

GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

ROGER PAYSANT-LE ROUX

Unités relatives

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. n° 13, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A8_0

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNITÉS RELATIVES

par Roger PAYSANT - LE ROUX (*)

1. Introduction.

Lorsque l'on cherche les solutions de l'équation de Pell-Fermat

$$(1) \quad X^2 - f^2 DY^2 = 1 ,$$

avec D sans carré, on peut commencer par résoudre ce problème pour

$$(2) \quad X^2 - DY^2 = 1 ,$$

et déterminer ensuite les solutions (x, y) de (2) telles que $f|y$.

C'est la méthode utilisée par A. SCHINZEL [1].

Une manière équivalente de formuler ce point de vue est la suivante :

Soit un anneau d'entiers A , et soit un entier Δ d'une extension du corps des quotients K de A . Si on veut connaître les unités de norme 1 de l'ordre $O_f = A[f\Delta]$, on peut déterminer les unités φ de norme 1 de l'ordre $O = A[\Delta]$, puis chercher les entiers n tels que φ^n soit une unité relative à O_f .

2. Hypothèses. Notations.

Soient :

k corps

$A = \underline{\mathbb{Z}}$ ou $k[X]$,

K c.d.f de A ,

Δ un élément entier algébrique sur A , séparable, de degré p ,

$\Delta^p = b_{p-1} \Delta^{p-1} + \dots + b_0$, $b_i \in A$,

$E = K(\Delta)$,

B la fermeture intégrale de A dans E . On suppose $B = A[\Delta]$.

f un élément irréductible de A tel que $f \nmid \text{Disc}_{E/K}(B)$,

G (resp. U) le groupe des unités (resp. de norme 1) de $O = A[\Delta]$

G^f (resp. U^f) le groupe des unités (resp. de norme 1) de $O^f = A + f A[\Delta]$

G_f (resp. U_f) le groupe des unités (resp. de norme 1) de $O_f = A[f\Delta]$

$f.B = p_1 \dots p_r$ la décomposition en idéaux premiers distincts de l'idéal $f.B$ dans B .

(*) Roger PAYSANT - LE ROUX, 13 allée du Bec Hellouin, 14000 CAEN.

Soit C un anneau, on désignera par C^* le groupe des éléments inversibles de C , et soit $s : B \rightarrow B/fB$ l'homomorphisme canonique.

PROBLÈME. - Soit $\varphi \in G$ (resp. U) ; on cherche les entiers n tel que φ^n soit une unité (resp. unité de norme 1) relative à O_f , i. e. étude de la torsion du groupe G/G_f (resp. U/U_f).

Un ordre intermédiaire (si $p > 2$) s'introduit naturellement $O^f = A + fO$, et il permet de diviser la difficulté en deux.

3. Etude de G/G^f .

THÉOREME 1.

(i) Soit $\varphi \in G$ ($\varphi \in G^f \iff s(\varphi) \in (A/fA)^*$).

(ii) $s(U^f)$ est contenu dans le groupe des racines p -ième de l'unité de $(A/fA)^*$.

Preuve.

(i) Dans le sens direct, soit $\varphi \in G^f$,

$$\varphi = u_0 + u_1 f\Delta + \dots + u_{p-1} f\Delta^{p-1}, \quad u_i \in A,$$

d'où

$$s(\varphi) = s(u_0) \in A/fA.$$

Reste à montrer que $s(u_0)$ est différent de zéro. On sait que $\pi(\varphi) \in A^*$, d'où $s(\pi(\varphi)) \neq 0$, or $s(\pi(\varphi)) = s(u_0^p) = (s(u_0))^p$, on en déduit que $s(u_0) \neq 0$.

Réciproquement, soit $\varphi \in G$ et $s(\varphi) = s(a)$, $a \in A$, on a donc

$$\varphi - a \in \ker s = f.B,$$

d'où

$$\varphi = a + f(v_0 + v_1 \Delta + \dots + v_{p-1} \Delta^{p-1}), \quad v_i \in A$$

$$\varphi = a + fv_0 + fv_1 \Delta + \dots + fv_{p-1} \Delta^{p-1}$$

et donc $\varphi \in O^f$, or $O^f \cap G = G^f$.

(ii) Soit $\varphi \in U^f$,

$$\varphi = u_0 + u_1 f\Delta + \dots + u_{p-1} f\Delta^{p-1}, \quad u_i \in A$$

on calcule $s(\varphi_0^p)$,

$$s(\varphi_0^p) = s(u_0^p) = s(\pi(\varphi)) = s(1) = 1$$

et

$$s(\varphi) \in (A/fA)^*.$$

Applications.

