightarrow \text{Diff}_0(B')$ telle que :

$$1) \rho(P)(B') \supset \bar{B}'' \text{ pour tout } P \in \mathcal{M}(B)^2 \chi(B)$$

$$2) \rho(P)_*(X) = X+P \text{ sur } B''.$$

CHAPITRE II

SINGULARITÉS DES GERMES DE CHAMPS DE VECTEURS EN $0 \in \mathbb{R}^2$.

A la fin du chapitre précédent, nous avons établi quelques résultats relatifs aux germes $\mathcal{C}^\infty$ de champs de vecteurs (Théorème de linéarisation et théorème de réduction à un champ polynomial de toute contraction hyperbolique). Ces résultats ont été obtenus grâce à la résolution d'une équation formelle et celle d'une équation pour les éléments plats le long de la singularité du champ. La première équation a des solutions si des conditions (P_2) sont vérifiées par les valeurs propres et la seconde, dès que la singularité est hyperbolique .

Nous allons reprendre ici cette étude pour l'approfondir , dans le cas des germes de champs en $0 \in \mathbb{R}^2$ et à singularité isolée (0 est l'unique singularité), en conservant encore la séparation entre problème formel et problème plat.

Tout d'abord, nous allons examiner les réductions formelles possible d'un champ lorsque les conditions (P_2) ne sont plus vérifiées. Le champ n'est alors plus linéarisable, mais nous établirons qu'un champ formel est toujours équivalent à un champ polynomial, lorsque sa partie linéaire est non nulle et non équivalente à $z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$. Ce résultat généralise un résultat de F. Takens pour les champs ayant un 1-jet de ro-

tation [23]. L'outil utilisé à ce sujet est la notion de forme normale formelle associée à tout 1-jet de champ en $0 \in \mathbb{R}^n$. Cette notion a été introduite par F. Takens [24].

On étudiera ensuite le problème plat pour les champs non hyperboliques en utilisant la méthode de l'éclatement de la singularité (Cette notion d'éclatement a été introduite et utilisée systématiquement par F. Takens ; voir [24]). Nous utiliserons plus précisément des résultats de F. Dumortier qui nous permettront de montrer que les équations I^∞ et II^∞ associées au champ ont des solutions pour une large classe de champs. Pour ces champs on pourra démontrer que les propriétés formelles impliquent les propriétés $\mathcal{C}^\infty$ comparables. Par exemple, en dehors d'un ensemble proalgébrique de codimension infinie, l'existence d'une intégrale première formelle α pour un champ ayant au moins une séparatrice implique celle d'une intégrale première $\mathcal{C}^\infty$ de jet α .

1. ÉTUDE FORMELLE DES CHAMPS DE VECTEURS.

1.1. Forme normale pour les champs de vecteurs formels en $0 \in \mathbb{R}^n$.

Nous considérons ici un germe de champ X en $0 \in \mathbb{R}^n$, dont 0 est l'unique singularité. Les champs tayloriens le long de la singularité se réduisent alors aux espaces de jets en 0. Soient $\tilde{\mathcal{C}}^k(n)$ et $\tilde{V}^k(n)$ les espaces de k -jets de fonctions et de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{\mathcal{C}}^k(n) = \mathcal{C}(n)/\mathcal{M}(n)^{k+1} \quad \text{et} \quad \tilde{V}^k(n) = \mathcal{V}(n)/\mathcal{M}(n)^{k+1} \quad \mathcal{V}(n)$$

Nous noterons par $\tilde{\mathcal{C}}(n)$ et $\tilde{V}(n)$ les espaces de jets d'ordre ∞ .

Les coordonnées $(z_1, \dots, z_n)$ étant fixées, on identifie un k -jet avec un polynôme de degré $\leq k$ ou avec un champ à composantes des poly-

nômes de degré $\leq k$ respectivement. Les polynômes sont remplacés par des séries formelles si $k = \infty$

Soit alors :

$$\tilde{V}(n) = \tilde{V}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{V}_k \oplus \dots$$

la décomposition de $\tilde{V}(n)$ en somme directe, l'espace $\tilde{V}_k$ étant formé par les k -jets de $(k-1)$ jet nul, c'est à dire par les k -jets de champs de vecteurs dont les composantes sont des polynômes homogènes de degré k (ou bien sont nulles)

Soit X un champ linéaire : $X = \sum_{i,j} a_{i,j} z_j \frac{\partial}{\partial z_i}$ (c'est à dire un 1-jet de champs).

$$\text{On a } [\tilde{X}, \tilde{V}_k] \subset \tilde{V}_k$$

Le crochet par $\tilde{X}$ induit une application linéaire $\rho_{X,k}$ de $\tilde{V}_k$ dans $\tilde{V}_k$. Rappelons que les conditions (P_2) introduites dans le chapitre précédent sont équivalentes à la condition : $\rho_{X,k}$ est surjectif pour $k \geq 2$, ou encore $[\tilde{X}, \tilde{M}^2 \tilde{V}(n)] = \tilde{M}^2 \tilde{V}(n)$.

Si les conditions (P_2) ne sont pas remplies, pour certain k , l'image $\tilde{H}_k = [\tilde{X}, \tilde{V}_k] \subset \tilde{V}_k$ est différente de $\tilde{V}_k$.

Le résultat de linéarisation formelle établi au chapitre I a été généralisé par F. Takens par l'introduction de la notion de forme normale formelle. Pour cela, on choisit dans chaque $\tilde{V}_k$ un sous espace $\tilde{G}_k$ supplémentaire de $\tilde{H}_k$ ($\tilde{G}_k = \{0\}$ si $\tilde{H}_k = \tilde{V}_k$). On a :

PROPOSITION 1 [24]. - Soit X un champ linéaire et $(\tilde{G}_k)_k$ un choix d'un facteur direct de l'image $\tilde{H}_k = [\tilde{X}, \tilde{V}_k]$ dans chaque $\tilde{V}_k$. Alors si $\tilde{P} \in \tilde{M}(n) \tilde{V}(n)$, il existe un difféomorphisme formel $\tilde{g}$ tel que :

$$\tilde{g}_\star(\tilde{X} + \tilde{P}) = \tilde{X} + g_2 + \dots + g_k + \dots$$

avec $g_k \in \tilde{G}_k$.

DÉFINITION 2. - Le champ $\tilde{X} + g_2 + \dots + g_k + \dots$ sera appelé : une forme normale formelle de $\tilde{X} + \tilde{P}$.

On désignera par : $\tilde{G}_X$, $\tilde{G}_X = \tilde{G}_2 \oplus \tilde{G}_3 \oplus \dots$, la somme directe des $\tilde{G}_k$ et par $\tilde{F}_X = \{\tilde{Y} \mid \tilde{Y} - \tilde{X} \in \tilde{G}_X\}$. $\tilde{F}_X$ qui est un espace affine de $\tilde{V}$ sera appelé : espace des formes normales. Cet espace dépend évidemment du choix des $\tilde{G}_k$.

Enfin on désignera par $\tilde{V}_X^k = \{\tilde{Y}^k \in \tilde{V}^k(n) \mid \tilde{Y}^1 = X\}$; l'espace des k-jets dont le 1-jet est égal à X.

DÉFINITION 3. - Soit $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{V}(n)$. S'il existe un difféomorphisme formel $\tilde{g}$ tel que $\tilde{g}_* \tilde{X} = \tilde{Y}$, on dira que $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont formellement équivalents et on écrira : $\tilde{X} \sim \tilde{Y}$.

La proposition 1 assure que chaque $\tilde{Y} \in \tilde{V}_X$ est équivalente à une forme normale dans $\tilde{F}_X$. On peut se demander si l'on peut réaliser cette correspondance en construisant une application explicite de $\tilde{V}_X \rightarrow \tilde{F}_X$, par exemple une application algébrique.

Considérons par exemple un champ X tel que $\tilde{H}_X = \bigoplus_{k \geq 2} \tilde{H}_k$ soit un idéal d'algèbre de Lie de $\tilde{M}^2 \tilde{V}(n)$ et tel que l'on puisse choisir $\tilde{G}_k = \text{Ker } \rho_{X,k}$. (C'est le cas si le champ vérifie les conditions (P_2)). Pour démontrer la proposition 1, ci-dessus en utilisant la proposition 1.2, on décompose $\tilde{P} = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2$ avec $\tilde{P}_1 \in \tilde{H}_X$ et $\tilde{P}_2 \in \tilde{G}_X$ et on pose $\tilde{X}_\tau = \tilde{X} + \tau \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 = \tilde{X} + \tilde{P}_\tau$. Si $\tilde{H}_{X,\tau} = \mathcal{C}^\infty[0,1] \otimes \tilde{H}_X$. Alors $[\tilde{P}_\tau, \tilde{H}_{X,\tau}] \subset \tilde{H}_{X,\tau}$ et X admet un inverse σ de $\tilde{H}_{X,\tau}$ dans $\tilde{H}_{X,\tau}$ de degré 0. On peut donc résoudre l'équation :

$$[\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \dot{\tilde{X}}_\tau \quad \text{et par intégration de } \tilde{Y}_\tau, \text{ démontrer que}$$

$$\tilde{X} + \tilde{P} \sim \tilde{X} + \tilde{P}_2.$$

On voit ici que la forme normale est obtenue en prenant la projection de $\tilde{P} \in \tilde{H}_X \oplus \tilde{G}_X$ sur le facteur $\tilde{G}_X$.

Ce n'est pas le cas en général. Mais nous allons construire dans tous

les cas une application algébrique de $\tilde{V}_X \rightarrow \tilde{F}_X$ donnant la forme normale.

On désignera par $\text{Diff}_0(n)$ l'espace des germes de difféomorphismes fixant $0 \in \mathbb{R}^n$ et tangent à l'identité en 0, et par $\widetilde{\text{Diff}}_0^k(n)$ l'espace des k -jets de tels difféomorphismes (que l'on identifiera à des difféomorphismes polynomiaux). On désignera également par $\tilde{\mathcal{E}}^k(n,n)$ les jets d'ordre k d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. $\widetilde{\text{Diff}}_0^k(n)$ opère sur $\tilde{V}^k$ et sur $\tilde{V}_X^k$: $\widetilde{\text{Diff}}_0^k(n)$ ainsi que $\tilde{V}^k(n)$ et $\tilde{\mathcal{E}}^k(n)$ sont des espaces de dimension finie. On peut parler d'applications polynomiales entre ces espaces : ce sont les applications dont les composantes sont des fonctions polynômes dans un système quelconque de coordonnées : $(z_1, \dots, z_n)$.

On désignera par $\tilde{F}_X^k = \{\alpha = X + g_2 + \dots + g_k \mid g_i \in \tilde{G}_i\}$ et par $\pi_{k,l}$ la projection canonique entre l'espace des k -jets et l'espace des l -jets d'un espace donné.

Alors :

PROPOSITION 4. - Soit X un champ linéaire. Alors il existe des applications polynomiales $\varphi_k : \tilde{V}_X^k \rightarrow \widetilde{\text{Diff}}_0^k(n)$, $k \geq 2$, telles que :

- i) $\pi_{k,k-1} \circ \varphi_k = \varphi_{k-1} \circ \pi_{k,k-1}$ pour $k \geq 3$
- ii) $\varphi_k(\tilde{Y}^k)_* \tilde{Y}^k \in \tilde{F}_X^k$ pour tout $\tilde{Y}^k$ dans $\tilde{V}_X^k$
- iii) $\varphi_k(\tilde{Y}^k) = \text{Id}$ si $\tilde{Y}^k \in \tilde{F}_X^k \subset \tilde{V}_X^k$

Remarque. - La condition i) implique que les φ_k induisent à la limite une application $\varphi = \varphi_\infty : \tilde{V}_X \rightarrow \widetilde{\text{Diff}}_0(n)$.

On dira que φ est une application algébrique. Le champ $\varphi(\tilde{Y})_{\tilde{Y}}^*$ est une forme normale de $\tilde{Y}$.

La proposition 4 montre que l'on peut obtenir les formes normales par une application algébrique. Elle implique évidemment la proposition 1.

Démonstration. - Nous commençons par démontrer le lemme suivant :

LEMME 5. - Soit $\tilde{Y}^k = X + g_2 + \dots + g_{k-1} + \tilde{X}_k$, $k \geq 2$ (si $k = 2$ on

suppose que tous les g_i sont nuls), tel que $g_i \in \tilde{G}_i$ et $\tilde{X}_k \in \tilde{V}_k$. Alors il existe un $\tilde{h} \in \text{Diff}_0^k(n)$ de la forme :

$\tilde{h} = (z_1 + h_1, \dots, z_n + h_n)$ avec $h_i \in \tilde{\mathcal{M}}^k \tilde{\mathcal{E}}^k$ tel que $\tilde{h}_* \tilde{Y}^k \in \tilde{F}_X^k$ et tel que $\tilde{h} = \text{Id}$ si $\tilde{Y}^k \in \tilde{F}_X^k$.

De plus, on peut choisir $\tilde{h}$ de façon que les coefficients des h_i dépendent polynomialement de ceux de $\tilde{X}_k$.

Le lemme implique, par récurrence sur k , les conclusions de la proposition. En effet :

Si $\tilde{Y}^2 = X + \tilde{X}_2$ avec $\tilde{X}_2 \in \tilde{V}_2$.

Le lemme implique qu'il existe $\tilde{h} \in \text{Diff}_0^2(n)$; $\tilde{h} = \text{Id}$ modulo $\tilde{\mathcal{M}}^2 \tilde{\mathcal{E}}^{(n,n)}$ et tel que $\tilde{h}_* \tilde{Y}^2 \in \tilde{F}_X^2$ et que $\tilde{h}$ dépende polynomialement de $\tilde{X}_2$.

On pose $\varphi_2(\tilde{Y}^2) = \tilde{h}$

Supposons que l'on ait établi la proposition pour tout $\ell \leq k$. Soit $\tilde{Y}^{k+1} \in \tilde{V}_X^{k+1}$.

Les coordonnées $(z_1, \dots, z_n)$ étant fixées, on peut identifier $\text{Diff}_0^k(n)$ avec un sous-espace de $\text{Diff}_0^{k+1}(n)$ et faire ainsi agir $\text{Diff}_0^k(n)$ sur $\tilde{V}_X^{k+1}$. Considérons le difféomorphisme : $\varphi_k(\pi_{k+1,k} \tilde{Y}^{k+1})$. Ses coefficients dépendent polynomialement de ceux de $\tilde{Y}^{k+1}$ et

$$\varphi_k(\pi_{k+1,k} \tilde{Y}^{k+1})_* \tilde{Y}^{k+1} = X + g_1 + \dots + g_k + \tilde{X}^{k+1}$$

Les composantes de $\tilde{X}^{k+1}$ dépendent également polynomialement de ceux de $\tilde{Y}^{k+1}$.

Par le lemme, il existe $\tilde{h} \in \text{Diff}_0^{k+1}(n)$ tel que

$$\tilde{h}_* \cdot \varphi_k(\pi_{k+1,k} \tilde{Y}^{k+1})_* \tilde{Y}^{k+1} \in \tilde{F}_{k+1}^{k+1}$$

Posons $\varphi_{k+1}(\tilde{Y}^{k+1}) = \tilde{h}_* \cdot \varphi_k(\pi_{k+1,k} \tilde{Y}^{k+1})$.

Les composantes de $\tilde{h}$ dépendant polynomialement de celles de $\tilde{X}^{k+1}$, l'application φ_{k+1} est polynomiale de $\tilde{V}_X^{k+1}$ dans $\tilde{F}_X^{k+1}$ ce qui est la conclusion ii). La conclusion i) suit du fait que $\tilde{h} = \text{Id mod } \tilde{\mathcal{M}}^{k+1} \tilde{\mathcal{E}}^{(n,n)}$ et

iii) du fait que, dans le lemme on a $\tilde{h} = \text{Id}$ si $\tilde{Y}^{k+1} \in \tilde{F}^{k+1}$.

Démonstration du lemme 5 . - Soit $\tilde{Y}^k = X + g_2 + \dots + g_{k-1} + \tilde{X}_k$ comme dans l'énoncé du lemme.

Décomposons $\tilde{X}_k$ en $\tilde{X}_k = \tilde{Z}_k + \tilde{T}_k$ avec $\tilde{Z}_k \in \tilde{G}_k$ et $\tilde{T}_k \in \tilde{H}_k$ et posons :

$$\tilde{Y}_\tau = X + g_1 + \dots + g_{k-1} + (1-\tau)\tilde{T}_k + \tilde{Z}_k$$

On cherche $\tilde{R}_k \in \tilde{V}_k$, champ homogène de degré k , tel que :

$$[\tilde{Y}_\tau, \tilde{R}_k] = \tilde{Y}_\tau = -\tilde{T}_k \text{ modulo } \tilde{m}^{k+1} \tilde{V}(n)$$

Mais, modulo $\tilde{m}^{k+1} \tilde{V}(n)$, cette équation est équivalente à :

$$[\tilde{X}, R_k] = -\tilde{T}_k \text{ modulo } \tilde{m}^{k+1} \tilde{V}(n)$$

qui a une solution puisque $\tilde{T}_k \in \tilde{H}_k$. D'autre part, on peut choisir cette solution $\tilde{R}_k$ à coefficients dépendant linéairement de ceux de $\tilde{T}_k$ puisque $\tilde{R}_k \rightarrow [\tilde{X}, \tilde{R}_k]$ est une application linéaire surjective de $\tilde{V}_k$ sur $\tilde{H}_k$, il suffit de choisir un facteur direct du noyau de cette application.

Soit $\tilde{R}_k = \sum_{\alpha, i} a_{\alpha, i} z^\alpha \frac{\partial}{\partial z_i}$ la solution trouvée.

α est un n -multi-indice, $|\alpha| = k$. Soit λ_τ le groupe à un paramètre défini par le champ polynomial R_k dont le k -jet est $\tilde{R}_k$. Alors il est facile de vérifier que :

$$\tilde{\lambda}_\tau(z) = (z_i + \sum_{\alpha} a_{\alpha, i} z^\alpha \tau)_{i=1, \dots, n}$$

Comme : $\tilde{\lambda}_\tau^k \tilde{Y}_0^k = \tilde{Y}_\tau^k$

on a $\tilde{\lambda}_1^k \tilde{Y}_0^k = \tilde{\lambda}_1^k \tilde{Y}^k \in \tilde{F}_X^k$

On peut prendre $\tilde{h} = \tilde{\lambda}_1^k$.

Les coefficients de $\tilde{h}$ sont égaux à ceux de champ $\tilde{R}_k$ qui dépendent eux-mêmes linéairement de ceux de $\tilde{X}_k$.

De plus, si $\tilde{Y}^k \in \tilde{F}_X^k$, on a $\tilde{T}_k = 0$; le choix linéaire pour $\tilde{R}_k$ conduit à prendre $\tilde{R}_k = 0$ et donc $\tilde{\lambda}_\tau^k = \text{Id}$. D'où le résultat.

Considérons un sous-ensemble algébrique réel $\bar{\Sigma} \subset \tilde{\mathbb{F}}_X^k$ (c'est à dire un sous ensemble défini par l'annulation d'un nombre fini de polynômes et ayant pour partie régulière une variété de codimension i). Il est connu que :

$$\Sigma = \{ \tilde{Y} \in \tilde{V}_X^k \mid \exists \tilde{g} \in \text{Diff}_0^k(n) \text{ tel que } \tilde{g}_* \tilde{Y} \in \bar{\Sigma} \}$$

est un ensemble semi-algébrique . Que Σ soit un ensemble semi-algébrique résulte du théorème de Tarski-Seidenberg (voir [17]).

La proposition 4 permet d'améliorer ce résultat.

LEMME 6. - Soit $\bar{\Sigma} \subset \tilde{\mathbb{F}}_X^k$ un sous-ensemble algébrique de $\tilde{\mathbb{F}}_X^k$, tel que si $\tilde{g} \in \text{Diff}_0^k(n)$ et $\tilde{\alpha} \in \bar{\Sigma}$ vérifient $\tilde{g}_* \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathbb{F}}_X^k$ alors $\tilde{g}_* \tilde{\alpha} \in \bar{\Sigma}$. Alors le sous-ensemble

$$\Sigma = \{ \tilde{Y} \in \tilde{V}_X^k \mid \exists \tilde{g} \in \text{Diff}_0^k(n), \tilde{g}_* \tilde{Y} \in \bar{\Sigma} \}$$

est un sous-ensemble algébrique de $\tilde{V}_X^k$. De plus : $\text{cod}_{\tilde{V}_X^k} \Sigma = \text{cod}_{\tilde{\mathbb{F}}_X^k} \bar{\Sigma}$.

Démonstration. - Soit $\tilde{Y} \in \Sigma$. Par définition, il existe $\tilde{g} \in \text{Diff}_0^k(n)$ tel que $\tilde{Z} = \tilde{g}_* \tilde{Y} \in \bar{\Sigma}$.

Soit $\psi_k : \tilde{V}_X^k \rightarrow \tilde{\mathbb{F}}_X^k$ l'application polynomiale donnée par

$$\psi_k(\tilde{Y}_k) = \varphi_k(\tilde{Y}_k)_* \tilde{Y}_k.$$

Nous allons montrer que $\psi_k(\tilde{Y}) \in \bar{\Sigma}$ et donc que Σ est l'ensemble algébrique $\psi_k^{-1}(\bar{\Sigma})$.

Notons que $\tilde{Y} = \tilde{g}_*^{-1} \tilde{Z}$ et que $\tilde{Z} \in \bar{\Sigma}$

Comme $\varphi_k(\tilde{Y})_* (\tilde{g}_*^{-1})_* \tilde{Z} \in \tilde{\mathbb{F}}_X^k$

par l'hypothèse faite on a

$$\varphi_k(\tilde{Y})_* (\tilde{g}_*^{-1})_* \tilde{Z} \in \bar{\Sigma}$$

Soit $\psi_k(\tilde{Y}_k) \in \bar{\Sigma}$

Montrons que si $i = \text{cod}_{\tilde{\mathbb{F}}_X^k} \bar{\Sigma}$ alors $\text{cod} \Sigma = i$ également : Prenons

$x_0 \in \bar{\Sigma}$ un point régulier^X de $\bar{\Sigma}$: $\exists$ i polynômes $f_1, \dots, f_i$ tels que $\bar{\Sigma}$ ait

localement en x_0 les équations :

$$\bar{\Sigma} = \{f_1 = \dots = f_i = 0\} \text{ et que } (df_1(x_0), \dots, df_i(x_0))$$

soit un système de rang i .

Sur $\tilde{F}_X^k$, Ψ_k induit l'identité. Donc $x_0 \in \Sigma$ et Σ est localement, en x_0 , défini par les équations :

$$\Sigma = \{f_1 \circ \Psi_k = \dots = f_i \circ \Psi_k = 0\}$$

La codimension de $\Sigma = \text{rang}(d(f_1 \circ \Psi_k)(x_0), \dots, d(f_i \circ \Psi_k)(x_0))$ est $\leq i$.

Mais comme $\Psi_k|_{\tilde{F}_X^k} = \text{Id}$,

$$\text{rang}(d(f_1 \circ \Psi_k), \dots, d(f_i \circ \Psi_k)) \geq \text{rang}(df_1, \dots, df_i) = i$$

Donc la codimension de Σ est exactement égale à i .

Remarque. - Le lemme permet de donner des équations explicites de Σ connaissant celles de $\bar{\Sigma}$.

Exemple de formes normales.

Nous allons décrire toutes les formes normales associées aux champs linéaires de $\mathbb{R}^2$, différents de 0 (Si un champ linéaire est nul, l'espace $\tilde{F}_X = \tilde{V}_X$. Le résultat est sans intérêt).

Compte tenu de la réduction de Jordan des matrices 2×2 , tout champ linéaire $X = \sum a_{i,j} z_j \frac{\partial}{\partial z_i} \neq 0$, est équivalent au champ, de matrice $(a_{i,j})$ égale à :

$$1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \epsilon \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \epsilon = 0 \text{ sauf } \epsilon = 1 \text{ éventuellement pour } \lambda_1 = \lambda_2 ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ non tous les deux nuls.}$$

Les champs en question sont les champs hyperboliques à valeurs propres λ_1, λ_2 réelles, si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ ou partiellement hyperbolique si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$

$$2) \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \text{ et } b \neq 0 ; \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad \text{avec } \alpha \neq 0 \\ a, b \in \mathbb{R} \quad \text{et } \beta \neq 0$$

Ces champs sont des contractions ou dilatations hyperboliques à valeurs propres complexes.

$$3) \quad \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} : \text{rotation d'angle } \lambda$$

$$4) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{champ dans les 2 valeurs propres sont nulles.}$$

Les champs correspondants s'écrivent :

$$X = (\lambda_1 z_1 + \varepsilon z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad (az_1 - bz_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + (bz_1 + az_2) \frac{\partial}{\partial z_2} \\ = -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{respectivement.}$$

Il est commode de classifier ces champs d'après la complexité de leur forme normale.

a) Les conditions (P_2) sont vérifiées : cela correspond au cas 1) lorsque $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}^-$ (est un irrationnel négatif) ou bien lorsque λ_1/λ_2 et $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus (\mathbb{N} - \{1\})$ ainsi qu'au cas 2) (contractions ou dilatations hyperboliques complexes).

Dans ces cas, l'espace $F_X = \{X\}$ et tout champ $\tilde{X} + \tilde{P}$, $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{M}}^2(2) \tilde{\mathcal{V}}(2)$ est formellement linéarisable comme on l'a vu dans le chapitre I.

b) Un nombre fini seulement des relations (P_2) ne sont pas vérifiées :

Cela correspond au cas 1) lorsque λ_1/λ_2 ou bien λ_2/λ_1 appartient à $\mathbb{N} - \{1\}$. Supposons par exemple que $\lambda_1 = \lambda \neq 0$ et que $\lambda_2 = m\lambda$ avec $m \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Une seule forme possible pour la matrice : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & m\lambda \end{pmatrix}$

Dans ce cas $\tilde{F}_X^k$ sera un sous-espace de dimension fini. Pour le déterminer, formons :

$$[X, z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_1}] = \lambda (i + mj - 1) z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_1}$$

$$\text{et} \quad \left[X, z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_2} \right] = \lambda(i + mj - m) z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_2}$$

On peut choisir $\tilde{G}_k = \{0\}$ pour $k \neq m$

$$\tilde{G}_m = z_1^m \frac{\partial}{\partial z_2}$$

D'où :

LEMME 7. - Si $X = \lambda(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + mz_2 \frac{\partial}{\partial z_2})$ avec $\lambda \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}$ alors la forme normale de tout champ $\tilde{X} + \tilde{P}$ avec $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{M}}^2 \tilde{V}(2)$ est :

$$\tilde{X} + \tilde{P} \sim \lambda z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (\lambda m z_2 + \alpha z_1^m) \frac{\partial}{\partial z_2} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Remarque. - $m \in \mathbb{N}$ car la formule est encore valable pour $m = 1$: on retombe alors dans le cas a) où les conditions (P_2) sont vérifiées.

c) Une infinité de relations (P_2) ne sont pas vérifiées.

Nous allons discerner trois cas différents :

$$C-1 \quad \text{Le cas diagonal : } X = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}^-$ (rationnel négatif) ou bien $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Le premier est un point de selle hyperbolique, le second est semi-hyperbolique : on supposera que $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = 0$.

Il existe alors des entiers ≥ 0 p et q tels que $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$. Dans le cas hyperbolique on choisira p et q premiers entre eux, dans le cas semi hyperbolique : p = 0 et q = 1. On pose $p+q = m$: c'est un entier ≥ 1 .

Pour déterminer les formes normales, on calcule :

$$\left[X, z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_1} \right] = (i\lambda_1 + j\lambda_2 - \lambda_1) z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_1}$$

$$\left[X, z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_2} \right] = (i\lambda_1 + j\lambda_2 - \lambda_2) z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_2}$$

On peut donc choisir :

$$\tilde{G}_k = \{0\} \quad \text{si } k \neq m + 1$$

$$\tilde{G}_{lm+1} = \{ z_1^{lp+1} z_2^{lq} \frac{\partial}{\partial z_1}, z_1^{lp} z_2^{lq+1} \frac{\partial}{\partial z_2} \} \quad \text{pour } l \geq 1.$$

$$C-2 \quad \text{La rotation : } X = \lambda \left(-z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \right)$$

Le plus simple pour traiter ce cas est de remarquer que l'on peut se ramener à une forme diagonale, après avoir généraliser la notion de forme normale aux champs complexes. On ne retient ensuite, parmi les formes normales trouvées, que les formes normales "réelles". On pourra également trouver la réduction dans [24]. Le résultat est le suivant.

$$G_k = \{0\} \quad \text{pour } k \neq 2l + 1$$

et

$$G_{2l+1} = \{ (z_1^2 + z_2^2)^l (-z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}), (z_1^2 + z_2^2)^l (z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}) \}$$

$$C-3 \quad \text{Le champ } z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$$

$$\text{on a : } \left[z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_1} \right] = i z_1^{i-1} z_2^{j+1} \frac{\partial}{\partial z_1}$$

et

$$\left[z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_2} \right] = i z_1^{i-1} z_2^{j+1} \frac{\partial}{\partial z_2} - z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_2}$$

Il est clair que $\tilde{V}_k$ est engendré par $\tilde{H}_k, z_1^k \frac{\partial}{\partial z_2}$ et $z_1^k \frac{\partial}{\partial z_1}$. On peut donc choisir $\tilde{G}_k = \{ z_1^k \frac{\partial}{\partial z_1}, z_1^k \frac{\partial}{\partial z_2} \}$.

Résumons ces résultats en un lemme :

LEMME 8. - Soit $\tilde{X} + \tilde{P} \in \tilde{V}_{\tilde{X}}$ un champ formel de 1-jet $\tilde{X}$. Alors

i/ Si $\tilde{X} = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, où p, q sont tels que $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$ et premiers entre eux si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $p = 0$ et $q = 1$ si $\lambda_2 = 0$ et $p = 1$, $q = 0$ si $\lambda_1 = 0$, $X + P$ a pour forme normale :

$$\tilde{X} + \tilde{P} \sim \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \sum_{\ell \geq 1} (z_1^p z_2^q)^\ell (a_\ell z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + b_\ell z_2 \frac{\partial}{\partial z_2})$$

avec $a_\ell, b_\ell \in \mathbb{R}$

ii/ Si $\tilde{X} = \lambda(-z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2})$, une forme normale de $\tilde{X} + \tilde{P}$ est :

$$\begin{aligned} \tilde{X} + \tilde{P} \sim & (-z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}) + \sum_{\ell \geq 1} (z_1^2 + z_2^2)^\ell [\alpha_\ell (-z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}) + \\ & + \beta_\ell (z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2})] \quad \alpha_\ell, \beta_\ell \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

iii/ Si $\tilde{X} = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$, une forme normale de $\tilde{X} + \tilde{P}$ est :

$$\tilde{X} + \tilde{P} \sim z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{\ell \geq 2} (a_\ell z_1^\ell \frac{\partial}{\partial z_1} + b_\ell z_1^\ell \frac{\partial}{\partial z_2}) \quad \text{avec } a_\ell, b_\ell \in \mathbb{R}$$

1.2. Réduction formelle des champs de degré de dégénérescence nul.

Suivant F. Dumortier [5], nous dirons qu'un germe Y , ou un champ formel $\tilde{Y}$, a un degré de dégénérescence nul si $\tilde{Y}(0) = 0$, $j^1(Y)(0) = \tilde{Y}^1 \neq 0$ et que $\tilde{Y}^1$ n'est pas équivalent à un automorphisme linéaire près à $z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$. Nous allons établir pour les champs formels de degré de dégénérescence nul un résultat de réduction généralisant celui obtenu par F. Takens pour les champs ayant un 1-jet de rotation [23]. (Voir aussi [7] pour un résultat analogue en terme d'équations différentielles).

Pour cela, nous allons travailler dans les espaces de formes normales formelles décrits plus haut. Nous avons déjà indiqué des cas où le champ $\tilde{X} + \tilde{P}$ était linéarisable ou bien équivalent à un champ polynomial (lemme 7). Pour clore la liste des champs de degré de dégénérescence nul il nous reste à considérer le champ diagonal et le champ de rotation du cas C- dans la classification faite plus haut.

L'intérêt des espaces de formes normales choisis ci-dessus est que l'espace $\tilde{G}_X$ est une sous-algèbre de Lie de $\tilde{V}_X$ ($\tilde{G}_X$ est tout simplement le noyau du crochet de Lie par $\tilde{X}$ sur $\tilde{M}^2 \tilde{V}(2)$: Ce n'est pas le cas pour l'espace associé à $\tilde{X} = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$).

Nous allons étudier uniquement le cas diagonal. Le cas de la rota-

tion a déjà été étudié par F. Takens [23] et peut d'ailleurs se déduire du cas diagonal par passage dans le domaine complexe comme il a déjà été dit plus haut.

Rappelons que :

$$\tilde{G}_X = \bigoplus_{k \geq 2} \tilde{G}_k \text{ se réduit à :}$$

$$\tilde{G}_X = \bigoplus_{\ell} \tilde{G}_{m\ell+1} \quad (m = p+q)$$

$$\text{avec } \tilde{G}_{m\ell+1} = \{z_1^{\ell p+1} z_2^{\ell q} \frac{\partial}{\partial z_1}, z_1^{\ell p} z_2^{\ell q+1} \frac{\partial}{\partial z_2}\}$$

Nous allons adopter comme vecteurs de base dans $\tilde{G}_{mk+1}$ les deux vecteurs :

$$\tilde{X}_k = (z_1^p z_2^q)^k (\lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2})$$

$$\tilde{Y}_k = (z_1^p z_2^q)^k (-\lambda_2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2})$$

$$\text{avec } \tilde{X} = \tilde{X}_0 \text{ et } \tilde{Y}_0 = -\lambda_2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

Comme nous l'avons remarqué plus haut, $\tilde{G}_X$ est une algèbre de Lie. Le crochet y est donné par :

LEMME 9. - Soit $\tilde{X}_k$ et $\tilde{Y}_\ell$ les champs définis ci-dessus. Alors, pour $k, \ell \geq 0$: $[\tilde{X}_k, \tilde{X}_\ell] = 0$, $[\tilde{X}_k, \tilde{Y}_\ell] = -k\delta \tilde{X}_{k+\ell}$ et $[\tilde{Y}_k, \tilde{Y}_\ell] = (\ell-k)\delta \tilde{Y}_{k+\ell}$
avec $\delta = -\lambda_2 p + \lambda_1 q \neq 0$

Considérons maintenant $\tilde{Z}_k = a_k \tilde{X}_k + b_k \tilde{Y}_k \in \tilde{G}^{km+1}$ et $\tilde{T}_\ell = \alpha_\ell \tilde{X}_\ell + \beta_\ell \tilde{Y}_\ell \in \tilde{G}^{\ell m+1}$. Le crochet $\tilde{T}_{\ell+k} = [\tilde{Z}_k, \tilde{T}_\ell]$ a des composantes $\alpha_{k+\ell}$ et $\beta_{k+\ell}$ sur $\tilde{X}_{k+\ell}$ et $\tilde{Y}_{k+\ell}$ données par :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k+\ell} \\ \beta_{k+\ell} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \ell b_k & -k a_k \\ 0 & (\ell-k) b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_\ell \\ \beta_\ell \end{pmatrix}$$

Si $\tilde{Z}_k \in \tilde{G}_{km+1}$, $k \geq 1$ est fixé, on voit que l'application $\tilde{G}_{\ell m+1} \rightarrow \tilde{G}_{(k+\ell)m+1}$ définie par le crochet par $\tilde{Z}_k$ est un isomorphisme si $b_k \neq 0$ et $\ell \neq 0$ et k . Il en résulte que :

PROPOSITION 10. - Soit $\tilde{Z} = \tilde{X} + \sum_{\ell \geq 1} \tilde{Z}_\ell$ un champ formel sous forme normale, avec $\tilde{Z}_\ell = a_\ell \tilde{X}_\ell + b_\ell \tilde{Y}_\ell$ pour $\ell \geq 1$. Supposons que $b_\ell = 0$ pour $\ell \leq k-1$ et que $b_k \neq 0$ pour un certain $k \geq 1$.

