Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GÉRARD BESSON

Géodésiques des surfaces de révolution

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome S9 (1991), p. 33-38
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991__S9__33_0>

RENCONTRES DE THEORIE SPECTRALE ET GEOMETRIE
GRENOBLE 1991
(Aussois du 7 au 14 avril)

Géodésiques des surfaces de révolution

Gérard BESSON

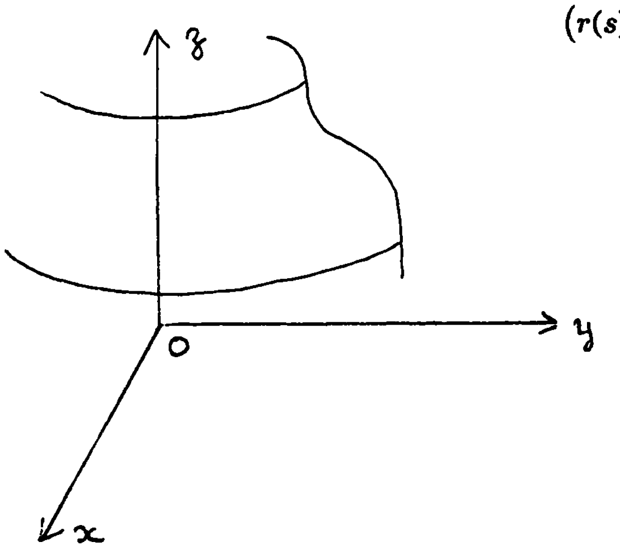
Institut Fourier*
Université de Grenoble 1
B.P. 74
38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX
FRANCE

* Laboratoire associé au CNRS.

Nous décrirons brièvement la méthode de détermination des géodésiques des surfaces de révolution.

Paramétrons la surface en coordonnées cylindriques : dans le plan YOZ la méridienne est donnée par

$$\big(r(s), z(s)\big)$$



on la suppose de plus paramétrée par l'abscisse curviligne c'est-à-dire $\dot{r}^2 + \dot{z}^2 \equiv 1.$

Surface de révolution. — Elle est donnée par

$$(s,\theta) \longmapsto \big(r(s)\sin\theta, r(s)\cos\theta, z(s)\big) = f(s,\theta).$$

① *Espace tangent*

$$f_s = \frac{\partial f}{\partial s} = \begin{pmatrix} \dot{r} & \sin\theta \\ \dot{r} & \cos\theta \\ \dot{z} & \end{pmatrix} \quad f_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r & \cos\theta \\ -r & \sin\theta \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

f_s est tangent aux méridiens et f_θ est tangent aux parallèles.

② *Métrique riemannienne*

$$\begin{pmatrix} g_{ss} & g_{s\theta} \\ g_{\theta s} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

③ *Connexion canonique*

On calcule la dérivation dans $\mathbb{R}^3$ et on projette sur la surface. On trouve alors

$$D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} = 0,\ D_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\dot{r}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} = -r\dot{r}\frac{\partial}{\partial s}$$

On voit tout de suite que

i) les méridiennes sont géodésiques.

ii) si $\dot{r}(s_0) = 0$, le parallèle correspondant est géodésique. Ce sont les parallèles extrémaux.

④ *Courbure de Gauss*

$$K(s,\theta) = -\frac{\ddot{r}}{r}$$

Géodésiques. — On peut facilement calculer l'équation des géodésiques mais nous procéderons de manière différente.

