JEAN PELLAUMAIL

Sur l’intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer

Astérisque, tome 9 (1973)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__9__1_0>

à ma femme,

ERRATA

P. 28, 17ième ligne,

au lieu de $\int_{]o,t]} Y_n \cdot d X_n$ mettre $\int_{]o,t]} Y_u \cdot d X_u$

P. 29, 5ième ligne et p. 30, 13ième ligne,

au lieu de $\int_{]o,t]} \ldots d X_u$ mettre $2 \int_{]o,t]} \ldots d X_u$

P. 29, 19ième ligne et p. 30, 23ième ligne,

au lieu de $\sum_{k=a}^{2^n-1}$ mettre $\sum_{k=1}^{2^n-1}$

P. 32, 2ième ligne, au lieu de "..., la suite de..."

mettre "..., une sous-suite (construite par le procédé diagonal) de la suite de..."

P. 32, 5ième ligne, au lieu de "..., la suite..."

mettre "..., la sous-suite associée de la suite..."

asterisque 1973
9

sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer

Jean PELLAUMAIL

société mathématique de france

TABLE DES MATIERES

I N T R O D U C T I O N

Le but essentiel de l'étude proposée ici est de montrer que l'intégrale stochastique (cf. [13] et [8]) d'un processus prévisible Y, à valeurs dans V, par rapport à un processus X peut être définie comme l'intégrale de Y, considérée comme fonction à valeurs dans V, par rapport à une mesure vectorielle (mesure stochastique) associée à X et définie sur la tribu des prévisibles.

Cette construction éclaire un certain nombre de propriétés fondamentales de l'intégrale stochastique ; de plus, elle permet d'appliquer à l'intégrale stochastique les résultats connus sur l'intégration vectorielle.

Au chapitre 1, on définit une telle intégrale stochastique et on redémontre les résultats fondamentaux associés : pour alléger la présentation, on ne considère que des processus réels.

Au chapitre 2, on donne une démonstration simplifiée de l'existence de la décomposition de Doob-Meyer pour une quasi-martingale réelle : l'outil essentiel en est une mesure réelle définie sur la tribu des prévisibles et associée au "défaut de martingalité" ; cette mesure n'est autre que l'espérance de la mesure stochastique considérée au chapitre 1.

Au chapitre 3, on donne une condition nécessaire et suffisante pour avoir une mesure stochastique. On en déduit, notamment, qu'une martingale continue à droite et intégrable en moyenne d'ordre p, avec $p > 1$, induit une mesure stochastique. De plus, on montre que les résultats obtenus restent valables dans un cadre plus général.

.../...

Au chapitre 4, on montre que les méthodes proposées aux chapitres 1 et 2 semblent bien adaptées à l'étude de processus à valeurs dans des espaces de Banach.

Au chapitre 5, on définit une notion de processus plus générale que la définition traditionnelle : cette définition fait intervenir, de façon fondamentale, les systèmes finis de probabilités conjointes. On montre alors que, pour l'essentiel, les résultats antérieurs (construction de l'intégrale stochastique et décomposition de Doob) restent valables dans ce cadre.

Avant de terminer cette introduction, il me faut dire tout ce que je dois à Monsieur le Professeur METIVIER, mon Directeur de Thèse ; tant sur le plan des idées que sur celui de la rédaction, ses conseils constants et un séminaire effectué par lui en juin 1972 ([16]) ont joué un rôle décisif dans l'accomplissement de ce travail : qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur ROSENBLATT qui a bien voulu me donner un deuxième sujet de thèse et qui m'a constamment guidé dans sa préparation.

Monsieur KEANE a accepté de faire partie du jury auquel cette thèse est présentée : je le remercie vivement pour cette marque d'intérêt et pour les conseils qu'il m'a prodigués.

Enfin, je remercie Madame ROISNEL pour le soin qu'elle a apporté à la présentation matérielle de ce travail.

1 MESURE ET INTEGRALE STOCHASTIQUES POUR DES PROCESSUS REELS

A - GENERALITES

A - 1 : INTRODUCTION.

Comme il est indiqué précédemment, le but essentiel de ce chapitre est de donner une nouvelle construction de l'intégrale stochastique en se limitant à des processus réels.

Au paragraphe A, on donne les hypothèses et notations fondamentales.

Au paragraphe B, on définit les notions de mesure stochastique et de processus de répartition associés.

Au paragraphe C, on définit l'intégrale stochastique.

Au paragraphe D, on donne des conditions simples suffisantes pour avoir une mesure stochastique (ce point sera développé au chapitre 3) ; on montre notamment qu'un processus croissant intégrable (resp. une martingale de carré intégrable) continu à droite induit une mesure stochastique ; on retrouve également les résultats usuels concernant l'intégrale stochastique associée à une martingale de carré intégrable.

Au paragraphe E, on redémontre la formule de Ito en utilisant le formalisme et les résultats indiqués au cours des paragraphes précédents.

Dans tous ces paragraphes, on utilise un formalisme adapté à l'étude de processus continus à droite : or, il est peut-être parfois préférable de considérer des processus continus à gauche. C'est pourquoi, au paragraphe F, on indique comment modifier les hypothèses et notations dans ce cas.

Enfin, il faut indiquer que, dans [17], M. METIVIER a énoncé divers résultats qui complètent ceux de ce chapitre.

A - 2 : DONNEES ET NOTATIONS.

Pour tout ce chapitre on se donne :

- *un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *dont la famille des ensembles de mesure nulle sera notée* $\mathcal{N}$.
- *un intervalle* T *de* R *: pour alléger la présentation on suppose* T *fermé soit* $T = [0,1]$.
- *une famille* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *qui contiennent toutes* $\mathcal{N}$.

On pose :

- $T' = T \setminus \{0\}$ *et* $\Omega' = \Omega \times T'$
- $\mathcal{B}$ = *famille des "rectangles" de la forme* $(H \times]s,t])$ *où* s *et* t *dont deux éléments de* T *avec* $s < t$ *et* H *est un élément de* $\mathcal{F}_s$ *; les éléments de* $\mathcal{B}$ *sont donc des parties de* Ω'.
- $\mathcal{A}$ = *algèbre de parties de* Ω' *engendrée par* $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F}'$ = *tribu de parties de* Ω' *engendrée par* $\mathcal{A}$.
- $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ = *ensemble* $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *des fonctions réelles* $\mathcal{F}$*-mesurables quotienté par la relation d'équivalence associée à l'égalité P-p.s.*

Par convention :

- *si* V *est la partie vide de* T, *on pose* $\inf.\{t : t \in V\} = 1$
- *quand on parlera de processus, ce sera toujours par rapport à la base de processus* $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$.

Si σ *et* σ' *sont deux temps d'arrêt, on notera* $]\sigma, \sigma']$ *(resp.* $[\sigma, \sigma']$, $[\sigma, \sigma'[$*) (intervalle stochastique) l'ensemble des couples* (ω, t) *tels que* $\sigma(\omega) < t \leq \sigma'(\omega)$ *(resp.* $\sigma(\omega) \leq t \leq \sigma'(\omega)$, $\sigma(\omega) \leq t < \sigma'(\omega)$*)* *(*$]\sigma, \sigma']$ *est donc une partie de* Ω'*). Par abus de notation, si* s *et* t *sont deux éléments de* T, $]s, t]$ *pourra désigner, suivant les cas, soit une partie de* T, *soit la partie* $(\Omega \times]s, t])$ *de* Ω' *(*s *et* t *étant alors considérés comme des temps d'arrêt constants).*

A - 3 : LEMME.

Si A appartient à $\mathcal{A}$, il existe une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ qui constitue une partition de A.

Preuve :

Considérons à priori la famille $\mathcal{A}'$ des parties de Ω' satisfaisant à la condition du lemme, c'est-à-dire qui admettent une partition finie constituée d'éléments de $\mathcal{B}$. Pour prouver que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, il suffit de prouver que $\mathcal{A}$ constitue une algèbre. Pour celà, il suffit de vérifier que, si A et B appartiennent à $\mathcal{A}'$, il en est de même de $A\setminus B$. Supposons donc que $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ où $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{B}$. Définissons C_i par récurrence en posant $C_1 = A$ et $C_{i+1} = C_i\setminus B_i$. On a $C_{n+1} = A\setminus B$. Pour prouver que C_{n+1} appartient à $\mathcal{A}'$ on raisonne alors par récurrence sur i ; il suffit donc de démontrer que, si D est un élément de $\mathcal{A}'$, alors $D\setminus B_i$ est aussi un élément de $\mathcal{A}'$; or, il suffit de vérifier ceci si D est un élément de $\mathcal{B}$ ce qui est immédiat en considérant les différents cas de figures.

A - 4 : LEMME.

L'algèbre $\mathcal{A}$ est identique à l'algèbre $\mathcal{A}'$ engendrée par les intervalles stochastiques $]o, \sigma]$ quand σ parcourt l'ensemble des temps d'arrêt étagés (c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs).

Preuve :

1°) Prouvons d'abord que $\mathcal{A}$ est contenue dans $\mathcal{A}'$. Pour celà, il suffit de prouver que, si $B = (H \times]s, t])$ appartient à $\mathcal{B}$, alors B appartient aussi à $\mathcal{A}'$; mais ceci se déduit de ce que $B = (]o, \sigma']) \setminus (]o,\sigma])$ si $\sigma'(\omega) = t$ $(\forall\omega)$ et $\sigma(\omega) = t$ pour $\omega \in (\Omega\setminus H)$ et $\sigma(\omega) = s$ pour $\omega \in H$.

2°) Réciproquement, prouvons que $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{A}'$. Soit σ un temps d'arrêt étagé. On a alors une suite croissante $(t_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ d'éléments de T et une suite associée $(H(k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ telles que :

a) pour tout k, H(k) appartient à $\mathcal{F}_{t_k}$

b) $(H_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est partition de Ω

c) $\sigma = \sum_{k=1}^{n} t_k \cdot 1_{H(k)}$

Si on pose $B_k = (H(k) \times]t(k), 1])$, pour tout k, B_k appartient à $\mathcal{B}$ et $(B_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une partition de $]\sigma, 1]$ ce qui prouve que $]\sigma, 1]$, et donc aussi $]o, \sigma]$, appartient à $\mathcal{A}$, c. q. f. d.

A - 5 : LEMME.

La tribu $\mathcal{F}'$ engendrée par $\mathcal{B}$ est la tribu des prévisibles.

Preuve :

Si σ est un temps d'arrêt, σ est la borne inférieure d'une suite de temps d'arrêt étagés, donc la tribu $\mathcal{F}'$ contient l'intervalle $]o, \sigma]$ (cf. lemme A-4) ; la tribu $\mathcal{F}'$ est donc la tribu engendrée par les intervalles $]o, \sigma]$ où σ parcourt l'ensemble des temps d'arrêt : c'est donc la tribu des prévisibles (résultat classique : cf., par exemple, [5]).

A - 6 : NOTATION ($\mathcal{S}$).

On désignera par $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions m à valeurs dans $L_o(\Omega, \mathcal{F}, P)$, définies et simplement additives sur $\mathcal{A}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout élément $(H \times]s, t])$ de $\mathcal{B}$, $m(H \times]s, t]) = 1_H \cdot m(\Omega \times]s, t])$

(ii) pour tout élément t de T, $m(\Omega \times]o, t])$ appartient à $L_o(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

A - 7 : REMARQUE.

Si m est une fonction à valeurs dans $L_o(\Omega, \mathcal{F}, P)$, définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$, la condition A-6-(i) ci-dessus est équivalente à la condition suivante :

(i)' pour tout élément $(H \times]s, t])$ *de* $\mathcal{B}$, $m(H \times]s, t]) = 1_H \cdot m(H \times]s, t])$

<u>Preuve</u> :

1°) Supposons la condition (i) satisfaite ; si $(H \times]s, t])$ appartient à $\mathcal{B}$, on a :

$$1_H \cdot m(H \times]s, t]) = 1_H \cdot [1_H \cdot m(\Omega \times]s, t])]$$
$$= 1_H \cdot m(\Omega \times]s, t]) = m(H \times]s, t])$$ ce qui prouve (i)'.

2°) Supposons la condition (i)' satisfaite ; si $(H \times]s, t])$ appartient à $\mathcal{B}$, on a :

$$1_H \cdot m(\Omega \times]s, t]) = 1_H \cdot m(H \times]s, t]) + (1_\Omega - 1_{\Omega\setminus H}) \cdot m((\Omega\setminus H) \times]s, t])$$
$$= m(H \times]s, t]) + m((\Omega\setminus H) \times]s, t]) - 1_{\Omega\setminus H} \cdot m((\Omega\setminus H) \times]s, t])$$
$$= m(H \times]s, t])$$ ce qui prouve (i).

<u>A - 8</u> : <u>LEMME ET NOTATION</u> (ϕ).

Soit $(X_t)_{t\in T}$ *un processus réel adapté défini à une modification près, c'est-à-dire tel que, pour tout élément t de T,* X_t *appartienne à* $L_o(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

1°) Il existe un élément (unique) de $\mathcal{S}$, *que l'on notera* $\phi((X_t)_{t\in T})$, *tel que, pour tout couple (s, t) d'éléments de T avec s < t, on ait :*

$$(\phi((X_t)_{t\in T}))\ (\Omega \times]s, t]) = (X_t - X_s)$$

2°) L'application ϕ *ainsi définie est une bijection de l'ensemble des processus réels adaptés définis à une modification près et tels que* $X_o = o$ *dans* $\mathcal{S}$.

3°) Pour tout couple (σ, σ') *de temps d'arrêt étagés avec* $\sigma \leqslant \sigma'$, *on a :*

$$(\phi((X_t)_{t\in T}))\ (]\sigma, \sigma']) = X_{\sigma'} - X_\sigma$$

4°) Pour tout temps d'arrêt étagé et tout élément A de $\mathcal{A}$,

$$\phi((X_t)_{t\in T})\ (A \cap]o,\sigma]) = \phi((X_{t\wedge\sigma})_{t\in T})\ (A)$$

Preuve :

Soit $(X'_t)_{t\in T}$ une modification de $(X_t)_{t\in T}$. Soit A un élément de $\mathcal{A}$. D'après le lemme A-3, A admet une partition $(H_i \times]s_i, t_i])_{i\in I}$ telle que, pour tout i, $(H_i \times]s_i, t_i])$ appartienne à $\mathcal{B}$. En considérant ce qui se passe sur chaque trajectoire ω de Ω, on voit que l'on peut poser

$$\phi'((X_t)_{t\in T}(A) = m(A) = \sum_{i\in I} 1_{H_i} \cdot (X'_{t_i} - X'_{s_i})$$

c'est-à-dire que m(A) ne dépend pas de la décomposition de A considérée. On vérifie que pour tout couple (σ, σ') de temps d'arrêt étagés avec $\sigma \leqslant \sigma'$, on a $m(]\sigma, \sigma']) = X'_{\sigma'} - X'_{\sigma}$, que m est simplement additive et que $\phi'((X_t)_{t\in T}(A\cap]o,\sigma]) = \phi'((X_{t\wedge\sigma})_{t\in T}(A)$ si σ est un temps d'arrêt étagé et si A appartient à $\mathcal{B}$ (là encore, il suffit de montrer ces égalités pour tout élément ω de Ω).

Ensuite, on vérifie immédiatement que, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, la classe d'équivalence de m(A) dans $L_o(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ne dépend pas du choix de la modification $(X'_t)_{t\in T}$; on peut donc poser :

$$\phi((X_t)_{t\in T})(A) = \text{classe d'équivalence de } m(A).$$

La fonction ϕ satisfait alors aux conditions indiquées d'après ce qui précède.

A - 9 : LEMME ET NOTATION (Φ).

Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus, défini à une modification près et tel que, pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Alors si on pose, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, $m(A) = E[\phi((X_t)_{t\in T})(A)]$, ceci définit une fonction réelle simplement additive sur $\mathcal{A}$; cette fonction m sera notée $\Phi((X_t)_{t\in T})$.

Preuve :

Ceci se déduit immédiatement de la linéarité de la fonction E(.) et de A-8. On peut également noter qu'aux propriétés A-8-3°) et 4°) de

$\Phi((X_t)_{t\in T})$ correspondent des propriétés analogues pour $\Phi((X_t)_{t\in T})$. Par ailleurs, $(X_t)_{t\in T}$ est une martingale (resp. une surmartingale) si et seulement si $\Phi((X_t)_{t\in T})$ (A) = 0 (resp. ≥ 0) pour tout élément A de $\mathcal{A}$ (ou de $\mathcal{B}$).

En un certain sens qui sera précisé au chapitre 2, la fonction $\Phi((X_t)_{t\in T})$ exprime donc le "défaut de martingalité" du processus $(X_t)_{t\in T}$.

A - 10 : DEFINITION.

On dit qu'un temps d'arrêt σ est prévisible s'il existe une suite de temps d'arrêt $(\sigma(n))_{n>0}$ qui annonce σ, c'est-à-dire croissant vers σ et telle que, pour tout n, Proba $([\sigma(n) = \sigma] \cap [\sigma < 1]) = 0$.

A - 11 : REMARQUE.

Il revient au même de dire qu'il existe une suite de temps d'arrêt $(\sigma'(n))_{n>0}$ croissant vers σ et telle que, pour tout n, Proba $[\sigma'(n) = \sigma] = 0$. En effet, il suffit de poser $\sigma'(n) = \inf. \{\sigma(n), 1 - \frac{1}{n}\}$.

B - MESURE STOCHASTIQUE

B - 1 : DEFINITION ET NOTATION.

Soit $p \geq 1$. On dira que m est une mesure stochastique en moyenne d'ordre p si m est un élément de $\mathcal{S}$ qui se prolonge (de façon unique) en une mesure définie sur la tribu $\mathcal{F}'$ (tribu des prévisibles), à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et σ-additive pour la topologie forte de $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Dans ce cas, par abus de notation, le prolongement de m à $\mathcal{F}'$ sera encore noté m.

B - 2 : DEFINITION.

Soit $p \geq 1$. Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus réel adapté défini à une modification près. On dira que $(X_t)_{t \in T}$ est un processus de répartition en moyenne d'ordre p si $\phi((X_t)_{t \in T})$ est une mesure stochastique en moyenne d'ordre p.

B - 3 : THEOREME. (cf. OREY : [23'])

Soit x une mesure stochastique en moyenne d'ordre 1. Alors il existe un processus cadlag $(X_t)_{t \in T}$, unique à l'indistinguabilité près, adapté aux tribus $\mathcal{F}_t$, tel que $X_o = o$ et tel que $x = \phi((X_t)_{t \in T})$.

Preuve :

Notons d'abord que si x est une mesure stochastique en moyenne d'ordre p avec $p \geq 1$, elle est à fortiori une mesure stochastique en moyenne d'ordre 1.

On notera $||.||_1$ la norme dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Soit Q' l'ensemble des rationnels appartenant à T. Soit $(Z_t)_{t \in Q'}$ le processus défini à l'indistinguabilité près par $Z_t = x\,(]o, t])$ pour t élément de Q'.

On va d'abord prouver que le processus $(Z_t)_{t \in Q'}$ est laglad en utilisant une technique analogue à celle utilisée dans le théorème classique d'existence de modification laglad pour une martingale.

Puisque x est une mesure, il existe une constante $d > o$ telle que, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, $E[x(A)] \leq d$.

Soit (a, b) un couple de rationnels avec $a < b$.

Considérons d'abord une partie finie S de Q' ; soit $\{t(k)\}_{1 \leq k \leq 2n}$ la famille ordonnée des éléments de S. Soit $(\sigma(k))_{1 \leq k \leq 2n}$ la famille des temps d'arrêt étagés définie par récurrence par : $\sigma(1) = o$,

$$\sigma(2k+1) = \inf \{t : t \in S,\ t \geq \sigma(2k),\ Z_t \geq b\}$$
$$\sigma(2k) \quad = \inf \{t : t \in S,\ t \geq \sigma(2k-1),\ Z_t \leq a\}$$

(rappelons que si V est la partie vide de T on pose $\inf \{t : t \in V\} = 1$).

Soit A_S^j le domaine où le processus $(Z_t)_{t \in S}$ effectue au moins j "montées de a à b" ; si $\omega \in \Omega$, on a :

- soit $\omega \in A_S^j$ ce qui implique
$$\sum_{k=1}^{j} (Z_{\sigma(2k+1)} - Z_{\sigma(2k)}) \geq j.(b-a)$$
- soit $\omega \notin A_S^j$ ce qui implique
$$\sum_{k=1}^{j} (Z_{\sigma(2k+1)} - Z_{\sigma(2k)}) \geq -(Z_1 - a)^-$$

(on ne peut avoir $Z_{\sigma(2k+1)} - Z_{\sigma(2k)} < o$ que si $Z_{\sigma(2k)} < a$ et $Z_{\sigma(2k+1)} = X_1$).

On en déduit :
$$d \geq E\left[x\left(\bigcup_{k=1}^{j}]\sigma(2k),\ \sigma(2k+1)]\right)\right] \geq \sum_{k=1}^{j} E\,(Z_{\sigma(2k+1)} - Z_{\sigma(2k)})$$
$$\geq j\ .\ (b-a)\ .\ P(A_S^j) - E\left[(Z_1 - a)^-\right]$$

ce qui donne $P(A_S^j) \leq \dfrac{c+d+|a|}{j.(b-a)}$ si $c = E\,(|Z_1|)$.

Si on considère maintenant une suite $(S(n))_{n>0}$ de parties finies de Q' dont la réunion est Q' et si $A_{Q'}^j$ désigne le domaine où le processus $(Z_t)_{t \in Q'}$ effectue au moins j "montées de a à b" on a $A_{S(n)}^j \uparrow A_{Q'}^j$, donc $P(A_{Q'}^j) \leq \dfrac{c+d+|a|}{j.(b-a)}$. On en déduit que, si $A_{Q'}^\infty$ désigne le domaine où le processus $(Z_t)_{t \in Q'}$ effectue une infinité de "montées de a à b", on a $P(A_{Q'}^\infty) = 0$. En considérant la famille dénombrable des couples de rationnels (a, b), on en déduit que le processus $(Z_t)_{t \in Q'}$ est laglad (c'est-à-dire, pour presque toute trajectoire, admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche).

On peut alors poser, pour tout élément t de T, $X_t(\omega) = Z_{t+}(\omega)$.

Soit $t \in T$ et $(t(k))_{k>0}$ une suite d'éléments de Q' décroissant vers t ; la suite de variables aléatoires $(X_{t(k)})_{k>0}$ converge P-p.s. vers X_t (par définition de X_t) et dans $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers $x(]o, t])$ (puisque x est une mesure) donc cette suite converge P-p.s. et dans L_1 vers $X_t = x(]o, t])$.

On vérifie immédiatement que $x = \phi((X_t)_{t \in T})$.

Notons que, dans cette démonstration, supposer que x est une "mesure" est une hypothèse beaucoup plus forte que nécessaire.

B - 4 : LEMME.

Si $(X_t)_{t \in T}$ est une modification cadlag d'un processus de répartition en moyenne d'ordre p avec $p \geqslant 1$ et si x est la mesure stochastique associée, on a :

a) pour tout couple (σ, σ') de temps d'arrêt avec $\sigma < \sigma'$,

$$x(]\sigma, \sigma']) = X_{\sigma'} - X_\sigma$$

b) pour tout couple (σ, σ') de temps d'arrêt prévisibles avec $\sigma < \sigma'$,

$$x([\sigma, \sigma'[) = X_{\sigma'-} - X_{\sigma-}$$

(les égalités considérées étant évidemment dans L_p).

Preuve :

a) Il suffit de prouver que $x(]o,\sigma]) = X_\sigma - X_o$. Soit, alors, une suite $(\sigma(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt étagés décroissant vers σ. La suite de variables aléatoires $(X_{\sigma(n)})_{n>o}$ converge vers X_σ P-p.s. et dans L_p (puisque x est une mesure) d'où le résultat (cf. A-8-3°)).

b) On raisonne de façon analogue au a) en utilisant le a) et le fait qu'un temps d'arrêt prévisible σ est limite d'une suite $(\sigma(k))_{k>o}$ croissante de temps d'arrêt (quelconques) telle que, $\forall\omega$, $(\sigma(k))_{k>o}$ croît strictement vers $\sigma(\omega)$.

B - 5 : LEMME.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ une modification continue à droite d'un processus de répartition en moyenne d'ordre p ($p \geqslant 1$) et σ un temps d'arrêt. Soit Y le processus défini par $Y_t(\omega) = X_{t\wedge\sigma}(\omega)$. Alors Y est un processus de répartition en moyenne d'ordre p et, pour tout ensemble prévisible A, on a :

$$(\phi(Y_t))(A) = (\phi(X_t))(A \cap]o,\sigma])$$

Preuve :

Il suffit de prouver l'égalité ci-dessus pour $A = H \times]s, t]$ élément de $\mathcal{B}$ (on peut même prendre $H = \Omega$). Or cette égalité est satisfaite si σ est un temps d'arrêt étagé (cf. A-8-4°)). Si σ est un temps d'arrêt quelconque, on considère une suite $(\sigma(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt étagés décroissant vers σ : la suite $Y_{t\wedge\sigma(n)}$ converge d'une part dans L_p (puisqu'on a une mesure), d'autre part P-p.s. vers $Y_{t\wedge\sigma}$ donc cette suite converge P-p.s. et dans L_p vers $Y_{t\wedge\sigma}$ c. q. f. d. Notons que, à l'indistinguabilité près, Y_t est le seul processus continu à droite tel que $Y_o = X_o$ et $\phi(Y_t)(A) = \phi(X_t)\ (A \cap]o,\sigma])$ pour tout élément A de $\mathcal{A}$.

C - DEFINITION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

C - 1 : DEFINITION.

Soient $(X_t)_{t\in T}$ et $(Y_t)_{t\in T}$ deux processus adaptés à la famille $(\mathcal{F}'_t)_{t\in T}$. On suppose que $(X_t)_{t\in T}$ est un processus de répartition en moyenne d'ordre p et on désigne par x la mesure stochastique associée. On dira que le processus $(Y_t)_{t\in T}$ est stochastiquement intégrable en moyenne d'ordre p par rapport au processus X si la fonction réelle $(\omega, t) \mapsto Y_t(\omega)$, considérée comme fonction définie sur $\Omega' = \Omega \times T'$, est intégrable (pour la topologie de L_p) (cf., par exemple, [1]) par rapport à la mesure x définie sur $(\Omega', \mathcal{F}')$. Dans ce cas, si A est un ensemble prévisible, on posera

$$\int_A Y.dX = \int Y.1_A.dX$$ *; la fonction m définie par* $m(A) = \int_A Y.dX$ *est alors une mesure stochastique (vérification immédiate) : d'après le théorème B-3 on*

peut donc lui associer un processus cadlag $(Z_t)_{t \in T}$ unique à l'indistinguabilité près : par abus de langage, ce processus sera encore appelé l'intégrale stochastique de Y par rapport à X.

C - 2 : REMARQUES.

On suppose que $(Y_t)_{t \in T}$ est stochastiquement intégrable en moyenne d'ordre p par rapport à $(X_t)_{t \in T}$ et que $(Z_t)_{t \in T}$ est le processus défini par $Z_t = \int_{]o, t]} Y_u . dX(u)$, pour tout élément t de T : on a alors :

a) Z_t appartient à $L_p(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ pour tout élément t de T

b) si (X_t) est une martingale, il en est de même de (Z_t) ; en effet, si $x = \phi((X_t)_{t \in T})$ (resp. $z = \phi((Z_t)_{t \in T})$), on a, pour tout élément A de $\mathcal{F}'$, $< 1_\Omega , x(A) > = o = E\left[x(A)\right]$; mais ceci implique

$$< 1_\Omega , z(A) > = \int_A Y_u \, d < X_u , 1_\Omega > = o$$ (puisqu'une intégrale forte est à fortiori une intégrale faible) ce qui implique que $(Z_t)_{t \in T}$ est une martingale.

c) de même, si $(X_t)_{t \in T}$ est une surmartingale et si $Y_t(\omega)$ est $\geqslant 0$, ($\forall t$ et ω) $(Z_t)_{t \in T}$ est une surmartingale.

C - 3 : LEMME.

Soient p, q et r trois réels positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leqslant 1$.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ une modification cadlag d'un processus de répartition en moyenne d'ordre p. Soient (σ, σ') un couple de temps d'arrêt avec $\sigma < \sigma'$.

1°) Soit Y_1 un élément de $L_q(\Omega, \mathcal{F}_\sigma, P)$; alors le processus Y défini par $Y = Y_1 . 1_{]\sigma, \sigma']}$ est stochastiquement intégrable en moyenne d'ordre r et $\int Y.dX = Y_1.(X_{\sigma'} - X_\sigma)$.

2°) *Plus généralement, soit* $(\sigma(k))_{k>o}$ *une suite de temps d'arrêt croissant vers* σ' *avec* $\sigma = \sigma(1)$. *Soit* $(Y_k)_{k>o}$ *une suite de variables aléatoires telle que, pour tout* k, Y_k *appartient à* $L_q(\Omega, \mathcal{F}_{\sigma(k)}, P)$ *et telle que la série de terme général* $u_k = Y_k \cdot (X_{\sigma(k+1)} - X_{\sigma(k)})$ *soit convergente dans* $L_r(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *(condition qui est satisfaite pour* $p \geq r$ *si* $\sup\limits_{k>o} ||Y_k||_\infty < +\infty$).

Alors le processus Y *défini par* $Y = \sum\limits_{k>o} Y_k \cdot 1_{]\sigma(k),\, \sigma(k+1)]}$ *est stochastiquement intégrable en moyenne d'ordre* r *et*

$$\int_{\Omega'} Y.dX = \sum_{k>o} Y_k \cdot (X_{\sigma(k+1)} - X_{\sigma(k)})$$

Preuve :

1°) Notons d'abord que la propriété indiquée a un sens puisque la mesure associée à (X_t) est une mesure stochastique en moyenne d'ordre r.

Si $Y_1 = \sum\limits_{n>o} a_n \cdot 1_{A(n)}$ où $(A(n))_{n>o}$ est une partition $\mathcal{F}_\sigma$-mesurable de Ω, le processus Y est intégrable d'après le théorème 9 de [1] p. 347.

Si Y_1 est quelconque, Y_1 est limite uniforme de fonctions σ-étagées (c'est-à-dire prenant un ensemble dénombrable de valeurs) : il en résulte une propriété analogue pour Y qui donne le résultat escompté (toujours d'après le théorème 9 de [1]).

2°) Se déduit facilement de ce qui précède et du théorème 9 de [1].