Alors il existe $\bar{b}_{2k} \in \mathbb{R}$ et une série formelle $\tilde{f}(z_1, z_2)$, $\tilde{f}(0) \neq 0$ tels que :

$$\tilde{f} \tilde{Z} \sim \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k + \bar{b}_{2k} \tilde{Y}_{2k} \text{ modulo } \tilde{G}_{2mk+1} \oplus \dots$$

Démonstration. - Si $b_\ell = 0$ pour $\ell \leq k-1$, $\tilde{Z}$ s'écrit :

$$\tilde{Z} = \tilde{X} + \sum_{\ell \geq 1} a_\ell \tilde{X}_\ell + \sum_{\ell \geq k} b_\ell \tilde{Y}_\ell$$

Or : $\tilde{X}_\ell = (z_1^p z_2^q)^{\ell} \tilde{X}$

En posant $\tilde{\varphi}(u) = (1 + \sum_{\ell \geq 1} a_\ell u^\ell)^{-1}$, on a :

$$\tilde{T} = \tilde{\varphi}(z_1^p z_2^q) \tilde{Z} = \tilde{X} + \tilde{\varphi}(z_1^p z_2^q) \left[\sum_{\ell \geq k} b_\ell \tilde{Y}_\ell \right]$$

qui est de la forme :

$$\tilde{T} = \tilde{X} + \sum_{\ell \geq k} b'_\ell \tilde{Y}_\ell \quad \text{avec } b'_k = b_k \neq 0$$

On va maintenant démontrer par récurrence que si :

$$\tilde{T} \sim \tilde{T}_1 = \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k + \sum_{\ell \geq k_1} \tilde{Z}_\ell$$

avec $k_1 : k < k_1 \leq 2k-1$

$$\text{Alors } \tilde{T} \sim \tilde{T}_2 = \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k + \sum_{\ell \geq k_1+1} \tilde{Z}_\ell$$

Il en résultera que :

$$\tilde{T} \sim \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k \text{ modulo } \tilde{G}_{2mk} + \tilde{G}_{2mk+1} \oplus \dots$$

Soit donc $\tilde{T}_1 = \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k + b_{k_1} \tilde{Y}_{k_1} + \dots$

et $\tilde{T}_{1,\tau} = \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k + (1-\tau)b_{k_1} \tilde{Y}_{k_1} + \dots$

Alors $\dot{\tilde{T}}_{1,\tau} = -b_{k_1} \tilde{Y}_{k_1}$

Il existe $\tilde{U}_{k_1} \in \tilde{G}_{m(k_1-k)+1}$ tel que

$$[b_k \tilde{Y}_k, \tilde{U}_{k_1}] = -b_{k_1} \tilde{Y}_{k_1} \quad \text{car } b_k \neq 0$$

D'où :

$$[\tilde{T}_{1,\tau}, \tilde{U}_{k_1}] = \dot{\tilde{T}}_{1,\tau} \quad \text{modulo } \tilde{G}_{m(2k_1-k)+1} \oplus \dots$$

Si $\tilde{g}_\tau$ est le difféomorphisme formel obtenu par intégration de $\tilde{U}_{k_1}$, on

a :

$$\tilde{g}_{1*} \tilde{T}_1 = \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k \quad \text{mod } \tilde{m}^{(k_1+1)m+2}_{V(2)}$$

En application la proposition 4 on trouve un difféomorphisme formel

$\tilde{g}_2 = \text{Id modulo } \tilde{m}^{(k_1+1)m+2}_{\tilde{\mathcal{C}}(2,2)}$ tel que :

$$\tilde{g}_{2*} \tilde{g}_{1*} \tilde{T}_1 \in \tilde{F}_{\tilde{X}} \quad \text{et que :}$$

$$\tilde{g}_{2*} \tilde{g}_{1*} \tilde{T}_1 = \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k + \tilde{Z}'_{k_1+1} + \dots$$

On a montré que :

$$\tilde{\varphi}(z_1^p z_2^q) \tilde{Z} \sim \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k + \sum_{\ell \geq 2k} \tilde{Z}'_\ell$$

en décomposant $\tilde{Z}'_{2k} = a'_{2k} \tilde{X}_{2k} + b'_{2k} \tilde{Y}_{2k}$

on a :

$$\tilde{Z} \sim \tilde{X}(1 + a'_{2k}(z_1^p z_2^q)^{2k}) + b_k \tilde{Y}_k + b'_{2k} \tilde{Y}_{2k} \quad \text{mod } G_{2mk+1} \oplus \dots$$

D'où par division, on obtient une fonction $\tilde{f}(z_1, z_2)$, qui est égale

à 1 modulo $\tilde{m}^{2mk}$ et telle que :

$$\tilde{fZ} \sim \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k + \tilde{b}_{2k} \tilde{Y}_{2k} \quad \text{modulo } G_{2mk+1} \oplus \dots$$

DÉFINITION 11. - Soit $\tilde{X} \in \tilde{V}^k$ un jet d'ordre k . On dira que $\tilde{X}$ est formellement déterminé si pour $\forall \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{M}}^{k+1}\tilde{V}(2)$ on a : $\tilde{X} + \tilde{U} \sim \tilde{X}$.

PROPOSITION 12. - Soit $\tilde{T}$ le $(2km+1)$ -jet :

$$\tilde{T} = \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k + b_{2k} \tilde{Y}_{2k} \quad \text{avec } b_k \neq 0.$$

Alors $\tilde{T}$ est formellement déterminé.

Démonstration. - Si $b_k \neq 0$, le crochet par $b_k \tilde{Y}_k$ induit un isomorphisme de : $\tilde{G}_{\ell m+1} \rightarrow \tilde{G}_{(\ell+k)m+1}$ pour $\ell \geq k+1$. Comme $[\tilde{X}, \tilde{F}_X] = 0$, il est facile de vérifier que :

$\tilde{T} = \tilde{X} + b_k \tilde{Y}_k + b_{2k} \tilde{Y}_{2k}$ induit également un isomorphisme formel, de degré $-k$ (au sens du chapitre I) de

$$\tilde{G}_{(k+1)m+1} \oplus \tilde{G}_{(k+2)m+1} + \dots \text{ dans } \tilde{G}_{(2k+1)m+1} \oplus \tilde{G}_{(2k+2)m+1} + \dots$$

Soit de $\tilde{\mathcal{M}}^{km+2}\tilde{V} \cap \tilde{F}_X$ dans $\tilde{\mathcal{M}}^{2km+2}\tilde{V} \cap \tilde{F}_X$.

Donc le crochet par $\tilde{T}$ admet un inverse à droite, de degré $+k$, défini sur $\tilde{\mathcal{M}}_\tau^{2km+2}\tilde{V} \cap \tilde{F}_{X,\tau}$ où $\tilde{F}_{X,\tau} = [0,1] \times \tilde{F}_X$.

Il en résulte, d'après la proposition I-2 que l'équation

$$[\tilde{T} + \tilde{P}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \tilde{Z}_\tau \text{ est résoluble pour } \tilde{Z}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^{2mk+2}\tilde{V} \cap \tilde{F}_{X,\tau} \text{ et pour } \tilde{P}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^{2km+2}\tilde{V} \cap \tilde{F}_{X,\tau} \text{ et donc que } \tilde{T} + \tilde{U} \sim \tilde{T} \text{ pour } \forall \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{M}}^{2mk+2}\tilde{V} \cap \tilde{F}_X.$$

Maintenant, si $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{M}}^{2mk+2}\tilde{V}$, on applique la proposition 4 pour montrer que $\tilde{T} + \tilde{U} \sim \tilde{T} + \tilde{U}$ avec $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{M}}^{2mk+2}\tilde{V} \cap \tilde{F}_X$ ce qui nous ramène au cas précédent.

Dans l'espace $\tilde{F}_X$ des formes normales, on définit :

$$\bar{\Sigma}_i = \{ \tilde{Z} = \tilde{X} + \sum_{\ell \geq 1} a_\ell \tilde{X}_\ell + b_\ell \tilde{Y}_\ell \mid b_1 = \dots = b_i = 0 \}$$

$$\text{et } \bar{\Sigma}_0 = \tilde{F}_X$$

$$\text{On a } \tilde{F}_X = \bar{\Sigma}_0 \supset \bar{\Sigma}_1 \supset \dots \supset \bar{\Sigma}_i \supset \dots$$

On notera également par $\bar{\Sigma}_i$ l'espace défini dans $\tilde{F}^{mi+1}$. L'espace linéaire $\bar{\Sigma}_i$ est de codimension i dans $\tilde{F}^{mi+1}$ (et dans $\tilde{F}_X$). De plus :

LEMME 13. - $\bar{\Sigma}_i \subset \tilde{F}^{mi+1}$ est invariant par l'action de $\text{Diff}_0^{mi+1}(2)$ au sens du lemme 6. (Si $\tilde{\alpha} \in \bar{\Sigma}_i$ et $\tilde{g} \in \text{Diff}_0^{mi+1}(2)$ tels que $\tilde{g}_* \tilde{\alpha} \in \tilde{F}^{mi+1}$ alors $\tilde{g}_* \tilde{\alpha} \in \bar{\Sigma}_i$).

Démonstration. - On va montrer que :

$$\tilde{Y} \in \bar{\Sigma}_i \Leftrightarrow \tilde{Y} \cdot \tilde{\mathcal{E}}^{mi+1} \not\subset \tilde{\mathcal{M}}^{mi+1} \text{ dans } \tilde{\mathcal{E}}^{mi+1}$$

En effet si $\tilde{Y} \in \bar{\Sigma}_i$ alors :

$$\tilde{Y} = \tilde{X} + \sum_{k \geq 1} \tilde{Z}_k \quad \text{avec } \tilde{Z}_k = a_k \tilde{X}_k + b_k \tilde{Y}_k$$

et $b_k = 0$ si $k \leq i$

Donc, si $\tilde{Y} \in \bar{\Sigma}_i$, $\exists \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{E}}^{mi+1}$, $\tilde{f}(0) \neq 0$ telle que :

$$\tilde{f} \cdot \tilde{Y} = \tilde{X}$$

Mais, $\tilde{X} \cdot \tilde{\mathcal{E}}^{mi+1} \cap \tilde{\mathcal{M}}^{mi+1}$ où $\tilde{\mathcal{M}}$ désigne l'idéal maximal dans $\tilde{\mathcal{E}}^{mi+1}$ est engendré par $(z_1^i z_2^j)$ avec $(i, j) \neq (p+1, q)$ et $(p, q+1)$

Donc $\tilde{X} \cdot \tilde{\mathcal{E}}^{mi+1} \not\subset \tilde{\mathcal{M}}^{mi+1}$ d'où il résulte que $\tilde{Y} \cdot \tilde{\mathcal{E}}^{mi+1} \not\subset \tilde{\mathcal{M}}^{mi+1}$.

Inversement, supposons que $\tilde{Y} \cdot \tilde{\mathcal{E}}^{mi+1} \not\subset \tilde{\mathcal{M}}^{mi+1}$

alors $\tilde{Y} \notin \bar{\Sigma}_i$. Sinon $\tilde{Y} \in \bar{\Sigma}_j$ avec $j < i$

Alors, $\exists \tilde{f}$ tel que

$$\tilde{f} \cdot \tilde{Y} \sim \tilde{X} + a_j \tilde{Y}_j + a_{2j} \tilde{Y}_{2j} \quad \text{avec } a_j \neq 0$$

Le champ à droite $\tilde{T}$ étant tel que :

$$\tilde{T} \cdot \tilde{\mathcal{E}}^{mi+1} \supset \tilde{\mathcal{M}}^{mj+1} \text{ on a également } \tilde{Y} \cdot \tilde{\mathcal{E}}^{mi+1} \supset \tilde{\mathcal{M}}^{mj+1} \supset \tilde{\mathcal{M}}^{mi+1}.$$

Maintenant la condition $\tilde{Y} \cdot \tilde{\mathcal{E}}^{mi+1} \not\subset \tilde{\mathcal{M}}^{mi+1}$ est invariante par l'action de $\text{Diff}_0^{mi+1}(2)$, d'où le résultat.

Il suit du lemme 6 que si $\Sigma_i = \{\tilde{Y} \in \tilde{V}_X^{mi+1} \mid \exists \tilde{g} \in \widetilde{\text{Diff}}_0^{mi+1}(2), \tilde{g}_* \tilde{Y} \in \bar{\Sigma}_i\}$ est un sous-ensemble algébrique de $\tilde{V}_X^{mi+1}$. Il est clair que si π_{mi+1} est la projection de $\tilde{V}_X$ sur $\tilde{V}_X^{mi+1}$, alors

$\pi_{mi+1}^{-1} \Sigma_i = \{\tilde{Y} \in \tilde{V}_X \mid \exists \tilde{g} \in \widetilde{\text{Diff}}_0(2), \tilde{g}_* \tilde{Y} \in \bar{\Sigma}_i\}$ (grâce au iii) de la proposition 4). On désignera $\pi_{mi+1}^{-1} \Sigma_i$ par Σ_i également en accord avec la convention faite pour $\bar{\Sigma}_i$ (on dira que $\Sigma_i, \bar{\Sigma}_i$ définis dans les jets infinis, proviennent des $(mi+1)$ -jets). Il suit des propositions 10 et 12 que $\tilde{Y} \in \Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$ si et seulement s'il existe $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}(2)$, $\tilde{f}(0) \neq 0$ tel que $\tilde{f}\tilde{Y} \sim \tilde{X} + [a_i(z_1^p z_2^q)^i + a_{2i}(z_1^p z_2^q)^{2i}] (-\lambda_2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2})$ avec $a_i \neq 0$.

Un résultat analogue est vrai lorsque $\tilde{X}$ est un 1-jet de rotation. (On en trouvera une démonstration partielle dans [23]), et on peut construire des ensembles algébriques $\Sigma_i \subset \tilde{V}_X^{2i+1}$ avec les mêmes propriétés. D'où:

THÉOREME 14. - Soit $X = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ (1) ou bien
 $X = \lambda(-z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2})$ (2) un champ linéaire dont les valeurs propres ne soient pas toutes les deux nulles et tel qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux, tels que $p \lambda_1 + q \lambda_2 = 0$. Posons $p+q = m$ ($p=q=1$ dans le cas (2), $p = 1, q = 0$ ou bien $p = 0$ et $q = 1$ si dans le cas (1), $\lambda_1 \lambda_2 = 0$). Alors il existe une filtration décroissante par des ensembles algébriques Σ_i de $\tilde{V}_X = \{\tilde{Y} \in \tilde{V}(2) \mid \tilde{Y}^1 = \tilde{X}\}$, invariants par $\widetilde{\text{Diff}}_0(2)$, de codimension i et provenant de $\tilde{V}_X^{mi+1}$ respectivement tels que $\tilde{Y} \in \Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$ si et seulement s'il existe $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{f}(0) \neq 0$, telle que :

$$\tilde{f}\tilde{Y} \sim \tilde{X} + [a_i(z_1^p z_2^q)^i + a_{2i}(z_1^p z_2^q)^{2i}] (-\lambda_2 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2})$$

avec $a_i \neq 0$ dans le cas (1) ou bien

$$\tilde{f}\tilde{Y} \sim \tilde{X} + [\alpha_i(z_1^2 + z_2^2)^i + \alpha_{2i}(z_1^2 + z_2^2)^{2i}] (z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2})$$

avec $\alpha_i \neq 0$ dans le cas (2).

De plus, les champs polynomiaux du second membre sont formellement déterminés.

Remarque. - On peut poser $\Sigma_\infty = \bigcap_i \Sigma_i$; Σ_∞ est un ensemble proalgébrique de codimension ∞ . On voit que $\tilde{Y}$ est linéarisable à une fonction près si et seulement si $\tilde{Y} \in \Sigma_\infty$ et qu'en dehors de Σ_∞ , $\tilde{Y}$ est équivalent à un champ polynomial (toujours) à une fonction près. Donc le champ $\tilde{Y} \in \tilde{V}_X$ lorsque X est un champ linéaire non nul et non équivalent à $z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$ est formellement équivalent à un champ proportionnel à un champ polynomial de degré plus ou moins élevé.

2. LES ÉQUATIONS I $^\infty$ ET II $^\infty$.

Soit X un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^2$ et $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(2)V_\tau(2)$. Posons $X_\tau = X + P_\tau$. Nous appellerons équations I $^\infty$ et II $^\infty$, respectivement les équations :

$$I^\infty: X_\tau.f_\tau = h_\tau \quad \text{et} \quad II^\infty: [X_\tau, Y_\tau] = Z_\tau$$

avec $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(2)$ et $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(2)V_\tau(2)$, à résoudre avec $f_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(2)$ et $Y_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(2)V_\tau(2)$.

Nous avons déjà étudiés ces équations d'une façon générale dans le chapitre I. Nous allons compléter ici cette étude en dimension 2. Rappelons que les solutions de ces équations permettent de déduire des résultats $\mathcal{C}^\infty$ de résultats formels relatifs à X . Cela sera développé dans le paragraphe 3.

2.1. Champs de degré de dégénérescence nul.

Un germe de champ X de degré de dégénérescence nul est un germe dont le 1-jet est $\neq 0$ et non équivalent à $z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$. Nous avons indiqué dans le premier paragraphe la classification de Jordan des 1-jets et nous avons établi des formes normales formelles pour les champs de de-

gré de dégénérescence nul. Nous allons baser la discussion sur ces résultats.

Commençons par le cas où le champ X est non dégénéré.

a) Si X est un germe hyperbolique (les valeurs propres ont des parties réelles $\neq 0$), il suit du théorème I.10 que les équations I^∞ et II^∞ sont toujours résolubles.

b) Si X a un 1-jet de rotation, l'existence de solutions pour I^∞ et II^∞ va dépendre d'un jet d'ordre supérieur de X . Par exemple si X est une rotation, l'équation I^∞ n'est pas résoluble pour tout second membre h , car l'intégrale de h sur toute orbite fermée de X doit être nulle. En utilisant les ensembles algébriques $\Sigma_i \subset \tilde{V}_{X,1}$ introduits dans l'énoncé du théorème 14, on peut montrer que si $\tilde{X} \in \Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$ avec $i < \infty$ alors les équations I^∞ et II^∞ sont résolubles. On peut donner de ce résultat une démonstration (très laborieuse) analogue à celle fournie dans le paragraphe 2 du chapitre I. Nous ne le ferons pas, les conséquences pratiques, que nous indiquerons dans le paragraphe 3, ayant déjà été démontrées par F. Takens [23].

c) Reste le cas d'un champ partiellement hyperbolique dont le 1-jet est égal à $X_1 = \lambda z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$ avec $\lambda \neq 0$. Nous avons établi par le théorème 14, l'existence d'une filtration de $\tilde{V}_{X_1}$ par des ensembles algébriques Σ_k , tels que si $\tilde{X} \in \Sigma_k \setminus \Sigma_{k+1}$ alors pour une série formelle $\tilde{f}$, $\tilde{f}(0) \neq 0$, on ait :

$$\tilde{f}\tilde{X} \sim \lambda z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (\alpha_k z_2^{k+1} + \alpha_{2k} z_2^{2k+1}) \frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{avec } \alpha_k \neq 0.$$

De plus, il est connu que si X est un champ partiellement hyperbolique en $0 \in \mathbb{R}^2$, il possède une variété centrale de classe $\mathcal{C}^\infty$; cette variété est une variété invariante par le flot de X et tangente en 0 à la direction propre de la valeur propre 0 [8]. Il est clair que $\tilde{X} \in \Sigma_k \setminus \Sigma_{k+1}$ si et seulement si la restriction de X à sa variété centrale a un k -jet non nul en 0.

Pour les chemins de champs semi-hyperboliques nous avons le résultat suivant :

THÉOREME 15. - Soit X_τ un chemin de germes de champs tel que $\tilde{X}_\tau^1 \equiv X_1 = \lambda z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$, $\lambda \neq 0$, et que pour tout τ , $\tilde{X}_\tau \in \Sigma_k \setminus \Sigma_{k+1}$ où $\Sigma_j \subset \tilde{V}_{X_1}$ est l'ensemble algébrique du théorème 14. Supposons de plus que chaque X_τ ait une même variété centrale en 0. Alors les équations I^∞ et II^∞ sont résolubles pour X_τ .

Démonstration. - Dans la démonstration, on peut supposer que $\lambda = 1$ et que l'axe Oz_2 est la variété centrale fixe (indépendante de τ). Il s'ensuit que, dans les coordonnées (z_1, z_2) , le champ s'écrit :

$$X_\tau = \phi_\tau \frac{\partial}{\partial z_1} + \psi_\tau \frac{\partial}{\partial z_2}$$

avec $\tilde{\phi}_\tau^1(0) = z_1$ et $\tilde{\psi}_\tau^k(0) = \mu z_2^{k+1}$ pour $\mu \neq 0$ et $\phi_\tau(0, z_2) \equiv 0$

a) Nous allons tout d'abord traiter l'équation I^∞ .

Le germe X_τ est normalement hyperbolique à $F \times [0, 1]$, où $F = \{Oz_2\}$, est invariante par X_τ . On peut appliquer à un tel champ la proposition I.11 : si $\mathcal{M}_\tau^\infty(F) = \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1)$ désigne l'espace des germes de fonctions plates le long de Oz_2 , l'équation $X_\tau \cdot f_\tau = h_\tau$ pour $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1)$ a une solution $f_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1)$. Cela étant, on va appliquer la même idée que celle utilisée tout le long du chapitre I : pour résoudre I^∞ dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_1, z_2)$ il suffit de résoudre l'équation correspondante dans les champs tayloriens de fonctions de $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_1, z_2)$ le long de $F \times [0, 1]$ et dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_1)$ ce qui est déjà fait.

Nous allons noter par $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$ cet espace de champ tayloriens :

$\tilde{f}_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$ soit encore :

$$\tilde{f}_\tau = \text{germe le long de } \sum_i a_i(z_2, \tau) z^i \\ \text{de } \{0\} \times [0, 1]$$

où chaque $a_i(z_2, \tau)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $0z_2 \times [0, 1]$, plate sur $\{0\} \times [0, 1]$.

Le champ taylorien $\tilde{X}_\tau$ de X_τ opère dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$.

$$\text{Soit } \tilde{X}_\tau = \tilde{\phi}_\tau \frac{\partial}{\partial z_1} + \tilde{\psi}_\tau \frac{\partial}{\partial z_2}$$

$$\text{avec } \tilde{\phi}_\tau = \sum_{i \geq 1} \varphi_i(z_2, \tau) z_1^i \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_\tau = \sum_{j \geq 0} \psi_j(z_2, \tau) z_1^j$$

On a :

$$\varphi_0 \equiv 0 \quad \text{car } 0z_2 \text{ est invariant par } X_\tau$$

$$\varphi_1(0) = 1$$

$$j^{k+1} \psi_0(0) = \mu z_2^{k+1} \quad \text{avec } \mu \neq 0$$

Nous voulons résoudre $\tilde{I}^\infty$: $\tilde{X}_\tau \cdot \tilde{f}_\tau = \tilde{h}_\tau$ dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$

$$\text{Soit : } \tilde{f}_\tau = \sum_{k \geq 0} a_k(z_2, \tau) z_1^k \quad \text{et} \quad \tilde{h}_\tau = \sum_{\ell \geq 0} b_\ell(z_2, \tau) z_1^\ell$$

L'équation $\tilde{I}^\infty$ se développe en :

$$\sum_{i, k} k \varphi_i z_1^{k+i-1} a_k + \sum_{j, k} \psi_j z_1^{k+j} a'_k = \sum b_\ell z_1^\ell$$

$$\text{où } a'_k = \frac{\partial a_k}{\partial z_2}$$

Ce qui se traduit par un système Σ dont nous écrivons seulement les premières lignes :

$$(1) \quad \psi_0 a'_0 = b_0$$

$$(2) \quad \varphi_1 a_1 + \psi_1 a'_0 + \psi_0 a'_1 = b_1$$

$$(3) \quad \varphi_2 a_1 + 2 \varphi_1 a_2 + \psi_2 a'_0 + \psi_1 a'_1 + \psi_0 a'_2 = b_2 \quad \text{etc...}$$

Pour résoudre l'équation $\tilde{I}^\infty$, il suffit de résoudre Σ avec $(a_i)_i$ telle que $a_i \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \mathcal{C}^\infty(B \times [0, 1])$ pour toute suite $(b_j)_j$ telle que $b_j \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \mathcal{C}^\infty(B \times [0, 1])$, où B désigne une boule centrée en $0 \in 0z_2$, suffisamment petite et $\mathcal{C}^\infty(B \times [0, 1])$ désigne l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $B \times [0, 1]$.

Dans la 1ère ligne du système, b_0 est plat en 0 et $\psi_0 \sim \mu z_2^{k+1}$ en zéro : $b_0 / \psi_0 \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \mathcal{C}^\infty(B \times [0, 1])$ et a_0 s'obtient par intégration.

La 2ème ligne s'écrit :

$$\psi_0 a'_1 + \varphi_1 a_1 = b_1 - \psi_1 a'_0 = \bar{b}_1$$

où $\bar{b}_1 \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \mathcal{C}^\infty(B \times [0,1])$.

On voit que a_1 est solution d'une équation singulière ($\psi_0 \sim \mu z_2^{k+1}$ et $\varphi_1(0) = 1$).

Supposons que cette équation ait une solution $a_1 \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \mathcal{C}^\infty(B \times [0,1])$, la 3ème ligne du système fournit une équation singulière en a_2 analogue à la précédente avec un second membre dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \mathcal{C}^\infty(B \times [0,1])$. Et ainsi de suite.

On voit que l'on aura fini, lorsqu'on aura démontré la proposition suivante :

PROPOSITION 16. - Soit $B \subset \{0z\}$ une boule à l'origine et soient $\alpha_\tau(z)$ et $\beta_\tau(z) \in \mathcal{C}^\infty(B \times [0,1])$ telles que :

- i) $\alpha_\tau(z) \sim \mu z^{k+1}$ en zéro, avec $k \geq 1$ et $\mu \neq 0$
- ii) $\alpha_\tau(z) \neq 0$ pour $\forall (z, \tau) \in (B - \{0\}) \times [0,1]$
- iii) $\beta_\tau(z) \neq 0$ pour $\forall (z, \tau) \in B \times [0,1]$

On considère dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(z) \mathcal{C}^\infty(B \times [0,1])$ l'équation singulière :

$$(E) \quad \alpha_\tau(z) \frac{da_\tau}{dz} + \beta_\tau(z) a_\tau(z) = b_\tau(z)$$

Alors (E) est résoluble pour $\forall b_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \mathcal{C}^\infty(B \times [0,1])$ avec une solution unique $\alpha_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \mathcal{C}^\infty(B \times [0,1])$

Démonstration de la proposition. - Prolongeons tout d'abord α_τ et β_τ sur $\mathbb{R}^+$ de façon que :

- pour $\forall z \in \mathbb{R}^+$ et $\forall \tau \in [0,1]$ $0 < m \leq |\beta_\tau(z)| \leq M$

où m, M sont deux constantes positives et $\beta_\tau(z)$ est constante pour z assez grand.

- $\alpha_\tau(z)$ soit $\neq 0$ sur $(\mathbb{R}^+ - \{0\}) \times [0,1]$

- $\alpha_\tau(z) = \mu z^2$ pour z assez grand

Soit maintenant $b_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \mathcal{C}^\infty(B \times [0,1])$. On va prolonger b_τ en une fonction sur $\bar{B}$ en prolongeant b_τ en une fonction à support compact.

Pour résoudre (E) on va opérer la transformation $y = \frac{1}{z}$ qui transforme (E) en une équation régulière ($\bar{E}$) et b_τ en une fonction de $\mathcal{S}_\tau(y)$ espace des fonctions en y, τ à décroissance rapide en y , c'est à dire telle que, pour $\forall j$ et $\forall i, |b_\tau^{(j)}(y)| = O(\frac{1}{|y|^i})$ où $b_\tau^{(j)}$ désigne la dérivée $j^{\text{ème}}$ de b_τ par rapport à y . Inversement un élément de $\mathcal{S}_\tau(y)$ est transformé par $z = \frac{1}{y}$ en une fonction de $\mathcal{M}_\tau^\infty(z)$.

Précisément, il suffit de résoudre (E) pour $z \geq 0$ c'est à dire de montrer que (E) a une solution $a_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \mathcal{C}^\infty([0,\infty) \times [0,1])$ pour tout $b_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z) \mathcal{C}_c^\infty([0,\infty) \times [0,1])$, où $\mathcal{C}_c^\infty([0,\infty) \times [0,1])$ désigne l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\infty) \times [0,1]$ à support compact. Effectuons le changement de variable $y = \frac{1}{z}$ de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ sur $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. L'équation (E) sur $\mathbb{R}^+$ devient l'équation ($\bar{E}$) :

$$(\bar{E}) \quad \bar{\alpha}_\tau(y) \frac{d\bar{y}}{dz} \cdot \frac{d\bar{a}_\tau}{d\bar{y}} + \bar{\beta}_\tau(y) \bar{a}_\tau(y) = \bar{b}_\tau(y)$$

avec $\bar{a}_\tau(y) = a_\tau(\frac{1}{z})$ etc...

Soit :

$$(\bar{E}) \quad -y^2 \bar{\alpha}_\tau(y) \frac{d\bar{a}_\tau}{dy} + \bar{\beta}_\tau(y) \bar{a}_\tau(y) = \bar{b}_\tau(y)$$

avec $\bar{b}_\tau(y) \mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide pour $y \rightarrow +\infty$.

En ce qui concerne les coefficients, notons que :

- au voisinage de 0, $\bar{\alpha}_\tau(y) \sim \frac{\mu}{y^2}$ et donc que $-y^2 \bar{\alpha}_\tau(y) \rightarrow -\mu \neq 0$ pour $y \rightarrow 0$ et est $\mathcal{C}^\infty$ en 0,

- pour $y \rightarrow +\infty$, $-y^2 \bar{\alpha}_\tau(y) \sim -\mu/y^{k-1}$ ($k \geq 1$)

De plus, la fonction $-y^2 \bar{\alpha}_\tau(y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ en $+\infty$, c'est à dire transformée d'une fonction de $z, \mathcal{C}^\infty$ en 0, par $y = \frac{1}{z}$.

- pour tout $y \neq 0$, $\bar{\alpha}_\tau(y) \neq 0$. Le coefficient $-y^2 \bar{\alpha}_\tau(y)$ est donc différent de 0 pour $\forall (y, \tau) \in [0, \infty) \times [0, 1]$.

- enfin, on a pour $\forall (y, \tau) \in [0, \infty) \times [0, 1]$:

$\bar{\beta}_\tau(y)$ est tel que : $0 \leq m \leq \bar{\beta}_\tau(y) \leq M$ et est $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et en $+\infty$.

Pour se ramener à une équation dans $\mathbb{R}$ on prolonge $\bar{\alpha}_\tau(y)$ et $\bar{\beta}_\tau(y)$ de façon $\mathcal{C}^\infty$ sur $(-\infty, 0] \times [0, 1]$ de façon que :

$-y^2 \bar{\alpha}_\tau(y)$ soit $\mathcal{C}^\infty$ en $-\infty$, partout différente de 0, que $-y^2 \bar{\alpha}_\tau(y)$
 $-y^2 \bar{\alpha}_\tau(y) \sim -\frac{\mu}{|y|^{k-1}}$ pour $y \rightarrow -\infty$, que $\bar{\beta}_\tau(y)$ soit $\mathcal{C}^\infty$ en $-\infty$ et que
 $0 < m \leq |\bar{\beta}_\tau(y)| \leq M$.

Pour résoudre (E) sur $[0, \infty)$, il suffit de montrer que l'équation ($\bar{E}$), prolongée à $\mathbb{R}$ admet une solution $\bar{a}_\tau \in \mathcal{J}_\tau(y)$ pour tout $\bar{b}_\tau \in \mathcal{J}_\tau(y)$. Ou encore, en remarquant que $\frac{\bar{b}_\tau(y)}{-y^2 \bar{\alpha}_\tau(y)} \in \mathcal{J}_\tau(y)$, il suffit de montrer que l'équation :

$$(E_2) : f'_\tau(y) + \gamma_\tau(y) f_\tau(y) = g_\tau(y)$$

avec $\gamma_\tau(y) = \frac{\bar{\beta}_\tau(y)}{-y^2 \bar{\alpha}_\tau(y)}$, admet une solution $f_\tau(y) \in \mathcal{J}_\tau(y)$ pour
 $\forall g_\tau(y) \in \mathcal{J}_\tau(y)$.

Dans cette équation, $\gamma_\tau(y)$ est partout différent de 0, et reste borné par une puissance de y pour $|y| \rightarrow \infty$, ainsi que toutes ses dérivées successives.

Il est maintenant facile de voir que l'équation (E_2) se ramène à une équation à coefficients constants. En effet, considérons le difféomorphisme à paramètres de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$u_\tau(y) = \int_0^y \gamma_\tau(y) dy$$

Clairement, en raison des propriétés de γ_τ mentionnées ci-dessus, ce difféomorphisme échange $\mathcal{J}_\tau(y)$ et $\mathcal{J}_\tau(u)$ par $g_\tau(u) \rightarrow g_\tau(u(y))$. Soit $y_\tau(u)$ le difféomorphisme inverse.

Si l'on pose $h_\tau(u) = f_\tau(y_\tau(u)), \dots, \ell_\tau(u) = g_\tau(y_\tau(u))$, l'équation (E_2) est transformée en :

$$h'_\tau(u) \frac{du}{dy} + \gamma_\tau(y_\tau(u)) \cdot h_\tau(u) = \ell_\tau(u)$$

Soit, compte tenu de $\frac{dy_\tau}{du} = \frac{1}{\gamma_\tau}$:

$$(E_3) \quad h'_\tau(u) + h_\tau(u) = \ell_\tau(u)/\gamma(y_\tau(u)) = \ell_{1,\tau}(u)$$

avec comme second membre $\ell_{1,\tau}(u) \in \mathcal{J}_\tau(u)$.

