Groupe d'étude en théorie analytique des nombres

François Dress

Le problème de Waring pour les bicarrés : $g(4) = 19$

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. n° 7, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A4_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
3e année, 1985/86, n° 7, 24 p.

9 et 16 décembre 1985

LE PROBLÈME DE WARING POUR LES BICARRÉS : $g(4) = 19$

par François DRESS (*)

La rédaction de ce séminaire contient quelques emprunts à des textes de J.-M. DESHOUILLERS (J.-M. D., [6] et [7]), ainsi qu'aux Notes de R. BALASUBRAMANIAN, J.-M. DESHOUILLERS et F. DRESS (R. B., J.-M. D. et F. D., [3] et [4]).

SOMMAIRE.

A. PRÉSENTATION D'ENSEMBLE

1. Historique du problème.

C'est en 1770 que WARING, dans son livre "Méditationes Algebricae", conjecture que tout entier positif peut s'exprimer comme somme d'au plus 4 carrés, 9 cubes, 19 bicarrés.

C'est la même année que LAGRANGE démontre le théorème des quatre carrés, conjecturé bien auparavant (BACHET 1621, peut-être même les grecs ...), mais il faudra attendre 1859 pour que LIOUVILLE [18] s'aperçoive que le théorème des quatres carrés et l'identité $6(\sum_{i=1}^{4} a_i^2) = \sum_{i<j} (a_i + a_j)^4 + \sum_{i<j} (a_i - a_j)^4$ permettent d'établir très simplement que tout entier positif est somme d'au plus 53 bicarrés.

Rappelons les notations traditionnelles : k étant un entier $\geqslant 2$, $g(k)$ désigne le minimum de r tel que tout entier positif soit somme d'au plus r puissances k-ièmes, et $G(k)$ le minimum de r tel que tout entier positif suffisamment grand soit somme d'au plus r puissances k-ièmes.

Divers résultats partiels sont établis après LIOUVILLE jusqu'à ce qu'en 1909 HILBERT [16] démontre le théorème général d'existence de $g(k)$. Mais aucune minoration générale n'est établie, et les méthodes algébriques piétinent (ces méthodes

(*) François DRESS, UER de Mathématiques et d'Informatique, Unité associée au CNRS n° 226, Université Bordeaux-I, 33405 TALENCE CEDEX.

algébriques restent "élémentaires", même si leur mise en oeuvre est parfois très raffinée). Arrivent alors HARDY et LITTLEWOOD qui introduisent, en 1920 [15], des moyens analytiques ("méthode du cercle") pour étudier le nombre des représentations en sommes de r puissances k-ièmes des grands entiers, et obtiennent ainsi une minoration en $k2^k$ de G(k) . Diverses améliorations de la méthode sont ensuite apportées, les plus importantes étant dues à VINOGRADOV [22] qui obtient une minoration en k log k (ce qui est toujours le meilleur ordre de grandeur connu).

Pour revenir aux bicarrés, on mentionnera, d'une part la valeur exacte G(4) = 16 démontrée par DAVENPORT en 1939 [5], d'autre part les principaux résultats sur g(4) et les nombres représentables comme somme de 19 bicarrés, résumés par un tableau. Il faut peut-être rappeler auparavant que $g(4) \geqslant 19$, car on peut constater sans peine que les entiers 79, 159, 239, 319, 399, 479, et 559 peuvent s'exprimer comme sommes de 19 bicarrés mais pas de moins (on n'en connait pas d'autre, et on pense qu'il n'en existe effectivement pas d'autre).

année	résultat sur g(4)	borne au-delà de laquelle on a démontré que tout entier est somme de 19 bicarrés.	borne jusqu'à laquelle on a vérifié que tout entier est somme de 19 bicarrés.	référence
1909	$g(4) \leqslant 37$			WIEFERICH [23]
1933			$1{,}1\ 10^9$	tables de Chandler
1933	$g(4) \leqslant 35$			DICKSON [10]
1940		$10^{10^{89}}$		AULUCK [1]
1973	$g(4) \leqslant 30$			DRESS [12]
1973	$g(4) \leqslant 23$	10^{1409}	$10^{149,5}$	THOMAS [19]
1974	$g(4) \leqslant 22$		$10^{233,5}$	THOMAS [20]
1984		10^{700}		BALASUBRAMANIAN
1984		10^{560}		DESHOUILLERS
		10^{367}		BDD [2] [4] [7] [8]
1985			10^{378}	DD [9]
	$g(4) = 19$			BDD [3]

Les résultats sur g(4) et les bornes inférieures pour les sommes de 19 bicarrés indiqués dans ce tableau, ont tous été obtenus par la méthode du cercle, à l'exception de $g(4) \leqslant 37$ (WIEFERICH) et de $g(4) \leqslant 30$ (DRESS), établis par les méthodes algébriques ; les bornes supérieures pour les sommes de 19 bicarrés ont toutes été obtenues par la conjonction de vérifications numériques et de méthodes de "descente".

2. Architecture de la démonstration.

2.1. Rappel des principes de base. - Ainsi qu'il vient d'être dit, la démonstration comporte deux parties. La première, qualifiée d'asymptotique, établit que tout entier supérieur à 10^{367} est somme de 19 bicarrés ; la seconde, que l'on pourrait qualifier de "finie", vérifie numériquement que tout entier inférieur à 10^{378} est somme de 19 bicarrés.

On utilisera les notations traditionnelles, en particulier $e(\beta)$ pour désigner $\exp(-2\pi i\beta)$.

On se donne un entier N et, pour appliquer la méthode du cercle (on peut rappeler qu'une des améliorations apportées par VINOGRADOV a consisté à remplacer par une somme finie d'exponentielles la somme infinie primitivement considérée par HARDY et LITTLEWOOD), on considère la somme $S(\alpha) = \sum_{x\in I} e(\alpha x^4)$, où I est un intervalle convenablement choisi, borné par B , puis on définit le nombre $R_{19,I}(n)$ de représentations de n en sommes de 19 puissances quatrièmes de nombres appartenant à l'intervalle I . On a

$$(S(\alpha))^{19} = \sum_{n\in[0,19B]} R_{19,I}(n)\, e(n\alpha) ,$$

d'où l'on déduit

$$R_{19,I}(N) = \int_0^1 ((S(\alpha))^{19}\, e(-N\alpha))\, d\alpha .$$

Le problème est de montrer que cette intégrale est strictement positive.

Pour cela, on découpe l'intervalle $[0 , 1)$ en arcs majeurs et arcs mineurs. Les arcs majeurs $\mathfrak{M}$ sont constitués par une réunion d'intervalles centrés sur des rationnels de dénominateur (relativement) petit ; les arcs mineurs $\mathfrak{m}$ sont le complémentaire.

L'intégrale sur les arcs majeurs fait apparaître un terme principal $\mathfrak{S}(N)\, J(N)$, équivalent à $c\mathfrak{S}(N)\, N^{15/4}$ (on aura ici $c = 1/1600$), et un reste. La fonction arithmétique $\mathfrak{S}(N)$, appelée série singulière, prend en compte la répartition non uniforme des puissances quatrièmes dans les classes de congruences ; l'intégrale $J(N)$, appelée intégrale singulière, correspond à ce que l'on obtiendrait si les puissances quatrièmes étaient bien réparties dans les classes de congruences.

Pour terminer la démonstration, il faut trouver des minorations numériques efficaces de la série singulière et de l'intégrale singulière, majorer convenablement le reste de l'intégrale sur les arcs majeurs, ce qui est relativement standard, et enfin majorer convenablement l'intégrale sur les arcs mineurs. Cette dernière partie est de loin plus délicate et deux méthodes sont possibles, conjuguant des techniques de DAVENPORT et de WEYL, ou bien de HUA et de WEYL. C'est cette deuxième méthode qui a été employée (la raison en sera expliquée en temps opportun), elle nécessitera des versions fines des lemmes de HUA et de WEYL ainsi que des résultats non classiques sur les fonctions arithmétiques.

Une fois que l'on dispose d'une minoration du terme principal et d'une majoration

globale du reste, il faut bien entendu vérifier que le terme principal est effectivement supérieur au reste ; cela est vrai si N est supérieur à une certaine borne, 10^{367} ici. Il restera donc à vérifier le résultat jusqu'à cette borne, ce qui nécessitera des calculs sur ordinateur associés à une "descente" se terminant par un délicat slalom ...

2.2. Enchaînement des théorèmes auxiliaires principaux. - La somme d'exponentielles fondamentale a été dédoublée ; au lieu de considérer brutalement la somme

$$S(\alpha) = \sum_{x \in I} e(\alpha x^4) ,$$

on distingue les bicarrés congrus à 0 de ceux congrus à 1 modulo 16 . Le nombre N étant donné, on définit l'entier s par $4 \leqslant s \leqslant 19$, $N \equiv s \pmod{19}$. Puis, ν étant un nombre réel de l'intervalle $(85 , 151)$, dont l'existence sera affirmée par la proposition 1.1, on pose $P_0 := (N/16\nu)^{1/4}$ et $P := [P_0]$. Pour $\varepsilon = 0$ ou 1 , on pose enfin

$$S_\varepsilon(\alpha) := \sum_{2P < 2x+\varepsilon \leqslant 4P} e(\alpha(2x + \varepsilon)^4) .$$

La distinction au niveau de $S(\alpha)$ entre bicarrés congrus à 0 et bicarrés congrus à 1 modulo 16 est une des amélioration (non la plus importante) de la présente démonstration. Des commentaires plus détaillés seront donnés au paragraphe 3.

Contribution des arcs majeurs.

THÉORÈME 1. - Pour N supérieur à 10^{300}, on a

$$\int_{\mathfrak{M}} S_0^{19-s}(\alpha) \, S_1^s(\alpha) \, e(-\alpha N) \, d\alpha > 0{,}0065 \, P^{15} .$$

C'est le théorème 2 de J.-M. D. [7].

Majoration de Weyl pour les arcs mineurs.