Notons que ce lemme montre que l'intégrale construite en C-1 ci-dessus coïncide avec celle de Ito-Watanabe (cf. [13]) pour les processus étagés.

C - 4 : EXTENSION DE LA DEFINITION PRECEDENTE (LEMME ET DEFINITION).

Notons d'abord que l'extension ci-dessous a été étudiée plus en détail dans [18].

Soient X et Y deux processus, le processus X étant continu à droite. On dira que Y est localement stochastiquement intégrable s'il existe une suite croissante $(\sigma(n))_{n>o}$ *de temps d'arrêt telle que* $\lim\limits_{n\to\infty}$ *. Proba* $[\sigma(n) < 1] = o$ *et telle que, pour tout n, le processus Y est stochastiquement intégrable en moyenne d'ordre 1 par rapport au processus* $X_{t\wedge\sigma(n)}$ *(ce qui suppose, notamment, que* $X_{t\wedge\sigma(n)}$ *est un processus de répartition en moyenne d'ordre 1). Dans ce cas, l'égalité*

$Z_{t\wedge\sigma(n)} = \int Y \,.\, d(X_{t\wedge\sigma(n)})$ *définit à l'indistinguabilité près un processus* $(Z_t)_{t\in T}$ *qui sera appelé intégrale stochastique locale de Y par rapport à X.*

Preuve :

Il suffit de prouver que le processus $(Z_t)_{t\in T}$ est bien défini et ne dépend pas (à l'indistinguabilité près) de la suite $(\sigma(n))_{n>o}$

1°) Pour tout n, soit $(Z^n(t))_{t\in T}$ le processus continu à droite défini par $Z^n_t = \int_{]o,\, t]} Y \,.\, d(X_{t\wedge\sigma(n)})$.

Soit $z^n = \phi((Z^n_t)_{t\in T})$.

D'après le lemme B-5, pour tout ensemble prévisible,

$$z^n(A) = \int_{A\cap\,]o,\, \sigma(n)]} Y \,.\, d(X_{t\wedge\sigma(n+1)})$$

donc $Z^{n+1}_{t\wedge\sigma(n)} = Z^n_t$ à l'indistinguabilité près (cf. remarque à la fin de B-5) ce qui montre que $(Z_t)_{t\in T}$ est bien défini sur $[o,\, \sigma(n)]$ (pour tout n) et donc sur $\Omega \times T$.

2°) Soient $(\sigma(n))_{n>o}$ et $(\sigma'(n))_{n>o}$ deux suites satisfaisant aux conditions de l'énoncé et $(Z_t)_{t\in T}$ et $(Z'_t)_{t\in T}$ les processus associés. Soit $\sigma''(n) = \sigma(n) \wedge \sigma'(n)$. La suite $(\sigma''(n))_{n>o}$ satisfait aussi aux conditions de l'énoncé. Si $(Z''_t)_{t\in T}$ est le processus associé, d'après le 1°) on a $(Z''_{t\wedge\sigma''(n)})_{t\in T} = (Z_{t\wedge\sigma''(n)})_{t\in T}$ à l'indistinguabilité près d'où l'unité de $(Z_t)_{t\in T}$.

D - EXEMPLES SIMPLES DE MESURES STOCHASTIQUES

D - 1 : PROPOSITION.

Soit Ω' un espace et $\mathcal{A}$ un anneau de parties de Ω'. Soit V un espace de Banach, m une mesure positive définie sur $\mathcal{A}$ et v une fonction simplement additive définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs dans V. On suppose que v satisfait à la condition suivante :

(i) si $(A_n)_{n>0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0, \text{ alors } \lim_{n\to\infty} v(A_n) = 0$$

Alors, v se prolonge, de façon unique, en une fonction à valeurs dans V, définie et fortement σ-additive sur le δ-anneau engendré par $\mathcal{A}$.

Preuve :

La preuve directe de ce résultat est assez facile ; toutefois nous ne démontrerons pas ce résultat qui est un cas particulier de [12] ou [27].

D - 2 : LEMME.

Soit m une fonction positive définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$. Alors m est σ-additive sur $\mathcal{A}$ si et seulement si m satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) pour tout élément t de T, $\lim\limits_{s\downarrow t} m(\Omega \times]0, s]) = m(\Omega \times]0, t])$

(ii) pour toute suite $(A_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ décroissant vers $\emptyset$,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{B\in\mathcal{A},\ B\subset(A_n \times T')} m(B) \right\} = 0$$

Preuve :

Les conditions (i) et (ii) sont évidemment nécessaires.

Supposons ces conditions satisfaites. On veut prouver que si $(B_n)_{n>o}$ est une partition de B, les ensembles B et B_n (pour tout n) appartenant à $\mathcal{A}$, alors $m(B) = \sum_{n>o} m(B_n)$. D'après le lemme A-3, il suffit de prouver cette égalité pour $B \in \mathcal{B}$; quitte à changer de notation, on peut aussi supposer que chaque B_n appartient à $\mathcal{B}$. On a évidemment $m(B) \geq \sum_{n>o} m(B_n)$.

Soit $\varepsilon > o$. On se propose de prouver que $m(B) + 3\varepsilon \leqslant \sum_{n>o} m(B_n)$.

Soit $B = H \times]s, t]$ et, pour tout n, $B_n = H_n \times]s_n, t_n]$. La condition (i) permet de construire s' tel que $s < s' < t$ et $m(H \times]s, s']) \leqslant$ de même, pour tout n, on peut trouver t'_n tel que $t_n < t'_n$ et $m(H_n \times]t_n, t'_n]) \leqslant \varepsilon \cdot 2^{-n}$.

Pour tout élément ω de H, soit $a(\omega)$ l'ensemble des entiers positifs k tels que $\omega \in H_k$. Ensuite, pour tout $n > o$, soit C_n l'ensemble des éléments ω de Ω tels que

$$[s', t] \subset \left\{ \bigcup_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \in a(\omega)}}]s_k, t'_k[\right\}$$

D'une part, C_n appartient à $\mathcal{F}^1$. D'autre part, si on fixe ω, on a :

$$[s', t] \subset]s, t] \subset \left\{ \bigcup_{\substack{k>o \\ k \in a(\omega)}}]s_k, t_k] \right\} \subset \left\{ \bigcup_{\substack{k>o \\ k \in a(\omega)}}]s_k, t'_k[\right\}$$

(Puisque $(B_n)_{n>o}$ est une partition de B)

Ceci signifie que la famille d'ouverts $\{]s_k, t'_k[\}_{k>o,\ k \in a(\omega)}$ recouvre le compact $[s', t]$ donc on peut en extraire un recouvrement fini ce qui signifie qu'il existe un $n > o$ tel que ω appartient à C_n ; autrement dit, si on pose $A_n = \Omega \setminus C_n$, la suite $(A_n)_{n>o}$ (qui est évidemment décroissante) tend vers $\emptyset$. On peut alors lui appliquer la condition (ii) ; il existe donc un entier η tel que :

$$\underbrace{\text{Sup.}}_{B \in \mathcal{D},\ B \subset (A_\eta \times T')} m(B) \leqslant \varepsilon .$$

Or, si on pose $D_\eta = \bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant \eta} (H_k \times]s_k\ , t'_k])$ et $B' = (H \times]s'\ , t])$,
on a $(B' \setminus D_\eta) \subset (A_\eta \times T')$ donc $m(B' \setminus D_\eta) \leqslant \varepsilon$ donc

$$m(B) \leqslant \varepsilon + m(B') \leqslant 2\varepsilon + m(D_\eta) \leqslant 2\varepsilon + \sum_{k>o} m(H_k \times]s_k\ , t'_k])$$

$$\leqslant 2\varepsilon + \sum_{k>o} \varepsilon \,.\, 2^{-k} + \sum_{k>o} m(B_k) \text{ c. q. f. d.}$$

D - 3 : PROPOSITION.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus défini à une modification près et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{F}_t\ , P)$

(ii) $(X_t)_{t \in T}$ est une sous-martingale positive

(iii) pour tout élément s de T, $\lim\limits_{t \downarrow s} E(X_t - X_s) = 0$.

Alors la fonction $\Phi((X_t)_{t \in T})$ (cf. A-9) est positive et σ-additive sur $\mathcal{D}$.

Preuve :

Pour alléger l'écriture, posons $x = \Phi((X_t)_{t \in T})$.

La fonction x est positive puisque $(X_t)_{t \in T}$ est une sous-martingale. Il suffit donc de vérifier que x satisfait aux conditions (i) et (ii) du lemme D-2. Or, la condition D-2-(i) est satisfaite d'après la condition (iii) de l'énoncé. Prouvons la condition D-2-(ii) ; soit $(A(n))_{n>o}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $A(n) \downarrow \phi$; si B est un élément de $\mathcal{D}$ contenu dans $A(n) \times T'$, il existe un temps d'arrêt étagé σ tel que $B \subset (]\sigma, 1]) \subset (A(n) \times T')$ (il suffit de prendre pour σ le "début" de B soit $\sigma(\omega) = \inf. \{t : (\omega, t) \in B\}$) ; on a donc

$$m(B) \leqslant m(]\sigma, 1]) = E\,[X_1 - X_\sigma] \text{ (cf. A-8-3°) et A-9)}$$

$$\leqslant E\,[(X_1 - X_\sigma)^+] \leqslant E\,[|X_1| \,.\, 1_{A(n)}]$$

or $\lim\limits_{n\to\infty} E\,[|X_1| \,.\, 1_{A(n)}] = o$ ce qui prouve D-2-(ii).

D - 4 : PROPOSITION (CAS D'UN PROCESSUS CROISSANT).

Soit $(A_t)_{t\in T}$ un processus défini à une modification près et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout élément t de T, A_t appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$

(ii) pour tout couple (s, t) d'éléments de T avec s < t, $A_s \leq A_t$ P-p.s.

(iii) $(A_t)_{t\in T}$ est continu à droite en moyenne, c'est-à-dire que, pour tout élément t de T,

$$\lim_{s\downarrow t} E(A_s - A_t) = 0$$

Alors $(A_t)_{t\in T}$ est un processus de répartition en moyenne d'ordre 1.

Preuve :

Remarquons d'abord que les conditions données sur $(A_t)_{t\in T}$ sont satisfaites si et seulement si $(A_t)_{t\in T}$ admet une modification $(A'_t)_{t\in T}$ croissante, continue à droite (par trajectoires) et qui satisfait à la condition (i).

Soit a (resp. â) la fonction simplement additive définie sur $\mathcal{A}$ par $a = \phi((A_t)_{t\in T})$ (resp. $\hat{a} = \Phi((A_t)_{t\in T})$) (cf. A-8 et A-9). La fonction â est positive (condition (ii)). De plus, pour tout élément B de $\mathcal{B}$, on a $||a(B)||_1 = \hat{a}(B)$ donc, pour tout élément B de $\mathcal{A}$, $||a(B)||_1 \leq \hat{a}(B)$ (on a même l'égalité). Compte tenu de la proposition D-1, il suffit donc de prouver que â est σ-additive. Or, ceci résulte immédiatement de la proposition D-3 (on peut supposer $A_o = o$ et donc $A_t \geq o$).

D - 5 : REMARQUES.

a) Dans la démonstration qui précède, il n'est pas nécessaire d'utiliser la proposition D-3 ; on peut en effet remarquer que, si B appartient à $\mathcal{A}$, $\hat{a}(B) = \int_\Omega \int_T 1_B \cdot d\, A_t(\omega) \cdot P(d\omega)$ ce qui prouve que â est σ-additive (Fubini).

b) La proposition D-4 reste exacte si on pose $\forall t$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ ($(A_t)_{t\in T}$ est encore une sous-martingale par rapport à cette famille de tribus !) : la tribu des prévisibles devient alors la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(T')$ et la proposition D-4 n'est autre que le théorème de Fubini (cf., par exemple, III-2-1 p. 69 de [23]).

c) Si $(A_t)_{t\in T}$ est un processus croissant (par trajectoires), pour tout élément ω de Ω on peut considérer l'intégrale de Stieljes ordinaire $\int_T Y_t(\omega)\, .\, d\, A_t(\omega)$; si $(Y_t)_{t\in T}$ est intégrable en moyenne d'ordre 1, on vérifie que, P-p.s., cette intégrale de Stieljes est définie et égale à l'intégrale stochastique $\int_{\Omega'} Y_t\, .\, d\, A_t$ (on le vérifie immédiatement pour les processus $\mathcal{A}$-étagés, puis pour les processus positifs en appliquant le théorème de Lebesgue).

D - 6 : PROPOSITION.

Si $(X_t)_{t\in T}$ est une martingale de carré intégrable continue à droite en moyenne d'ordre 2, $(X_t)_{t\in T}$ est un processus de répartition en moyenne d'ordre 2. De plus, si $m_X = \phi((X_t)_{t\in T})$ (cf. A-8) et $a_X = \Phi((X_t^2)_{t\in T})$ (cf. A-9), pour tout élément A de $\mathcal{F}'$ on a : $(||m_X(A)||_2)^2 = a_X(A)$, autrement dit, l'application qui, à 1_A élément de $L^2(\Omega', \mathcal{F}', a_X)$, associe $m_X(A)$ élément de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une isométrie (ce résultat sera généralisé en D-9-c).

Preuve :

Notons d'abord que, si la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est continue à droite, la martingale $(X_t)_{t\in T}$ est continue à droite en moyenne d'ordre 2.

La fonction a_X (qui est positive puisque $(X_t^2)_{t\in T}$ est une sous-martingale) est σ-additive (proposition D-3).

Par ailleurs, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, $a_X(A) = (||m_X(A)||_2)^2$; en effet, soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de A constituée d'éléments de $\mathcal{B}$ (cf. A-3) ; d'une part, pour tout élément $A_i = (H \times]s, t])$ de $\mathcal{B}$, $a_X(A_i) = E\left[1_H \cdot (X_t^2 - X_s^2)\right] = E\left[1_H \cdot (X_t - X_s)^2\right]$ (car $H \in \mathcal{F}_s$ et $(X_t)_{t \in T}$ est une martingale) $= (||m_X(A_i)||_2)^2$; d'autre part, si $i \neq j$, les vecteurs $m_X(A_i)$ et $m_X(A_j)$ sont orthogonaux (ceci se vérifie immédiatement en notant que $(H \times]s, t]) \cap (H' \times]s', t']) = \emptyset \Longrightarrow H \cap H' = \emptyset$ ou $]s, t] \cap]s', t'] = \emptyset$).

On a donc $a_X(A) = \sum\limits_{i \in I} a_X(A_i) = \sum\limits_{i \in I} (||m_X(A_i)||_2)^2 = (||m_X(A)||_2)^2$.

La proposition se déduit alors de D-1.

D - 7 : REMARQUE.

Dans les deux cas envisagés précédemment (D-4 et D-6) on a prouvé directement qu'on était dans le cas (*) de [1] (cf. p. 346) sans utiliser le corollaire 2-4 p. 294 de [2].

D - 8 : REMARQUE.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ une martingale locale (cf., par exemple, [8]), c'est-à-dire un processus continu à droite tel qu'il existe une suite croissante $(\sigma(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt, suite telle que, pour tout n, $(X_{t \wedge \sigma(n)})_{t \in T}$ soit une martingale (ici les martingales sont nécessairement uniformément intégrables puisqu'on a pris $T = [0,1]$).

D'après la proposition 4 p. 94 de [8] et les propositions D-4 et D-6 ci-dessus, il existe une suite croissante $(\sigma'(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt telle que lim. $P[\sigma'(n) < 1] = o$ et telle que, pour tout n, $(X_{t \wedge \sigma'(n)})_{t \in T}$ soit un processus de répartition en moyenne d'ordre 1 : ceci permet de définir l'intégrale stochastique par rapport à une martingale locale (cf. C-4 ci-dessus).

D - 9 : PROPOSITION.

Soit $(X_t)_{t\in T}$ *une martingale de carré intégrable. Soit* $a_X = \Phi((X_t^2)_{t\in T})$. *Soit* $(Y_t)_{t\in T}$ *un processus tel que la fonction réelle associée* $(\omega, t) \mapsto Y_t(\omega)$ *(considérée comme fonction définie sur* $\Omega' = \Omega \times T'$*) appartient à* $L^2(\Omega', \mathcal{F}', a_X)$. *Alors :*

a) $(Y_t)_{t\in T}$ *est stochastiquement intégrable en moyenne d'ordre 2 par rapport au processus* $(X_t)_{t\in T}$.

b) *Soit* $(Z_t)_{t\in T}$ *l'intégrale stochastique de* $(Y_t)_{t\in T}$ *par rapport à* $(X_t)_{t\in T}$ *; soit* $a_Z = \Phi((Z_t^2)_{t\in T})$ *; soit* m_Z *la mesure stochastique définie par* $m_Z(A) = \int_A Y_t \, . \, dX_t$ *pour tout élément A de* $\mathcal{F}'$. *On a alors (pour tout élément A de* $\mathcal{F}'$*) :* $\int_A Y_t^2 \, . \, da_X = (||m_Z(A)||_2)^2 = a_Z(A)$.

c) *Si on pose* $\mathcal{F}'_s = \{C : C = B \cap]o, s], B \in \mathcal{F}'\}$, *l'application qui, à* $(Y_t)_{t\in [o, s]}$ *considérée comme élément de* $L^2(\Omega \times]o, s], \mathcal{F}'_s, a_X)$, *associe* $Z_s = \int_{]o, s]} Y_t \, . \, dX_t$ *considéré comme élément de* $L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$ *est une isométrie linéaire.*

Preuve :

Le c) est évidemment un cas particulier du b) : il suffit de poser A = $]o, s]$. De plus la deuxième égalité du b) a été prouvée en D-6.

Soit $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ l'espace vectoriel des processus $(Y_t)_{t\in T}$ tels que la fonction réelle associée $(\omega, t) \mapsto Y_t(\omega)$ soit étagée et $\mathcal{A}$-mesurable : autrement dit, on suppose qu'il existe une famille finie $(a_i)_{i\in I}$ de réels et une partition finie associée $(B_i)_{i\in I}$ de Ω', partition constituée d'éléments de $\mathcal{B}$, telles que $X_t(\omega) = \sum_{i\in I} b_i \, . \, 1_{B_i}(\omega, t)$. Soit A un élément de $\mathcal{A}$. Soit $(A_j)_{j\in J}$ une partition de A constituée d'éléments de $\mathcal{B}$ et plus fine que la partition $(B_i)_{i\in I}$; on peut écrire
$X_t(\omega) \, . \, 1_A(\omega, t) = \sum_{j\in J} \lambda_j \, . \, 1_{A_j}(\omega, t)$ et on a :

$$m_Z(A) = \sum_{j\in J} \lambda_j \, . \, m_Z(A_j)$$

mais, de même qu'en D-6, les vecteurs $\lambda_j \cdot m_Z(A_j)$ sont deux à deux orthogonaux donc

$$(||m_Z(A)||_2)^2 = \sum_{j\in J} \lambda_j^2 \cdot (||m_Z(A_j)||_2)^2 = \sum_{j\in J} \lambda_j^2 \cdot a_X(A_j)$$

soit $(||m_Z(A)||_2)^2 = \int_A Y^2 \cdot da_X$ $\quad \alpha$

On en déduit la même égalité pour tous les éléments A de $\mathcal{F}'$. Par ailleurs, pour tout élément f de $L^2(\Omega', \mathcal{F}', a_X)$, il existe une suite $(f_n)_{n>o}$ d'éléments de $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ qui converge vers f a_X-p.s. et dans $L^2(\Omega', \mathcal{F}', a_X)$; le théorème 9 de [1] et l'égalité α ci-dessus montrent que le processus associé à f est stochastiquement intégrable en moyenne d'ordre 2 et qu'il satisfait à l'égalité α (par passage à la limite).

E - FORMULE DE ITO

E - 1 : INTRODUCTION.

Nous allons maintenant prouver la formule de Ito pour des processus à trajectoires continues. La méthode proposée est assez différente des méthodes classiques : elle montre que la construction vectorielle de l'intégrale stochastique permet de simplifier les démonstrations antérieures, notamment parce qu'on dispose d'un théorème de convergence dominée.

Nous commencerons par obtenir, en E-4, la décomposition de Doob-Meyer du processus (M_t^2), si (M_t) est une martingale, par une méthode analogue à celle qui sert à prouver la formule de Ito.

E - 2 : PROPOSITION. (cf. Métivier [16])

Soit $(m^n)_{n>o}$ une suite de mesures stochastiques qui converge vers la mesure stochastique m pour la semi-norme de la semi-variation. Soit X_t (resp. X_t^n) le processus cadlag, unique à l'indistinguabilité près, associé à la mesure m (resp. m^n) et tel que $X_o = o$ (resp. $X_o^n = o$).

Alors on peut trouver une application croissante f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, sauf sur un ensemble de mesure nulle, les trajectoires de $X_t^{f(n)}$ convergent uniformément vers celles de X_t.

Preuve :

On construit la fonction f en sorte que la semi-variation de $(m-m^{f(n)})$ soit inférieure à 4^{-n}. Soit $\sigma(n)$ le temps d'arrêt défini par $\sigma(n) = \inf.\{t : |X_t - X_t^{f(n)}| > 2^{-n}\}$. Sur le domaine $A_n = \{\sigma(n) < 1\}$, $|X_t - X_t^{f(n)}| \geq 2^{-n}$ donc

$$P(A_n) \leq 2^n . ||(X - X^{f(n)})_{\sigma(n)}||_1 \leq 2^n . 4^{-n} = 2^{-n}$$

Si on pose $A = \lim.\sup_n . A_n = \bigcap_{n>o} \left[\bigcup_{k \geq n} A_k \right]$, on a $P(A)=0$ et, en dehors de A, les trajectoires de $X_t^{f(n)}$ convergent uniformément vers celles de X_t.

E - 3 : PROPOSITION. (cf. Métivier [16])

Soit $(X_t)_{t \in T}$ une modification cadlag d'un processus de répartition. Soit $(Y_t)_{t \in T}$ un processus prévisible intégrable par rapport à (X_t). Soit $(Z_t)_{t \in T}$ le processus cadlag défini par $Z_t = \int_{]o,t]} Y_n . d X_n$. Si (X_t) est continu (resp. prévisible), (Z_t) est continu (resp. prévisible).

Preuve :

On vérifie immédiatement que la proposition est exacte si $Y_t = 1_{H \times]u,v]}$ avec $H \in \mathfrak{F}_n$; on en déduit le même résultat si Y_t est une combinaison linéaire finie de tels processus. Le théorème de convergence dominée et la proposition E-2 permettent d'étendre ce résultat, d'abord aux processus prévisibles (Y_t) uniformément bornés (raisonnement classique de prolongement par mesurabilité), et, ensuite, aux processus (Y_t) intégrables par rapport au processus (X_t).

E - 4 : PROPOSITION.

Soit $(X_t)_{t\in T}$ une modification cadlag d'un processus localement de répartition en moyenne d'ordre 2. Soit $(Y_t)_{t\in T}$ le processus cadlag défini à l'indistinguabilité près par, pour tout t :

$$Y_t = X_t^2 - X_o^2 - \int_{]o,t]} X_{u-} \cdot d\, X_u$$

où $(X_{u-})_{u\in T}$ désigne une modification continue à gauche du processus $(X_t)_{t\in T}$

Le processus $(Y_t)_{t\in T}$ est alors un processus croissant.

Preuve :

Notons d'abord que, si (X_t) est une martingale, $\int_{]o,t]} X_{u-}.d\, X_u$ est aussi une martingale ; cette proposition donne donc l'existence d'une décomposition de Doob-Meyer de (X_t^2) sous la forme de la somme d'une martingale $\int_{]o,t]} X_{u-}.d\, X_u$ et d'un processus croissant (Y_t) (continu ou prévisible si (X_t) l'est : cf. E-3).

Prouvons donc la proposition. Par localisation, on peut se ramener au cas où le processus (X_t) est uniformément borné ce que nous supposerons désormais. On va d'abord prouver que Y_1-Y_o est positif.
Pour tout n>o , soit Z_n le processus défini sur $]o,1]$ par :

$$Z_n = \sum_{k=a}^{2^n-1} X_{k.2^{-n}} \cdot 1_{]k.2^{-n},(k+1).2^{-n}]}$$

On a :

$$X_1^2 - X_o^2 = \sum_{j=1}^{2^n-1} \left(X^2_{(j+1).2^{-n}} - X^2_{j.2^{-n}}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^n-1} \left(X_{(j+1).2^{-n}} - X_{j.2^{-n}}\right)^2 + 2 \sum_{j=1}^{2^n-1} \left(X_{(j+1).2^{-n}} - X_{j.2^{-n}}\right) X_{j.2^{-n}}$$

$$= \qquad S_n \qquad + 2 \cdot \int_{]o,1]} Z_n \cdot d\, X$$

Or la suite de processus $(Z_n)_{n>o}$ converge vers le processus $(X_{t-})_{t\in T}$ il résulte alors du théorème de convergence dominée que $\int_{]o,1]} Z_n \, d\, X$ converge vers $\int_{]o,1]} X_{u-} \, . \, d\, X_u$. La somme S_n converge donc, elle aussi, vers une variable aléatoire qui est positive (P-p.s.) comme limite de variables aléatoires positives.

On prouverait de même que, pour $s<t$, $Y_t - Y_s \geq 0$ P-p.s. Le processus continu à droite $(Y_t)_{t\in T}$ est donc croissant à l'indistinguabilité près.

E - 5 : FORMULE DE ITO. (pour des processus réels continus)

Soit $(X_t)_{t\in T}$ une modification continue d'un processus localement de répartition en moyenne d'ordre 2. Soit $(Y_t)_{t\in T}$ le processus croissant continu défini par :

$$Y_t = X_t^2 - X_o^2 - \int_{]o,t]} X_u \, . \, d\, X_u$$

(cf. E-4).

Soit f une fonction réelle de variable réelle deux fois continûment dérivable. On a alors, pour tout élément t de T :

$$f(X_t) = f(X_o) + \int_{]o,t]} f'(X_u).d\, X_u + \frac{1}{2} \int_{]o,t]} f''(X_u).d\, Y_u$$

Preuve :

Par localisation, on peut se ramener au cas où le processus $(X_t)_{t\in T}$ est uniformément borné, ce que nous supposerons désormais. Il suffit de prouver la formule annoncée pour t = 1. Pour tout n>o , on a :

$$f(X_1) - f(X_o) = \sum_{k=a}^{2^n-1} \left[f\left(X_{(k+1).2^{-n}}\right) - f\left(X_{k.2^{-n}}\right)\right]$$

Mais d'après la formule de Taylor, pour tout n et k, il existe une fonction réelle $R_{k,n}$ définie sur Ω et telle que

$$R_{k,n}(\omega) \in [X_{k.2^{-n}}(\omega) \, , \, X_{(k+1).2^{-n}}(\omega)]$$

et :

$$f(X_{(k+1).2^{-n}}) - f(X_{k.2^{-n}}) = (X_{(k+1).2^{-n}} - X_{k.2^{-n}}) \cdot f'(X_{k.2^{-n}})$$

$$+ \frac{1}{2} (X_{(k+1).2^{-n}} - X_{k.2^{-n}})^2 \cdot f''(R_{k,n}) \cdot$$

Soient (Z^n_t) et (V^n_t) les processus définis pour t élément de $[k.2^{-n}, (k+1).2^{-n}[$ par :

$$Z^n(t) = X_{k.2^{-n}} \quad , \quad R^n(t) = R_{k,n}$$

$$V^n(t) = \sum_{j=o}^{k} (X_{(j+1).2^{-n}} - X_{j.2^{-n}})^2$$

On a :

$$f(X_1) - f(X_o) = \int_{]o,1]} f'(Z^n_u) \cdot d\, X_u + \frac{1}{2} \int_{]o,1]} f''(R^n_u) \cdot d\, V^n_u$$

La suite de processus $(Z^n_t)_{n>o}$ converge simplement vers le processus $(Z_t)_{t\in T}$ donc (convergence dominée)

$$\int_{]o,1]} f'(Z^n_u) \cdot d\, X_u \quad \text{converge vers} \quad \int_{]o,1]} f'(X_u) \cdot d\, X_u$$

De plus, la démonstration de la proposition E-4 montre que, pour presque toute trajectoire ω , la suite de mesures positives $m_n(\omega)$ associées aux fonctions croissantes $V_t^n(\omega)$ converge, sur les dyadiques, vers la mesure positive $m(\omega)$ associée à la fonction croissante $Y_t(\omega)$ par conséquent(résultat classique), la suite $(m_n(\omega))_{n>o}$ converge faiblement vers la mesure $m(\omega)$; on en déduit facilement que

$$\int_{]o,1]} f''(R_u^n).d\, V_u^n \quad \text{converge P-p.s. vers} \quad \int_{]o,1]} f''(X_u).d\, Y_u$$

quand n tend vers l'infini.

F - FORMALISME ASSOCIE A DES PROCESSUS CONTINUS A GAUCHE

F - 1 : INTRODUCTION.

Dans les paragraphes antérieurs, on a utilisé un formalisme qui est surtout intéressant si on considère des processus continus à droite. On a effectué le choix de ce formalisme pour retrouver exactement les résultats classiques. Toutefois, il semble important de noter qu'il est tout aussi facile de considérer des processus continus à gauche : ceci a notamment l'avantage de ne faire intervenir que des processus prévisibles à tous les niveaux.

Le but de ce paragraphe est donc seulement d'indiquer les modifications à apporter aux paragraphes antérieurs si on est amené à considérer des processus continus à gauche. Pour plus de clarté, même si celà donne lieu à des répétitions par rapport à ce qui précède, on donnera les énoncés complets de tous les résultats importants.

F - 2 : DONNEES ET NOTATIONS.

On garde les mêmes données qu'en A-2 donc Ω, $\mathcal{F}$, P, T, $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ ont les mêmes propriétés que précédemment.

Par contre, on introduit les nouvelles notations suivantes :

- $T'_g = T\setminus\{1\}$ *et* $\Omega'_g = \Omega \times T'$
- *pour tout élément t de* $T\setminus\{0\}$, $\mathcal{A}_{t-} = \bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s$ *et* $\mathcal{A}_{0-} = \{\Omega, \emptyset\}$
- $\mathcal{B}_g$ = *famille des rectangles de la forme* $(H \times [s, t[)$ *où* (s, t) *est un couple d'éléments de T avec* $s < t$ *et H est un élément de* $\mathcal{A}_{s-}$.
- $\mathcal{A}_g$ = *algèbre de parties de* Ω'_g *engendrée par* $\mathcal{B}_g$.
- $\mathcal{F}'_g$ = *tribu de parties de* Ω'_g *engendrée par* $\mathcal{A}_g$.

