Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

PIERRE BÉRARD

Introduction à la géométrie riemannienne

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome S9 (1991), p. 17-24
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991__S9__17_0>

RENCONTRES DE THEORIE SPECTRALE ET GEOMETRIE
GRENOBLE 1991
(Aussois du 7 au 14 avril)

Introduction à la Géométrie Riemannienne

Pierre BÉRARD

Institut Fourier *
Université de Grenoble 1
B.P. 74
38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX
FRANCE

---

* Laboratoire associé au CNRS.

Le but de cet exposé est d'introduire les concepts fondamentaux de la **Géométrie Riemannienne**. Faute de temps, l'exposé sera essentiellement descriptif (éventuellement par l'intermédiaire d'exemples, dont certains n'apparaîtront que dans l'exposé oral). Nous renvoyons aux ouvrages cités en références pour plus de détails et pour des démonstrations.

I. Préliminaires

Nous supposons connue la notion de *sous-variété* M de dimension n de l'espace $\mathbf{R}^N$ (avec les notions qui l'accompagnent : *espace tangent, application* C^∞, *application tangente*,...). Dans toute la suite, il faudra "oublier au maximum" le fait que l'on travaille avec des variétés plongées. De ce point de vue, la notion de *variété abstraite* serait utile ici. Rappelons seulement que l'on peut passer des variétés abstraites aux variétés plongées dans l'espace $\mathbf{R}^N$ (N assez grand) par le théorème de Whitney.

Nous utiliserons aussi la notion de *champ de vecteurs tangent* à une (sous-) variété et celle de *crochet de Lie* de deux champs de vecteurs tangents.

Pour ces notions on pourra consulter : [G-P], [HS] (sous-variétés, champs de vecteurs,...), et [B-G], [WR] (variétés abstraites, champs de vecteurs,...). Signalons aussi la référence [D-N-F] écrite dans un style un peu différent.

II. Métriques riemanniennes

Une *métrique riemannienne* sur une variété M est la donnée, en chaque point $x \in M$, d'un produit scalaire g_x sur l'espace tangent T_xM, et l'on demande à l'application $x \longrightarrow g_x$ d'être de classe C^∞ (au sens où la matrice de g, dans un repère local donné par une carte, a des coefficients de classe C^∞).

EXEMPLES.

(i) citons le cas où g est induite sur la sous-variété M par la structure euclidienne naturelle de l'espace $\mathbf{R}^N$: le produit scalaire g_x n'est autre que la restriction à T_xM du produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^N$;

(ii) citons le cas du *demi-plan de Poincaré* $\mathbf{H} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y > 0\}$, muni de la métrique $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$;

(iii) citons la métrique $\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$ sur $\mathbf{R}^2$;

(iv) citons la construction de métriques riemanniennes par partition de l'unité.

Les métriques des exemples *(ii)* et *(iii)* sont *conformes* à la métrique euclidienne : les angles sont conservés, pas les longueurs.

Dans le cadre des *variétés riemanniennes*, c'est à dire des variétés munies d'une métrique riemannienne, les applications naturelles sont les *isométries*, c'est à dire les difféomorphismes $\varphi \; : (M,g) \to (N,h)$ qui préservent les produits scalaires, *i.e.* $T_x\varphi \; : (T_xM, g_x) \to (T_{\varphi(x)}N, h_{\varphi(x)})$ est une isométrie. Quand on se limite à des ouverts, on parle d'*isométrie locale*.

Ainsi, avec la métrique induite par $\mathbf{R}^3$, le cylindre ou le cône usuels sont localement isométriques à $\mathbf{R}^2$; le caténoïde privé d'une méridienne est isométrique à un ouvert bien choisi de l'hélicoïde. La surface de révolution de $\mathbf{R}^3$ engendrée par une tractrice bien choisie (*la pseudo-sphère de Riemann*) est localement isométrique au demi-plan de Poincaré (*cf.* Exemple (ii) ci-dessus); la projection stéréographique est une isométrie de la sphère de rayon 1 privée d'un point, munie de la métrique induite par $\mathbf{R}^3$, sur le plan $\mathbf{R}^2$ muni de la métrique de l'Exemple (iii) ci-dessus. Ces différentes assertions ne présentent aucune difficulté.