THÉORÈME 2. - Pour $P \geqslant 10^{80}$, $\varepsilon = 0$ ou 1 , et α dans $\mathfrak{m}$, on a

$$|S_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 6{,}1 \, P^{0{,}8875} \, (\log P)^{0{,}25} .$$

Une petite partie des arcs mineurs étant mal traitée par la méthode de Weyl, on est amené à découper $\mathfrak{m}$ en $\mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{m}_2$ (la définition de ces deux parties sera donnée au paragraphe 4), à utiliser les résultats relatifs au traitement des arcs majeurs pour la partie $\mathfrak{m}_1$ et à n'utiliser la méthode de Weyl que pour la partie $\mathfrak{m}_2$. Les deux théorèmes suivants impliquent immédiatement le théorème 2 ; le premier, facile, est la proposition 5.1 de J.-M. D. [7] ; le second, fondamental, est le résultat principal de R. B. [2].

THÉORÈME 2A. - Pour $P \geqslant 10^{80}$, $\varepsilon = 0$ ou 1 , et α dans $\mathfrak{m}_1$, on a

$$|S_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 20 \, P^{7/8} .$$

THÉORÈME 2B. - Pour $P \geqslant 10^{80}$, $\varepsilon = 0$ ou 1 , et α dans $\mathfrak{m}_2$, on a

$$|S_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 6{,}1\ P^{0{,}8875}\ (\log P)^{0{,}25}\ .$$

On peut noter que, pour $P = 10^{91}$, le théorème 2B, qui se traduit alors par $|S_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 319\ P^{7/8}$, reste du même ordre de grandeur numérique que le théorème 2A.

Inégalité de Hua.

THÉORÈME 3. - Pour $P \geqslant 10^{80}$ et $\varepsilon = 0$ ou 1, on a

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}\ d\alpha \leqslant 1{,}368\ P^{12}\ (\log P)^{9{,}8}\ (\log\log P)^2\ .$$

Ce résultat est la conséquence directe des deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 3A. - Pour $\varepsilon = 0$ ou 1, on note $B_\varepsilon(P)$ un nombre réel qui satisfait les relations

$$0{,}1\ P^3\ (\log P)^8 \leqslant B_\varepsilon(P) \leqslant P^{3{,}6}\ ,$$

$$H_\varepsilon(P) := 2 \sum_{h,k,y} d_3((3(2y + \varepsilon + h + k)^2 + h^2 + k^2) \times |hk|) \leqslant B_\varepsilon(P)\ ,$$

où la somme est étendue aux triplets d'entiers non nuls $(h\ ,\ k\ ,\ y)$ tels que $2y + \varepsilon$ et $2y + \varepsilon + h + k$ appartiennent à l'intervalle $]2P\ ,\ 4P]$ et $|h|+|k| \leqslant P$. Pour $P \geqslant 10^{74}$, on a

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}\ d\alpha \leqslant 361980\ P^{12}\ (\log P)^{7{,}8} + 61{,}77\ B_\varepsilon(P)\ P^9\ (\log P)^{0{,}8}\ .$$

Le théorème 3 de J.-M. D. [7] donne, en fonction d'un paramètre γ compris entre 0 et 0,5, une majoration de l'intégrale $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}\ d\alpha$. Compte tenu des répercussions sur le théorème 3, et donc le théorème A, le choix de $\gamma = 0{,}1$ s'avère optimal, et c'est celui qui fournit les constantes et les exposants des puissances de logarithmes de la proposition 3.1.

THÉORÈME 3B. - Pour $P \geqslant 10^{80}$, et avec la notation introduite à la proposition précédente, on peut prendre

$$B_\varepsilon(P) = C_\varepsilon\ P^3\ (\log P)^9\ (\log\log P)^2\ ,$$

avec $C_0 = 1{,}734.10^{-2}$ et $C_1 = 8{,}18.10^{-4}$.

C'est le théorème principal de J.-M. D. et F. D. [8].

La conjonction des théorèmes 1, 2 et 3 donne, ainsi qu'on va le montrer immédiatement, le théorème asymptotique :

THÉORÈME A. - Tout entier supérieur à 10^{367} est somme de 19 puissances quatrièmes.

Pour obtenir le résultat $g(4) = 19$, il ne reste plus qu'à énoncer le théorème "fini" :

THÉORÈME B. - Tout entier inférieur à 10^{378} est somme de 19 puissances quatrièmes.

C'est le résultat principal de J.-M. D. et F. D. [9].

2.3. Démonstration du théorème asymptotique. - On considère l'intégrale

$$R = \int_0^1 S^{19-s}(\alpha)\, S_1^s(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha ,$$

qui fournit le nombre de représentations de N comme sommes de 19 bicarrés soumis à des restrictions de parité et de localisation, et il suffit de montrer qu'elle est positive.

On décompose alors R en $R' + R''$, avec $R' = \int_{\mathfrak{M}}$ et $R'' = \int_{\mathfrak{m}}$. Dès que N est supérieur à $100^{366,2} = 16 \times 151 \times 10^{362,8}$, on a P supérieur à $10^{90,7}$; la condition $P^3 (\log P)^8 \leqslant B_\varepsilon(P) \leqslant P^{3,6}$ est vérifiée par les valeurs de $B_\varepsilon(P)$ fournies par le théorème 3B, et les théorèmes 1 à 3 sont donc applicables.

Le théorème 1 affirme que $R' \geqslant 0{,}0065\, P^{15}$. On écrit ensuite en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} |R''| &= \left|\int_{\mathfrak{m}} S_0^{19-s}(\alpha)\, S_1^s(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha\right| \\ &\leqslant \sup_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^3 \int_0^1 |S_0^{19-s}(\alpha)\, S_1^{s-3}(\alpha)|\, d\alpha \\ &\leqslant \sup_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^3 \left(\int_0^1 |S_0(\alpha)|^{16}\, d\alpha\right)^u \left(\int_0^1 |S_1(\alpha)|^{16}\, d\alpha\right)^v \end{aligned}$$

avec $u = (19 - s)/16$ et $v = (s - 3)/16$. Les théorèmes 2 et 3 donnent alors la majoration

$$\begin{aligned} |R''| &\leqslant (6{,}1\, P^{0,8875} (\log P)^{0,25})^3 \times 1{,}368\, P^{12} (\log P)^{9,8} (\operatorname{loglog} P)^2 \\ &= 310{,}51\, P^{14,6625} (\log P)^{10,55} (\operatorname{loglog} P)^2 , \end{aligned}$$

et l'on vérifie immédiatement que $|R''| < 0{,}0065\, P^{15}$ pour P supérieur à $10^{90,7}$.

Il est intéressant de situer la sensibilité des constantes et des exposants dans les théorèmes 1 à 3 en donnant les gains sur l'exposant de la puissance de 10 finale (vers 367) résultant d'éventuelles améliorations.

Pour le théorème 1 :
- exposant de P intouchable ;
- constante divisée par 2 —> gain 3,5.

Pour le théorème 2 :
- exposant de P diminué de 0,005 —> gain 15 ;
- exposant de $\log P$ diminué de 0,05 —> gain 4 ;
- constante divisée par 1,5 —> gain 6.

Pour les théorèmes 3A et 3B :
- exposants de P intouchables ;
- exposants de $\log P$ diminués de 0,1 —> gain 2,5 ;
- constantes divisées par 2 —> gain 3,5.

B. PARTIE ASYMPTOTIQUE

3. Contribution des arcs majeurs.

3.1. Notations et rappel de l'énoncé du théorème 1. - L'entier N étant donné, on a défini s par $4 \leqslant s \leqslant 19$, $N \equiv s \pmod{16}$, puis on a posé $P_0 := (N/16\nu)^{1/4}$ et $P := [P_0]$, et enfin

$$S_\varepsilon(\alpha) := \sum_{2P<2x+\varepsilon\leqslant 4P} e(\alpha(2x+\varepsilon)^4) .$$

On appelle $\mathfrak{M}$ la partie de $(-975/P^3 , 1 - 975/P^3)$ constituée par la réunion des intervalles (dont on vérifie qu'ils sont 2 à 2 disjoints)

$$\mathfrak{M}_{a,q} := (a/q - 975/qP^3 , a/q + 975/qP^3)$$

pour $q \leqslant P^{1/2}$, $0 < a < q$, $(a , q) = 1$.

La distinction au niveau de $S(\alpha)$, entre bicarrés congrus à 0, et bicarrés congrus à 1 modulo 16, permet de beaucoup mieux maitriser le facteur local (correspondant à $p = 2$) de la série singulière. Cela restreint le nombre des représentations prises en considération, mais cette perte est plus faible que le gain obtenu, et le bilan est nettement favorable. La nécessité de cette distinction est plus impérieuse pour traiter les sommes de 19 bicarrés qu'elle ne l'aurait été pour les sommes de 20 ou 21. On obtiendra en outre un léger gain supplémentaire en répercutant cette distinction au niveau du majorant $B_\varepsilon(P)$ (cf. théorème 3B).

THÉORÈME 1. - *Pour N supérieur à 10^{300}, on a*

$$\int_{\mathfrak{M}} S^{19-s}(\alpha)\, S_1^s(\alpha)\, e(-\alpha N)\, d\alpha \geq 0{,}0065\, P^{15} .$$

L'une des améliorations apportées à la méthode standard consiste, suivant une idée de VAUGHAN très efficace pour les cubes, à avoir augmenté la longueur des intervalles $\mathfrak{M}_{a,q}$ (tout en étant resté de l'ordre de $1/qP^3$) : le reste de l'intégrale sur les arcs majeurs est suffisamment faible pour que l'on n'ait pratiquement rien perdu sur ceux-ci, tandis que l'on gagne notablement sur les arcs mineurs (majoration de Weyl).

