

GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

MICHEL BALAZARD

Sur un théorème de Halasz et Sarközy

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. n° 17, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A10_0

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉOREME DE HALASZ ET SARKÖZY

par Michel BALAZARD (*)

1. Introduction.

Dans cet exposé, nous présentons diverses techniques menant à des résultats concernant la distribution des valeurs des fonctions arithmétiques additives (les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(mn) = f(m) + f(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux). D'une manière générale, il s'agit d'étudier la quantité

$$N(x, f, c) := \sum_{n \leq x, f(n)=c} 1,$$

pour f additive, x et c réels.

Dans cette étude, la quantité suivante s'avère d'une grande importance

$$E(x) := \sum_{p \leq x, f(p) \neq 0} \frac{1}{p}.$$

On a, par exemple, le résultat suivant (cf. [2], tome 2, chap. 21) :

THÉOREME 1 (G. HALASZ, 1975). - Il existe une constante absolue $A_0 > 0$ telle que $N(x, f, c) \leq A_0 (x/\sqrt{E(x)})$, pour tout $x \geq 1$, tout réel c et toute fonction additive f .

On retrouve en particulier un ancien résultat d'ERDÖS : Si une fonction additive f vérifie $\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} = +\infty$, alors l'ensemble $\{n ; n \in \mathbb{N}^* \text{ et } f(n) = c\}$ est de densité nulle pour tout réel c .

Soit E une partie de l'ensemble P des nombres premiers $p_1 < p_2 < \dots$ la suite ordonnée des éléments de E . Nous nous intéresserons ici à la fonction $f = \Omega_E$ définie par $\Omega_E(n) = \text{Card}\{(p, k) \in E \times \mathbb{N}^* ; p^k | n\}$. $\Omega_E(n)$ est le nombre total des facteurs appartenant à E , dans la décomposition de n en produit de nombres premiers.

On notera $N(x, \Omega_E, k) = N_E(x, k)$. La quantité $E(x)$ vaut ici $\sum_{p \leq x, p \in E} \frac{1}{p}$.

Le théorème évoqué dans le titre est le suivant (cf. [5] et [10]) :

THÉOREME 2 (G. HALASZ, 1972 ; A. SARKÖZY, 1977). - Soit $\delta \in]0, 1[$. On a :

$$(1) \quad N_E(x, k) \ll_{\delta} x e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k!}$$

pour tout E , tout $x \geq 3$ et tout entier naturel k tels que

$$k + 1 \leq (2 - \delta) E(x).$$

(*) Michel BALAZARD, Département de Mathématiques, Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 LIMOGES CEDEX.

$$(2) \quad N_E(x, k) \gg_{\delta} x e^{-E(x)} \frac{E(x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

pour tout E , tout $x \geq 3$ et tout entier naturel k tels que $1 \leq k \leq (2-\delta)E(x)$, $E(x) \geq c(\delta)$, où $c(\delta)$ est une constante positive ne dépendant que de δ .

Remarquons ici que (2) ne donne aucune minoration pour $N_E(x, 0)$; ce problème est l'objet du petit crible d'ERDÖS et RUSZA (cf. [3], [7] et [8]).

Par une combinaison d'arguments élémentaires et analytiques que nous esquisserons au paragraphe 2, G. HALASZ avait, en 1972, démontré (1), mais n'obtenait (2) que pour l'un des deux entiers k et $k+1$. Il prouvait en fait :

$$N_E(x, k) + N_E(x, k+1) \gg_{\delta} x e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k!},$$

sous les hypothèses de (2).

En 1977, A. SARKÖZY démontrait (2) en utilisant, en plus des idées de G. HALASZ, un procédé élémentaire dû à P. ERDÖS, I. RUSZA et lui-même. Nous décrivons ce procédé au paragraphe 3.

Il faut souligner que les méthodes élémentaires utilisées par G. HALASZ et A. SARKÖZY sont de natures différentes. Dans [5], il s'agit plutôt de la méthode de Tchebytschef, et dans [10] d'une méthode combinatoire utilisant le principe du crible de Brun.