Il suffit de montrer que (E_3) a une solution dans $\mathcal{J}_\tau(u)$. Mais celà est trivial si l'on utilise la transformation de Fourier $\mathcal{J}_\tau(u) \stackrel{\pm}{=} \mathcal{J}_\tau(\lambda)$, définie par :

$$\hat{f}_\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \lambda u} f_\tau(u) du$$

L'équation (E_3) est transformée en :

$$(\hat{E}_3) : \quad 2\pi i \lambda \hat{h}_\tau(\lambda) + \hat{h}_\tau(\lambda) = \hat{\ell}_{1,\tau}(\lambda)$$

soit $\hat{h}_\tau(\lambda) = \hat{\ell}_{1,\tau}(\lambda)/(1+2\pi i \lambda)$

Clairement, si $\hat{\ell}_{1,\tau}(\lambda) \in \mathcal{J}_\tau(\lambda)$ alors $\hat{h}_\tau(\lambda) \in \mathcal{J}_\tau(\lambda)$

Et comme la transformée de Fourier est un isomorphisme sur les espaces $\mathcal{J}$, la démonstration de la proposition est achevée.

b) Poursuivons maintenant la démonstration du théorème en passant à l'équation II^∞ . Nous allons suivre la même démarche que plus haut. D'après la proposition I.11, l'équation II^∞ est résoluble pour $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1) \setminus V_\tau(2)$ puisque $\{0z_2\} \times [0,1]$ est invariant par X_τ et que X_τ est normalement hyperbolique à cette variété. Il suffit donc pour conclure, de résoudre l'équation :

$$(\tilde{II}^\infty) \quad [\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \tilde{Z}_\tau \quad \text{dans l'espace des champs tayloriens le long}$$

de $\{0z_2\} \times [0,1]$, de champs de vecteurs plats en $\{0\} \times [0,1]$.

Soit $\tilde{X}_\tau = \tilde{\Phi}_\tau \frac{\partial}{\partial z_1} + \tilde{\Psi}_\tau \frac{\partial}{\partial z_2}$ comme plus haut et posons :

$$\tilde{Y}_\tau = \tilde{f}_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \tilde{f}_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

$$\tilde{Z}_\tau = \tilde{g}_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \tilde{g}_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

Le crochet $[\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau]$ se développe en :

$$[\tilde{X}_\tau, \tilde{Y}_\tau] = \left(\tilde{X}_\tau \cdot \tilde{f}_1 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_1} \tilde{f}_1 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_2} \tilde{f}_2 \right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \\ + \left(\tilde{X}_\tau \cdot \tilde{f}_2 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_1} \tilde{f}_2 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_2} \tilde{f}_2 \right) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

et l'équation $(\tilde{I}\tilde{I}^\infty)$ est donc équivalente à :

$$\begin{cases} \tilde{X}_\tau \cdot \tilde{f}_1 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_1} \tilde{f}_1 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_2} \tilde{f}_2 = \tilde{g}_1 \\ \tilde{X}_\tau \cdot \tilde{f}_2 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_1} \tilde{f}_1 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_2} \tilde{f}_2 = \tilde{g}_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \tilde{X}_\tau \cdot \tilde{f}_1 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_1} \tilde{f}_1 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_2} \tilde{f}_2 = \tilde{g}_1 \\ \tilde{X}_\tau \cdot \tilde{f}_2 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_1} \tilde{f}_1 - \frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_2} \tilde{f}_2 = \tilde{g}_2 \end{cases} \quad (2)$$

On développe maintenant $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ etc...

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= \sum_j a_{1j}(z_2, \tau) z_1^j & \tilde{g}_1 &= \sum_j b_{1j} z_1^j \\ \tilde{f}_2 &= \sum_j a_{2j} z_1^j & \tilde{g}_2 &= \sum_j b_{2j} z_1^j \end{aligned}$$

ainsi que
$$\begin{cases} \tilde{\psi}_\tau = \varphi_1 z_1 + \varphi_2 z_1^2 + \dots \\ \tilde{\psi}_\tau = \psi_0 + \psi_1 z_1 + \psi_2 z_2 + \dots \end{cases}$$

On retrouve le système Σ du a) pour les lignes (1) et (2), mais perturbé par la présence des termes $-\frac{\partial \tilde{\psi}_\tau}{\partial z_1} \tilde{f}_1$, etc...

On a d'abord, en prenant le coefficient indépendant de z_1 de (1) :

$$\psi_0 a'_{10} - \varphi_1 a_{10} = b_{10}$$

qui fournit a_{10} par une équation du type (E)

La ligne (2) a pour coefficient indépendant de z_1 :

$$\psi_0 a'_{20} - \psi_0 a_{20} - \psi_1 a_{10} = b_{20}$$

qui fournit a_{20} modulo a_{10} déjà trouvé.

Puis, en prenant le coefficient de z_1 dans (1), on a :

$$(\varphi_1 a_{11} + \psi_1 a'_{10} + \psi_0 a'_{11}) - \varphi_1 a_{11} - \varphi_2 a_{10} - \psi_1 a_{20} = b_{11}$$

qui fournit a_{11} modulo a_{10} et a_{20} déjà trouvés .

Puis avec la ligne (2) :

$$(\psi_1 a_{21} + \psi_1 a'_{20} + \psi_0 a_{21}) - \psi_1 a_{11} - \psi_2 a_{10} - \psi_0' a_{21} - \psi_1' a_{20} = b_{21}$$

qui fournit a_{21} modulo a_{20} , a_{10} et a_{11} déjà trouvés.

Plus généralement, le coefficient de z_1 dans (1) fournira a_{1j} par une équation du type (E) modulo les a_{1i} ; a_{2i} pour $i < j$ et le coefficient de z_1 dans (2) fournira a_{2j} par une équation analogue, modulo les a_{1i} , a_{2i} pour $i < j$ et a_{1j} . Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. - Par construction, si $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1)$ ou bien si $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1) \vee_\tau$ la solution de I^∞ ou de II^∞ du théorème appartient au même espace. Si maintenant $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2)$ ou bien $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \vee_\tau(2)$, on peut également trouver la solution dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_2)$ ou bien dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \vee_\tau(2)$ respectivement.

En effet, si $\tilde{h}_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2)$ $\tilde{\mathcal{E}}_\tau(F)$ est le champ taylorien de h_τ par exemple, et $\tilde{f}_\tau$ la solution de $\tilde{X}_\tau \cdot \tilde{f}_\tau = \tilde{h}_\tau$, par le théorème de prolongement de Whitney, on peut prolonger $\tilde{f}_\tau$ en une fonction f_τ , plate le long de l'axe $\{0z_1\}$. Alors $g_\tau = X_\tau f_\tau - h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1) \cap \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2)$. Si l'on regarde la construction de la solution de l'équation $X_\tau \cdot f'_\tau = g_\tau$, dans la proposition I.11, on remarquera que f'_τ est plate le long de $\{0z_1\}$: en effet f'_τ étant obtenu par intégration le long des orbites est plate le long de toute orbite tendant vers F si c'est le cas pour g_τ . Donc la solution $f_\tau - f'_\tau$ de $X_\tau(f_\tau - f'_\tau) = h_\tau$ est plate le long de $\{0z_1\}$. Le même raisonnement est valable pour $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \vee_\tau(2)$. De même si $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1) \cap \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2)$ ou bien si $Z_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(z_1) \vee_\tau(2) \cap \mathcal{M}_\tau^\infty(z_2) \vee_\tau(2)$ le même raisonnement que plus haut prouve que la solution appartient au même espace.

Notons que cette remarque est valable à fortiori pour un point de selle hyperbolique par application directe de la proposition I.11.

2.2. Champs de degré de dégénérescence non nul.

Pour traiter des champs plus dégénérés que ceux considérés jusqu'ici, nous allons utiliser la méthode d'éclatement de la singularité. Cette technique a été utilisée systématiquement par F. Takens (voir [24]) et par F. Dumortier [5], entre autres. C'est les résultats de ce dernier auteur que nous utilisons ci-dessous (en particulier le théorème A de [5] , dont nous rappelons l'énoncé , donne un résultat général sur les germes de champs dans le plan qui sera à la base des résultats exposés ici).

2.2.1. Rappels sur la méthode d'éclatement dans le plan

Considérons un germe de champ de vecteur X , en $0 \in \mathbb{R}^2$, $X(0) = 0$. Soit $\phi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, l'application définissant les coordonnées polaires $\phi(\alpha, r) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$. Alors il existe un germe de champ $\mathcal{C}^\infty, \hat{X}$, le long de $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times \mathbb{R}$ tel que pour $\forall q \in S^1 \times \mathbb{R}$:

$$\phi_* (\hat{X}(q)) = X \cdot \phi(q)$$

(Voir [24] pour les détails en dimension 2 et plus)

Le champ $\hat{X}$ sur $S^1 \times \mathbb{R}$ n'est autre que X écrit en coordonnées polaires.

Si maintenant le champ X est tel que $j^k X(0) = \tilde{X}^k = 0$ et que $\tilde{X}^{k+1} \neq 0$, on peut diviser $\hat{X}$ par r^k : il existe un germe $\bar{X}$ tel que $\hat{X} = r^k \bar{X}$. Dans la suite, par éclatement de X nous entendrons la construction qui conduit à $\bar{X} = \frac{1}{r^k} \hat{X}$, où k est le plus grand entier tel que $\tilde{X}^k = 0$.

Notations. - Soit $X = a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial z_3}$ un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$;

$$a_1(0) = a_2(0) = 0$$

Le champ $\bar{X}$ peut être écrit :

$$\bar{X} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} + r \eta_2 \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{où } \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{ et } r \frac{\partial}{\partial r} \text{ sont donnés par :}$$

$$\Phi_{\star} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) (\alpha, \tau) = \left(-z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \cdot \Phi(\alpha, \tau)$$

$$\Phi_{\star} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) (\alpha, r) = \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \cdot \Phi(\alpha, r)$$

et

$$\eta_1 = \frac{1}{r^{k+2}} \langle X, z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \rangle > (\alpha, r)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{r^{k+2}} \langle X, z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \rangle > (\alpha, r)$$

où $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^2$.

L'éclatement fait donc passer d'un germe X en $0 \in \mathbb{R}^2$ à un germe $\bar{X}$ le long de $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times \mathbb{R}$. Clairement les singularités de $\bar{X}$ sont les points $(\alpha, 0) \in S^1 \times \{0\}$ où $\eta_1(\alpha, 0) = 0$.

Il est facile de voir que :

- ou bien $\bar{X}$ n'a pas de singularités
- ou bien $\bar{X}$ a un nombre fini et pair de singularités (nombre inférieur à $2k+4$)
- ou bien, pour $\forall \alpha \in S^1$, $\eta_1(\alpha, 0) = 0$

De plus, le n -jet de $\bar{X}$ en chaque point de $S^1 \times \{0\}$ ne dépend que du $(n+k+1)$ -jet de X .

Il peut se faire qu'après un premier éclatement de X , le champ $\bar{X}$ possède des singularités sur $S^1 \times \{0\}$ et que pour certaines d'entre elles, il soit intéressant de procéder à un nouvel éclatement.

Tout d'abord, il est facile, modulo un choix de coordonnées de définir l'éclatement en un point quelconque p d'une variété différentiable, analytique V de dimension 2. L'application Φ de $S^1 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est remplacée par une application Φ_p d'une variété $\hat{V} \simeq V - \{p\}$ dans V . Plus précisément, si $\psi_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, $\psi_p(0) = p$ est l'inverse d'une application de carte, on prendra $\Phi_p = \psi_p \circ \Phi$, en identifiant par ailleurs $S^1 \times \mathbb{R}$ avec un voisinage collier dans $\hat{V}$. Le cercle $S^1 \times \{0\}$ est envoyé par Φ_p sur p .

On peut donc itérer l'éclatement de $0 \in \mathbb{R}^2$, en éclatant le germe

de champ $\bar{X}$ défini au voisinage de $S^1 \times \{0\}$ en un point $p \in S^1 \times \mathbb{R}$. Plus généralement il est possible de procéder à un nombre fini d'éclatements successifs d'applications $\phi_1, \dots, \phi_n$ en un certain nombre de points (Quand on éclate un point singulier, on convient toujours d'éclater aussi l'autre point singulier qui lui était associé de façon à avoir toujours un nombre pair de singularités isolées). On obtient de cette façon des germes de champs successifs $X, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ définis au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$, $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times \mathbb{R} = U_1$ et finalement, au voisinage d'un ensemble $\Gamma_n = (\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n)^{-1}(0) \subset U^n$. L'espace U_n résultant de l'éclatement peut être identifié (analytiquement) à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble Γ_n , formé d'une réunion de cercles ayant des points en commun à le type d'homotopie d'un bouquet de cercles. Pour avoir un objet plus facile à manier, on restreint le domaine de l'éclatement U_n en un domaine A_n , tel que $\partial A_n \subset \Gamma_n$ soit homéomorphe à S^1 et A_n soit homéomorphe à $S^1 \times [0, \infty)$.

Pour cela, au premier éclatement ϕ_1 , on prend $A_1 = S^1 \times [0, \infty)$ ($\partial A_1 = S^1 \times \{0\}$). On peut choisir un voisinage V de p dans U_1 homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ tel que si $\phi_2 : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow U_1$ est l'application du deuxième éclatement, en p par exemple, on ait :

$$\phi_2([0, \pi] \times \mathbb{R}^+) = V \cap A_1$$

Dans le domaine de l'éclatement en p , on peut donc se limiter à $[0, \pi] \times \mathbb{R}^+$ de $S^1 \times \mathbb{R}$. On obtient de cette façon un domaine A_2 pour ϕ_2 qui est une variété à bord anguleux (formé de deux arcs lisses se raccordant à angle droit) : A_2 est bien homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}^+$ et ∂A_2 à S^1 .

Plus généralement A_n sera une sous variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^2$, homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$, dont le bord ∂A_n , homéomorphe à S^1 est formé d'un nombre fini d'arcs lisses $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ se raccordant à angles droits.

D'autre part, le rapport entre le champ $\hat{X}_n$ tel que

$$(\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n)_* (\hat{X}_n) = X$$

et le champ $\bar{X}_n$ est décrit par le lemme suivant :

LEMME 17. - $\hat{X}_n = F_n \bar{X}_n$ où F_n est un germe de fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur A_n , au voisinage de ∂A_n , positive sur $\text{int } A_n = A_n \setminus \partial A_n$ et il existe des nombres entiers $k_1, \dots, k_\ell$ associés aux arcs $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$ tels que :

i) Si p est un point de ∂A_n appartenant à l'intérieur de l'arc γ_i et (x, y) des coordonnées en p telles que, localement $A_n = \{y \geq 0\}$ alors : $F_n(x, y) = y^{k_i} \psi_n$ avec ψ_n différent de zéro localement.

ii) Si p est un angle de ∂A_n , intersection des arcs γ_i et γ_j , et x, y des coordonnées telles que localement $A_n = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ et que γ_i corresponde à $\{x = 0\}$, γ_j à $\{y = 0\}$, alors :

$$F_n(x, y) = x^{k_i} y^{k_j} \psi_{ij}(x, y) \quad \text{avec} \quad \psi_{ij}(x, y) \neq 0 \text{ localement.}$$

Cela étant, nous allons introduire la :

DÉFINITION 18. - On dit qu'un germe $X = a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, avec $X(0) = 0$, est à singularité algébriquement isolée si l'idéal $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ engendré par les séries formelles de a_1 et a_2 dans $\tilde{\mathcal{C}}(2)$, contient une puissance de l'idéal maximal $\tilde{\mathcal{M}} : (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \supset \tilde{\mathcal{M}}(z_1, z_2)^k$ pour un certain k .

Désignons par A , l'ensemble des jets ∞ ne vérifiant pas cette dernière condition : X est à singularité algébriquement isolée si et seulement si $\tilde{X} \notin A$.

La proposition suivante, dont on pourra trouver une démonstration dans [5], montre que presque tous les germes sont à singularité algébriquement isolée.

PROPOSITION 19 [5]. - L'ensemble $A \subset \tilde{V}^\infty(2)$ est un sous ensemble proalgébrique de $\tilde{V}^2(2)$, de codimension ∞ (c'est à dire que A est intersection d'une infinité dénombrable d'ensemble algébriques de $\tilde{V}^\infty(2)$, de codimension strictement croissante).

Remarque. - La condition d'être de codimension ∞ est équivalente au critère suivant, pratiquement très utile : si $z \in \tilde{V}^k(2)$ il existe $z' \in \tilde{V}(2)$, de k -jet égal à z , tel que z' n'appartienne pas à A .

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème A de F. Dumortier sur lequel va être basé toute la suite. Rappelons qu'un germe de champ X en $p \in \mathbb{R}^2$ est dit de degré de dégénérescence nul si $X(p) = 0$, $j^1 X(p) = \tilde{X}^1(p) \neq 0$ et n'est pas équivalent (après translation de l'origine en p) à $z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$. Alors :

THÉORÈME 20 [5]. - Soit X un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^2$, $X(0) = 0$ à singularité algébriquement isolée. Alors il existe une suite d'éclatement $\phi_1, \dots, \phi_n$ conduisant à un champ $\bar{X}_n$ tels que les seules singularités de $\bar{X}_n$ sur A_n sont :

1) ou bien des singularités isolées p , en nombre pair, de degré de dégénérescence nul. Si $\bar{X}_n$ n'est que partiellement hyperbolique en p , alors $\tilde{X}_n(p) \in \Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1} \subset \tilde{V}_{\bar{X}_n}^1(p)$, $i < \infty$, où les $\Sigma_j \subset \tilde{V}_{\bar{X}_n}^1(p)$ sont les ensembles algébriques introduits dans le théorème 14 ci-dessus.

2) Ou bien des arcs lisses γ de ∂A_n ; en chaque point $p \in \gamma$, le degré de dégénérescence de $\bar{X}_n$ est nul. (en p , $\bar{X}_n$ est partiellement hyperbolique avec cette fois $X_n(p) \in \Sigma_\infty \subset \tilde{V}_{\bar{X}_n}^1(p)$). (On peut avoir $\gamma = \partial A_n$ si $n = 1$).

De plus, la position et les propriétés des singularités de $\bar{X}_n$ ne dépendent que d'un jet d'ordre fini de X en 0.

Pour des raisons techniques, nous aurons besoin de considérer des familles $X_\tau = X + P_\tau$ où $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty V_\tau(2)$. Mais, si X est à singularité algébriquement isolée, il est clair (en utilisant le lemme de Nakayama) qu'il en est de même pour X_τ pour chaque τ . De plus, grâce à la conclusion du théorème 20, il est clair qu'au cours des éclatements successifs la position et la nature des singularités des champs $\bar{X}_{1,\tau}, \dots, \bar{X}_{n,\tau}$

sont indépendantes de τ , dans un domaine d'éclatement $A_1, \dots, A_n$ commun à chacun de ces champs.

On désignera par $\bar{X}_{n,\tau}$ le résultat de l'éclatement de X_τ : c'est une famille de germes de champs $\mathcal{C}^\infty$, le long de ∂A_n dont les singularités sont fixes en position et nature et décrites par le théorème 20. On désignera par $V_\tau(\partial A_n)$ l'espace des familles $\mathcal{C}^\infty$ de germes de champs de vecteurs, le long de ∂A_n : $\bar{X}_{n,\tau} \in V_\tau(\partial A_n)$. De plus, comme les nombres $k_1, \dots, k_k$ associés à la fonction F_n dans le lemme 17 ne dépendent que d'un jet fini de X , on peut trouver pour X_τ , une famille de germe $F_{n,\tau} \in \mathcal{F}_\tau(\partial A_n)$: espace des familles des germes $\mathcal{C}^\infty$ de fonctions le long de ∂A_n , vérifiant les conditions i) et ii) du lemme 17 et telle que $F_{n,\tau} = F_{n,0}$ modulo $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n)$ (où $\mathcal{M}_\tau(\partial A_n)$ désigne l'idéal des germes des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $A_n \times [0,1]$, le long de $\partial A_n \times [0,1]$ et nulles sur $\partial A_n \times [0,1]$).

Résumons ces propriétés :

COROLLAIRE 21. - Soit X un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$ à singularité algébriquement isolée et $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(2) \subset V_\tau$. On peut trouver une suite d'éclatements $\phi_1, \dots, \phi_n$, conduisant à un champ $\bar{X}_{n,\tau} \in V_\tau(\partial A_n)$ éclaté de $X_\tau = X + P_\tau$ dont les singularités sont fixées par rapport à τ , en position et en nature et sont décrites par le théorème 20. De plus il existe $F_{n,\tau} \in \mathcal{F}_\tau(\partial A_n)$ tel que si $\hat{X}_{n,\tau} = F_{n,\tau} \bar{X}_{n,\tau}$ alors $(\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n)_* \hat{X}_{n,\tau} = X_\tau$ et telle que $F_{n,\tau} = F_{n,0}$ modulo $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n)$ (en particulier, $F_{n,\tau}$ vérifie les conclusions du lemme 17 pour des $k_1, \dots, k_k$ fixes).

2.2.2. Questions topologiques liées aux équations I $^\infty$ et II $^\infty$

Le but de ce qui suit et qui sera complètement réalisé au paragraphe 3 est de démontrer que, pour un champ à singularité algébriquement isolée et avec quelques autres conditions supplémentaires, les propriétés formelles impliquent les propriétés $\mathcal{C}^\infty$ analogues.

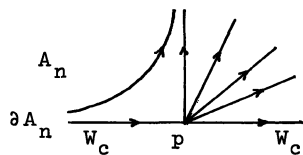
La clé de ce résultat va résider dans la démonstration que, pour le champ $\bar{X}_{n,\tau}$ associé à $X+P_\tau$, $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty V_\tau$, on peut résoudre les équations I^∞ et II^∞ moyennant quelques conditions supplémentaires sur X , c'est à dire résoudre les équations :

$$I^\infty : \bar{X}_{n,\tau} \cdot f_\tau = h_\tau \quad \text{et} \quad II^\infty : [\bar{X}_{n,\tau}, Y_\tau] = Z_\tau$$

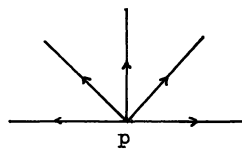
dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n)$ et $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n) V_\tau(\partial A_n)$ respectivement.

Nous allons commencer par donner plus de précisions sur les singularités de $\bar{X}_{n,\tau}$. On a successivement :

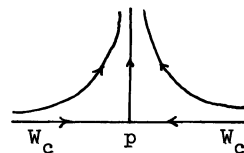
a) des singularités isolées pouvant être situées soit à l'intérieur d'un arc lisse γ de ∂A_n , soit à un angle de ∂A_n intersection de deux arcs lisses γ_1 et γ_2 . La singularité peut être hyperbolique ou semi-hyperbolique. A chaque singularité semi-hyperbolique aboutissent au moins 2 séparatrices formant une variété centrale W_c . D'autre part les arcs de ∂A_n aboutissant à p , étant invariants par $X_{n,\tau}$ sont aussi formés de séparatrices de p . Les types topologiques de singularités p possibles sont schématisés ci-dessous (voir [5] pour les démonstrations). Les types ne différant que par l'orientation des trajectoires de ceux représentés ne sont pas inclus dans la liste. Par contre on tient compte de l'existence et de la position de W_c par rapport à ∂A_n (position très importante pour la suite) :



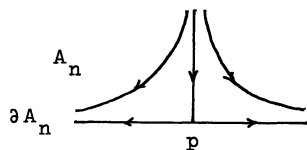
(a) semi-hyperbolique



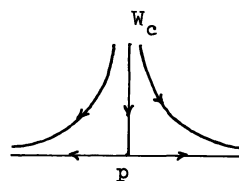
(b) hyperbolique
et semi-hyperbolique



(c) semi-hyperbolique

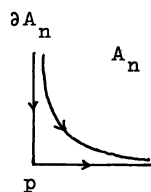


(d) hyperbolique

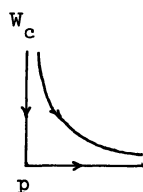


(e) semi-hyperbolique

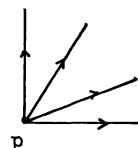
Points p intérieur à un arc γ



(f) hyperbolique



(g) semi-hyperbolique



(h) hyperbolique
et semi-hyperbo-
lique

Points p dans un angle de ∂A_n

Nous appellerons point de selle les points du type c,d,e,f,g. Ces points se distinguent par leur position (à l'intérieur d'un arc ou dans un angle de ∂A_n), par leur nature (hyperbolique ou semi-hyperbolique : dans ce dernier cas on dira que la singularité est un point de selle topologique) et par la position de la variété centrale. Nous appellerons point de selle-noeud les points du type a.

Si p est semi-hyperbolique, il n'est pas sûr à priori qu'une variété centrale W_c de p dépende d'une façon $\mathcal{C}^\infty$ de τ . Dans la suite, nous supposons que chaque point semi-hyperbolique de $X_{n,\tau}$ possède une variété centrale fixe, c'est-à-dire, indépendante de τ).

b) des singularités non isolées : il s'agit de segments $\gamma \subset \partial A_n$ ou bien de ∂A_n tout entier, éventuellement, si $n=1$. Il est facile de choisir des coordonnées locales en p : (x,y) telles que A_n soit localement égal à $\{y \geq 0\}$ ou bien à $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ et que $\bar{X}_{n,\tau} = \pm y \frac{\partial}{\partial y}$. Le segment γ est attractant ou dilatant suivant le signe $\pm$.

Revenons à la construction des solutions pour les équations I^∞ et II^∞ . Le point de départ de la construction réside dans le fait que ces équations sont résolubles localement, étant donné la nature des singularités de $\bar{X}_{n,\tau}$. Précisément, on a :

LEMME 22.- Soit un représentant de $\bar{X}_{n,\tau}$ sur un voisinage W de $\partial A_n \times [0,1]$, tel que les singularités de ce représentant encore noté $\bar{X}_{n,\tau}$, soient toutes sur ∂A_n . (Tout point semi-hyperbolique ayant une variété centrale fixe). Soit $p \in \partial A_n$. Alors il existe un voisinage $V(p)$ de $p \times [0,1]$ dans W tel que les équations I^∞ et II^∞ aient des solutions respectivement dans les espaces de fonctions et champs de vecteurs sur $V(p)$, plats sur $\partial A_n \times [0,1]$ pour tout second membre à support compact dans $\text{int. } V(p)$ et appartenant aux mêmes espaces.

Démonstration.- Si p est régulier pour $\bar{X}_{n,\tau}$ le résultat est évi-

dent par intégration sur les trajectoires, de même si p est une singularité non isolée. Si p est une singularité hyperbolique ou semi-hyperbolique on a démontré que les équations I^∞ et II^∞ étaient résolubles dans les espaces de germes en p pour les points hyperboliques (théorème I-10) et pour les points semi-hyperboliques ayant une variété centrale fixe et un jet fini différent de 0 en restriction à cette variété (théorème 15). Si h_τ , par exemple est un germe en p dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n)$ on peut trouver un germe en p d'un élément de $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n)$ tel que $\bar{X}_{n,\tau} f_\tau = h_\tau$. (voir remarque suivant théorème 15).

Cela signifie qu'il existe 2 voisinages V_1 et V_2 de $\{p\} \times [0,1]$,

$V_1 \supset V_2 \supset \{p\} \times [0,1]$, tels que si h_τ est une fonction sur V_1 , plate sur $\partial A_n \times [0,1]$, il existe une solution f_τ dans V_2 .

Il suffit de prendre $V(p) = V_2$, car une fonction à support compact dans $\text{int. } V_2$ peut être considérée définie partout.

Maintenant, il est clair, si l'on examine les démonstrations des théorèmes I.10 et 15, que l'on peut choisir V_1 et V_2 indépendants de h_τ .

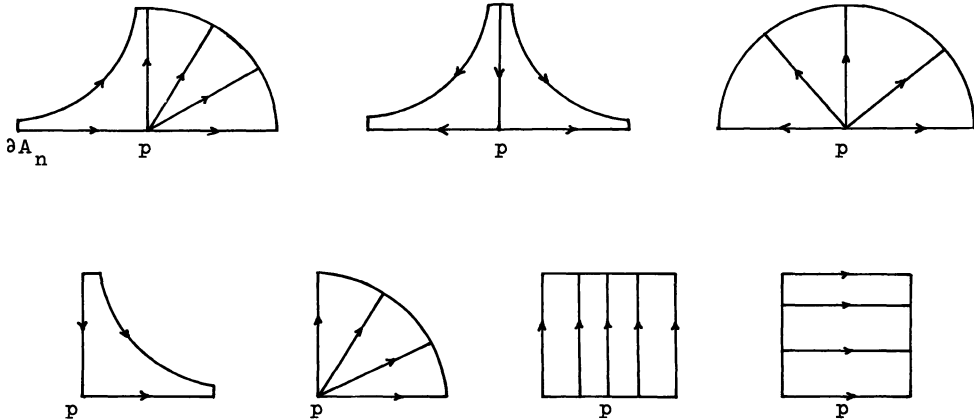
(De toute façon cette indépendance n'est pas de grande importance pour la suite).

Pour pouvoir tirer des différentes solutions locales données par le lemme 22, une solution globale, la difficulté tient au fait que les solutions locales ne sont pas en général à support compact et que l'on ne peut pas procéder à un simple recollement de ces solutions.

Nous allons voir d'ailleurs que d'autres conditions sont nécessaires pour pouvoir construire une solution globale.

Dans la démonstration du lemme 22, on peut choisir le voisinage $V(p)$ contenu dans un voisinage arbitraire de p . On peut profiter de cela pour choisir $V(p)$ d'être une variété de dimension 3 à bords anguleux dont les faces sont transverses ou tangentes au champ $\bar{X}_{n,\tau}$; précisément tel que l'intersection de $V(p)$ avec $A_n \times \{\tau\}$ pour $\tau \in [0,1]$

soit conforme au schéma ci-dessous :



Soit $p_1, p_2, \dots, p_m$ une suite de points de ∂A_n telle que si $V(p_1), \dots, V(p_m)$ sont des voisinages comme ci-dessus on ait

$$\partial A_n \times [0, 1] \subset \text{int } V(p_1) \cup \dots \cup \text{int } V(p_m).$$

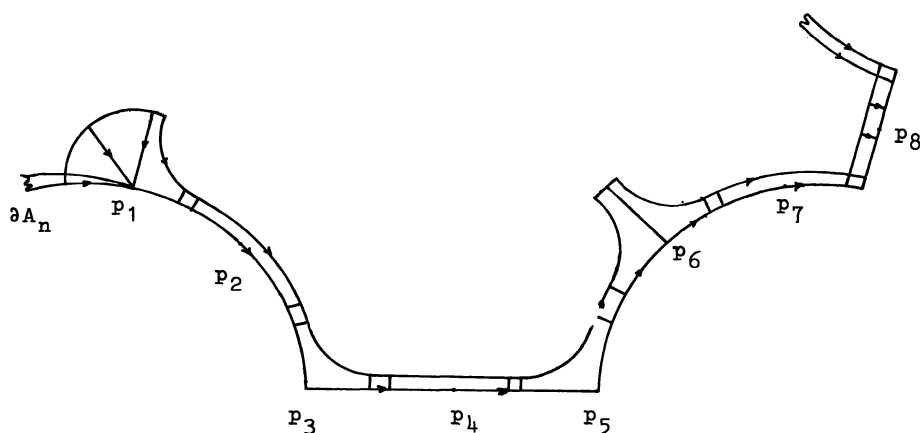
Clairement, on peut choisir un représentant du germe $\bar{X}_{n, \tau}$ (et donc du germe X_τ en $0 \in \mathbb{R}^2$) tel que les voisinages $V(p_1), \dots, V(p_m)$ soient de la forme :

$$V(p_i) = U(p_i) \times [0, 1] ,$$

où $U(p_i)$ est un 2-disque à bord anguleux conforme au schéma ci-dessus. On supposera dorénavant qu'un tel représentant du germe $\bar{X}_{n, \tau}$ est choisi. On le notera également $\bar{X}_{n, \tau}$. Son domaine de définition est $W = U \times [0, 1]$ où $U = U(p_1) \cup \dots \cup U(p_m)$.

Rappelons qu'une séparatrice par un point singulier p d'un champ est une trajectoire tendant vers p lorsque le paramètre tend vers $+$ ou $-\infty$, de telle façon que la direction tangente ait une limite (une séparatrice pour un germe de champ en p est le germe d'une séparatrice pour

un représentant du germe du champ). Ici, si le germe de champ X a une séparatrice en 0 , le champ éclaté $\bar{X}_{n,\tau}$ pour tout τ , a un point singulier $p \in \partial A_n$ avec une séparatrice non contenue dans ∂A_n (on dira : séparatrice extérieure). Cette circonstance permet de pouvoir choisir les $U(p_i)$ de façon que les bords des $U(p_i)$ tangents à $\bar{X}_{n,\tau}$ se raccordent entre eux conformément au schéma ci-dessous



(On a dessiné un segment de ∂A_n avec quelques points p_i possibles).

On suppose dorénavant que X possède au moins une séparatrice et que l'on a fait le choix d'un voisinage $W = U \times [0,1]$ avec les propriétés décrites ci-dessus. Pour résoudre l'équation I^∞ dans les germes de fonctions plates le long de $\partial A_n \times [0,1]$, il suffit de démontrer que pour tout $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n) \mathcal{C}_c^\infty(\text{int } W)$, espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur W , plates le long de $\partial A_n \times [0,1]$, à support compact dans $\text{int } W$, il existe une solution f_τ de $I^\infty : \bar{X}_{n,\tau} f_\tau = h_\tau$ appartenant à $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n) \mathcal{C}^\infty(\text{int } W)$ espace des fonctions sur $\text{int } W$, plate le long de $\partial A_n \times [0,1]$. (Ici, $\bar{X}_{n,\tau}$ désigne le représentant du germe sur W). Mais une fonction $h_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n) \mathcal{C}_c^\infty(\text{int } W)$ se décompose toujours en une somme de fonctions de support compact contenu chacun dans l'intérieur d'un des $V(p_i)$. On

peut se limiter à une telle fonction h_τ . Cette remarque est également valable pour l'équation II^∞ . Dans la suite on supposera que le second membre des équations I^∞ ou II^∞ est une fonction ou un champ, plat le long de $\partial A_n \times [0,1]$ à support compact dans l'intérieur de l'un des $V(p_i)$. On cherche une solution, fonction ou champ sur W tout entier.