3.2. Résultats intermédiaires.

PROPOSITION 1.1. - *On pose*

$$K(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_1^2 e(\beta t^4)\, dt\right)^{19} e(-\beta\nu)\, d\beta .$$

Alors il existe une valeur $\nu \in (85 , 151)$ telle que l'on ait

$$K(\nu) \geq 0{,}01 .$$

La démonstration s'appuie sur l'interprétation de l'intégrale $\int_1^2 e(\beta t^4)\, dt$ comme fonction caractéristique (transformée de Fourier de la loi) d'une variable aléatoire $Z := \sum_{i=1}^{19} X_i^4$, où les X_i sont 19 variables aléatoires indépendantes et équiréparties sur l'intervalle $(1 , 2)$: $K(\nu)$ représente donc la densité de la loi de Z au point ν.

Auparavant, cette intégrale était minorée en cherchant à localiser et à estimer son maximum (calcul qui, effectué pour la puissance 15e, prend une trentaine de pages chez THOMAS ! Repartir de là, et bricoler jusqu'à la puissance 19e, aurait donné une valeur moins bonne que celle de la proposition 1.1 ... Quant à refaire 30 pages de calcul, cela a paru démesuré pour gagner un facteur de l'ordre de 2, qui n'était pas nécessaire pour conclure). Pour la beauté (ou l'ironie ?), on ne manquera pas de noter la délicate touche ineffective apportée par cette proposition dans une démonstration obsédée d'effectivité !

Signalons qu'un raffinement, dû à F. DRESS et G. TENENBAUM, de l'argument probabiliste utilisé, permettrait d'obtenir 0,015 dans la minoration de cette proposition. L'amélioration que cela donnerait pour le théorème 1, et donc le théorème A, (environ 2 unités sur l'exposant de la puissance de 10) n'est pas essentielle.

PROPOSITION 1.2. - On pose

$$G_\varepsilon(a\ ,\ q\ ;\ \nu) := \sum_{h=0}^{q-1} e(a(2h+\varepsilon)^4 + \nu h)\ .$$

Alors, pour $\nu \in Z$, q entier positif, $(a\ ,\ q) = 1$ et $\varepsilon = 0$ ou 1, on a

$$|G_\varepsilon(a\ ,\ q\ ;\ \nu)| \leqslant 18 q^{3/4}\ .$$

La démonstration consiste en des mixages divers de G_0 et de G_1 pour pouvoir utiliser la majoration de Thomas :

$$|\sum_{h=0}^{q-1} e(ah^4 + bh)| \leqslant 4{,}5\ q^{3/4}\ .$$

PROPOSITION 1.3. - On pose

$$S_{a,q} = S_{a,q}(N) = q^{-19}\ G_0^{19-s}(a\ ,\ q\ ;\ 0)\ G_1^s(a\ ,\ q\ ;\ 0)\ e_q(-aN)$$

$$A(q\ ,\ N) := \sum_{(a,q)=1} S_{a,q}$$

puis

$$\mathfrak{S}(N) := \sum_{q=1}^{\infty} A(q\ ,\ N)\ .$$

Alors, pour tout N, la série $\mathfrak{S}(N)$ converge absolument, est réelle, et vérifie $\mathfrak{S}(N) \geqslant 11$.

La démonstration utilise la décomposition en produit $\mathfrak{S}(N) = \prod_p \chi(p\ ,\ N)$, où $\chi(p\ ,\ N) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} A(p^h\ ,\ N)$.

Procédé standard, la seule différence avec la pratique antérieure résultant de la répercution de la distinction entre bicarrés congrus à 0 et bicarrés congrus à 0 modulo 16 .

PROPOSITION 1.4. - On introduit les notations nouvelles

$$I(\beta\ ,\ N) := \int_{2P_0}^{4P_0} e(\beta t^4)\ dt\ ,$$

$$T_\varepsilon(\alpha) = (1/2q)\ G_\varepsilon(a\ ,\ q\ ;\ 0)\ I(\beta\ ,\ N)\ .$$

Alors, pour N supérieur à 10^{355}, pour $\alpha = a/q + \beta$, avec $0 \leqslant a < q$, $(a,q)=1$, et $|\beta| \leqslant 975/(qP^3)$, on a

$$|S_\varepsilon(\alpha) - T_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 2{,}9.10^6\ q^{1/4}\ P^{1/2} + 400\ q^{3/4}\ (\log q + 1)\ .$$

En particulier, pour $q \leqslant P^{1/2}$, on a

$$|S_\varepsilon(\alpha) - T_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 3.10^6\ q^{1/4}\ P^{1/2}\ .$$

On évalue les sommes d'exponentielles par la formule sommatoire de Poisson, ce qui introduit les intégrales $\int_{2P_0}^{4P_0} e(\beta t^4 - (\nu t/2q))\ dt$, aussitôt remplacées, après une intégration par parties, par $\int_{2P_0}^{4P_0} (8\beta q t^3/\nu)\ e(\beta t^4 - (\nu t/2q))\ dt$. La méthode de la phase stationnaire (employée en utilisant des lemmes de TITCHMARSH) permet alors de continuer et de terminer la démonstration.

Procédé standard également.

3.3. Démonstration du théorème 1. - On utilisera les notations déjà définies $S_\varepsilon(\alpha)$, $T_\varepsilon(\alpha)$, $K(\ )$, $S_{a,q}$; et on introduit le découpage de l'intégrale objet du théorème 1,

$$I' = \int_{\mathfrak{M}} S_0^{19-s}(\alpha)\ S_1^s(\alpha)\ e(-\alpha N)\ d\alpha$$

avec

$$I'_{a,q} = I'_{a,q}(N) = \int_{\mathfrak{M}_{a,q}} S_0^{19-s}(\alpha)\ S_1^s(\alpha)\ e(-\alpha N)\ d\alpha\ ,$$

de sorte que I' est égale à $\sum_{q \leqslant P^{1/2}} \sum_{(a,q)=1} I'_{a,q}$.

La présentation de la démonstration du théorème 1 est alors plus aisée en individualisant une étape intermédiaire.

PROPOSITION 1.5. - Pour $P \geqslant 10^{88}$, on a

$$\Big|I' - \frac{P_0^{15}}{16} K\Big(\frac{N}{(2P_0)^4}\Big) \sum_{q \leqslant P^{1/2}} \sum_{(a,q)=1} S_{a,q}\Big|$$

$$= \Big|\sum_{q \leqslant P^{1/2}} \sum_{(a,q)=1} I'_{a,q} - \frac{P_0^{15}}{16} K\Big(\frac{N}{(2P_0)^4}\Big) \sum_{q \leqslant P^{1/2}} \sum_{(a,q)=1} S_{a,q}\Big| \leqslant 3.10^{33}\ P_0^{14,5}\ .$$

On majore tout d'abord $|I'_{a,q} - \int_{\mathfrak{M}_{a,q}} T_0^{19-s}(\alpha)\ T_1^s(\alpha)\ e(-\alpha N)\ d\alpha|$ (proposition 1.4) ; puis $|\int_{\mathfrak{M}_{a,q}} T_0^{19-s}\ T_1^s\ e(-\alpha N)\ d\alpha - \int_{-\infty}^{+\infty} T_0^{19-s}\ T_1^s\ e(-\alpha N)\ d\alpha|$ (lemme adéquat). On remplace alors les $T_\varepsilon(\alpha)$ par leur valeur $1/2q\ G_\varepsilon(a\ ,\ q\ ;\ 0)\ I_{\beta,N}$; par un simple changement de variable, l'intégrale singulière

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{2P_0}^{4P_0} e(\beta t^4)\ dt\Big)^{19}\ e(-\beta N)\ d\beta$$

devient alors

$$P_0^{15} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_1^2 e(\beta t^4)\ dt\Big)^{19}\ e\Big(-\frac{\beta N}{(2P_0)^4}\Big)\ d\beta\ .$$

Cette quantité est alors mise en facteur, puis l'on somme sur a, puis sur q : c'est la proposition 2.5.

La fin de la démonstration du théorème 1 démarre de la constatation que I' aussi bien que la somme $(P_0^{15}/16)K(N/(2P_0)^4)\sum_q \sum_a S_{a,q}$ de la proposition 1.5 sont réelles. Puis, la proposition 1.2 permet de majorer $|\mathfrak{S}(N) - \sum_{q\leqslant P^{1/2}} \sum_{(0,q)=1} S_{a,q}|$ par $10^{25}\, P_0^{-1/2}$. Il résulte, enfin des propositions 1.1 et 1.3 qu'il existe un P_0, avec $N/(2P_0)^4 \in [85\ ,\ 151]$ tel que l'on ait

$$I' \geqslant \frac{11}{1600}\, P_0^{15} - 3{,}1\ 10^{33}\, P_0^{14{,}5}\ .$$

La condition N supérieure à 10^{300} implique P_0 supérieur à 10^{74} et, sous cette condition, toutes les propositions intermédiaires utilisées sont effectivement applicables. Et l'on constate que, toujours sous cette condition,

$$\frac{11}{1600}\, P_0^{15} - 3{,}1\ 10^{33}\, P_0^{14{,}5} \geqslant 0{,}0065\ P^{15}\ ;$$

le théorème 1 est donc démontré.

4. Majoration de Weyl pour les arcs mineurs.

4.1. Principe et premier cas. - On rappelle le théorème 2.

THÉORÈME 2. - *Pour* $P \geqslant 10^{80}$, $\varepsilon = 0$ *ou* 1, *et* $\alpha \in \mathfrak{m}$, *on a*

$$|S_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 6{,}1\ P^{0{,}8875}\ (\log P)^{0{,}25}\ .$$

Si on reprend la définition des arcs mineurs $\mathfrak{m}$ (complémentaire de la réunion des intervalles $\mathfrak{M}_{a,q} := (a/q - 975/qP^3\ ,\ a/q + 975/qP^3)$ pour $q \leqslant P^{1/2}$, $0\leqslant a<q$, $(a\ ,\ q) = 1$), on peut vérifier que, pour tout $\alpha \in \mathfrak{m}$, il existe a et q avec

$$P^{1/2} < q \leqslant P^3/974\ ,\ \ 0 < a < q\ ,\ \ (a\ ,\ q) = 1\ ,\ \ |\alpha - a/q| \leqslant 975/qP^3\ .$$

La démonstration distingue les deux cas

$$P^{1/2} < q \leqslant 4.10^6\ P \quad \text{et} \quad 4.10^6\ P < q \leqslant P^3/974\ .$$

On appellera $\mathfrak{m}_1$ la réunion des $\mathfrak{M}_{a,q}$ pour $P^{1/2} < q \leqslant 4.10^6\ P$, et $\mathfrak{m}_2$ la différence $(0\ ,\ 1) - \mathfrak{M} - \mathfrak{m}_1$.