On définit $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $[\sigma, \sigma'[$, etc... comme en A-2.

On a alors les résultats suivants :

F - 3 : LEMME.

Si A appartient à $\mathcal{A}_g$, il existe une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}_g$ qui constitue une partition de A. (cf. A-3).

F - 4 : DEFINITION.

On dira qu'un temps d'arrêt étagé σ *est surprévisible si on a :*
$\sigma = \sum_{k=1}^{n} t(k) \,.\, 1_{H(k)}$ *où* $(t(k))_{1\leq k\leq n}$ *est une famille finie d'éléments de T et*

$(H(k))_{1 \leq k \leq n}$ *est une famille finie associée d'éléments de* $\mathcal{F}$ *telle que, pour tout k,* $H(k)$ *appartienne à* $\mathcal{A}_{t(k)-}$.

F - 5 : LEMME.

L'algèbre $\mathcal{A}_g$ est identique à l'algèbre engendrée par les intervalles stochastiques $[o, \sigma[$ quand σ parcourt l'ensemble des temps d'arrêt étagés surprévisibles (cf. A-4). De plus, la tribu $\mathcal{F}'_g$ est la tribu des prévisibles (ce dernier résultat se déduit immédiatement de A-5 et de ce que, en restriction à $(\Omega \times]o, 1[)$, $\mathcal{F}'_g$ contient $\mathcal{B}$).

F - 6 : NOTATION (cf. A-6).

On désignera par $\mathcal{S}_g$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $L_o(\Omega, \mathcal{F}, P)$, définies et simplement additives sur $\mathcal{A}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout élément $(H \times [s, t[)$ de $\mathcal{B}_g$,

$$m(H \times [s, t[) = 1_H \cdot m(\Omega \times [s, t[)$$

(ii) pour tout élément t de T, $m(\Omega \times [o, t[)$ appartient à $L_o(\Omega, \mathcal{F}_t , P)$.

F - 7 : LEMME ET NOTATION (cf. A-8).

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus réel adapté. Il existe un élément (unique) de $\mathcal{S}_g$, que l'on notera $\phi_g((X_t)_{t \in T})$, tel que, pour tout couple (s, t) d'éléments de T avec s < t, on ait :

$$(\phi_g((X_t)_{t \in T})) \; (\Omega \times [s, t[) = X_t - X_s$$

Notons que A-7, A-8-2°), 3°) et 4°) restent exacts sous réserves d'effectuer les modifications convenables.

F - 8 : NOTATION (cf. A-9).

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus défini à une modification près et tel que, pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. On notera $\Phi_g((X_t)_{t \in T})$ la fonction définie sur $\mathcal{A}_g$ par $(\Phi_g((X_t)_{t \in T}))(A) =$ $E = \{(\phi_g((X_t)_{t \in T}))(A)\}$ si A appartient à $\mathcal{A}_g$.

F - 9 : DEFINITIONS (cf. B-1).

Soit $p \geqslant 1$. On dira que m est une mesure stochastique à gauche en moyenne d'ordre p si m est un élément de $\mathcal{S}_g$ qui se prolonge (de façon unique) en une mesure définie sur $\mathcal{F}'_g$, à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et σ-additive pour la topologie forte de $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On dira que $(X_t)_{t \in T}$ est un processus de répartition à gauche en moyenne d'ordre p si $\phi_g(X_t)_{t \in T}$ est une mesure stochastique à gauche en moyenne d'ordre p.

F - 10 : THEOREME.

Soit x une mesure vectorielle forte, définie sur la tribu des prévisibles contenus dans $(\Omega \times T)$, à valeurs dans $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et telle que $x([o]) = x([1]) = o$. Alors x induit une mesure stochastique à gauche si et seulement si elle induit une mesure stochastique "à droite" (c'est-à-dire au sens indiqué en B-1) relativement à la famille $(\mathcal{F}_{t+})_{t \in T}$. De plus, il existe un processus cadlag $(X_t)_{t \in T}$, unique à l'indistinguabilité près, tel que $X_{o+} = X_o = o$, $X_1 = X_{1-}$ et $x = \phi((X_t)_{t \in T}) = \phi_g((X_{t-})_{t \in T})$.

Preuve :

Pour la première partie du théorème on vérifie facilement les conditions (i) et (ii) de A-6 ou F-6 en utilisant la σ-additivité de x. La deuxième partie se déduit immédiatement de B-3 et B-4.

F - 11 : INTEGRALE STOCHASTIQUE.

Dans la définition donnée en C-1 de l'intégrale stochastique $\int Y \,.\, dX$, le processus X n'intervient que par l'intermédiaire de la mesure stochastique associée ; si X est un processus de répartition à gauche, on peut donc définir $\int Y \,.\, dX$ comme en C-1. Evidemment, dans ce cas, il est plus logique de prendre comme "processus-intégrale stochastique" une modification continue à gauche (et non à droite) du processus $(V_t)_{t \in T}$ défini par $V_t = \int_{[o,\, t[} T \,.\, dX$. Notons que le processus ainsi obtenu est prévisible. On a évidemment l'analogue "à gauche" de l'extension C-4.

F - 12 : LEMME.

Soit m une fonction positive définie et simplement additive sur $\mathcal{A}_g$. *Alors m est σ-additive sur* $\mathcal{A}_g$ *si et seulement si m satisfait aux deux conditions suivantes :*

(i) pour tout élément t de T, $\lim\limits_{s \downarrow t} m(\Omega \times [o, s[) = m(\Omega \times [o, t[)$

(ii) pour toute suite $(A_n)_{n>o}$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *décroissant vers* $\emptyset$,

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\text{Sup.}}_{B \in \mathcal{A}_g,\ B \subset (A_n \times T'_g)} m(B) = o.$$

Preuve :

La preuve est absolument analogue à celle indiquée en D-2 ; la seule modification provient de ce que, si $(H \times]s, t])$ appartient à $\mathcal{B}_g$, $(H \times]u, t])$ n'appartient à $\mathcal{B}_g$ que pour $u \geqslant s - \varepsilon$ (où $\varepsilon > o$ dépend de H et s).

F - 13 : RESULTATS DIVERS.

Compte-tenu de ce qui précède, notamment de F-12, on prouve facilement l'analogue des propositions D-3, D-4, D-6, et D-9.

F - 14 : FORMULE DE ITO.

La formule indiquée en E-2 peut être considérée comme associée à des processus continus à gauche. Plus précisément :

On se donne les hypothèses indiquées en E-2 ; de plus, au lieu de s'interesser au processus $(V_t)_{t\in T}$, *on considère un processus* $(W_t)_{t\in T}$ *différence de deux processus croissants continus à gauche. On a alors, pour tout élément t de T :*

$$F(W_t , M_t) \underbrace{=}_{P\text{-}p.s.} F(W_o , M_o) + \int_{\Omega\times[o,\, t[} F^{1,0}(W_u , M_u) \cdot dW_u$$

$$+ \int_{\Omega\times[o,\, t[} F^{0,1}(W_u , M_u) \cdot dM_u + \frac{1}{2} \int_{\Omega\times[o,\, t[} F^{0,2}(W_u , M_u) \cdot dA_u$$

$$+ \sum_{o\leq s<t} \left[F(W_{s+} , M_s) - F(W_s , M_s) - (W_{s+} - W_s) \cdot F(W_s , M_s)\right]$$

En effet, compte-tenu de F-10, ceci équivaut à E-2.

2 DECOMPOSITION DE DOOB-MEYER D'UNE QUASI-MARTINGALE

A - GENERALITES

A - 1 : INTRODUCTION.

Le but de ce chapitre est de donner une démonstration de l'existence et de l'unicité d'une décomposition de Doob-Meyer pour une quasi-martingale, démonstration qui nous semble nettement plus simple que les démonstrations antérieures.

Dans [22], Rao prouve l'existence d'une telle décomposition en utilisant le théorème d'unicité pour la décomposition d'une surmartingale donné par Meyer dans [19]. (cf., aussi, OREY : [23']).

La méthode proposée ici utilise essentiellement la fonction x associée à un processus (X_t), simplement additive et définie sur une sous-algèbre de la tribu des prévisibles par $x(A \times]s, t]) = E[1_A \cdot (X_t - X_s)]$. Cette fonction a été introduite par C. Doleans-Dade dans [7] mais son rôle y était beaucoup moins fondamental. L'étape cruciale de cette méthode est la caractérisation simple du processus croissant naturel associé à cette fonction quand x est une mesure positive (théorème B-2).

Une simplification par rapport aux méthodes antérieures réside, entre autres, dans le fait que la caractérisation du théorème B-2 donne immédiatement l'unicité du processus croissant naturel.

Bien entendu, cette étude donne lieu à l'énoncé de divers résultats intermédiaires intéressants en eux-mêmes.

Au paragraphe A, on donne les notations et hypothèses générales.

Au paragraphe B, on obtient la décomposition de Meyer-Doob de (X_t) quand la fonction x associée comme indiqué ci-dessus est σ-additive.

Au paragraphe C, on définit de façon nouvelle et on étudie les processus "croissants naturels" de [19].

Au paragraphe D, on prouve d'une part qu'une quasi-martingale arrêtée à un temps d'arrêt σ est encore une quasi-martingale, d'autre part, qu'une quasi-martingale uniformément bornée et continue à droite est associée à une fonction x σ-additive (ce qui permet d'utiliser le paragraphe B). On en déduit la décomposition générale d'une quasi-martingale.

Au paragraphe E, on précise la liaison entre les résultats des paragraphes antérieurs et ceux de Meyer et Rao.

Au paragraphe F, on donne un contre-exemple qui montre que la mesure stochastique définie dans le premier chapitre peut ne pas être σ-additive même si la fonction x évoquée ci-dessus l'est.

Au paragraphe G, on redémontre, à l'aide, exclusivement, des résultats antérieurs et d'un lemme de Rao (G-1), l'équivalence entre processus naturel et processus prévisible ainsi que divers résultats associés (conditions pour qu'un processus naturel soit à trajectoires continues et décomposition d'un processus naturel notamment). Evidemment, certaines parties de ce paragraphe peuvent être simplifiées si on utilise les théorèmes généraux de section ou projection (cf. [5]) ou si on utilise les résultats du chapitre 1.

Enfin, on a choisi une rédaction qui

- d'une part, permet dans une large mesure une lecture des divers paragraphes indépendamment les uns des autres et indépendamment du chapitre 1 ; ceci donne lieu à quelques répétitions dans les détails des démonstrations.
- d'autre part, s'étend aisément au cas où l'on considère des processus à valeurs vectorielles.

A - 2 : NOTATIONS ET DONNEES GENERALES.

Pour toute cette étude on se donne :

- *un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *On note* $\mathcal{F}^{0}$ *la tribu engendrée par les ensembles de mesure P-nulle de* $\mathcal{F}$.
- *une famille croissante* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *contenant toutes* $\mathcal{F}^{0}$ *(notons qu'on ne suppose pas la famille* $(\mathcal{F}_t)$ *continue à droite).*
- *un intervalle T de* $\mathbb{R}$ *: pour alléger la présentation et retrouver le formalisme traditionnel, on suppose* $T = [0, \infty[$.

On pose $\Omega' = (\Omega \times (T \setminus \{0\}))$ *et* $T' = T \setminus \{0\}$.

On désigne par $\mathcal{A}'$ *l'anneau des parties de* Ω' *engendré par les "rectangles"* $(H \times]s, t])$ *où* (s, t) *est un couple d'éléments de T avec* $s < t$ *et H est un élément de* $\mathcal{F}_s$.

Par convention, si A est la partie vide de T, on pose :

$$\inf \{t : t \in A\} = \infty$$

Quand on parlera de processus, ce sera toujours par rapport à la base $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$.

Si f est un élément de $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *on considèrera souvent le processus* $E(f \mid \mathcal{F}_{t-})$ *(martingale par rapport aux tribus* $\mathcal{F}_{t-}$*) : il sera toujours entendu que* $E(f \mid \mathcal{F}_{t-})$ *désigne une* <u>*modification continue à gauche*</u> *de la "martingale"* $E(f \mid \mathcal{F}_{t-})$.

A - 3 : DEFINITION. (cf. 1-A-9)

Soit $(X_t)_{t \in T}$ *un processus tel que, pour tout élément t de T,* X_t *appartient à* $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *On pose :* $\Phi((X_t)) = x$ = *fonction réelle simplement additive définie sur* $\mathcal{A}'$ *par :*

$$\Phi((X_t))\,(H \times]s, t]) = x(H \times]s, t]) = E[1_H \cdot (X_t - X_s)]$$

pour tout couple (s, t) d'éléments de T avec $s < t$ *et tout élément H de* $\mathcal{F}_s$.

On vérifie immédiatement que ceci définit bien une fonction simplement additive sur $\mathcal{A}'$ et que $\Phi((X_t)) = 0$ si et seulement si (X_t) est une martingale (cf. 1-A-9).

Si $\Phi((X_t))$ est σ-additive, par abus de langage, on désignera encore par $\Phi((X_t))$ son prolongement au δ-anneau engendré par $\mathcal{A}'$.

A - 4 : LEMME.

Le σ-anneau $\mathcal{F}'$ engendré par $\mathcal{A}'$ est la tribu des prévisibles.

Ce lemme se vérifie comme en 1-A.

A - 5 : DEFINITION.

Soit σ un temps d'arrêt. On désigne par $\mathcal{F}_{\sigma-}$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_0$ et par les ensembles de la forme $(E \cap [\sigma > t])$ pour $t \in T$ et $E \in \mathcal{F}_t$.

B - DECOMPOSITION DE (X_t) SI $x = \Phi((X_t))$ EST σ-ADDITIVE

B - 1 : LEMME.

Soit t un élément de T. Soit $(f_n)_{n>o}$ une suite d'éléments de $L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ qui converge vers 0 en moyenne. Pour tout n, soit g_n une modification continue à gauche de la "martingale" $E(f_n \mid \mathcal{F}_{u-})$. Alors, il existe une sous-suite (g'_n) extraite de (g_n) telle que, pour P-p.s. toute trajectoire, la suite de processus $(g'_n)_{n>o}$ converge simplement vers 0.

Preuve :

Le processus (g_n) continu à gauche étant une martingale par rapport aux tribus $\mathcal{F}_{u-}$, on peut appliquer l'inégalité fondamentale des martingales, soit :

$\forall k > 0 \qquad P\left[A(n, k)\right] \leq \frac{1}{k} \cdot E\left[|f_n|\right]$

si $A(n, k) = \{\omega : \sup_{u \leq t} |g_n(u, \omega)| \geq \frac{1}{k}\}$

Soit (f'_n) une sous-suite extraite de (f_n) telle que $E\left[|f'_n|\right] \leq 2^{-n}$; soient (g'_n) et $A'(n, k)$ les sous-suites de (g_n) et $A(n, k)$ associées.

Soit $B(n, k) = \bigcup_{q \geq n} A'(q, k)$ et $C = \bigcup_{k>0} \{\bigcap_{n>0} B(n, k)\}$

On a $P\left[B(n, k)\right] \leq \frac{2}{k} \cdot 2^{-n}$ d'où $P(C) = 0$

Si $\omega \notin C$, $\forall k > 0$, $\exists n$ tel que $\omega \in \left[\Omega \setminus B(n, k)\right]$ ce qui signifie que la suite de fonctions de t définie par $h_n(t) = g'_n(t, \omega)$ converge uniformément vers 0 donc, à fortiori, $g'_n(t, \omega)$ converge simplement vers 0 en dehors de $(C \times T)$.

B - 2 : THEOREME.

Soit a une mesure positive définie sur la tribu des prévisibles qui ne charge pas les processus évanescents (c'est-à-dire les processus indistinguables de 0).

Alors il existe un processus (A_t), unique à l'indistinguabilité près, croissant continu à droite intégrable tel que $A_0 = 0$ et tel que, pour tout élément t de T et pour tout élément H de $\mathcal{F}_t$, on ait :

$$\text{(i)} \qquad E\left[1_H \cdot A_t\right] = \int_{]0,\, t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \cdot da$$

cette dernière intégrale étant une intégrale de Lebesgue ordinaire d'une modification continue à gauche (et donc prévisible) de la "martingale" $E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-})$ (martingale par rapport aux tribus $\mathcal{F}_{u-}$).

Preuve :

1°) Indiquons d'abord que le processus (A_t) est le processus naturel au sens de [19] associé à a (cf. E-5 ci-après).

2°) L'unicité de (A_t) à une modification près se déduit immédiatement de la formule (i). On en déduit l'unicité à l'indistinguabilité près puisque (A_t) est continu à droite.

3°) Pour tout élément t de T et tout élément H de $\mathcal{F}$, soit $v_t(H) = \int_{]0,\, t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \,.\, da$. La fonction $v_t(.)$ est définie et σ-additive sur $\mathcal{F}$ (théorème de convergence dominée et lemme B-1). On peut donc poser $V_t = \frac{dv_t}{dP}$ et ceci définit, à une modification près, un processus croissant continu à droite en moyenne. Soit (A_t) une modification continue à droite de (V_t).

4°) Si Y appartient à $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on a :

$$\int_{]0,\, t]} E(Y \mid \mathcal{F}_{u-}) \,.\, da = \int_\Omega Y \,.\, v_t(d\omega)$$

En effet, cette égalité est satisfaite pour Y fonction indicatrice (par définition de v_t) et se conserve par linéarité et convergence dominée (lemme B-1).

5°) (A_t) est adapté puisque :

$$v_t(H) = \int_{]0,\, t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \,.\, da = \int_{]0,\, t]} E(E(1_H \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_{u-}) \,.\, da$$

$$= \int_\Omega E(1_H \mid \mathcal{F}_t) \,.\, v_t\,(d\omega) \text{ (d'après le 4°).}$$

6°) (A_t) satisfait à la condition (i) puisque

$$E[1_H \,.\, A_t] = v_t(H) = \int_{]0,\, t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \,.\, da$$

B - 3 : THEOREME.

Soit (X_t) un processus.

Soit $x = \Phi((X_t))$ (cf. A-3).

On suppose que x est σ-additive. Alors il existe un processus (A_t) unique qui soit différence de deux processus croissants, tel que $A_0 = 0$ et tel que, pour tout élément H de $\mathcal{F}_t$,

$$E[1_H \cdot (A_t - A_s)] = \int_{]s,\, t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \cdot dx$$

Le processus $(X_t - A_t = M_t)$ est alors une martingale.

Preuve :

x ne charge pas les processus évanescents puisque $P(C) = 0$ implique $(C \times T') \in \mathcal{F}'$ et $x[A \cap (C \times T')] = 0$ pour tout élément A de $\mathcal{F}'$.

La fonction x étant σ-additive, on peut poser $x = b - c$ où b et c sont des mesures positives. Soient B et C les processus croissants associés à b et c comme indiqués au théorème B-2. Si on pose $A_t = B_t - C_t$, on vérifie immédiatement que A_t satisfait aux conditions du théorème B-3. Notons que (A_t) est unique mais (B_t) et (C_t) ne le sont évidemment pas. Toutefois, on peut choisir (B_t) et (C_t) de façon unique si on impose $E[B_t + C_t]$ minimum pour tout t (ce qui correspond à la décomposition "canonique" de x en deux mesures positives "minimales" b et c).

C - PROCESSUS APPARTENANT A $\mathcal{C}$ ("INTEGRABLES NATURELS")

C - 1 : LEMME.

Soit m une fonction positive définie et simplement additive sur $\mathcal{A}'$ et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) quel que soit t élément de T, $\lim\limits_{s \downarrow t} m(\Omega \times]t, s]) = 0$

(ii) pour toute suite $(A_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ décroissant vers ∅,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{m}(A_n \times T') = 0 \text{ si } \tilde{m}(B) = \underbrace{\operatorname{Sup}}_{C \in \mathcal{A}',\ C \subset B} m(C)$$

Alors m est σ-additive sur $\mathcal{A}'$.

Preuve :

La même que celle indiquée en 1-C-2 à des modifications évidentes près.

C - 2 : LEMME.

Soit (A_t) un processus, défini à une modification près, croissant et continu à droite en moyenne et tel que $\operatorname{Sup.}_{t \in T} E[A_t] < + \infty$.

Soit $a = \Phi((A_t))$.

Alors, a est σ-additive et bornée sur $\mathcal{A}'$ donc a se prolonge (de façon unique) en une mesure sur $\mathcal{F}'$.

Preuve :

Le lemme se déduit facilement de 1-D-4 mais il est plus simple de le prouver directement.

D'une part a est bornée puisque $\operatorname{Sup.}_{t \in T} E[A_t] < + \infty$.

D'autre part, il suffit de vérifier les conditions (i) et (ii) du lemme C-1. La condition (i) est la continuité à droite en moyenne. On peut poser $A_\infty = \operatorname{Sup.}_{t \in T} A_t$ (borne supérieure dans $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$) d'après la condition $\operatorname{Sup.}_{t \in T} E[A_t] < + \infty$ et A_∞ appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Si on pose $\tilde{a}(B) = \operatorname{Sup.}_{C \in \mathcal{A}', C \subset B} a(C)$, on vérifie immédiatement que $\tilde{a}(H \times T') \leqslant E[1_H \cdot A_\infty]$ d'où on déduit la condition (ii).

C - 3 : NOTATION.

Pour alléger les notations on désignera par $\mathcal{C}$ l'ensemble des processus (A_t) croissants, continus à droite et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $A_0 = 0$ et $\operatorname{Sup.}_{t \in T} E[A_t] < + \infty$

(ii) Si $a = \Phi((A_t))$, pour tout élément t de T et tout élément H de $\mathcal{F}_t$,

$$E[1_H \cdot A_t] = \int_{]0,\ t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \cdot da$$

C - 4 : REMARQUE.

On verra en E-5 que les éléments de $\mathcal{C}$ *sont les processus "croissants intégrables naturels" au sens de [19]. Notons également que le processus* (A_t) *obtenu au théorème B-3 est la différence de deux éléments de* $\mathcal{C}$.

C - 5 : THEOREME (UNICITE).

Soient (A_t) *et* (B_t) *deux éléments de* $\mathcal{C}$. *Si* $(A_t - B_t)$ *est une martingale,* (A_t) *et* (B_t) *sont indistinguables.*

Preuve :

Soient $a = \Phi((A_t))$ et $b = \Phi((B_t))$. On a $a = b$ puisque M_t est une martingale. La condition C-3-(ii) implique alors $E[1_H . A_t] = E[1_H . B_t]$. Donc (A_t) et (B_t) sont égaux à une modification près ; ils sont donc indistinguables puisque continus à droite.

C - 6 : LEMME.

Soit (A_t) *un processus appartenant à* $\mathcal{C}$. *Soit* σ *un temps d'arrêt. Soit* (B_t) *le processus défini par* $B_t = A_{t\wedge\sigma}$ *et soit* $b = \Phi(B_t)$. *On a alors, pour tout ensemble prévisible K,* $b(K) = a(K \cap [o,\sigma])$ *et* (B_t) *appartient à* $\mathcal{C}$.

Preuve :

1°) Considérons d'abord le cas où σ est un temps d'arrêt étagé.

Soit H un élément de $\mathcal{F}_s$ et $s < t$. On a :

$(]s, t]) \cap [o,\sigma] =](\sigma\wedge s), (\sigma\wedge t)]$ donc

$a((H \times]s, t]) \cap [o,\sigma]) = E[(A_{\sigma\wedge t} - A_{\sigma\wedge s}) . 1_H] = b(H \times]s, t])$.

On en déduit que, pour tout élément K de $\mathcal{A}'$, $b(K) = a(K \cap [o, \sigma])$ ce qui montre que b admet un prolongement fortement σ-additif à la tribu des prévisibles et que ce prolongement b est tel que, pour tout ensemble prévisible K, $b(K) = a(K \cap [o,\sigma])$.

On en déduit que, si on pose $\alpha = \int_{]o,\, t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \,.\, db$, on a : $\alpha = \int_{]o,\, t] \cap [o,\, \sigma]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \,.\, da$ ce qui donne $\alpha = E(1_H \,.\, A_{t\wedge\sigma})$ (vérification directe facile) ce qui montre que (B_t) appartient à $\mathcal{C}$.

2°) Si σ est un temps d'arrêt quelconque, on sait qu'il existe une suite $(\sigma(n))_{n>o}$ de temps d'arrêt étagés qui décroît vers σ. Soit $B_t^n = A_{t\wedge\sigma(n)}$ et $b^n = \Phi(B_t^n)$. Le 1°) et la σ-additivité de a impliquent que, pour tout ensemble H appartenant à $\mathcal{F}_s$, si $K = H \times]s,\, t]$,

$$a(K \cap [o,\sigma]) = \lim_{n\to\infty} a(K \cap [o,\sigma(n)]) = \lim_{n\to\infty} b^n(K)$$

$$= \lim_{n\to\infty} E[(A_{t\wedge\sigma(n)} - A_{s\wedge\sigma(n)}) \,.\, 1_H] = E[(A_{t\wedge\sigma} - A_{s\wedge\sigma}) \,.\, 1_H]$$

(théorème de convergence dominée) $= b(K)$.

On en déduit que, si on pose

$\alpha = \int_{]o,\, t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \,.\, db$, on a

$$\alpha = \int_{]o,\, t] \cap [o,\, \sigma]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \,.\, da = \lim_{n\to\infty} \int_{]o,\, t] \cap [o,\sigma(n)]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}).da$$

$= \lim_{n\to\infty} E[1_H \,.\, A_{t\wedge\sigma(n)}]$ (d'après le 1°))

$= E[1_H \,.\, A_{t\wedge\sigma}]$ c. q. f. d.

D - DECOMPOSITION D'UNE QUASI-MARTINGALE

D - 1 : LEMME ET DEFINITION.

Soit (X_t) un processus tel que, pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Soit $x = \Phi((X_t))$. Soit v la variation totale de x.

On pose :

$$H = \text{Sup.} \sum_{k=1}^{n} E(|X_{t(k)} - E(X_{t(k+1)} \mid \mathcal{F}_{t(k)})|)$$

cette borne supérieure étant prise pour l'ensemble des familles finies $(t(k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ *croissantes d'éléments de T.*

On a alors $H = v(\Omega')$

Si H est finie, on dit que (X_t) *est une quasi-martingale (cf.* [22]*).*

<u>Preuve</u> :

1°) Soit $t(k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie croissante d'éléments de T. Pour tout k, soit A_k le domaine où $X_{t(k)} \geqslant E[X_{t(k+1)} \mid \mathcal{F}_{t(k)}]$. Soit $A = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} (A_k \times]t(k), t(k+1)])$ et $B = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} ((\Omega\setminus A_k) \times]t(k), t(k+1)])$.

On a : $\sum_{k=1}^{n} E(|X_{t(k)} - E(X_{t(k+1)} \mid \mathcal{F}_{t(k)})|)$

$= \sum_{k=1}^{n} E([X_{t(k)} - E(X_{t(k+1)} \mid \mathcal{F}_{t(k)})] \cdot [1_{A_k} - 1_{B_k}])$

$= \sum_{k=1}^{n} E[(X_{t(k)} - X_{t(k+1)}) \cdot (1_{A_k} - 1_{B_k})] = x(A) - x(B)$

On en déduit $H \leqslant v(\Omega')$

2°) Réciproquement, soit A un élément de $\mathcal{A}'$. On a $A = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} (A_k \times]t(k), t(k+1)])$ où $(t(k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille finie croissante d'éléments de T et, pour tout k, A_k appartient à $\mathcal{F}_{t(k)}$. Le calcul effectué au 1°) montre que :

$\sum_{k=1}^{n} E(|X_{t(k)} - E(X_{t(k+1)} \mid \mathcal{F}_{t(k)})|) \geqslant |x(A) - x(B)|$ avec $B = \Omega\setminus A$. On en déduit $v(\Omega') \leqslant H$.

D - 2 : LEMME.

Soit Ω' un ensemble et $\mathcal{A}'$ un anneau de parties de Ω'. Soit x une fonction réelle définie bornée et simplement additive sur $\mathcal{A}'$. Pour tout élément B de $\mathcal{A}'$, on pose $y(B) = \operatorname{Sup.}_{A \in \mathcal{A}',\, A \subset B} [x(A)]^+$. Soit $(A_n)_{n>0}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}'$ telle que, pour tout élément A fixé de $\mathcal{A}'$, $\lim_{n\to\infty} x(A \cap A_n) = 0$. Alors, $\lim_{n\to\infty} y(A_n) = 0$.

Preuve :

On pose, évidemment, $[x(A)]^+ = \operatorname{Sup.} \{0, x(A)\}$.

Le lemme énoncé est un lemme élémentaire de théorie de la mesure que nous allons redémontrer.

On raisonne par l'absurde ; on suppose donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n)_{n>0}$ décroissante d'éléments de $\mathcal{A}'$ telle que, pour tout élément A de $\mathcal{A}'$, $\lim_{n\to\infty} x(A \cap A_n) = 0$ et telle que, pour tout n, $y(A_n) \geqslant \varepsilon$.

On va construire une application strictement croissante f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une suite (B_n) d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}'$ telle que, pour tout n, $x(B_n) \geqslant \varepsilon/2$ et $B_n \subset (A_{f(n)} \setminus A_{f(n+1)})$. Raisonnons par récurrence ; on suppose donc connus $f(n+1)$ et B_n. Puisque $y(A_{f(n+1)}) \geqslant \varepsilon$, il existe un élément C de $\mathcal{A}'$ contenu dans $A_{f(n+1)}$ tel que $x(C) \geqslant \frac{3}{4}\,\varepsilon$; soit $f(n+2)$ un entier tel que $|x(C \cap A_{f(n+2)})| \leqslant \frac{1}{4}\,\varepsilon$ et soit $B_{n+1} = C \setminus A_{f(n+2)}$. On a $B_{n+1} \subset (A_{f(n+1)} \setminus A_{f(n+2)})$ et $x(B_{n+1}) \geqslant (\frac{3}{4} - \frac{1}{4})\,\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$. Ceci achève la construction par récurrence ; or, cette construction implique :
$x(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) \geqslant n \,.\, \varepsilon/2$ ce qui contredit le fait que x est bornée.

D - 3 : PROPOSITION.

Soit $(X_t)_{t\in T}$ une quasi-martingale continue à droite en probabilité telle que, pour tout élément t de T, la famille (X_σ) est équi-intégrable quand σ parcourt l'ensemble des temps d'arrêt étagés plus petit que t.

Soit $x = \Phi(\,(X_t)_{t\in T})$. Alors x est σ - additive (donc on peut appliquer le théorème B-3).

