

GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

GÉRALD TENENBAUM

Sur un problème de crible et ses applications

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. n° 24, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A7_0

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME DE CRIBLE ET SES APPLICATIONS

par Gérard TENENBAUM (*)

La répartition des facteurs premiers d'un entier est une donnée cruciale de quantité de problèmes arithmétiques. Elle apparaît souvent sous forme de conditions liant les tailles relatives des facteurs. Soit

$$(1.1) \quad n = \prod_{i=1}^k p_i$$

la décomposition canonique d'un entier générique dont les facteurs premiers, non nécessairement distincts, sont rangés par ordre croissant $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$. On pose alors

$$(1.2) \quad n_j = \begin{cases} 1 & , \quad (j = 1) , \\ \prod_{i < j} p_i & , \quad (1 < j \leq k) . \end{cases}$$

La plupart des questions de taille relative se posent en termes de comparaison de p_j et n_j , ce qui est en accord avec le principe d'Erdős [2] que la croissance de $\log p_j$ est normalement exponentielle.

Ainsi, dans le crible de Rosser-Iwaniec (cf. par exemple [11]) les ensembles $\mathcal{O}^+$, $\mathcal{O}^-$, sont-ils définis par des conditions du type

$$(1.3) \quad \max_{j \in J} p_j^{\beta} \left(\frac{n}{n_j} \right) < D ,$$

où β est un paramètre ≥ 1 , et J un sous ensemble donné de $\{1, 2, \dots, k\}$.

ERDÖS a souvent eu l'occasion d'utiliser le fait que

$$R(n) := \max_{1 \leq j \leq k} (\log n_j) / \log p_j$$

est normalement à croissance très lente. On a en fait [3]

$$R(n) = (1 + o(1)) \frac{\log \log \log n}{\log \log \log \log n}$$

pour presque tout n . Un résultat plus précis est établi dans l'important travail de BOVEY [1] qui contient en particulier une étude fine de la répartition des quantités $\log n_j / \log p_j$.

Nous nous intéressons ici à une condition du type (1.3) dans le cas $\beta = 1$, $J = \{1, 2, \dots, k\}$. Notant $P^-(n)$ le plus petit facteur premier de n (avec la convention $P^-(1) = \infty$), nous définissons la fonction F de Schinzel-Szekeres par :

(*) Gérard TENENBAUM, Mathématiques, Université de Nancy-I, B. P. 239, 54506 VANDOEUVRE CEDEX.

$$(1.4) \quad F(n) := \begin{cases} 1 & , \quad (n = 1) , \\ \max\{dP^-(d) ; d|n, d > 1\} & , \quad (n > 1) . \end{cases}$$

Cette fonction a été implicitement considérée par SCHINZEL et SZEKERES dans [15] en relation avec un problème de crible sur lequel nous reviendrons plus loin. Il est immédiat que le maximum apparaissant dans la définition (1.4) est nécessairement atteint pour un diviseur d de la forme n/n_j , $1 \leq j \leq k$. Dans l'esprit de (1.3), nous introduisons les fonctions de répartition

$$D(x, y) := \text{card}\{n \leq x ; F(n) \leq yn\} ,$$

$$E(x, y) := \text{card}\{n \leq x ; F(n) \leq yx\} ,$$

initialement définies pour $x \geq 1$, $y > 0$. On a trivialement $F(n) \geq nP^-(n) \geq 2n$ pour tout $n > 1$, donc $D(x, y) \leq 1$ pour $y < 2$.

Notre résultat principal est le suivant.

THEOREME 1. - Soient γ, λ des réels tels que

$$\gamma > 5/3, \quad \lambda > \frac{5}{3}(1 - \frac{\log \psi}{\psi}) = 4,20001\dots, \quad (\psi = \log(\frac{1+\sqrt{5}}{2})) .$$

On a, pour $x \geq y \geq 2$,

$$(1.5) \quad \frac{x}{u} L(u, y) \ll_{\gamma, \lambda} D(x, y) \leq E(x, y) \ll \frac{x}{u} \log(2u) ,$$

où l'on a posé $u = (\log x)/\log y$ et

$$L(u, y) = \begin{cases} (\log u)^{-\lambda} , & (2 \leq y \leq \exp\{(\log \log x)^\gamma\}) , \\ 1 & , \quad (y > \exp\{(\log \log x)^\gamma\}) . \end{cases}$$

Sous l'hypothèse de Riemann, on peut choisir

$$L(u, y) = \begin{cases} (\log \log 3u)^{-\xi} , & (2 \leq y \leq (\log x)^{2+\epsilon}) , \\ 1 & , \quad (y > (\log x)^{2+\epsilon}) , \end{cases}$$

$$\text{avec } \xi = 1 - \frac{\log \psi}{\psi} = 2,52001\dots .$$

L'encadrement (1.5) est susceptible d'applications assez surprenantes. Nous en développerons trois.