Au paragraphe 4, nous exposerons nos résultats concernant l'ordre de grandeur de $N_E(x, k)$ pour les valeurs de $k > (2-\delta)E(x)$. Signalons que cet exposé reprend, et approfondit certains points évoqués lors d'un précédent exposé devant ce même groupe d'étude (cf. [1]).

2. La méthode de G. HALASZ.

(a) Partie analytique. - Le point de départ est l'étude de la fonction génératrice de l'ensemble des entiers n vérifiant $\Omega_E(n) = k$. Il s'agit de la série $\sum_{n=1, \Omega_E(n)=k}^{+\infty} (1/n^{\sigma})$, convergente si $\sigma > 1$ (dans ce qui suit, seules interviennent les valeurs réelles de σ). On peut donner deux autres expressions de cette série, d'une part

$$(3) \quad \int_1^{+\infty} u^{-\sigma} dN_E(u, k) = \sigma \int_1^{+\infty} u^{-\sigma-1} N_E(u, k) du$$

et d'autre part

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega_E(n)}}{n^{\sigma}} z^{-k-1} dz.$$

(3) est obtenue en intégrant par parties. (4) découle de la formule de Cauchy, le cercle $|z| = r$ étant parcouru dans le sens positif; il suffit de vérifier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} (r^{\Omega_E(n)}/n^{\sigma})$. En fait,

$$F(z, \sigma) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega_E(n)}}{n^\sigma} = \prod_{p \in E} \frac{1}{1 - (z/p^\sigma)} \prod_{p \notin E} \frac{1}{1 - (1/p^\sigma)},$$

où la série et les produits convergent absolument pour $|z| < p_1$ et $\sigma > 1$: cela découle du théorème du produit eulérien.

On va maintenant obtenir un encadrement de la deuxième intégrale de (3) au moyen de l'expression (4). Le rayon d'intégration r peut être choisi arbitrairement dans $]0, p_1[$, mais on va supposer $0 < r < 2 - \delta$, afin que les constantes implicites dans les termes d'erreurs à venir ne dépendent au plus que de δ .

Pour estimer (4), on utilise le principe de la méthode du col : on choisit r de sorte que la portion de cercle proche du point réel $z = r$ fournisse la contribution principale à l'intégrale. Pour commencer, on exprime $F(z, \sigma)$ au moyen de $F(r, \sigma)$ en utilisant les produits eulériens. On obtient :

$$F(z, \sigma) = F(r, \sigma)(e^{(z-r)E(y)} + \text{reste})$$

où y est défini par l'égalité $\sigma = 1 + (1/\log y)$.

On reporte cette relation dans (4), on choisit r optimalement ($r = (k+1)/E(y)$), et on exprime $F(r, \sigma)$ au moyen de $F(1, \sigma) = \zeta(\sigma) \sim 1/(\sigma - 1) = \log y$ pour arriver à l'estimation :

$$\sum_{n=1, \Omega_E(n)=k}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} = e^{-E(y)} \frac{E(y)^k}{k!} (\log y) e^{O_\delta(1)} (1 + O_\delta(\frac{1}{\sqrt{E(y)}})),$$

d'où l'encadrement

$$e^{-E(y)} \frac{E(y)^k}{k!} \log y \ll_\delta \int_1^{+\infty} \frac{N_E(u, k)}{u^{\sigma+1}} du \ll_\delta e^{-E(y)} \frac{E(y)^k}{k!} \log y$$

où $\sigma = 1 + (1/\log y)$, $k+1 \leq (2-\delta)E(y)$ et $E(y) \geq c(\delta)$ pour la minoration.