Considérons tout d'abord l'équation I^∞ : soit h_τ à support compact dans $\text{int } V(p_i)$, pour un $i \in [1, \dots, m]$, et f_τ la solution de I^∞ dans $V(p_i)$ fournie par le lemme 22. On va essayer de prolonger f_τ en une solution de I^∞ dans W tout entier. Désignons par $\bar{V}(p_i)$ l'ensemble des trajectoires passant par les points de $V(p_i)$: $\bar{V}(p_i)$ est le saturé de $V(p_i)$ dans W . Dans $\bar{V}(p_i)$, le prolongement $\bar{f}_\tau$, s'il existe a une valeur bien déterminée : en effet, si p est un point de $\bar{V}(p_i)$ la trajectoire de p vient de $V(p_i)$ ou y va. Si q est le point d'entrée ou de sortie de cette trajectoire dans $V(p_i)$, on a nécessairement $\bar{f}_\tau(p) = f_\tau(q)$. Si l'on convient de poser $f_\tau \equiv 0$ en dehors de $\bar{V}(p_i)$ on a ainsi un prolongement unique de f_τ . Ce prolongement soulève plusieurs difficultés : il n'est pas sûr qu'il soit bien défini ni qu'il soit de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Nous allons tout d'abord examiner la question de la bonne définition de $\bar{f}_\tau$. Pour que $\bar{f}_\tau$ soit bien définie, il suffit qu'aucune trajectoire quittant $V(p_i)$ ne puisse y revenir. Cette propriété sera assurée par l'existence pour le champ $\bar{X}_n$, éclaté de X , de deux points singuliers au moins, à séparatrice extérieure. Avant de démontrer ce résultat, réglons le cas d'un champ $\bar{X}_n$ n'ayant qu'un seul point singulier à séparatrice extérieure. Cette circonstance implique que toutes les trajectoires de $\bar{X}_{n,\tau}$ sur ∂A_n ont une même orientation. Le point singulier p à séparatrice extérieure (qui doit faire partie des p_i !) est nécessairement semi-hyperbolique du type point de selle-noeud. Il est facile de voir que toutes les trajectoires quittant $V(p)$ du "côté point de selle" reviennent vers p après avoir contourné ∂A_n . Nous verrons que dans ce cas on peut tout de même prolonger f_τ , quitte à modifier préalablement cette

fonction dans $V(p)$. Remarquons que pour les $p_j \neq p$ le prolongement f_τ est bien défini. Lorsque $\bar{X}_n$ a deux points à séparatrices extérieures on a :

LEMME 23.- Soit un représentant du germe $\bar{X}_{n,\tau}$, encore noté $\bar{X}_{n,\tau}$, sur un voisinage W de $\partial A_n \times [0,1]$, comme plus haut. Alors, si $\bar{X}_n = \bar{X}_{n,0}$ admet au moins deux points singuliers à séparatrice extérieure, toute trajectoire de $\bar{X}_{n,\tau}$ quittant un voisinage $V(p_i)$ ne peut y revenir (et inversement, toute trajectoire entrant dans $V(p_i)$ ne peut en provenir).

Démonstration. - Le champ $\bar{X}_{n,\tau}$ pour τ fixé admet des singularités sur ∂A_n indépendantes de τ . Donc, il existe deux points p_1 et $p_2 \in \partial A_n$, points singuliers à séparatrice extérieure pour chaque $\bar{X}_{n,\tau}$. Prenons une valeur de τ quelconque et désignons par $\gamma_{1,\tau}$ et $\gamma_{2,\tau}$ des séparatrices extérieures de $\bar{X}_{n,\tau}$ par p_1 et p_2 . Alors $\Delta_{1,\tau} = U \setminus (\gamma_{1,\tau} \cup \partial A_n)$ et $\Delta_{2,\tau} = U \setminus (\gamma_{2,\tau} \cup \partial A_n)$ ont des intérieurs homéomorphes au 2-disque. Soit p_i un point quelconque de la liste $p_1, \dots, p_m$. Supposons que $p_i \neq p_2$ et qu'une orbite de $\bar{X}_{n,\tau}$ quitte $U(p_i)$ en p pour y revenir en q . Clairement, le segment d'orbite γ entre p et q est contenu dans $\text{int } \Delta_{1,\tau}$. Il est facile de vérifier que dans $U(p_i) \setminus (U(p_i) \cap \partial A_n)$ on peut choisir un segment γ' allant de p à q et transverse aux trajectoires de $\bar{X}_{n,\tau}$. On peut approximer le cercle $\gamma \cup \gamma'$ par un cercle différentiable Γ , plongé dans $\text{int } \Delta_{1,\tau}$ et transverse à $\bar{X}_{n,\tau}$. Un tel cercle Γ borde un disque $D \subset \Delta_{1,\tau}$. Par un argument homotopique simple on peut montrer que D contient au moins un point singulier de $\bar{X}_{n,\tau}$, ce qui est impossible. Si $p_i = p_2$, on peut répéter le même raisonnement en utilisant le disque $\Delta_{2,\tau}$.

Le second problème posé par le prolongement $\bar{f}_\tau$ est de démontrer que $\bar{f}_\tau$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Supposons donc que h_τ ait son support dans $V(p_i)$ et que l'on ait un prolongement $\bar{f}_\tau$ bien défini. La difficulté du problème est mise en évidence par la brève discussion qui suit, faite

pour justifier le paragraphe suivant. Soit p un point de ∂A_n . Si ce point est porté par une séparatrice issue de p_i , contenue dans ∂A_n , $\bar{f}_\tau$ est manifestement $\mathcal{C}^\infty$ en p . Une première difficulté apparaît si p est un autre point singulier dans la fermeture d'une séparatrice de p_i contenue dans ∂A_n . En effet, si p est un point source par exemple, la solution f_τ obtenue par prolongement de f_τ , ne se prolonge pas en général en p . (En ce point on doit avoir nécessairement $\bar{f}_\tau(p) = 0!$). Supposons maintenant que p soit un point de selle placé dans un angle de ∂A_n par exemple. Le problème de la différentiabilité en p et aux points au-delà de p (lorsqu'on suit ∂A_n au-delà de p) peut se préciser de la façon suivante. On choisit des coordonnées locales (x,y) en p telles que $A_n = \{x \geq 0, y \geq 0\}$, localement, que l'axe Ox soit localement porté par la séparatrice issue de p_i et que le champ $X_{n,\tau}$ soit transverse aux droites $\{x = \text{Constante}\}$, pour $x > 0$. Soit $I = \{a\} \times [0, \epsilon]$ un segment dans la carte, issu du point $(a, 0) \in \partial A_n$. La restriction de $\bar{f}_\tau$ à I est une fonction $g_\tau(y)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et plate en $y=0$. On peut définir $\bar{f}_\tau$ au voisinage de p , comme étant une intégrale première de $\bar{X}_{n,\tau}$, prenant les valeurs $g_\tau(y)$ aux points $\{a\} \times [0, \epsilon]$. Nous avons ici le problème de prolonger g_τ en une telle intégrale première $\mathcal{C}^\infty$.

Une discussion analogue peut être faite pour l'équation II^∞ . Le problème de la bonne définition conduit aux mêmes considérations que celles faites plus haut au sujet des trajectoires de $X_{n,\tau}$. Celui de la différentiabilité conduit à se préoccuper de l'existence de champs invariants (par $\bar{X}_{n,\tau}$) au voisinage d'un point de selle. C'est le sujet du prochain paragraphe.

2.2.3. Existence de fonctions et de champs invariants au voisinage d'un point de selle.

Nous allons considérer successivement les points de selle hyper-

boliques et les points de selle topologiques ou points de selle-noeud. Nous désignerons par $H = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ le premier quadrant de $\mathbb{R}^2$.

PROPOSITION 24. - Soit T_τ un chemin de champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur le 1er quadrant H . Supposons que $(0,0) \in H$ soit un point de selle hyperbolique dont Ox et Oy soient des séparatrices et qu'il n'existe pas d'autre singularité de T_τ sur H . Soient α et $\epsilon > 0$ tels que le segment $I = \{\alpha\} \times [0, \epsilon] \subset H$ soit transverse à T_τ pour τ . Soit $g_\tau: [0, \epsilon] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et plate en $\{0\} \times [0, 1]$. Alors il existe une fonction f_τ sur $H \times [0, 1]$, plate sur $\{0x\} \cup \{0y\}$, ou bien un champ Y_τ sur $H \times [0, 1]$, plat sur $\{0x\} \cup \{0y\}$, invariants par T_τ ($T_\tau f_\tau = 0$ ou bien $[T_\tau, Y_\tau] = 0$) et tels que :

$$\begin{aligned} f_\tau(\alpha, y) &= g_\tau(y) && \text{pour } 0 < y < \eta \leq \epsilon \text{ où } \eta \text{ est une certaine} \\ \text{ou bien } Y_\tau(\alpha, \tau) &= g_\tau(y) && \text{valeur } > 0. \end{aligned}$$

Démonstration. - Soit η une valeur quelconque : $0 < \eta < \epsilon$. On modifie g_τ sur $[\eta, \epsilon]$ de façon que g_τ soit identiquement nul au voisinage de ϵ . Soit p un point de $H \times [0, 1]$; notons $\varphi_u(p)$ le flot de T_τ par p . Nous désignerons par $\bar{g}_\tau$ le prolongement cherché de g_τ (que g_τ soit une fonction ou un champ). Si la trajectoire de T_τ par p rencontre I en un point (α, y) et que $p = \varphi_u(\alpha, y)$ on pose $g_\tau(p) = \varphi_{u*}(g_\tau(y))$. Sinon on pose $g_\tau(p) \equiv 0$. Il est clair que $g_\tau(p)$ ainsi définie est $\mathcal{C}^\infty$ sur $H \times [0, 1] \setminus \{0y\} \times [0, 1]$ et que ce prolongement est plat sur $\{0x\} \times [0, 1]$ moins $\{(0,0)\} \times [0, 1]$. D'autre part, il est facile de voir que si $\bar{g}_\tau$ est plat aux points $\{(0, p)\} \times [0, 1]$ pour un certain $p > 0$ ($(0, p) \in Oy \setminus \{(0,0)\}$) alors $\bar{g}_\tau$ est aussi plat aux points de $\{0y\} \times [0, 1] \setminus \{(0,0)\} \times [0, 1]$. Donc pour montrer que $\bar{g}_\tau$ est plat sur $\{0y\} \times [0, 1]$ il suffit de montrer qu'il est plat aux points de $J \times [0, 1]$ où $J \subset \{0y\}$ est un voisinage de $(0,0) \in Oy$.

Prenons $J = [0, \alpha]$. Il existe une valeur $\eta_1 > 0$, et $\eta_1 < \epsilon$ telle

que les trajectoires de T_τ issues des points $((\alpha, y), \tau)$ pour $0 < y < \eta_1$ atteignent chacune un point de la forme $((x, \alpha), \tau)$ et un seul. La réunion des segments de trajectoires entre ces deux points union $([0, \alpha] \times 0) \times [0, 1]$ et $(0 \times [0, \alpha]) \times [0, 1]$ est un voisinage V de $\{0, 0\} \times [0, 1] \subset H \times [0, 1]$.

Soit $\varphi_u(p) = (x_u(p), y_u(p), \tau)$ les composantes du flot de T_τ . Pour chaque $p \in V$ il existe une valeur $u(p) \leq 0$ telle que $a = x_{u(p)}(p)$. Pour fixer les idées, nous allons supposer que le 1-jet de T_τ est de la forme:

$$\tilde{T}_\tau^1 = \lambda_1(\tau) x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2(\tau) y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{avec } \lambda_1(\tau) < 0 \text{ et } \lambda_2(\tau) > 0$$

Alors, on peut choisir η_1 suffisamment petit pour qu'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0, c_1 < c_2$ telles que ,

$$\text{si} \quad T_\tau = a_\tau \frac{\partial}{\partial x} + b_\tau \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \text{on ait : } \quad c_1 y &\leq b_\tau(x, y) \leq c_2 y \\ -c_2 x &\leq a_\tau(x, y) \leq -c_1 x \end{aligned}$$

Par intégration, on obtient : $(p = (x, y, \tau))$

$$\begin{aligned} y e^{uc_1} &\leq y_u(p) \leq y e^{uc_2} \\ x e^{-uc_2} &\leq x_u(p) \leq x e^{-uc_1} \end{aligned} \quad (1)$$

tant que le point $\varphi_u(p)$ demeure dans U : en particulier tant que $u(p) \leq u \leq 0$. Les inégalités (1) nous permettent d'ailleurs d'estimer $u(p)$:

$$|u(p)| \leq \frac{1}{c_2} \log \frac{\alpha}{x} \quad (2)$$

(où $p = (x, y, \tau)$)

Nous avons besoin, pour poursuivre, des estimations de $\left| \frac{\partial^\gamma \varphi_u}{\partial p^\gamma} \right|$

qui ont été établies dans la démonstration de la proposition I.11 :

- il existe une constante K_γ pour tout multi-indice γ tel que :

$$\left| \frac{\partial^\gamma \varphi}{\partial p^\gamma} (p) \right| \leq e^{K_\gamma |\gamma| |u|} \quad \text{valable tant que } \varphi_u(p) \in V.$$

En particulier, on a :

$$\left| \frac{\partial^\gamma y_u}{\partial p^\gamma} (p) \right| \leq e^{K_\gamma |\gamma| |u|}$$

On va également estimer $\frac{\partial^\gamma x_u}{\partial p^\gamma}(p)$. Partant de l'équation $x_{u(p)}(p) = \alpha$ on obtient par dérivation :

$$0 = \frac{\partial x_{u(p)}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial x_u}{\partial p} (u(p), p)$$

$$\text{Comme : } \left| \frac{\partial x_{u(p)}}{\partial u} (\varphi_{u(p)}(p)) \right| \geq c_1 |x_{u(p)}(p)| = c_1 \cdot \alpha$$

on a la majoration :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial p} (p) \right| \leq K e^{K_1 |u|} \quad \text{pour une certaine constante } K.$$

On peut, par récurrence établir que les dérivées successives de u sont majorées par des exponentielles de $|u|$. En utilisant l'inégalité (2) on trouve qu'il existe des constantes $P_{|\gamma|}$ et $Q_{|\gamma|} > 0$ des nombres entiers $n_{|\gamma|}$ et $m_{|\gamma|}$ tels que l'on ait les inégalités :

$$\left| \frac{\partial^\gamma y_u}{\partial p^\gamma} (p) \right| \leq \frac{P_{|\gamma|}}{x^{m_{|\gamma|}}} |u| \quad (3)$$

$$\left| \frac{\partial^\gamma x_u}{\partial p^\gamma} (p) \right| \leq \frac{Q_{|\gamma|}}{x^{n_{|\gamma|}}} |u| \quad (4)$$

Enfin, de l'encadrement :

$$-\frac{1}{c_2} \text{Log } \frac{\alpha}{x} \leq u(p) \leq -\frac{1}{c_1} \text{Log } \frac{\alpha}{x}$$

on tire que, dans V :

$$|y_{u(p)}(p)| \leq y\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{c_1}{c_2}} \quad (5)$$

Plaçons nous dans le cas où g_τ est une application à valeur dans $\mathbb{R}$. Le prolongement f_τ est donné par :

$$f_\tau(p) = g_\tau(\psi_{u(p)}(p)).$$

Les majorations (3), (4) et (5), jointes au fait que g_τ est plate en $\{0\} \times [0,1] \subset [0,\varepsilon[\times [0,1]$ impliquent que toutes les dérivées successives de f_τ s'annulent pour $x \rightarrow 0$ uniformément en (y,τ) . D'où le résultat dans ce cas.

Supposons maintenant que g_τ soit une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^2$ et que l'on recherche un champ Y_τ invariant par le flot, prolongeant g_τ . La solution Y_τ est donnée, comme on l'a dit plus haut, par transport le long des orbites de T_τ . Pour établir que cette solution est plate le long de $J \times [0,1]$ on peut procéder comme dans la démonstration de la proposition I.11 ; il existe une application matricielle $A_{ij}(u,p)$, admettant des majorations :

$$\left| \frac{\partial^\gamma A_{ij}}{\partial p^\gamma} \right| \leq e^{L|\gamma|} |u| \quad (6)$$

avec $L|\gamma| \geq 0$.

Si $g_\tau(y) = (g_{\tau,1}(y), g_{\tau,2}(y))$

Le champ $Y_\tau(p) = f_{\tau,1} \frac{\partial}{\partial x} + f_{\tau,2} \frac{\partial}{\partial y}$ est donné par :

$$f_{\tau,i}(x,y) = \sum_j A_{i,j}(u(p),p) g_{\tau,j}(y_{u(p)}(p))$$

Les majorations (3), (4), (5) et (6) impliquent alors la platitude de Y_τ .

PROPOSITION 25. - Soit T_τ un chemin de champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur

$H = \{x \geq 0, y \geq 0\}$. Supposons qu'en 0, le germe de T_τ soit de la forme

$T_\tau = T + P_\tau$, avec $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^{\neq}(x, y) \cap V_\tau(2)$ que T soit semi-hyperbolique :

$\tilde{T}^1 = \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$ pour $\lambda \neq 0$, et que $\tilde{T} \in \Sigma_k \setminus \Sigma_{k+1}$ (où $\Sigma_i \subset \tilde{V}_{\tilde{T}^1}$ est défini dans le théorème 14). Supposons de plus, que dans H , T_τ ait le type topologique d'un point de selle, dont Ox et Oy sont 2 séparatrices et que

0 soit l'unique singularité de T_τ (Ox est nécessairement dans la variété centrale de T_τ en 0). Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que $I = \{\alpha\} \times [0, \varepsilon[$ soit transverse à T_τ pour $\forall \tau$. Alors on a le même résultat de prolongement que dans la proposition 26, pour $g_\tau : [0, \varepsilon[\times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, plate sur $\{0\} \times [0, 1]$.

Démonstration . - Comme dans la démonstration de la proposition 24, la seule difficulté est de démontrer la platitude de la solution f_τ , aux points d'un voisinage arbitraire de $0 \in Oy$, dans Oy pour $\forall \tau$. On verra dans le paragraphe 3, comme conséquence des théorèmes 14 et 15, que l'on peut choisir de nouvelles coordonnées dans $H \times [0, 1]$: (x, y, τ) , telles qu'en $(0, 0) \in H$, le germe de T_τ soit de la forme :

$$T_\tau = f_\tau(x, y) \left(y \frac{\partial}{\partial y} + \mu(\tau) x^{k+1} \frac{\partial}{\partial x} + \lambda(\tau) x^{2k+1} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

avec $\mu(\tau) \neq 0$ et $k \geq 1$.

On peut donc trouver un voisinage W de $\{0, 0\} \times [0, 1] \subset H \times [0, 1]$ dans lequel, pour des constantes $c_1, c_2 : 0 < c_1 < c_2$ on ait :

$$X_\tau = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

avec, en posant $p = (x, y, \tau)$:

$$c_1 y \leq b(p) \leq c_2 y$$

$$-c_2 x^{k+1} \leq a(p) \leq -c_1 x^{k+1}$$

Si $\varphi_u(p)$, flot de X_τ s'écrit $\varphi_u = (x_u(p), y_u(p))$, on obtient par intégration : $y e^{c_1 u} \leq y_u(p) \leq y e^{c_2 u}$.

On peut toujours supposer que $(\{\alpha\} \times [0, \varepsilon[) \times [0, 1] \subset W$. Si V est un voisinage, réunion d'orbites issue de $\{\alpha\} \times [0, \varepsilon[\times [0, 1]$ comme dans la démonstration de la proposition 24, chaque orbite atteint $\{\alpha\} \times [0, \varepsilon[$ au bout d'un temps $u(m)$:

$$c_2(\psi(\alpha) - \psi(x)) \leq u(m) \leq c_1(\psi(\alpha) - \psi(x))$$

$$\text{où } \psi(x) = \frac{1}{(k+1)x^k}$$

Lorsque g_τ est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$, la solution $f_\tau(p)$ est donnée par :

$$f_\tau(p) = g_\tau(y_u(p)(p))$$

Comme g_τ est plate en 0, on a :

$$|g_\tau(y)| \leq |g_\tau|_1 |y|$$

$$\text{d'où : } |f_\tau(p)| \leq |g_\tau|_1 |y| e^{c_1(\psi(\alpha) - \psi(x))}$$

qui tend vers 0 pour $x \rightarrow 0$, uniformément par rapport à y et τ .

Pour montrer que f est plate le long de l'axe Oy on utilise comme dans la proposition 24, des majorations 0 de la forme :

$$\left| \frac{\partial^\gamma \varphi_u}{\partial p^\gamma} \right| \leq e^{K|\gamma||u|}$$

$$\left| \frac{\partial^\gamma u}{\partial p^\gamma} \right| \leq e^{K|\gamma||u|}$$

d'où l'on tire la platitude de f_τ .

En effet, on peut établir des majorations de la forme :

$$\left| \frac{\partial^\gamma f_\tau}{\partial p^\gamma} \right| \leq K_s e^{M|\gamma||u|} |y_u(p)(p)|^s \quad \text{pour } \forall s \in \mathbb{N}; M_{|\gamma|} \text{ étant une constante}$$

$$\text{soit : } \left| \frac{\partial^\gamma f_\tau}{\partial p^\gamma} \right| \leq K_s e^{c_1 s \cdot \psi(\alpha)} \cdot e^{(M_{|\gamma|} - c_1 s) \psi(x)}$$

En choisissant s assez grand on a $M_{|\gamma|} - c_1 s < 0$, ce qui entraîne que

$$\frac{\partial^\gamma f_\tau}{\partial p^\gamma} \rightarrow 0 \text{ pour } x \rightarrow 0, \text{ uniformément en } y, \tau.$$

Lorsque $g_\tau = (g_{\tau,1}, g_{\tau,2})$ est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^2$, on utilise une formule du type :

$$f_{\tau,i}(p) = \sum_j A_{i,j}(u(p), p) g_{\tau,j}(y_u(p)(p))$$

Remarque. - Les séparatrices Ox et Oy , dans la proposition 27, ne jouent pas des rôles symétriques, alors que c'est le cas pour un point de selle hyperbolique. On peut facilement trouver des fonctions g_τ plates en 0 tel qu'il n'existe pas d'intégrales premières f_τ se restreignant en g_τ sur le segment $[0, \epsilon[\times \{\alpha\}$: ($f_\tau(x, \alpha) = g_\tau(x)$).

2.2.4. Démonstration des théorèmes I[∞] et II[∞].

Nous allons maintenant démontrer que les équations I[∞] et II[∞] ont des solutions sous certaines conditions. Pour énoncer convenablement ces conditions, nous avons besoin de la définition suivante :

DÉFINITION 26. - Soit X un germe de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$, de degré de dégénérescence non nul, à singularité algébriquement isolée, et $\bar{X}_n$ son éclaté comme dans le théorème 20. Soit C l'ensemble des points singuliers isolés de $\bar{X}_n$ ainsi que des extrémités d'arcs singuliers. On dira que deux points p et q de C, $p \neq q$ sont connectés, s'il existe une suite $q_1, \dots, q_k$ de points de C, tels que $q_1 = q$ et $q_k = p$ et que :

- 1) pour ℓ , $1 \leq \ell \leq k-1$, il existe une trajectoire sur ∂A_n allant de q_ℓ à $q_{\ell+1}$,
- 2) toutes les trajectoires du 1) décrivent ∂A_n dans le même sens,
- 3) Aucun des points intermédiaires q_i , $2 \leq i \leq k-1$, n'a de séparatrices extérieures (Ces points q_i ne peuvent être que des points de selle placés dans des angles de ∂A_n).

La réunion des points q_i et des trajectoires les reliant sur ∂A_n , définies dans 1) est appelée : une connection de p à q.

Nous pouvons maintenant énoncer :

THÉORÈME 27. - Soit X un germe de $0 \in \mathbb{R}^2$, de degré de dégénérescence non nul, et à singularité algébriquement isolée. Supposons que X possède au moins une séparatrice et que si $\bar{X}_n$ est l'éclaté de X, donné par

le théorème 20 et C, l'ensemble défini ci-dessus, chaque fois que deux points de C sont connectés, l'un d'eux est un point de selle hyperbolique ou bien un point de selle topologique ou un point de selle noeud dont une séparatrice centrale est contenue dans la connection. Soit $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty V_\tau$ et posons $X_\tau = X + P_\tau$. Supposons que l'éclaté $\bar{X}_{n,\tau}$ de X_τ possède une variété centrale fixe (indépendante de τ) en chaque point semi-hyperbolique. Alors les équations I^∞ et II^∞ sont résolubles pour $\bar{X}_{n,\tau}$ dans $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n)$ et $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n) V_\tau(\partial A_n)$ respectivement.

Démonstration. - Soit $\bar{X}_{n,\tau}$ le champ éclaté de X_τ avec la condition supplémentaire que chaque point semi-hyperbolique de $\bar{X}_{n,\tau}$ possède une variété centrale fixe. Ce sont les hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placés pour l'étude topologique du 2.2.2. Nous avons vu dans ce paragraphe que le germe $\bar{X}_{n,\tau}$ admet un représentant, encore noté $\bar{X}_{n,\tau}$ sur un voisinage W de $\partial A_n \times [0,1]$ de la forme $U \times [0,1]$ où $U = U(p_1) \cup \dots \cup U(p_m)$, $p_1, \dots, p_m$ étant des points de ∂A_n et $U(p_1), \dots, U(p_m)$ des voisinages d'un type particulier, décrit plus haut. On suppose également que les parties du bord des $U(p_i)$ tangentes à $X_{n,\tau}$ se raccordent entre elles. Comme on l'a remarqué dans 2.2.2., il suffit de résoudre I^∞ et II^∞ pour une fonction ou un champ de vecteurs à support compact dans l'intérieur de l'un quelconque des $V(p_i)$. Nous allons raisonner sur l'équation I^∞ , la transposition à l'équation II^∞ étant immédiate.

Soit h_τ une fonction plate sur $\partial A_n \times [0,1]$ de support compact contenu dans $\text{int. } V(p_i)$. Grâce à la condition d'existence d'une variété centrale fixe pour les points semi-hyperboliques, on sait qu'il existe une solution f_τ de I^∞ dans $V(p_i)$ pour ce second membre h_τ (voir 2.2.2) On va s'efforcer de choisir convenablement f_τ , grâce aux propositions 24 et 25 ci-dessus, de façon que cette solution f_τ se prolonge en une solution $\bar{f}_\tau$ dans W tout entier.

Pour mettre en oeuvre les propositions 24 et 25 remarquons que si p_j est un point de selle hyperbolique ou topologique, ou un point de selle-noeud, le germe de $\bar{X}_{n,\tau}$ en p_j est équivalent, par un chemin de germes de difféomorphismes fixant ∂A_n , à un chemin de germes de champ dont les 3 séparatrices de point de selle ou les 2 séparatrices de "quadrant selle" du point de selle-noeud sont fixes (Pour un point sur ∂A_n 1 ou 2 séparatrices sont déjà contenues dans ∂A_n). En effet, si p_j est un point de selle hyperbolique, cela résulte des théorèmes d'existence de variétés stables et instables pour un champ normalement hyperbolique à son lieu de zéros [6]. Si p_j est semi-hyperbolique, on a supposé que p_j possédait une variété centrale fixe. Le théorème 15 implique qu'il existe un chemin de germes de champs en p_j , Y_τ , solution de l'équation $[\bar{X}_{n,\tau}, Y_\tau] = \dot{\bar{X}}_{n,\tau}$ et plat sur ∂A_n . On verra plus loin, que par intégration de Y_τ on obtient un chemin de germes de difféomorphismes g_τ , fixant ∂A_n , tel que $g_\tau \circ \bar{X}_{n,0} = \bar{X}_{n,\tau}$. Le chemin des germes de $\bar{X}_{n,\tau}$ en p_j est donc équivalent au chemin constant des germes de $\bar{X}_{n,0}$ en p_j . Donc dans le cas hyperbolique ou semi-hyperbolique on peut appliquer les conclusions des propositions 24 ou 25 dans une carte H paramétrisant la moitié du point de selle d'un champ équivalent à $\bar{X}_{n,\tau}$. Les conclusions sont encore valables pour le germe de $\bar{X}_{n,\tau}$ lui-même. On peut l'énoncer précisément de la façon suivante : Soit un des quadrant dans $U(p_j)$ du point de selle p_j ou le quadrant-selle de p_j si p_j est un point de selle-noeud. Ce quadrant est bordé par deux segments de séparatrices $[p_j, a]$ et $[p_j, d]$ et par des arcs $[a, b]$, transverse à $\bar{X}_{n,\tau}$, $[b, c]$ tangent à $\bar{X}_{n,\tau}$ et $[c, d]$, transverse à $\bar{X}_{n,\tau}$. Si p_j est semi-hyperbolique, supposons que $[p_j, a]$ soit dans une variété centrale. Alors si g_τ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, plate en a , de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, il existe un unique prolongement $\bar{g}_\tau$ de g_τ dans le quadrant, invariant par $\bar{X}_{n,\tau}$. (Les propositions 24 ou 25 impliquent que g_τ est plate le long de $[p_j, a] \cup [p_j, d]$ et $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage. De toute façon l'existence et la différentia-

bilité de g_τ à l'extérieur de $[p_j, a] \cup [p_j, d]$ sont des propriétés triviales).

Nous allons montrer maintenant comment choisir f_τ pour que le prolongement f_τ existe et soit $\mathcal{C}^\infty$. Nous allons pour celà, examiner quatre hypothèses possibles sur le point p_i :

1) Supposons que p_i ne soit ni un point de selle hyperbolique, ni un point de selle topologique ou point de selle noeud, à séparatrice centrale dans ∂A_n , ni un point régulier. Dans ce cas, on choisit une solution f_τ avec la seule condition que f_τ soit localement nulle sur les parties de la frontière de $V(p_i)$ auxquelles $\bar{X}_{n,\tau}$ est tangente. (Un tel choix est toujours possible car h_τ a un support compact dans $\text{int } V(p_i)$). On sait, grâce à 2.2.2. , que f_τ a un prolongement $\bar{f}_\tau$ unique, bien défini dans $\bar{V}(p_i)$, en imposant la condition : $f_\tau \equiv 0$ dans $W \setminus \bar{V}(p_i)$. Soit $p \in W$. Nous voulons montrer que $\bar{f}_\tau$ est $\mathcal{C}^\infty$ en p . Pour celà nous allons examiner différentes possibilités :

- p appartient au complémentaire de la fermeture de $\bar{V}(p_i)$ (saturé de $V(p_i)$ dans W). Alors $\bar{f}_\tau$ est localement nul donc $\mathcal{C}^\infty$.

- $p \in \text{int } \bar{V}(p_i)$: p est alors sur la trajectoire d'un point $q \in \text{int } V(p_i)$ tel que le segment de trajectoire entre p et q ne rencontre pas support h_τ . Il est clair, en utilisant la différentiabilité du flot de $\bar{X}_{n,\tau}$ et la compacité de support h_τ que $\bar{f}_\tau$ est $\mathcal{C}^\infty$ en p .

- p appartient à la frontière de $\bar{V}(p_i)$: dans ce cas, et parce que les parties du bord des différents $U(p_j)$ qui sont tangentes à $\bar{X}_{n,\tau}$ se raccordent entre elles, on est sûr que p est sur la trajectoire d'un point q qui appartient à la frontière de $V(p_i)$ et où f_τ est localement nulle ce qui implique que $\bar{f}_\tau$ est aussi localement nulle en p , ou bien que p est sur la trajectoire d'un point $q \in V(p_i) \cap \partial A_n$. Dans ce dernier cas le point p appartient, soit à une connection de p_i à $p_j \in C$, soit à une séparatrice extérieure de p_j , bordant un quadrant selle de p_j , qui est encore connecté à p_i . Dans l'un ou l'autre cas nous allons

montrer que $\bar{f}_\tau$ est plate en p . Rappelons que les points intermédiaires de la connection : $q_2, \dots, q_{k-1}$ sont tous des points de selle situés dans des angles de ∂A_n . Par hypothèse, si un tel point q_ℓ est semi-hyperbolique, la trajectoire entre $q_{\ell-1}$ et q_ℓ est nécessairement dans la variété centrale. De même la trajectoire de q_{k-1} à p_j est dans la variété centrale de p_j si p_j est semi-hyperbolique. Il en résulte que l'on peut démontrer la platitude de $\bar{f}_\tau$ par récurrence sur les q_ℓ : si $\bar{f}_\tau$ est plate en tout point de la connection situé entre p_i et q_ℓ , q_ℓ non compris, la proposition 24 ou 25 (et précisément la conséquence de ces propositions, soulignée plus haut), implique que $\bar{f}_\tau$ est plate aux points de la trajectoire de q_ℓ à $q_{\ell+1}$, $q_{\ell+1}$ non compris. Enfin, si $\bar{f}_\tau$ est plate aux points de la connection entre p_i et p_j , p_j non compris, alors $\bar{f}_\tau$ est plate aux points de la séparatrice extérieure de p_j , bordant un quadrant de selle de p_j où peut être situé p .

2) Supposons que p_i soit un point de selle-noeud, unique point singulier à séparatrice extérieure. Soit f_τ une solution de I^∞ dans $V(p_i)$ (toujours pour un second membre h_τ à support compact dans $\text{int } V(p_i)$). Soit $U(p_i)_1$ le "quadrant selle" en p_i de $\bar{X}_{n,\tau}$ (indépendant de τ par choix de $X_{n,\tau}$). On peut prolonger f_τ en $\bar{f}_\tau$ d'une façon unique et bien défini sur $W \setminus U(p_i)_1$. Ce prolongement est de plus $\mathcal{C}^\infty$ et plat sur ∂A_n (même démonstration que dans le cas 1).

Notons, comme plus haut, les côtés de $U(p_i)_1$ par $[a,b]$, $[b,c]$ et $[c,d]$, où $[a,b]$ est transverse à $\bar{X}_{n,\tau}$ avec $a \in \partial A_n$. Comme on l'a vu dans 2.2.2. $[p_i, a]$ est porté par une séparatrice centrale de p_i . Sur $[a,b]$: $f_\tau|_{[a,b]} \neq \bar{f}_\tau|_{[a,b]}$. Mais $(f_\tau - \bar{f}_\tau)|_{[a,b]}$ est une fonction plate en a . Comme on l'a vu plus haut, il existe une unique fonction ℓ_τ , invariante, prolongeant $(f_\tau - \bar{f}_\tau)|_{[a,b]}$ et plate sur $[p_i, a] \cup [p_i, d]$. On pose $\bar{f}_\tau = \ell_\tau + f_\tau$ sur $U(p_i)_1$. Cette définition se raccorde avec celle de $\bar{f}_\tau$ sur $W \setminus U(p_i)_1$, d'une façon $\mathcal{C}^\infty$.

3) Supposons que p_i soit un point de selle hyperbolique ou un point de selle topologique ou un point de selle-noeud avec une séparatrice centrale dans ∂A_n . Supposons de plus que p_i ne soit pas dans un angle de ∂A_n , et que p_i ne soit pas l'unique point singulier avec une séparatrice extérieure. Ici on peut choisir f_τ tel que f_τ soit localement nulle sur les parties de la frontière de $V(p_i)$ auxquelles $\bar{X}_{n,\tau}$ est tangente (comme dans 1)) et tel que si $U(p_i)_1$ est l'un des quadrant-selle quelconque de p_i décrit comme plus haut, on ait $f_\tau|_{[a,b]} \equiv 0$ (où $a \in \partial A_n$). Alors f_τ possède un prolongement unique $\bar{f}_\tau$ (grâce au lemme 23) qui est $\mathcal{C}^\infty$ et plat sur ∂A_n (même démonstration que dans 1)).

4) Supposons que p_i soit un point de selle hyperbolique ou topologique dans un angle de ∂A_n , ou bien un point régulier, ou bien un point dans un arc singulier pour $\bar{X}_{n,\tau}$.

Supposons tout d'abord que p_i est un point de selle hyperbolique, en angle. Alors p_i appartient à une connection maximale de q_1 q_2 avec $q_1 \neq q_2$ ou bien $\bar{X}_n$ possède un unique point singulier à séparatrice extérieure. Dans l'un ou l'autre cas, en quittant p_i il existe une direction pour laquelle on se dirige soit vers un point de selle hyperbolique à séparatrice extérieure, soit vers un point de selle topologique ou un point de selle-noeud abordé par une séparatrice centrale. Si $U(p_i)$ est le quadrant-selle, voisinage de p_i , et si d appartient à la direction trouvée ci-dessus, on choisit f_τ d'être identiquement nulle sur $[a,b]$.