Dans le premier cas, des résultats extraits de l'étude relative aux arcs majeurs permettent de démontrer sans problème la majoration cherchée (théorème 2A).

Dans le deuxième cas, il faut recourir, en les améliorant, aux techniques inaugurées par WEYL (théorème 2B).

L'amélioration introduite ici a encore pour but de "casser" l'irrégularité excessive des fonctions de diviseurs qui interviennent, mais le procédé est tout-à-fait différent. On introduit dans une somme de sommes d'exponentielles, avant utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, un coefficient à l'intérieur de la somme (externe), compensé bien entendu par son inverse à l'extérieur. Ces coefficients inverses sont naturellement traités de façon très différente, et l'on gagne très nettement.

THÉORÈME 2A. - *Pour* $P \geqslant 10^{80}$, $\varepsilon = 0$ *ou* 1, *et avec les notations introduites plus haut, on a, dans le cas* $P^{1/2} < q \leqslant 4.10^6\ P$

$$|S_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 2.P^{0,8875}\ (\log P)^{0,25}$$

La démonstration utilise la majoration de la proposition 1.4, que l'on rappelle. Si

$$I(\beta\ ,\ N) := \int_{2P_0}^{4P_0} e(\beta t^4)\ dt \quad \text{et} \quad T_\varepsilon(\alpha) := (1/2q)\ G_\varepsilon(a\ ,\ q\ ;\ 0) \times I(\beta\ ,\ N)\ ,$$

alors on a

$$|S_\varepsilon(\alpha) - T_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 2{,}9\ 10^6\ q^{1/4}\ P^{1/2} + 400\ q^{3/4}\ (\log q + 1)\ .$$

On reporte alors la majoration des sommes de Gauss de la proposition 1.2 :

$$|G_\varepsilon(a\ ,\ q\ ;\ 0)| \leqslant 18\ q^{3/4}\ ,$$

puis on combine avec la majoration triviale $2(P + 1)$ de l'intégrale $I(\beta\ ,\ N)$, et on obtient la majoration indiquée.

4.2. Deuxième cas : la méthode de Weyl.

THÉORÈME 2B. - Pour $P \geqslant 10^{80}$, $\varepsilon = 0$ ou 1, et avec les notations introduites plus haut, on a, dans le cas $4.10^6\ P < q \leqslant P^3/974$,

$$|S_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 6{,}1\ P^{0,8875}\ (\log P)^{0,25}\ .$$

La démonstration démarre de façon tout-à-fait semblable à celle du lemme de Hua. On pose tout d'abord $W_0(\alpha) := \sum_{x=P+1}^{2P} e(\alpha(2x + \varepsilon)^4)$, et on remplace $S_\varepsilon(\alpha)$ par $W_0(\alpha)$ (modification infime due au changement de rédacteur).

Puis on commence à faire fonctionner les différences itérées en posant

$$|W_0(\alpha)|^2 = \sum_x \sum_y e(\alpha((2y + \varepsilon)^4) - (2x + \varepsilon)^4))\ ,$$

que l'on majore par $P + 2W_1(\alpha)$, où $W_1(\alpha) = \sum_{h_1=1}^{P} |\sum_{x=P}^{2P-h_1} e(\alpha Q_1(h_1\ ,\ x))|$. Le polynôme $Q_1(h_1\ ,\ x) = 64h_1\ x^3 + \ldots$ est le même que celui qui sera défini plus loin dans le paragraphe 5.

C'est maintenant qu'apparaît l'innovation annoncée. On introduit la fonction arithmétique g, définie par

$$a := 0{,}1\ ,\quad g(n) := n^{-a/2} \prod_{p|n} (1 - p)^{-1/2}\ .$$

(On aura en outre à considérer les constantes $C := \prod_p (1 + 1/(p(p^8 - 1)))$ et $D := \prod_p (1 + ((1 - p^{-8})^{-1/2} - 1)/p)$: D intervient notamment dans la majoration de la fonction sommatoire $\sum_{n \leqslant X} g(n) \leqslant (D/0{,}95)\ X^{0,95}$.) On pose

$$W_2(\alpha) \leqslant \sum_{h_1=1}^{P} (g(h_1))^{-1} |\sum_{x=1}^{P-h_1} e(\alpha Q_1(h_1\ ,\ x))|^2\ ,$$

et on majore ensuite $|W_1(\alpha)|^2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|W_1(\alpha)|^2 \leqslant (\sum_{h_1=1}^{P} g(h_1))\ W_2(\alpha) \leqslant (D/0{,}95)\ P^{0,95}\ W_2(\alpha)\ .$$

On développe alors le carré intervenant dans $W_2(\alpha)$. Sa majoration conduit à faire intervenir la quantité suivante

$$W_3(\alpha) \leqslant \sum_{h_1=1}^{P} (g(h_1))^{-1} \sum_{h_2=1}^{P-h_1} |\sum_{x=1}^{2P-h_1-h_2} e(\alpha Q_2(h_1\ ,\ h_2\ ,\ x))|^2\ ,$$

et l'on continue ...

On arrive finalement à $W_5(\alpha)$, majoré par

$$(P^3/27)^{0,1} \sum_{n \leqslant P^3/27} \min(P , 1/(2 \|384n\alpha\|)) .$$

A travers un petit lemme adéquat, qui utilise l'approximation rationnelle de α (cf. début du paragraphe 4.1), on en déduit la majoration $W_5(\alpha) \leqslant 0,09\ P^{3,3} \log P$, puis on "remonte" les calculs, jusqu'à

$$|W_0(\alpha)| \leqslant 1,54\ C^{0,125}\ D^{0,5}\ P^{0,8875}\ (\log P)^{0,25} ,$$

qui est (moyennant le calcul des valeurs numériques de C et de D) la majoration du théorème 2B.

Signalons pour conclure que l'exposant "sensible" 0,8875 n'est autre que $(7+a)/8$, ce qui donne une excellente idée de l'optimisation (avec cette technique) du résultat.

5. Inégalité de Hua et sommes de diviseurs.

5.1. Principe général. - On doit majorer les intégrales $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^M \, d\alpha$ pour $M = 2^n$ en l'occurence pour $M = 2$, 4 , 8 et 16 . L'expression de ces majorations se fera en fonction de P et d'un majorant $B_\varepsilon(P)$ de la somme $H_\varepsilon(P)$ [quantité introduite dans l'énoncé du théorème 3A (§ 2.2)], et l'on obtiendra

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^2 \, d\alpha = P ;$$

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^4 \, d\alpha \leqslant 40\ P^2\ (\log P)^4 ;$$

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8 \, d\alpha \leqslant 4.000001\ B_\varepsilon(P)\ P^2 ;$$

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} \, d\alpha \leqslant 361980\ P^{12}\ (\log P)^{7,8} + 61,77\ B_\varepsilon(P)\ P^9\ (\log P)^{0,8} ,$$

cette dernière majoration constituant précisément l'énoncé "utile" du théorème 3A.

On peut comparer ces résultats avec ceux de HUA : $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)| \, d\alpha = O(P^{M-n+\varepsilon})$. On constate que les puissances de P sont bien sûr les mêmes, et que tout est dans les puissances de log P ...

Le changement important a consisté à abandonner la méthode de Davenport pour suivre celle de Hua. La raison essentielle est le remplacement, décrit à l'alinéa suivant, de la majoration des fonctions de diviseurs par leur maximum, pour utiliser un traitement permettant de faire intervenir leur moyenne. Dans leurs versions initiales, la méthode de Davenport comme celle de Hua utilisent des majorations par le maximum, mais ceci est incontournable chez Davenport, alors que c'est évitable chez Hua.

L'amélioration importante apportée à l'inégalité de Hua, sous sa forme primitive, réside comme on vient de le dire dans le traitement des sommes de diviseurs qui apparaissent dans les majorations des intégrales $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^M \, d\alpha$. Au lieu de majorer

les fonctions d_2 et d_3 que l'on rencontre, par leur maximum sur l'intervalle où elles se présentent, on s'efforce de les considérer en moyenne ; cela conduit à introduire les sommes $H_\varepsilon(P)$ qui ont été définies plus haut. En outre, on peut trouver des majorants $B_\varepsilon(P)$ un peu meilleurs pour $\varepsilon = 1$ que pour $\varepsilon = 0$, ce qui conforte la distinction introduite et la dissymétrie des inégalités imposées aux exposants $19 - s$ et s.