(b) Partie élémentaire. - On vient d'estimer une intégrale contenant $N_E(u, k)$ (en fait, sa transformée de Mellin), et il s'agit d'en déduire une estimation de la quantité $N_E(x, k)$ elle-même. Pour cela, on va utiliser sa définition et employer l'astuce "logarithmique" de Tchebychef :

$$\sum_{n \leq x, \Omega_E(n)=k} \log n = \sum_{n \leq x, \Omega_E(n)=k} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) N_E\left(\frac{x}{d}, k - \Omega_E(d)\right),$$

où Λ est la fonction de von Mangoldt. En négligeant les puissances de nombres premiers d'exposant ≥ 2 , on aboutit à :

$$\sum_{n \leq x, \Omega_E(n)=k} \log n = \sum'_{p \leq x} \log p N_E\left(\frac{x}{p}, k-1\right) + \sum''_{p \leq x} \log p N_E\left(\frac{x}{p}, k\right) + \text{reste}$$

où $\sum'$ et $\sum''$ indiquent des sommations portant respectivement sur les nombres premiers de E et de $P \setminus E$. Nous les majorons trivialement par des sommations portant sur tous les nombres premiers. Ainsi, pour $u \geq x$,

$$\begin{aligned} \log \sqrt{x} (N_E(x, k) - \sqrt{x}) &\leq \sum_{n \leq x, \Omega_E(n)=k} \log n \leq \sum_{n \leq u, \Omega_E(n)=k} \log n \\ &\leq \sum_{p \leq u} \log p [N_E\left(\frac{u}{p}, k-1\right) + N_E\left(\frac{u}{p}, k\right)] + \text{reste}, \end{aligned}$$

d'où, par intégration entre x et $2x$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log x N_E(x, k) x &\leq \int_x^{2x} \sum_{p \leq u} \log p [N_E(\frac{u}{p}, k-1) + N_E(\frac{u}{p}, k)] du + \text{reste} \\ &= \int_1^x [N_E(u, k-1) + N_E(u, k)] \sum_{p \leq 2x/u} p \log p du + \text{reste} \\ &\ll x^2 \int_1^x \frac{N_E(u, k-1)}{u^2} du + x^2 \int_1^x \frac{N_E(u, k)}{u^2} du + \text{reste}. \end{aligned}$$

Si on pose $\sigma = 1 + (1/\log x)$, on a $u^{-2} = (u^{\sigma-1}/u^{\sigma+1}) \leq (x^{\sigma-1}/u^{\sigma+1}) = (e/u^{\sigma+1})$ si $u \leq x$, donc

$$x \log x N_E(x, k) \ll x^2 \int_1^{+\infty} \frac{N_E(u, k-1)}{u^{\sigma+1}} du + x^2 \int_1^{+\infty} \frac{N_E(u, k)}{u^{\sigma+1}} du + \text{reste}.$$

En utilisant le résultat de la partie analytique avec $y = x$, et en montrant que le reste est négligeable, on aboutit bien à

$$N_E(x, k) \ll_{\delta} x e^{-E(x)} \left(\frac{E(x)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{E(x)^k}{k!} \right) \ll_{\delta} x e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k!}.$$

Pour la minoration, les détails techniques sont un peu plus pénibles. En particulier, on ne peut pas minorer Σ' et Σ'' par Σ . L'idée est alors de travailler sur la quantité $N_E(x, k) + N_E(x, k+1)$, car on peut regrouper les sommes

$$\sum_{p \leq x}'' \log p N_E(\frac{x}{p}, k) \text{ et } \sum_{p \leq x}' \log p N_E(\frac{x}{p}, k) \text{ en } \sum_{p \leq x} \log p N_E(\frac{x}{p}, k).$$

3. Une méthode combinatoire de P. ERDŐS, I. RUSZA et A. SARKÖZY.

Nous décrivons cette méthode dans son cadre original (cf. [4]). En effet, sa mise en oeuvre pour la démonstration de (2) fait intervenir des difficultés supplémentaires qui masquent un peu les idées essentielles de ce procédé. Il s'agit de démontrer le fait suivant :

THÉOREME 3 (P. ERDŐS, I. RUSZA, A. SARKÖZY 1973). - Il existe deux constantes absolues $\epsilon > 0$ et $A > 0$ telles que, pour toute fonction additive f , pour tout réel $c \neq 0$ et tout $x \geq A$, on ait : $N(x, f, c) \leq (1 - \epsilon) x$.

Commençons par quelques observations.

Remarque 1. - L'hypothèse $c \neq 0$ est essentielle comme le montre l'exemple de la fonction $f \equiv 0$, ou celui de $f = v_p$ (valuation p -adique) avec $p > 1/\epsilon$.

