

GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

JEAN-PIERRE BOREL

Un résultat probabiliste en répartition Modulo 1

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. n° 27, p. 1

http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A9_0

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN RÉSULTAT PROBABILISTE EN RÉPARTITION MODULO 1

d'après Michael BOSHERNITZAN

par Jean-Pierre BOREL ⁽¹⁾

Il s'agit d'un résultat ⁽²⁾ qui entraîne l'existence de suites à croissance relativement rapide d'entiers, $U = (u_n)_{n \geq 0}$, et qui vérifient la propriété suivante de répartition modulo 1 :

$$\begin{cases} \forall \alpha \notin \mathbb{Q}, \alpha U \text{ est équirépartie modulo 1} \\ \forall q \geq 2, U \text{ est équirépartie modulo } q. \end{cases}$$

Ces propriétés en font des suites de Poincaré (c'est en fait le cas pour toutes les translatées de U).

La méthode consiste à travailler sur des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$, puis à se ramener à des suites d'entiers par un schéma classique. Le théorème essentiel est alors le suivant.

THÉOREME. - Soient $(n_k)_{k \geq 1}$ et $(m_k)_{k \geq 1}$ deux suites d'entiers vérifiant :

$$\begin{cases} \forall k \geq 1, m_k > n_k > 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} m_k - n_k = +\infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{m_k} = 1. \end{cases}$$

Alors presque toute suite $X = (x_k)_{k \geq 1}$ de nombres réels vérifiant $m_k > x_k > n_k$ ($k \geq 1$) est telle que αX est équirépartie modulo 1, pour tout α réel non nul.

La démonstration utilise des arguments classiques de probabilités, inégalité de Bernstein essentiellement.

⁽¹⁾ Jean-Pierre BOREL, 8 avenue Président Coty, 87100 LIMOGES.

⁽²⁾ BOSHERNITZAN (Michael). - Homogeneously distributed sequences and Poincaré sequences of integers of sublacunary growth, Monatshefte für Math., t. 96, 1983, p. 173-181.