Une grande quantité de notations nouvelles doivent être introduites. On note $I_0 =]P - \varepsilon/2 , 2P - \varepsilon/2]$ (c'est l'intervalle de la sommation qui constitue $S_\varepsilon(\alpha)$). Etant donnés des entiers h_1 , h_2 , h_3 , on définit

$$I_n = I_{n-1} \cap (I_{n-1} - h_n) \quad (n = 1 , 2 , 3)$$

puis on définit les formes bicarrées

$$Q_0(y) = (2y + \varepsilon)^4 ,$$

$$Q_1(h_1 , y) = Q_0(h_1 + y) - Q_1(y) ,$$

$$Q_2(h_1 , h_2 , y) = Q_1(h_1 , h_2 + y) - Q_1(h_1 , y) ,$$

$$Q_3(h_1 , h_2 , h_3 , y) = Q_2(h_1 , h_2 , h_3 + y) - Q_2(h_1 , h_2 , y) .$$

On notera la décomposition en facteurs et le degré de ces facteurs :

$$Q_1(h_1 , y) = (2(y + h_1) + \varepsilon)^4 - (2y + \varepsilon)^4$$
$$= 8h_1((2y + \varepsilon)^3 + 3h_1(2y + \varepsilon)^2 + 4h_1^2(2y + \varepsilon) + 2h_1^3) ,$$

$$Q_2(h_1 , h_2 , y) = 16h_1 h_2(3(2y + \varepsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2) ,$$

$$Q_3(h_1 , h_2 , h_3 , y) = 192h_1 h_2 h_3(2y + \varepsilon + h_1 + h_2 + h_3) .$$

Ce degré joue un rôle primordial dans la difficulté de ce qui va suivre : la difficulté maximale se rencontrera pour Q_2 , où se conjuguent l'intervention de la fonction de diviseurs d_3 et un facteur de degré 2. On introduit enfin deux suites de coefficients : $b_{h,n}$, définie par $|S_\varepsilon(\alpha)|^M = \sum_{h \in Z} b_{h,n} e(h\alpha)$ $(n = 1,2,3 , M = 2^n)$ et

$$\sum c_{h,n} = \mathrm{Card}\{(h_1 , \ldots , h_n , y) \text{ tels que}$$

$$|h_1| + \ldots + |h_n| < P, \ y \in I_n , \ Q_n(h_1 , \ldots , h_n , y) = h\} .$$

L'intégrale pour $M = 2$ ne pose aucun problème, et s'évalue par l'égalité de Parseval : elle est égale au nombre des x entiers qui appartiennent à I_0 , c'est-à-dire à P .

La démonstration s'effectue par étapes successives, le point de départ pour chaque $M = 2^n$ $(n = 1 , 2 , 3)$ reposant sur deux expressions de $|S_\varepsilon(\alpha)|^M$ que l'on multipliera avant d'en prendre l'intégrale de 0 à 1.

D'une part, un lemme de récurrence (datant des travaux de WEYL sur l'équirépartition et utilisé pour le "lemme de Weyl" du problème de Waring), fonctionnant sur des sommes sur les entiers de différences itérées de fonctions, fournira la majoration

$|S_\varepsilon(\alpha)|^M \leqslant (2P)^{M-n-1} \sum_{h\in Z} c_{h,n}\, e(h\alpha)$ (majoration dont le principe est clair : $c_{h,n}$ est le nombre de solutions, sous certaines conditions, de $Q_n = h$, et Q_n a été fabriqué précisément par différences itérées).

D'autre part, l'égalité $|S_\varepsilon(\alpha)|^M = \sum_{h\in Z} b_{h,n}\, e(h\alpha)$, dont on peut remarquer que, "à travers" $|S_\varepsilon(\alpha)|^M = S_\varepsilon(\alpha)^{M/2} S_\varepsilon(-\alpha)^{M/2}$ (noter que $b_{-h,n} = b_{h,n}$), elle signifie que $b_{h,n}$ est le nombre de solutions, sous certaines conditions, de

$$x_1^4 + \ldots + x_{M/2}^4 - x_{(M/2)+1}^4 - \ldots - x_M^4 = h .$$

L'égalité de Parseval donnera donc $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{2M}\, d\alpha \leqslant (2P)^{M-n-1} \sum_{h\in Z} c_{h,n}\, b_{h,n}$ où $\sum_{h\in Z} c_{h,n}\, b_{h,n}$ est majoré par $c_{0,n}\, b_{0,n} + N^\varepsilon \sum_{h\neq 0} b_{h,n}$ dans le traitement classique de Hua. Par ailleurs, on utilisera les relations $b_{0,n} = \int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^M\, d\alpha$ et (égalité de Parseval encore)

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{2M}\, d\alpha = \sum_{h\in Z} b_{h,n}^2 .$$

5.2. Majorations intermédiaires. - On utilisera plusieurs résultats auxiliaires. D'une part, la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. - On pose

$$A(X) = \mathrm{Card}\{(k\ ,\ x\ ,\ y) \text{ tels que } 0 < k < X\ ,\ x\ ,\ y \in]X\ ,\ 2X]\ ,\ x^4 \equiv y^4 \pmod k\}$$

Alors, pour $X \geqslant 10^{80}$, on a

$$A(X) \leqslant 9X^2 (\log X)^4 - X^2 .$$

Et, d'autre part, un grand nombre d'évaluations et de majorations, très précises mais tout-à-fait standards, de fonctions de diviseurs. Elles ne sont pas reproduites ici.

L'intégrale pour $M = 4$ est, comme on l'a remarqué, $\sum_h b_{h,1}^2$. Si l'on se rappelle l'expression $S_\varepsilon(\alpha) = \sum_{2P<2x+\varepsilon\leqslant 4P} e(\alpha(2x+\varepsilon)^4)$, on constate que l'on peut écrire $|S_\varepsilon(\alpha)|^2 = \sum_{|h_1|<P} \sum_{y\in I_1} e(\alpha Q_1(h_1\ ,\ y))$ (ce qui montre au passage l'égalité, limitée au cas $n = 1$, $b_{h,1} = c_{h,1}$).

On sépare alors $c_{0,1}^2$, qui vaut P^2, et $\sum_{h\neq 0} c_{h,1}^2$, que l'on majore par

$$\mathrm{Card}\{(k\ ,\ h\ ,\ y) \text{ tels que } \ldots \text{ et } k \mid Q_1(h\ ,\ y)\} ,$$

ce qui permet de faire intervenir la proposition 3.1 qui majore le nombre des triplets $(k\ ,\ x\ ,\ y)$ solutions de $x^4 \equiv y^4 \pmod k$.

La majoration de l'intégrale pour $M = 8$ repose, comme annoncé au paragraphe précédent, sur les deux expressions de $|S_\varepsilon(\alpha)|^4$, et sur l'égalité

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8\, d\alpha = \sum_h b_{h,2}^2 .$$

On a, d'une part $|S_\varepsilon(\alpha)|^4 = \sum_{h\in Z} b_{h,2}\, e(h\alpha)$, et d'autre part, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'expression

$$|S_\varepsilon(\alpha)|^2 = \sum_{|h_1|<P} \sum_{y\in I_1} e(\alpha Q_1(h_1\ ,\ y)) ,$$

$|S_\varepsilon(\alpha)|^4 \leq 2P \sum_{|h_1|<P} \sum_{|h_2|<P-|h_1|} \sum_{y\in I_2} e(\alpha Q_2(h_1, h_2, y)) \leq 2P \sum_{h\in Z} c_{h,2}\, e(\alpha h)$. On en déduit alors la majoration $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8\, d\alpha \leq 2P \sum_h c_{h,2}\, b_{h,2}$. On remarque maintenant que $c_{h,2} \leq d_3((1/16)h)$ pour $h \neq 0$, et c'est à cet endroit précis que le traitement va différer de celui effectué par HUA.

Celui-ci arrivait à une majoration $2P(c_{0,2}\, b_{0,2} + \max d_3(h) \sum_h b_{h,2})$. Mais si l'on évite $\max d_3(h)$ pour utiliser $\sum_{h\neq 0} c_{h,2}^2$ (au moyen encore de l'inégalité de Cauchy-Schwarz !), on obtient une amélioration tout-à-fait spectaculaire. Or

$$c_{h,2} = \mathrm{Card}\{(h_1, h_2, y) \text{ tels que } \ldots \text{ et } Q_2(h_1, h_2, y) = h\},$$

et apparaissent alors les sommes H_ε , introduites plus haut, sous la forme :

$$\sum_{h\neq 0} c_{h,2}^2 \leq 2 \sum_{\substack{0<|h_1|+|h_2|<P \\ h_1, h_2 \neq 0}} \sum_{y\in I_2} d_3((1/16)\, Q_2(h_1, h_2, y)) .$$

On obtient ainsi une majoration de l'intégrale $J = \int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8\, d\alpha$, dans laquelle on "réinjecte" J elle-même par sa racine carrée $(\sum_h b_{h,2}^2)^{1/2}$, et la résolution de l'inéquation du second degré obtenue fournit la majoration annoncée en fonction de P et de B_ε .

5.3. Majoration de $\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}$. - On commence par énoncer la version "complète" du théorème 3A (la version donnée au début avait été écrite en donnant au paramètre γ la valeur 0,1, qui optimisait la démonstration ultime).

THÉORÈME 3A. - Pour P supérieur à 10^{80} , $\varepsilon = 0$ ou 1 , γ un paramètre compris entre 0 et 0,25, et sous réserve que l'on puisse choisir $B_\varepsilon(P)$ satisfaisant $P^3 (\log P)^8 \leq B_\varepsilon(P) \leq P^{3,6}$, on a

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16} \leq 238000\, 3^{8\gamma}\, 2^{-4\gamma}(1+2\gamma)^{-1}\, P^{12}\, (\log P)^{7+8\gamma} + 66\, 2^{-\gamma}\, B_\varepsilon(P)\, P^9\, (\log P)^1.$$

Le schéma de la démonstration pour ce cas M = 16 est assez similaire à celui pour le cas M = 8 . Les principales particularités sont les suivantes :

- les trois entiers h_1 , h_2 et h_3 , ne sont pas utilisés "librement", mais h_1 et h_2 ont été préalablement liés par $h_1 h_2 = k$;

- on utilise $E(k) = Ep(k) = \mathrm{Card}\{(h_1,h_2)$ tels que $h_1h_2 = k$, $0<|h_1|+|h_2|<P\}$; on définit à ce moment $h_1(k)$, $h_2(k)$, et $I_2(k)$;

- une quantité $Z_\varepsilon(\alpha) = |S_\varepsilon(\alpha)|^4 - 8P^3$ est introduite vers le début de la démonstration ; elle est majorée par $2P \sum_{k\neq 0} E(k) \left|\sum_{y\in I_2(k)} e(\alpha Q2(h_1(k), h_2(k), y)\right|$; on majore ensuite $|Z_\varepsilon(\alpha)|^2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et c'est alors que l'on introduit le paramètre $\gamma \in (0, 1)$;

- l'utilisation du coefficient $c_{h,3} = \mathrm{Card}\{(h_1, h_2, h_3, y)$ tels que $\ldots\}$ est remplacée par celle de $C_{h,3} = \sum_{k\neq 0} Ep^{2\gamma}(k)\, \mathrm{Card}\{(h_3, y)$ tels que $\ldots\}$;