Preuve

Soit v la variation totale de x sur $\mathcal{A}'$. Puisque (X_t) est une quasi-martingale, $v(\Omega') < +\infty$. On en déduit que $\lim_{s\to\infty, t\to\infty} v(]t,s]) = 0$ (sinon on construirait une suite croissante $(t_n)_{n>0}$ d'éléments de T et une suite associée $(A_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{A}'$ telles que, pour tout n, $A_n \subset (\Omega \times]t_n, t_{n+1}])$ et $|x(A_n)| > \varepsilon$).

Il suffit donc de prouver que v est σ-additive en restriction au domaine $\Omega \times]0,t]$ où t est un élément fixé de T. Pour cela, il suffit de vérifier que v satisfait aux conditions (i) et (ii) du lemme C-1. Or la condition (i) découle des hypothèses compte tenu du lemme D-2.

Soit $\varepsilon>0$ et t un élément fixé de T. Soit $(C_k)_{1\leq k\leq n}$ une partition de $(\Omega]0,t])$, partition constituée d'éléments de $\mathcal{A}'$ et telle que $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \leq \varepsilon$ si $v(C_k)-|x(C_k)| = \varepsilon_k$; quitte à considérer une partition plus fine, on peut supposer que, pour tout k, $C_k = A_k \times]t_k, t'_k]$ avec A_k élément de $\mathcal{F}_{t_k}$. Soit $\eta>0$ tel que $P(H)<\eta$ implique, pour tout temps d'arrêt étagé σ, $E(|X_\sigma \cdot 1_H|) \leq \frac{\varepsilon}{2n}$. Soit H un élément de $\mathcal{F}$ tel que $P(H)<\eta$. On va prouver que, si R est un élément de $\mathcal{A}'$ contenu dans $(H \times]0,t])$, $v(R) \leq 2\varepsilon$ ce qui impliquera que v satisfait à la condition C-1-(ii). Pour cela, on se propose de prouver que, pour tout k, $v(R\cap C_k) \leq \varepsilon_k + \frac{\varepsilon}{n}$.

On fixe donc k et on pose $B = R\cap C_k$. Soit σ un temps d'arrêt étagé compris entre t_k et t'_k et tel que $B \subset (]\sigma, t'_k])$ (on peut prendre, par exemple, $\sigma = t'_k \wedge (\inf. \{t : (t,\omega) \in B\}))$. Soit $D =]\sigma, t'_k]$. Puisque $B \subset D \subset C_k$, on a :

$$v(B) + |x(C_k \setminus D)| \leq v(C_k) \leq \varepsilon_k + |x(C_k)|$$

soit
$$\begin{aligned} v(B) &\leq \varepsilon_k + |x(C_k)| - |x(C_k) - x(D)| \\ &\leq \varepsilon_k + |x(D)| \\ &\leq \varepsilon_k + E(|X_{t(k)} - X_\sigma|) \\ &\leq \varepsilon_k + \frac{\varepsilon}{n} \end{aligned}$$

c.q.f.d.

D - 4 : REMARQUE.

Si $(X_t)_{t \in T}$ est une surmartingale positive (ce qui est notamment le cas si (X_t) est une martingale locale positive) (X_t) est nécessairement une quasi-martingale ce qui permet, éventuellement, d'appliquer la proposition D-3 ; dans ce cas la fonction $x = \Phi((X_t)_{t \in T})$ est négative.

D - 5 : NOTATION.

Soit σ un temps d'arrêt étagé. Si $\sigma = \sum_{k=1}^{n} t_k \cdot 1_{A(k)}$, on désigne par $\mathcal{F}_\sigma$ la tribu engendrée par les éléments B de $\mathcal{F}$ tels que $B = C \cap A(k)$ avec C éléments de $\mathcal{F}_{t_k}$ pour $1 \leq k \leq n$.

D - 6 : LEMME. (cf. 1-A-8 et 9)

Soit (X_t) un processus tel que, pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Soient σ et σ' deux temps d'arrêt étagés avec $\sigma < \sigma'$. Soit $x = \Phi((X_t))$. On a alors :

$$E[E(X_{\sigma'} \mid \mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma] = E[X_{\sigma'} - X_\sigma] = x(]\sigma, \sigma'])$$

Preuve :

La première égalité est immédiate.

Soit y la fonction à valeurs dans L_1 définie et simplement additive sur $\mathcal{A}'$ et telle que $y]\sigma, \sigma'] = X_{\sigma'} - X_\sigma$ pour tout couple (σ, σ') de temps d'arrêt étagés avec $\sigma < \sigma'$: on vérifie immédiatement que ceci définit bien une fonction simplement additive sur $\mathcal{A}'$. (Notons que y est la "mesure stochastique" définie dans le premier chapitre). On a

$x(]\sigma,\sigma']) = E[y(]\sigma, \sigma'])$ si $]\sigma, \sigma'] = A \times]t, t']$ (par définition de x) ; on en déduit la même égalité pour tout couple (σ, σ') de temps d'arrêt étagés avec $\sigma < \sigma'$.

D - 7 : LEMME. (cf. OREY : [23'])

Soit (X_t) une quasi-martingale continue à droite. Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ une suite de temps d'arrêt étagés décroissant vers σ. Alors la suite de variables aléatoires $(X_{\sigma(n)})_{n>0}$ converge vers X_σ dans L_1 (et par trajectoires).

Preuve :

La suite $(X_{\sigma(n)})$ converge P-p.s. vers X_σ d'après la continuité à droite de (X_t) ; il suffit donc de prouver qu'elle est équi-intégrable.

Soit ε > 0. Puisque (X_t) est une quasi-martingale, il existe q tel que $n \geq q$ implique $E[|X_{\sigma(n)} - E(X_{\sigma(q)} | \mathcal{F}_{\sigma(n)})|] \leq \varepsilon$ (sinon, on pourrait construire une suite $(\sigma'(n))$ décroissante de temps d'arrêt telle que $\sum_{n>0} ||X_{\sigma'(n)} - E(X_{\sigma'(n-1)} | \mathcal{F}_{\sigma'(n)})||_1 = +\infty$, ce qui contredirait le fait que (X_t) est une quasi-martingale d'après le lemme D-1.

Soit $M_n = E(X_{\sigma(q)} | \mathcal{F}_{\sigma(n)})$ pour $n \geq q$: ceci définit une "martingale renversée" par rapport à la suite décroissante de tribus $(\mathcal{F}_{\sigma(n)})_{n\geq q}$, la suite $(M_n)_{n\geq q}$ est donc uniformément intégrable ; il existe donc η tel que $A \in \mathcal{F}$ et $P(A) \leq \eta$ implique

$$E[1_A \cdot |M_n|] \leq \varepsilon \ (\forall n \geq q).$$

Ce qui implique :

$$E\left[1_A \cdot |X_{\sigma(n)}|\right] \leq 2\varepsilon$$

Or, ceci montre que la suite $(X_{\sigma(n)})_{n>o}$ est équi-intégrable.

D - 8 : LEMME.

Soit (X_t) une quasi-martingale continue à droite. Soit σ un temps d'arrêt. Alors $(X_{t\wedge\sigma})$ est une quasi-martingale.

Preuve :

Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ une suite de temps d'arrêt étagés décroissants vers σ. Soient $Y_t = X_{t\wedge\sigma}$ et $Y_t^n = Y_{t\wedge\sigma(n)}$.

Soient $y = \Phi((Y_t))$ et $y^n = \Phi((Y_t^n))$. D'après le lemme D-6, $X_{t\wedge\sigma(n)}$ converge dans L_1 vers $X_{t\wedge\sigma}$ donc on a $y(B) = \lim_{n\to\infty} y^n(B)$ pour tout élément B de $\mathcal{A}'$.

Or, $\forall n$, $\sup_{B\in\mathcal{A}'} |y^n(B)| < \sup_{B\in\mathcal{A}'} |x(B)| = K$ donc $\sup_{B\in\mathcal{A}'} |y(B)| < K$ donc (Y_t) est une quasi-martingale.

D - 9 : THEOREME.

Si (X_t) est une quasi-martingale continue à droite, il existe deux éléments de $\mathcal{C}$, (A_t) et (B_t) et une martingale locale (M_t) tels que $X_t = A_t - B_t + M_t$. De plus (M_t) est unique à l'indistinguabilité près.

Preuve :

Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ la suite de temps d'arrêt défini par $\sigma(n) = n\wedge\inf\{t : |X_t| > n\}$. La suite $\sigma(n)$ croît vers l'infini, sinon $x = \Phi((X_t))$ ne serait pas bornée (cf. 1-B-4). Soit (X_t^n) la quasi-martingale (cf. D-7) définie par $X_t^n = X_{t\wedge\sigma(n)}$. D'après D-3, B-3 et 1-D-4, on a $X_t^n = M_t^n + C_t^n$ où M_t^n est une martingale et C_t^n la différence de deux éléments de $\mathcal{C}$. Mais ceci implique : $M_t^n + C_t^n = M_{t\wedge\sigma(n)}^{n+1} + C_{t\wedge\sigma(n)}^{n+1}$ donc $C_t^n - C_{t\wedge\sigma(n)}^{n+1}$, qui est la différence de deux éléments de $\mathcal{C}$, (cf. C-6), est une martingale ce qui implique $M_t^n = M_{t\wedge\sigma(n)}^{n+1}$ à l'indistinguabilité près (théorème C-5). On peut donc définir un processus (M_t) par $M_{t\wedge\sigma(n)} = M_t^n$ et ce processus est une martingale locale.

De même, si $C_t^n = A_t^n - B_t^n$, les processus (A_t^n) et (B_t^n) appartenant à $\mathscr{C}$ et étant tels que $E[A_\infty^n]$ soit minimum, on définit deux éléments de $\mathscr{C}$, (A_t) et (B_t), en posant $A_t^n = A_{t\wedge\sigma(n)}$ et $B_t^n = B_{t\wedge\sigma(n)}$. $((A_t)$ est intégrable parce que, $\forall t$ et $\forall n$, $E[A_t^n] \leq \sup_{B \in \mathscr{D}'} |x(B)| < + \infty$.).

Enfin, l'unicité de (M_t) se prouve facilement à l'aide du théorème C-5.

E - LIAISON AVEC RAO [22] ET MEYER [19]

E - 1 : REMARQUE.

Il semble que RAO utilise implicitement le fait qu'une quasi-martingale continue à droite est continue à droite en moyenne. Ce résultat se déduit immédiatement du lemme D-6.

E - 2 : PROPOSITION.

Une quasi-martingale continue à droite en moyenne admet une modification cadlag.

Preuve :

Dans [22] p. 86, ce résultat est prouvé à l'aide d'une inégalité analogue à celle des martingales. On peut aussi prouver ce résultat en reprenant la démonstration indiquée en 1-B-3 (avec des modifications évidentes).

E - 3 : REMARQUE.

Au paragraphe D, la décomposition d'une quasi-martingale a été obtenue par une méthode directe. On peut évidemment utiliser une méthode plus proche de celle de RAO, c'est-à-dire commencer par montrer qu'une quasi-martingale est la somme d'une martingale et de la différence de deux potentiels, tout en utilisant les techniques proposées ci-dessus. Pour celà, si (X_t) est une quasi-martingale et si $x = \Phi((X_t))$, on pose

$y(B) = \underset{C \in \mathcal{A}', \ C \subset B}{\text{Sup.}} [x(C)]^+$ et $z(B) = \underset{C \in \mathcal{A}', \ C \subset B}{\text{Sup.}} [x(C)]^-$ pour toute partie B de $\Omega \times T$. Pour tout élément t de T et tout élément A de $\mathcal{F}_t$, on pose $\hat{y}_t(A) = y(A \times]t, \infty))$ et on vérifie que ceci définit une fonction σ-additive sur $\mathcal{F}_t$ dominée par P. On peut donc poser $Y_t = \frac{d}{dP} \hat{y}_t$; on vérifie que (Y_t) est un potentiel. On construit (Z_t) de façon analogue et on vérifie que $(X_t + Y_t - Z_t)$ est une martingale. Enfin, on décompose (Y_t) et (Z_t) en utilisant 1-D-3 et 2-B-2.

Cette méthode ne donne pas la proposition D-3, mais permet d'obtenir exactement la décomposition obtenue par RAO en [22]-2-3 p. 89. Notons que, dans cette décomposition, seul B(t) est unique contrairement à ce qui semble être énoncé par RAO.

Notons également que les résultats indiqués par RAO supposent implicitement que toutes les martingales locales considérées sont intégrables (au sens, $\forall t$, $E[|M_t|] < +\infty$).

E - 4 : PROPOSITION.

Soit (A_t) un processus croissant intégrable. Soit $a = \Phi((A_t))$. Alors, si (Y_t) est un processus prévisible uniformément borné, pour tout couple (s, t) d'éléments de T avec s < t on a :

$$E\left[\int_{]s,\ t]} Y_u \cdot dA_u\right] = \int_{]s,\ t]} Y_u \cdot da$$

Preuve :

L'égalité indiquée est vérifiée pour $Y = 1_{H \times]s,\ t]}$ par définition de a ; elle est donc satisfaite pour tout processus prévisible uniformément borné puisque les deux membres de cette égalité sont linéaires en Y et que, dans ces deux membres, on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

E - 5 : COROLLAIRE.

Les éléments de $\mathcal{C}$ (cf. C-3 ci-dessus) sont les processus "croissants naturels intégrables" au sens de MEYER [19].

Preuve :

Ceci résulte immédiatement de [19] chapitre VII, D-18 et T-16 d'une part, et C-3 et E-4 ci-dessus d'autre part.

Notons que la preuve de T-16 de [19] utilise divers résultats intermédiaires. Il est donc intéressant d'en donner une preuve directe :

E - 6 : PROPOSITION.

Soit (M_t) une martingale uniformément bornée continue à droite et (A_t) un processus croissant intégrable adapté continu à droite. On a, pour tout élément t de T,

$$E\left[\int_{]0,\ t]} M_s \cdot dA_s\right] = E\left[M_t \cdot (A_t - A_0)\right]$$

Preuve :

Soit $T^* = (T \cap]0,\ t])$.

Soit $(T_n)_{n>0}$ une suite croissante de parties finies de T^* tel que $\bigcup_{n>0} T_n$ soit dense dans T^* et $t \in T_1$ et $0 \in T_1$. Si n est fixé, soit $(t(k))_{1 \leq k \leq q}$ la famille ordonnée des éléments de T_n et soit M^n le processus défini par

$$M^n = \sum_{k=1}^{q-1} M_{t(k+1)} \cdot 1_{]t(k),\ t(k+1)]}$$

La suite de processus $(M^n_t)_{n>0}$ converge vers le processus (M_t) (parce que (M_t) est continue à droite) ; si $\sup_{t,\omega} |M_t(\omega)| = K < +\infty$, les processus (M) et (M^n) sont dominés par le processus constamment égal à K :

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il suffit donc de prouver la formule annoncée pour les processus (M^n). Or :

$$E\left[\int_{]0,\, t]} M_s^n \cdot dA_s\right] = \sum_{k=1}^{q} E\left[M_{t(k+1)} \cdot (A_{t(k+1)} - A_{t(k)})\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{q} E\left[M_t \cdot (A_{t(k+1)} - A_{t(k)})\right]$$
$$= E\left[M_t \cdot (A_t - A_0)\right]$$

E - 7 : <u>REMARQUE</u>.

On a indiqué en A-2 que les tribus $(\mathcal{F}_t)$ n'étaient pas supposées continues à droite. Il faut toutefois préciser que la décomposition, obtenue en D-8, d'une quasi-martingale (X_t) sous la forme $X_t = A_t - B_t + M_t$ est la même si on remplace les tribus $(\mathcal{F}_t)$ par les tribus $(\mathcal{F}_{t+})$. En effet, soit $A'_t - B'_t + M'_t$ la décomposition obtenue quand on considère les tribus $(\mathcal{F}_{t+})$. Puisque A'_t et B'_t sont "naturels", on vérifie immédiatement que A'_t et B'_t sont $\mathcal{F}_{t-}$-mesurables si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ donc, à fortiori, A'_t et B'_t sont $\mathcal{F}_t$-mesurables. Le processus continu à droite (M_t), martingale locale par rapport aux tribus $(\mathcal{F}_t)$, est encore une martingale locale par rapport aux tribus $(\mathcal{F}_{t+})$ donc $(M_t) = (M'_t)$ à l'indistinguabilité près (théorème d'unicité C-5).

F - CONTRE-EXEMPLE (EN LIAISON AVEC LE PREMIER CHAPITRE)

F - 1 : <u>INTRODUCTION</u>.

Dans le premier chapitre, on a défini la notion de "mesure stochastique" x associée à un processus. Si (X_t) est un processus admettant x comme "mesure stochastique" on a, par définition, $\Phi((X_t)) = < 1_\Omega , x >$ en désignant $< 1_\Omega , \cdot >$ l'application de $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $\mathbb{R}$ définie par $< 1_\Omega , f > = E[f]$. Si x est une mesure stochastique, $\Phi((X_t))$ est donc σ-additive (et on peut appliquer le théorème B-3). Le but du contre-exemple qui suit est de montrer que la réciproque n'est pas exacte, c'est-à-dire que l'on peut avoir $\Phi((X_t))$ σ-additive sans que x soit une mesure stochastique. Pour celà, on construit une martingale ($\Phi((X_t)) = 0$ est évidemment σ-additive) qui n'est pas associée à une mesure stochastique. Plus précisémment :

On va donner un exemple de martingale (f_n), *à valeurs dans* L_1, *et uniformément intégrable, telle que* $\| \sum_{n>0} (f_{2n+1} - f_{2n}) \|_1 = + \infty$

F - 2 : CONSTRUCTION DU CONTRE-EXEMPLE.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ *un espace probabilisé. Soit a un réel strictement supérieur à 1. Soit* $(A_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{F}$ *avec* $A_0 = \Omega$ *et telle que, pour tout n,* $m(A_n) = a^{-n}$ *et* $A_{n+1} \subset A_n$. *Soit* $\mathcal{F}_n$ *la tribu engendrée par les ensembles* $(A_k)_{0\leq k\leq n}$.

Soit $(b_n)_{n>0}$ *une série convergente à termes réels positifs telle que, si on pose* $s_n = \sum_{k\geq n} b_k$, *on a* $\sum_{n>0} s_{2n} = + \infty$. *(On peut prendre, par exemple,* $b_n = (\frac{1}{n})^2$*).*

On pose $f = \sum_{n>0} b_n \cdot a^n \cdot 1_{A_n}$ *; cette fonction appartient à* $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, m)$. *Si on pose* $f_n = E(f| \mathcal{F}_n)$, *la martingale* (f_n) *répond à la question.*

Preuve :

On pose $B_n = A_{n-1} \setminus A_n$. On a

$$f_{2n} = \sum_{k=1}^{2n-1} b_k \cdot a^k \cdot 1_{A_k} + a^{2n} \cdot s_{2n} \cdot 1_{A_{2n}}$$

$$f_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} b_k \cdot a^k \cdot 1_{A_k} + a^{2n-1} \cdot s_{2n} \cdot (1_{A_{2n}} + 1_{B_{2n}})$$

Donc :

$$f_{2n} - f_{2n-1} = a^{2n-1} \cdot s_{2n}(a-1) \cdot 1_{A_{2n}} - a^{2n-1} \cdot s_{2n} \cdot 1_{B_{2n}}$$

D'où, si on pose $g = \sum_{n\geq 1} (f_{2n} - f_{2n-1})$, on a :

$$g = \sum_{n\geq 1} a^{2n-1} \cdot s_{2n} \cdot (a-1) \cdot \sum_{k\geq 2n+1} 1_{K_k} - \sum_{j\geq 1} s_{2j} \cdot a^{2j-1} \cdot 1_{B_{2j}}$$

$$g = \sum_{k\geq 3} \sum_{1\leq n\leq \frac{k-1}{2}} a^{2n-1} \cdot s_{2n} \cdot (a-1) \cdot 1_{B_k} - \sum_{j\geq 1} s_{2j} \cdot a^{2j-1} \cdot 1_{B_{2j}}$$

Soit, en décomposant en deux sommes suivant que k est pair ou impair :

$$g = \sum_{j\geq 1} 1_{B_{2j+1}} \left(\sum_{n=1}^{j} (a-1) \cdot a^{2n-1} \cdot s_{2n} \right) - a \cdot s_2 \cdot 1_{B_2}$$
$$+ \sum_{j\geq 2} 1_{B_{2j}} \left[\left(\sum_{n=1}^{j-1} (a-1) \cdot a^{2n-1} \cdot s_{2n} \right) - s_{2j} \cdot a^{2j-1} \right]$$

On a donc :

$$\|g\|_1 \geq \sum_{j\geq 1} m(B_{2j+1}) \cdot (a-1) \cdot s_{2j} \cdot a^{2j-1}$$
$$\geq \sum_{j\geq 1} a^{-2} \cdot (a-1)^2 \cdot s_{2j}$$
$$= +\infty$$

c. q. f. d.

G - NATUREL EQUIVAUT A PREVISIBLE

G - 1 : LEMME.

Soit $(B_t)_{t\in T}$ un processus croissant intégrable et continu à droite. Pour tout $n > o$, soit $(B_t^n)_{t\in T}$ le processus défini par :

$$B_t^n = E\left(B_{(k+1).2^{-n}} \mid \mathcal{F}_{t+}\right) \text{ si } k \,.\, 2^{-n} \leq t < (k+1).2^{-n}$$

Soit $\varepsilon > 0$; pour tout n, soit $\sigma(n)$ le temps d'arrêt défini par $\sigma(n) = \inf.\ \{t : B_n(t) - B(t) \geq \varepsilon\}$.

Soit $\sigma' = \underset{n>0}{\mathrm{Sup}}.\ \sigma(n)$. Pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe alors un $p(\varepsilon')$ tel que, pour $n > p(\varepsilon')$, $E[B_{\sigma'} - B_{\sigma(n)}] \geq \varepsilon \,.\, P[\sigma(n) < +\infty] - \varepsilon'$

Preuve :

Ce lemme est prouvé (modulo une modification évidente) au haut de la page 75 de [21]. Notons que RAO énonce un résultat légèrement plus fort qu'il ne semble pas démontrer : il y a en effet une ambiguité dans sa démonstration où n est à la fois fixe et variable.

G - 2 : LEMME ET DEFINITION.

Si σ est un temps d'arrêt, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout temps d'arrêt prévisible σ', $P[\sigma = \sigma'] = 0$

(ii) pour toute suite $(\sigma'(n))_{n>0}$ de temps d'arrêt croissant vers σ',

$$P\{[\sigma = \sigma'] \cap (\bigcap_{n>0} [\sigma'(n) < \sigma']) = 0$$

Si ces conditions sont satisfaites, on dit que σ est totalement inaccessible.

Preuve :

On a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i). Réciproquement, supposons (i) satisfait et soit $(\sigma'(n))_{n>0}$ une suite de temps d'arrêt croissant vers σ'.

Pour tout n, soit $\sigma''(n)$ le temps d'arrêt défini par $\sigma''(n) = \sigma'(n)$ si $\sigma'(n) < \sigma'$ et $\sigma''(n) = \infty$ si $\sigma'(n) = \sigma'$; la suite $(\sigma''(n))_{n>0}$ croît vers un temps d'arrêt prévisible σ'' tel que

$$\{[\sigma = \sigma'] \cap (\bigcap_{n>0} [\sigma'(n) < \sigma'])\} \subset [\sigma = \sigma''] \qquad \text{d'où (ii).}$$

G - 3 : PROPOSITION.

Si (A_t) appartient à $\mathcal{C}$, pour tout temps d'arrêt totalement inaccessible σ on a $A_\sigma = A_{\sigma-}$ P-p.s.

Preuve :

1°) Soient σ un temps d'arrêt totalement inaccessible et (A_t) un élément de $\mathcal{C}$. Soit $a = \Phi((A_t)_{t\in T})$.

Pour tout n et pour tout nombre dyadique $k \,.\, 2^{-n}$ (avec k entier $\geqslant 0$), posons : $D(n\,,k) = [k < \sigma \leqslant k+1]$.

$$\text{Soit } \sigma(n) = \sum_{k\geqslant 0} (k+1)\,.\,2^{-n}\,.\,1_{D(n,\,k)} \text{ et}$$

$$u(n) = \sum_{k\geqslant 0} k\,.\,2^{-n}\,.\,1_{D(n,\,k)}\,.$$

Soit (B_t) le processus défini par $B_t = 1_{[\sigma,\,\infty)}$ et, pour tout n, B^n_t le processus défini par :

$$B^n_t = E(B_{(k+1)\,.\,2^{-n}} \mid \mathcal{F}_{(t)}) \text{ si } k\,.\,2^{-n} \leqslant t < (k+1)\,.\,2^{-n}$$

On a $u(n) < \sigma \leqslant \sigma(n)$ P-p.s. et $u(n) \uparrow \sigma$, $\sigma(n) \downarrow \sigma$ donc

$$E(A_\sigma - A_{\sigma-}) = \lim_{n\to\infty} E\,A\left[_{\sigma(n)} - A_{u(n)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \{ \sum_{k\geqslant 0} (E\left[1_{D(n,\,k)}\,.\,(A_{(k+1)\,.\,2^{-n}} - A_{k\,.\,2^{-n}})\right])\}$$

soit, d'après la définition de $\mathcal{C}$,

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geqslant 0} \left[\int_{]k\,.\,2^{-n},\,(k+1)\,.\,2^{-n}]} E(1_{D(n,\,k)} \mid \mathcal{F}_{u-})\,.\,da\right]\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int (B^n(t-) - 1_{]\sigma(n),\,\infty)})\,.\,da$$

D'une part, quand $n \to \infty$, $1_{]\sigma(n),\,\infty)} \uparrow 1_{]\sigma,\,\infty]}$.

D'autre part, si $(\sigma'(n))_{n>0}$ est une suite de temps d'arrêt qui croît vers σ', on a :

$$\lim_{n\to\infty}. E[B_{\sigma'} - B_{\sigma'(n)}] = P([\sigma = \sigma'] \cap [\bigcap_{n>0} (\sigma'_n < \sigma')])$$

donc cette quantité est nulle (cf. G-2). D'après G-1, ceci implique que (B_t^n) converge P-p.s. uniformément par trajectoires vers (B_t) donc B_{t-}^n converge de même vers $B_{t-} = 1_{]\sigma,\infty)}$.

On en déduit que $(B_{t-}^n - 1_{]\sigma(n),\infty)})$ converge simplement vers 0 donc $E(A_\sigma - A_{\sigma-}) = 0$, c. q. f. d.

G - 4 : LEMME.

Soient σ un temps d'arrêt prévisible et $(A_t)_{t\in T}$ un élément de $\mathcal{C}$; soit $a = \Phi((A_t)_{t\in T})$. On a alors $a([\sigma]) = E(A_\sigma - A_{\sigma-})$.

Preuve :

Pour tout temps d'arrêt σ', on a $a(]0, \sigma']) = E(A_{\sigma'})$ (ceci se vérifie immédiatement pour les temps d'arrêt étagés, d'où l'on déduit le même résultat pour les temps d'arrêt quelconques puisque ceux-ci sont limites de suites décroissantes de temps d'arrêt étagés). Si σ est prévisible, il existe une suite $(\sigma(n))_{n>0}$ de temps d'arrêt qui annonce σ ; on a :

$$a[\sigma] = \lim_{n\to\infty} a(]\sigma(n),\sigma]) = \lim_{n\to\infty}. E[A_\sigma - A_{\sigma(n)}] = E(A_\sigma - A_{\sigma-})$$

G - 5 : PROPOSITION.

Soit $(A_t)_{t\in T}$ un processus appartenant à $\mathcal{C}$ et soit $a = \Phi((A_t)_{t\in T})$. Alors $(A_t)_{t\in T}$ est P-p.s. à trajectoires continues si et seulement si, pour tout temps d'arrêt prévisible σ, $a[\sigma] = 0$.

Preuve :

La condition $a([\sigma]) = 0$ est nécessaire d'après G-4. Réciproquement, supposons cette condition satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$. Soit σ' le temps d'arrêt défini par $\sigma' = \inf. \{t : (A_t - A_{t-}) > \varepsilon\}$ (il est facile de vérifier que σ'

est un temps d'arrêt : cf., par exemple, [19] p. 98). Il suffit de prouver que $P[\sigma' < +\infty] = 0$. Pour celà, notons d'abord que, si σ est un temps d'arrêt prévisible, $P[\sigma = \sigma'] = 0$ (d'après G-4 et la définition de σ') donc σ' est totalement inaccessible ; or ceci implique $A_{\sigma'} = A_{\sigma'-}$ (cf. G-3) donc $P(\sigma' < +\infty) = 0$.

G - 6 : PROPOSITION.

Soit a une mesure positive définie sur la tribu des prévisibles. Alors il existe une suite $(a_n)_{n>0}$ de mesures positives définies sur la tribu des prévisibles telle que :

1°) Pour tout n, il existe un temps d'arrêt prévisible $\sigma(n)$ avec $a_n(\Omega') = a_n(\sigma[(n)])$

2°) $(a - \sum_{n>0} a(n)) = a'$ est une mesure positive telle que, pour tout temps d'arrêt prévisible σ, $a'([\sigma]) = 0$.

Preuve :

Soit c la borne supérieure des nombres b tels que il existe une suite $(\sigma(n))_{n>0}$ de temps d'arrêt prévisibles et une suite $(b_n)_{n>0}$ de mesures positives définies sur la tribu des prévisibles avec $b = \sum_{n>0} b_n(\Omega')$, $\sum b_n(.) \leq a$ et, pour tout n, $b_n(\Omega') = b_n([\sigma(n)])$.

On vérifie immédiatement que cette borne supérieure est atteinte pour une suite $(a_n)_{n>0}$ de mesures qui satisfait aux conditions de la proposition.

G - 7 : LEMME.

Soit σ un temps d'arrêt prévisible et H un élément de $\mathcal{F}_{\sigma-}$. L'ensemble $(H \times T) \cap]\sigma, \infty)$ est alors prévisible.

Preuve :

Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ une suite de temps d'arrêt qui annonce σ.

Soit $\mathcal{A} = \bigcup_{n>0} \mathcal{F}^{\mu}_{\sigma(n)}$; on vérifie facilement que $\mathcal{A}$ engendre $\mathcal{F}^{\mu}_{\sigma-}$ (cf., par exemple, [21] lemme 2-1 p. 73) : il suffit donc de prouver le lemme pour H élément de $\mathcal{A}$. Supposons donc H élément de $\mathcal{F}^{\mu}_{\sigma(n)}$: pour tout $k \geq \sigma(n)$, soit $\sigma'(k)$ le temps d'arrêt défini par $\sigma'(k) = \sigma(k)$ si $\omega \in H$ et $\sigma'(k) = \infty$ si $\omega \notin H$. On a $(H \times T) \cap [\sigma, \infty) = \bigcap_{k \geq n}]\sigma'(k), \infty)$, c'est donc un ensemble prévisible.