Supposons que p_i soit un point régulier. On doit choisir f_τ d'être nul sur l'un des côtés du rectangle $U(p_i)$ voisinage de p_i . Ce côté est choisi par un raisonnement identique à celui fait ci-dessus.

Supposons que p_i soit semi-hyperbolique. Dans le quadrant selle $U(p_i)$ voisinage de p_i on choisit $f_\tau \equiv 0$ sur $[a,b]$ si a appartient à la séparatrice centrale.

Supposons que p_i soit un point d'un arc singulier. $U(p_i)$ est donc dans ce cas un rectangle dont un des côtés est l'arc singulier (cf. 2.2.2.). On doit choisir f_τ nulle sur cet arc, ce qui impose une valeur nécessaire à f_τ .

Dans l'un ou l'autre cas les hypothèses faites sur les connections impliquent que $\bar{f}_\tau$ existe et est $\mathcal{C}^\infty$.

3. LES RÉSULTATS $\mathcal{C}^\infty$ RELATIFS AUX GERMES DE CHAMPS DE VECTEURS EN $0 \in \mathbb{R}^2$.

Nous dirons que deux germes de champs X et Y sont $\mathcal{C}^\infty$ -équivalents s'il existe un germe de difféomorphisme $g \in \text{Diff}_0(\mathbb{R}^2)$, préservant 0, tel que $g_*X = Y$ et qu'ils sont formellement équivalents s'il existe un difféomorphisme formel $\tilde{g} \in \widetilde{\text{Diff}}_0(\mathbb{R}^2)$ tel que $\tilde{g}_*\tilde{X} = \tilde{Y}$; on écrit $X \sim Y$, $\tilde{X} \sim \tilde{Y}$. D'autre part, un jet d'ordre k de champ $\tilde{X}^k$ est dit formellement déterminé si tous les (jets infinis) germes de champs de k -jet $\tilde{X}^k$ sont (formellement) équivalents entre eux.

Je rappelle que l'équation II^∞ pour $X_\tau = X + P_\tau$ permet de passer de l'équivalence formelle à l'équivalence $\mathcal{C}^\infty$. Précisément, on a :

LEMME 28 . - Soit X un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$ de champ de vecteurs. Si pour $\forall P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^{\infty} V_\tau(2)$, l'équation II^∞ associée à $X_\tau = X + P_\tau$ est résoluble, alors on a l'implication :

$$Y \text{ germe en } 0 \text{ tel que } \tilde{Y} \sim \tilde{X} \Rightarrow Y \sim X.$$

Démonstration. - Soit $\tilde{g}$ tel que $\tilde{X} = \tilde{g}_*\tilde{Y}$

Soit g un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ dont le jet ∞ est égal à $\tilde{g}$ (L'existence de g est assuré par le théorème de Borel).

Alors $g_*Y = X + P$ avec $P \in \mathcal{M}^{\infty} V$

On considère $P_\tau = \tau P$, $X_\tau = X + \tau P$ et l'équation :

$II^\infty \quad [X_\tau, Y_\tau] = P$. Par hypothèse, cette équation est résoluble avec $Y_\tau \in \mathcal{M}_\tau^{\infty} V_\tau$.

L'intégration de Y_τ fournit un chemin de germes de difféomorphismes fixant l'origine, tel que $h_* X_0 = X_\tau$ et en particulier

$$h_{1*} X = X + P = g_* Y$$

D'où $(g^{-1})_* h_{1*} X = Y$.

Nous allons appliquer tout d'abord ce résultat aux champs de degré de dégénérescence nul, c'est à dire dont le 1-jet en 0 est non nul et non équivalent à $z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$. Les différents cas possibles sont décrits dans le paragraphe 1.

a) Les champs vérifiant les conditions (P_2) ou bien les champs contractants ou dilatants sont hyperboliques: on sait que les équations II^∞ sont toujours résolubles (pour $\forall P_\tau$) et les conséquences $\mathcal{C}^\infty$ ont été tirées dans I.3. On a une petite précision supplémentaire en dimension 2, grâce au lemme 7 :

THÉORÈME 29. - Si un groupe X a un 1-jet $\tilde{X}^1$ équivalent à

$$X_1 = \lambda(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + m z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}), \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}$$

alors X est $\mathcal{C}^\infty$ équivalent au champ polynomial :

$$Y = \lambda(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + m z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}) + \alpha z_1^m \frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

b) Considérons maintenant les champs dont le jet ∞ relèvent du théorème 14. En ce qui concerne les équations II , on a :

- dans le cas où $\tilde{X}^1$ est diagonal et hyperbolique, l'équation II^∞ est toujours résoluble (Théorème I.11)

- Dans le cas où X n'est que partiellement hyperbolique :

$\tilde{X}^1 = \lambda z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$ avec $\lambda \neq 0$ et que $\tilde{X} \in \Sigma_k \setminus \Sigma_{k+1}$, $k < \infty$, il n'est pas certain a priori que l'équation II^∞ soit résoluble pour X_τ , pour tout $P_\tau \in \mathcal{M}_\tau^V(2)$. Cependant, grâce au théorème 14, on sait qu'il existe un germe de fonctions $f \in \mathcal{C}(2)$, $f(0) \neq 0$ telle que $fX \sim Y + P$, où Y

est le modèle polynomial du théorème 14 et $P \in \mathcal{M}^\infty V(2)$. Le germe $Y+P$ possède des variétés centrales tangentes en 0 à l'axe Oz_2 . Le champ $Y+P$ est donc équivalent à un champ Y_1 tel que $\tilde{Y}_1^1 = \lambda z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$ et que Oz_2 soit variété centrale de Y_1 . Le chemin $Y_\tau = Y + \tau(Y_1 - Y)$ est un chemin vérifiant les conditions du théorème 15 pour lequel l'équation II^∞ est résoluble. Ce qui implique finalement que $fX \sim Y$.

- Dans le cas où $\tilde{X}^1$ est un 1-jet de rotation : $X_1 = \lambda(z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_2})$, $\lambda \neq 0$, les résultats de Takens [23] (établis par une méthode différente de la nôtre) s'interprètent justement, en disant que si $\tilde{X} \in \Sigma_k \setminus \Sigma_{k+1}$, $k < \infty$, il existe f , $f(0) = 1$, tel que fX soit équivalent au modèle du théorème 14. (Il ne fait pas de doute que les équations II^∞ sont résolubles pour le champ polynomial du modèle. On peut essayer d'en donner une démonstration s'inspirant du traitement du champ elliptique considéré dans I-3). On a donc :

THÉORÈME 30. - Sous les hypothèses du théorème 14, et si X est un germe tel que $\tilde{X} \in \Sigma_k \setminus \Sigma_{k+1} \subset \tilde{V}_{\tilde{X}^1}$, alors il existe un germe de fonction f , $f(0) = 1$, tel que fX soit $\mathcal{C}^\infty$ -équivalent au modèle polynomial du théorème 11. Ce modèle est $\mathcal{C}^\infty$ -déterminé. Si $\tilde{X}^1$ est hyperbolique, le résultat reste valable pour $\tilde{X} \in \Sigma_\infty$.

Remarque. - Si $\tilde{X}^1$ est un 1-jet de rotation ou bien égal à $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$, la conclusion du théorème précédent est fausse pour $\tilde{X} \in \Sigma_\infty$: En effet par exemple, un champ qui est formellement proportionnel à une rotation n'est pas en général $\mathcal{C}^\infty$ proportionnel à une rotation.

Passons maintenant aux champs de degré de dégénérescence non nul. En l'absence de résultats formels, nous n'aurons ici que les résultats des équations I^∞ et II^∞ à exploiter.

Remarquons tout d'abord que les fonctions plates passent bien l'éclatement :

LEMME 31. - Soient $\phi_1, \dots, \phi_n$ n éclatement successifs de $0 \in \mathbb{R}^2$, A_n le domaine de ϕ_n . Alors, la composition par $\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n$ induit un isomorphisme de $\mathcal{M}_\tau^\infty$ sur $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n)$. De même $(\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n)_*$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n)_{V_\tau(\partial A_n)}$ et $\mathcal{M}_\tau^\infty_{V_\tau(2)}$. Enfin si φ_τ est une famille de germes de difféomorphismes en $0 \in \mathbb{R}^2$, ne différant de l'identité que par des termes plats, il existe une famille $\bar{\varphi}_\tau$ de germes de difféomorphismes le long de ∂A_n , ne différant de l'identité que par des termes plats, telle que

$$\varphi_\tau \circ \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n \circ \bar{\varphi}_\tau$$

Et inversement, l'existence de $\bar{\varphi}_\tau$ implique celle de φ_τ .

Démonstration. - Triviale par récurrence sur l'éclatement.

Un autre résultat utile pour la suite est le suivant :

LEMME 32. - Soit $F_{n,\tau}$ un germe de fonctions sur $A_n \times [0,1]$, le long de $\partial A_n \times [0,1]$, vérifiant les conditions du lemme 17 pour tout τ . Alors, toute fonction $\psi_\tau \in \mathcal{M}_\tau^\infty(\partial A_n)$ est divisible par $F_{n,\tau}$ ($\exists \psi'_\tau$ tel que $\psi_\tau = F_{n,\tau} \cdot \psi'_\tau$)

Démonstration. - Plaçons nous tout d'abord en un point intérieur à un arc lisse de ∂A_n : il existe des coordonnées (x,y) sur voisinage de p , telles que, localement $A_n = \{y \geq 0\}$. Alors :

$$F_{n,\tau} = y^{\ell_1} G_{n,\tau} \quad \text{avec} \quad G_{n,\tau} \neq 0$$

et si ψ_τ est plat sur ∂A_n , on peut la diviser localement par y^{ℓ_1} :

$$\psi_\tau = y^{\ell_1} K_\tau \quad \text{d'où} \quad \psi_\tau = F_{n,\tau} K_\tau / G_{n,\tau}$$

Si $p \in \gamma_i \cap \gamma_j$, où γ_i et γ_j sont deux arcs lisses de ∂A_n se rencontrant en p , il existe des coordonnées (x,y) au voisinage de p telles que localement $A_n = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ et $F_{n,\tau} = y^{\ell_i} x^{\ell_j} G_{n,\tau}$ avec $G_{n,\tau} \neq 0$.

Si ψ_τ est plat le long de ∂A_n ; ψ_τ est plat le long de Ox en particulier, d'où :

$$\psi_\tau = x^{\ell_j} K'_\tau \quad \text{avec } K'_\tau \text{ plat le long de } \partial A_n.$$

K'_τ est plat le long de Oy : $K'_\tau = y^{\ell_i} K_\tau$

d'où $\psi_\tau = x^{\ell_j} y^{\ell_i} K_\tau$ et $\psi_\tau = F_{n,\tau} \cdot K_\tau / G_{n,\tau}$

Donc, la fonction ψ_τ étant localement divisible par $F_{n,\tau}$ est aussi globalement divisible.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer :

THÉOREME 33. - Soit X un germe de champ en $0 \in \mathbb{R}^2$ à singularité algébriquement isolée. Supposons de plus que :

i) X possède au moins une séparatrice

ii) Le champ $\bar{X}_n$ associé à X par le théorème 20 est tel que chaque fois que deux points singuliers sont connectés, l'un d'eux au moins est ou bien un point de selle hyperbolique ou bien un point de selle topologique ou un point de selle-noeud dont une séparatrice centrale est contenue dans la connection.

Alors si Y est un germe de champ et $\tilde{f}$ une série formelle telle que $\tilde{f}(0) \neq 0$ et $\tilde{f}\tilde{X} \sim \tilde{Y}$, il existe un germe de fonction ℓ , $\tilde{\ell} = \tilde{f}$ telle que $\ell X \sim Y$.

Démonstration. - Soit $\tilde{h} = \frac{1}{\tilde{f}}$: on a $\tilde{X} \sim \tilde{h}\tilde{Y}$ ce qui implique l'existence de $P \in \mathcal{M}^\infty V(2)$ tel que $X+P \sim hY$ si h est un prolongement de $\tilde{h}$. Soit $\bar{X}_n$ le champ éclaté de X donné par le théorème 20. Par le même ré-éclatement appliqué à $X + P$ on obtient un champ $\bar{X}_n + \bar{P}_n$ où $\bar{P}_n \in \mathcal{M}^\infty(\partial A_n) \setminus V(\partial A_n)$. Ce dernier champ a les mêmes singularités que $\bar{X}_n$, aux mêmes points. Soit p un point semi-hyperbolique isolé de $\bar{X}_n$, et donc de $\bar{X}_n + \bar{P}_n$. Les champs $\bar{X}_n$ et $\bar{X}_n + \bar{P}_n$ ont en p ou bien une variété centrale contenue dans ∂A_n , ou bien une variété centrale transversale

à ∂A_n . Dans ce dernier cas, il est facile de vérifier que toutes les variétés centrales de $\bar{X}_n$ et de $\bar{X}_n + \bar{P}_n$, transverses à ∂A_n ont un contact d'ordre infini en p. Le même raisonnement étant valable en tout point semi-hyperbolique isolé de $\bar{X}_n$, on peut trouver un nouveau champ $P \in \mathcal{M}^\infty V(2)$ tel que $X+P$ soit équivalent à hY et tel que pour chaque point semi-hyperbolique isolé p de $\bar{X}_n$, les champs $\bar{X}_n$ et $\bar{X}_n + \bar{P}_n$ aient une variété centrale en commun. Soit $X_\tau = X + \tau P$. Le champ éclaté $\bar{X}_{n,\tau}$ de X_τ , fourni par le corollaire 21, a en chaque point semi-hyperbolique isolé une variété centrale fixe. La famille X_τ vérifie alors toutes les conditions du théorème 27. Désignons par $F_{n,\tau}$ la fonction telle que :

$$\hat{X}_{n,\tau} = F_{n,\tau} \bar{X}_{n,\tau} \quad \text{avec} \quad (\phi_1 \circ \dots \circ \phi_n) \star \hat{X}_{n,\tau} = X_\tau$$

Le champ $\hat{X}_{n,\tau}$ s'écrit :

$$\hat{X}_{n,\tau} = \hat{X}_{n,0} + \hat{P}_\tau \quad (\text{où } \hat{P}_\tau \text{ est le champ relevé de } P_\tau \text{ donné par le lemme 31})$$

comme $\hat{P}_\tau \in \mathcal{M}^\infty(\partial A_n) V_\tau(\partial A_n)$, on a d'après le lemme 32, :

$$\bar{P}_\tau = \hat{P}_\tau / F_{n,\tau} \in \mathcal{M}^\infty(\partial A_n) V_\tau(\partial A_n)$$

et
$$\bar{X}_{n,\tau} = \bar{X}_{n,0} + \bar{P}_\tau$$

D'après le théorème 27, on peut résoudre l'équation

$$[\bar{X}_{n,\tau}, Y_\tau] = \dot{\bar{P}}_\tau \quad \text{avec} \quad Y_\tau \in \mathcal{M}^\infty(\partial A_n) V_\tau(\partial A_n).$$

Par intégration de Y_τ , on trouve une famille de germes de difféomorphismes $\hat{g}_\tau$, le long de ∂A_n , ne différant de l'identité que par des termes plats et telle que :

$$\begin{aligned} \hat{g}_\tau \star \bar{X}_{n,0} &= \bar{X}_{n,\tau} \quad \text{en particulier si } \hat{g} = \hat{g}_1 \\ \hat{g}_1 \star \bar{X}_{n,0} &= \bar{X}_{n,1} \end{aligned}$$

D'où :

$$\hat{g}_\star(\hat{X}_{n,0}) = \hat{g}_\star(F_{n,0} \bar{X}_{n,0}) = (F_{n,0} \circ \hat{g}) \hat{g}_\star(\bar{X}_{n,0}) = (F_{n,0} \circ \hat{g}) \bar{X}_{n,1}$$

Or $F_{n,0} \circ \hat{g} = F_{n,0} = F_{n,1}$ Modulo $\mathcal{M}^\infty(\partial A_n)$

D'où $\hat{g}_\star \hat{X}_{n,0} = (1+\hat{k}) \hat{X}_{n,1}$ avec $\hat{k} \in \mathcal{M}^\infty(\partial A_n)$.

En passant au quotient grâce au lemme 32, on obtient un germe de difféomorphisme g , en $0 \in \mathbb{R}^2$, ne différant de l'identité que par des termes plats et un germe de fonction $k \in \mathcal{M}^\infty$ tels que :

$$g_\star X_0 = (1+k) X_1$$

Soit $g_\star X = (1+k)(X+P) \sim h.Y$

Soit $g_\star X \sim h'.Y$ pour une fonction telle que $\tilde{h}' = \tilde{h}$.

Comme $\frac{1}{\tilde{h}'} = \tilde{f}$ et que g ne diffère de l'identité que par des termes plats, il existe un germe de fonction ℓ tel que $\tilde{\ell} = \tilde{f}$ et que :

$$\ell X \sim Y.$$

Remarque. - Les conditions sur les connections portent sur le champ éclaté $\bar{X}_n$, ce qui est assez indirect ; les conditions ne dépendent en fait que d'un jet d'ordre fini de X . Il serait intéressant de poursuivre l'analyse des champs à singularité algébriquement isolée de façon à obtenir un critère directement lisible sur un jet fini de X .

Nous allons donner quelques exemples de résultats fournis par le théorème dans des cas particuliers. D'autres exemples pourraient facilement être tirés de la liste de singularités de détermination topologique finie établie par F. Dumortier dans [5].

Exemple 1. La singularité $z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$:

C'est la seule singularité linéaire de degré de dégénérescence non nul. Rappelons que si X est tel que $\tilde{X}^1 = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$, alors X est équivalent à la forme normale :

$$\tilde{X} \sim z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{l \geq 2} (a_l z_1^l \frac{\partial}{\partial z_1} + b_l z_1^l \frac{\partial}{\partial z_2}).$$

Notons par $\bar{\Sigma}$, l'espace linéaire de formes normales défini par :

$$\bar{\Sigma} = \{\tilde{Y} \in \mathbb{F}_{\tilde{X}_1} \mid b_2 = 0\}$$

et par Σ le sous ensemble algébrique de $\tilde{\mathbb{V}}_{\tilde{X}_1}$, de codimension 1 des jets $\tilde{Y}$, $\tilde{Y}^1 = \tilde{X}^1$ tel que $\tilde{Y}$ ait une forme normale dans $\bar{\Sigma}$.

PROPOSITION 34. - Si X est un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$ de champ de vecteurs, tel que $\tilde{X}^1 = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$, et si $\tilde{X} \notin \Sigma$, alors on peut appliquer à X le théorème 33 : si $\tilde{f}\tilde{X} \sim \tilde{Y}$ pour un $\tilde{f}$, $\tilde{f}(0) \neq 0$, $\exists g \in \mathcal{C}(2)$, $\tilde{g} = \tilde{f}$ tel que $gX \sim Y$.

Démonstration. - Il suffit de démontrer que X vérifie les hypothèses du théorème. Si $X = a \frac{\partial}{\partial z_1} + b \frac{\partial}{\partial z_2}$, il est clair que $(\tilde{a}, \tilde{b}) \supset \tilde{\mathcal{M}}^3$. Pour vérifier l'existence de séparatrices et les autres conditions, le plus simple est de chercher directement un éclatement de X. Un tel éclatement a été décrit par F. Takens dans [24] : après 3 éclatements successifs, on obtient un champ $\bar{X}_n$ possédant exactement 6 points de selles hyperboliques dont 2 à séparatrice extérieure.

Exemple 2. - Considérons un champ

$$X_k = \sum_{(i+j=k)} (a_{i,j} z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_1} + b_{i,j} z_1^i z_2^j \frac{\partial}{\partial z_2})$$

dont les composantes sont des polynômes homogènes de degré $k \geq 2$.

$$\text{Posons } \tilde{\mathbb{V}}_{X_k} = \{\tilde{X} \mid \tilde{X}^k = X_k\}$$

Soit $X, \tilde{X} \in \tilde{\mathbb{V}}_{X_k}$, et éclatons une fois l'origine.

Le résultat est un champ $\bar{X}_1$:

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{r^{k+1}} \hat{X}_1 = \left[g(\cos \theta, \sin \theta) + \tilde{g}(r, \theta) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} + f(\cos \theta, \sin \theta) r \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\text{où } f = \langle X_k, z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \rangle, \quad g = \langle X_k, z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \rangle$$

et $\tilde{f}(0, \theta) = \tilde{g}(0, \theta) = 0$.

On a, pour un tel champ :

PROPOSITION 35. - [24] Soit X , tel que $\tilde{X}^k = X_k$. Si l'application
 $\theta \rightarrow g(\cos\theta, \sin\theta)$ est générique et si chaque fois que $g(\cos\theta, \sin\theta) = 0$
alors $f(\cos\theta, \sin\theta) \neq 0$ (on dit que f, g sont en position générale) alors
 $\bar{X}_1$ ne possède que des singularités hyperboliques sur ∂A_1 .

Clairement, les couples (f, g) en position générale correspondent à des X_k situés dans le complémentaire d'un ensemble algébrique $\Sigma_k \in \tilde{V}_k$ espace des champs polynomiaux homogènes de degré k . Pour de tels champs, on peut classifier le type topologique des orbites (cf. [24]).

Si $k \geq 2$, les orbites de X sont obtenues, à homéomorphisme près par recollement de secteurs pris dans l'un des quatres modèles suivants :



secteur
dilatant



secteur
type selle



secteur
de boucles



secteur
attractant

Le critère sur les connections du théorème 33 équivaut ici à interdire toute connection entre source et puits de X_1 . Il s'interprète en disant que X ne possède pas de secteurs de boucles. D'où :

THÉOREME 36 . - Il existe un ensemble algébrique $\Sigma_k \subset V_k$, espace des
champs polynomiaux de degré k , $k \geq 2$, tel que si X est un germe,

$\tilde{X}^{k-1} = 0$, $\tilde{X}^k \notin \Sigma_k$ et que le type topologique de X ne contienne aucun secteur en boucles, alors si $\tilde{f}\tilde{X} \sim \tilde{Y}$ pour $\tilde{f}(0) \neq 0$, $\exists g$, $\tilde{g} = \tilde{f}$ tel que $gX \sim Y$. (La condition sur les secteurs pouvant se lire sur $\tilde{X}^k$).

Remarque. - Le grand problème restant posé est celui de la classification formelle des germes. Cette classification n'a été faite complètement que pour les germes de degré de dégénérescence nulle dans le théorème 14.

Nous allons maintenant passer aux conséquences de la résolution de l'équation I^∞ en remarquant que cette équation est liée à la recherche d'intégrales premières. Remarquons pour commencer que si $X_\tau = X + P_\tau$ et que si l'équation I^∞ est résoluble dans $\mathcal{M}_\tau$ pour tout P_τ , alors l'équation sans paramètre $X.f = h$ est résoluble dans $\mathcal{M}^\infty$. Il suffit de considérer $P_\tau \equiv 0$ et h comme un chemin constant. On trouve une solution f_τ vérifiant $X.f_\tau = h$ et il suffit de retenir $f = f_0$ par exemple.

Soit X un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$. Nous appellerons intégrale première formelle tout $\alpha \in \tilde{\mathcal{M}}$ telle que $\tilde{X}.\alpha = 0$ avec $\alpha(0) = 0$.

On veut chercher à quelles conditions il existe une intégrale première

$\mathcal{C}^\infty$, f , telle que $\tilde{f} = \alpha$. Le lemme suivant montre l'utilité de l'équation I^∞ dans cette question :

LEMME 37. - Soit X un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$. Pour que, quelle que soit l'intégrale première α , il existe une intégrale première $\mathcal{C}^\infty$, telle que $\tilde{f} = \alpha$, il suffit que l'équation $I^\infty : X.f = h$ ait une solution $f \in \mathcal{M}^\infty$ pour tout $h \in \mathcal{M}^\infty$.

Démonstration. - Soit en effet g' un germe de fonction $\mathcal{C}^\infty$, tel que $\tilde{g}' = \alpha$. Alors $X.g' \in \mathcal{M}^\infty$. Si $g \in \mathcal{M}^\infty$ est solution de :

$Xg = Xg'$ alors $f = g' - g$ est une intégrale première telle que $\tilde{f} = \alpha$

Considérons maintenant un germe X à singularité algébriquement isolée, et $\bar{X}_n$ le champ éclaté de X , défini par le théorème 20.

LEMME 38. - Pour que l'équation $I^\infty : X.f = h$ soit résoluble dans $\mathcal{M}^\infty$ il faut et il suffit que l'équation $\bar{I}^\infty : \bar{X}_n.\bar{f} = \bar{h}$ soit résoluble dans $\mathcal{M}^\infty(\partial A_n)$

Démonstration. - Conséquence immédiate des lemmes 32 et 33.

Nous pourrions maintenant énoncer un théorème d'existence d'intégrales premières $\mathcal{U}^\infty$ sous les mêmes hypothèses que le théorème 34. Mais l'existence d'une intégrale première formelle limite les types possibles de singularité pour $\bar{X}_n$, d'une façon tout à fait avantageuse :

LEMME 39. - Soit X un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$, à singularité algébriquement isolée. Supposons que X possède une intégrale première formelle non identiquement nulle. Soit $\bar{X}_n$, le champ éclaté de X , défini par le théorème 20. Alors, ou bien X a un 1-jet de rotation ou bien toutes les singularités de $\bar{X}_n$ sont des points de selle hyperboliques.

Démonstration. - Si X est de degré de dégénérescence nul et a un 1-jet non équivalent à une rotation, le 1-jet de X , $\tilde{X}^1$ est un point hyperbolique ou bien partiellement hyperbolique. Dans le 1er cas, il est clair que le point est nécessairement un point de selle. Dans le deuxième cas, il existe une série formelle $\tilde{f}$, $\tilde{f}(0) \neq 0$ tel que :

$$\tilde{f}\tilde{X} \sim z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (a_k z_2^{k+1} + a_{2k} z_2^{2k+1}) \frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{avec} \quad a_k \neq 0$$

(Théorème 14).

L'hypothèse faite implique que le champ polynomial de droite $\tilde{Y}$ a une intégrale première $\tilde{\beta}$, non identiquement nulle. Mais cela est impossible. En effet, si $\tilde{\beta}_\ell$ est le terme de plus bas degré ℓ de $\tilde{\beta}$, $\ell \geq 1$ on doit avoir :

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \tilde{\beta}_\ell = 0$$

D'où $\tilde{\beta}_\ell = d_\ell z_2^\ell$ pour $\gamma_\ell \neq 0$

Alors $\tilde{Y} \cdot \tilde{\beta}_\ell = \ell a_k d_\ell z_2^{k+\ell} + (\ell+1) a_{2k} d_\ell z_2^{\ell+2k}$

avec $\ell a_k d_\ell \neq 0$

Mais aucun polynôme P ne peut être tel que :

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} P = \ell a_\ell d_\ell z_2^{k+\ell}$$

et les coefficients de :

$$(\tilde{Y} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}) (\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_\ell)$$

Ceci implique que $\tilde{Y} \cdot \tilde{\beta} \neq 0$.

Supposons maintenant que le champ X a un degré de dégénérescence non nul. Le champ X admet un éclaté $\bar{X}_n$ avec $n \geq 1$. Soient $\phi_1, \dots, \phi_n$ les applications d'éclatement. Les applications sont analytiques. Donc $\hat{\alpha} = \alpha \circ \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n$ est en chaque point de ∂A_n une série formelle non identiquement nulle, mais nulle sur ∂A_n . La série $\hat{\alpha}$ est intégrale première de $\hat{X}_n$ et donc également de $\bar{X}_n$. Le même raisonnement que celui fait plus haut permet d'éliminer l'existence de points hyperboliques qui ne sont pas points de selle, ainsi des points semi-hyperboliques pour $\bar{X}_n$. Aux points singuliers non isolés le champ X_n est $\mathcal{C}^\infty$ équivalent à $y \frac{\partial}{\partial y}$: un tel champ n'admet pas d'intégrale première formelle non identiquement nulle, mais nulle sur l'axe $\{y = 0\}$. D'où le résultat.

Comme conséquence du théorème 28 et des lemmes 38, 39 et 40, on a immédiatement :

THÉOREME 40. - Soit X un germe de champ de vecteurs à singularité algébriquement isolée. Si X possède au moins une séparatrice en 0, alors à toute intégrale première formelle α , correspond une intégrale première $\mathcal{C}^\infty$, f , telle que $\tilde{f} = \alpha$.

Exemple : Pour un 1-jet diagonal hyperbolique :

$X_1 = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ on a construit, si $p \lambda_1 + q \lambda_2 = 0$, une suite d'ensembles algébriques $\Sigma_i \subset \tilde{V}_{X_1}$. Il est facile de voir que $X, \tilde{X} \in \tilde{V}_{X_1}$, possède une intégrale première non identiquement nulle si et seulement si $\tilde{X} \in \Sigma_\infty$. Le champ X est alors $\mathcal{C}^\infty$ équivalent, à un facteur près, au champ $\lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ qui possède l'intégrale première $z_1^p z_2^q$. Ce résultat est faux si le 1-jet de X est $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$ ou bien un 1-jet de rotation.

On peut exprimer le résultat du théorème 41, un peu différemment en terme de 1-formes différentielles.

Soit $\omega = a dz_1 + b dz_2$ un germe de 1-forme différentielle en $0 \in \mathbb{R}^2$. Un facteur intégrant f de ω est un germe de fonction, tel que $f(0)=0$, associé à un autre germe g , $g(0) \neq 0$, les 2 germes étant tels que :

$$\omega = g df.$$

Soit $X = -b \frac{\partial}{\partial z_1} + a \frac{\partial}{\partial z_2}$ le champ orthogonal à ω . Dire que $X.f=0$ est équivalent à l'équation $df \wedge \omega = 0$. Supposons que $(\tilde{a}, \tilde{b}) \succ \tilde{m}^l$ pour un certain l (c'est à dire que X soit à singularité algébriquement isolée. On dira que ω est à singularité algébriquement isolée). Alors, il est connu que l'équation $df \wedge \omega = 0$ est équivalente à la divisibilité de df par ω [12].

Supposons maintenant que ω , à singularité algébriquement isolée, possède un facteur intégrant formel $\tilde{f} : \exists \tilde{g}, \tilde{g}(0) \neq 0$ tel que $\tilde{\omega} = \tilde{g} d\tilde{f}$. Alors $\tilde{X}.\tilde{f} = 0$. Si l'on peut appliquer le théorème 40, on sait trouver un germe f' , $\tilde{f}' = \tilde{f}$ tel que $X.f' = 0 \Leftrightarrow df' \wedge \omega = 0$. Comme df' est divisible par ω , $\exists g'$ tel que :

$$df' = g' \omega$$

$$\text{Mais } d\tilde{f} = d\tilde{f}' = \tilde{g}' \tilde{\omega} = \frac{1}{\tilde{g}} \tilde{\omega}$$

D'où il résulte que $\tilde{g}'(0) \neq 0$ et que :

$$\omega = \frac{1}{g}, df'.$$

On a donc :

THÉORÈME 41. - Soit $\omega = a dz_1 + b dz_2$ un germe de 1-forme différentielle à singularité algébriquement isolée $((\tilde{a}, \tilde{b}) \in \tilde{M}^{\ell}$ pour un certain ℓ).
Supposons que le germe ω possède au moins une feuille séparatrice (c'est à dire adhérente à l'origine, de façon que la tangente ait une direction limite à l'origine). Alors si ω possède un facteur intégrant formel, ω possède aussi un facteur intégrant $\mathcal{C}^{\infty}$.

CHAPITRE III

SINGULARITÉS GÉNÉRIQUES DE GERMES DE 2-FORMES FERMÉES.

$\mathcal{D}(n)$ désigne l'espace des germes en $0 \in \mathbb{R}^n$ de 2-formes différentielles fermées. Le groupe $\text{Diff}_0(n)$ des germes de difféomorphismes en 0, préservant 0, agit naturellement sur $\mathcal{D}(n)$:

$$\text{Diff}_0(n) \times \mathcal{D}(n) \rightarrow \mathcal{D}(n) \quad \text{par } (g, \omega) \rightarrow g^{-1*} \omega$$

On désigne par $\tilde{\mathcal{D}}^k(n)$ et $\tilde{\mathcal{D}}(n)$ les espaces de jets d'ordre k et d'ordre ∞ de 2-formes fermées en $0 \in \mathbb{R}^n$. Les éléments de $\tilde{\mathcal{D}}^k$ seront identifiés à des formes à coefficients des polynômes de degré $\leq k$, une fois choisies des coordonnées. L'action de $\text{Diff}_0(n)$ induit au quotient une action de $\tilde{\text{Diff}}_0^k(n)$ et $\tilde{\text{Diff}}_0(n)$ sur $\tilde{\mathcal{D}}^k(n)$ et $\tilde{\mathcal{D}}(n)$ respectivement.

Soit $\Sigma \subset \tilde{\mathcal{D}}^k(n)$ une singularité, c'est à dire une sous variété invariante par l'action de $\tilde{\text{Diff}}_0^k(n)$. L'ensemble des $(k+1)$ -jets dans $\tilde{\mathcal{D}}^{k+1}(n)$ correspondant à des germes d'applications $x \rightarrow \tilde{\omega}^k(x)$ transverses à Σ , forment une sous-variété ouverte $\psi \Sigma \subset \pi_{k+1,k}^{-1}(\Sigma)$ (où $\pi_{k+1,k}$ est l'application naturelle de $\tilde{\mathcal{D}}^{k+1}(n)$ dans $\tilde{\mathcal{D}}^k(n)$; le complémentaire de $\psi \Sigma$ dans $\pi_{k+1,k}^{-1}(\Sigma)$ est un ensemble stratifié, de codimension $\geq n+1$ d'après le théorème de transversalité). On désignera par $\mathcal{D}(n, \Sigma)$ l'ensemble des germes en 0 de 2-formes fermées, dont le $(k+1)$ -jet appartient

à $\psi\Sigma$: on dit encore que Σ est une singularité générique de ω ; la contre image $(\tilde{\omega}^k)^{-1}(\Sigma) \subset \mathbb{R}^n$ est alors un germe de sous-variété par 0, noté $\Sigma(\omega)$ de codimension égale à celle de Σ dans $\mathcal{D}^k(n)$.

L'espace $\mathcal{D}(n, \Sigma)$ est invariant par l'action de $\text{Diff}_0(n)$. Un problème essentiel est de classifier les germes de $\mathcal{D}(n, \Sigma)$ pour la relation d'isomorphisme : 2 germes ω et ω' sont isomorphes, s'il existe

$g \in \text{Diff}_0(n)$ tel que $g^* \omega = \omega'$ (ou encore ω et ω' sont dans la même orbite de l'action de $\text{Diff}_0(n)$ sur $\mathcal{D}(n)$). On écrit $\omega \sim \omega'$. Le cas le plus simple est celui où $\mathcal{D}(n, \Sigma)$ n'est formé que d'une seule orbite.