Remarque 2. - Intuitivement, le théorème 3 nous dit qu'une fonction additive est toujours "loin" d'être une constante non nulle : si $c \neq 0$ et $x \geq A$, la proportion d'entiers $n \leq x$ vérifiant $f(n) \neq c$ est toujours $\geq \epsilon$.

Remarque 3. - Dans [4], le théorème 3 est démontré avec $A = 1$, $\epsilon = 10^{-1000}$. Les auteurs annoncent qu'ils peuvent obtenir $\epsilon = 10^{-1}$. Ils montrent d'autre part que ϵ ne peut être supérieur ou égal à $1 - \log 2$ (notons que $\epsilon \leq 1/2$ est

évident, comme le montre le choix : f = fonction caractéristique des nombres pairs et $c = 1$). Il semble que la détermination de la meilleure constante ϵ soit un problème encore ouvert.

Nous présentons maintenant la démonstration du théorème 3.

Étape 1. - On peut supposer $f(n) = 0$ pour $n \leq C'$, où C' est une constante absolue assez grande. En effet, dans le cas contraire, le plus petit entier n , tel que $f(n) \neq 0$ (nous écartons le cas trivial de la fonction f identiquement nulle), est une puissance de nombres premiers $p_0^{a_0} \leq C'$. Notons alors :

$$\mathcal{N}(x, f, c) = \{n \in \mathbb{N}^* ; n \leq x \text{ et } f(n) = c\},$$

$$\mathcal{M} = \{n' \in \mathbb{N}^* ; p_0^{a_0} \mid n'\}, \text{ de sorte que } N(x, f, c) = \text{card } \mathcal{N}(x, f, c).$$

On définit une bijection entre $\mathcal{M}$ et une partie de $\{1, \dots, [x]\} \setminus \mathcal{N}(x, f, c)$ par les correspondances

$$\begin{aligned} n' &\mapsto n' && \text{si } f(n') \neq c \\ n' &\mapsto \frac{n'}{p_0^{a_0}} && \text{si } f(n') = c. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$[x] - N(x, f, c) \geq \text{card } \mathcal{M} = \left[\frac{x}{p_0^{a_0}} \right] - \left[\frac{x}{p_0^{a_0+1}} \right]$$

et

$$N(x, f, c) \leq x \left(1 - \frac{1}{p_0^{a_0}} + \frac{1}{p_0^{a_0+1}} \right) + 1 \leq x \left(1 - \frac{1}{2C'} \right) + 1 \leq x \left(1 - \frac{1}{3C'} \right) \quad \text{si } x \geq 6C'.$$

Dans les étapes suivantes, on supposera que $x \geq A$, les constantes absolues C' et A étant fixées à des valeurs suffisamment grandes pour que les inégalités que nous écrivons soient vérifiées.

Étape 2. - Dit grossièrement, on va montrer que, si $E(x)$ n'est ni trop grand ni trop petit, l'inégalité $N(x, f, c) \leq (1 - (1/20))x$ est vérifiée même si $c = 0$ (c'est important pour l'étape 5).

Supposons d'abord que $c \neq 0$. Si n appartient à $\mathcal{N}(x, f, c)$, on a $f(n) \neq 0$, et on est donc dans l'un des deux cas suivants (au moins) :

- . soit il existe un nombre premier p tel que $p \mid n$ (donc $p \leq x$) et $f(p) \neq 0$,
- . soit il existe une puissance de nombre premier p^α , avec $\alpha \geq 2$, telle que $p^\alpha \mid n$ et $f(p^\alpha) \neq 0$ (donc $p^\alpha > C'$). On en déduit que

$$N(x, f, c) \leq \sum_{p \leq x, f(p) \neq 0} \left[\frac{x}{p} \right] + \sum_{p^\alpha > C', \alpha \geq 2} \left[\frac{x}{p^\alpha} \right] \leq x(E(x) + D) \quad \text{où } D = \frac{1}{\alpha}.$$

Supposons maintenant $c = 0$. On a l'implication suivante :