(a) Corps globaux ($A = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{F}_q[X]$) . - On pose :

$$|f| = \begin{cases} \text{valeur absolue habituelle si } A = \mathbb{Z} \\ \deg f \text{ si } A = \mathbb{F}_q[X] . \end{cases} \quad \text{pour } f \in A .$$

THÉOREME 2. - Le groupe quotient G/G^f est un groupe de torsion, dont la torsion est première avec $|f|$, et bornée par $|f|^\gamma - 1$; plus précisément, pour tout φ appartenant à G , on a $\varphi^{|f|^\gamma - 1}$ appartient à G^f , où $\gamma = \text{ppcm } \beta_i$,

$$\beta_i = [B/\mathfrak{p}_i : A/fA] .$$

Preuve. - On a l'isomorphisme

$$B/fB \simeq (B/\mathfrak{p}_1) \times \dots \times (B/\mathfrak{p}_r)$$

et

$$|B/\mathfrak{p}_i| = |f|^{\beta_i}, \quad \forall i = 1, \dots, r .$$

Si on pose $s_i = \text{pr}_i \circ s$, où pr_i est la i -ième projection de B/fB dans $B/\mathfrak{p}_i$, on a l'égalité

$$(s_i(\varphi))^{|f|^{\gamma} - 1} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, r$$

et donc

$$(s(\varphi))^{|f|^{\gamma} - 1} = 1 \in (A/fA)^*$$

d'après le théorème 1, on en conclut que $\varphi^{|f|^{\gamma} - 1} \in G^f$.

(b) Corps de fonctions. - $A = k[X]$ où k est un corps ayant une infinité d'éléments.

THÉOREME 3. - On suppose que le rang du groupe U est égal à un. Soit φ_0 une unité fondamentale de U . On a l'équivalence

$$U^f \text{ non trivial} \iff s_i(\varphi_0) \text{ est une racine de l'unité du corps } B/\mathfrak{p}_i .$$

De plus, si U^f est non trivial et si on pose :

$$m_0 = \inf\{m \in \mathbb{N}^*, s(\varphi_0^m) \in A/fA\} ,$$

alors $m_0 = [U : U^f]$.

Preuve. - Dans le sens direct, supposons U^f non trivial, alors il existe un entier non nul m tel que $\varphi_0^m \in U^f$, d'après le théorème 1,

$$(s(\varphi_0^m))^p = (s(\varphi_0))^{\text{mp}} = 1 .$$

Réciproquement, si

$$\Delta n \in \mathbb{N}^*, \quad (s_i(\varphi_0))^{\Delta n_i} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, r,$$

on en déduit

$$\Delta n = \text{ppcm}(\Delta n_i), \quad (s_i(\varphi_0))^{\Delta n} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, r,$$

et donc

$$s(\varphi_0)^{\Delta n} = 1 \in \Lambda/f\Lambda$$

d'après le théorème 1, $\varphi_0^{\Delta n} \in G^f$.

Exemple. - On prend :

$$\begin{cases} A = \mathbb{Q}[X] \\ \Delta^2 = X^2 - h, \quad h \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

l'unité fondamentale de U est

$$\varphi_0 = \begin{cases} (X - \Delta)/\sqrt{h} & \text{si } h \text{ est un carré dans } \mathbb{Q}^*, \\ 1 - (2X^2/h) + (2X/h) \Delta, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $D = X^2 - h$, et comme élément irréductible de A on prend $f = X - a$, $a \in \mathbb{Q}$.

COROLLAIRE 1 (A. SCHINZEL). - U_{X-a} est non trivial si, et seulement si, $a = 0$ ou $h = 2a^2$ ou $4a^2$ ou $4/3 a^2$.

Preuve. - Pour utiliser le théorème 3, il nous faut étudier la décomposition de l'idéal $(X - a)A$ dans $B = A[\Delta]$ (on a bien ici que la fermeture intégrale de A dans E est $A[\Delta]$).

Nous avons trois possibilités :

(1) Si $D(a) = a^2 - h$ est un carré dans $\mathbb{Q}^*$

$$\begin{array}{ccc} p \neq \bar{p} & B/p & \text{et } B/\bar{p} \simeq \mathbb{Q} \\ \swarrow \quad \searrow & | & \\ (X - a)A & A/(X - a)A & \simeq \mathbb{Q}. \end{array}$$

L'idéal $(X - a)B$ se décompose en deux idéaux premiers distincts, conjugués, et on n'a pas d'extension du corps des restes.

(2) Si $D(a) = a^2 - h$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}^*$

$$\begin{array}{ccc} p & B/p \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{D(a)}) & \\ | & | & \\ (X - a)A & A/(X - a)A & \simeq \mathbb{Q}. \end{array}$$

L'idéal $(X - a)B$ est premier, et on a une extension du corps des restes (extension quadratique de $\mathbb{Q}$).

(3) Si $D(a) = 0$, i. e. $h = a^2$, dans ce cas $f|D$, l'hypothèse que nous avons faite sur f ne nous permet pas de conclure, cependant, on peut montrer que U_{X-a} est trivial.

Toujours d'après le théorème 3, il faut chercher les racines de l'unité dans le corps $B/\bar{F}_1$:

Si on est dans (1) ou (2) avec $D(a) > 0$, les racines de l'unité sont ± 1 .