DÉFINITION 1 [10]. - On dit que la singularité Σ est rigide si tous les germes de $\mathcal{D}(n, \Sigma)$ sont isomorphes.

Il est facile de vérifier que la rigidité d'une singularité Σ implique que tous les germes de $\mathcal{D}(n, \Sigma)$ sont stables (au sens défini par J. Martinet dans [10]).

DÉFINITION 2. - On dit que $\omega \in \mathcal{D}(n)$ est de k-détermination finie si pour $\forall \alpha$ de k-jet nul, on a $\omega + \alpha \sim \omega$ (ω et $\omega + \alpha$ sont isomorphes).

Le théorème de Darboux sur les 2-formes de rang maximum, ainsi qu'un certain nombre de résultats de J. Martinet, montrent que les singularités les plus simples du rang des 2-formes fermées, sont rigides. Le but essentiel de ce chapitre est de montrer que les singularités $\Sigma_{2,20}^e$ et $\Sigma_{2,2,0}^h$, décrites ci-dessous, sont également rigides (pour $n = 4$). Ce résultat avait été conjecturé par J. Martinet dans . Nous montrerons également, pour $n = 2p > 4$, que les germes dans $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^{e \text{ ou } h})$ sont de détermination finie en dehors d'un ensemble algébrique de codimension ≥ 4 .

Dans un premier paragraphe, nous donnons sous forme de rappels, quelques précisions sur les singularités du rang des 2-formes fermées.

Dans le deuxième paragraphe, nous commençons la démonstration de

la rigidité de certaines singularités Σ (Nous reprendrons, à titre d'exemple, les cas traités par Darboux et Martinet). Un problème essentiel est traité dans ce paragraphe : étant donné deux singularités ω_0 et $\omega \in \mathcal{D}(n, \Sigma)$, construire un chemin ω_τ entre ω_0 et ω , dans $\mathcal{D}(n, \Sigma)$, tel que l'équation :

$$L_{Y_\tau} \omega_\tau = - \dot{\omega}_\tau \quad (1)$$

admette une solution Y_τ , $Y_\tau(0) = 0$. (L_{Y_τ} désigne la dérivation de Lie par le vecteur Y_τ). Nous savons que l'intégration de Y_τ fournit un chemin de germes de difféomorphismes g_τ tel que $(g_\tau^{-1})^* \omega_0 = \omega_\tau$. (Si $\Sigma \subset \tilde{\mathcal{D}}^k(n)$, on peut prendre pour ω_0 une 2-forme à coefficients des polynômes de degré $\leq k+1$: un modèle polynomial).

Dans le troisième paragraphe, on montre comment simplifier l'équation (1). Dans les cas traités par Darboux et Martinet, il est très facile de trouver Y_τ directement ; on montrera comment. Dans le cas de la singularité $\Sigma_{2,2,0}$, on montrera (suivant J. Martinet) que l'équation (1) peut être réduite à une équation (I) : $X_\tau f_\tau = h_\tau$ où X_τ est un champ singulier. Ceci nous ramène au sujet du chapitre I.

Dans le quatrième paragraphe, on montre justement que le champ X_τ est équivalent (à un facteur près) à l'un des champs considérés dans le chapitre I et que l'on peut ainsi démontrer les théorèmes concernant les 2-formes à l'aide des résultats obtenus dans le chapitre I. On trouvera les énoncés précis de ces théorèmes dans le quatrième paragraphe.

1. LES SINGULARITÉS DU RANG DES 2-FORMES FERMÉES (D'après J. Martinet)

1.1. Quelques définitions et résultats d'algèbre extérieure.

Soit α une 2-forme extérieure, $\alpha \in \Lambda^2 R_n$, où R_n désigne le dual

de $\mathbb{R}^n$.

Le support de α , S_α , est le sous espace de $\mathbb{R}_n$ engendré par $e_1 \lrcorner \alpha, \dots, e_n \lrcorner \alpha$, ($e^1, \dots, e^n$) étant une base de $\mathbb{R}^n$: autrement dit, S_α est le plus petit sous-espace de $\mathbb{R}_n$ nécessaire à l'expression de α . L'espace associé à α , $\Delta_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, est l'orthogonal de S , ou encore :

$$\Delta_\alpha = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \lrcorner \alpha = 0\}$$

($v \lrcorner \alpha$ désigne le produit intérieur du vecteur v par la forme α).

Par définition, le rang de α est égal à la dimension de S_α ou à la co-dimension de Δ_α . On utilisera plutôt le corang $\alpha = n - \text{rang } \alpha$.

On rappelle la :

PROPOSITION 3. - [10] Toute 2-forme $\alpha \in \Lambda^2 \mathbb{R}_n$ est de rang pair et les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) α est de rang $2k$
- 2) $\alpha^k \neq 0$ et $\alpha^{k+1} = 0$ ($\alpha^k = \alpha \wedge \dots \wedge \alpha$ k fois)
- 3) Il existe des formes indépendantes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}_n$ telles que : $\alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i \wedge \beta_i$.

Ainsi que :

PROPOSITION 4. - [10] Dans $\Lambda^2 \mathbb{R}_n$, les ensembles $\Sigma_c = \{\alpha \in \Lambda^2 \mathbb{R}_n \mid \text{corang } \alpha = c\}$ sont identiques aux trajectoires de $GL(n, \mathbb{R})$ (groupe linéaire) ; pour tout c , tel que $n-c$ soit pair et que $0 \leq n-c \leq n$, Σ_c est une sous-variété régulière de $\Lambda^2 \mathbb{R}_n$ et :

$$\text{cod } \Sigma_c = \frac{c(c-1)}{2}.$$

Remarque. - Pour $n = 2p$ on a $c = 0, 2, 4, \dots$. Pour $n = 2p+1$ on a $c = 1, 3, 5, \dots$.

1.2. Singularités d'ordre 1.

L'espace des 0-jets $\tilde{\mathcal{D}}^0(n)$ s'identifie à $\Lambda^2 \mathbb{R}_n$. Les Σ_c étant in-

variants par l'action de $GL(n, \mathbb{R})$ définissant des singularités que l'on désignera encore par Σ_c . Chaque Σ_c est la singularité des formes de corang c de codimension $\frac{c(c-1)}{2}$. On sait que si M est une variété compacte, pour un ensemble résiduel de 2-formes fermées ω les ensembles $\Sigma_c(\omega) = \{x \in M \mid \text{corang}_x \omega = c\}$ sont des sous-variétés de M de codimension $\frac{c(c-1)}{2}$. (ou encore qu'en chaque point, Σ_c est une singularité générique du germe).

1.3. Singularités d'ordre supérieur.

Les singularités Σ_c sont à rapprocher des singularités d'ordre 1 Σ_i des fonctions. Il n'existe pas jusqu'à présent de théorie générale des singularités d'ordre supérieur des formes, qui correspondrait aux singularités $\Sigma_{i_1, \dots, i_k}$ de Thom-Boardmann.

Cependant, Martinet a esquissé dans [10] une construction de quelques singularités d'ordre supérieur de 2-formes fermées et en particulier de toutes les singularités génériques possibles en dimension 4. La construction de Martinet semblant inexacte sur un point mineur (Σ_{220} , singularité définie ci-dessous) appartient à $\tilde{\mathcal{D}}^2(2p)$ et non à $\tilde{\mathcal{D}}^1(2p)$) le lecteur pourra se reporter pour les détails à la mise au point faite par F. Pelletier [13] ; je vais maintenant donner une brève esquisse de la construction de ces singularités.

Soient des coordonnées $(x, y_1, \dots, y_{2p-3}, z, t)$ dans $\mathbb{R}^{2p}$, $2p > 4$. Un 1-jet $\omega \in \tilde{\mathcal{D}}^1(2p)$ s'écrit :

$$\omega = \omega_0 + \omega_1$$

où ω_0 est une 2-forme extérieure et ω_1 une 2-forme différentielle à coefficients linéaires et telle que $d\omega_1 = 0$.

On peut décomposer $\tilde{\mathcal{D}}^1(2p)$ en :

$$\tilde{\mathcal{D}}^1(2p) = \Psi \Sigma_0 \cup \Psi \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_2'' \cup \Sigma_4'' \cup \dots$$

$$\text{où } \Sigma''_i = \pi_{2,1}^{-1} \Sigma_i \setminus \psi \Sigma_i$$

(Rappelons que $\psi \Sigma_i$ désigne la singularité des 1-jets transverses à la singularité Σ_i).

La première singularité d'ordre supérieur, $\Sigma_{2,0}$ va être obtenue en stratifiant $\psi \Sigma_2$ de la façon qui suit. Soit donc $\omega_0 \in \Sigma_2$; on peut supposer que les coordonnées ont été choisies, grâce à la proposition 3, telles que :

$$\omega_0 = dx \wedge dy_1 + dy_2 \wedge dy_3 + \dots + dy_{2p-4} \wedge dy_{2p-3}$$

Et on va opérer en restriction à la fibre de cette forme ω_0 dans $\tilde{\mathcal{D}}^1(2p)$.

Soit alors $\omega_1 = h \, dz \wedge dt + \dots$ où $h, \dots$ sont des fonctions linéaires. Il est clair que " ω transverse à Σ_2 " équivaut à " h est une forme linéaire non nulle".

L'équation de Σ''_2 dans la fibre de ω_0 est donc : $h \equiv 0 : \Sigma''_2$ est donc une sous-variété de $\tilde{\mathcal{D}}^1(2p)$ de codimension $2p+1$.

Soit H l'hyperplan noyau de h .

On définit $\Sigma'_{2,2} \subset \psi \Sigma_2$ comme l'ensemble des ω telles que la restriction de ω_0^{p-1} à H soit nulle, ce qui est équivalent à l'équation $\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t} = 0$. Ces conditions définissent une sous-variété de codimension 2 dans $\psi \Sigma_2$, donc de codimension 3 dans $\tilde{\mathcal{D}}^1(2p)$.

On pose $\Sigma_{2,0} = \psi \Sigma_2 \setminus \Sigma'_{2,2}$

Les autres singularités d'ordre supérieur vont être obtenues en stratifiant $\Sigma_{2,2} = \psi \Sigma'_{2,2} \subset \tilde{\mathcal{D}}^2(2p)$. Un 2-jet ω de 2-forme fermée peut se représenter par $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2$ où $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ sont des 2-formes fermées à coefficients constant, de degré 1 ou 2 respectivement. Un élément de $\psi \Sigma'_{2,2}$ est toujours équivalent à un 2-jet tel que :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= dx \wedge dy_1 + dy_2 \wedge dy_3 + \dots + dy_{2p-4} \wedge dy_{2p-3} \\ \omega_1 &= x \, dz \wedge dt + k \, dy_1 \wedge dz + \ell \, dy_1 \wedge dt + \dots \end{aligned}$$

et tel que ω^p ait un 2-jet égal à $x\Omega$ où Ω est la forme volume canonique $dx \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{2p-3} \wedge dz \wedge dt$.

Soit $F \subset \psi \Sigma'_{22}$ la sous-variété de $\tilde{\mathcal{D}}^2(2p)$ définie par ces conditions. Pour une 2-forme $\omega \in F$, désignons par $\bar{\omega}$ la restriction de ω à H , ici l'hyperplan $x = 0$.

On a $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$
avec $\bar{\omega}_0 = dy_2 \wedge dy_3 + \dots + dy_{2p-4} \wedge dy_{2p-3}$
et $\bar{\omega}_1 = \bar{k} dy_1 \wedge dz + \bar{\ell} dy_1 \wedge dt + \dots$

La transversalité à Σ'_{22} se traduit par le fait que $\bar{k}$ et $\bar{\ell}$ sont 2 formes linéaires indépendantes. Le plan tangent à Σ'_{22} en 0 est contenu dans H et est donné par $\bar{k} = \bar{\ell} = 0$. L'espace associé à ω est également contenu dans H : c'est le plan $\{z, t\}$. On peut comparer la position respective de ces deux sous-espaces de H . Leur non-transversalité s'exprime par la condition :

$$-\frac{\partial \bar{\ell}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{k}}{\partial z} = 0$$

Cette équation définit un sous-ensemble algébrique $F_1 \subset F$, de codimension 1 (Lorsque $2p = 4$, F_1 est en fait une sous-variété de codimension 1, car les coefficients $\frac{\partial \bar{\ell}}{\partial z}, \dots$ ne peuvent pas être simultanément nuls dans F).

On définit $\Sigma_{2,2,1} \subset \Sigma_{22} = \psi \Sigma'_{22}$ comme étant l'ensemble des 2-jets équivalents à un élément de F_1 et on pose $\Sigma_{22,0} = \Sigma_{2,2} \setminus \Sigma_{2,2,1}$. L'ensemble $\Sigma_{2,2,1}$ est un sous-ensemble algébrique invariant, de codimension 1 de $\Sigma_{2,2}$ (et une sous-variété si $2p = 4$). La singularité $\Sigma_{2,2,0}$ est un ouvert dense dans $\Sigma_{2,2}$; elle est formée par les 2-jets équivalents à un élément de $F \setminus F_1$. Elle se décompose en une union de 2 ouverts disjoints $\Sigma_{2,2,0}^e$ et $\Sigma_{2,2,0}^h$ formés par les 2-jets équivalents à un élément de $F \setminus F_1$ pour lequel la quantité $-\frac{\partial \bar{\ell}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\ell}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{k}}{\partial z}$ est > 0 (respectivement < 0).

En conclusion, les seules singularités pouvant apparaître génériquement pour les 2-formes fermées sur $\mathbb{R}^4$ sont les singularités Σ_0 , $\Sigma_{2,0}$, $\Sigma_{2,2,0}^e$, $\Sigma_{2,2,0}^h$, $\Sigma_{2,2,1}$ de codimension 0,1,3,3 et 4 respectivement. Plus généralement, les seules singularités de codimension ≤ 3 sur $\mathbb{R}^{2p}$, $2p$ quelconque, sont les singularités Σ_0 , $\Sigma_{2,0}$, $\Sigma_{2,2,0}^e$ et $\Sigma_{2,2,0}^h$. Enfin, remarquons que les singularités $\Sigma_{2,2,0}^e$ ou h appartenant à $\tilde{\mathcal{D}}^2(2p)$ sont ouvertes dans $\psi\Sigma'_{22}$ (définie ci-dessus) ; il en résulte que $\pi_{3,2}^{-1} \Sigma_{2,2,0}^e$ ou $h = \psi\Sigma_{2,2,0}^e$ ou h , ce qui implique que l'appartenance transverse à $\Sigma_{2,2,0}^e$ ou h (c'est à dire $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^e$ ou $h)$) est équivalente à la simple appartenance à $\Sigma_{2,2,0}^e$ ou h : aussi, bien que $\Sigma_{2,2,0}^e$ ou $h \subset \tilde{\mathcal{D}}^2(2p)$, la condition $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^e$ ou $h)$ est une condition portant uniquement sur les jets d'ordre 2.

1.4. Description des germes génériques.

- a) $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_0)$: le rang de ω en 0 est maximum et égal à $2p$
- b) $\omega \in \mathcal{D}(2p+1, \Sigma_1)$: le rang de ω en 0 est maximum et égal à $2p$
- c) $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_2)$: $\bar{\omega}^1(0) \in \Sigma_2$ et le 1-jet coupe Σ_2 transversalement. Cela se traduit par le fait que $\omega^p = f \cdot \Omega$ où Ω est un germe de forme volume en 0, f est une fonction telle que $f(0) = 0$ et $df(0) \neq 0$. Le germe $\Sigma_2(\omega)$ est défini par l'équation $f = 0$: C'est une sous-variété de codimension 1 dans $\mathbb{R}^{2p}$.

Notons que l'on peut définir une orientation naturelle sur $\Sigma_2(\omega)$ par la donnée de (Ω, df) : le changement de $\Omega \rightarrow -\Omega$ transforme $df \rightarrow -df$, et l'orientation induite sur $\Sigma_2(\omega)$ ne change pas.

- d) $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,0})$: On a encore $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_2)$: donc ω est de rang $2p-2$ en 0 et le lieu défini par $\omega^p = 0$ est la sous-variété $\Sigma_2(\omega)$ de codimension 1. Si $\bar{\omega}$ est la restriction de ω à $\Sigma_2(\omega)$, l'appartenance à $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,0})$ signifie que $\bar{\omega}^{p-1}(0) \neq 0$. Cela peut se traduire de la façon suivante : en chaque point x de $\Sigma_2(\omega)$, l'espace associé à $\omega(x)$

est un sous espace $A_\omega(x) \subset T_x \mathbb{R}^{2p}$ de dimension 2. Si $0 \in \Sigma_{2,0}(\omega) \subset \Sigma_2(\omega)$, l'espace $A_\omega(x)$ est transverse à $T_x \Sigma_2(\omega)$ pour x voisin de 0. Cette intersection définit donc au voisinage de 0, un champ de directions canoniquement orientées. Cette direction en x peut également être interprétée comme l'espace associé de $\bar{\omega}(x)$ (ou de $\bar{\omega}^{p-1}(x)$). Si l'on choisit une forme de volume, sur $\Sigma_2(\omega)$, positive par rapport à l'orientation naturelle de $\Sigma_2(\omega)$, on peut dire que le champ de directions est celui du champ de vecteur X , tel que : $\bar{\omega}^{p-1} = X \lrcorner \Omega$. Ce champ X est défini à un facteur positif près si l'on change de forme volume Ω .

e) $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2})$: Ici l'espace associé $A_\omega(0)$ est contenu dans $T_0 \Sigma_2(\omega)$. Le lieu des points $\Sigma_{2,2}(\omega) = \{x \in \Sigma_2(\omega) \mid A_\omega(x) \subset T_x \Sigma_2(\omega)\}$ est un germe de sous-variété de $\Sigma_2(\omega)$ de codimension 3 dans $\mathbb{R}^{2p}$.

On a évidemment $\Sigma_{2,0}(\omega) = \Sigma_2(\omega) \setminus \Sigma_{2,2}(\omega)$

Le champ X construit plus haut s'annule sur $\Sigma_{2,2}(\omega)$. Sa matrice jacobienne en 0 est de rang 2.

f) $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0})$: La situation décrite dans e) est complétée par l'hypothèse que $A_0(\omega)$ est transverse en 0 à $T_0 \Sigma_{2,2}(\omega)$ dans $T_0 \Sigma_2(\omega)$.

La jacobienne de X en 0 a deux valeurs propres opposées :

- réelles si $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^h)$
- imaginaires si $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^e)$

On dira que ω est un germe hyperbolique dans le premier cas, elliptique dans le second cas.

g) $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,1})$: La situation décrite dans e) est complétée par l'hypothèse que $A_0(\omega)$ et $T_0 \Sigma_{2,2}(\omega)$ sont tangents. Le lieu des points $\Sigma_{2,2,1} = \{x \in \Sigma_{2,2}(\omega) \mid A_x(\omega) \text{ et } T_x \Sigma_{2,2}(\omega) \text{ sont tangents}\}$ est un sous-ensemble algébrique de $\Sigma_{2,2}(\omega)$ de codimension 1 passant par 0. (Si $2p = 4$, $\Sigma_{2,2,1}(\omega) = \{0\}$ uniquement). On peut encore dire que $\Sigma_{2,2,1}(\omega)$ est formé des points où la matrice jacobienne de X est nilpotente.

En dimension 4, $\Sigma_{2,2}(\omega)$ est une variété de dimension 1. Si

$0 \in \Sigma_{2,2,1}(\omega)$, il aboutit en 0 un arc de points elliptiques et un arc de points hyperboliques.

1.5. Modèles de germes.

Donnons un exemple de quelques types singuliers décrits ci-dessus :

a) Modèle dans $\mathcal{D}(2p, \Sigma_0)$: $\mathbb{R}^{2p}$ de coordonnées $(z_1, \dots, z_{2p})$

$$\omega = dz_1 \wedge dz_2 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$$

b) Modèle dans $\mathcal{D}(2p+1, \Sigma_1)$: $\mathbb{R}^{2p+1}$ de coordonnées $(z_1, \dots, z_{2p+1})$

$$\omega = dz_1 \wedge dz_2 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$$

c) Modèle dans $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,0})$: $\mathbb{R}^{2p}$ de coordonnées $(z_1, \dots, z_{2p})$

$$\omega = z_1 dz_1 \wedge dz_2 + dz_3 \wedge dz_4 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$$

d) Modèle dans $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^e)$: $\mathbb{R}^{2p}$ de coordonnées $(x, y, \dots, y_{2p-3}, z, t)$

$$\begin{aligned} \omega = & dx \wedge dy_1 + dy_2 \wedge dy_3 + \dots + dy_{2p-4} \wedge dy_{2p-3} + z dy_1 \wedge dz + \\ & + d(xz + t y_1 - z^3/3) \wedge dt \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\Sigma_2(\omega)$ est défini par $x = 0$.

Un volume positif Ω sur $\Sigma_2(\omega)$ est défini par $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{2p-3} \wedge dz \wedge dt$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} = & dy_2 \wedge dy_3 + \dots + dy_{2p-4} \wedge dy_{2p-3} + z dy_1 \wedge dz + t dy_1 \wedge dt - \\ & - z^2 dz \wedge dt \end{aligned}$$

et le champ X , tel que $\bar{\omega}^{p-1} = X \lrcorner \Omega$ est égal à :

$$X = -z^2 \frac{\partial}{\partial y_1} - t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t}$$

e) On obtient un germe de $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^h)$ en changeant un signe dans l'exemple précédent :

$$\omega = dx \wedge dy_1 + dy_2 \wedge dy_3 + \dots + dy_{2p-4} \wedge dy_{2p-3} + z dy_1 \wedge dz + \\ + d(xz - ty_1 - \frac{z^2}{2}) \wedge dt$$

Dans la suite nous verrons dans quelle mesure le modèle donné représente bien tous les germes de la singularité, à isomorphisme près.

2. CONSTRUCTIONS DE CHEMINS A SINGULARITÉ FIXE.

On désignera par $\mathcal{D}_\tau(n)$ l'espace des familles de germes de 2-formes fermées (autrement dit des germes de 2-formes fermées dans $\mathbb{R}^n \times [0,1]$ le long de $\{0\} \times [0,1]$, telles que le support en chaque point soit dans $dx_1, \dots, dx_n$). Un élément de $\mathcal{D}_\tau(n)$ s'écrit :

$$\omega_\tau = \sum_{i,j} a_{i,j}(x,\tau) dx_i \wedge dx_j \quad (\text{si } (x_1 \dots x_n) \text{ sont des coordonnées de } \mathbb{R}^n)$$

On désignera par $\text{Diff}_{0,\tau}(n)$ l'espace des familles de germes de difféomorphismes, préservant 0.

Soit Σ une singularité de 2-formes fermées sur $\mathbb{R}^n$. Le but de ce paragraphe est de relier certains couples de germes $\omega_0, \omega_1 \in \mathcal{D}(n, \Sigma)$ par un chemin $\omega_\tau \in \mathcal{D}_\tau(n)$, tel que pour τ , $\omega_\tau \in \mathcal{D}(n, \Sigma)$, lorsque Σ est l'une des singularités $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_{2,0}, \Sigma_{2,2,0}^e$ ou h . On dira qu'un tel chemin ω_τ est à singularité (Σ) fixe.

Dans les applications faites plus loin, ω_0 sera le modèle polynomial donné dans le sous-paragraphe 1.4, et le chemin ω_τ devra avoir quelques propriétés particulières utiles pour la suite.

Soient donc $\omega_0, \omega \in \mathcal{D}(n, \Sigma)$ deux germes à comparer. On cherche tout d'abord un germe ω_1 isomorphe à ω et ayant suffisamment d'éléments en commun avec ω_0 . (variétés singulières communes par exemple), pour que le chemin linéaire $\omega_\tau = (1-\tau)\omega_0 + \tau\omega_1$ soit un chemin à singularité fixe.

Supposons par exemple que $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$. On peut écrire

$\omega = \omega_2 + \omega'_2$ avec ω'_2 de 2-jet nul. Le chemin linéaire :

$\omega_\tau = \omega_2 + \tau \omega'_2$ allant de ω_2 à ω est à singularité fixe car $\tilde{\omega}_\tau^2 \equiv \tilde{\omega}_2^2$ et que l'appartenance à $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$ est une condition portant uniquement sur le jet d'ordre 2, comme on l'a déjà remarqué plus haut.

Pour $2p = 4$, on démontrera ci-dessous un résultat plus précis.

2.1. Chemins dans $\mathcal{D}(2p, \Sigma_0)$ et $\mathcal{D}(2p+1, \Sigma_1)$.

Soit $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_0)$ ou bien $\omega \in \mathcal{D}(2p+1, \Sigma_1)$. Grâce à la proposition 3, il existe un isomorphisme linéaire g , tel que si $\omega_1 = g^* \omega$:

$$\omega_1(0) = \omega_0(0) = dz_1 \wedge dz_2 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$$

(où ω_0 est la 2-forme constante).

On peut donc écrire : $\omega_1 = \omega_0 + \omega_2$, $\omega_2(0) = 0$ et le chemin

$\omega_\tau = \omega_0 + \tau \omega_2$ est un chemin de ω_0 à ω_1 , tel que pour tout τ , $\omega_\tau \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_0)$ où $\mathcal{D}(2p+1, \Sigma_1)$, car $\omega_\tau(0) \equiv \omega_0(0)$.

2.2. Chemins dans $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,0})$.

Soit $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,0})$. On peut choisir une forme ω_1 , isomorphe à ω , telle que :

$$\omega_1(0) = dz_3 \wedge dz_4 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$$

et telle que le 1-jet de ω_1 soit égal à :

$$\tilde{\omega}_1^1 = \pm z_1 dz_1 \wedge dz_2 + dz_3 \wedge dz_4 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$$

Le signe de ± 1 dépend de l'orientation naturelle de $\Sigma_2(\omega_1)$. Si le signe est négatif, on peut par le changement de coordonnées $z_1 \rightarrow -z_1$, $z_2 \rightarrow -z_2$ se ramener à $+1$. Finalement, il existe $\omega_1 \sim \omega$ tel que :

$$\tilde{\omega}_1^1 = \omega_0 = z_1 dz_1 \wedge dz_2 + dz_3 \wedge dz_4 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$$

Le chemin linéaire ω_τ entre ω_1 et ω_0 est tel que pour tout

$$\forall \tau : \tilde{\omega}_\tau^1 = \omega_0$$

Il en résulte que si $\alpha_\tau = \omega_\tau^{p-1}$:

$$\tilde{\alpha}_\tau^1 = z_1 dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{2p}$$

Ce qui implique bien que pour tout τ , $\omega_\tau \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,0}^e)$ et de plus que $T_0 \Sigma_2(\omega_\tau) \equiv \{z_1 = 0\}$.

2.3. Chemins dans $\mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$.

Nous appellerons les germes de $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^e)$ (respectivement $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^h)$ les germes elliptiques (resp. hyperboliques).
Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les coordonnées : (x, y, z, t) et les deux germes :

$$\omega_0 = dx \wedge dy + z dy \wedge dz + d(xz + ty - z^3/3) \wedge dt \quad \text{elliptique}$$

$$\omega_0 = dx \wedge dy + z dy \wedge dz + d(xz - ty - z^3/3) \wedge dt \quad \text{hyperbolique}$$

Soit ω un germe quelconque elliptique (respectivement hyperbolique)
Nous voulons montrer qu'il existe $\omega_1 \sim \omega$ et un chemin dans les germes elliptiques (resp. hyperboliques) de ω_0 à ω_1 .

Tout d'abord, on peut trouver $\omega_2 \sim \omega$ tel que la singularité $\Sigma_2(\omega_2)$ soit le plan $\{x = 0\}$, que la singularité $\Sigma_{2,2}(\omega_2)$ soit la droite $\{x = z = t = 0\}$ et que $\omega_2(0) = dx \wedge dy$.
Le 1-jet de ω_2 est alors de la forme :

$$\tilde{\omega}_2^1 = dx \wedge dy + a.x dz \wedge dt + dy \wedge \pi + \dots$$

où π désigne une 1-forme de l'espace $\{dz, dt\}$, à coefficients linéaires engendrés par z et t . (Ici et dans la suite, + ... indique que $\tilde{\omega}_2^1$ contient d'autres termes contenant x ou bien dx en facteur).

On a : $a \neq 0$, ce qui est équivalent à la transversalité du 1-jet à Σ_2 . On peut faire en sorte que a soit positif : si $a < 0$, on change ω_2 en $\omega_3 = g^* \omega_2$ où $g = \begin{cases} X = -x \\ Y = -y \\ z, t \text{ inchangés.} \end{cases}$

Comme $dw = 0$, il est clair que $d\pi = 0$. D'autre part, $d\pi$ est non dégénéré car $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$. On peut donc supposer que $\omega_3 \sim \omega_4$ par un difféomorphisme linéaire en z, t tel que ω_4 conserve les propriétés de ω_3 et que :

$$\begin{aligned} \pi &= \epsilon(z \, dz + t \, dt) & \text{si } \omega \text{ est elliptique} \\ \pi &= \epsilon(z \, dz - t \, dt) & \text{si } \omega \text{ est hyperbolique où } \epsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

Si $\epsilon = 1$, on prend $\omega_1 = \omega_4$; si $\epsilon = -1$, on peut remplacer ω_4 par $\omega_5 = \omega_1$ tel que $\omega_5 = h^* \omega_4$ où h est le difféomorphisme $X = -x, Y = -y, Z = -z, T = t$. La forme trouvée pour ω_1 décrite par le lemme suivant:

LEMME 5. - Soit ω un germe elliptique ou hyperbolique. Alors ω est isomorphe à ω_1 tel que :

$$\Sigma_2(\omega_1) = \{x = 0\}, \quad \Sigma_{2,2}(\omega_1) = \{x = z = t = 0\} \quad \text{et que :}$$

$$\tilde{\omega}_1^1 = dx \wedge dy + a_1 x \, dz \wedge dt + dy \wedge (z \, dz \pm t \, dt) + \dots$$

avec $a_1 > 0$ et modulo des termes linéaires contenant x ou dx en facteur.

On va montrer que le chemin $\omega_\tau = (1-\tau) \omega_0 + \tau \omega_1$ est à singularité fixe. Pour cela, on va prouver que le résultat ci-dessus admet une sorte de réciproque:

LEMME 6. - Soit ω un germe de $\mathcal{D}(4)$ tel que

$$\tilde{\omega}^1(0) = dx \wedge dy + a_1 x \, dz \wedge dt + dy \wedge (z \, dz \pm t \, dt) + \dots \text{ modulo } x, dx$$

et tel que $a_1 > 0$. Supposons que $\Sigma_2(\omega)$ coïncide en $0 \in \mathbb{R}^4$, à l'ordre 3 près avec le plan $\{x = 0\}$. (La forme de $\tilde{\omega}^1(0)$ implique que le 0-jet de ω est transverse à Σ_2 en 0 et que $T_0 \Sigma_2(\omega) = \{x = 0\}$). Alors, ω appartient à $\mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$.

Démonstration. - Comme $a_1 > 0$, ω est transverse à la singularité Σ_2 . Comme de plus $\Sigma_2(\omega)$ est tangent à l'ordre 3 en 0 au plan $\{x = 0\}$, il existe un germe de difféomorphisme $g \in \text{Diff}_0(4)$, tangent à l'ordre 3 à l'identité en 0 et tel que si $\omega_1 = g^* \omega$, $\Sigma_2(\omega_1) = \{x = 0\}$.

Alors la restriction $\bar{\omega}_1$ de ω_1 au plan $\{x = 0\}$ a un 1-jet :

$$\tilde{\omega}_1^1 = dy \wedge (z dz \pm t dt)$$

ce qui implique que $\tilde{\omega}_1^1$ est transverse à $\Sigma_{2,2}$ et que le jacobien du champ associé à $\bar{\omega}_1$ a 2 valeurs propres différentes de 0. Autrement dit : $\omega_1 \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$. (Voir la description de $\mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$ donnée ci-dessus dans 1.4.).

Considérons maintenant le chemin linéaire entre ω_0 et ω_1 donné par le lemme 5. Nous allons montrer que ce chemin est à singularité fixe :

PROPOSITION 7. - Soit $\omega \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$. Il existe un germe $\omega_1 \sim \omega$ et un chemin ω_τ de ω_0 (le modèle polynomial donné plus haut de germe elliptique ou hyperbolique suivant le cas) tel que ω_τ soit à singularité fixe : $\omega_\tau \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$ pour τ .

Démonstration. - Soit ω_1 le germe donné par le lemme 5 et

$$\omega_\tau = (1 - \tau)\omega_0 + \tau\omega_1$$

Pour $\forall \tau$ on a :

$$\tilde{\omega}_\tau^1 = dx \wedge dy + a_\tau x dz \wedge dt + dy \wedge (z dz \pm t dt) + \dots$$

avec $a_\tau = (1 - \tau) + \tau a_1 > 0$.

La proposition 7 suivra du lemme 6 lorsqu'on aura démontré que $\Sigma_2(\omega_\tau)$ est tangent au plan $\{x = 0\}$ à l'ordre 3 en 0.

Pour cela, si une 2-forme fermée quelconque ω est écrite :

$$\omega = dx \wedge (u dy + v dz + w dt) + h dz \wedge dt + k dy \wedge dt + l dy \wedge dz ,$$

$$\text{on a : } \omega^2 = (uh - vk + \omega l) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

et l'équation de $\Sigma_2(\omega)$ est alors : $uh - vk + \omega l = 0$

Soient $u_0, \dots, u_1, \dots, u_\tau, \dots$ les coefficients des formes $\omega_0, \omega_1, \omega_\tau$ respectivement et $\bar{u}_0, \dots$ leurs restrictions au plan $\{x = 0\}$.

L'équation de $\Sigma_2(\omega_\tau)$ est :

$$u_\tau h_\tau - v_\tau k_\tau + \omega_\tau l_\tau = 0$$

Dire que $\Sigma_2(\omega_\tau)$ est tangent à l'ordre 3 près est équivalent à dire que :

$$\bar{u}_\tau \bar{h}_\tau - \bar{v}_\tau \bar{k}_\tau + \bar{\omega}_\tau \bar{l}_\tau \in \bar{m}_\tau^3(y, z, t)$$

où $\bar{m}_\tau(y, z, t)$ désigne l'idéal des germes de fonctions le long de $\{0\} \times [0, 1]$, nulles sur $\{0\} \times [0, 1]$, avec $0 \in \mathbb{R}^3$, plan de coordonnées (y, z, t) .