G - 8 : LEMME.

Soit $(A_t)_{t \in T}$ un élément de $\mathcal{C}$ et $a = \Phi((A_t)_{t \in T})$. On a alors, pour tout temps d'arrêt σ et tout élément H de $\mathcal{F}^{\mu}$:

1°) $E[1_H \cdot A_\sigma] = \int_{]0, \sigma]} E(1_H \mid \mathcal{F}^{\mu}_{u-}) \cdot da$

2°) (A_σ) est une variable aléatoire $\mathcal{F}^{\mu}_{\sigma-}$-mesurable.

Preuve :

1°) L'égalité indiquée se vérifie immédiatement pour tout temps d'arrêt étagé (par définition de $\mathcal{C}$) et donc reste valable pour un temps d'arrêt quelconque.

2°) Il suffit de prouver que, si $H \in \mathcal{F}^{\mu}_{\sigma}$,

$$E(1_H \cdot A_\sigma) = E[(1_H \mid \mathcal{F}^{\mu}_{\sigma-}) \cdot A_\sigma]$$

D'après le 1°), il suffit donc de prouver que $(B_t)_{t \in T}$ et $(C_t)_{t \in T}$ sont deux processus indistinguables si

$(B_t) = E(1_H \mid \mathcal{F}^{\mu}_{u-}) \cdot 1_{]0, \sigma]}$ et $(C_t)_{t \in T} = E\left[E(1_H \mid \mathcal{F}^{\mu}_{\sigma-}) \mid \mathcal{F}^{\mu}_{u-}\right] \cdot 1_{]0, \sigma]}$

Puisque (B_t) et (C_t) sont continus à gauche, il suffit de prouver que, $\forall t$, $B_t = C_t$ P-p.s.. Or,

$$B_t = 1_{[\sigma \geq t]} \cdot E(1_H \mid \mathcal{F}_{t-})$$
$$C_t = 1_{[\sigma \geq t]} \cdot E[1_H \mid (\mathcal{F}_{\sigma-} \cap \mathcal{F}_{t-})]$$

d'où l'égalité P-p.s. puisque, en restriction à $[\sigma \geq t]$, $\mathcal{F}_{t-}$ est contenue dans $\mathcal{F}_{\sigma-}$.

G - 9 : LEMME.

$\mathcal{C}$ *Soit σ un temps d'arrêt prévisible. Soit $(A_t)_{t\in T}$ un élément de $\mathcal{C}$. Soit $a = \Phi((A_t)_{t\in T})$. On suppose que $a([\sigma]) = a(\Omega')$. On a alors $(A_t)_{t\in T} = A_\infty \cdot 1_{[\sigma, \infty)}$ donc $(A_t)_{t\in T}$ est prévisible.*

Preuve :

Si σ' est un temps d'arrêt tel que $P[\sigma' < \sigma] = 1$, on a $0 = a(]0, \sigma']) = E[A_{\sigma'}]$ (cf. début de la preuve de G-4). Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ une suite de temps d'arrêt qui annonce σ : on a $E(A_{\sigma-}) = \lim\limits_{n\to\infty} E[A_{\sigma(n)}] = 0$ donc $A_{\sigma-} = 0$ P-p.s. Par ailleurs, $E(A_\infty) = a(\Omega') = a([\sigma]) = E(A_\sigma)$ donc $A_\sigma = A_\infty$ P-p.s.

Pour prouver que $A_\infty \cdot 1_{[\sigma, \infty)} = A_\sigma \cdot 1_{[\sigma, \infty)}$ est un processus prévisible, il suffit de le prouver si A_∞ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{\sigma-}$-étagée (par passage à la limite et d'après G-8) ce qui se déduit immédiatement de G-7.

G - 10 : LEMME.

Soient $(A_t)_{t\in T}$ et $(B_t)_{t\in T}$ deux processus croissants prévisibles intégrables continus à droite et tels que $\Phi((A_t)_{t\in T}) = \Phi((B_t)_{t\in T})$ et $A_0 = B_0 = 0$. Les processus $(A_t)_{t\in T}$ et $(B_t)_{t\in T}$ sont indistinguables.

Preuve :

Pour tout n, soit $\sigma(n) = \inf \{t : (A_t + B_t) \geq n\}$. Les processus $(A_{t\wedge\sigma(n)})$ et $(B_{t\wedge\sigma(n)})$ satisfont à toutes les conditions de l'énoncé du lemme. Il suffit donc de prouver ce lemme pour des processus uniformément bornés. Or $(A_t - B_t) = M_t$ est une martingale donc

$$E[M_t \cdot (A_t - A_0)] = E\left[\int_{]0,\,t]} M_u \cdot dA_u\right] \qquad \text{(cf. E-6)}$$

$$= \int_{]0,\,t]} M_u \cdot da \qquad \text{(cf. E-4)}$$

de même, $E[M_t \cdot (B_t - B_0)] = \int_{]0,\,t]} M_u \cdot db$ donc $E[M_t^2] = E[M_t \cdot (A_t - B_t)] = 0$

donc $M_t = 0$ P-p.s. ce qui montre que A_t et B_t sont indistinguables (puisque continus à droite).

G - 11 : THEOREME.

Soit $(A_t)_{t\in T}$ un processus croissant intégrable continu à droite tel que $A_0 = 0$. Alors $(A_t)_{t\in T}$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(A_t)_{t\in T}$ est prévisible.

Preuve :

1°) Soit $(A_t)_{t\in T}$ un élément de $\mathcal{C}$. Soit $a = \Phi((A_t)_{t\in T})$. Soit $a = a' + \sum_{n>0} a_n$ la décomposition de a comme indiquée en G-6 ; soit (A'_t) (resp. (A_t^n)) le processus appartenant à $\mathcal{C}$ associé à a' (resp. à a_n).

D'une part (A'_t) est prévisible (puisque à trajectoires continues).

D'autre part, pour tout n, (A_t^n) est prévisible (G-9). Or $A'_t + \sum_{k=1}^{n} A_t^k$ converge simplement vers $(A_t)_{t\in T}$ donc $(A_t)_{t\in T}$ est prévisible.

2°) Réciproquement, supposons $(A_t)_{t\in T}$ prévisible. Soit $a = \Phi((A_t)_{t\in T})$ et $(B_t)_{t\in T}$ le processus appartenant à $\mathcal{C}$ et associé à a : d'après le 1°), $(B_t)_{t\in T}$ est prévisible donc (A_t) et (B_t) sont indistinguables (G-10).

3 CONDITIONS SUFFISANTES POUR QU'UN PROCESSUS SOIT DE REPARTITION

A - INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on se propose de donner des conditions suffisantes pour qu'un processus (X_t) soit un processus de répartition, puis d'étendre les résultats obtenus à un cadre formel plus général.

Au paragraphe B, on rappelle quelques résultats sur les mesures vectorielles : les démonstrations proposées semblent originales et montrent que l'outil fondamental est le théorème d'Orlicz-Banach.

Au paragraphe C, on montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus continu à droite X_t soit un processus de répartition est que l'ensemble des valeurs de la fonction x associée à X_t soit équi-intégrable. On en déduit qu'une martingale à valeurs dans L_p , $p > 1$, est un processus de répartition.

Au paragraphe D, on introduit un formalisme plus général et on étudie des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ensemble des valeurs de x soit borné.

Au paragraphe E, on étend les résultats du paragraphe C dans le cas du formalisme introduit au paragraphe D : pour ce paragraphe, on s'est contenté d'énoncer les résultats sans démonstration.

Monsieur le Professeur Tortrat a bien voulu me signaler quelques inexactitudes relatives à la rédaction de ce chapitre de ma thèse : qu'il trouve ici l'assurance de mes meilleurs remerciements.

B - SUR LES MESURES VECTORIELLES

B - 1 : LEMME (TOPOLOGIQUE).

Soit V un espace vectoriel topologique localement convexe ; soit V' son dual. Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de V. On pose :

$$A = \{x : x = \sum_{k \in I} u_k \ , \ I \text{ partie finie de } N\}$$

On suppose que A est contenu dans une partie H telle que toute suite de Cauchy dans H pour la topologie $\sigma(V, V')$ soit convergente dans H pour cette même topologie $\sigma(V, V')$. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est une partie bornée de V.

b) Toute sous-série de la série de terme général u_n est faiblement bornée.

c) Toute sous-série de la série de terme général u_n est de Cauchy pour la topologie initiale sur V.

Preuve :

1°) Notons, d'abord, que dans le a) il est inutile de préciser pour quelle topologie A est borné puisque les parties bornées sont les même pour la topologie initiale et la topologie $\sigma(V, V')$ (cf. [3]).

On va montrer les deux implications suivantes :

$$2°) \ b \Longrightarrow a) \qquad ; \qquad 3°) \ b) \Longrightarrow c)$$

Ceci démontrera le lemme puisqu'on a évidemment c) $\Longrightarrow$ b) et a) $\Longrightarrow$ b).

2°) Non a) $\Longrightarrow$ non b).

Supposons A non faiblement borné. Celà signifie qu'il existe x' élément de V' tel que $< x' , A >$ ne soit pas borné. On va construire, par récurrence, une suite $(I_n)_{n>0}$ de parties finies de $\mathbb{N}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) $\forall n,\ k \in I_n$ et $j \in I_{n+1} \Longrightarrow k < j$

(ii) $\forall n,\ \left| < x' , \sum_{k \in I_n} u_k > \right| \geqslant 1$

(l'existence d'une telle suite I_n donnera le résultat cherché puisque la sous-série $< x' , u_k >$ pour $k \in \bigcup_{n>0} I_n$ n'est pas de Cauchy et donc admet une sous-série non bornée).

Supposons I_n construit. Soit $h = \operatorname{Sup}_{k \in I_n} k$ et

$a = \operatorname{Sup} \left| < x' , \sum_{k \in I} u_k > \right|$ cette borne supérieure étant prise pour toutes les parties I de $\{1, \dots h\}$. D'après non a), il existe I partie finie de N telle que

$$\left| < x' , \sum_{k \in I} u_k > \right| \geqslant a + 1 \text{ mais ceci implique}$$

$\left| < x' , \sum_{k \in I_{n+1}} u_k > \right| \geqslant 1$ si $I_{n+1} = I \setminus \{1, \dots h\}$ ce qui achève la construction par récurrence.

3°) b) $\Longrightarrow$ c).

Soit (v_n) une sous-série de la série (u_n). D'après b), toute sous-série de la série (v_n) est faiblement de Cauchy donc faiblement convergente vers un élément de V (puisque H est une partie faiblement séquentiellement complète). Mais ceci signifie que la série (v_n) est fortement de Cauchy d'après le théorème d'Orlicz-Banach : dans [26], ce théorème a été prouvé si V est un espace de Banach mais il reste exact si V est un espace topologique localement convexe puisque, dans ce cas, la topologie de V peut être définie par une famille de semi-normes (cf. [28])

B - 2 : REMARQUE

Le lemme qui précède sera essentiellement utilisé au paragraphe E. Notons toutefois qu'il permet de prouver directement le résultat suivant (cf, par exemple, [14] p.292) :

Soit V un espace vectoriel topologique localement convexe, soit V' son dual. Soit H une partie bornée de V complète pour la topologie initiale sur

V et telle que toute suite de Cauchy dans H pour la topologie $\sigma(V, V')$ soit convergente dans H pour cette même topologie $\sigma(V, V')$. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble Ω' et $\mathcal{F}^1$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Soit x une fonction à valeurs dans H définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$. Alors x se prolonge en une fonction (unique) définie sur $\mathcal{F}^1$, à valeurs dans H et σ-additive pour la topologie initiale si et seulement si x est σ-additive sur $\mathcal{A}$ pour la topologie $\sigma(V, V')$.

Preuve :

La topologie initiale sur V sera appelée topologie forte.

a) Soit $(A_n)_{n>0}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$. Soit $u_n = x(A_n)$.

D'après le lemme B-1, cette série est fortement de Cauchy ce qui implique, à fortiori, que la suite de terme général u_n converge fortement vers 0.

b) Soit $(B_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $B_n \downarrow \emptyset$. Si on pose $A_n = (B_n \setminus B_{n+1})$ et $u_n = x(A)$, le raisonnement effectué au a) qui précède montre que la suite de terme général $x(B_n)$ est fortement de Cauchy, donc elle converge fortement vers 0 (puisqu'elle converge faiblement vers 0).

c) Compte-tenu des a) et b), la proposition se déduit alors immédiatement de [12] ou [27].

C - UNE MARTINGALE DANS L_p (p > 1) EST UN PROCESSUS DE REPARTITION

Pour tout ce paragraphe, on adopte les hypothèses et les notations du chapitre 1 (cf. 1-A-2).

C - 1 : LEMME (LEMME 1-D-2 DANS LE CAS D'UNE FONCTION REELLE).

Soit m une fonction réelle bornée définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$ et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) pour tout élément t de T et tout élément A de $\mathcal{F}_t$

$$\lim_{s \downarrow t} . \; m(A \times]t, s]) = 0$$

(ii) pour toute suite $(A_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ décroissant vers $\emptyset$,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{m}(A_n \times]0, 1]) = 0 \text{ si}$$

$$\tilde{m}(B) = \underbrace{\text{Sup.}}_{H \in \mathcal{A},\, H \subset B} |m(H)|$$

Alors m est σ-additive sur $\mathcal{A}$.

Preuve :

Soit r la variation totale de m sur $\mathcal{A}$; on se propose de prouver que r satisfait aux conditions (i) et (ii) du lemme 1-D-2. La condition 1-D-2-(i) se déduit immédiatement du lemme 2-D-2 et de la condition (i) de l'énoncé (r = y + z si y et z sont définis comme en 2-D-3-1°)). La condition 1-C-2-(ii) se déduit immédiatement de la condition (ii) de l'énoncé et de ce que $r \leqslant 2\tilde{m}$.

C - 2 : PROPOSITION

Soit (X_t) un processus continu à droite à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec p>1 (resp. p=1). Soit $x = \phi(X_t)$. Alors x se prolonge (de façon unique) en une mesure vectorielle forte définie sur la tribu des prévisibles si et seulement si x $(\mathcal{A})$ est une partie bornée de L_p, (resp. bornée et équi-intégrable de L_1)

Preuve :

La condition "$x(\mathcal{A})$ partie bornée de L_p" est évidemment nécessaire. De plus, la condition "$x(\mathcal{A})$ partie équi-intégrable de L_1" est nécessaire d'après le théorème 2-9 de [2] .

Prouvons la réciproque. D'après la proposition B-2, si $x(\mathcal{A})$ est une partie équi-intégrable de L_p , pour prouver que x admet un prolongement fortement σ-additif il suffit de prouver que x est faiblement σ-additive sur $\mathcal{A}$, puisque l'adhérence faible de $x(\mathcal{A})$ est faiblement séquentiellement complète.

Soit x' un élément du dual L_q de L_p ; il suffit de prouver que la fonction réelle $<x' , x(.)>$ définie sur $\mathcal{A}$ satisfait aux conditions (i) et (ii) du lemme C-1. La condition (i) se déduit immédiatement de la continuité à droite de (X_t) et de ce que la famille $(X_t - X_o)_{t\in T}$ est bornée (resp. bornée et équi-intégrable). Prouvons la condition (ii) : soit donc $(A_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ décroissant vers $\emptyset$; supposons d'abord $p>1$; si f est la fonction associée à x', soit x'_n l'élément du dual L_q de L_p associé à $f.1_{A_n}$. Soit

$$a = \sup_{A\in\mathcal{A}} ||x(A)||_p < +\infty$$

on a $\lim\limits_{n\to\infty} ||x'_n||_q = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} < x'_n , x(A) > = 0$ uniformément en n

ce qui implique la condition c-1-(ii) (car $H\subset A_n \times]0,1]$ implique $< x', x(H) > = < x'_n , x(H) >$) ; le cas p = 1 se vérifie immédiatement à partir de la définition de l'équi-intégrabilité.

C - 3 : THEOREME.

Soit (X_t) une martingale continue à droite à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec $1 < p < +\infty$. Soit $x = \phi((X_t))$. Alors x se prolonge (de façon unique) en une mesure vectorielle forte définie sur la tribu des prévisibles.

Preuve :

D'après la proposition C-2, il suffit de prouver que $x(\mathcal{A})$ est une partie bornée de L_p . Soit M_p la constante indiquée dans [4] théorème 9.

Pour tout élément A de $\mathcal{A}$, on a $E(|x(A)|^p) < M_p\, E(|X_{t(1)}|^p)$: en effet, si A appartient à $\mathcal{A}$, il existe une suite finie croissante de temps d'arrêt prévisibles étagés $(\sigma(k))_{1\leqslant k\leqslant 2n}$ telle que $\sigma(1) = 0$,

D - EXTENSION DU CADRE GENERAL ET ETUDE DE L'HYPOTHESE "$x(\mathcal{A})$ BORNE"

D - 1 : NOTATION.

Soit Ω un ensemble et T un ensemble totalement ordonné. Etant donnés σ et σ' deux applications de Ω dans T, on désignera par $]\sigma, \sigma']$ l'ensemble des couples (ω, t) tels que $\sigma(\omega) < t \leqslant \sigma'(\omega)$ (c'est donc une partie de $\Omega \times T$).

D - 2 : LEMME ENSEMBLISTE

Soit Ω un ensemble et T un ensemble totalement ordonné. Soit Σ une famille de fonctions définies sur Ω et à valeurs dans T telle que, si σ et σ' appartiennent à Σ, $\sigma \vee \sigma'$ et $\sigma \vee \sigma'$ appartiennent aussi à Σ. Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ une suite d'éléments de Σ. Alors il existe un ensemble $(\sigma'(n))_{n\geqslant 0}$ d'élément de Σ totalement ordonné (c'est-à-dire que, quels que soient i et j, on a $\sigma'(i) \leqslant \sigma'(j)$ ou $\sigma'(i) \geqslant \sigma'(j)$) et tel que, pour tout n, il existe $j_1 \dots j_k$ avec

$$]\sigma(n), \sigma(n+1)] = \bigcup_{i=1}^{k-1}]\sigma'(j_i), \sigma'(j_{i+1})]$$

Si la famille $\sigma(n)$ est finie, on peut choisir la famille $\sigma'(n)$ finie.

Preuve :

On construit la famille $(\sigma'(n))_{n>0}$ par récurrence. On suppose donc que l'on a construit $(\sigma'(n))_{1\leqslant n\leqslant k'}$, famille totalement ordonnée et satisfaisant à la condition indiquée relativement à la famille $(\sigma(n))_{1\leqslant n\leqslant k}$. Soit $(\sigma''(n))_{1\leqslant n\leqslant k'}$ la famille $(\sigma'(n))_{1\leqslant n\leqslant k'}$ mise dans l'ordre croissant. Soit $\tau(n)$ défini pour $1 \leqslant n \leqslant k'+1$ par

$$\tau(n) = [\sigma''(n) \wedge \sigma(k+1)] \vee \sigma''(n-1) \text{ si } 2 \leqslant n \leqslant k'+1$$

$$\tau(1) = \sigma(k+1) \wedge \sigma''(1) \text{ et } \tau(k'+1) = \sigma(k+1) \vee \sigma''(k')$$

On vérifie facilement que la famille

$\{(\sigma'(n))_{1\leqslant n\leqslant k'}\} \cup \{(\tau(n))_{1\leqslant n\leqslant k'+1}\}$ est totalement ordonnée et satisfait à la condition de l'énoncé relativement à la famille $(\sigma(n))_{1\leqslant n\leqslant k+1}$ ce qui achève la construction par récurrence.

$\sigma(2n) = 1$ et $A = \bigcup_{k=1}^{n} \left]\sigma(2k-1), \sigma(2k)\right]$; soit (f_k) la martingale définie par $f_k = X_{\sigma(k)}$; on a $x(A) = \sum_{k=1}^{n} (f_{2k} - f_{2k-1})$, donc $x(A)$ est une "transformée" de $f(k)$ au sens de Burkholder : l'inégalité annoncée est alors un cas particulier de celle indiquée dans la preuve du théorème 9 de [4] (dernière ligne de la page 1502).

C - 4 : REMARQUES.

a) La démonstration précédente se simplifie considérablement quand $p = 2$. (Cf. 1-D-6).

b) Le théorème C-3, ne vaut plus pour $p = 1$ comme le montre le contre-exemple indiqué en 2-F.

c) Le théorème C-3 montre notamment que si Y est un processus prévisible uniformément borné et si X est une martingale de puissance p-ième intégrable, alors $\int Y dX$ est défini et le processus $(Z_t)_{t \in T}$, défini par $Z_t = \int_{\Omega \times]0,t]} Y.dX$, est une martingale de puissance p-ième intégrable.

d) La proposition C-2 montre notamment que, si $(X_t)_{t \in T}$ est un processus de répartition en moyenne d'ordre p, $(X_t)_{t \in T}$ est également un processus de répartition en moyenne d'ordre q pour $1 \leq q \leq p$.

C - 5 : CONTRE-EXEMPLE.

Le but du contre-exemple qui suit est de montrer que la méthode utilisée quand on a une martingale de carré intégrable (cf. 1-D-6 et 1-D-9 par exemple) ne "marche plus" pour une martingale de puissance p-ième intégrable avec $1<p<2$; en effet, si $(X_t)_{t \in T}$ est une martingale de puissance p-ième intégrable, la fonction $\Phi\left[(|X_t|^p)_{t \in T}\right]$ ne majore pas de façon simple la fonction $E\left[|\phi((X_t)_{t \in T})|^p\right]$

Plus précisément, on va donner un exemple de martingale $(X_t)_{t \in [0,1]}$ *de puissance p-ième intégrable telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} E(|X_{1-\frac{1}{n+1}} - X_{1-\frac{1}{n}}|^p) = +\infty$.

Soit p tel que $1<p<2$. *Soit* $(\varepsilon_n)_{n>0}$ *une suite de réels positifs telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 < +\infty$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^p = +\infty$ *(on peut prendre, par exemple,* $\varepsilon_n = (\frac{1}{n})^{1/p}$ *). Soient* $\Omega = [0,1[$, $\mathcal{F}$ = *la tribu des boréliens de* Ω *et P la mesure de Lebesgue. Pour* $n>0$ *et* $0\leqslant k<2^n$, *soit* $A_{n,k} = [k.2^{-n}\ ,\ (k+1).2^{-n}[$; *soit* $\mathcal{F}_n$ *la tribu de parties de* Ω *engendrée par les* $A_{n,k}$; *soient*

$$C(n) = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} A_{n,2k-2} \quad \text{et} \quad D(n) = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} A_{n,2k-1} .$$

Soit $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ *la suite de variables aléatoires définie par récurrence par* $X_o = 1_\Omega$ *et*

$$Y_{n+1} = Y_n \left[(1+\varepsilon_n).\ 1_{C(n)} + (1-\varepsilon_n).\ 1_{D(n)}\right]$$

Soit $(X_t)_{t\in[0,1[}$ *le processus défini par*

$$X_t = Y_n \quad si\ t\in\left[1-\frac{1}{n}\ ,\ 1-\frac{1}{n+1}\right[\qquad et \qquad X_1 = \lim_{n\to\infty} Y_n$$

Alors ce processus répond à la question.

<u>Preuve</u> :

On a $E(\ |Y_{n+1} - Y_n|^p\ ) = \varepsilon_n^p\ .\ E(\ |Y_n|^p\ )$ et

$$E(\ |Y_{n+1}|^p\ ) = E(\ |Y_n|^p\ )\ .\ \left[\frac{1}{2}(1+\varepsilon_n)^p + \frac{1}{2}(1-\varepsilon_n)^p\right]$$
$$\simeq E(\ |Y_n|^p\ )\ .\ \left[1 + \frac{p.(p-1)}{2}\ .\ \varepsilon_n^2\right]$$

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 < +\infty$, le produit $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{p(p-1)}{2}\ .\ \varepsilon_n^2\right]$ converge vers une valeur strictement positive. On en déduit que la suite $(Y_n)_{n>0}$ converge dans $L_p\ (\Omega, \mathcal{F}, P)$ (propriété des martingales) et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\ |Y_{n+1} - Y_n|^p\ ) \simeq (\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^p).c = +\infty$$

D - 3 : LEMME

Soit $(X_t)_{t\ T}$ un processus mesurable à valeurs dans un groupe topologique abélien $(E,\ )$. Soit une famille d'éléments de $_0(\ ,\ ,P,T)$ telle que, si σ et σ' appartiennent à Σ, $\sigma\wedge\sigma'$ et $\sigma\vee\sigma'$ appartiennent aussi à Σ. On désigne par $\mathscr{A}$ l'anneau de parties de $\Omega \times T$ engendré par $((\leftarrow, \sigma])_{\sigma\in\Sigma}$. Pour tout élément σ de Σ, on désigne par $\hat{X}_\sigma$ l'élément de $L_0(\Omega, \mathscr{F}, P, E)$ dont un représentant dans $\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{F}, P, E)$ est défini par $X_\sigma(\omega) = X_{\sigma(\omega)}(\omega)$ et on pose $m(\leftarrow, \sigma]) = \hat{X}_\sigma$: alors m se prolonge en une fonction (unique) définie et simplement additive sur $\mathscr{A}$ et à valeurs dans $L_0(\Omega, \mathscr{F}, P, E)$.

Preuve :

En utilisant le lemme D-2, on vérifie facilement que $\mathscr{A}$ est la famille des parties A de $\Omega \times T$ telles que il existe une famille finie croissante $(\sigma_i)_{1\leq i\leq 2n}$ d'éléments de Σ avec

$A = A_1 \cup \{\bigcup_{i=1}^{n-1} (]\sigma_{2i}, \sigma_{2i+1}])\}$ où $A_1 = \emptyset$ ou $(\leftarrow, \sigma_1]$. On pose alors

$m'(A) = X_{\sigma_1} + \sum_{i=1}^{n-1} (X_{\sigma_{2i+1}} - X_{\sigma_{2i}})$. Le fait que m' ne dépend que de A et soit simplement additive si on la considère comme fonction à valeurs dans $\mathscr{L}_0$ se vérifie en considérant chaque valeur ω de Ω (on est dans la situation classique de la construction d'une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$). Enfin, on pose $m(A) = \widehat{m'(A)}$.

D - 4 : LEMME.

Soit S un ensemble dénombrable muni d'une relation d'ordre total (que l'on notera $\leq$). Soit f une fonction définie sur S et à valeurs dans un espace de Banach E. Pour tout intervalle I de S non vide, on pose $v(I) = \text{Sup} \sum_{k=1}^{n-1} |f(s_k) - f(s_{k+1})|$ cette borne supérieure étant prise pour toutes les familles finies ordonnées $(s_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de I.

1°) Pour tout intervalle I de S et pour toute suite monotone $(s_n)_{n>0}$ d'éléments de S telle que $I = \bigcup_{n>0} I_n$ avec $I_n = [s_n, s_{n+1}]$ on a $v(I) \leq \sum_{n>0} v(I_n)$.

2°) les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $v(I) < +\infty$

(ii) pour toute suite $(s_n)_{n>0}$ *strictement monotone d'éléments de* I,

$\sum_{n>0} |f(s_{n+1}) - f(s_n)| < +\infty.$

3°) Si $E = \mathbb{R}$, *les conditions (i) et (ii) sont équivalentes à la condition suivante :*

(iii) pour toute suite $(s_n)_{n>0}$ *strictement monotone d'éléments de* I, *il existe* $a > 0$ *tel que,*

$$\forall k,\ \left|\sum_{n=1}^{k} [f(s_{2n-1}) - f(s_{2n})]\right| \leqslant a.$$

Preuve :

La preuve du 1°) est immédiate. De plus, on a évidemment (i) implique (ii). Prouvons que "non (i) et (ii)" est absurde. Soit donc I intervalle de S tel que $v(I) = +\infty$.

Puisque S est dénombrable, on peut construire une suite croissante $(s'_n)_{n>0}$ et une suite décroissante $(s_n)_{n>0}$ d'éléments de I telles que $I = \bigcup_{n>0} [s_n , s'_n]$. Supposons d'abord que, $\forall n$, $v[s_{n+1} , s_n] + v[s'_n , s'_{n+1}] < +\infty$. Le 1°) et non (i) impliquent $\sum_{n>0} v[s_{n+1} , s_n] = +\infty$ ou $\sum_{n>0} v[s'_n , s'_{n+1}] = +\infty$; supposons qu'on soit dans le premier cas ; pour tout n, soit $T_n = \{t_k\}_{1\leqslant k\leqslant h(n)}$ une famille finie croissante d'éléments de $[s_{n+1} , s_n]$ telle que $\sum_{k=1}^{h(n)-1} |f(t_k) - f(t_{k+1})| \geqslant \frac{1}{2} v[s_{n+1} , s_n]$; la suite croissante $(u_n)_{n>0}$ telle que $\{u_n\}_{n>0} = \bigcup_{n>0} T_n$ est telle que $\sum_{k>0} |f(u_k) - f(u_{k+1})| = +\infty$ ce qui contredit (ii). On a donc un couple (s, t) d'éléments de I tels que $v[s, t] = +\infty$. Soit :

$U = \{u : u \in [s, t], v[s, u] < +\infty\}$ et $U' = [s, t] \setminus U$. Les ensembles U et U' ne sont pas vides. Puisque S est dénombrable il existe une suite croissante $(s_n)_{n>0}$ d'éléments de U et une décroissante $(s'_n)_{n>0}$ d'éléments de U' telles que $]s_n , s'_n[\downarrow \emptyset$.

On a soit $v(U) = +\infty$, soit $v(U') = +\infty$. Dans le 1er cas, d'après le 1°), $\sum_{n>0} v[s_n, s_{n+1}] = +\infty$ et, $\forall n$, $v[s_n, s_{n+1}] < +\infty$; on montre alors, comme plus haut, que ceci contredit la condition (ii).

Dans le deuxième cas, on construit par récurrence sur n, une suite décroissante $(t_k)_{1\leq k\leq g(n)}$ d'éléments de U' telle que $\sum_{k=g(n-1)}^{g(n)-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \geq 1$ en utilisant le fait que, $\forall n$, il existe $s'_{h(n)} \leq t_{g(n)}$ et que $v(U' \cap (\leftarrow, s'_{h(n)}]) = +\infty$; or ceci contredit (ii).