La première concerne les entiers dont les diviseurs sont peu espacés. Si l'on désigne par

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_\tau = n$$

la suite croissante des diviseurs de n , nous verrons ultérieurement que l'on a

$$(1.6) \quad \frac{F(n)}{n} = \max_{1 \leq i < \tau(n)} (d_{i+1}/d_i) , \quad (n > 1) .$$

$D(x, y)$ est donc exactement la fonction de répartition du nombre de droite de (1.6). Cela jette un éclairage différent sur l'encadrement (1.5). Par exemple, le nombre $Z(x)$ des entiers $n \leq x$ ayant au moins un diviseur dans chaque intervalle $(2^k, 2^{k+1}]$, $0 \leq k < (\log x)/\log 2$, satisfait à $D(x, 2) \leq Z(x) \leq D(x, 4)$; il est donc, à une puissance de $\log \log x$ près, de l'ordre de $x/\log x$. Nous avons étudié dans [18] le nombre $H_k(x)$ des entiers $\leq x$ possédant au moins un diviseur dans $(2^k, 2^{k+1}]$. On a

$$(1.7) \quad xk^{-\delta} L_1(k) < H_k(x) < xk^{-\delta} L_2(k)$$

pour $x > 1$, $1 \leq k \leq (\log x)/\log 4$, où l'exposant δ vaut

$$(1.8) \quad \delta = 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0,08607\dots,$$

et L_1, L_2 , sont des fonctions à croissance lente, précisées dans [18], qui tendent vers 0 à l'infini. L'estimation (1.5) met donc en évidence le caractère fortement dépendant des conditions de divisibilité impliquées : sur des bases d'indépendance ou de faible dépendance probabiliste, on aurait dû a priori conjecturer que $Z(x)$ était considérablement plus petit que sa valeur réelle. Le cas où y est une puissance fixe de x est lié au problème de la fonction de répartition, au sens de la Théorie des fonctions arithmétiques, de

$$\psi(n) := (\log n)^{-1} \max_{1 \leq i < \tau(n)} \log(d_{i+1}/d_i).$$

L'existence de la densité $f(z)$ de la suite des entiers n tels que $\psi(n) < z$, $0 < z \leq 1$, a été établie dans [17]. Le théorème 1 implique que

$$c_1 z \leq f(z) \leq c_2 z \log(2/z), \quad (0 < z \leq 1),$$

ce qui améliore l'encadrement prouvé dans [17].

La seconde application concerne les nombres pratiques. On dit qu'un entier n est pratique si tout entier $m \leq n$ s'écrit comme somme de diviseurs distincts de n . On montre alors [16] que cette représentabilité s'étend à tous les

$$m \leq \sigma(n) := \sum_{d|n} d.$$

On peut établir facilement par récurrence que la propriété suivante caractérise les nombres pratiques [16]

$$(1.9) \quad p_j \leq \sigma(n_j) + 1, \quad (1 \leq j \leq k).$$

Les estimations actuellement disponibles pour le nombre $P(x)$ de nombres pratiques $\leq x$ sont peu satisfaisantes.

Le meilleur encadrement connu est

$$x \exp\{-\alpha(\log \log x)^2\} < P(x) < x(\log x)^{-\beta},$$

où α est une constante > 0 , [12], et $\beta < \frac{1}{2}(\frac{1}{\log 2} - 1)^2 = 0,09798\dots$, [9].

Le résultat suivant découle simplement du théorème 1.

THÉORÈME 2. - Le nombre λ étant choisi comme indiqué dans l'énoncé du théorème 1, on a, pour $x \geq 16$,

$$\frac{x}{\log x} (\log \log x)^{-\lambda} \ll_{\lambda} P(x) \ll \frac{x}{\log x} \log \log x \log \log \log x.$$

Démonstration. - Le critère (1.9) fournit immédiatement le lien avec le théorème 1 : on a

$$(1.10) \quad D\left(\frac{x}{2}, 2\right) \leq P(x) \leq D(x, C \log \log x)$$

pour une constante positive convenable C .