Or $\bar{u}_\tau = 1$ modulo $\bar{m}_\tau(y, z, t)$

$$\bar{h}_\tau = 0 \text{ modulo } \bar{m}_\tau^2(y, z, t)$$

$$\bar{v}_\tau, \bar{\omega}_\tau \in \bar{m}_\tau(y, z, t) \text{ et } \bar{k}_\tau = z, \bar{l}_\tau = t \text{ modulo } \bar{m}_\tau^2(y, z, t)$$

Il en résulte que :

$$\bar{u}_\tau \bar{h}_\tau - \bar{v}_\tau \bar{k}_\tau + \bar{\omega}_\tau \bar{l}_\tau = \bar{h}_\tau - \bar{v}_\tau z + \bar{\omega}_\tau t \text{ modulo } \bar{m}_\tau^3(y, z, t)$$

Cette dernière expression est linéaire en $\bar{h}_\tau, \bar{v}_\tau, \bar{\omega}_\tau$. Comme $\bar{h}_\tau, \dots$ sont combinaisons linéaires de $\bar{h}_0, \bar{h}_1, \dots$ et que :

$$\bar{h}_0 - \bar{v}_0 z + \bar{\omega}_0 t = \bar{h}_1 - \bar{v}_1 z + \bar{\omega}_1 t = 0 \text{ modulo } \bar{m}_\tau^3(y, z, t)$$

On a que : $\bar{u}_\tau \bar{h}_\tau - \bar{v}_\tau \bar{k}_\tau + \bar{\omega}_\tau \bar{l}_\tau = \bar{h}_\tau - \bar{v}_\tau z + \bar{\omega}_\tau t = 0$ modulo $\bar{m}_\tau^3(y, z, t)$

et donc que $\Sigma_2(\omega_\tau)$ reste tangent à $\{x = 0\}$ à l'ordre 3 près. D'après le lemme 6, il en résulte que $\omega_\tau \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$.

Remarque .- On a démontré en fait que si ω_0 et ω_1 sont deux germes tels que :

$$\tilde{\omega}_i^1 = dx \wedge dy + a_i x dz \wedge dt + dy \wedge (z dz \pm t dt) + \dots \quad i = 0, 1$$

$$\text{avec } a_i > 0$$

et tels que $\Sigma_2(\omega_i)$ soient tangents à l'ordre 3 au plan $\{x = 0\}$, alors

le chemin $\omega_\tau = (1-\tau) \omega_0 + \tau \omega_1$ est un chemin à singularité fixe dans

$$\mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h).$$

2.4. Amélioration du chemin dans $\mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$.

Dans le sous-paragraphe 2.3, nous avons construit un chemin à singularité fixe entre le modèle ω_0 et une forme ω_1 équivalente à une forme quelconque $\omega \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$. Pour pouvoir résoudre dans les paragraphes 3 et 4, l'équation différentielle associée à ce chemin : $L_{Y_\tau} \omega_\tau = -\dot{\omega}_\tau$, nous aurons besoin d'un chemin ω_τ avec des caractéristiques plus précises. Celles-ci sont détaillées dans la proposition suivante :

PROPOSITION 8. - Soit $\omega \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$. Il existe un chemin ω_τ à singularité fixe entre ω_0 , le modèle polynomial et $\omega_1 \sim \omega$ tel que :

i) $\Sigma_2(\omega_\tau) = \{x = 0\}$, $\Sigma_{22}(\omega_\tau) = \{x = z = t = 0\}$ et en chaque $m \in \Sigma_{22}(\omega_\tau)$ l'espace associé à $\omega_\tau(m)$ est le 2-plan $\{x = y = 0\}$.

ii) $\tilde{\omega}_\tau^1 = dx \wedge dy + a_\tau x dz \wedge dt + dy \wedge (z dz + \varepsilon t dt) + \dots$ avec $a_\tau > 0$ pour tout τ ($\varepsilon = +1$ dans le cas elliptique, -1 dans le cas hyperbolique).

iii) Si $\bar{\omega}_\tau$ est la restriction de ω_τ à $\Sigma_2(\omega_\tau) = \{x = 0\}$, alors le 2-jet de ω_τ est égal à :

$$\tilde{\omega}_\tau^2 = -z^2 dz \wedge dt + dy \wedge (z dz + \varepsilon t dt)$$

Démonstration. - Si l'on prend le chemin ω_τ fourni par la proposition 7, il est facile de trouver un chemin $g_\tau \in \text{Diff}_{0,\tau}(4)$ tel que $g_0 = \text{Id}$, et que $g_\tau^* \omega_\tau$ vérifie les conditions i) et ii) (Le chemin est alors automatiquement à singularité fixe). Pour cela on cherche d'abord un chemin g_τ^1 tel que $g_0^1 = \text{Id}$ et que $g_\tau^{1*} \omega_\tau$ vérifie i) ; puis par un nouveau chemin g_τ^2 , $g_0^2 = \text{Id}$, et respectant $\{x = 0\}$ et $\{x = z = t = 0\}$ on s'assure que $(g_\tau^2)^*(g_\tau^1)^* \omega_\tau$ vérifie ii). On pose alors $g_\tau = g_\tau^2 g_\tau^1$.

Nous désignerons encore par ω_τ le chemin ainsi obtenu, vérifiant les propriétés i) et ii). Nous allons modifier à nouveau ce chemin de

façon qu'il respecte la condition iii). Nous allons trouver cette modification par étapes successives. Il nous faut tout d'abord dégager quelques propriétés générales des $\omega \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$.

Soit donc $\omega \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$ d'écriture :

$$\omega = dx \wedge (u dy + v dz + w dt) + h dz \wedge dt + k dy \wedge dz + l dy \wedge dt$$

On désignera par φ la 1-forme : $\varphi = u dy + v dz + w dt$.

Supposons que ω vérifie les conditions i) : $\Sigma_2(\omega) = \{x = 0\}$, $\Sigma_{22}(\omega) = \{x = z = t = 0\}$ en chaque point $m \in \Sigma_{22}(\omega)$, l'espace associé est $\{x = y = 0\}$ et ii) $\tilde{\omega}^1 = dx \wedge dy + ax dz \wedge dt + dy \wedge (z dz + et dt) + \dots$ avec $a > 0$.

Alors on a :

LEMME 9. - $\tilde{\varphi} \wedge d\tilde{\varphi}(0) \neq 0$ où $\tilde{\varphi}$ est la restriction de φ à $\Sigma_2(\omega)$.

Démonstration. - Comme $T_0 \Sigma_2(\omega) = \{x = 0\}$, on a :

$$\frac{1}{2} \omega^2 = f dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \quad \text{avec} \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0$$

Or :

$$L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) = (L \frac{\partial}{\partial x} \omega) \wedge \omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

$$\text{et} \quad L \frac{\partial}{\partial x} \omega = d \left(\frac{\partial}{\partial x} \lrcorner \omega \right) = d\varphi$$

D'où l'on tire que :

$$d\varphi \wedge \omega(0) \neq 0$$

Posons $\pi = \omega - dx \wedge \varphi$. On a :

$$d\varphi \wedge [dx \wedge \varphi + \pi](0) \neq 0$$

Or $\pi(0) = 0$ d'où il suit

$$dx \wedge d\varphi \wedge \varphi(0) \neq 0 \quad \text{et en particulier :} \quad \tilde{\varphi} \wedge d\tilde{\varphi}(0) \neq 0$$

LEMME 10. - Soit ω un germe comme plus haut et $\bar{h}$ la restriction de la fonction $\bar{h}$ au point $\{x = 0\}$. Alors le 2-jet $\tilde{h}^2$ de $\bar{h}$ est de la forme :

$$\tilde{h}^2 = h_{20}z^2 + h_{11}zt + h_{02}t^2 \quad \text{avec } h_{20}, h_{11}, h_{02} \in \mathbb{R} \text{ et } h_{20} + \varepsilon h_{02} \neq 0$$

Démonstration. - Désignons par $\bar{u}, \dots$ les restrictions de $u, \dots$ à $\Sigma_2(\omega) = \{x = 0\}$. Comme $\omega^2 = (uh - v\bar{u} + wk) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$ on a : $\bar{u}\bar{h} - \bar{v}\bar{u} + \bar{w}\bar{k} \equiv 0$

Rappelons que par hypothèse $\bar{u}(0) = 1$, que $w \in \bar{\mathcal{M}}(z, t)$ (idéal engendré par les fonctions z et t) et que $\bar{u} = z$, $\bar{k} = t$ modulo $\bar{\mathcal{M}}(y, z, t)^2$. On a donc pour 2-jet de $\bar{h}$:

$$\tilde{h}^2 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}(0) z^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}(0) \right) zt - \varepsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(0) t^2$$

Mais par le lemme 9 :

$$d\bar{\varphi} \wedge \bar{\varphi}(0) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z}(0) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}(0) \neq 0$$

D'où le résultat.

Considérons maintenant un chemin ω_τ de ω_0 à $\omega_1 \sim \omega$, et vérifiant les conditions i) et ii) de la proposition. Alors :

LEMME 11. - Si ω_τ est un chemin vérifiant les conditions i) et ii) de la proposition, il existe $g_\tau \in \text{Diff}_{0, \tau}(4)$, de la forme :

$$g = \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \\ z_1 = z_1(x, y, z, t, \tau) = z + \dots \\ t_1 = t_1(x, y, z, t, \tau) = t + \dots \end{cases} \quad \text{avec } g_0 = \text{Id}$$

tel que :

$$\widetilde{g_\tau} \omega_\tau^2 = \tilde{h}_{1, \tau}^2 dz \wedge dt + dy \wedge (zdz + \varepsilon tdt)$$

Démonstration. - Soit $\omega_\tau = dx \wedge (u_\tau dy + \dots) + h_\tau dz \wedge dt + \dots$

Ecrivons que $\bar{\omega}_\tau$ est fermée :

$$\frac{\partial \bar{h}_\tau}{\partial y} + \frac{\partial \bar{k}_\tau}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\ell}_\tau}{\partial z} = 0$$

Comme $\bar{h}_\tau \in \bar{\mathcal{M}}^2(z, t)$, on a : $\frac{\partial \bar{k}_\tau}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\ell}_\tau}{\partial z} \in \bar{\mathcal{M}}^2(z, t)$

Il s'ensuit que la forme :

$$\bar{k}_\tau^2 dz + \bar{\ell}_\tau^2 dt \quad \text{est fermée.}$$

On peut donc trouver un changement de coordonnées :

$$g_\tau = \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \\ z_1 = z_1(y, z, t, \tau) = z + \dots \\ t_1 = t_1(y, z, t, \tau) = t + \dots \end{cases}$$

tel que :

$$g_\tau^* \left[\bar{h}_\tau^2 dz + \bar{\ell}_\tau^2 dt \right] = z dz + \epsilon t dt$$

D'où le résultat.

LEMME 12. - Considérons un chemin ω_τ vérifiant les conditions i) et ii) de la proposition et tel que $\bar{\omega}_\tau^2 = \bar{h}_\tau^2 dz \wedge dt + dy \wedge (z dz + \epsilon t dz)$. Alors il existe un $g_\tau \in \text{Diff}_{0, \tau}^{(4)}$, $g_0 = \text{Id}$, tel que $g_\tau^* \omega_\tau$ répondent aux conditions i), ii) et iii) de la proposition.

Démonstration. - Soit un chemin de difféomorphismes $H_\tau \in \text{Diff}_{0, \tau}^{(3)}$, dans le plan $\{y, z, t\}$, de la forme :

$$H_\tau = \begin{cases} y_1 = \varphi(y, \tau) + a_{20}(\tau)z^2 + a_{11}(\tau)zt + a_{02}(\tau)t^2 \\ z_1 = z \\ t_1 = t \end{cases}$$

avec $H_0 = \text{Id}$

Soit $\bar{\omega}_\tau$ la restriction de ω_τ au plan $\{x = 0\}$

Si le 2-jet de $\bar{\omega}_\tau$ a pour expression :

$$\bar{\omega}_\tau^2 = (h_{20}(\tau)z^2 + h_{11}(\tau)zt + h_{02}(\tau)t^2)dz \wedge dt + dy \wedge (z dz + \varepsilon t dt)$$

Celui de $H_\tau^* \bar{\omega}_\tau$ s'écrira :

$$\begin{aligned} (\widetilde{H_\tau^* \bar{\omega}_\tau})^2 &= (h_{20}(\tau)z^2 + h_{11}(\tau)zt + h_{02}(\tau)t^2)dz \wedge dt + \\ &+ \varphi'(0)dy \wedge (z dz + \varepsilon t dt) + [\varepsilon(2a_{20}z + a_{11}t) - \\ &- (a_{11}z + 2a_{02}t)z] dz \wedge dt \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} (\widetilde{H_\tau^* \bar{\omega}_\tau})^2 &= [(h_{20} - a_{11})z^2 + (h_{11} + 2(\varepsilon a_{20} - a_{02}))zt + \\ &+ (h_{02} + \varepsilon a_{11})t^2] dz \wedge dt + \varphi'(0)dy \wedge (z dz + \varepsilon t dt) \end{aligned}$$

Maintenant, d'après le lemme 5, $h_{20}(\tau) + \varepsilon h_{02}(\tau) \neq 0$

Comme $h_{20}(0) + \varepsilon h_{02}(0) = -1$, on a, pour tout τ :

$$h_{20}(\tau) + h_{02}(\tau) < 0.$$

Si l'on choisit : $\varphi(y, \tau) = -(h_{20}(\tau) + \varepsilon h_{02}(\tau))y$

et $a_{11} = -\varepsilon h_{02}$

et a_{20}, a_{02} telles que : $\varepsilon a_{20} - a_{02} = -\frac{1}{2} h_{11}$, on voit que :

$$(\widetilde{H_\tau^* \bar{\omega}_\tau})^2 = -(h_{20}(\tau) + \varepsilon h_{02}(\tau))[-z^2 dz \wedge dt + dy \wedge (z dz + \varepsilon t dt)]$$

Par un dernier chemin $G_\tau \in \text{Diff}_{0, \tau}(4)$ de la forme :

$$G_\tau : (z_1 = \lambda(\tau)z, t_1 = \lambda(\tau)t, y_1 = \mu(\tau)y, x_1 = \mu^{-1}x)$$

avec $\lambda = k^{1/4}$, et $\mu = k^{1/2}$ où $k(\tau) = -\frac{1}{h_{20} + \varepsilon h_{02}}$

on obtient que, si $g_\tau = G_\tau \cdot H_\tau$:

$$(\widetilde{g_\tau \omega_\tau})^2 = -z^2 dz \wedge dt + dy \wedge (z dz + \varepsilon t dt).$$

La condition ii) est toujours vérifiée car :

$$\tilde{g}_\tau^* \tilde{\omega}_\tau^1 = dx \wedge dy + \frac{1}{k\sqrt{2}} a(\tau) x dz \wedge dt + dy \wedge (z dz + \varepsilon t dt) + \dots$$

et la condition i) est également toujours vérifiée. Ceci achève la démonstration du lemme.

La proposition suit des lemmes 9 à 12.

3. RÉDUCTION DE L'ÉQUATION $L_{Y_\tau} \omega_\tau = - \dot{\omega}_\tau$

Soit un chemin ω_τ à singularité fixe. On veut trouver un chemin de germes de difféomorphismes g_τ tel que $g_\tau^{-1*} \omega_0 = \omega_\tau$, $g_0 = \text{Id}$. Notons $V_\tau(n)$ l'espace des familles de germes de champs de vecteurs. Rappelons que :

LEMME 13. - L'existence d'un chemin g_τ , tel que $g_\tau^{-1*} \omega_0 = \omega_\tau$ avec $g_0 = \text{Id}$ (1) est équivalente à l'existence de $Y_\tau \in V_\tau(n)$, $Y_\tau(0) = 0$ tel que $L_{Y_\tau} \omega_\tau = - \dot{\omega}_\tau$ (2).

Dans le paragraphe 2, nous avons établi l'existence de chemins ω_τ à singularité fixe, pour les singularités Σ_0 , Σ_1 , $\Sigma_{2,0}$ et $\Sigma_{2,2,0}$. Nous allons voir comment pour chacun de ces chemins, l'équation (2) $L_{Y_\tau} \omega_\tau = - \dot{\omega}_\tau$ est réductible à une équation résoluble. Nous verrons que la complexité de la réduction et de l'équation finale varie considérablement d'une singularité à l'autre. Pour la singularité $\Sigma_{2,2,0}$, l'équation finale est une équation différentielle singulière que nous ramènerons dans le paragraphe 4 à une équation étudiée dans le chapitre I.

3.1. La singularité Σ_0 (d'après Martinet [10]).

On a vu que si $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_0)$, $\omega \sim \omega_1$, tel qu'il existe un chemin ω_τ de $\omega_0 = dz_1 \wedge dz_2 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$ à ω_1 avec la propriété que : $\omega_\tau(0) \equiv \omega_0(0)$.

L'équation $L_{Y_\tau} \omega_\tau = -\dot{\omega}_\tau$ (2) compte tenu de $d\omega_\tau = 0$ est équivalente à :

$$d(Y_\tau \lrcorner \omega_\tau) = -\dot{\omega}_\tau \quad \text{avec} \quad \dot{\omega}_\tau(0) = 0$$

Il existe un chemin de 1-formes $\beta_\tau \in D_\tau(2p)$, (où $D_\tau(2p)$ désigne l'espace des chemins de germes de 1-formes) tel que :

$$\beta_\tau(0) = 0 \quad \text{et} \quad d\beta_\tau = -\dot{\omega}_\tau$$

L'équation (2) est alors impliquée par l'équation :

$$Y_\tau \lrcorner \omega_\tau = \beta_\tau \quad (3)$$

Mais ici, le rang des ω_τ étant maximum (égal à $2p$) en 0 et donc en tout point pour un représentant bien choisi de ω_τ , l'équation (3) admet une et une seule solution Y_τ , de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, comme

$$\beta_\tau(0) = 0, \quad \text{on a :} \quad Y_\tau(0) = 0.$$

En appliquant le lemme 13, on peut énoncer :

THÉORÈME 14 (Théorème de Darboux en dimension paire). - Soit ω un germe en 0 $\in \mathbb{R}^{2p}$ de 2-forme fermée de rang maximum. Alors ω est isomorphe au germe $\omega_0 = dz_1 \wedge dz_2 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$

3.2. La singularité Σ_1 .

Soit $\omega \in \mathcal{D}(2p+1, \Sigma_1)$. On a vu qu'il existe un chemin ω_τ de $\omega_0 = dz_1 \wedge dz_2 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$ à ω_1 isomorphe à ω et tel que $\omega_\tau(0) \equiv \omega_0(0)$.

Ici aussi, soit $\beta_\tau \in D_\tau(2p+1)$ tel que $d\beta_\tau = -\dot{\omega}_\tau$ et que $\beta_\tau(0) = 0$.

L'équation (2) est équivalente à :

$$d(Y_\tau \lrcorner \omega_\tau - \beta_\tau) = 0 \quad (3)$$

Ici, l'équation $Y_\tau \lrcorner \omega_\tau = \beta_\tau$ n'admet pas toujours des solutions. (Mais

cette équation n'est pas équivalente à (3)).

Désignons par :

$$M\omega_\tau = \{\pi_\tau \in D_\tau(2p+1) \mid \text{pour } \forall x, \pi_\tau(x) \in \text{Support } \omega_\tau(x)\}$$

Alors :

LEMME 15. - L'existence d'une solution Y_τ , $Y_\tau(0) = 0$, à l'équation (3) est impliquée par l'existence de $f_\tau \in \mathcal{L}_\tau(2p+1)$ telle que :

$$\beta_\tau - df_\tau \in M\omega_\tau \quad \text{et que } df_\tau(0) = 0 \quad (4)$$

Démonstration . - Supposons qu'une telle fonction f_τ existe. Alors pour $\forall x$ (dans le domaine de définition de représentants convenables), on a :

$$(\beta_\tau - df_\tau)(x) \in \text{Image}(. \rfloor \omega_\tau(x)) = \text{Support } \omega_\tau(x)$$

Maintenant l'application $Y \rightarrow Y \rfloor \omega_\tau(x)$ est de rang 1 en tout point. Il en résulte que le champ des espaces associés est un champ de droites, de classe $\mathcal{C}^\infty$: Soit H_τ un champ de $2p$ -plans transverses à ce champ des espaces associés, de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à (x, τ) .

L'application $Y \in H_\tau(x) \rightarrow Y \rfloor \omega_\tau(x)$ est un isomorphisme de $H_\tau(x)$ sur $\text{Support } \omega_\tau(x)$. Il existe donc un champ Y_τ , unique tel que $Y_\tau \in H_\tau$ et que $Y_\tau \rfloor \omega_\tau = \beta_\tau - df_\tau$. De plus comme $(\beta_\tau - df_\tau)(0) = 0$, on a : $Y_\tau(0) = 0$.

Soit maintenant $X_\tau \in V_\tau(n)$ un champ tel que :

$$\begin{cases} X_\tau \rfloor \omega_\tau = 0 \\ X_\tau(x) \neq 0 \quad \text{pour } \forall x \end{cases}$$

Un tel champ, engendrant le champ des espaces associés à ω_τ est défini à une fonction partout $\neq 0$ près. Soit $\pi_\tau \in D_\tau(2p+1)$. Dire que $\pi_\tau \in M\omega_\tau$ est équivalent à dire que :

$$\pi_{\tau}(X_{\tau}) = 0$$

Donc une fonction f_{τ} comme dans le lemme 15 est donnée par l'équation

$$X_{\tau} f_{\tau} = \beta_{\tau}(X_{\tau}) \quad \text{avec} \quad df_{\tau}(0) = 0 \quad (5)$$

On obtient une telle fonction par intégration de la fonction $\beta_{\tau}(X_{\tau})$ le long des trajectoires du champ X_{τ} à partir d'un élément d'hypersurface transverse à X_{τ} , passant par 0.

La condition $df_{\tau}(0) = 0$ est impliquée par la condition $\beta_{\tau}(0) = 0$.

D'où le résultat :

THÉOREME 16 (Théorème de Darboux en dimension impaire). - Si ω est un germe en $0 \in \mathbb{R}^{2p+1}$ de 2-forme fermée de rang maximum, alors ω est isomorphe à $\omega_0 = dz_1 \wedge dz_2 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$.

3.3. La singularité $\Sigma_{2,0}$.

Soit $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,0})$. On a vu qu'il existait un chemin ω_{τ} de $\omega_0 = z_1 dz_1 \wedge dz_2 + dz_3 \wedge dz_4 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$ à ω_1 isomorphe à ω , tel que :

$$T_0 \Sigma_2(\omega_{\tau}) = \{z_1 = 0\}$$

On peut modifier ce chemin ω_{τ} de façon que $\Sigma_2(\omega_{\tau}) = \{z_1 = 0\}$. Ceci fait, remarquons que si ω_{τ} désigne la restriction de ω_{τ} à $\Sigma_2(\omega_{\tau})$ $\bar{\omega}_{\tau} \in \mathcal{D}(2p-1, \Sigma_1)$ pour $\forall \tau$.

On peut alors appliquer le théorème précédent au chemin $\bar{\omega}_{\tau}$. On trouve ainsi un nouveau chemin ω_{τ} entre ω_0 et $\omega_1 \sim \omega$ tel que $\Sigma_2(\omega_{\tau}) = \{z_1=0\}$ et que :

$$\bar{\omega}_{\tau} = dz_3 \wedge dz_4 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$$

et que le champ des espaces associé à ω_{τ} , le long de $\Sigma_2(\omega_{\tau})$ soit en chaque point le plan $\{z_1, z_2\}$. Il en résulte qu'aux points de $\Sigma_2(\omega_{\tau})$:

$$\omega_\tau(x) = dz_3 \wedge dz_4 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p} \quad \text{pour } \forall x \in \Sigma_2(\omega_\tau).$$

C'est à dire que $\dot{\omega}_\tau(x) = 0$ pour $\forall x \in \Sigma_2$.

Nous voulons résoudre l'équation :

$$L_{Y_\tau} \omega_\tau = - \dot{\omega}_\tau, \quad Y_\tau(0) = 0 \quad (2)$$

Il est clair qu'il existe $\beta_\tau \in D_\tau(2p)$, tel que $\beta_\tau(x) \equiv 0$ pour $\forall x \in \Sigma_2(\omega_\tau)$, que $\beta_\tau^1(0) = 0$ et que $d\beta_\tau = - \dot{\omega}_\tau$.

Je dis que l'équation (3) : $Y_\tau \lrcorner \omega_\tau = \beta_\tau$ admet une solution Y_τ , avec $Y_\tau(0) = 0$ (Solution qui sera à fortiori solution de (2)). En effet, si : $\omega_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \lrcorner \omega_\tau$ pour $i = 1, \dots, 2p$, l'hypothèse de transversalité à Σ_2 est équivalente à la propriété :

$$\det |\omega_1, \dots, \omega_{2p}| = z_1^2 \psi(x) \quad \text{avec } \psi(x) \neq 0 \quad \text{sur } \Sigma_2(\omega_\tau).$$

En dehors de $\Sigma_2(\omega_\tau)$ ($\{z_1 = 0\}$), un champ $Y_\tau = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ est défini par les formules de Cramer :

$$a_i = \frac{\det |\beta_\tau, \omega_1, \dots, \hat{\omega}_i, \dots, \omega_{2p}|}{\det |\omega_1, \dots, \omega_{2p}|} \quad (\hat{\omega}_i \text{ signifie } \omega_i \text{ excepté})$$

Mais comme $\beta_\tau \mid \Sigma_2(\omega_\tau) \equiv 0$, la fonction $\det |\beta_\tau, \omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_{2p}|$ est divisible par z_1^2 (car le système $\omega_1, \dots, \omega_{2p}$ est de rang $2p-2$ aux points de $\Sigma_2(\omega_\tau)$).

Les fonctions a_i se prolongent donc d'une façon $\mathcal{C}^\infty$ sur Σ_2 . De plus, puisque $\beta_\tau^1(0) = 0$, le 2-jet de $\det |\beta_\tau, \omega_1, \dots, \hat{\omega}_i, \omega_{2p}|$ est nul : On a donc que $a_i(0) = 0$ pour $\forall i$ et la solution Y_τ s'annule en 0. D'où le résultat :

THÉORÈME 17 (Martinet). - Si $\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,0})$ alors ω est isomorphe à $\omega_0 = z_1 dz_1 \wedge dz_2 + dz_3 \wedge dz_4 + \dots + dz_{2p-1} \wedge dz_{2p}$.

3.4. Les singularités $\Sigma_{2,2,0}^e$ ou h .

Considérons un chemin ω_τ à singularité fixe dans $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$.

On va supposer dans la suite que pour $\forall \tau$, $\Sigma_2(\omega_\tau) = \{x = 0\}$ dans $\mathbb{R}^{2p}$ de coordonnées $(x, y_1, \dots, y_{2p-3}, z, t)$. On ne supposera pas que $\Sigma_{22}(\omega_\tau)$ est une variété fixe. Cependant, la réunion des $\Sigma_{22}(\omega_\tau)$ forment un germe de sous-variété $\Sigma_{22,\tau}$ le long de $\{0\} \times [0, 1]$.

On note $\bar{\varphi}$, la restriction de toute forme φ à $\mathbb{R}^{2p-1} = \Sigma_2(\omega_\tau)$ ainsi que $\bar{f}$ la restriction de toute fonction f . $\mathcal{L}_\tau(2p-1)$, $\mathcal{D}_\tau(2p-1)$, $\mathcal{D}_\tau(2p-1)$ désignent respectivement les espaces de familles de germes de fonctions, 2-formes fermées et 1-formes sur $\mathbb{R}^{2p-1} = \{x = 0\}$.

Si $f_1, \dots, f_i$ sont des germes de fonctions en $0 \in \mathcal{L}_\tau(2p)$, on désigne par $\mathcal{M}_\tau(f_1, \dots, f_i)$ l'idéal engendré par ces germes. De même, si $f_1, \dots, f_i \in \mathcal{L}_\tau(2p-1)$, on désigne par $\bar{\mathcal{M}}_\tau(f_1, \dots, f_i)$ l'idéal engendré par ces germes dans $\mathcal{L}_\tau(2p-1)$. $\mathcal{M}_\tau$ et $\bar{\mathcal{M}}_\tau$ désignent l'idéal engendré par toutes les coordonnées de $\mathbb{R}^{2p}$ et de $\mathbb{R}^{2p-1}$ respectivement.

On choisit une fois pour toute une forme volume Ω sur $\mathbb{R}^{2p-1}$, et on définit X_τ par : $X_\tau \lrcorner \Omega = \bar{\omega}_\tau^p$.

Rappelons que $X_\tau \in V_\tau(2p-1)$ admet comme germe de zéros, la variété $\Sigma_{22,\tau}$ et lui est transversalement non dégénéré.

Le rôle de X_τ est fondamental dans l'étude des singularités de $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{220})$ comme le montre la proposition suivante dont l'idée vient de J. Martinet :

PROPOSITION 18. - Soit ω_τ un chemin de 2-formes fermées dans $\mathcal{D}(2p, \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h)$. Supposons que $\Sigma_2(\omega_\tau) = \{x = 0\}$, que $T_0 \Sigma_{22}(\omega_\tau) = \{x = z = t = 0\}$, que $\omega_\tau(0) = dx \wedge dy_1 + \sum_{i=2}^{2p-4} dy_i \wedge dy_{i+1}$ et que si $\alpha_\tau = \dot{\bar{\omega}}_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\omega}_\tau$, le 2-jet $\tilde{\alpha}_\tau^2$ soit nul. Alors, pour que l'équation :

(2) $L_{Y_\tau} \omega_\tau = - \dot{\omega}_\tau$ admette une solution $Y_\tau \in V_\tau(2p)$, $Y_\tau(0) = 0$; il suffit que l'équation :

(3) $X_\tau \cdot g_\tau = h_\tau$ admette une solution $g_\tau \in \mathcal{L}_\tau(2p-1)$ pour

$\forall h_\tau \in \mathcal{E}_\tau(2p-1)$, nulle sur $\Sigma_{22,\tau}$, telle que si $h_\tau \in \bar{\mathcal{M}}_\tau^5$ alors $g_\tau \in \bar{\mathcal{M}}_\tau^4$.

Démonstration. - La démonstration va résulter d'une suite de lemmes permettant de passer de l'équation (3) à l'équation (2). Tout d'abord, $\dot{\omega}_\tau$ étant une forme fermée, il existe $\varphi_\tau \in D_\tau(2p)$ telle que $-\dot{\omega}_\tau = d\varphi_\tau$. Comme $\dot{\omega}_\tau(0) = 0$ et que $\tilde{\alpha}_\tau^2 = 0$ avec $\alpha_\tau = \dot{\omega}_\tau$ on peut choisir φ_τ telle que :

$$\tilde{\varphi}_\tau^1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_\tau^3(0) = 0$$

L'équation (2) est équivalente à l'équation en $Y_\tau \in V_\tau(2p)$, $f_\tau \in \mathcal{E}_\tau(2p)$:

$$Y_\tau \lrcorner \omega_\tau + df_\tau = \varphi_\tau \quad (4)$$

Comme plus haut, on pose :

$$M_{\omega_\tau} = \{\alpha_\tau \in D_\tau(2p) \mid \text{pour } \forall x, \alpha_\tau(x) \in \text{Support } \omega_\tau(x)\}$$

Alors si f_τ est une solution de (4) on a : $\varphi_\tau - df_\tau \in M_{\omega_\tau}$. Inversement :

LEMME 19. - Pour qu'il existe un champ $Y_\tau \in V_\tau(2p)$, $Y_\tau(0) = 0$, vérifiant l'équation (2), il suffit qu'il existe $f_\tau \in \mathcal{E}_\tau(2p)$ telle que :

- i) $\varphi_\tau - df_\tau \in M_{\omega_\tau}$
- ii) $f_\tau \in \bar{\mathcal{M}}_\tau^3$

Démonstration. - Montrons tout d'abord que si $\pi_\tau = \varphi_\tau - df_\tau \in M_{\omega_\tau}$ alors, $\exists Y_\tau \in V_\tau(2p)$ tel que $Y_\tau \lrcorner \omega_\tau = \pi_\tau$. Soit $\omega_{1,\tau}, \dots, \omega_{2p,\tau}$ les $2p$ formes égales à $\frac{\partial}{\partial x} \lrcorner \omega_\tau, \frac{\partial}{\partial y_1} \lrcorner \omega_\tau, \dots, \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \omega_\tau$. En chaque point $\{\omega_{1,\tau}, \dots, \omega_{2p,\tau}\}$ engendre le support de ω_τ . La transversalité de ω_τ à la singularité Σ_2 s'exprime par :

$$\Delta_\tau = \det |\omega_{1,\tau}, \dots, \omega_{2p,\tau}| = x^2 \eta_\tau \quad \text{avec}$$

$$\eta_\tau|_{\Sigma_2(\omega_\tau)} = \eta_\tau|_{\{x=0\}} \neq 0$$

Maintenant, à l'origine, le support de ω_τ est engendré par les $2p-2$ formes $\omega_1, \dots, \omega_{2p-2, \tau}$. Comme le rang de ω_τ est constant sur $\Sigma_2(\omega_\tau)$, le support de ω_τ est engendré par $\omega_1, \dots, \omega_{2p-2}$ localement au voisinage de 0 sur $\Sigma_2(\omega_\tau)$ (Donc partout, puisqu'il s'agit de germes).

Si $\pi_\tau \in M_{\omega_\tau}$, on peut donc trouver $2p-2$ fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_{2p-2, \tau} \in \mathcal{L}_\tau(2p-1)$ telles que, sur $\Sigma_2(\omega_\tau)$:

$$\pi_\tau(m) = \sum_{i=1}^{2p-2} \lambda_{i, \tau} \omega_{i, \tau}(m) \quad \text{pour } \forall m \in \Sigma_2(\omega_\tau)$$

Il existe donc un 1-forme $\mu_\tau \in D_\tau(2p)$, telle que, si l'on note encore $\lambda_1, \dots, \lambda_{2p-2, \tau}$ les fonctions précédentes prolongées à $\mathbb{R}^{2p}$ d'une manière quelconque, et $\lambda_{2p-1, \tau} = \lambda_{2p, \tau} \equiv 0$, on ait :

$$\pi_\tau = \sum_{i=1}^{2p} \lambda_{i, \tau} \omega_{i, \tau} + x \mu_\tau$$

Soit $D_{i, \tau} = \det | \pi_\tau, \omega_1, \dots, \hat{\omega}_{i, \tau}, \dots, \omega_{2p, \tau} |$

En dehors de $\Sigma_2(\omega_\tau)$, il existe un champ unique $Y_\tau = \sum a_{i, \tau} \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($x_i = x, y_1, \dots, z, t$) solution de $Y_\tau \lrcorner \omega_\tau = \pi_\tau$, dont les composantes sont égales à $a_{i, \tau} = \frac{D_{i, \tau}}{\Delta_\tau}$.

Ces fonctions $a_{i, \tau}$ se prolongent de façon $\mathcal{C}^\infty$ en $\{x=0\}$. En effet :

$$\begin{aligned} D_{i, \tau} &= \det \left| \sum_j \lambda_{j, \tau} + x \mu_\tau, \omega_1, \dots, \hat{\omega}_{i, \tau}, \dots, \omega_{2p, \tau} \right| \\ &= (-1)^i \lambda_{i, \tau} \Delta_\tau + x \det | \mu_\tau, \omega_1, \dots, \hat{\omega}_{i, \tau}, \dots, \omega_{2p, \tau} | \end{aligned}$$

Mais, le long de $\Sigma_2(\omega_\tau)$ le rang de ω_τ est $2p-2$ et on a donc :

$$\det | \mu_\tau, \omega_1, \dots, \hat{\omega}_{i, \tau}, \dots, \omega_{2p, \tau} | = x \eta_{i, \tau} \quad \text{pour } \eta_{i, \tau} \in \mathcal{L}(2p)$$

d'où : $a_{i, \tau} = (-1)^i \lambda_{i, \tau} + \eta_{i, \tau} / \eta_\tau$ est un germe $\mathcal{C}^\infty$.