Enfin, on a évidemment (ii) implique (iii). On vérifie facilement que non (ii) implique non (iii) en construisant une sous-suite (s'_k) de la suite (s_k) telle que, $\forall k$, les termes $f(s'_{2k-1}) - f(s_{2k})$ soient tous de même signe.

D - 5 : PROPOSITION.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé et* T *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Soit* $\mathcal{L}_0^T(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *l'ensemble des variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et à valeurs dans* T. *Soit* Σ *une famille d'éléments de* $\mathcal{L}_0^T(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *telle que, si* σ *et* σ' *appartiennent à* Σ, $\sigma\wedge\sigma'$ *et* $\sigma\vee\sigma'$ *appartiennent aussi à* Σ. *Soit* $p \geq 1$ *et soit* (X_t) *un processus tel que, pour tout élément* σ *de* Σ, X_σ *appartient à* $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Soit* $\mathcal{A}$ *l'algèbre de parties de* $(\Omega \times T)$ *engendrée par les "intervalles"* $]\sigma, \sigma']$ *pour* σ *et* σ' *éléments de* Σ *et* x *la fonction simplement additive définie sur* $\mathcal{A}$ *par* $x(]\sigma, \sigma']) = X_{\sigma'} - X_\sigma$.

1°) Si x' *est un élément du dual de* L_p, *la fonction* $< x(.), x' >$ *est bornée sur* $\mathcal{A}$ *si et seulement si, pour toute suite* $(\sigma_n)_{n>0}$ *strictement monotone d'éléments de* Σ, $|< \sum_{n>0} (X_{\sigma_{2n+1}} - X_{\sigma_{2n}}), x' >| < +\infty$.

2°) La fonction x *est fortement bornée sur* $\mathcal{A}$ *si et seulement si la condition du 1°) ci-dessus est satisfaite pour tout élément* x' *du dual de* L_p.

Preuve :

1°) Il suffit évidemment de prouver que $\langle x', x(.) \rangle$ est bornée quand on se restreint à une famille dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$. D'après le lemme D-2, il suffit donc de prouver cette condition quand Σ ne comprend qu'une famille dénombrable totalement ordonnée d'éléments. Le résultat se déduit alors immédiatement du lemme D-4.

2°) Résulte immédiatement de ce que, dans un espace de Banach, les parties faiblement bornées et fortement bornées sont les mêmes.

- GENERALISATIONS DIVERSES $\square$

E - 1 : INTRODUCTION.

Pour l'essentiel, les démonstrations précédentes n'utilisent qu'un petit nombre de propriétés : le but du présent paragraphe est de mettre en évidence ces propriétés en énonçant divers résultats qui généralisent ceux donnés précédemment. Les démonstrations, fastidieuses, s'effectuent de façon tout à fait analogue à celles du paragraphe précédent : elles ont donc été omises.

E - 2 : THEOREME.

*Soit V un espace vectoriel réel localement **convexe**. Soit V' le dual de V. Soit K une partie de V complète pour la topologie initiale et séquentiellement complète pour la topologie $\sigma(V, V')$. Soit S un ensemble dénombrable muni d'une relation d'ordre total (que l'on notera $\leqslant$). Soit H l'ensemble des couples (s, s') d'éléments de S avec $s \neq s'$. Soit f une application de S dans K. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) pour tout élément x' de V', il existe $a > 0$ tel que, pour toute famille finie croissante $(s_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de S, $\sum_{k=1}^{n-1} |< f(s_k) - f(s_{k+1}), x' >| \leq a$

(ii) pour toute suite monotonne $(s_n)_{n>0}$ d'éléments de S, et pour tout élément x' de V', il existe $b > 0$ tel que, $\forall k$,

$$|< \sum_{j=1}^{k} [f(s_{2j-1}) - f(s_{2j})], x' >| \leq b$$

De plus, soit T l'ensemble des bornes supérieures de parties de S : on munit T de la topologie induite par celle de S et on considère S comme plongé dans T. On suppose que les conditions indiquées ci-dessus sont satisfiates. Alors, pour toute suite $(s_n)_{n>0}$ d'éléments de S croissant vers t élément de T, $f(s_n)$ converge, pour la topologie initiale sur V, vers un élément de X qui ne dépend que de t et que l'on désignera par $f(t-)$.

Enfin, on suppose que, pour toute famille finie croissante $(s_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ d'éléments de S, $[\sum_{k=1}^{n} f(s_{2k}) - f(s_{2k-1})]$ appartient à K.

Alors, si $\mathscr{A}$ désigne l'algèbre des <u>parties de T</u> engendrée par les intervalles $(\leftarrow, t[$ et si on pose $m(\leftarrow, t[= f(t-)$, m se prolonge en une fonction définie sur la tribu engendrée par $\mathscr{A}$, à valeurs dans K et σ-additive pour la topologie initiale sur V.

On aurait évidemment des résultats analogues si on considérait des suites décroissantes au lieu de suites croissantes.

E - 3 : THEOREME.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus à valeurs dans un espace de Banach E. Soit $q \geq 1$ tel que, pour tout élément t de T, $X_t \in L_q(\Omega, \mathscr{F}, P, E) = V$ (le processus est donc considéré à une modification près). On désignera par V' le dual de V. On désigne par Φ_T l'ensemble des variables aléatoires f telles qu'il existe une suite finie ordonnée $(t_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ d'éléments de T avec $f = \sum_{k=1}^{n} (X_{t_{2k}} - X_{t_{2k-1}})$. On suppose que Φ_T est contenue dans une partie

K de V complète pour la topologie forte et séquentiellement complète pour la topologie $\sigma(V, V')$ (condition qui est nécessairement satisfaite si $p > 1$). On suppose, de plus, que pour toute suite monotone $(t_n)_{n>0}$ d'éléments de T et pour tout élément x' de V', il existe $a > 0$ tel que, quel que soit k, $\left| < \sum_{j=1}^{k} (X_{t_{2k+1}} - X_{t_{2k}}), x' > \right| \leqslant a$. Alors, pour tout élément t de T, il existe X_{t-} élément de V tel que $\lim_{t' \uparrow t,\ t'<t} X_{t'} = X_{t-}$ cette limite étant au sens de la topologie forte sur V. Si on pose, pour tout élément t de T, $\Phi((\leftarrow, t[) = X_{t-}$, la fonction Φ se prolonge en une fonction définie sur la tribu $\mathcal{B}(T)$ des boréliens de T, à valeurs dans K et σ-additive pour la topologie forte sur V. Si un élément A de $\mathcal{B}(T)$ est contenu dans $(\leftarrow, t]$, $\Phi(A)$ appartient à $L_q(\Omega, \mathcal{F}_{t-}, P, E)$. On aurait évidemment un résultat analogue en considérant des limites à droite au lieu de limites à gauche et en remplaçant partout $t-$ par $t+$.

E - 4 : LEMME.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Soit Σ une famille d'éléments de $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que, si σ et σ' appartiennent à Σ, $\sigma \wedge \sigma'$ et $\sigma \vee \sigma'$ appartiennent à Σ. Soit $\bar{\Sigma}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tels qu'il existe une suite $(\sigma_n)_{n>0}$ d'éléments de Σ croissant strictement vers σ (c'est-à-dire que, pour tout élément ω de Ω, $\sigma_n(\omega)$ croît strictement vers $\sigma(\omega)$). Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de parties de $(\Omega \times T)$ engendrée par les "intervalles" $((\leftarrow, \sigma[)_{\sigma \in \bar{\Sigma}}$. Soit f une fonction positive finie, définie et croissante sur Σ (c'est-à-dire que $\sigma \geqslant \sigma'$ implique $f(\sigma) \geqslant f(\sigma')$).

1°) On suppose que f satisfait à la condition suivante :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite $(A_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ décroissant vers $\emptyset$, il existe $n(\varepsilon)$ tel que, si σ et σ' sont deux éléments de Σ tels que $\sigma \cdot 1_{\Omega \setminus A_{n(\varepsilon)}} < \sigma' \cdot 1_{\Omega \setminus A_{n(\varepsilon)}}$, alors $f(\sigma) \leqslant f(\sigma') + \varepsilon$.

Alors, pour toute suite $(\sigma(n))_{n>0}$ *d'éléments de* Σ *croissant strictement vers* σ *(élément de* $\bar{\Sigma}$*), la suite* $(f(\sigma(n)))_{n>0}$ *converge vers un réel qui ne dépend que de* σ *et que l'on notera* $f(\sigma-)$.

2°) On suppose que f *satisfait à la condition suivante :*

(ii) pour toute suite $(A_n)_{n>0}$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *telle que* $A_n \downarrow \emptyset$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $n(\varepsilon)$ *tel que si* $(\sigma_k)_{1\leq k\leq 2n}$ *est une famille finie ordonnée d'éléments de* $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$*, avec, pour tout* k*,* σ_{2k-1} *élément de* Σ *et* σ_{2k} *élément de* $\bar{\Sigma}$*, si* C *est le "cylindre" dans* $\Omega \times R$ *de base* $\Omega \setminus A_n(\varepsilon)$ *dans* Ω*, si*

$$(C \cap [\sigma_1 , \sigma_{2n}[) \subset \bigcup_{k=1}^{n} [\sigma_{2k=1} , \sigma_{2k}[\text{ alors,}$$

$$f(\sigma_{2n}-) - f(\sigma_1) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} f(\sigma_{2k}-) - f(\sigma_{2k-1})$$

Si on pose, pour tout élément σ *de* $\bar{\Sigma}$*,* $m((\leftarrow, \sigma[) = f(\sigma-)$*, et si* m *est simplement additive,* m *se prolonge en une mesure positive (unique) définie sur la tribu engendrée par* $\mathcal{A}$.

On aurait, évidemment, des résultats analogues en considérant des suites décroissantes au lieu de suites croissantes.

E - 5 : THEOREME.

Soit E *un espace de Banach et* q *un réel supérieur ou égal à 1. Soit* $(X_t)_{t\in T}$ *un processus mesurable. Soit une famille* Σ *de temps d'arrêt* σ *telle que, si* σ *et* σ' *appartiennent à* Σ*,* $\sigma\wedge\sigma'$ *et* $\sigma\vee\sigma'$ *appartiennent à* Σ. *On dira qu'un temps d'arrêt* σ *est* Σ*-prévisible -et on notera* $\bar{\Sigma}$ *l'ensemble de ces temps d'arrêt- s'il existe une suite* $(\sigma_n)_{n>0}$ *d'éléments de* Σ *"croissant strictement vers* σ*". On suppose que, quel que soit* σ *élément de* Σ*,* $\hat{X}_\sigma$ *appartient à* $L_q(\Omega, \mathcal{F}, P, E) = V$ *; on notera* V' *le dual fort de* V.

Pour toute partie Σ_0 *de* Σ*, on désignera par* $\mathcal{H}(\Sigma_0)$ *l'ensemble des éléments* x *de* V *tels que* $x = \sum_{k=1}^{n} \hat{X}_{\sigma(2k)} - \hat{X}_{\sigma(2k=1)}$ *où* $(\sigma(k))_{1\leq k\leq 2n}$ *est une famille finie ordonnée d'éléments de* Σ_0.

1°) Soit x' un élément fixé de V'. On considère les conditions suivantes :

(i) pour toute suite $\Sigma_0 = (\sigma_n)_{n>0}$ monotone d'éléments de Σ, il existe $a > 0$ tel que, quel que soit x élément de $\mathcal{H}(\Sigma_0)$, $|\langle x', x \rangle| \leqslant a$.

(ii) (resp. (iii)) quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $P(A) < \varepsilon'$ implique, pour tout élément σ de Σ, $|\langle x' . 1_A , \hat{X}_\sigma \rangle| \leqslant \varepsilon$ (resp., pour tout élément x de $\mathcal{H}(\Sigma)$, $|\langle x' . 1_A , x \rangle| \leqslant \varepsilon$).

Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ une suite d'éléments de $\bar{\Sigma} \cup \Sigma$ croissant strictement vers σ (élément de $\bar{\Sigma}$). Si on suppose que les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, $\langle x', X_{\sigma(n)} \rangle$ converge vers un réel qui ne dépend que de σ et que l'on notera $X^{x'}_{\sigma-}$. Si on suppose les conditions (i) et (iii) satisfaites, et si on pose, pour tout élément σ de $\bar{\Sigma}$, $m((\leftarrow, \sigma[) = X^{x'}_{\sigma-}$, la fonction m se prolonge en une mesure réelle définie sur la tribu des parties de $(\Omega \times T)$ engendrée par les intervalles $((\leftarrow, \sigma[)_{\sigma \in \bar{\Sigma}}$.

2°) On considère les conditions suivantes :

(i)' pour tout élément x' de V' et pour toute suite $\Sigma_0 = (\sigma_n)_{n>0}$ monotone d'éléments de Σ, il existe $a > 0$ tel que, quel que soit x élément de $\mathcal{H}(\Sigma_0)$, $|\langle x', x \rangle| \leqslant a$.

(ii)' (resp. (iii)') la famille $(\hat{X})_{\sigma \in \Sigma}$ (resp. $\mathcal{H}(\Sigma)$) est équi-intégrable.

Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ une suite d'éléments de $\bar{\Sigma} \cup \Sigma$ croissant strictement vers σ (élément de $\bar{\Sigma}$). Si on suppose que les conditions (i)' et (ii)' sont satisfaites, $X_{\sigma(n)}$ converge, pour la topologie forte sur V, vers un élément de V qui ne dépend que de σ et que l'on notera $\hat{X}_{\sigma-}$. Si on suppose que les conditions (i)' et (iii)' sont satisfaites, et si on pose, pour tout élément σ de $\bar{\Sigma}$, $m((\leftarrow, \sigma[) = \hat{X}_{\sigma-}$, la fonction m se prolonge en une fonction définie sur la tribu des parties de $(\Omega \times T)$ engendrée par les intervalles $((\leftarrow, \sigma[)_{\sigma \in \bar{\Sigma}}$, fonction à valeurs dans V et σ-additive pour la topologie forte sur V. Si Σ contient l'ensemble des temps d'arrêt étagés, si $(X'_t)_{t \ T}$ est une modification du processus $(X_t)_{t \in T}$ et si m' est la mesure associée à X' et construite comme ci-dessus, on a $m = m'$.

Si Σ *est l'ensemble des temps d'arrêt étagés et si* E *est de dimension finie, pour tout élément* σ *de* $\overline{\Sigma}$, $\hat{X}_\sigma = \hat{X}_{\sigma-}$ *si les trajectoires du processus* X_t *sont continues à gauche.*

F - CONTRE-EXEMPLE

F - 1 : BUT DU CONTRE-EXEMPLE.

Le but du contre-exemple qui suit est de montrer qu'un processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (Y_t)_{t \in T})$ *peut induire une mesure vectorielle forte* y *définie sur* $\mathcal{B}_T$ *par* $y(]a,b]) = Y_b - Y_a$ *(mesure à valeurs dans* $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *par exemple) sans, pour autant, être un processus de répartition en moyenne d'ordre 2.*

F - 2 : CONSTRUCTION DU CONTRE-EXEMPLE.

On pose : $\Omega =]0,1]$, $T =]0,1]$, $\mathcal{F}$ = *tribu des boréliens de* $]0,1]$

pour tout $t \in]0,1]$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$, P = *mesure de Lebesgue sur* $]0,1]$

pour tout $n \geq 0$ *et* k *avec* $0 \leq k < 2^n$, $A_{n,k} =]k.2^{-n} , (k+1).2^{-n}]$

X_n = *fonction définie sur* Ω *par* $X_n(\omega) = \begin{cases} +1 & \text{si } \exists k,\ \omega \in A_{n,2k} \\ -1 & \text{si } \exists k,\ \omega \in A_{n,2k+1} \end{cases}$

(fonctions de Rademacher).

Notons que $X_o = 1_\Omega$

Y_t = *processus défini par* $Y_t = \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k} X_k$ *pour* $1 - \frac{1}{n+1} \leq t < 1 - \frac{1}{n+2}$

avec $n \geq o$

et $Y_1 = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k} X_k$ $(Y_1 \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P))$

Pour tout intervalle $]a,b]$ *contenu dans* T*, soit*

$$y(]a,b]) = Y_b - Y_a \quad (\text{élément de } L_2(\Omega, \mathcal{F}, P))$$

la fonction y admet un prolongement (unique) défini et σ-additif sur $\mathcal{B}_T$ *pour la topologie forte de* $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Par contre, soit $A = \bigcup_{\substack{n \geq o \\ o \leq 2k < 2^n}} (A_{n,2k} \times [1 - \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+2}[\ )$;

$(Y_t)_{t \in T}$ *n'est pas un processus de répartition en moyenne d'ordre 2 car, si z était la mesure stochastique associée, on aurait* $||z(A)||_2 = +\infty$.

<u>Preuve</u> :

On notera $L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1°) Il faut d'abord prouver que y admet un prolongement σ-additif pour la topologie de L_2. Puisque L_2 est réflexif et que $t \to Y_t$ est continue à droite, il suffit de prouver que $y(\mathcal{A})$ est une partie bornée de L_2 si $\mathcal{A}$ est l'algèbre engendrée par les intervalles $[a,b[$. D'une part, $Y_1 \in L_2$

puisque $\int Y_1^2 \, d\, P = \sum_{k=o}^{\infty} \int X_k^2 \, d\, P$ (les fonctions de Rademacher étant deux à deux orthogonales) $= \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$. D'autre part, soit ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$; pour tout n, on a $\int \left(\sum_{k=o}^{n} X_{\phi(k)}\right)^2 d\, P \leq$

$\leq \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{(\phi(k))^2}$; en effet, ceci se déduit comme précédemment, de l'orthogonalité deux à deux des fonctions de Rademacher. On en déduit que, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, $||y(A)||_2 \leq \sqrt{2. \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$

2°) Il faut, ensuite, prouver que (Y_t) n'est pas un processus de répartition en moyenne d'ordre 2. Soit $z = \phi(Y_t)$

Soit $B_n = \bigcup_{\substack{o \leq j \leq n, \\ o \leq 2k < 2^j}} (A_{j,2k} \times [1 - \frac{1}{j+1}, 1 - \frac{1}{j+2}[\ )$

Il suffit de vérifier, par récurrence, que $(||z(B_n)||_2)^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

or, $(||z(B_{n+1})||_2)^2 = \int \left(\sum_{j=o}^{n+1} X_j^+\right)^2 d\,P \geq \int \left(\sum_{j=o}^{n} X_j^+\right)^2 d\,P + 2\int \left(\sum_{j=o}^{n} X_j^+\right).X_{n+1}^+\, dP$

$\geq (||z(B_n)||_2)^2 + \frac{2}{n+1}$ d'où le résultat escompté par récurrence.

F - 3 : REMARQUE.

Pour tout $n \geq o$, soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les $(A_{n,k})_{o\leq k<2^n}$ Pour tout $t \in]0,1]$, soit $\mathcal{G}_t$ la tribu définie par $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_n$ si $1 - \frac{1}{n+1} \leq t < 1 - \frac{1}{n+2}$; le processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{G}_t , Y_t)_{t \in T}$ est alors une martingale de carré intégrable continue à droite. Il définit donc un processus de répartition en moyenne d'ordre 2.

Ceci montre qu'on peut avoir un processus de répartition en moyenne d'ordre 2 qui n'induit pas une mesure vectorielle forte sur la tribu des biens mesurables, ni, à fortiori, sur la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_T$.

4 PROCESSUS A VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH

A - GENERALITES

A - 1 : INTRODUCTION.

Pour alléger la présentation, on a considéré, dans les chapitres précédents, des processus réels. Tous les résultats obtenus restent valables si on considère des processus à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sous réserve d'effectuer les modifications convenables évidentes. Le but du présent chapitre est d'amorcer l'étude d'une généralisation des résultats antérieurs quand on considère des processus à valeurs dans un espace de Banach F : en fait, on sera souvent amené à supposer que F est réflexif ou que F est un dual séparable V' d'espace de Banach V.

Le formalisme adopté dans tout le chapitre est indiqué au paragraphe A.

Au paragraphe B, on définit les notations de mesure stochastique et de processus de répartition et on étudie le cas des processus "à variation bornée".

Au paragraphe C, on étudie l'existence de processus de répartition cadlag associés à une mesure stochastique.

Le paragraphe D généralise le chapitre 2. En effet, on prouve l'existence d'une décomposition de Doob-Meyer d'une "quasi-martingale forte". Ceci permet notamment de donner des conditions suffisantes d'existence d'une modification cadlag (théorème D-7) ce qui complète le paragraphe C.

Au paragraphe E, on définit une notion d'intégrale stochastique $\int Y\,dX$ dans le cas où Y et X sont à valeurs dans un espace de Banach. Malheureusement, dans le cas général, cette intégrale ne satisfait pas au "théorème de convergence dominée de Lebesgue".

Le paragraphe F généralise le début du chapitre 3 ; plus précisément, on y donne des conditions nécessaires et suffisantes simples pour avoir une mesure stochastique.

Enfin, il faut indiquer que, dans [18] , M. METIVIER étudie la construction de l'intégrale stochastique, la décomposition d'une martingale de carré intégrable et la formule de Ito au cas où l'on considère un processus à valeurs dans un espace de Hilbert H (divers résultats sont valables en supposant seulement H espace de Banach réflexif). Les méthodes utilisées généralisent celles des chapitres précédents.

A - 2 : DONNEES GENERALES.

De même qu'aux chapitres 1 et 2, on utilise un formalisme adapté à l'étude de processus continus à droite. Toutefois, une grande partie des résultats du chapitre restent valables, sous réserve d'effectuer les modifications convenables, pour des processus continus à gauche.

Pour tout ce chapitre IV, on garde donc les données et notations indiquées en 2-A-2.

De plus, on suppose la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *continue à droite et on se donne un espace de Banach F : on désigne par F' son dual fort et par* $||u||$ *la norme de u dans F.*

A - 3 : LEMME.

Soit $(X_t)_{t\in T}$ *un processus défini à une modification près et tel que, pour tout élément t de T,* X_t *appartient à* $L_1^F(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. *Soit*

$\varepsilon > 0$ et soit σ un temps d'arrêt. On pose :

$$\sigma'(\omega) = \inf. \{t : t > \sigma(\omega),\ t \in Q',\ ||X_t - X_{\sigma(\omega)}|| > \varepsilon\}$$

Alors σ' défini P-p.s. un temps d'arrêt. De plus, si $(X_t)_{t\in T}$ est continu à droite en moyenne, pour tout t,

$$||(X_\sigma - X_t) \cdot 1_{[\sigma' > t]}|| \leqslant \varepsilon \text{ P-p.s.}$$

Enfin, si, pour une suite décroissante $(\sigma(k))_{k>0}$ de temps d'arrêt à valeurs dans Q' décroissant vers un temps d'arrêt $\sigma(0) \leqslant \sigma'$, la suite $X_{\sigma(k)}$ converge en moyenne vers $X_{\sigma(0)}$, alors on a $||X_{\sigma(0)} - X_\sigma|| \leqslant \varepsilon$ P-p.s.

Preuve :

1°) Notons d'abord que σ' est bien défini P-p.s. (c'est-à-dire ne dépend pas de la modification de (X_t) considérée).

Soit $a \in T$.

Soit $A_k = \bigcup_{\substack{u \in Q' \\ u < a + 1/k}} (\{\sigma \leqslant a\} \cap \{||X_{\sigma\wedge u} - X_\sigma|| > \varepsilon\})$

Soit $A = \bigcap_{k>0} A_k$. On vérifie facilement que $A = \{\sigma' \leqslant a\}$ et que $a \in \mathcal{F}_{a+}$ (cf. 1-E-1), ce qui montre que σ' est un temps d'arrêt.

2°) Supposons $(X_t)_{t\in T}$ continu à droite en moyenne. Soit $t \in T$ et $(t(k))_{k>0}$ une suite d'éléments de Q' décroissant vers t ; puisque $(X_{t(k)})$ converge vers X_t en moyenne, et quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $X_{t(k)}$ converge P-p.s. Soit donc B tel que $P(B) = 0$ et tel que $\omega \in \Omega \setminus B \Longrightarrow X_{t(k)}(\omega)$ converge vers $X_t(\omega)$; si $\sigma'(\omega) > t$, pour k assez grand, on a $t(k) < \sigma'(\omega)$ ce qui implique $||X_{t(k)} - X_\sigma|| \leqslant \varepsilon$ et donc, à la limite, $||X_t - X_\sigma|| = \lim_k ||X_{t(k)} - X_\sigma|| \leqslant \varepsilon$.

3°) La fin du lemme se prouve de façon absolument analogue au 2°).

B - PROCESSUS A VARIATION BORNEE EN MOYENNE ET MESURE STOCHASTIQUE

B - 1 : DEFINITION.

Soit $(A_t)_{t \in T}$ *un processus tel que, pour tout élément t de T,* A_t *appartient à* $L_1^F(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *On dira que* $(A_t)_{t \in T}$ *est à variation forte bornée en moyenne s'il existe une constante K telle que, pour toute famille finie croissante* $(t_k)_{1 \leq k \leq n}$ *d'éléments de T,*

$$E \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \|A_{t_{k+1}} - A_{t_k}\| \right\} \leq K$$

B - 2 : PROPOSITION.

Soit (A_t) *un processus à valeurs dans F et à variation forte bornée en moyenne. Soit Q' l'ensemble des rationnels de T. Soit* $(Z_t)_{t \in Q'}$ *le processus défini par* $Z_t = A_t$ *pour t élément de Q'. Alors, à l'indistinguabilité près,* $(Z_t)_{t \in Q'}$ *est un processus laglad. Si* (A_t) *est continu à droite (resp. à gauche) en moyenne, le processus défini par* $B_t = Z_{t+}$ *(resp.* Z_{t-}*) est une modification cadlag (resp. caglad) de* A_t. *Enfin si* (B_t) *et* (C_t) *sont deux modifications laglad de* (A_t) *,* (B_{t+}) *et* (C_{t+}) *d'une part,* (B_{t-}) *et* (C_{t-}) *d'autre part sont indistinguables.*

Preuve :

Soit $K = \text{Sup. } E \left\{ \sum_{k>0} \|A_{t_{k+1}} - A_{t_k}\| \right\}$ (borne supérieure pour toutes les familles finies croissantes d'éléments de T). On a aussi

$E \left\{ \sum_{k>0} \|A_{\sigma(k+1)} - A_{\sigma(k)}\| \right\} \leq K$ pour toute famille finie croissante $(\sigma(k))_{k \geq 0}$ de temps d'arrêt étagés.

Soit $(t_n)_{n>0}$ une suite qui épuise Q'. Soit $T_n = \{t_k\}_{k\leq n}$. Fixons n et j. Soit $\sigma(k)_{k>0}$ la suite (finie) de temps d'arrêt étagés définis par

$$\sigma(1) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma(k+1) = \inf\{t,\ t\in T_n,\ t > \sigma(k), ||X_{\sigma(k)} - X_t|| \geq 1/j\}$$

(avec la convention $\sigma(k+1) = 1$ si l'ensemble ci-dessus est vide). Soit $B_k^{n,j} = \{\sigma(k+1) < 1\}$ = domaine où il y a au moins k "variations" d'amplitude supérieure à 1/j.

On a :

$$K \geq E\left\{\sum_{i>0} ||A_{\sigma(i+1)} - A_{\sigma(i)}||\right\} \geq \frac{k}{j} P(B_k^{n,j})$$

Soit $C = \bigcup_{j>0}\{\bigcap_{k>0}(\bigcup_{n>0} B_k^{n,j})\}$. On a $P(C) = 0$.

Or, si $\omega\in\Omega\setminus C$, le processus $(Z_t)_{t\in Q'}$ n'admet pas de discontinuités oscillatoires sur la trajectoire ω donc $(Z_t)_{t\in Q'}$ est laglad.

On peut donc poser $B_t = Z_{t+}$ $(\forall t)$ etc... La fin de la proposition est immédiate.

B - 3 : DEFINITIONS.

On définit les notions de mesure stochastique à valeurs dans L_p^F et de processus de répartition à valeurs dans F de façon formellement identique à celle indiquée en 1-B-1 et 1-B-2.

B - 4 : PROPOSITION.

Soit (A_t) un processus, à valeurs dans F, continu à droite et à variation forte bornée en moyenne : alors, (A_t) est un processus de répartition.

Preuve :

Soit $(B_t)_{t\in T}$ le processus positif défini par :

$$B_t = \operatorname{Sup} \sum_{k=1}^{n-1} ||A_{t_{k+1}} - A_{t_k}||$$

cette borne supérieure étant prise dans $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour toutes les familles finies croissantes $(t_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $[0, t[$.

On vérifie immédiatement que le processus $(B_t)_{t\in T}$ est croissant et continu à droite en moyenne. Soit b la fonction positive simplement additive définie par : $b(H \times [s, t[) = E[1_H \cdot (B_t - B_s)]$ si H appartient à $\mathcal{F}$.

On vérifie facilement que b est σ-additive. (On peut, par exemple, utiliser 1-D-2 en prenant $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ pour tout t). Or, pour tout élément H de $\mathcal{F}$, $||a(H \times [s, t[)|| \leq b(H \times [s, t[)$. On en déduit la proposition (cf. 1-C-1).

Notons qu'on a prouvé un peu plus que la proposition puisqu'on a prouvé que (A_t) est un processus de répartition pour $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ quel que soit t.

C - EXISTENCE DE MODIFICATIONS CADLAG

C - 1 : PROPOSITION.

Soit (X_t) une martingale forte à valeurs dans un espace de Banach F et continue à droite en moyenne. Alors, (X_t) admet une modification cadlag (fortement par trajectoires) P-p.s.

Preuve :

Soit $\mathcal{C}$ la classe des éléments f de $L_1^F(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tels que la martingale $E(f | \mathcal{F}_{t+}) = M_t$ (définie à une modification près) admette une modification cadlag. Si f est une fonction étagée, f appartient à $\mathcal{C}$ (d'après le résultat classique dans le cas d'une martingale qui s'étend au cas d'une martingale à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie). Dans le cas général, il existe une suite $(f_n)_{n>0}$ de fonctions étagées appartenant à $L_1^F(\Omega, \mathcal{F}^\mu, P)$ telle que, $\forall n$, $E\{||f_n - f||\} < 2^{-n}$. Si on pose M_t^n = modification continue à droite de la martingale $E(f_n | \mathcal{F}^\mu_{t+})$, on prouve comme en 2-B-1 ($||M_t^n||$ est une sous-martingale) que la suite $(M_t^n)_{t \in Q'}$ converge P-p.s. uniformément par trajectoire vers le processus $(M_t)_{t \in Q'}$ donc $(M_t^n)_{t \in T}$ converge P-p.s. uniformément par trajectoire vers le processus $(M_t)_{t \in Q'}$ donc $(M_t^n)_{t \in T}$ converge P-p.s. uniformément par trajectoire vers un processus $(M_t)_{t \in T}$ P-p.s. fortement cadlag. On en déduit immédiatement que $(M_t)_{t \in T}$ est une modification de $E(f | \mathcal{F}^\mu_t) = M'_t$: en effet, si t appartient à T, il existe une suite $(t(n))_{n>0}$ d'éléments de Q' décroissant vers T et telle que $M'_{t(n)} = M_{t(n)}$ converge P-p.s. vers M'_t (puisque M'_t continue à droite en moyenne) ce qui prouve que $M'_t = M_t$ P-p.s.