Etant donné une variété riemannienne, on peut définir une mesure naturelle (*la mesure riemannienne*) et la *longueur des courbes* tracées sur la variété (comme intégrale de la norme, pour la métrique riemannienne, du vecteur vitesse de la courbe).

Pour ces premières définitions sur la géométrie riemannienne, on pourra consulter [G-H-L] et les textes de vulgarisation [BD 3], [BR] et [GT].

On trouvera aussi dans [B-G], [D-N-F] et dans [HS] l' aspect *géométrie extrinsèque*, c'est à dire l'étude des variétés de l'espace euclidien munies de la métrique induite (on s'intéresse alors à la manière dont un observateur extérieur perçoit ces variétés, par opposition à *l'aspect intrinsèque* vécu par les observateurs qui se trouvent sur les variétés plongées, sans connaître l'espace ambiant).

III. Distance riemannienne

Etant donné deux points $x, y \in M$ d'une variété riemannienne (M,g) (supposée connexe une fois pour toutes), on définit la *distance (riemannienne)* comme $d(x,y) = \inf\{\ell(c) \; : c \in \Omega_{x,y}\}$, où $\Omega_{x,y}$ est l'ensemble des courbes c tracées sur M, qui sont C^1 par morceaux et vont de x à y, et où $\ell(c)$ désigne la longueur de la courbe c entre x et y. On a alors la

PROPOSITION. — *La fonction d définit une distance sur M; la topologie associée à cette distance coincide avec la topologie initiale de la variété M.*

La démonstration de cette proposition simple repose sur le fait que la géométrie riemannienne est proche, localement, de la géométrie euclidienne et sur le fait qu'en géométrie euclidienne, le segment est la courbe qui réalise le plus court chemin, ce qui peut se voir par exemple en passant en coordonnées polaires.

Des questions naturelles viennent immédiatement à l'esprit.

(i) Etant donné deux points $x, y \in (M, g)$, y a-t-il une courbe de $\Omega_{x,y}$ qui réalise la distance $d(x, y)$?

(ii) Si la réponse à (i) est "oui", comment décrire cette (ou ces) courbe(s)?

Pour étudier ces questions, il faut introduire un peu de technologie. Historiquement, cela ne s'est pas fait sans peine (voir [DI] et les références qui y sont données, [BR]).

IV. Connexion – Géodésiques

Pour gagner du temps, nous allons droit au but et nous introduisons la notion fondamentale de *dérivée covariante* ex nihilo.

THÉORÈME ET DÉFINITION. — *Soit (M,g) une variété riemannienne et $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble de champs de vecteurs de classe C^∞ sur M.*

Il existe une et une seule application

$$D^g \; : \; \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) D^g *est* $\mathbf{R}$*-bilinéaire;*

(ii) $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \forall \varphi \in C^\infty(M), D^g_{\varphi X} Y = \varphi D^g_X Y;$

(iii) $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \forall \varphi \in C^\infty(M), D^g_X(\varphi Y) = (X \cdot \varphi) Y + \varphi D^g_X Y;$

(iv) $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), Z \cdot g(X, Y) = g(D^g_Z X, Y) + g(X, D^g_Z Y);$

(v) $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M), D^g_X Y - D^g_Y X = [X, Y].$

Cette application s'appelle la dérivée covariante *associée à la métrique g, ou* connexion de Levi-Cività. *Elle est donnée par la formule :*

$2g(D^g_X Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(Z, X) - Z \cdot g(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).$

La démonstration n'est pas difficile : si un objet répond à la question, il doit vérifier la dernière égalité; réciproquement, celle-ci définit un objet qui répond à la question.