Soit $(s, \theta, \delta s, \delta\theta)$ les coordonnées tangentes et (s, θ, S, Θ) les coordonnées cotangentes. Le vecteur tangent à une géodésique sera donc

$$\left(s(t), \theta(t), \dot{s}(t), \dot{\theta}(t)\right).$$

Dans le fibré cotangent le hamiltonien est donné par la matrice inverse de la métrique. On a donc

$$H = S^2 + \frac{1}{r^2(s)}\Theta^2.$$

Les équations de Hamilton donnent alors,

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \text{ d'où } \Theta \equiv \text{ constante le long des trajectoires.}$$

La coordonnée Θ fournit donc (au moins localement) une intégrale première du mouvement. Nous sommes en présence d'un système ayant un nombre maximal d'intégrales premières, à savoir H et Θ : le système est complètement intégrable. Traduisons l'équation

$$(*) \qquad \Theta = \text{ constante le long des trajectoires,}$$

sur le fibré tangent. Par la dualité donnée par la métrique, à un champ de vecteurs $u = (s, \theta, \delta s, \delta\theta)$ correspond la 1-forme

$$X \longmapsto \langle u, X\rangle$$

soit

$$(\delta_s)ds + r^2(s)(\delta\theta)d\theta$$

pour laquelle la coordonnée Θ vaut :

$$\Theta = r^2(s)(\delta\theta)$$

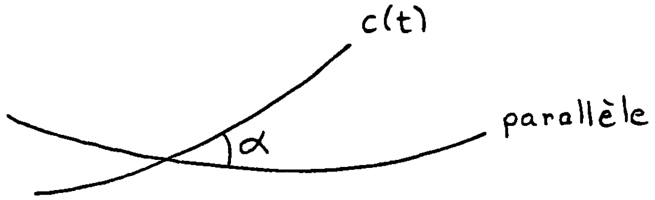
l'équation (*) donne donc, le long des trajectoires du flot géodésique (lu dans le fibré tangent),

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = \text{ constante } = C_0}$$

c'est la célèbre *relation de Clairaut.*

Remarque. — Cette relation n'est rien d'autre que la *loi des aires* appliquée à la projection de la courbe dans le plan horizontal, traduisant la préservation d'un moment.

Description. — On utilise le changement de paramètre suivant :



$\alpha \in [0, \pi/2]$

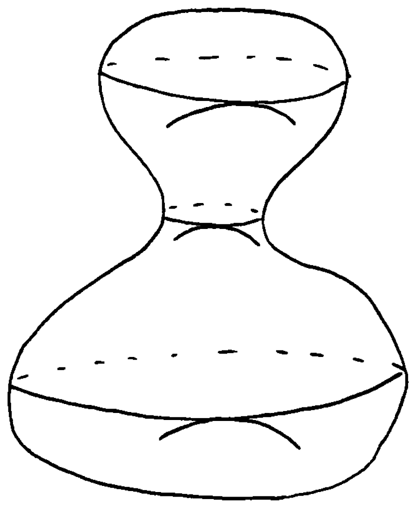
On remarque

$$\cos\alpha = \frac{|\langle \partial f/\partial\theta, \dot{c}(t)\rangle|}{|\partial f/\partial\theta|} \quad (c \text{ est paramétrée par la longueur d'arc})$$
$$= r|\theta'|$$

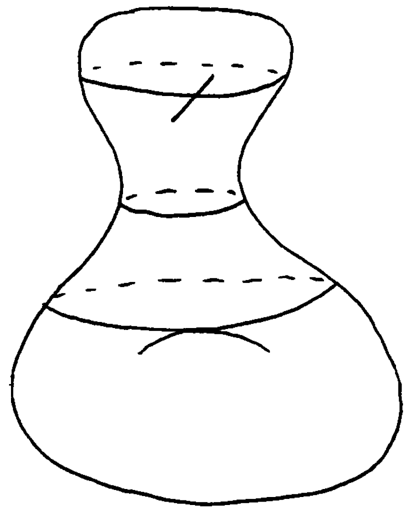
d'où l'autre version de la relation de Clairaut

$$\boxed{r\cos(\alpha) = \text{ constante } = |C_0|}$$

il apparait clairement les deux situations suivantes



1. Cas impossible



2. Cas possible

En effet, dans le premier cas les parallèles sont des géodésiques et la tangence est donc impossible.

Etude de la relation de clairaut.

① si $C_0 = 0$ on trouve $\dot{\theta} = 0$ et C est une méridienne.