Si on est dans (2) avec $D(a) < 0$, les racines de l'unité peuvent être : ± 1 , $\pm i$, $\pm j$, $\pm j^2$.

Finalement :

$$s(\varphi_0) = \begin{cases} j \\ j^2 \end{cases} \Rightarrow h = (4/3)a^2 \text{ ou } 4a^2,$$

$$s(\varphi_0) = \begin{cases} -j \\ -j^2 \end{cases} \Rightarrow h = 4a^2,$$

$$s(\varphi_0) = \begin{cases} i \\ -i \end{cases} \Rightarrow h = 2a^2,$$

$$s(\varphi_0) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow a = 0.$$

4. Etude de G^f/G_f

THÉORÈME 4.

(i) Corps de nombres. Corps de fonctions sur un corps k de caractéristique $\ell \neq 0$:

G^f/G_f est un groupe de $|f|$ (resp. ℓ) torsion

dont la torsion est bornée par $|f|^{p-1}$ (resp. $\ell^{\{\log(p-1)\}}$).

(ii) Corps de fonctions de caractéristique nulle :

G^f/G_f est sans torsion.

Preuve.

(i) Ceci résulte de la formule du binôme. Dans le cas des corps de nombres, soit $\varphi \in G^f$,

$$\varphi = u_0 + u_1 f^\Delta + \dots + u_{p-1} f^{\Delta^{p-1}},$$

on calcule φ^f

$$\begin{aligned} \varphi^f &= u_0^f + u_1^f f^f \Delta^f + \dots + u_{p-1}^f f^f \Delta^{f(p-1)} \\ &+ \sum_{(i_0, \dots, i_{p-1}) \in I} \frac{f!}{i_0! \dots i_{p-1}!} u_0^{i_0} \dots u_{p-1}^{i_{p-1}} f^{\sum_{k=1}^{p-1} i_k} \Delta^{\sum_{k=1}^{p-1} k i_k} \end{aligned}$$

où $I = \{(i_0, \dots, i_{p-1}) \in \mathbb{N}^p, \sum_{k=0}^{p-1} i_k = f \text{ et } i_k \neq f, \forall k\}$, on voit que φ^f peut s'écrire :

$$\varphi^f = v_0 + v_1 f^2 \Delta + \dots + v_{p-1} f^2 \Delta^{p-1},$$

et on itère le procédé.

(ii) Idée de la démonstration : On se place dans le cas particulier $\Delta^3 = D$.

Soit $\varphi = u_0 + u_1 \Delta + u_2 \Delta^2 \in G^f$. On suppose qu'il existe un entier q supérieur ou égal à 2 tel que

$$\varphi^q = v_0 + v_1 \Delta + v_2 \Delta^2 \in G_f,$$

ce qui permet d'écrire

$$v_2 = u_0^{q-1} u_2 + \sum_I \frac{q!}{i_0! i_1! i_2!} u_0^{i_0} u_1^{i_1} u_2^{i_2} D^{\alpha(i_0, i_1, i_2)}$$

où

$$I = \{(i_0, i_1, i_2) \in \mathbb{N}^3, i_0 + i_1 + i_2 = q, i_1 + 2i_2 \equiv 2 \pmod{3}, i_0 \leq q-2\}$$

$$\alpha(i_0, i_1, i_2) = \frac{i_1 + 2i_2 - 2}{3}.$$

Or, on a

$$f^2 | u_0^{i_0} u_1^{i_1} u_2^{i_2}, \quad \forall (i_0, i_1, i_2) \in I$$

et $f^2 | v_2$ par hypothèse.

On en déduit que $f^2 | u_0^{q-1} u_2$ et donc, puisque $f \nmid u_0$, que $f^2 | u_2$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2. - Soit D un polynôme de la forme $X^3 + aX + b$, avec a et $b \in \mathbb{Q}$.

Soit Δ appartenant à $\mathbb{Q}((1/X))$ vérifiant $\Delta^3 = D$. Pour tout rationnel α , le groupe des unités de l'ordre $0_{X-\alpha}$ est trivial.

Preuve. - Il n'est pas difficile de montrer que si D a une racine double, le

groupe des unités de O est trivial. On suppose donc D sans racine double. Dans ce cas, $B = A[\Delta]$, et on connaît les couples (a, b) [1] pour lesquels le groupe U des unités de norme 1 de O est non trivial, et pour un tel couple on connaît une unité fondamentale φ_n de U . On continue alors comme dans le corollaire 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HELIEGOUARCH (Y.), Mc QUILLAN (D. L.) et PAYSANT - LE ROUX (Roger). - Unités de certains sous-anneaux des corps de fonctions algébriques, Acta Arithm., Warszawa (à paraître).
 - [2] LOZAC'H (M.) et PAYSANT - LE ROUX (Roger). - Unités relatives, Prépublication de l'Université de Caen n° 30.
 - [3] SCHINZEL (A.). - On some problems of the arithmetical theory of continued fractions, I-II, Acta Arithm., Warszawa, t. 6, 1961, p. 393-413 et t. 7, 1962, p. 287-298.
-