On vérifie facilement que la dérivée covariante $\bar{D}_{\bar{X}} \bar{Y}$ dans $\mathbf{R}^N$, muni de sa structure euclidienne usuelle, est donnée par le champ de vecteurs dont les composantes sont les dérivées dans la direction du champ $\bar{X}$ des composantes du champ $\bar{Y}$. On vérifie aussi que la dérivée covariante D_XY pour une sous-variété $M \subset \mathbf{R}^N$, munie de la métrique induite, est obtenue en projetant $\bar{D}_XY$ sur l'espace tangent à M en chaque point (ici, il faut faire attention et remarquer que si D vérifie les propriétés (ii-iii) ci-dessus, alors $D_XY(x)$ ne dépend que de la valeur $X(x)$ du champ X en x, et des valeurs du champ Y le long d'une courbe tangente à $X(x)$ en x).

L'écriture dans une carte locale de la dérivée covariante fait intervenir les *coefficients de Christoffel*; ils sont donnés par les formules

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{k=n}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Il est facile de voir que l'on peut exprimer, dans une carte locale, les coefficients de Christoffel en fonction des coefficients de la métrique et de leurs dérivées partielles du premier ordre. Appliqué aux surfaces plongées dans $\mathbf{R}^3$, ceci donne un preuve du Theorema Egregium de Gauss. Les coefficients de Christoffel permettent d'introduire la notion de dérivée covariante d'un champ de vecteurs défini le long d'une courbe (par rapport au vecteur tangent à la courbe).

On a dit qu'une courbe tracée sur M est une *géodésique* si $D_{\dot{c}}\dot{c} \equiv 0$, *i.e.* la dérivée covariante du champ de vecteurs tangent à la courbe, par rapport à lui même, est nulle. Cette condition est l'équation d'Euler du problème de minimisation de la distance (avec une courbe de départ paramétrée par longueur d'arc) ou celui de minimisation de l'énergie. Pour une surface M de $\mathbf{R}^3$, munie de la métrique induite, cette condition se traduit par la condition équivalente : l'accélération $\ddot{c}(t)$ vérifie $\ddot{c}(t)\perp T_{c(t)}M$ pour tout t. Cette condition, qui peut être introduite avant la notion de dérivée covariante, paraît extrinsèque; elle est en fait intrinsèque.

Remarquer que la condition d'être une géodésique impose en particulier que la courbe est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc.

Utilisant l'écriture locale de la dérivée covariante (donc les coefficients de Christoffel), on voit immédiatement que les géodésiques sont les solutions de l'équation différentielle non linéaire du second ordre $\ddot{c}_k(t) + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\dot{c}_i(t)\dot{c}_j(t) = 0$. On en déduit immédiatement l'existence et l'unicité locales :

PROPOSITION. — *Une fois donnée une condition initiale* $(x_0, u_0) \in TM$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *et une géodésique* c_{x_0,u_0}, *et une seule, définie sur l'intervalle* $]-\varepsilon, \varepsilon[$ *et telle que* $c_{x_0,u_0}(0) = x_0$ *et* $\dot{c}_{x_0,u_0}(0) = u_0$.

La question se pose de l'existence des géodésiques pour tout temps t (à cause de la non-linéarité de l'équation). Le théorème de Hopf-Rinow affirme que si la variété (M, g) est un espace métrique complet (pour la distance riemannienne), alors elle est géodésiquement complète, c'est-à-dire que les géodésiques sont définies pour toute valeur de t, quelles que soient les conditions initiales.Le théorème est plus précis, et sa démonstration déjà assez subtile : voir [G-H-L] par exemple.

Il résulte de ce qui précède qu'il existe une application, dite *application exponentielle*, $exp_x\ : T_xM \longrightarrow M$, définie par $exp_x(u) = c_{x,u}(1)$ (le théorème d'existence locale, et l'homogénéité de l'équation des géodésiques, montrent que exp_x est a priori définie sur un voisinage ouvert de l'origine dans T_xM; elle est définie sur tout T_xM si la variété est géodésiquement complète). On a immédiatement que $T_0 exp_x = Id$, d'où il résulte que l'application exponentielle est un difféomorphisme local en $0 \in T_xM$.

L'étude de l'application exponentielle est à la base de l'étude des géodésiques et de leurs propriétés. Indiquons brièvement quelques propriétés des géodésiques.

PROPOSITION.