Supposons que $f_\tau \in \mathcal{M}_\tau^3$ alors :

$$\pi_\tau = \varphi_\tau - df_\tau \in \mathcal{M}_\tau^2 D_\tau(2p)$$

Il s'ensuit que $D_{i,\tau} \in \mathcal{M}_\tau^3$ et donc que les $a_{i,\tau} \in \mathcal{M}_\tau$:
Le champ Y_τ s'annule donc en 0.

La condition $\pi_\tau \in M\omega_\tau$ n'est non triviale qu'aux points de $\Sigma_2(\omega_\tau)$.
Ce qui explique que l'on va pouvoir la remplacer par une condition ne portant que sur la restriction au plan $\{x = 0\}$.

Auparavant, nous allons caractériser les éléments de $D_\tau(2p-1)$ se prolongeant en une forme de $M\omega_\tau$.

LEMME 20. - Soit $\mu_\tau \in D_\tau(2p-1)$. Alors $\mu_\tau(X_\tau) = 0 \Leftrightarrow \exists \pi_\tau \in M\omega_\tau$ telle que $\pi_\tau = \mu_\tau$. De plus, si $\mu_\tau \in \mathcal{M}_\tau^3 D_\tau(2p-1)$ alors on peut choisir $\pi_\tau \in \mathcal{M}_\tau^{2D_\tau}(2p)$.

Démonstration. - Clairement si μ_τ se prolonge on a que
 $\mu_\tau \in \text{Support } \bar{\omega}_\tau$ et donc que $\mu_\tau(X_\tau) = 0$.

Nous allons montrer l'implication dans l'autre sens.

Soient $\omega_{x,\tau}, \omega_{y_1,\tau}, \dots, \omega_{y_{2p-3},\tau}$ les $2p-2$ formes : $\frac{\partial}{\partial x} \lrcorner \omega_\tau, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{2p-3}} \lrcorner \omega_\tau$
Ces formes engendrent aux points de $\Sigma_2(\omega_\tau)$ le support de ω_τ , comme on l'a noté plus haut.

Notons $\bar{\omega}_{x,\tau}, \dots, \bar{\omega}_{y_{2p-3},\tau}$ les formes restreintes à $\{x = 0\}$. J'affirme que la condition $\mu_\tau(X_\tau) = 0$ implique qu'il existe $\lambda_{x,\tau}, \lambda_{y_1,\tau}, \dots \in \mathcal{E}_\tau(2p-1)$ telles que $\mu_\tau = \lambda_{x,\tau} \bar{\omega}_{x,\tau} + \lambda_{y_1,\tau} \bar{\omega}_{y_1,\tau} + \dots$

Si de telles fonctions existent, en les prolongeant arbitrairement à $\mathbb{R}^{2p}$, on pourra prendre $\pi_\tau = \lambda_{x,\tau} \omega_{x,\tau} + \lambda_{y_1,\tau} \omega_{y_1,\tau} + \dots$, forme qui appartient bien à $M\omega_\tau$.

La condition $\mu_\tau(X_\tau)(m) = 0$ signifie, si $m \notin \Sigma_{2,2}(\omega_\tau)$ que $\mu_\tau(m) \in \text{Support}_m \bar{\omega}_\tau$ (En effet, le support de $\bar{\omega}_\tau$ qui est aussi celui de $\bar{\omega}_\tau^{p-1}$ est la direction de X_τ , en dehors de $\Sigma_{2,2}(\omega_\tau)$).

Maintenant, je dis que, si $m \notin \Sigma_{2,2}(\omega_\tau)$, le support de $\bar{\omega}_\tau$ est engendré par les $2p-2$ formes $\bar{\omega}_{x,\tau}, \dots, \bar{\omega}_{y_{2p-3},\tau}$. Il suffit de montrer que ces $2p-2$ formes indépendantes sont dans le support de $\bar{\omega}_\tau$:

- pour les $2p-3$ dernières formes : $\bar{\omega}_{y_1, \tau}, \dots$ cela résulte de l'expression : $\omega_{y_i, \tau} = \frac{\partial}{\partial y_i} \lrcorner \omega_\tau$.

- pour la forme $\bar{\omega}_{x, \tau}$, écrivons :

$$\omega_\tau = dx \wedge \omega_{x, \tau} + \pi_\tau \quad \text{avec Support } \pi \subset \{dy_1, \dots, dy_{2p-3}, dz, dt\}$$

on en tire : $\omega_\tau^p = dx \wedge \omega_{x, \tau} \wedge \pi_\tau^{p-1} + \pi_\tau^p = 0$.

Mais, $\pi_\tau^p = 0$ car le support de π_τ est dans un sous espace de dimension $2p-1$. Il en résulte que sur $\Sigma_2(\omega_\tau)$:

$$dx \wedge \omega_{x, \tau} \wedge \pi_\tau^{p-1} = 0$$

Soit $\omega_{x, \tau} \wedge \pi_\tau^{p-1} = 0$

Or $\pi_\tau^{p-1} = \bar{\omega}_\tau^{p-1}$. On a donc : $\bar{\omega}_{x, \tau} \wedge \bar{\omega}_\tau^{p-1} = 0$

Mais, comme en dehors de $\Sigma_{22}(\omega_\tau)$ on a $\bar{\omega}_\tau^{p-1} \neq 0$, cette dernière relation implique que $\bar{\omega}_{x, \tau} \in \text{Supp } \bar{\omega}_\tau$ sur $\Sigma_2(\omega_\tau) \setminus \Sigma_{22}(\omega_\tau)$. Donc ,

$$\mu_\tau(X_\tau) = 0 \Rightarrow \text{pour } \forall m \in \Sigma_2(\omega_\tau) \setminus \Sigma_{2,2}(\omega_\tau),$$

$$\mu_\tau \in \{\bar{\omega}_{x, \tau}, \bar{\omega}_{y_1, \tau}, \dots, \bar{\omega}_{y_{2p-3}, \tau}\}$$

Soit encore $\det |\mu_\tau \bar{\omega}_{y_1, \tau}, \dots, \bar{\omega}_{y_{2p-3}, \tau}, \bar{\omega}_{x, \tau}| = 0$

Maintenant, en 0 :

$$\bar{\omega}_{y_2, \tau}(0), \dots, \bar{\omega}_{x, \tau}(0) = \{dy_1, \dots, dy_{2p-3}\}$$

et $\bar{\omega}_{y_1, \tau}(0) = k dz + \ell dt + \dots$ $\tilde{k}^1(0) = z$ et $\tilde{\ell}^1(0) = t$.

Rebaptisons les formes $\bar{\omega}_{y_1, \tau}, \dots, \bar{\omega}_{x, \tau} : \bar{\omega}_1, \tau, \dots, \bar{\omega}_{2p-3, \tau}$ et choisissons des coordonnées $y_1, \dots, y_{2p-3}, z, t$ de façon que $\Sigma_{22}(\omega_\tau) = \{z=t=0\}$ dans $\{x=0\}$. Comme on avait par hypothèse que $T_0 \Sigma_{22}(\omega_\tau) = \{z=t=0\}$, on peut choisir un changement de coordonnées tangent à l'identité à l'origine en sorte que l'on ait encore $\bar{\omega}_1, \tau(0) = dy_1, \dots, \bar{\omega}_{2p-3, \tau} = dy_{2p-3}$ et $\bar{\omega}_{2p-2} = k dz + \ell dt + \dots$ avec $\tilde{k}^1(0) = z, \tilde{\ell}^1(0) = t$. Il en résulte que : $\bar{m}_\tau(k, \ell) = \bar{m}_\tau(z, t)$.

Désignons par $m_z(D)$, $m_t(D)$ les $(2p-2) \times (2p-2)$ -mineurs de la matrice représentative des $\omega_{1,\tau}, \dots, \omega_{2p-2,\tau}$ sur la base $dy_1, \dots, dy_{2p-3}, dz, dt$ formé en ne prenant pas les coefficients sur dz et dt respectivement :

$$\text{Clairement } \bar{m}_\tau(m_z(D), m_t(D)) = \bar{m}_\tau(z, t)$$

Maintenant, si l'on désigne par D_i la matrice des coefficients de

$\{\mu_\tau, \bar{\omega}_{1,\tau}, \dots, \widehat{\bar{\omega}}_{i,\tau}, \dots, \bar{\omega}_{2p-2,\tau}\}$, $\bar{\omega}_{i,\tau}$ exclu, les mineurs $m_z(D_i)$ et $m_t(D_i)$ formés comme plus haut s'annulent respectivement sur les zéros de $m_z(D)$ et $m_t(D)$. (car $\mu_\tau \in \{\bar{\omega}_{1,\tau}, \dots, \bar{\omega}_{2p-2,\tau}\}$).

Il en résulte que $m_z(D_i)/m_z(D)$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $m_z(D)^{-1}(0)$.

Or sur le complémentaire de $m_z(D)^{-1}(0)$ on a :

$$\mu_\tau = \sum \lambda_{i,\tau} \bar{\omega}_{i,\tau} \quad \text{avec} \quad \lambda_{i,\tau} = m_z(D_i)/m_z(D)$$

Cette formule se prolonge donc partout d'une façon $\mathcal{C}^\infty$.

Supposons que $\mu_\tau \in \bar{m}_\tau^3 \setminus D(2p-1)$. Alors, $m_z(D_i) \in \bar{m}_\tau^3$ et les $\lambda_{i,\tau}$ obtenus par division par une fonction régulière, appartiennent à $\bar{m}_\tau^2$.

Donc le prolongement $\pi_\tau = \sum \lambda_{i,\tau} \omega_{i,\tau}$ appartient à $\bar{m}_\tau^2$.

Nous pouvons maintenant démontrer :

LEMME 21. - Pour qu'il existe une fonction $f_\tau \in \mathcal{E}_\tau(2p)$ vérifiant les conditions du lemme 19, il suffit qu'il existe $g_\tau \in \mathcal{E}_\tau(2p-1)$ telle que $g_\tau \in \bar{m}_\tau^4$ et que $X_\tau \cdot g_\tau = \bar{\varphi}_\tau(X_\tau)$.

Démonstration. - Si $g_\tau \in \bar{m}_\tau^4$ alors $dg_\tau - \bar{\varphi}_\tau \in \bar{m}_\tau^3 \setminus D_\tau(2p-1)$ et $(dg_\tau - \bar{\varphi}_\tau)(X_\tau) = 0$.

On identifie dg_τ et $\bar{\varphi}_\tau$ à des formes sur $\mathbb{R}^{2p}$, indépendantes de x . D'après D'après le lemme 20, $dg_\tau - \bar{\varphi}_\tau$ admet un prolongement, appartenant à $M\omega_\tau$ autrement dit, il existe $\alpha_\tau \in \mathcal{E}_\tau(2p)$ et une 1-forme β_τ telles que :

$$\pi_\tau = \alpha_\tau dx + x \beta_\tau + dg_\tau - \bar{\varphi}_\tau \in M\omega_\tau$$

et telles que $\pi_\tau \in \bar{\mathcal{M}}_\tau^{2D_1}(2p)$.

De même, la forme φ_τ peut s'écrire :

$$\varphi_\tau = \tilde{\alpha}_\tau dx + x \gamma_\tau + \bar{\varphi} \quad \text{avec} \quad \tilde{\alpha}_\tau dx + x \gamma_\tau \in \mathcal{M}_\tau^{2D_1}(2p)$$

En remplaçant

$$\alpha_\tau dx = d(x\alpha_\tau) - x d\alpha_\tau$$

$$\tilde{\alpha}_\tau dx = d(x\tilde{\alpha}_\tau) - x d\tilde{\alpha}_\tau \quad \text{on obtient}$$

$$\varphi_\tau - dg_\tau - d(x\alpha_\tau) + d(x\tilde{\alpha}_\tau) + x [d\alpha_\tau - d\tilde{\alpha}_\tau + \beta_\tau + \gamma_\tau] \in M_{\omega_\tau}$$

Mais, il est clair que $x[d\alpha_\tau - d\tilde{\alpha}_\tau + \beta_\tau + \gamma_\tau]$, divisible par x , appartient à M_{ω_τ} .

On en tire donc que ,

$$\varphi_\tau - df_\tau \in M_{\omega_\tau} \quad \text{où} \quad f_\tau = g_\tau + x(\alpha_\tau - \tilde{\alpha}_\tau)$$

Or on sait que :

$$\begin{cases} g_\tau \in \mathcal{M}_\tau^3 \\ \alpha_\tau \in \mathcal{M}_\tau^2 \end{cases} \quad \text{ainsi que} \quad \tilde{\alpha}_\tau \in \mathcal{M}_\tau^2$$

Donc $f_\tau \in \mathcal{M}_\tau^3$

La fonction f_τ trouvée vérifie donc les hypothèses du lemme 20.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de la proposition 18 . Par hypothèse $\bar{\varphi}_\tau \in \bar{\mathcal{M}}_\tau^4$ donc $\bar{\varphi}_\tau(X_\tau) \in \bar{\mathcal{M}}_\tau^5$ et $\bar{\varphi}_\tau(X_\tau)$ s'annule sur $\Sigma_{22}(\omega_\tau)$.

D'après les hypothèses de la proposition, il existe donc g_τ , tel que $X_\tau g_\tau = \bar{\varphi}_\tau(X_\tau)$ et tel que $g_\tau \in \bar{\mathcal{M}}_\tau^4$. Les lemmes 21 et 19 permettent alors de trouver un champ Y_τ solution de $L_{Y_\tau} \omega_\tau = -\dot{\omega}_\tau$ et tel que $Y_\tau(0) = 0$. Ce qui démontre la proposition 18.

4. LES RÉSULTATS RELATIFS AUX 2-FORMES FERMÉES.

Dans ce paragraphe, nous allons établir des résultats concernant

les singularités $\Sigma_{2,2,0}^e$ ou h . Ces résultats complètent les théorèmes de Darboux et Martinet dont on a donné des démonstrations dans le paragraphe 3.

THÉORÈME 22. - Soit $\omega \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{220}^e \text{ ou } h)$ (c'est-à-dire ω est un germe dont le 2-jet appartient à la singularité $\Sigma_{220}^e \text{ ou } h \subset \tilde{\mathcal{D}}^2(4)$); alors ω est isomorphe, respectivement à :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= dx \wedge dy + z \, dy \wedge dz + d(xz + ty - z^3/3) \wedge dt \text{ dans le cas elliptique} \\ \omega_0 &= dx \wedge dy + z \, dy \wedge dz + d(xz - ty - z^3/3) \wedge dt \text{ dans le cas hyperbolique.} \end{aligned}$$

Pour $n > 4$ on peut montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 23. - Soit $\Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h \subset \tilde{\mathcal{D}}^2(2p)$ pour $p > 4$. Alors il existe un ensemble semi-algébrique $\Sigma \subset \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h$ de codimension ≥ 1 dans $\Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h$ (donc de codimension ≥ 4 dans $\tilde{\mathcal{D}}^2(2p)$) tel que pour tout ω dont le 2-jet $\tilde{\omega}^2 \in \Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h \setminus \Sigma$, est de 3-détermination finie : c'est à dire que si $\tilde{\alpha}^3 = 0$, alors $\omega + \alpha \sim \omega$.

Remarque. - Si ω est tel que $\tilde{\omega}^2 \in \Sigma_{222}^e \text{ ou } h \setminus \Sigma$, alors ω admet pour modèle polynomial, la 2-forme à coefficient des polynômes de degré ≤ 3 représentant $\tilde{\omega}^3$ dans un système de coordonnées choisies.

Dans le paragraphe 3, nous avons montré que la résolution de l'équation $L_{Y_\tau} \omega_\tau = -\dot{\omega}_\tau$, pour un chemin ω_τ convenable se ramène à la résolution de l'équation $X_\tau \cdot g_\tau = h_\tau$, où $X_\tau \in V_\tau(2p-1)$ est une famille de germes de champs de vecteurs à l'origine de $\mathbb{R}^{2p-1}$ associée à ω_τ .

Nous allons démontrer que le champ X_τ est, à un difféomorphisme g_τ et multiplication par une fonction près, équivalent à un champ singulier étudié au chapitre I. Je rappelle le résultat établi (en utilisant les notations de ce chapitre) :

THÉORÈME (I.22). - Soit

$$T_\tau = z^2 X_{20,\tau}(y) + zt X_{11,\tau}(y) + t^2 X_{02,\tau}(y) - \epsilon t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t} \quad \epsilon = \pm 1,$$

un chemin de germes de champ en 0 $\in \mathbb{R}^{2p-1} = \mathbb{R}^{2p-3} \times \mathbb{R}^2$ (de coordonnées

$(y_1, \dots, y_{2p-3}) \in \mathbb{R}^{2p-3}$, $(z, t) \in \mathbb{R}^2$). Les champs $X_{20,\tau}, X_{11,\tau}, X_{02,\tau}$ sont

des chemins de germes sur $\mathbb{R}^{2p-3} \times \{0\}$ en 0 tels que $(X_{20,\tau} + \epsilon X_{02,\tau})(0)$

$\neq 0$. Soit $P_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(z, t) V_\tau(2p-1)$ et $X_\tau = T_\tau + P_\tau$. Alors l'équation

$$X_\tau g_\tau = h_\tau$$

admet une solution $g_\tau \in \mathcal{Z}_\tau(2p-1)$ pour $\forall h_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau(z_1, z_2)$. De plus, si

$h_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^5$ alors on peut trouver une solution $f_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^4$.

Démonstration du théorème 22. - Soit $\omega \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{220}^e \text{ ou } h)$. Grâce à

la proposition 8, nous savons qu'il existe un chemin ω_τ de ω_0 à $\omega_1 \sim \omega$ tel que :

$$\Sigma_2(\omega_\tau) = \{x = 0\} \quad \text{et} \quad \Sigma_{22}(\omega_\tau) = \{x = z = t = 0\}$$

et répondant aux autres conditions de la proposition 8.

En particulier :

$$\tilde{\omega}_\tau^2 = -z^2 dz \wedge dt + dy \wedge (z dz + \epsilon t dt)$$

Soit X_τ le champ associé à $\bar{\omega}_\tau$ par :

$$X_\tau \lrcorner \Omega = \bar{\omega}_\tau \quad \text{où} \quad \Omega = dy \wedge dz \wedge dt$$

Ce champ X_τ s'écrit :

$$X_\tau = \bar{h}_\tau \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}_\tau \frac{\partial}{\partial z} + \bar{\ell}_\tau \frac{\partial}{\partial t}$$

avec $\bar{h}_\tau \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^2(z, t)$ car l'espace associé en $m \in \Sigma_{22}(\omega_\tau)$ est le plan $\{z, t\}$

Comme $d\bar{\omega}_\tau = 0$ on a que :

$$L_{X_\tau} \Omega = 0 \iff \frac{\partial \bar{h}_\tau}{\partial y} + \frac{\partial \bar{k}_\tau}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\ell}_\tau}{\partial z} = 0$$

D'où il suit que $\frac{\partial \bar{k}_\tau}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\ell}_\tau}{\partial z} \in \tilde{\mathcal{M}}_\tau^2(z, t)$

Comme , d'autre part :

$$\tilde{X}_\tau^2 = -z^2 \frac{\partial}{\partial y} - \varepsilon t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t}$$

Il est possible de trouver $g_\tau \in \text{Diff}_{0,\tau}(3)$, fixant la variable y ,
 $dg_\tau(0) = \text{Id}$, tel que :

$$g_\tau^* X_\tau = \bar{h}_{1,\tau} \frac{\partial}{\partial y} + \lambda_\tau(y) \left(z \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon t \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ Modulo } \bar{m}_\tau^3(z,t)$$

et où $(\tilde{h}_1)^2 = -z^2$ et $\lambda_\tau(0) = 1$

Le germe de champ $\frac{1}{\lambda_\tau} g_\tau^* X_\tau$ répond donc aux conditions de l'énoncé du théorème I.22.

Comme X_τ ne diffère de ce champ que par la multiplication par la fonction $\frac{1}{\lambda_\tau}$ et le difféomorphisme g_τ , la conclusion du théorème I.22 est également valable pour le champ X_τ . On peut donc, en appliquant la proposition 18 résoudre l'équation $L_{Y_\tau} \omega_\tau = -\dot{\omega}_\tau$ ce qui établit le théorème 22.

Démonstration du théorème 23. - Considérons maintenant

$\omega \in \mathcal{D}(2p, \Sigma_{220}^e \text{ ou } h)$ avec $2p > 4$. Soient $(x, y_1, \dots, y_{2p-3}, z, t)$ des coordonnées dans $\mathbb{R}^{2p}$. Le germe ω est isomorphe à un germe ω' tel que :

$\Sigma_2(\omega') = \{x=0\}$, $\Sigma_{22}(\omega') = \{x=z=t=0\}$, pour $\forall m \in \Sigma_{22}(\omega')$ l'espace associé en m est égal à $\{z, t\}$ et enfin :

$$\tilde{\omega}^1 = dx \wedge dy_1 + \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ pair}}}^{2p-4} dy_i \wedge dy_{i+1} + a' x dz \wedge dt + dy_1 \wedge (z dz + \varepsilon t dt) + \dots$$

avec $a' > 0$.

(Cette dernière affirmation se montre comme en dimension 4).

Soit X' le champ associé à $(\omega')^{p-1}$ par :

$$X' \lrcorner \Omega = (\bar{\omega}')^{p-1} \quad \text{avec} \quad \Omega = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{2p-3} \wedge dz \wedge dt$$

La composante X'_y de X' sur le plan $\{y_1, \dots, y_{2p-3}\} = \Sigma_{22}(\omega')$ est de la forme :

$$X'_y = z^2 X'_{20} + zt X'_{11} + t^2 X'_{02} \text{ modulo } \bar{m}^3(z,t)$$

où $X'_{20}(y), X'_{11}(y), X'_{02}(y) \in \mathcal{L}(\Sigma_{22}) \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{2p-3}} \right\}$

a) Nous allons tout d'abord montrer que si $(X'_{20} + \epsilon X'_{02})(0) \neq 0$, alors ω' est de 3-détermination finie : alors ω qui est isomorphe à ω' sera aussi de 3-détermination finie.

Comme $\Sigma_{2,2,0}^e \text{ ou } h \subset \tilde{\mathcal{D}}^2(2p)$, nous savons que si ω'' est tel que $\tilde{\omega}^3 = \tilde{\omega}''^3$, alors le chemin :

$$\omega_\tau = (1-\tau)\omega' + \tau\omega'' \quad \text{est à singularité fixe.}$$

En fait, il est facile de vérifier que :

$T_0\Sigma_2(\omega_\tau) = \{x=0\}$ et que $\Sigma_2(\omega_\tau)$ est tangent à l'ordre 4 près au plan $\{x=0\}$ en 0. (Pour cela, on remarque que $\omega_\tau^p = \omega_0^p$ modulo $\mathcal{D}_\tau(2p) \cap \mathcal{M}_\tau^4 \mathcal{D}_\tau(2p)$). Mais alors, il existe un chemin de germes de difféomorphismes g_τ , tangents à l'identité à l'ordre 4 avec $g_0 = \text{Id}$, tel que $\Sigma_2(g_\tau^* \omega_\tau) = \{x=0\}$.

On a : $g_\tau^* \omega_\tau = \omega_\tau = \omega'$ Modulo $\mathcal{D}_\tau(2p) \cap \mathcal{M}_\tau^3 \mathcal{D}_\tau(2p)$.

Notons $X_{y,\tau}$ la composante sur $\{x=y=t=0\}$ du champ associé $\overline{g_\tau^* \omega_\tau}^{p-1}$.

On a :

$$\tilde{X}_{y,\tau}^2 = \tilde{X}_y'^2 \quad \text{donc } X_{y,\tau} \text{ s'écrit :}$$

$$X_{y,\tau} = z^2 X_{20,\tau} + zt X_{11,\tau} + t^2 X_{02,\tau} \quad \text{modulo } \tilde{\mathcal{M}}_\tau^3(z,t) \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \right\}_i$$

avec $(X_{20,\tau} + \epsilon X_{02,\tau})(0) = (X'_{20} + \epsilon X'_{02})(0) \neq 0$.

Remarquons que cela implique $T_0\Sigma_{22}(\omega_\tau) = \{x=z=t=0\}$

On peut donc trouver un chemin de difféomorphismes h_τ de la forme

$$h_\tau = \begin{cases} X = x \\ Y_i = y_i \\ Z(y,\tau), T(y,\tau) \end{cases} \quad \text{avec } dZ=dz, dT=dt$$

tel que $\Sigma_{22}(h_\tau^* g_\tau^* \omega_\tau) = \{x=z=t=0\}$.

Notons encore X_τ le champ associé à $\overline{h_\tau^* g_\tau^* \omega_\tau}^{p-1}$ et $X_{y,\tau}$ sa composante sur $\{x = z = t = 0\}$. On a toujours que :

$X_{y,\tau} = z^2 X_{20,\tau} + zt X_{11,\tau} + t^2 X_{02,\tau} \text{ Modulo } \bar{m}_\tau^3(z,t) \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \right\}$
avec $(X_{20,\tau} + \epsilon X_{02,\tau})(0) \neq 0$

Maintenant, comme en dimension 4, il est facile d'utiliser la condition $d \bar{\omega}_\tau^{p-1} = 0$, soit encore $L_{X_\tau} \Omega = 0$, ($\Omega = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{2p-3} \wedge dz \wedge dt$) pour trouver un dernier chemin de difféomorphismes k_τ et un chemin de fonctions μ_τ , $\mu_\tau \neq 0$ tels que :

$$\mu_\tau \cdot k_{\tau*} X_\tau = z^2 X_{20,\tau} + zt X_{11,\tau} + t^2 X_{02,\tau} - \text{et } \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t} \\ \text{Modulo } \bar{m}_\tau^3(z,t) V_\tau(2p-1)$$

et avec toujours la condition : $(X_{20,\tau} + \epsilon X_{02,\tau})(0) \neq 0$

On peut donc, comme en dimension 4, appliquer la proposition 18 de réduction au chemin $g_\tau^* \omega_\tau$ qui est tel que $\Sigma_2(g_\tau^* \omega_\tau) = \{x=0\}$ et que $\tilde{\alpha}_\tau^2 = 0$ pour $\alpha_\tau = g_\tau^* \omega_\tau$ et au champ X_τ associé. (Ce champ ne diffère du dernier champ égal à $z^2 X_{20,\tau} + zt X_{11,\tau} + t^2 X_{02,\tau} - \text{et } \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t}$, modulo $\bar{m}_\tau^3(z,t) V_\tau(2p-1)$ que par des difféomorphismes et multiplication par une fonction). Ce qui achève la démonstration de l'isomorphisme du 2-formes ω' et ω'' .

b) Nous allons maintenant déterminer l'ensemble semi-algébrique Σ .

Remarquons que la condition $(X'_{20} + \epsilon X'_{02})(0) = 0$ pour ω' est une condition portant sur le jet d'ordre 2 de la forme ω' . Comme les composantes des 2-jets des vecteurs X'_{20} et X'_{02} sont des fonctions algébriques des composantes du 2-jets de ω' , la condition $(X'_{20} + \epsilon X'_{02})(0) = 0$ définit un ensemble algébrique $\bar{\Sigma}$ dans $\tilde{\mathcal{D}}^2(2p)$.

Posons maintenant :

$$\Sigma' = \{ \tilde{\omega} \in \tilde{\mathcal{D}}^2(2p) \mid \exists \tilde{g} \in \widetilde{\text{Diff}}^2(2p) \text{ tel que } \tilde{g}\tilde{\omega} \in \bar{\Sigma} \}$$

Par le théorème de Tarski-Seidenberg, Σ' est un ensemble semi-algébrique de $\tilde{\mathcal{D}}^2(2p)$. et donc $\Sigma = \Sigma' \cap \Sigma_{220}^{e \text{ ou } h}$ est un ensemble semi-algébrique de $\Sigma_{220}^{e \text{ ou } h}$. La codimension de cet ensemble Σ est au moins 1

dans Σ_{220}^e ou h car Σ_{220}^e ou $h \setminus \Sigma$ n'est pas vide : (voir l'exemple exhibé dans 1.5. ci-dessus). Ceci achève la démonstration du théorème 23.

Si maintenant M^{2p} est une variété de dimension $2p$, le théorème 22 ci-dessus implique, pour $2p=4$, qu'une 2-forme fermée a génériquement en dehors d'un ensemble de points isolés, des germes en chaque point équivalents à l'un des quatre modèles décrits pour les germes de $\mathcal{D}(4, \Sigma_0)$, $\mathcal{D}(4, \Sigma_2)$, $\mathcal{D}(4, \Sigma_{220}^e$ ou h) et le théorème 23 implique que si $2p \geq 4$, une 2-forme fermée a génériquement, en dehors d'un ensemble stratifié de codimension ≥ 4 des germes de 3-détermination finie (donc isomorphes à des modèles polynomiaux).

D'autre part, il est intéressant de remarquer que le théorème 22 peut s'interpréter comme un résultat de stabilité pour les éléments de $\mathcal{D}(4, \Sigma_{220}^e$ ou h). (C'est de cette façon que l'auteur de cet article avait initialement énoncé ce résultat dans [16] ; la démonstration esquissée dans cette note, basée sur l'utilisation d'un théorème de fonctions implicites de Nash-Sergeraert n'a malheureusement pas pu être menée à bien). Nous dirons que :

DÉFINITION 24. - Un germe ω de 2-forme fermée en $0 \in \mathbb{R}^n$ est stable, s'il existe un représentant ω_B de ω sur $\forall$ boule B centrée en $0 \in \mathbb{R}^n$ et un voisinage $\mathcal{U}_B$ de ω_B dans $\mathcal{D}(B)$ (espace des 2-formes fermées sur B , muni de la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{C}^\infty$ sur B) tel que tout $\omega'_B \in \mathcal{U}_B$, ait un germe en un point $x' \in B$, isomorphe à ω .

Clairement, chaque $\omega \in \mathcal{D}(4, \Sigma_{220}^e$ ou $h)$ est stable : en effet, si ω_B est un représentant de ω sur une boule B centrée en 0 , et si ω'_B est suffisamment voisin de ω_B , le 2-jet ω'_B coupe encore la singularité Σ_{220}^e ou h en un point x' voisin de 0 . Tous les éléments de $\mathcal{D}(4, \Sigma_{220}^e$ ou $h)$ étant isomorphes, il en résulte que le germe de ω'_B en x' est isomorphe à ω .

Comme pour le théorème de linéarisation des champs de vecteurs, on peut se poser la question de l'existence d'un difféomorphisme de conjugaison dépendant continuellement de $\omega|_B$. Effectivement, une discussion comparable à celle faite à la fin du chapitre I peut être répétée pour les 2-formes fermées. Je me contenterai d'énoncer le résultat :

THÉORÈME 25. - Soit ω une 2-forme fermée sur $\mathbb{R}^4$ dont le germe en 0 appartient à $\mathcal{D}(4, \Sigma_{220}^e$ ou h). Alors il existe des boules B et B' centrées en $0 \in \mathbb{R}^4$, $\bar{B}' \subset \text{int } B$, un voisinage $\mathcal{U}$ de $\omega|_B$ dans $\mathcal{D}(B)$ et une application continue $\rho : \mathcal{U} \rightarrow \text{Diff}(B')$ (Espace des difféomorphismes de B' dans $\mathbb{R}^4$, muni de la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{C}^\infty$ sur B') tels que pour tout $\omega' \in \mathcal{U}$, $\rho(\omega')^* \omega = \omega'$ sur B' .

--:--

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BIRKHOFF G.D.B. - Divergente Reihen und singular Punkte gewöhnlicher Differential-gleichungen. Berliner Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, (1929) p. 1-15.
- [2] BIRKHOFF G.D.B. & BAMFORTH F.R. - Divergent series and singular point of ordinary differential equations. Transactions of Am. Math. Soc. , vol. 32 (1930) p. 114-146.
- [3] BRIOT & BOUQUET. - Journal de l'Ecole Polytechnique (1856)
- [4] DULAC. - Recherche sur les points singuliers d'une équation différentielle. Journal de l'Ecole Polytechnique (1904)
- [5] DUMORTIER F. - Singularities of Vectorfields on the plane (Thesis). Vrije Universiteit Brussel , (1973).
- [6] HARTMAN P. - Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, New York (1964).
- [7] HUKUHARA M., KIMURA T., & Mme MATUDA T. - Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe. Publications of the Math. Soc. of Japan, (1961).

- [8] KELLEY A. - The stable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds. Publié en appendice C dans : R. ABRAHAM & J. ROBBIN. - Transversal mappings and flows, Benjamin, New York (1967).
- [9] MALGRANGE B. - Ideals of differentiable functions. Oxford University Press, Oxford (1966).
- [10] MARTINET J. - Sur les singularités des formes différentielles. Ann. Inst. Fourier, Tome XX, Fasc. 1, (1970) p. 95-177.
- [11] MICHAEL E.A. - Continuous Selections I. Annals of Math., vol 63 (1956) , p. 361-382.
- [12] MOUSSU R. - Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de Forme de Pfaff (à paraître).
- [13] PELLETIER F. - Comportement "générique" d'une 2-forme fermée en dimension paire (Préprint Dijon).
- [14] PICARD E. - Traité d'Analyse, vol. 3
- [15] POINCARÉ H. - Oeuvres vol. 1 (Thèse)
- [16] ROUSSARIE R. - Stabilité des germes de 2-formes fermées en dimension 4 . C.R.Acad. Sc. tome 277, Série A (1973) p. 983-985.
- [17] SEIDENBERG A. - A new decision method for elementary algebra. Ann. of Math. , Vol. 60, (1964), p. 365-374.
- [18] SEIDENBERG A. - Reduction of singularities of the differentiable equation $Ady = B dx$. Amer. J. of Math. (1968), p. 248-269.
- [19] SIEGEL C.L. - Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Göttinger Nachrichten der Akademie der Wissenschaften (1952), p. 21-30.
- [20] STERNBERG S. - Local contractions and a theorem of Poincaré. Amer. J. of Math., vol. 79 , (1957) p. 809-824.
- [21] STERNBERG S. - On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space II. Amer. J. of Math. , vol. 80, (1958), p. 623-631.
- [22] STERNBERG S. - Celestial Mechanic. Part 2, Benjamin, New York (1969).
- [23] TAKENS F. - Normal Forms for certain singularities of vector-fields. Ann. Inst. Fourier, Tome XXIII, Fasc. 2 (1973) p. 113-195.

[24] TAKENS F. - Singularities of vector-fields. Publications Math.
IHES, vol. 43, (1974), p. 47-100.

ROUSSARIE Robert
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences-Mirande
214 rue de Mirande
21 000 DIJON

ABSTRACT

In this paper, we obtain some results of finite determination for vector fields and 2-closed forms. (Finite determined vector fields or forms admit polynomial models). The whole paper is based on a study of certain singular differential equations such that $X.f = h$ where X is a singular vector field. The most important results concerning vector fields are obtained for germs in the plane. We give conditions under which formal equivalence or existence of formal integral implies $\mathcal{C}^\infty$ -equivalence or existence of $\mathcal{C}^\infty$ integral. For démonstrations, we use the "blowing up" method and some other results of F. Takens and F. Dumortier. We also study germs of 2-closed forms in $\mathbb{R}^4$ and show that all the germs of codimension less than 3 are stable.