- $C_{h,3}$ est également majoré à travers des fonctions de diviseurs, mais il n'y a pas de difficulté nouvelle, et on retrouvera le même B_ε dans la majoration finale;

- la valeur de l'intégrale est comme pour $M = 8$ "réinjectée" dans sa majoration par sa racine carrée, et l'on obtient

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}\, d\alpha \leqslant 4\, P^2 \Big(\sum_{k\neq 0} Ep^{2-2\gamma}(k)\Big)\{C_{0,3}\, b_{0,3} + \Big(\sum_{h\neq 0} C_{h,3}^2\Big)^{1/2}\}$$
$$\times \Big(\sum_{h\neq 0} b_{h,3}^2\Big)^{1/2} + 16\, P^3 \Big(\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^8\Big)^{1/2} \Big(\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}\Big)^{1/2},$$

puis

$$\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}\, d\alpha \leqslant \Big(4P^2 \Big(\sum_{k\neq 0} Ep^{2-2\gamma}(k)\Big)\Big(\sum_{h\neq 0} C_{h,3}^2\Big)^{1/2}$$
$$+ 3{,}21\, P^4\, B_\varepsilon(P)^{1/2}\Big) \times \Big(\int_0^1 |S_\varepsilon(\alpha)|^{16}\Big)^{1/2} + 16{,}1\, P^4\, B_\varepsilon(P)\, C_{0,3} \times \Big(\sum_{k\neq 0} Ep^{2-2\gamma}(k)\Big).$$

Il ne reste plus qu'à reporter les majorations précédemment établies pour les $C_{h,3}$ pour achever la démonstration.

5.4. Structure multiplicative des diviseurs : réduction préliminaire. - On a posé $H_\varepsilon(P) := \sum_{h_1,h_2,y} d_3(|h_1\, h_2(3(2y + \varepsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2)|)$, et l'on veut obtenir la majoration du théorème 3B.

THÉORÈME 3B. - *Pour* $P \geqslant 10^{80}$, *on a*

$$H_\varepsilon(P) \leqslant C_\varepsilon\, P^3\, (\log P)^9\, (\log\log P)^2$$

avec $C_0 = 1{,}734\ 10^{-2}$ *et* $C_1 = 8{,}18\ 10^{-4}$, *où la sommation est étendue aux triplets* (h_1, h_2, y) *tels que* $h_1\, h_2 \neq 0$, $|h_1| + |h_2| \leqslant P$, $2P < 2y + \varepsilon \leqslant 4P$, $2P < 2y + \varepsilon + h_1 + h_2 \leqslant 4P$.

Si l'on peut trouver une bonne majoration de $\sum_y d_3(3(2y + \varepsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2)$ on pourra écrire

$$H_\varepsilon(P) \leqslant 8 \sum_{\substack{0<h_1\leqslant P\\ 0<h_2\leqslant P}} \sum_{\substack{2P<2y+\varepsilon\leqslant 4P\\ 2P<2y+\varepsilon+h_1+h_2\leqslant 4P}} d_3(h_1\, h_2(3(2y + \varepsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2))$$
$$\leqslant 8 \sum_{\substack{0<h_1\leqslant P\\ 0<h_2\leqslant P}} d_3(h_1)\, d_3(h_2) \sum_y d_3(3(2y + \varepsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2)).$$

Cela ne suffit pas tout-à-fait pour obtenir une majoration efficace, et il faut raffiner en localisant h_1 et h_2 dans des progressions arithmétiques de module M (on prendra $M = 6$ ou 12 ; au-delà, la complication, proportionnelle à M^2, est trop grande pour un bénéfice négligeable). L'expérimentation numérique montre que le terme correspondant à h_1 et h_2 congrus à 0 est prépondérant, ceux correspondant à h_1 ou h_2 congrus à 2 ou 3 ou 4 plus petits, et les autres extrêmement petits : le bénéfice ici est substantiel.

Ce raffinement change (et complique) le détail de la démonstration complète, mais il n'est pas utile d'expliciter les formules complètes pour faire comprendre le principe général.

On voit donc que la détermination de B_ε dépend, d'une part de majorations de

$\Sigma_{0<h_1\leqslant P, 0<h_2\leqslant P} d_3(h_1)\, d_3(h_2)$ (pour h_1 et h_2 localisés dans des progressions arithmétiques), ce qui est long et minutieux mais standard, d'autre part de majorations de $\Sigma_y d_3(3(2y+\varepsilon+h_1+h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2)$ (ou, plus précisément du sup de cette somme pour h_1 et h_2 localisés dans des progressions arithmétiques), que l'on va maintenant présenter.

5.5. Majorations "racine-bornées". - L'idée de base est la suivante : étant donnée une fonction arithmétique f, nécessairement multiplicative, on cherche une fonction g, multiplicative également, et telle qu'il existe une constante C telle que la majoration

$$f(n) \leqslant 2C \sum_{d|n, d\leqslant\sqrt{n}} g(d)$$

soit vraie (pour tout n).

L'idée de sommer sur les diviseurs de n, avec une contrainte de taille, se trouve chez ERDÖS ([14], limitation relative aux facteurs premiers des diviseurs) et a été reprise par McDONAGH et WOLKE ([24], limitation des diviseurs eux-mêmes par une puissance n^α), mais avec d'autres buts et de manière tout-à-fait différente.

Le gain est considérable puisque l'on passe d'une valeur de B_ε de $7P^3 (\log P)^{13} (\log\log P)^{0,5}$ à $0{,}02\, P^3 (\log P)^9 (\log\log P)^2$.

Pour préparer la démonstration du théorème 3B, on utilisera un (ou des) couple(s) de fonctions que l'on pourrait appeler "racine-bornée convenables", et le problème essentiel sera de calculer la meilleure constante C. Pour cela on associera à toute fonction arithmétique g positive une transformée G^* définie par

$$G^*(n) := \sum_{d|n} \min(g(d), g(n/d)).$$

On vérifie immédiatement que G^* est "sur-multiplicative", et que l'on a trivialement $G^*(n) \leqslant 2 \sum_{d|n, d\leqslant\sqrt{n}} g(d)$. Il s'ensuit que toute majoration $f(n) \leqslant CG^*(n)$ implique automatiquement la majoration $f(n) \leqslant 2C \sum_{d|n, d\leqslant\sqrt{n}} g(d)$. Le problème de la détermination d'une bonne constante se réduit donc au calcul du maximum de la fonction "sous-multiplicative" positive f/G^*, pour lequel on peut imaginer un algorithme très efficace (de fait, l'algorithme permet par surcroît d'aider à montrer que f/G^* est bornée).

On va tout d'abord donner quelques indications sur l'algorithme, qui fonctionne dans le cas particulier où les fonctions arithmétiques (multiplicatives ou sous-multiplicatives) considérées ont pour chaque entier $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ des valeurs qui ne dépendent que de la suite $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ des exposants (on dira alors que ces fonctions arithmétiques sont structurales). Ce cas particulier est en fait celui d'un très grand nombre de fonctions arithmétiques usuelles, et notamment celui des fonctions de diviseurs qui nous intéressent ici.

Etant donné un entier n, dont la décomposition $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ est écrite de façon à avoir la décroissance $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k \geqslant 1$, on appellera structure multiplicative de n la suite $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ des exposants. On constate alors que l'ordre

lexicographique est un bon ordre total sur l'ensemble des structures multiplicatives, et cela fournit le "moteur" de l'algorithme de recherche du maximum d'une fonction arithmétique sous-multiplicative, positive et structurale G^* . Dans la pratique, le résultat (existence et valeur du maximum) est fourni par la conjonction de deux éléments :

- une exploration par ordinateur des valeurs de G^* sur un sous-ensemble (fini) des structures multiplicatives inférieures à (α) , où α est un certain entier adapté à la fonction ;

- la démonstration théorique que $G^*(n) \leq 1$ pour tout n de structure multiplicative (β) , avec $\beta \geq \alpha$.

Dans le cas de la fonction d_3 , on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 3.2. - Soient les deux fonctions multiplicatives structurales $f(=d_3)$ et g , définies par

$$f(p^\alpha) = (\alpha + 1)(\alpha + 2)/2 ,$$

$$g(p^\alpha) = \begin{cases} 2,5 & \text{pour } \alpha = 1 \\ 2,5\,\alpha - 0,5 & \text{pour } \alpha \geq 2 ; \end{cases}$$

alors on a, pour tout n ,

$$f(n) \leq 3,2 \sum_{d|n,\, d\leq\sqrt{n}} g(d) .$$

5.6. Majoration de $B_\epsilon(P)$. - La proposition 3.2 permet d'écrire (pour simplifier l'écriture, on omet volontairement les conditions de localisation de h_1 et de h_2 dans des progressions arithmétiques) :

$$\sum_y d_3(3(2y + \epsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2) \leq 3,2 \sum_y \sum_{d|n,\, d\leq\sqrt{n}} g(d) ,$$

$$(\text{où } n = 3(2y + \epsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2)$$

ou encore, compte tenu des limitations de taille pour y , h_1 , et h_2 ,

$$\sum_y d_3(3(2y + \epsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2) \leq 3,2 \sum_y \sum_{d\leq 7P} g(d)$$

soit enfin, en notant $\rho(\epsilon , h_1 , h_2 ; d)$ le nombre de solutions en y modulo d de la congruence $3(2y + \epsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2 \equiv 0 \pmod d$,

$$\sum_y d_3(3(2y + \epsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2$$

$$\leq 3,2 \sum_{d\leq 7P} g(d)\, \rho(\epsilon , h_1 , h_2 ; d)([P/d] + 1) \ldots$$

$$\leq 3,2 \sum_{d\leq 7P} g(d)\, \rho(\epsilon , h_1 , h_2 ; d)(7P/d) .$$

L'essentiel du travail est maintenant de majorer $\sum_{d\leq 7P} g(d)\, \rho(\epsilon,h_1,h_2 ; d))/d$. Cela nécessite une estimation préalable du nombre des solutions d'une congruence quadratique.