(i) Etant donné un point $x_0 \in M$, il existe un voisinage U de x_0 et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que

(a) Pour tous $x, y \in U$, il existe un unique vecteur $u \in T_xM$, de norme inférieure à ε et tel que $exp_x(u) = y$;

(b) Pour tout $x \in U$, l'application exp_x est un difféomorphisme de la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε dans T_xM sur son image;

(c) Pour tout vecteur u, de norme inférieure à ε, la courbe $exp_x(tu), t \in [0,1]$ réalise la distance de x à y;

(ii) Une courbe paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc est une géodésique si et seulement si elle réalise localement la distance riemannienne entre ses points.

Pour (i)(a-b), il suffit d'appliquer le théorème d'existence et d'unicité locales des solutions d'une équation différentielle (avec dépendance par rapport aux conditions initiales); la preuve de (i)(c) est plus subtile : on montre que relevée par l'exponentielle, la métrique s'écrit $dr^2 + a(r,u)$, où $(r,u) \in \mathbf{R}_+ \times S^{n-1}$ et où $a(r,u)$ est une métrique sur la sphère unité $S^{n-1} \subset T_xM$: les géodésiques issues de $x \in M$ restent orthogonales aux images par exp_x des sphères concentriques centrées en $0 \in T_xM$; c'est le *Lemme de Gauss*.

Pour des détails sur ce paragraphe, voir [B-G-M], [G-H-L], [HS], [MR]; un autre point de vue sera développé dans la conférence de Y. Colin de Verdière.

Faute de temps, nous passons sous silence la notion de transport parallèle; voir les références ci-dessus et [BR] pour une interprétation géométrique agréable.

V. Courbures

La notion de courbure joue un rôle fondamental en géométrie riemannienne. On commence par introduire, pour $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, l'opérateur $R(X,Y) : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$ défini par $R(U,V)W = D_U(D_V W) - D_V(D_U W) - D_{[U,V]}W$ (attention : il y a différentes conventions de signe). On vérifie que c'est un *tenseur* c'est-à-dire qu'il est $C^\infty(M)$-linéaire. Cela signifie essentiellement que R définit un objet algébrique $R_x(u,v) : T_xM \longrightarrow T_xM$; on l'appelle le *tenseur de courbure de Riemann*.

Comme c'est un objet compliqué, on le simplifie en prenant des traces successives. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un repère orthonormé dans T_xM. On définit le *tenseur de courbure de Ricci* par la formule $Ric_x(u,v) = \sum_{i=1}^{i=n} g_x(R(u,e_i)e_i, v)$, c'est une forme bilinéaire symétrique sur T_xM; la *courbure scalaire* est définie par $\mathrm{Scal}(x) = \sum_{i=1}^{i=n} Ric_x(e_i, e_i)$, c'est une fonction sur la variété. Enfin, on définit la courbure sectionnelle d'un plan P (espace vectoriel de dimension 2 de T_xM) par $K(P) = g_x(R(u,v)v,u)$, où $\{u,v\}$ est une base orthonormée du plan P. On a alors la formule suivante $Ric_x(e_1,e_1) = \sum_{i=2}^{i=n} K(\{e_1, e_i\})$.

Pour une surface $M \subset \mathbf{R}^3$, munie de la métrique induite, toutes ces notions coïncident essentiellement avec celle de *courbure de Gauss* de la surface.

La courbure mesure en quoi la géométrie locale diverge de la géométrie euclidienne.

Soit P un 2-plan en $x \in M$. Soit $\gamma_r \subset P$ le cercle de centre 0, de rayon r; soit $\ell(r)$ la longueur de son image par exp_x. Alors, on a

$$\ell(r) = 2\pi r\big(1 - \frac{K(P)}{6} r^2 + O(r^3)\big).$$

Il est facile de voir, en utilisant cette formule, que les courbures sectionnelles de l'espace euclidien sont toutes nulles; que celles de la sphère de rayon 1 dans l'espace euclidien sont toutes égales à 1; de même on peut voir que la courbure sectionnelle du demi-plan de Poincaré (Exemple (ii) § II) est constante égale à -1 : voir l'exposé de J. Lafontaine sur la géométrie hyperbolique.