C - 2 : THEOREME.

Soient F et G deux espaces de Banach en dualité.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ une quasi-martingale faible pour la dualité considérée à valeurs dans F (c'est-à-dire que pour tout élément y' de G, $(< X_t , y' >$ est une quasi-martingale réelle), P-p.s. bornée par trajectoires et faiblement continue à droite en moyenne.

1°) On suppose que G est séparable et est le dual de F. Alors il existe une modification (Y_t) de (X_t) P-p.s. bornée par trajectoires et telle que, pour tout élément t de T, X_s converge P-p.s. vers X_t quand s décroît vers t pour la topologie $\sigma(F, G)$.

2°) On suppose que F est le dual de G et que F ou G sont séparables. Alors il existe une modification (Z_t) de (X_t), unique à l'indistinguabilité près, et telle que, pour tout élément y' de G, le processus réel $< Z_t , y' >$ soit cadlag.

Preuve :

a) Soit $(w_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de la boule unité de G telle que, pour tout élément y de F, on ait $||y|| = \operatorname{Sup}_{n>0} |< w_n , y >|$.

b) en reprenant la démonstration du théorème 1-B-3, on prouve qu'il existe une partie A de Ω telle que $P(A) = 0$ et telle que, si $\omega \notin A$, n, $< w_n , X_t(\omega) >$ n'admet pas de discontinuité oscillatoires pour $t \in Q'$.

c) Par ailleurs, soit t un élément fixé de T et soit $(t(k))_{k>0}$ une suite d'éléments de Q' décroissant strictement vers t. Pour tout n, il existe B_n tel que $P(B_n) = 0$ et une sous-suite extraite de t(k) telle que $< X_{t(k)} , w_n >$ converge vers $< X_t(\omega) , w_n >$ si $\omega \notin B_n$ (d'après la continuité faible en moyenne et le théorème classique sur les suites de variables aléatoires réelles). En utilisant le procédé diagonal, on peut construire une sous-suite $(s(k))_{k\ 0}$ extraite de $(t(k))_{k\ 0}$ et une partie B_t de Ω telles que $P(B_t) = 0$ et telles que, n, si $\omega \notin B_t$, $< X_{s(k)}(\omega) , w_n >$ converge vers $< X_t(\omega) , w_n >$.

d) Plaçons-nous dans le cas du 1°).

Les b) et c) impliquent que, si $\omega \notin (A \cup B_t)$, $\forall n$,

$$\lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in Q'}} < X_s(\omega) , w_n > = < X_t(\omega) , w_n >$$

Mais la construction des $(w_n)_{n>0}$ et le fait que (X_t) soit uniformément borné impliquent que

$$\lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in Q'}} X_s(\omega) = X_t(\omega) \text{ faiblement}$$

ce qui montre que, si on pose, $\forall t$, et ω,

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{s \downarrow t \\ s \in Q'}} \text{ faible } X_s(\omega) \text{ si cette limite existe dans F} \\ \\ 0 \text{ si cette limite n'existe pas} \end{cases}$$

alors le processus $(Y_t)_{t \in T}$ est une modification de (X_t) qui satisfait au 1°) de l'énoncé.

e) Par ailleurs, si F est le dual de G, et si $\omega \notin A$, d'après le b), quand s décroît vers t, $s \in Q'$, $X_s(\omega)$ admet une valeur d'adhérence et donc converge vers une valeur $X_{t+}(\omega)$ pour la topologie $\sigma(F, G)$. En effet, cette valeur d'adhérence est unique, car, s'il en existait deux, à savoir a et b, on aurait w_n tel que $|< w_n , a-b >| > 0$, ce qui contredirait le b).

D'après le c), $(X_{t+})_{t\in T}$ est une modification de (X_t) qui satisfait au 2°) de l'énoncé.

C - 3 : LEMME.

Soit V un espace de Banach. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{G}$ une tribu contenue dans $\mathcal{F}$. Soit f un élément de $L_1^V(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et g un élément de $L_1^V(\Omega, \mathcal{G}, P)$. On a :

$$||g|| \leqslant ||g - E(f|\mathcal{G})|| + E(||f|| \,|\, \mathcal{G}) \text{ P-p.s.}$$

Preuve :

Il faut prouver que, si A appartient à $\mathcal{G}$, on a :

$$\int_A ||g|| \,.\, dP \leqslant \int_A ||g - E(f|\mathcal{G})|| \,.\, dP + \int_A ||f|| \,.\, dP$$

Supposons g étagée, soit $g = \sum_{i\in I} a_i \,.\, 1_{B(i)}$ et soit $A(i) = A\cap B(i)$. (On suppose que $(A(i))_{i\in I}$ est une partition de A). On a :

$$\int_A ||g|| \,.\, dP = \sum_{i\in I} ||a_i|| \,.\, P(A(i)) = \sum_{i\in I} ||\int_{A(i)} g \,.\, dP|| \quad (1)$$

Or, si C appartient à $\mathcal{G}$, on a :

$$||\int_C g \,.\, dP|| \leqslant ||\int_C [g - E(f|\mathcal{G})] \,.\, dP ||+|| \int_C f \,.\, dP||$$

$$\leqslant \int_C |||g - E(f|\mathcal{G})||| \,.\, dP + \int_C ||f|| \,.\, dP$$

Si on reporte cette inégalité dans (1) il vient :

$$\int_A ||g|| \,.\, dP \leqslant \sum_{i\in I} \int_{A(i)} ||[g - E(f|\mathcal{G})]|| \,.\, dP + \int_{A(i)} ||f|| \,.\, dP$$

$$\leqslant \int_A ||g - E(f|\mathcal{G})|| \,.\, dP + \int_A ||f|| \,.\, dP$$

Cette inégalité étant vraie pour toutes les fonctions étagées reste vraie pour les fonctions g fortement intégrables, c. q. f. d.

C - 4 : LEMME ET DEFINITION.

Soit (X_t) un processus à valeurs dans F et tel que, pour tout élément t de T, X_t appartient à $L_1^F(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

Soit $x = \Phi((X_t))$. On a alors :

variation totale de x = Sup. $\sum_{k=1}^{n-1} E(||X_{t(k)} - E(X_{t(k+1)} | \mathcal{F}_{t(k)})||)$

cette borne supérieure étant prise pour l'ensemble des familles finies $(t(k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ croissantes d'éléments de T.

Si cette quantité est finie, on dira que (X_t) est une quasi-martingale forte.

Preuve :

Analogue à celle indiquée en 2-D-1.

C - 5 : PROPOSITION.

Soit V un espace de Banach et $(X_t)_{t\in T}$ une quasi-martingale forte à valeurs dans V. Soit u un élément de V. On pose $Y_t = ||X_t - u||$.

Alors $(Y_t)_{t\in T}$ est une quasi-martingale forte.

Preuve :

Soit y la fonction définie par $y = \Phi(Y_t)$ et soit

$$a = \text{Sup. } E\left\{\sum_{k=1}^{n-1} ||X_{t(k)} - E(X_{t(k+1)} | \mathcal{F}_{t(k)})||\right\}$$

cette borne supérieure étant prise pour toutes les suites croissantes $(t(k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ d'éléments de T.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition finie de Ω' constituée d'éléments de $\mathcal{B}$. D'après le lemme C-3, on a :

$$E(||X_{t(k+1)} - u|| \,|\, \mathcal{F}_{t(k)}) - ||X_{t(k)} - u|| < ||E(X_{t(k+1)} \,|\, \mathcal{F}_{t(k)}) - X_{t(k)}||$$

On en déduit :

$$\sum_{i \in I} [y(A_i)]^- \leqslant a$$

Mais :

$$\sum_{i \in I} [y(A_i)]^+ \leqslant |y(\Omega')| + \sum_{i \in I} [y(A_i)]^- \leqslant |y(\Omega')| + a$$

Soit, finalement :

$$\sum_{i \in I} [y(A_i)] \leqslant |y(\Omega')| + 2a = 2a + |E(||Y_{t(1)} - u|| - ||Y_{t(0)} - u||)|$$

C - 6 : THEOREME.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus qui soit à la fois une quasi-martingale forte à valeurs dans V et un processus de répartition à valeurs dans $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors (X_t) admet une modification $(Z_t)_{t \in T}$ telle que, pour tout temps d'arrêt σ, on a, sauf sur un ensemble de mesure nulle (qui dépend de σ) $Z\,(\omega) = \lim_{s \in Q',\, s \downarrow \sigma(\omega)} Z_s(\omega)$. Il en résulte que, si m_X est la mesure stohcastique associée à X, pour tout temps d'arrêt σ, $m_X(]t(0), \sigma]) = Z_\sigma - Z_{t(0)}$

Preuve :

a) Soit $(Y_t)_{t \in Q'}$ le processus indexé par Q' défini par $Y_t = X_t$ si $t \in Q'$. Pour tout élément t de Q', Y_t est une variable aléatoire fortement intégrable donc le processus $(Y_t)_{t \in Q'}$ prend ses valeurs dans un espace de Banach V_1 sous-espace séparable de V. Soit $(u_k)_{k>0}$ une suite dense dans V_1.

b) D'après la proposition C-4, quel que soit k, le processus $(Y_t^k)_{t \in Q'}$ défini par $Y_t^k = ||Y_t - u_k||$ est une quasi-martingale. Il existe donc un ensemble de mesure nulle A_k tel que, en dehors de A_k, $(Y_t^k)_{t \in Q'}$ admet en tout point de T une limite à droite et une limite à gauche suivant Q'. Soit $A = \bigcup_{k>0} A_k$.

c) Pour tout élément (ω, t) de $(\Omega \times T)$ on pose :

$$Z_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s \downarrow t,\, s \in Q'} Y_s(\omega) & \text{si cette limite existe fortement dans } V_1 \\ 0 & \text{si cette limite n'existe pas dans } V_1. \end{cases}$$

d) Soit σ un temps d'arrêt. Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ une suite de temps d'arrêt étagés à valeurs dans Q' telle que, pour tout ω, $\sigma(n)(\omega)$ décroisse strictement vers $\sigma(\omega)$. Puisque $(X_t)_{t \in T}$ est un processus de répartition, la suite $(X_{\sigma(n)})_{n>0}$ converge dans $L_1^V(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut donc supposer qu'il existe un ensemble de mesure nulle B tel que, si $\omega \notin B$, $Y_{\sigma(n)}(\omega) = X_{\sigma(n)}(\omega)$ converge fortement vers une variable aléatoire $H(\omega)$.

e) Soit $\omega \notin A \cup B$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit k tel que $||H(\omega) - u_k|| \leq \varepsilon$. D'après le d), pour n assez grand, on a $||Y_{\sigma(n)} - u_k|| \leq 2\varepsilon$. Or, d'après le b), la famille $(||Y_s(\omega) - u_k||)_{s \downarrow \sigma(\omega)}$ est convergente donc, il existe $\eta > 0$ tel que $\sigma(\omega) < s < \sigma(\omega) + \eta$ implique $||Y_s(\omega) - u_k|| \leq 3\varepsilon$ soit $||Y_s(\omega) - H(\omega)|| \leq 4\varepsilon$. Autrement dit, si $\omega \notin A \cup B$, $(Y_s(\omega))_{s \downarrow \sigma(\omega)}$ converge fortement vers $H(\omega)$.

f) On en déduit que $Z_\sigma(\omega) = H(\omega)$ P-p.s. En particulier, si $\sigma = t$ (temps d'arrêt constant), $H(\omega) = X_t(\omega)$ P-p.s. donc $Z_t(\omega) = X_t(\omega)$ P-p.s. c'est-à-dire que $(Z_t)_{t \in T}$ est bien une modification de $(X_t)_{t \in T}$. La suite du théorème se vérifie alors immédiatement compte-tenu de ce qui précède.

D - DECOMPOSITION DE DOOB-MEYER D'UNE QUASI-MARTINGALE

D - 1 : THEOREME.

On suppose que F est un dual séparable W' d'espace de Banach W ou un espace réflexif.

Soit a une fonction définie sur la tribu des prévisibles, à valeurs dans F, fortement σ-additive, admettant une variation totale finie notée $|a|$ et qui ne charge pas les processus indistinguables de 0. Alors, il existe un processus (A_t), à valeurs dans F, unique à l'indistinguabilité près, continu à droite, à variation forte bornée en moyenne et tel que, pour tout élément t de T et tout élément H de $\mathcal{F}_t$, on ait :

(i) $$E[1_H \cdot A_t] = \int_{]0,\ t]} E(1_H | \mathcal{F}_{u-}) \cdot da$$

cette dernière intégrale étant une intégrale forte d'une modification continue à gauche (et donc prévisible) de la "martingale" $E(1_H| \mathcal{F}_{u-})$ (martingale par rapport aux tribus $\mathcal{F}_{u-}$).

Preuve : (cf. 2-B-2 et 2-B-3).

1°) L'unicité de A_t se vérifie immédiatement comme en 2-B-2.

2°) Pour tout élément t de T et tout élément H de $\mathcal{F}$, soit

$v_t(H) = \int_{]0,\ t]} E(1_H| \mathcal{F}_{u-}) \cdot da$. La fonction $v_t(.)$ est définie et σ-additive sur $\mathcal{F}$ (théorème de convergence dominée et lemme B-1). De plus, la variation totale de v_t est bornée par celle de a (puisque

$|v_t(H)| \leqslant \int_{]0,\ t]} E(1_H| \mathcal{F}_{u-}) \cdot d|a|$. On peut donc poser $V_t = \frac{dv_t}{d\,P}$ (théorème de Radon-Nikodym vectoriel -théorème 9 de [15] si F est un dual séparable W' d'espace de Banach W ou théorème 11 de [15] si F est réflexif).

Le processus V_t est continu à droite pour la topologie de $L_1^F(\Omega, \mathcal{F}, P)$. De plus, il est à variation forte bornée puisque

$$\sum_{k>0} ||V_{t_{k+1}} - V_{t_k}||_1 \leqslant \text{Sup.} \sum_{k,j} ||v_{t_{k+1}} - v_{t_k}(H_j)|| = \alpha$$

cette borné supérieure étant prise pour toutes les partitions finies $(H_j)_{j\in I}$ $\mathcal{F}$-mesurables de Ω, mais

$$\alpha \leqslant \sum_j \int_{T'} E(1_{H_j} | \mathcal{F}_{u-}) \cdot d|a| \leqslant |a|\ (T' \times \Omega)$$

D'après la proposition B-3, (V_t) admet une modification continue à droite (A_t).

3°) On prouve comme en 2-B-2 que

- si Y appartient à $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\int_{]0,\ t]} E(Y|\ \mathcal{F}_{u-})\ da = \int_\Omega Y \cdot v_t(d\omega)$
- (A_t) est adapté et satisfait à la condition (i) de l'énoncé.

D - 2 : NOTATION.

On désignera par $\mathcal{C}^F$ *l'ensemble des processus* (A_t) *à valeurs dans F, continus à droite et satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) $A_0 = 0$ *et* (A_t) *est à variation forte bornée en moyenne.*

(ii) Si $a = \Phi(A_t)$, *pour tout élément t de T, et tout élément H de* $\mathcal{F}_t$,

$$E[1_H \cdot A_t] = \int_{]0,\ t]} E(1_H|\ \mathcal{F}_{u-}) \cdot da$$

D - 3 : REMARQUES.

a) On a prouvé en B-5 que le lemme 2-C-2 restait exact si on considère un processus (A_t) à valeurs dans F.

b) Si (A_t) appartient à $\mathcal{C}^F$, pour tout élément x' de F', le processus réel $< A_t\ , x' >$ est la différence de deux éléments de $\mathcal{C}$ (cf. 2-C-3).

c) Le théorème d'unicité 2-C-5 reste exact si on remplace $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^F$.

d) $\mathcal{C}^F$ est un espace vectoriel.

e) Le lemme 2-C-6 reste exact si on remplace $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^F$: il suffit de reprendre la démonstration indiquée en 2-C-6 en notant que si (A_t) appartient à $\mathcal{C}^F$ et si $(\sigma(n))_{n>0}$ est une suite de temps d'arrêt étagés décroissant vers σ, $A_{t\wedge\sigma(n)}$ converge en moyenne vers $A_{t\wedge\sigma}$ (vérification facile).

D - 4 : PROPOSITION.

Soit (X_t) une quasi-martingale à valeurs dans F, continue à droite en probabilité et telle que, pour tout élément t de T, la famille (X_σ) est équi-intégrable quand σ parcourt l'ensemble des temps d'arrêt étagés plus petits que t.

Soit $x = \Phi((X_t)_{t \in T})$. Alors x est σ-additive.

Preuve :

La même que celle indiquée en 2-D-3.

D - 5 : THEOREME.

Soit (X_t) une quasi-martingale continue à droite ou continue à droite en moyenne, à valeurs dans un espace de Banach réflexif ou un dual séparable d'espace de Banach. Alors il existe un élément (A_t) de $\mathcal{C}^F$, unique à l'indistinguabilité près, et une martingale locale (M_t) tels que $X_t = A_t + M_t$.

Preuve :

1°) Supposons (X_t) continue à droite.

A des modifications de détail près, la preuve s'effectue comme en 2-D-8 compte-tenu de ce que les lemmes 2-D-6 et 2-D-7 restent exacts quand (X_t) est une quasi-martingale forte à valeurs dans F.

2°) Supposons (X_t) continue à droite en moyenne. On pose alors :

$$\sigma(n) = n \wedge \inf.\{t \in Q' : \|X_t\| > n\}.$$

D'après le lemme A-4, $\sigma(n)$ est un temps d'arrêt $(\forall n)$. On peut alors reprendre la démonstration effectuée en 2-D-8 comme ci-dessus.

D - 6 : THEOREME.

On suppose que F est un espace de Banach réflexif ou dual séparable d'un espace de Banach G. Soit $(X_t)_{t\in T}$ *une quasi-martingale forte à valeurs dans F continue à droite en moyenne. Alors* $(X_t)_{t\in T}$ *admet une modification fortement cadlag.*

Preuve :

Ce théorème se déduit immédiatement de D-5 et C-1.

D - 7 : REMARQUE.

Excepté G-10 (et donc G-11), tous les résultats du paragraphe 2-G restent valables dans le cas vectoriel sous réserves d'effectuer les modifications convenables, par exemple de remplacer $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^F$, a mesure positive finie par a mesure qui admet une variation totale finie (G-6), $a([\sigma]) = a(\Omega')$ (dans G-9) par $\hat{a}\,(\Omega\setminus[\sigma]) = 0$ si $\hat{a}$ est la variation totale de a, etc...

D - 8 : PROPOSITION.

On suppose F réflexif ou dual séparable d'espace de Banach. Soit $(A_t)_{t\in T}$ *un processus à valeurs dans F, à variation forte bornée, continu à droite et tel que* $A_0 = 0$. *Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

1°) $(A_t)_{t\in T}$ *est fortement prévisible.*

2°) $(A_t)_{t\in T}$ *est faiblement prévisible, c'est-à-dire que, pour tout élément u de F',* $(\langle A_t , u\rangle)_{t\in T}$ *est prévisible.*

3°) $(A_t)_{t\in T}$ *appartient à* $\mathcal{C}^F$.

Preuve :

On a 1°) $\Longrightarrow$ 2°). De plus, soit $(A_t)_{t\in T}$ faiblement prévisible, $a = \Phi((A_t))$ et $(B_t)_{t\in T}$ l'élément de $\mathcal{C}^F$ associé à a : $\forall u \in F'$,

$< A_t - B_t , u >$ est nul à l'indistinguabilité près (d'après 2-G-11) donc (A_t) et (B_t) sont indistinguables, ce qui montre que 2°) $\Longrightarrow$ 3°). Enfin 3°) $\Longrightarrow$ 1°) se prouve comme en 2-G compte-tenu de la remarque qui précède.

CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

E - 1 : DONNEES.

Pour tout ce paragraphe on se donne trois espaces de Banach E, F, G et une application bilinéaire continue de E x F dans G qui à $(y, x) \in E \times F$ associe $(y . x) \in G$.

On sait alors qu'il existe une constante K telle que,

$\forall (y, x) \in (E \times F),\ ||y . x|| \leqslant K . ||y|| . ||x||$

On se propose de donner un sens à l'expression $\int Y . dX$ ou Y (resp. X) est un processus à valeurs dans E (resp. F).

E - 2 : LEMME.

L'application de $(E \times L_p^F(\Omega, \mathcal{F}, P))$ dans $L_p^G(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui à $y \in E$ et $f \in L_p^F(\Omega, \mathcal{F}, P)$ associe $g = (y . f) \in L_p^G(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une application bilinéaire continue.

Preuve :

Notons d'abord que la fonction g (définie par $g(\omega) = y . f(\omega)$, $\forall(\omega)$ appartient bien à $L_p^G(\Omega, \mathcal{F}, P)$: en effet, il existe une suite $(f_n)_{n>0}$ de fonctions étagées telles que $\int ||f - f_n||^p\, dP \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ce qui implique $\int ||g - g_n||^p\, dP \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

De plus, ceci montre que, $\forall y \in E$ et $\forall f \in L_p^F(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

$$\|y \cdot f\|_p \leqslant K \cdot \|y\| \cdot \|f\|_p \quad \text{c. q. f. d.}$$

E - 3 : DEFINITION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus de répartition dans L_p^F, c'est-à-dire un processus à valeurs dans F qui induit une mesure stochastique m_X à valeurs dans $L_p^F(\Omega, \mathcal{F}, P)$, (resp. une mesure stochastique m_X à valeurs dans $L_p^F(\Omega, \mathcal{F}', P)$).

Soit $(Y_t)_{t \in T}$ un processus prévisible à valeurs dans E. On dira que Y est L_p-stochastiquement intégrable par rapport à X (resp. m_X) si le processus Y, considéré comme fonction définie sur Ω' et à valeurs dans E, est intégrable au sens de Bartle, cf. [1], par rapport à la mesure m_X. Si A est un ensemble prévisible, on notera donc $\int_A Y \cdot dX$ (resp. $\int_A Y \cdot dm_X$) la valeur sur A de cette intégrale.

E - 4 : PROCESSUS ASSOCIE.

Sous les hypothèses de la définition précédente, la fonction $v(A)$ définie sur $\mathcal{F}'$ par $v(A) = \int_A Y \cdot dX$ (resp. $\int_A Y \cdot dm_X$) est une mesure stochastique (vérification immédiate) à valeurs dans $L_1^G(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donc il sera parfois possible de lui associer un processus de répartition (cf. paragraphe C et théorème D-6). Notons que, même si ce processus n'existe pas, l'intégrale définie en E-3 ci-dessus peut être intéressante.

E - 5 : REMARQUES.

La différence essentielle avec le cas E = R (ou E de dimension finie) est que l'on n'est pas nécessairement dans le cas * de Bartle [1] et que la semi-variation (au sens de Bartle) n'est pas nécessairement finie.

L'extension de l'intégrale stochastique indiquée en 1-D-5 reste évidemment valable ici : on a alors une mesure définie sur un δ-anneau et non sur une tribu.

E - 6 : CAS PARTICULIERS.

Dans [18] M. METIVIER a étudié la construction de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale de carré intégrable à valeurs hilbertiennes. Une des idées directrices de [18] étant d'arriver à la formule de I to, METIVIER y définit l'intégrale stochastique $\int Y\,dX$ quand X et Y sont à valeurs dans un même espace de Hilbert. Ce qui suit montre que, pour la construction de l'intégrale stochastique, il importe seulement que l'espace "d'arrivée" soit un espace de Hilbert.

En plus des données indiquées en E-1, on suppose qu'il existe une constante K telle que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

(i) si f appartient à L_2^G , si a appartient à E, si b appartient à F, si A appartient à $\mathcal{F}$ et si $\int_A f.dP = 0$, alors :

$$\int_A (||a.1_\Omega + f||)^2.dP \leq K.(||a||)^2.(||b||)^2.P(A) + \int_A (||f||)^2.dP$$

(ii) si f appartient à L_2^F , si a appartient à G, si b appartient à E, si A appartient à $\mathcal{F}$ et si $\int_A f.dP = 0$, alors :

$$\int_A (||a.1_\Omega + b.f||)^2.dP \leq K.\ ||b||^2 . \int (||f||)^2.dP + (||a||)^2.P(A)$$

(conditions qui sont satisfaites si G est un espace de Hilbert).

Soit $(X_t)_{t\in T}$ une martingale continue à droite telle que, pour tout élément t de T , X_t appartient à $L_2^F(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit $a = \Phi((||X_t||)^2_{t\in T})$. Soit $(Y_t)_{t\in T}$ un processus tel que la fonction $(||Y_t||)^2$, considérée comme fonction définie sur Ω' , appartienne à $L^2(\Omega', \mathcal{F}', a)$. Alors :

a) $(Y_t)_{t \in T}$ *est stochastiquement intégrable en moyenne d'ordre deux par rapport au processus* $(X_t)_{t \in T}$

b) Soit $(Z_t)_{t \in T}$ *le processus défini par* $Z_t = \int_{\Omega \times]0,t]} Y.dX$

Soit $m = \phi(Z_t)_{t \in T}$ *. On a alors, pour tout ensemble prévisible A :*

$$(||m_Z(A)||)^2 \leq K \int (||Y||)^2.da$$

c) L'intégrale stochastique $\int Y.dX$ *satisfait à la condition* * *de Bartle (cf.* [1] *) et donc au théorème de convergence dominée.*

Preuve :

Analogue à celle indiquée en 1-D-9. Si on dispose de la condition (i), on raisonne par récurrence de la "gauche vers la droite" ; si on dispose de la condition (ii), on raisonne par récurrence de la "droite vers la gauche".

F - CONDITIONS POUR AVOIR UNE MESURE STOCHASTIQUE

F - 1 : THEOREME (généralise 3-C-2).

Soit $p \geq 1$ *. Soit q tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *si* $p > 1$ *ou* $q = \infty$ *si* $p = 1$ *On suppose que F' est séparable ou que F est réflexif. Soit* $(X_t)_{t \in T}$ *un processus tel que, pour tout élément t de T,* X_t *appartient à* $L_p^F(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *; on suppose également que* $(X_t)_{t \in T}$ *est faiblement continu à droite ou que, pour tout élément f de* $\mathcal{L}_q^{F'}(\Omega, \mathfrak{F}, P)$*, le processus* $(X_t\, f)_{t \in T}$ *est continu à droite en moyenne. Soit* $x = \phi((X_t)_{t \in T})$ *. Alors x se prolonge (de façon unique) en une mesure stochastique (mesure vectorielle forte) à valeurs dans* $L_p^F(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *et définie sur le* δ*-anneau engendré par* $\mathcal{A}$ *si et seulement si* $x(\mathcal{A})$ *est une partie relativement faiblement compacte de* $L_p^F(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Preuve :

La condition nécessaire " $x(\mathcal{A})$ partie relativement faiblement compacte " est classique (cf. [2]). Prouvons la réciproque.

On sait que le dual de $L_p^F(\Omega, \mathcal{F}, P)$ peut être identifié à $L_q^{F'}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (cf. [6] si F' est séparable ou [10] si F est réflexif). Compte tenu de [14] page 292, il suffit de prouver que, pour tout élément f de $L_q^{F'}(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la fonction réelle $E(\langle x(.), f\rangle)$ est σ-additive sur $\mathcal{A}$. Pour cela, il suffit de prouver qu'elle satisfait aux conditions 3-C-1 - (i) et (ii). Or, la famille $\langle x(\mathcal{A}), f\rangle$ est une partie relativement faiblement compacte de $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ puisque $x(\mathcal{A})$ est une partie relativement faiblement compacte de $L_p^F(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

La condition 3-C-1 - (ii) se déduit alors de l'équi-intégrabilité de la famille $\langle x(\mathcal{A}), f\rangle$ et la condition 3-C-1 - (i) se déduit de l'équi-intégrabilité de la famille $(X_t - X_0)_{t \in T}$ et de sa continuité à droite ou de sa continuité à droite en moyenne.

F - 2 : REMARQUE.

Si $p > 1$ et si F est réflexif, $L_p^F(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est réflexif (CF. [10]) ; dans ce cas, la condition "$x(\mathcal{A})$ partie faiblement relativement compacte" est équivalente à la condition "$x(\mathcal{A})$ partie (faiblement) bornée".

5 PSEUDO-PROCESSUS

A - GENERALITES

A - 1 : INTRODUCTION.

Le but de ce chapitre est de définir et d'étudier une notion de processus plus générale que la notion usuelle. Cette notion de pseudo-processus est définie au paragraphe A : en simplifiant, elle consiste à se donner la fonctionnelle définie sur les ensembles cylindriques par les valeurs moyennes du processus.

Au paragraphe B, on donne, pour de tels processus, des notations analogues aux notations fondamentales des chapitres 1 et 2.

Au paragraphe C, on montre qu'on peut définir l'intégrale stochastique d'un processus prévisible par rapport à un pseudo-processus.

Au paragraphe D, on montre l'existence d'une décomposition de Doob pour les pseudo-processus.

Dans tout le chapitre, pour faciliter la présentation, on ne considère que des processus réels. De plus, on utilise un formalisme adapté à l'étude de processus "continus à droite" (en un certain sens).

Bien entendu, on pourrait, tout aussi bien, considérer un formalisme adapté à l'étude de processus continus à gauche et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, ou même, avec les modifications convenables, dans un espace de Banach.

A - 2 : DONNEES GENERALES.