② supposons $C_0 \neq 0$.

$$r^2\dot{\theta} = C_0$$

quitte à changer de paramètre on peut supposer que C_0 et donc $\dot{\theta}$ sont positifs (strictement). En prenant θ comme variable on trouve aisément

$$\boxed{r^4 = C_0^2\left(r^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2\right)}$$

ou

$$\boxed{\frac{ds}{d\theta} = \pm\frac{r}{|C_0|}\sqrt{r^2 - C_0^2}}$$

Rappelons que s est l'abscisse curviligne le long de la méridienne. Les points où $\frac{ds}{d\theta}$ s'annulent sont donc extrêmement importants. Il est immédiat que

$$\frac{ds}{d\theta}(t_0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{ds}{dt}(t_0) = 0.$$

En un tel point deux cas se présentent

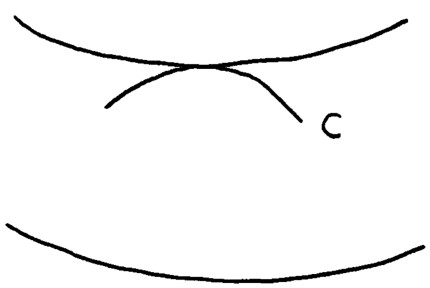
a) $\ddot{s}(t_0) = \frac{d^2s}{dt^2}(t_0) = 0$. D'après l'équation de Clairaut, r atteint un extremum en t_0. On voit de plus que la géodésique est alors tangente au parallèle correspondante, car $\dot{\theta}(t_0)$ est non nul (on a exclu le cas du méridien).

L'équation des géodésiques, que nous n'avons pas écrite, montre en fait que

$$\frac{dr}{ds}\big(s(t_0)\big) = 0$$

le parallèle est donc extrémal et c'est une géodésique, qui est par conséquent confondue avec C.

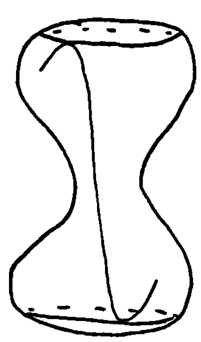
b) $\ddot{s}(t_0) \neq 0$ alors $\dot{s}$ change de signe en t_0



la géodésique "rebondit" sur le parallèle (qui n'est pas extrémal)

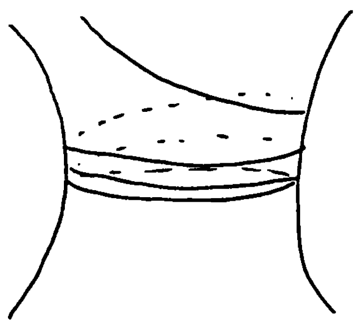
Résumé des situations possibles.

1)



Oscillation entre deux parallèles non extrémaux de même rayon $r = C_0$

2)



Accumulation sur un parallèle extrémal

En effet si $\frac{ds}{dt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ la courbe admet une position limite. De plus

$$\frac{ds}{dt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \frac{ds}{d\theta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow r(s(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} C_0$$

et

$$r\cos(\alpha) = C_0 \Longrightarrow \alpha(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

la courbe est asymptote au parallèle qui par continuité de la dérivation covariante doit être une géodésique, donc extrémal. Enfin

$$r\cos\alpha = C_0 \Longrightarrow r \geqslant C_0$$

le parallèle est un minimum local du rayon,c'est-à-dire une gorge où, (dans le pire des cas), un point d'inflexion pour la fonction $r(s)$ et la géodésique se trouve du côté des $r \geqslant C_0$.

On peut pousser la discussion plus à fond, obtenir des formules plus performantes et même construire des surfaces de révolution dont toutes les géodésiques sont périodiques (les surfaces de Zoll). Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'ouvrage [Be].

Références

[A] ARNOLD V.I. — *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Edition MIR.

[Be] BESSE A.L. — *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer Verlag, 93 (1978), .