PROPOSITION 3.3. - Soit $\rho_H(d)$ le nombre de solutions en z (modulo d) de la

congruence $3z^2 \equiv H \pmod d$. La fonction $\rho_H(d)$ est multiplicative (en d) et, selon les cas précisés ci-dessous, la suite $\alpha \longmapsto \rho_H(p^\alpha)$ est majorée terme à terme par :

- 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , ... si $p \geqslant 5$ et $p^2 \nmid H$,
- 1 , p , 2p , p^2 , $2p^2$, p^3 , $2p^3$, ... si $p \geqslant 5$ et $p^2 | H$,
- 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , ... si $p = 3$ et $p \nmid H$,
- 3 , 3 , 9 , 18 , 27 , 54 , 81 , 162 , ... si $p = 3$ et $p | H$,
- 1 , 2 , 4 , 4 , 4 , 4 , ... si $p = 2$ et $p \nmid H$
- 1 , 2 , 2 , 4 , 4 , 8 , 8 , 16 , ... si $p = 2$ et $p | H$.

Si $p \geqslant 3$, cette proposition sera utilisée ne varietur pour majorer $\rho(\epsilon , h_1 , h_2 ; d)$. Si $p = 2$, la recherche de l'efficacité numérique demande un raffinement supplémentaire.

COMPLÉMENT À LA PROPOSITION 3.3. - Soit $\rho(\epsilon , h_1 , h_2 ; d)$ le nombre de solutions en y (modulo d) de la congruence $3(2y + \epsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2 \equiv 0 \pmod d$. Selon les cas précisés ci-dessous, la suite $\alpha \longmapsto \rho(\epsilon , h_1 , h_2 ; 2^\alpha)$ est majorée terme à terme par

- 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , ... si $\epsilon = 1$,
- 2 , 0 , 0 , 0 , 0 , ... si $\epsilon = 0$ et $2 \nmid h_1 h_2$,
- 2 , 4 , 8 , 8 , 8 , ... si $\epsilon = 0$ et $2 \| h_1 h_2$,
- 2 , 4 , 4 , 8 , 16 , 16 , 32 , ... si $\epsilon = 0$ et $2 | h_1$ et $2 | h_2$.

Pour fabriquer une majoration acceptable de $\sum_{d \leqslant 7P} (g(d)\, \rho(\epsilon , h_1 , h_2 ; d))/d$, il faut tout d'abord isoler l'effet perturbateur des facteurs locaux relatifs à $p = 2$ et $p = 3$. La majoration suivante, valable pour toute fonction h multiplicative et positive (et telle que $(1 + h(p) + h(p^2) + \ldots)$ converge), y pourvoit

$$\sum_{n \leqslant x} h(n) \leqslant \prod_{p | \sigma} (1 + h(p) + h(p^2) + \ldots) \sum_{n \leqslant x , (n,\sigma)=1} h(n) .$$

Dans le cas de la fonction $h(d)\, \rho(d)/d$, on obtient un ensemble de valeurs (rappelons qu'elles dépendent des valeurs de h_1 et de h_2 modulo M) dont la plus grande est $k_2 k_3 = 43 \times 13{,}75 = 591{,}25$.

La fin de la démonstration utilise le résultat suivant :

PROPOSITION 3.4. - Soient f et g deux fonctions multiplicatives et positives. Si, pour tout nombre premier p et tout entier β , on a $\sum_{\alpha \leqslant \beta} f(p^\alpha) \leqslant \sum_{\alpha \leqslant \beta} g(p^\alpha)$, alors on a

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \leqslant \sum_{n \leqslant x} g(n) \quad \text{pour tout} \quad x .$$

La dernière question qui reste à résoudre est de trouver une bonne fonction majorante pour $g(d)\, \rho(\epsilon , h_1 , h_2 ; d)/d$. Sous les conditions P fixé $\geqslant 10^{80}$

et $|h_1| + |h_2| \leqslant P$, on peut trouver une suite de fonctions $g_{P,k}$ (que l'on notera simplement g_k), pour $k = 0 , 1 , \dots , S$, qui vérifie les propriétés

$$- \sum_{n \leqslant x} \frac{g_0(n)}{n} \leqslant C_0 (\log\log P)^2$$

$$- g_{k+1} = g_k * i \quad (\text{i. e. } g_{k+1}(n) = \sum_{d|n} g_k(d)) ;$$

$$- g(d)\, \rho(\varepsilon , h_1 , h_2 ; d) \leqslant g_5(d) .$$

Les sommes $\sum_{n \leqslant x} g_k(n)/n$ sont convenablement majorables en $C_k (\log x)^k (\log\log P)^2$, et l'on en déduit la majoration recherchée

$$\sum_{d \leqslant 7P} \frac{g(d)\, \rho(\varepsilon , h_1 , h_2 ; d)}{d} \leqslant C (\log P)^5 (\log\log P)^2 .$$

Pour terminer la démonstration du théorème 3B, il suffit de multiplier la majoration de $\sum_{0<h_1 \leqslant P, 0<h_2 \leqslant P} d_3(h_1)\, d_3(h_2)$, qui est en $(P(\log P)^2)^2$ (travail de routine, quoique délicat pour obtenir des constantes fines, qui n'a pas été décrit ici), par celle obtenue ci-dessus pour $\sum_y d_3(3(2y + \varepsilon + h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2)$: le résultat est bien en $P^3 (\log P)^9 (\log\log P)^2$, et la constante exacte est fournie par une sommation, sur les M^2 couples de valeurs de h_1 et h_2 modulo M , de tous les produits des constantes elles-mêmes fonctions de ces valeurs.

On peut remarquer pour terminer que la démonstration (paragraphe 2.3) du théorème A (asymptotique) n'a pas utilisé la valeur de C_1 nettement inférieure à celle de C_0 dans le théorème 3B. On peut "mixer" les deux constantes pour la mise en oeuvre de l'inégalité de Hölder, mais l'amélioration qui en résulte (environ 4 unités sur l'exposant de la puissance de 10) n'est pas essentielle.

C. PARTIE "FINIE"

6. Résultats numériques.

6.1. Schéma général. - L'exposé sera simplifié en introduisant la notation B_s : " n est B_s " signifie que n est somme de s bicarrés (positifs ou nuls).

La vérification jusqu'à 10^{378} repose sur trois éléments : une recherche de B_5 , congrus à 50 modulo 80 , dans un intervalle de longueur $9{,}3\ 10^{10}$ situé dans la zone entre $0{,}3\ 10^{11}$ et $1{,}3\ 10^{11}$, des lemmes standards de "montée" (alias de "descente", c'est bien entendu la même chose), et une étude séparée des B_2 congrus à 17 modulo 80 (sommes qui permettront d'assurer le passage délicat des sommes de B_5 aux B_7).

L'originalité de ce traitement est double.

D'une part, on est "allé chercher" des B_5 , loin bien sûr, quoiqu'au plus bas que les arguments probabilistes laissaient espérer (THOMAS, par exemple, auteur des meilleurs résultats dans ce domaine, avait trouvé des B_7 dans des zones allant jusqu'à environ 10^7 et des B_6 jusqu'à environ 10^9 ; mais n'avait pas tenté de trouver des B_5 en allant les chercher où ils sont, i. e. beaucoup plus loin). Il

y a bien sûr un prix à payer : la limitation de la recherche des B_5 aux progressions modulo 80 les plus fournies (alors que THOMAS avait travaillé dans plusieurs progressions modulo 16 et avait ensuite trié modulo 5 les exceptions).

D'autre part, les résultats obtenus ne permettant que d'approcher (par les méthodes standards de montée) la borne asymptotique, mais non de l'atteindre, deux solutions étaient possibles : ou aller chercher un ordinateur de plus forte puissance que l'IBM 4381 utilisé, ou bien effectuer une étude directe des B_2 jusqu'à environ $6\ 10^{16}$; c'est la seconde solution qui a été choisie, à la fois parce qu'elle était plus intéressante sur le plan théorique, ... et parce qu'elle permettait de garder un peu de puissance en réserve.

6.2. Vérifications par ordinateur.

PROPOSITION 4.1. - Tout entier compris entre $\ell_1 = 3{,}05299\ 10^{10}$ et $\ell_2 = 12{,}361\ 10^{10}$, et congru à 50 modulo 80 est B_5, à l'exception peut-être de 452 nombres que l'on notera w_1, ..., w_{452}.

(Les valeurs exactes sont $\ell_1 = 30\ 529\ 861\ 571$, $\ell_2 = 123\ 610\ 661\ 329$, et $(\ell_2 - \ell_1)/2 = 46\ 540\ 399\ 879$).

Le "peut-être" est lié aux limitations de l'ordinateur et du programme qui a été conçu et exécuté : ont été répertoriées toutes les sommes de 5 bicarrés, calculées sous la forme $a_3 + b_2$, avec a_3 = somme de 3 bicarrés congrus à 16 (mod 80), b_2 = somme de 2 bicarrés congrus à 1 (mod 80), $a_3, b_2 \leq 80\ 2^{30} = 8{,}5899\ 10^{10}$; au-delà de cette limite, il est donc possible (et probablement même fréquent, car les nombres non-B_5 se raréfient de plus en plus) que certains nombres, dont l'expression comme B_5 n'a pas été trouvée, le soient néanmoins.

Il est (colossalement) prohibitif (en temps de calcul) de rechercher pour une suite de nombres, en l'occurence les $80n + 50$, si chacun individuellement est un B_5. Le coût reste tout aussi prohibitif, ou presque, si l'on travaille sur des blocs de valeurs consécutives de n, même de très grande taille ... à moins que l'on ne travaille sur toutes les valeurs de n à la fois.