L'estimation du théorème 2 découle trivialement de (1.5) et (1.10). Pour montrer (1.10), on observe d'abord que, puisque $\sigma(2n) \geq 2n$, une condition suffisante pour que $2n$ soit pratique est (avec la notation (1.2))

$$(1.11) \quad p_j \leq 2n_j, \quad (1 \leq j \leq k).$$

En effet, si $2^s || n' = 2n$, alors (1.9) est trivialement satisfaite pour n' si $1 \leq j \leq s$, car $p_j = 2$, et découle de (1.11) si $j > s$ car $n'_j = 2n_j$. Comme nous l'avons précédemment remarqué, (1.11) équivaut à $F(n) \leq 2n$, d'où la minoration de (1.10). La majoration provient de l'inégalité classique [8]

$$\sigma(n) \leq C_1 n \log \log n$$

qui implique que tout entier $n \leq x$ satisfaisant (1.9) satisfait aussi

$$F(n) \leq n \left(\max_{1 \leq j \leq \tau(n)} (\sigma(n_j)/n_j) + 1 \right) \leq n(C_1 \log \log x + 1) \leq C n \log \log x.$$

Notre troisième application du théorème 1 porte sur le "petit crible" d'Erdős et Ruzsa ([4], [14]).

Si A est une suite d'entiers, finie ou non, on désigne par $F(x, A)$ le nombre des entiers $\leq x$ qui ne sont divisibles par aucun élément de A . Dans [4], ERDÖS et RUZSA introduisent la quantité

$$H(x, K) := \min_A F(x, A), \quad (K > 0),$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des suites A telles que $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} \leq K$.

Dans [14], RUZSA montre que, pour tout $K \geq 1$ fixé, on a

$$\frac{\log H(x, K)}{\log x} = e^{1-K} + o(1), \quad (x \rightarrow \infty).$$

Le cas $K = 1$ est particulièrement intéressant. Il constitue en quelque sorte la frontière à partir de laquelle la minoration naïve

$$F(x, A) \geq \sum_{n \leq x} \left(1 - \sum_{\substack{a|n \\ a \in A}} 1 \right) = [x] - \sum_{a \in A} \left[\frac{x}{a} \right]$$

est inopérante. RUZSA montre que

$$\frac{x}{\log x} \ll H(x, 1) \ll \frac{x}{(\log x)^\delta} (\log \log x)^\rho$$

où δ est défini par (1.8) et $\rho = -\frac{\log \log 2}{\log 2} = 0,52876\dots$. Nous établirons aussi le résultat suivant comme une conséquence relativement simple du théorème 1.

THÉOREME 3. - On a, pour $x \geq 3$,

$$\frac{x}{\log x} \ll H(x, 1) \ll \frac{x}{\log x} (\log \log x)^2.$$

Essentiellement fondée sur l'exploitation inductive des propriétés multiplicatives de la fonction F de Schinzel-Szekeres, la méthode utilisée pour prouver le théorème 1 procède cependant de deux techniques assez différentes. La minoration est obtenue en considérant les quantités

$$D_{t,z}(x, y), \quad E_{t,z}(x, y),$$

analogues de $D(x, y)$, $E(x, y)$, obtenues en imposant aux entiers dénombrés la condition supplémentaire d'avoir tous leurs facteurs premiers dans l'intervalle $(t, z]$. On peut alors mettre en évidence l'existence d'équations fonctionnelles, dont l'itération conduit à l'évaluation souhaitée. Comme c'est souvent le cas lors de la mise en oeuvre d'une telle méthode, l'étape d'initialisation est cruciale. En l'occurrence, elle nécessite un résultat auxiliaire qui possède peut-être un intérêt propre. Cela concerne la quantité

$$(1.12) \quad \theta(x, y, z) = \text{card}\{n \leq x; \quad p|n \Rightarrow y < p \leq z\}$$

estimée par FRIEDLANDER dans [5] lorsque y et z sont des puissances fixes de x .