- . s'il existe un unique nombre premier $p \leq x$ vérifiant $p \mid n$ et $f(p) \neq 0$,
- . et si aucune puissance de nombre premier $p^\alpha > C'$, avec $\alpha \geq 2$, ne vérifie $p^\alpha \mid n$, alors $f(n) \neq 0$, c'est-à-dire $n \notin \mathcal{N}(x, f, 0)$. On en déduit que :

$$[x] - N(x, f, 0) \geq \sum_{\substack{p \leq x \\ f(p) \neq 0}} \left[\frac{x}{p} \right] - 2 \sum_{\substack{p \leq q \leq x \\ f(p) \neq 0 \\ f(q) \neq 0}} \left[\frac{x}{pq} \right] - \sum_{\substack{p > C' \\ \alpha \geq 2}} \sum_{\alpha} \left[\frac{x}{p^\alpha} \right],$$

d'où $N(x, f, 0) \leq x(1 - E(x) + (\pi(x)/x) + E(x)^2 + D)$.

On veut donc que $E(x) + D$ et $1 - E(x) + (\pi(x)/x) + E(x)^2 + D$ soient $\leq 1 - (1/20)$. Comme $\pi(x)/x$ et D sont $\leq 1/50$ (si C' et A sont assez grands), il suffit que $1/10 \leq E(x) \leq 1/9$.

Les raisonnements utilisés ci-dessus pour majorer $N(x, f, c)$ sont proches de cas simples du crible de Brun. Rappelons le principe de ce crible : si $A_1, \dots, A_k$ sont des ensembles finis, et si $S_\ell = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k} \text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell})$, on a

$$\sum_{\ell=1}^{2j} (-1)^{\ell-1} S_\ell \leq \text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq \sum_{\ell=1}^{2j'+1} (-1)^{\ell-1} S_\ell$$

pour tous les entiers j, j' tels que $0 \leq 2j \leq k$, $1 \leq 2j' + 1 \leq k$, alors que $\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} S_\ell$ (principe d'inclusion-exclusion).

D'après l'étape 2, le théorème 3 est démontré si $E(x) + D \leq 1 - \epsilon$.

Si $\epsilon = 1/20$, il suffit que $E(x) \leq 93/100$ (car $D \leq 1/50$). Quitte à augmenter C' , A et à diminuer ϵ , nous allons maintenant montrer le résultat pour un x vérifiant $x \geq A$ et $E(x) > 93/100$. Cela va se faire en "propageant" le résultat de l'étape 2 au moyen d'ensembles de multiples.

Étape 3. - Montrons que, si $E(x) > 93/100$, il existe $n \geq C'$ tel que

$$n \leq x^{9/20} \text{ et } 1/10 \leq E(u) \leq 1/9 \text{ pour tout } u \text{ tel que } n^{99/100} \leq u \leq n.$$

Il suffit de définir n comme le plus grand entier $\geq C'$ vérifiant $E(n) \leq 1/9$. En effet, si $n^{99/100} \leq u \leq n$, on a :

. d'une part, $E(u) \leq E(n) \leq 1/9$,

. d'autre part,

$$\begin{aligned} E(u) &\geq E(n^{99/100}) \geq E(n) - \sum_{\substack{m^{99/100} < p \leq n}} \frac{1}{p} = E(n) - \log \frac{100}{99} + o\left(\frac{1}{\log n}\right) \\ &\geq E(n+1) - \frac{1}{n+1} - \log \frac{100}{99} + o\left(\frac{1}{\log n}\right) \geq \frac{1}{9} - \log \frac{100}{99} + o\left(\frac{1}{\log n}\right) \geq \frac{1}{10} \end{aligned}$$

si C' est assez grand. De même,

$$E(x^{9/20}) \geq E(x) - \log \frac{20}{9} + o\left(\frac{1}{\log x}\right) \geq 0,93 - \log \frac{20}{9} + o\left(\frac{1}{\log x}\right) \geq \frac{1}{9} \geq E(n) \text{ A,}$$

si A est assez grand, donc $n \leq x^{9/20}$.

Étape 4. - Soit $A(x)$ le nombre d'entiers $n \leq x$ de la forme $n = tv$, avec $t \leq n$, $x/n \leq v \leq x/n^{99/100}$ et $(v, \prod_{p \leq n} p) = 1$. Montrons que $A(x) \geq \eta x$, où η est une constante absolue.