Mais c'est la taille mémoire nécessaire (mémoire UC, si l'on ne veut pas retrouver de problème de temps) qui pose de nouveau un problème redoutable. On a étudié les $80n + 50$ jusqu'à $1{,}32\ 10^{11}$, soit pour n jusqu'à $1{,}65\ 10^9$; en stockant sur un seul bit l'information que le nombre est ou n'est pas un B_5, ce qui ne soulève aucune difficulté informatique, il aurait fallu un peu plus de 206 méga-octets, ce qui dépassait largement la mémoire (même virtuelle) de l'ordinateur disponible.

Or il y a une possibilité très simple de contourner cette difficulté : travailler, pour les n, dans des progressions arithmétiques de module convenable M. Il suffit de trier préalablement les suites (a_3) et (b_2) modulo M (il n'y a aucun problème, ni de temps ni de mémoire) ; ensuite, un reste r modulo M étant donné, les valeurs de n congrues à r sont étudiées par M "passages" (on ajoute les

$a_3 \equiv r'$ aux $b_2 \equiv r''$: il y a M couples (r', r'') à considérer). On retombe dans le domaine du possible :

- le temps total est pratiquement inchangé : il y a $M \times M$ "passages", dont chacun nécessite un temps sensiblement $1/M^2$ de celui qu'aurait nécessité un passage unique sans condition de congruence ;

- par contre la taille mémoire nécessaire est tout simplement divisée par M : on a pris $M = 43$ (il est souhaitable que M soit premier et congru à 3 modulo 4 pour éviter de trop grandes irrégularités de distribution entre les classes modulo M), et la mémoire nécessaire est retombée à 4,8 Mo .

Le programme a été écrit en FORTRAN (qui reste le langage des "gros" calculs numériques).

PROPOSITION 4.2. - Entre 17 et $5{,}747544\ 10^{16}$, il existe une suite c_j d'entiers B_2 congrus à 17 modulo 80 qui vérifie les propriétés suivantes :

- toutes les différences $c_{j+1} - c_j$ sont inférieures à $(\ell_2 - \ell_1)/2$ $(= 4{,}65404\ 10^{10})$;

- aucune des différences $c_{j+1} - c_j$ n'est égale à une des différences $w_h - w_k$ entre les entiers introduits par la proposition 4.1. (Il existe 57803 différences inférieures à $(\ell_2 - \ell_1)/2$.)

COROLLAIRE. - Entre $m_1 = \ell_2 + 17 = 0{,}000012\ 10^{16}$ et $m_2 = \ell_1 + 5{,}747544\ 10^{16}$, $\ell = 5{,}747547\ 10^{16}$, tout entier congru à 67 modulo 80 est B_7 .

Ce corollaire est une variante "peigne à deux dents" de l'algorithme glouton standard.

On peut remarquer que cette proposition signifie que l'on a pu faire fonctionner l'algorithme de descente des B_7 aux B_5 comme si l'on avait trouvé une plage de longueur $(\ell_2 - \ell_1)/2$ de B_5 de la forme $80n + 50$, sans aucune exception.

Le programme a été également écrit en FORTRAN.

6.3. Fonctionnement de la descente.

PROPOSITION 4.3. - Si tout entier congru à r modulo M et appartenant à l'intervalle $[A , A + D[$ est B_s , alors tout entier congru à $r + \delta$ modulo M et appartenant à l'intervalle $[A , A + D + ([D/c]^{1/3})^4[$ est B_{s+1} ; on peut prendre les valeurs suivantes, pour M , δ , et $c = c(M , \delta)$,

$$M = 16 , \quad \delta = 0 \text{ ou } 1 , \quad c = 8 ;$$
$$M = 80 , \quad \delta = 1 \text{ ou } 16 , \quad c = 16 ;$$
$$M = 80 , \quad \delta = 0 \text{ ou } 65 , \quad c = 40 ;$$

(on symbolisera par les lettres R , S et T les trois types correspondants de descente).

Ce résultat est une légère variante de l'algorithme glouton standard, et se

démontre de même.

Pour démontrer le théorème B, "tout entier N inférieur à 10^{378} est B_{19} ", il suffit en fait de faire la vérification pour les entiers qui ne sont pas congrus à 0 modulo 16 . On devra distinguer deux cas, selon que $N \equiv 3, 4, \ldots, 15$, ou que $N \equiv 1$ ou 2 (mod 16) .

Premier cas : On maîtrise la valeur modulo 16 dans les descentes de type S aussi bien que de type T ; par contre, la variation (1 ou 0) de la valeur modulo 5 est imposée par le type S ou T et, dans le pire des cas, il faudra 4 descentes de type T (et donc 8 descentes de type S) pour "ajuster le tir" de B_{19} à B_7 TTTTSSSSSSSS , en plaçant les descentes de type T au début (de B_{19} à B_{15}) pour minimiser la perte. La valeur d'arrivée (celle relative aux B_7) est $D = n_2 - n_1 = 5{,}747535\ 10^{16} = 10^{16{,}75948}$. Les valeurs numériques sont alors les suivantes (nombre de bicarrés, puissance de 10) :

7	8	9	10	11	12	13
16,759	20,740	26,048	33,125	42,562	55,144	71,920

14	15	16	17	18	19
94,287	124,111	163,346	215,659	285,409	378,409 .

Deuxième cas : L'idée est de commencer par une ou deux descentes "simples" de type R , ce qui fournit un entier divisible par 16 : on le divise, et on obtient alors un nombre dont il faut montrer, à la manière du premier cas, qu'il est B_{18} ou B_{17} . Mais il faut que le nombre obtenu par division par 16 soit congru à 3, 4, ... , 12, ou 13 modulo 16 , ce qui nécessite de contrôler partiellement les valeurs modulo 256 . La chose est possible si l'on remplace la (ou les) descente(s) de type R par des descentes beaucoup plus compliquées, gérant partiellement les valeurs modulo 80 . Sur le plan numérique, la constante analogue au $c(M, \delta)$ de la proposition 4.3 est très mauvaise mais influe extrêmement peu sur la borne car elle intervient tout en "haut" de la descente (de plus, on peut compenser cette légère perte en diminuant le nombre des descentes de type S).

On ne donne pas le détail de ces descentes qui fournissent les bornes $10^{378{,}064}$ et $10^{378{,}336}$ pour N congru respectivement à 1 et 2 modulo 16 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] AULUCK (F. C.). - On Waring's problem for biquadrates, Proc. Indian Acad. Sc., Section A, t. 11, 1940, p. 437-450.

[2] BALASUBRAMANIAN (R.). - On Weyl's inequality (à paraître).

[3] BALASUBRAMANIAN (R.), DESHOUILLERS (Jean-Marc) et DRESS (F.). - Problème de Waring pour les bicarrés, 1 : schéma de la solution, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 303, 1986, série 1, n° 4, p. 85-88.

[4] BALASUBRAMANIAN (R.), DESHOUILLERS (Jean-Marc) et DRESS (F.). - Problème de Waring pour les bicarrés, 2 : résultats auxiliaires pour le théorème asymptotique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 303, 1986, série 1, n° 5, p. 161-163.

[5] DAVENPORT (H.). - On Waring's problem for fourth powers, Annals of Math., Series 2, t. 40, 1939, p. 731-747.

[6] DESHOUILLERS (Jean-Marc). - Problème de Waring pour les bicarrés : le point en 1984, Théorie analytique des Nombres, 2e année, 1984/85, n° 33, 5 p.

[7] DESHOUILLERS (Jean-Marc). - Problème de Waring pour les bicarrés, Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux, 1984/85, exposé n° 14.

[8] DESHOUILLERS (Jean-Marc) et DRESS (F.). - Sommes de diviseurs et structure multiplicatives des entiers, soumis à **Acta Arithm.**, Warszawa.

[9] DESHOUILLERS (Jean-Marc) et DRESS (F.). - Résultats numériques sur les sommes de 5 bicarrés et conséquences pour les sommes de 19 bicarrés, **soumis à** Math. Comput.

[10] DICKSON (L. E.). - Recent progress on Waring's theorem and its generalizations, Bull. Amer. math. Soc., t. 39, 1933, p. 701-727.

[11] DRESS (F.). - Théorie additive des nombres, problème de Waring et théorème de Hilbert, Enseignement math., Genève, t. 18, 1972, p. 175-190.

[12] DRESS (F.). - Amélioration de la majoration de $g(4)$ dans le problème de Waring : $g(4) \leq 30$, Acta Arithm., Warszawa, t. 22, 1973, p. 137-147.

[13] ELLISON (W. J.). - Waring's problem, Amer. math. Monthly, t. 78, 1971, p. 10-36.

[14] ERDÖS (P.). - On the sum $\sum_{k=1}^{\infty} d(f(k))$, J. of London math. Soc., t. 27, 1952, p. 7-15.

[15] HARDY (G. H.) and LITTLEWOOD (J. E.). - A new solution of Waring's problem, Quart. J. **Math., t.** 48, 1919, **p.** 272-293.

[16] HILBERT (David). - Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem), Math. Annalen, t. 67, 1909, p. 281-300.

[17] HUA (Loo-Keng). - On Waring's problem, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 9, 1938, p. 199-202.

[18] LIOUVILLE (J.). - Lectures au Collège de France, Paris, 1859.

[19] THOMAS (H. E.). - A numerical approach to Waring's problem for fourth powers, Phil. Doct., University of Michigan, 1973.

[20] THOMAS (H. E.). - Waring's problem for twenty-two biquadrates, Trans. Amer. math. Soc., t. 193, 1974, p. 427-430.

[21] VAUGHAN (R. C.). - The Hardy-Littlewood method. - Cambridge, New York, Melbourne, Cambridge University Press, 1981 (Cambridge Tracts in Mathematics, 80).

[22] VINOGRADOV (I. M.). - Sur le théorème de Waring, Bull. Acad. Sc. URSS. Classe Sc. phys.-math., Leningrad, 1928, série 7, p. 393-400.

[23] WIEFERICH (Arthur). - Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten, Math. Annalen, t. 66, 1909, p. 106-108.

[24] WOLKE (Dieter). - A new proof of a theorem of Van der Corput, J. of London math. Soc., Series 2, t. 5, 1972, p. 609-612.