THÉOREME 4. - Pour tout δ , $0 < \delta < 1$, il existe des constantes $A = A(\delta)$ et $y_0 = y_0(\delta)$ telles que l'on ait

$$(1.13) \quad \theta(x, y, z) - \theta\left(\frac{x}{2}, y, z\right) \geq \frac{x}{\log y} (Aw)^{-3w},$$

où l'on a posé $w := (\log x)/\log z$, pour tout triplet (x, y, z) tel que

$$y_0 < y \leq z^{(1-\delta)/2}, \quad z \leq x.$$

Remarques. - La condition $y > y_0$ ne peut être supprimée, comme le montre l'exemple $y = 2$, $z = 9/2$. Seules les puissances de 3 sont alors comptées dans $\theta(x, y, z)$ et le membre de gauche de (1.13) est nul pour une infinité de valeurs entières de x . On ne peut pas non plus affaiblir la condition $\delta > 0$: pour $y = \sqrt{(x/2)}$, $z = x/2$, on a

$$\theta(x, y, z) - \theta\left(\frac{x}{2}, y, z\right) = \sum_{\substack{\sqrt{x/2} < p \leq \sqrt{2x} \\ pq \leq x}} 1 \leq \pi(\sqrt{2x})^2 \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Enfin, il découle facilement des résultats de FRIEDLANDER que la minoration (1.13) est essentiellement optimale : on ne peut y remplacer $(Aw)^{-3w}$ par w^{-w} .

La majoration du théorème 1 est prouvée par une technique peut-être nouvelle. On établit l'existence d'une sorte de "facteur intégrant" pour la somme

$$D(x, y) = \sum_{\substack{n \leq x \\ F(n) \leq y}} 1.$$

Un argument taubérien élémentaire permet ensuite d'estimer $D(x, y)$ à partir de la somme pondérée associée, le passage à $E(x, y)$ résultant d'un découpage facile.

L'auteur tient à exprimer ici ses remerciements à Carl POMERANCE pour de fructueuses conversations lors de la préparation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOVEY (J. D.). - On the size of prime factors of integers, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 33, 1977, p. 65-80.
- [2] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive functions, *Annals of Math.*, Series 2, t. 47, 1946, p. 1-20.
- [3] ERDÖS (P.). - On some properties of prime factors of integers, *Nagoya math. J.*, t. 27, 1966, p. 617-623.
- [4] ERDÖS (P.) and RUZSA (I. Z.). - On the small sieve, I : Sifting by primes, *J. of Number Theory*, t. 12, 1980, p. 385-394.
- [5] FRIEDLANDER (J. B.). - Integers free from large and small primes, *Proc. London math. Soc.*, Series 3, t. 33, 1976, p. 565-576.
- [6] HALASZ (G.). - Remarks to my paper : "On the distribution of additive and the mean value of multiplicative arithmetic functions", *Acta Math. Acad. Scient. Hungar.*, t. 23, 1972, p. 425-432.
- [7] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - *Sequences*. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.
- [8] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - *An introduction to the theory of numbers*. 5e édition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1979.
- [9] HAUSMAN (M.) and SHAPIRO (H. N.). - On practical numbers, *Commun. pure and appl. Math.*, t. 37, 1984, p. 705-713.
- [10] HUXLEY (M. N.). - *The distribution of prime numbers. Large sieves and zero-density theorems*. - Oxford, at the Clarendon Press, 1972 (Oxford mathematical Monographs).
- [11] IWANIEC (H.). - Rosser's sieve - Bilinear forms of the remainder terms - Some applications, "Recent progress in analytic number theory", vol. 1, p. 203-230. - London, New York, Toronto [etc.], Academic Press, 1981.
- [12] MARGENSTERN (M.). - Résultats et conjectures sur les nombres pratiques, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 299, 1984, série I, p. 895-898.
- [13] NORTON (K. K.). - On the number of restricted prime factors of an integer, I, *Illinois J. of Math.*, t. 20, 1976, p. 681-705.
- [14] RUZSA (I. Z.). - On the small sieve, II : Sifting by composite numbers, *J. of Number Theory*, t. 14, 1982, p. 260-268.

- [15] SCHINZEL (A.) et SZEKERES (G.). - Sur un problème de M. Paul Erdős, Acta Scient. Math., Szeged, t. 20, 1959, p. 221-229.
 - [16] STEWART (B. M.). - Sums of distinct divisors, Amer. J. of Math., t. 76, 1954, p. 779-785.
 - [17] TENENBAUM (G.). - Lois de répartition des diviseurs, 5, J. of London math. Soc., Series 2, t. 20, 1979, p. 165-176.
 - [18] TENENBAUM (G.). - Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné, Comp. Math., Groningen, t. 51, 1984, p. 243-263.
-

Le détail des démonstrations des résultats présentés ici est à paraître dans un article portant le même titre, aux Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.