Soit $B(x)$ le nombre d'entiers $n \leq x$ de la forme $n = tv$, avec $n^{99/100} \leq t$ et $(v, \prod_{p \leq n} p) = 1$. $B(x)$ vaut $\sum_{\substack{n^{99/100} < t \leq n}} \varphi(x/t, n)$, où $\varphi(X, Y)$

désigne le nombre d'entiers $\leq X$ n'ayant que des facteurs premiers $> Y$. Utilisons la minoration $\bar{\omega}(X, Y) \geq c_1 X / \log Y$ (c_1 constante positive absolue) valable si $Y \geq 2$ et X/Y assez grand (voir [6], chapitre IV, paragraphe 3); si $m^{99/100} \leq t \leq m^{298/300}$, $x/nt \geq x/m^2 \geq x^{1/10} \geq A^{1/10}$ donc, pour A assez grand,

$$B(x) \geq c_1 \sum_{m^{99/100} \leq t \leq m^{298/300}} \frac{x}{t \log m} \geq c_2 x,$$

où c_2 est une constante positive absolue.

Posons $c_2 = 2\eta$, et considérons un entier $n = tv$, compté dans $B(x)$ mais pas dans $A(x)$. Cela entraîne que $v < x/m$ car $v \leq x/t \leq x/m^{99/100}$. On a donc

$$n = tv \leq m^{298/300} \frac{x}{m} = \frac{x}{m^{1/150}} \leq \frac{x}{C^{1/150}} \leq \eta x,$$

si C' est assez grand. Par suite, $2\eta x \leq B(x) \leq A(x) + \eta x$ et $A(x) \geq \eta x$.

Étape 5. - Soit ϵ un réel (le fait que $\epsilon \neq 0$ n'intervient pas ici), et $n = tv$ un entier compté dans $A(x)$ et dans $N(x, f, c)$. On a $f(t) = c - f(v)$, et $t \leq x/v$, donc

$$N(x, f, c) \leq [x] - A(x) + \sum_{\substack{x/m \leq v \leq x/m^{99/100} \\ (v, \prod_{p \leq m} p) = 1}} N\left(\frac{x}{v}, f, c - f(v)\right).$$

On a $m^{99/100} \leq x/v \leq m$, donc $1/10 \leq E(x/v) \leq 1/9$, et $x/v \geq A$ si $C' \geq A^{100/99}$. D'après l'étape 2, on a

$$\begin{aligned} N(x, f, c) &\leq [x] - A(x) + 0,95 \sum_{\substack{x/m \leq v \leq x/m^{99/100} \\ (v, \prod_{p \leq m} p) = 1}} \frac{x}{v} \\ &\leq x + 1 - \eta x + 0,95\left(\eta x + \frac{x}{m^{99/100}}\right) \leq (1 - \epsilon) x, \end{aligned}$$

où ϵ est une constante positive absolue. Cela achève la démonstration du théorème 3.

4. Compléments sur l'ordre de grandeur de $N_E(x, k)$.

Dans l'étude de $N_E(x, k)$ pour les grandes valeurs de k ($k \geq (2 - \delta) E(x)$), le nombre premier p_1 joue un rôle particulier. Cela se comprend puisque les nombres Ω_E -hautement composés (les entiers n vérifiant $\Omega_E(n) \geq \Omega_E(m)$ pour tout $m \leq n$) sont justement les puissances de p_1 . On est ainsi amené à changer la définition de $E(x)$ en posant

$$E(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E, p \neq p_1}} \frac{1}{p}.$$

Notons $P_k(X) = 1 + X + \dots + X^k/k!$ (somme partielle de la série exponentielle). Nous obtenons le résultat suivant :

THÉOREME 4. - Il existe une constante absolue K telle que

$$(5) \quad N_E(x, k) \leq e^{Kp_1 \log \log(1+p_1)} \frac{x}{p_1^k} e^{-E(x/p_1^k)} P_k(p_1 E(\frac{x}{p_1^k}))$$

pour tout E, tout $x \geq 3$, et tout entier naturel k,

$$(6) \quad N_E(x, k) \geq e^{Kp_1 \log p_1} \frac{x}{p_1^k} e^{-E(x/p_1^k)} P_{k-1}(p_1 E(\frac{x}{p_1^k}))$$

pour tout E, tout $x \geq 3$, et tout entier naturel k vérifiant

$$1 \leq k \leq \frac{\log x}{\log p_1} \text{ et } E(\frac{x}{p_1^k}) \geq M(p_1),$$

où $M(p_1)$ est une constante positive ne dépendant que de p_1 .