Pour tout ce chapitre (sauf mention expresse du contraire), on se donne :

- *un ensemble* Ω.
- *un intervalle* T *de* $\mathbb{R}$ *: pour alléger la présentation, on supposera* $T = [0, 1]$ *(*T *représente le temps). On notera* $\mathcal{J}$ *la famille des parties finies de* T.
- *pour toute partie finie* I *de* T*, une tribu* $\mathcal{F}_I$ *de parties de* Ω*, la famille* $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}}$ *étant telle que* $I \subset I'$ *implique* $\mathcal{F}_I \subset \mathcal{F}_{I'}$*, (*$\mathcal{F}_I$ *représente la famille des évènements observables aux instants associés à* I*). Pour tout élément* t *de* T*, on posera* $\mathcal{A}_t = \bigcup_{I \subset [0, t]} \mathcal{F}_I$ *et* $\mathcal{F}_t$ *= tribu engendrée par* $\mathcal{A}_t$*. Pour alléger l'écriture on posera* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \bigcup_{I \in \mathcal{J}} \mathcal{F}_I$ *et* $\mathcal{F}$ *= tribu engendrée par* $\mathcal{A}$.
- *une fonction* P *définie et positive (simplement additive) sur* $\mathcal{A}$ *dont la restriction à chaque tribu* $\mathcal{F}_I$ *est une probabilité.*

A - 3 : NOTATIONS ($\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}_t, P)$ et $E(.)$).

Soit t *un élément de* T *et* $p \geq 1$*. On désignera par* $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}_t, P)$ *l'ensemble des fonctions* X *définies (simplement additives) sur* $\mathcal{A}$ *et telles que, pour toute partie* ***finie*** I*, la restriction* X^I *de* X *à* $\mathcal{F}_I$ *est une mesure réelle dominée par* P *dont la dérivée de Radon-Nikodym* $\frac{dX^I}{dP}$ *par rapport à* P *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable et de puissance* p*-ième intégrable. Notons qu'une telle fonction* X *est caractérisée par sa restriction à* $\mathcal{A}_t$ *et que, si* s *est inférieur à* t*,* $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}_s, P)$ *est contenu dans* $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}_t, P)$*. Enfin, si* X *est un élément de* $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}_t, P)$ *et* A *un élément de* $\mathcal{A}$ *on posera* $E(1_A \,.\, X) = X(A)$ *(de façon à retrouver la notation usuelle).*

A - 4 : LEMME ET NOTATION : $E(X | \mathcal{A}_s)$.

Soient $p > 1$ *et* (s, t) *un couple d'éléments de* T *avec* $s < t$*. Soit* X *un élément de* $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}_t, P)$*. Soit* A *un élément de* $\mathcal{A}$*. Soit* I *une partie* *finie de T telle que A appartienne à* $\mathcal{F}_I$. *Soit Y la restriction de X à* $(\mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_s)$ *et* $\frac{dY}{dP}$ *la dérivée de Radon-Nikodym de Y par rapport à P. Alors on peut poser* $Z(A) = \int_A \frac{dY}{dP} \cdot dP$ *c'est-à-dire que Z(A) ne dépend que de A (et non de I). De plus, la fonction Z(.) ainsi définie est un élément de* $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}_s, P)$ *qui sera noté* $E(X \mid \mathcal{A}_s)$. *Enfin, pour toute partie finie I de T, si U est la restriction de* $E(X \mid \mathcal{A}_s)$ *à* $\mathcal{F}_I$ *on a* $\frac{dU}{dP} = E(\frac{dX^I}{dP} \mid \mathcal{F}_s)$.

Preuve :

1°) Z(A) ne dépend que de A : en effet, soient I et J parties finies de T telles que A appartienne à $\mathcal{F}_I$ et $\mathcal{F}_J$; soit Y(resp. Y', Y") la restriction de X à $\mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_s$ (resp. $\mathcal{F}_J \cap \mathcal{F}_s$, $\mathcal{F}_{I \cup J} \cap \mathcal{F}_s$) ; on a :

$$\int_A \frac{dY}{dP} \cdot dP = \int_A E(\frac{dY''}{dP} \mid (\mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_s)) \cdot dP = \int_A \frac{dY''}{dP} \cdot dP = \int_A \frac{dY'}{dP} \cdot dP$$

2°) La dernière propriété indiquée dans le lemme se vérifie alors immédiatement d'où on déduit l'avant-dernière.

A - 5 : PSEUDO-PROCESSUS.

On appellera pseudo-processus adapté à la base de processus $(\Omega, (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}}, T, P)$ *et de puissance p-ième intégrable, une application de T dans* $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *telle que, pour tout élément t de T, l'image* X_t *de t par cette application soit un élément de* $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}_t, P)$.

Dans la suite, quand on parlera de processus, sauf mention expresse du contraire, il s'agira toujours d'un processus adapté à la base de processus $(\Omega, (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{J}}, T, P)$. Notons que la définition précédente généralise la notion de "processus défini à une modification près". Notons également le caractère naturel de cette définition : se donner un pseudo-processus (réel), c'est faire correspondre à tout instant t et à tout à tout élément de $\mathcal{A}_t$ (c'est-à-dire à tout évènement observable avant t) un réel m(A) qui, dans le cas traditionnel, n'est autre que $E[1_A \cdot X_t]$ quantité qui ne dépend que de P(A) et de l'espérance de X_t sachant que l'évènement A s'est produit.

A - 6 : REMARQUES.

a) Compte-tenu de A-4, on définit les notions de pseudo-martingales, pseudo-surmartingales et pseudo-sousmartingales comme pour les processus classiques. Par exemple $(X_t)_{t \in T}$ sera une pseudo-martingale si, pour tout couple (s, t) d'éléments de T avec s < t et pour tout élément A de $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}_s$, $X_s(A) = X_t(A)$.

b) Soit $(X_t)_{t \in T}$ un pseudo-processus de puissance p-ième intégrable ; pour toute partie finie I de T, si on pose $\hat{X}_t^I = \frac{dX_t^I}{dP}$ (où X_t^I est la restriction de X_t à $\mathcal{F}_I$), ceci définit un processus $(\Omega, \mathcal{F}_I, P, (\mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_t)_{t \in T}, (\hat{X}_t^I)_{t \in T})$ (processus au sens traditionnel défini à une modification près et de puissance p-ième intégrable). De plus cette famille $((\hat{X}_t^I)_{t \in T})_{I \in \mathcal{J}}$ caractérise le processus $(X_t)_{t \in T}$. Enfin, le processus $(X_t)_{t \in T}$ est une pseudo-martingale si et seulement si, pour toute partie I finie de T, le processus $(\Omega, \mathcal{F}_I, P, (\mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_t)_{t \in T}, (\hat{X}_t^I)_{t \in T})$ est une martingale (au sens usuel).

B - DEFINITIONS DE $\mathcal{M}_p$, ϕ ET Φ

B - 1 : NOTATIONS (cf. 1-A-2).

On pose :

- $T' = T \setminus \{0\}$ *et* $\Omega' = \Omega \times T'$
- $\mathcal{B}'$ = *famille des "rectangles" de la forme* $H \times]s, t]$ *où s et t sont deux éléments de T avec s < t et H est un élément de* $\mathcal{A}_s$.
- $\mathcal{A}'$ = *algèbre de parties de* Ω' *engendrée par* $\mathcal{B}'$.
- $\mathcal{F}'$ = *tribu de parties de* Ω' *engendrée par* $\mathcal{A}'$.

Notons que $\mathcal{F}'$ est la tribu des prévisibles associée à la base de processus $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ (cf. 1-A-5).

B - 2 : LEMME.

Si A appartient à $\mathcal{A}'$, il existe une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}'$ qui constitue une partition de A.

La preuve s'effectue comme en 1-A-3.

B - 3 : NOTATIONS $(\mathcal{M}_p)$ (cf. 1-A-6).

Soit $p \geq 1$. On désignera par $(\mathcal{M}_p)$ l'ensemble des fonctions m à valeurs dans $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$, définies et simplement additives sur $\mathcal{A}'$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout élément $(H \times]s, t])$ de $\mathcal{B}'$ et tout élément A de $\mathcal{A}$,

$$[m(H \times]s, t])](A) = [m(\Omega \times]s, t])](A \cap H)$$

(ii) pour tout élément t de T, $m(\Omega \times]0, t])$ appartient à $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}_t, P)$.

Notons que la condition (i) équivaut à la condition suivante :

(i)' pour tout élément $(H \times]s, t])$ de $\mathcal{B}'$, tout élément B de $\mathcal{A}'$ et tout élément A de $\mathcal{A}$,

$$(m[(H \times]s, t]) \cap B])(A) = (m[(\Omega \times]s, t]) \cap B])(A \cap H)$$

(en effet, par linéarité, il suffit de vérifier ceci pour tout élément B de $\mathcal{B}'$, ce qui est immédiat).

B - 4 : DEFINITIONS ET LEMME.

On dira que σ est un temps d'arrêt $\mathcal{A}$-étagé si σ est une application de Ω dans T telle que $\sigma = \sum_{k=1}^{n} 1_{A(k)} \cdot t(k)$ où $(t(k))_{1\leq k\leq n}$ est une famille finie d'éléments de T et $(A(k))_{1\leq k\leq n}$ est une partition finie *de Ω constituée d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que, pour tout k, A(k) appartient à $\mathcal{B}_{t(k)}$.*

Dans ce cas, si $(X_t)_{t\in T}$ est un pseudo-processus de puissance p-ième intégrable, on posera, pour tout élément A de $\mathcal{B}$,

$X_\sigma(A) = \sum_{k=1}^{n} X_{t(k)}(A \cap A(k))$ *et ceci définit un élément de $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{B}, P)$.*

On vérifie immédiatement que X_σ ne dépend que de σ (et non de l'écriture de σ) et que X_σ appartient à $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

De plus, on prouve, comme en 1-A-4, que l'algèbre $\mathcal{B}'$ est identique à l'algèbre engendrée par les intervalles stochastiques $]0, \sigma]$ où σ parcourt l'ensemble des temps d'arrêt $\mathcal{B}$-étagés.

B - 5 : LEMME ET NOTATIONS.

Soit $p \geq 1$ et $(X_t)_{t\in T}$ un pseudo-processus (réel) de puissance p-ième intégrable (cf. A-5). On peut alors définir la fonction ϕ (resp. Φ) de façon formellement rigoureusement identique à celle indiquée en 1-A-8 (resp. 1-A-9). L'application ϕ est encore une bijection de l'ensemble des pseudo-processus de puissance p-ième intégrable tels que $X_0 = 0$ dans $\mathcal{M}_p$. De plus, pour tout couple (σ, σ') de temps d'arrêt étagés (cf. B-4) avec $\sigma < \sigma'$ on a $[\phi((X_t)_{t\in T})]\,(]\sigma, \sigma']) = X_{\sigma'} - X_\sigma$.

Enfin, $\Phi((X_t)_{t\in T})$ ***est nulle*** *(resp. positive, négative) si et seulement si $(X_t)_{t\in T}$ est une pseudo-martingale (resp. une pseudo-surmartingale, une pseudo-sousmartingale).*

Preuve :

La vérification directe de ce lemme est facile quoique fastidieuse : elle peut être simplifiée en notant que, si I est une partie finie de T, on peut appliquer 1-A-8 au processus $(Y_t^I)_{t\in T}$ défini par $Y_t^I = \frac{dX_t^I}{dP}$ (cf. A-6-b).

B - 6 : REMARQUE.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un pseudo-processus. Soit I une partie finie de T. Soient A un élément de $\mathcal{F}_I$ et $B = (H \times]s, t])$ un élément de $\mathcal{B}'$ tel que H appartienne à $\mathcal{F}_I$. Si $x = \phi((X_t)_{t \in T})$, si $(\hat{X}_t^I)_{t \in T}$ est le processus défini comme en A-6-b) et si $x' = \phi((\hat{X}_t^I)_{t \in T}$, on a :

$$E\left[x(B) \cdot 1_A\right] = E\left[x'(B) \cdot 1_A\right].$$

Par contre, cette égalité ne subsiste plus pour un élément quelconque B de $\mathcal{B}'$.

C - MESURE ET INTEGRALE STOCHASTIQUES CYLINDRIQUES

C - 1 : DEFINITION.

Soit $p \geq 1$. Soit X un élément de $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout élément I de $\mathcal{J}$, on pose $||X||_p^I = ||\frac{dX^I}{dP}||_p$ (où X^I désigne, comme toujours, la restriction de X à $\mathcal{F}_I$) ; ceci définit une semi-norme. On appellera topologie cylindrique d'ordre p la topologie définie sur $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par cette famille $(||.||^I)_{I \in \mathcal{J}}$ de semi-normes.

Cette topologie est localement convexe et séparée (cf. [3]). On vérifie immédiatement que $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est complet pour cette topologie et que, pour tout élément t de T, $\tilde{L}_p(\Omega, \mathcal{A}_t, P)$ est fermé pour cette topologie.

C - 2 : DEFINITION.

Soit $p \geq 1$. On dira que m est une mesure stochastique cylindrique en moyenne d'ordre p si m est un élément de $\mathcal{M}_p$ qui se prolonge (de façon *unique)en une mesure définie sur $\mathcal{F}'$, à valeurs dans $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et σ-additive pour la topologie cylindrique d'ordre p (par abus de notation, ce prolongement sera noté comme la fonction initiale).*

C - 3 : REMARQUE.

Soit $p \geq 1$ et soit m un élément de $\mathcal{M}_p$.

Pour toute partie finie I de T, soit m^I la fonction à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}_I, P)$ et définie sur $\mathcal{A}'$ par ($\forall A \in \mathcal{A}'$):

$m^I(A) = \frac{d[m(A)]^I}{dP}$ où $[m(A)]^I$ désigne la restriction à $\mathcal{F}_I$ de m(A). On vérifie facilement que m est une mesure stochastique cylindrique en moyenne d'ordre p si et seulement si, pour toute partie finie I de T, m^I se prolonge en une fonction définie sur $\mathcal{F}'$, à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}_I, P)$ et σ-additive pour la topologie forte de L_p.

C - 4 : DEFINITION.

On peut alors définir la notion de pseudo-processus de répartition en moyenne d'ordre p de façon absolument analogue à celle indiquée en 1-B-2.

C - 5 : LEMME ET DEFINITIONS.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un pseudo-processus de répartition en moyenne d'ordre p. Soit $(Y_t)_{t \in T}$ un processus prévisible (au sens usuel). On dira que $(Y_t)_{t \in T}$ est stochastiquement cylindriquement intégrable en moyenne d'ordre p par rapport à $(X_t)_{t \in T}$ si, pour toute partie finie I de T, le processus $(Y_t)_{t \in T}$, considéré comme fonction réelle définie sur $\Omega' = \Omega \times T'$ est intégrable (pour la topologie forte de $L_p(\Omega, \mathcal{F}_I, P)$ par rapport à la mesure $x^I(.)$ à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}_I, P)$ et définie sur $\mathcal{F}'$ par (si A *appartient à* $\mathcal{F}'$*)* $x^I(A) = \frac{d}{dP}\,[x(A)]^I$ *où* $[x(A)]^I$ *désigne la restriction à* $\mathcal{F}_I$ *de* $x(A) = [\phi((X_t)_{t\in T})](A)$*. Dans ce cas, si A appartient à* $\mathcal{F}_I$ *et si B appartient à* $\mathcal{F}'$*, on peut poser :*

$$[z(B)](A) = E[1_A \cdot \int_B Y_u \cdot dx^I(u)]$$

(c'est-à-dire que cette quantité ne dépend que de A et non de $\mathcal{F}_I$*). De plus, la fonction z(.) ainsi définie est une mesure stochastique cylindrique en moyenne d'ordre p. Enfin, si t appartient à T et si A appartient à* $\mathcal{F}_I$ *, on peut poser*

$$Z_t(A) = E[1_A \cdot \int_{]0,\, T]} Y_u \cdot dx^I(u)]$$

et on a $\phi((Z_t)_{t\in T}) = z$ *donc* $(Z_t)_{t\in T}$ *est un pseudo-processus de répartition en moyenne d'ordre p. Ce processus sera appelé intégrale stochastique (cylindrique en moyenne d'ordre p) de* $(Y_t)_{t\in T}$ *par rapport à* $(X_t)_{t\in T}$*.*

Preuve :

Notons d'abord que, en général, $x^I(.)$ n'est pas une mesure stochastique (cf. B-6).

1°) Soit $x = \phi((X_t)_{t\in T})$.

Soit $A \in (\mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_{I'})$. On veut prouver que :

(1) $$E[1_A \cdot \int_B Y_u \cdot dx^I] = E[1_A \cdot \int_B Y_u \cdot dx^{I'}]$$

Si B et C sont deux éléments de $\mathcal{A}'$, on a :

$$E[1_A \cdot x^I(B \cap C)] = [x(B\cap C)](A) = E[1_A \cdot x^{I'}(B \cap C)]$$

Donc la formule (1) est vérifiée pour $Y = 1_C$. Par linéarité, cette formule reste vérifiée si Y est un processus $\mathcal{A}'$-étagé. Mais $\mathcal{A}'$ engendre la tribu des prévisibles donc la formule (1) reste vérifiée pour tout processus (Y_t) prévisible intégrable par rapport à X^I et $X^{I'}$ et pour tout ensemble prévisible B par passage à la limite.

2°) On a donc $z^I(B) = \int_B Y_u \cdot dx^I(u)$ ce qui montre que $z^I(.)$ est une mesure définie sur $\mathcal{F}'$ et à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}_I, P)$. Pour prouver que z est une mesure stochastique cylindrique, il suffit donc de prouver (cf. C-3) que la restriction de z à $\mathcal{A}'$ appartient à $\mathcal{M}_p$ (cf. B-3).

D'une part, si $D \subset]0, t]$, $x^I(D)$ est un élément de $L_p(\Omega, \mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_t, P)$ (puisque x appartient à $\mathcal{M}_p$ et que $L_p(\Omega, \mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_t, P)$ est fermé pour la topologie forte) ; on en déduit, par linéarité et passage à la limite, que $\int_{]0, t]} Y_u \cdot dx^I(u)$ appartient à $L_p(\Omega, \mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_t, P)$ donc la condition B-3-(ii) est satisfaite.

Il reste à prouver, d'autre part, la condition B-3-(i) : soit I une partie finie de T, telle que H et A appartiennenent à $\mathcal{F}_I$. On a :

$$② = (z(H \times]s, t])] (A) = E[1_A \cdot z^I(H \times]s, t]) =$$
$$E[1_A \cdot \int_{H \times]s, t]} Y_u \cdot dx^I(u)]$$

Or cette dernière quantité est égale à

$$E[1_{A \cap H} \cdot \int_{\Omega \times]s, t]} Y_u \cdot dx^I(u)]$$

pour $Y = 1_B$ avec $B \in \mathcal{A}'$ (puisque $x \in \mathcal{M}_p$: cf. B-3-(i)') donc aussi pour Y $\mathcal{A}'$-étagé et donc pour Y prévisible par passage à la limite. On a alors :

$② = E[1_{A \cap H} \cdot z^I(\Omega \times]s, t])] = [z(\Omega \times]s, t]) (A \cap H)$ ce qui prouve B-3-(i).

3°) La fin est alors immédiate.

C - 6 : REMARQUE.

D'après la définition précédente, l'intégrale stochastique cylindrique en moyenne d'ordre p satisfait au théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il en résulte notamment que tout processus prévisible $(Y_t)_{t \in T}$ uniformément borné est stochastiquement cylindriquement intégrable en moyenne d'ordre p par rapport à toute mesure cylindrique stochastique en moyenne d'ordre p.

D - DECOMPOSITION DE DOOB

D - 1 : PROPOSITION.

Exceptionnellement, pour cette proposition et la suivante, on reprend les hypothèses et notations du chapitre 2. De plus, soit $\hat{\mathcal{F}}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$. *Pour tout élément t de T soit* $\hat{\mathcal{F}}_t = \hat{\mathcal{F}} \cap \mathcal{F}_t$. *Soit* $\hat{\mathcal{F}}'$ *(resp.* $\hat{\mathcal{C}}$ *) la tribu des prévisibles (resp. la famille des processus* C_t *croissants naturels tels que* $C_0 = 0$ *comme défini en 2-C-3) relativement à la base de processus* $(\Omega, \hat{\mathcal{F}}, P, (\hat{\mathcal{F}}_t)_{t \in T})$. *Soit* $(A_t)_{t \in T}$ *un élément de* $\mathcal{C}$ *et* $a = \Phi((A_t)_{t \in T})$. *Soit* $\hat{a}$ *la restriction de a à* $\hat{\mathcal{F}}'$. *Soit* $(\hat{A}_t)_{t \in T}$ *l'élément de* $\hat{\mathcal{C}}$ *associé à* $\hat{a}$ *comme indiqué en 2-B-2 (relativement à la base de processus* $(\Omega, \hat{\mathcal{F}}, P, (\hat{\mathcal{F}}_t)_{t \in T})$*). On a alors :*

1°) pour tout élément t de T, $\hat{A}_t = E(A_t \mid \hat{\mathcal{F}})$

2°) $(\hat{A}_t)_{t \in T}$ *appartient à* $\hat{\mathcal{C}}$.

Preuve :

1°) Puisque $\hat{A}_t$ est $\hat{\mathcal{F}}$-mesurable, il suffit de prouver que, pour tout élément H de $\hat{\mathcal{F}}$, $E(1_H \cdot \hat{A}_t) = E(1_H \cdot A_t)$. Or :

$$E(1_H \cdot \hat{A}_t) = \int_{]0,\, t]} E(1_H \mid \hat{\mathcal{F}}_{u-}) \cdot d\hat{a} \text{ (cf. C-3-(ii))}$$

$$= \int_{]0,\, t]} E(1_H \mid \hat{\mathcal{F}}_{u-}) \cdot da \text{ (puisque } E(1_H \mid \hat{\mathcal{F}}_{u-}) \text{ est}$$

$\hat{\mathcal{F}}$ -mesurable)

$$= \int_{]0,\, t]} E(1_H \mid \mathcal{F}_{u-}) \cdot da \text{ (puisque } H \in \hat{\mathcal{F}})$$

$$= E(1_H \cdot A_t) \text{ (cf. C-3-(ii))}.$$

2°) Puisque $(\hat{A}_t)$ est croissant et continu à droite, il suffit de noter que $(\hat{A}_t)$ est prévisible c'est-à-dire $\mathcal{F}'$-mesurable (puisque $\hat{\mathcal{F}}$-mesurable).

D - 2 : PROPOSITION.

Rappelons qu'on reprend les hypothèses et notations du chapitre 2.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T})$ *une quasi-martingale de la classe D(cf.* [19]*) et continue à droite en moyenne. Soit* $X_t = V_t + M_t$ *sa décomposition de Doob-Meyer où* (V_t) *est la différence de deux processus croissants naturels et* (M_t) *une martingale. Soit* $\hat{\mathcal{F}}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *; pour tout élément t de T, soient* $\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}$, $\hat{X}_t = E(X_t | \hat{\mathcal{F}})$, $\hat{V}_t = E(V_t | \hat{\mathcal{F}})$ *et* $\hat{M}_t = E(M_t | \hat{\mathcal{F}})$*. On a alors, à une modification près :*

1°) $(\hat{X}_t)$ *est une quasi-martingale de la classe D.*

2°) $(\hat{V}_t)$ *est la différence de deux processus croissants naturels (par rapport à* $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ *et à* $(\Omega, \hat{\mathcal{F}}, P, (\hat{\mathcal{F}}_t)_{t\in T})$*).*

3°) $(\hat{M}_t)$ *est une martingale. Autrement dit* $\hat{X}_t = \hat{V}_t + \hat{M}_t$ *est, à une modification près, la décomposition de Doob-Meyer de la quasi-martingale* $(\hat{X}_t)$*.*

Preuve :

On a évidemment $\hat{X}_t = \hat{V}_t + \hat{M}_t$; de plus, on vérifie immédiatement le début du 3°) ; le 2°) se déduit de D-1 d'où on déduit le 1°).

D - 3 : THEOREME.

On reprend les hypothèses et notations indiquées en A-2 et B-1. Soit $(X_t)_{t\in T}$ *un pseudo-processus (cf. A-5). On suppose que, pour toute partie finie I de T,* $(\Omega, \mathcal{F}_I, P, (\mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_t)_{t\in T}, (\hat{X}^I_t)_{t\in T})$ *(où* $\hat{X}^I_t$ *est défini comme en A-6-b)) est une quasi-martingale continue à droite de la classe D (cf.* [19] *et* [23]*) ; soit* $\hat{X}^I_t = \hat{V}^I_t + \hat{M}^I_t$ *la décomposition de Doob de cette quasi-martingale où* $\hat{V}^I_t$ *est une martingale ; on peut alors poser, pour tout élément A de* $\mathcal{F}_I$, $V_t(A) = E(1_A . \hat{V}^I_t)$ *et* $M_t(A) = E(1_A . \hat{M}^I_t)$

(c'est-à-dire que ces quantités ne dépendent que de A et non de $\mathcal{F}_I$) ; de plus $(M_t)_{t \in T}$ est une pseudo-martingale et $(V_t)_{t \in T}$ un "pseudo-processus naturel à variation bornée" (c'est-à-dire que, pour toute partie I finie de T, $\hat{V}_t^I$ est la différence de deux processus croissants naturels) ; enfin; cette décomposition est unique.

<u>Preuve</u> :

La seule difficulté est de montrer que, si $A \in (\mathcal{F}_{I'} \cap \mathcal{F}_I)$, $E(1_A \cdot \hat{V}_t^{I'}) = E(1_A \cdot \hat{V}_t^I)$; on peut supposer $I' \subset I$; cette égalité résulte alors facilement de D-2 (on prend $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{I'}$ et $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^I$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. G. BARTLE : *A general bilinear vector integral.*
Studia Math. 15, p. 337-352 (1956).

[2] R. G. BARTLE, N. DUNFORD and J. SCHWARTZ : *Weak compactness and vector measures.*
Canadian J. Math., 7, 1955, p. 289-305.

[3] N. BOURBAKI : *Espaces vectoriels topologiques.*
Hermann - Paris.

[4] D. L. BURKHOLDER : *Martingale transforms.*
Ann. Math. Statist. 37, 1966, p. 1495-1505.

[5] DELLACHERIE : *Capacités et pracessus stochastiques*
Springer Verlag - 1972

[6] N. DINCULEANU : *Vector measures.*
Pergamon Press - 1967.

[7] C. DOLEANS : *Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de classe (D).*
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw., 9, 1968, p. 309-314.

[8] C. DOLEANS-DADE et P. A. MEYER : *Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales.*
Séminaire de Probabilités IV. Lecture notes in mathematics - Vol. 124 - Springer Verlag - 1970.

[9] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ : *Linear operators, Part. I.*
John Wiley and Sons - New-York - 1957.

[10] A. and C. IONESCU-TULCEA : *Topics in the theory of lifting.*
Springer Verlag - 1969.

[11] K. ITO et S. WATANABE : *Transformation of Markov processes by additive functionals.*
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15, 1965, p. 13-30.

[12] I. KLUVANEK : *Completion of vector measures spaces.*
Rev. Roumaine, Math. Pures Appl. - 1967 - Tome XII, N° 10, p. 1483-1488.

[13] H. KUNITA et S. WATANABE : *On square integrable martingales.*
Nagoya Math. J. - 30 - 1967 - p. 209-245.

[14] M. METIVIER : *Limites projectives de mesures, martingales, applications.*
Annali di Math. Pura Appl. (IV) - 63 - 1963.

[15] M. METIVIER : *Martingales à valeurs vectorielles, applications à la dérivation des mesures vectorielles.*
Ann. Inst. Fourier, 17, fasc. 2, 1967, p. 175-208.

[16] M. METIVIER : *Mesures vectorielles et intégrale stochastique.*
Séminaire de Rennes - Juin 1972 - RENNES.

[17] M. METIVIER : *Stochastic integral and vector valued measures.*
Proceedings of the european meeting of statistical
Budapest, sept. 1972.

[18] M. METIVIER : *Intégrale stochastique par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif.*
A paraître.

[19] P. A. MEYER : *Probabilités et potentiel.*
Hermann - Paris - 1966.

[20] M. MOTOO and S. WATANABE : *On a class of additive functionnals of Markov process.*
J. Math. Kyoto Univ. 4 - 1965 - p. 429-469.

[21] K. MURALI RAO : *On decomposition theorems of Meyer.*
Math. Scand. 24 - 1969 - p. 66-78.

[22] K. MURALI RAO : *Quasi-martingales.*
Math. Scand. 24 - 1969 - p. 79-92.

[23] J. NEVEU : *Bases mathématiques du calcul des Probabilités.*
Masson et Cie - Paris - 1964.

[23'] S. OREY : *F.-processes.*
Proc. Fifth Berkeley Symposium on Stat. and Prob.
II_1 , 301-313.

[24] J. PELLAUMAIL : *Un exemple d'intégrale d'une fonction réelle par rapport à une mesure vectorielle : l'intégrale stochastique.*
C. R. Acad. Sc. Paris - t. 274 - p. 1369-1372 - Série A.

[25] J. PELLAUMAIL : *Sur la décomposition de Doob-Meyer d'une quasi-martingale.*
C.R. Acad. Sc. Paris - T. 274 - p. 1563-1565 - Série A.

[26] B. J. PETTIS : *On integration in vector spaces.*
Trans. Amer. Math. Soc. 4.4, 1938 - p. 277-304.

[27] M. SION : *Outer measures with values in a topological group.*
Proc. London Math. Soc. -3 - 19 - 1969 - p. 89-106.

[28] E. THOMAS : *L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle.*
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 20, fasc. 2, 1970.

TABLE OF CONTENTS

ABSTRACT

The purpose of this paper is to show that the stochastic integral of a previsible process Y, with values in V, with respect to a process X can be defined as the integral of Y, considered as a function with values in V, with respect to a vector measure (stochastic measure) related to X and defined on the σ-algebra of previsible sets.

That construction underlines a few fundamental properties of the stochastic integral ; besides, it enables us to apply to the stochastic integral the classical results on the vector integration.

In ch. I, we define such a stochastic integral and we prove the fundamental results related to it ; in order to simplify the presentation, we shall consider real processes only.

In ch. II, we give a simplify proof of the existence of the Doob-Meyer's decomposition for a real quasi-martingale : this proof is essentially based on the use of a real measure defined on the σ-algebra of previsible sets (cf. [7]) ; that measure is none other than the expectation of the stochastic measure considered in ch. I.

In ch. III, we give a necessary and sufficient condition to obtain a stochastic measure. It enables us to prove that a martingale $(M_t)_{t \in T}$ continuous on the right such that $M_t \in L_p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ with $p > 1$ induces a stochastic measure. Besides, we show that the results obtained remain valid in a more general case.

In ch. IV, we show that the methods used in ch. I and II seem quite adequate for the study of processes with values in Banach spaces.

In ch. V, we define a more general notion of a process than the usual one ; in this definition, the finite systems of joint probabilities play a fundamental part. We than show that the above-mentioned results (construction of the stochastic integral and Doob's decomposition) remain valid in this case.