Soit $B(x,r)$ une boule de rayon r (pour la distance riemannienne : on dit *boule géodésique*); soit $V(r)$ son volume (pour la mesure riemannienne). On a alors :

$$V(r) = \omega_n r^n - \frac{r^{n+2}}{6(n+2)} \int_{S_xM} Ric_x(u,u)du + O(r^{n+3})$$

où ω_n est le volume d'une boule euclidienne de rayon 1, où S_xM désigne la sphère unité dans T_xM, avec sa mesure naturelle du. On peut avoir en fait une formule "localisée" où intervient la courbure de Ricci selon la direction u.

La démonstration des formules ci-dessus est beaucoup plus technique : voir [B-G-M]; on a en particulier besoin d'une notion importante qu'il ne nous est pas possible d'introduire ici, faute de temps, la notion de *Champ de Jacobi*. Les champs de Jacobi permettent de décrire la dérivée seconde de l'énergie et donc le comportement des géodésiques. Ils permettent aussi d'exprimer la mesure Riemannienne dans la carte exponentielle et donc le volume des boules par intégration. Ils sont à la base des théorèmes de comparaison.

Les *théorèmes de comparaison* en géométrie riemannienne ont essentiellement pour but de comparer une variété riemannienne à une variété modèle (simplement connexe, à courbures sectionnelles constantes) modulo des hypothèses sur l'une ou l'autre des courbures définies ci-dessus. En dimension 2, ces modèles ne sont autres que la sphère (courbure +1), le plan euclidien (courbure 0) et le demi-plan de Poincaré (courbure -1), à une dilatation près sur les métriques. Les théorèmes de comparaison permettent de comparer les triangles géodésiques (théorème de Toponogov), le comportement des géodésiques (théorèmes de Rauch), la croissance du volume des boules géodésiques (théorème de Bishop-Gromov) : voir les exposés de U. Hamenstädt, M. Pollicott et [B-G-M], [G-H-L]; ils permettent aussi d'obtenir des informations sur les valeurs propres du laplacien, sur les constantes de Sobolev et sur des liens entre géométrie et topologie : voir les exposés de R. Brooks, B. Colbois, S. Gallot et [BD 1,2], [G-H-L].

Bibliographie

[BD 1] BÉRARD P. — *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problems*, Lect. Note in Math. n° 1207, Springer, 1986.

[BD 2] BÉRARD P. — *Analysis on Riemannian Manifolds : an Introduction*, Notas de Curso, IMPA (Rio de Janeiro), 1987.

[BD 3] BÉRARD P. — *Le spectre des vibrations d'une variété riemannienne*, *in* Le Courrier du CNRS n° 62, supplément : Images des Mathématiques, 1985.

[BR] BERGER M. — *La géométrie de Riemann. Aperçu historique et résultats récents*, *in* Le Courrier du CNRS n° 76, supplément : Images des Mathématiques, 1990.

[B-G-M] BERGER, M. – GAUDUCHON, P. – MAZET E. — *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lect. Note in Math. n° 194, Springer, 1970.

[B-G] BERGER, M. – GOSTIAUX B. — *Géométrie différentielle*, PUF, 1987.

[DI] DOMBROWSKI P. — *150 years after Gauss' Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Astérisque n° 62, Soc. Math. France, 1979.

[D-N-F] DOUBROVINE, B. – NOVIKOV, S. – FOMENKO A. — *Géométrie contemporaine. Méthodes et Applications*, MIR, 1982.

[G-H-L] GALLOT, S. – HULIN, D. – LAFONTAINE J. — *Riemannian Geometry*, Springer, 1990.

[G-P] GUILLEMIN, V. – POLLACK A. — *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[GT] GALLOT S. — *Géométries, in Encyclopédie Philosophique Universelle*, PUF, 1989.

[HS] KICKS J. — *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand, 1971.

[MR] MILNOR J. — *Morse Theory*, Annals of Math. Studies, Princeton, 1963.

[WR] WARNER F. — *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott Foresman, 1971.