La démonstration complète du théorème 4 paraîtra ailleurs ; elle est ébauchée dans [1]. Notons que ce théorème généralise, sous une forme moins précise, un résultat de J.-L. NICOLAS (cf. [9]) concernant le cas où $E = P$.

Indiquons pour terminer l'approche de $N_E(x, k)$ qui sert de point de départ à la démonstration de (5). Il s'agit d'une idée due à G. HALASZ, déjà utilisée dans [9].

Notons $P(E)$ l'ensemble $\{p ; p \notin E\} \cup \{p'/p_1 ; p' \in E, p' \neq p_1\}$ considéré comme ensemble de nombres premiers généralisés, et $Z(E)$ l'ensemble des entiers généralisés formé à partir de $P(E)$. Remarquons que $Z(E)$ est exactement, et sans répétition, l'ensemble des $m = n/p_1^{\Omega_E(n)}$, n décrivant l'ensemble des entiers premiers à p_1 . On définit alors $\Omega_E(m) = \Omega_E(n)$.

Tout entier n s'écrit de manière unique $n = p_1^\alpha n'$, où n' est premier à p_1 . On a

$$n \leq x \text{ et } \Omega_E(n) = k \iff p_1^\alpha n' \leq x$$

$$\text{et } \alpha + \Omega_E(n') = k \iff \frac{n'}{\Omega_E(n')} \leq \frac{x}{p_1^k}, \quad \Omega_E(n') \leq k, \text{ et } \alpha = k - \Omega_E(n').$$

Cela prouve que

$$N_E(x, k) = \sum_{\substack{m \in Z(E) \\ m \leq x/p_1^k, \Omega_E(m) \leq k}} 1.$$

En particulier, on voit apparaître sur cette formule la quantité x/p_1^k , présente dans l'énoncé du théorème 4.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BALAZARD (Michel). - Sur la fonction $\Omega_E(n)$, Groupe d'étude en Théorie analytique des nombres, 2e année, 1984/85, n° 34, 10 p.
- [2] ELLIOTT (P. D. T. A.). - Probabilistic number theory. Vol. I-II. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1979-1980 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 239-240).
- [3] ERDÖS (P.) and RUZSA (I. Z.). - On the small sieve. I: Sifting by primes, J. of Number Theory, t. 12, 1980, p. 385-394.

- [4] ERDÖS (P.), RUSZA (I., Jr.) and SARKÖZI (A.). - On the number of solutions of $f(n) = a$ for additive functions, Acta Arithm., Warszawa, t. 24, 1973, p. 1-9.
 - [5] HALASZ (G.). - Remarks to my paper "On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions", Acta Math. Acad. Scient. Hungar., t. 23, 1972, p. 425-432.
 - [6] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences. Vol. 1. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.
 - [7] HILDEBRAND (A.). - Sur le "petit crible" de Erdős et Rusza. Actes du colloque du CIRM "Théorie élémentaire et analytique des nombres" [1983. Marseille-Luminy], Publications d'Orsay, 1983.
 - [8] HILDEBRAND (A.). - Quantitative mean value theorems for non negative multiplicative functions, Acta Arithm., Warszawa (à paraître).
 - [9] NICOLAS (Jean-Louis). - Sur la distribution des nombres entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers, Acta Arithm., Warszawa, t. 44, 1984, p. 191-200.
 - [10] SARKÖZY (Andras). - Remarks on a paper of G. Halasz : "On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions", Period. Math. Hungar., t. 8, 1977, p. 135-150.
-