

GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

BRUNO POIZAT

Une théorie ω_1 -catégorique à α_T fini

Groupe d'étude de théories stables, tome 1 (1977-1978), exp. n° 8, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=STS_1977-1978__1__A8_0

© Groupe d'étude de théories stables
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude de théories stables » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE THÉORIE ω_1 -CATÉGORIQUE A α_T FINI
par Bruno POIZAT (*)

Je vais montrer que, dans une théorie T ω_1 -catégorique, il y a une borne finie au rang de Morley des 1-types ; cette propriété s'exprime dans la littérature par " α_T est fini". La preuve originelle, utilisant un argument syntaxique élémentaire, mais compliqué, est de BALDWIN, celle que je donne ici est plus conceptuelle, mais demande quelques connaissances sur la déviation.

Soit donc T une théorie complète ω_1 -catégorique ; soit $D(x)$ une formule fortement minimale : on peut supposer qu'elle est sans paramètre, car sinon on les ajouterait au langage de T ; par définition de la minimalité, si A est un ensemble de paramètres, tous les éléments, qui satisfont D et ne sont pas algébriques sur A , ont même type sur A . On sait que D ne donne pas de paire de Vaught, c'est-à-dire que si M est un modèle de T , et N une extension élémentaire propre de M , il y a dans $N - M$ des éléments qui satisfont D . Je note $t(a/A)$ le type de a sur A , $RM(a/A)$ le rang de Morley de ce type ; $\wedge$ désigne la concaténation.

Je vais démontrer, par récurrence sur l'entier n , la proposition suivante.

PROPOSITION.

1° Si b satisfait D , et si $RM(a/A) \geq n + 1$, alors $RM(a/A \cup \{b\}) \geq n$.

2° Si le type (sur $\emptyset$) de $A_i \wedge a_i$ tend vers celui de $A \wedge a$, et si, pour tout i , $RM(a_i/A_i) \geq n + 1$, alors $RM(a/A) \geq n + 1$.

Il faut amorcer la récurrence pour $n = 0$; le 1° est clair, car tout rang de Morley est ≥ 0 ; pour le 2°, si $RM(a/A) = 0$, c'est que a est algébrique sur A , qu'il existe une formule $f(x)$ à paramètres dans A , vraie pour a et qui n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments ; par hypothèse, ce serait le cas pour $A_i \wedge a_i$, pour i assez grand, ce qui est contraire au fait que $RM(a_i/A_i) \geq 1$.

Montrons maintenant le pas n en commençant par le 1°. Je vais d'abord remplacer A par un modèle ω -saturé ; soit donc M un modèle ω -saturé contenant A , que je place par rapport à a et b de façon que le type de M sur $A \cup \{a, b\}$ ne dévie pas sur A ; il ne dévie pas non plus sur $A \cup \{b\}$, et, par symétrie, le type de a sur $A \cup \{b\} \cup M = M \cup \{b\}$ ne dévie pas sur $A \cup \{b\}$, et

$$RM(a/M \cup \{b\}) = RM(a/A \cup \{b\}) ;$$

le type de M sur $A \cup \{a\}$ ne dévie pas sur A , par symétrie, le type de a sur M ne dévie pas sur A , et

(*) Bruno POIZAT, 11 parc d'Ardenay, 91120 PALAISEAU

$$\text{RM}(a/M) = \text{RM}(a/A) .$$

Si le type de b sur $M \cup \{a\}$ n'est pas algébrique, il ne peut dévier sur M (car $\text{RM}(D) = 1$), par symétrie $t(a/M \cup \{b\})$ ne dévie pas sur M , et

$$\text{RM}(a/M \cup \{b\}) \geq n + 1 .$$

On suppose donc que $t(b/M \cup \{a\})$ est isolé par une formule $f(x, a, \bar{m})$; M étant ω -saturé, comme $\text{RM}(a/M) \geq n + 1$, $t(a/M)$ est point d'accumulation de types de rang de Morley supérieur à n ; soit donc une suite a_i telle que

$$\text{RM}(a_i/M) \geq n, \quad t(a_i/M) \neq t(a/M), \quad \text{et} \quad t(a_i/M) \rightarrow t(a/M);$$

pour i assez grand, il existe b_i dans D satisfaisant $f(x, a_i, \bar{m})$; $t(a_i \wedge b_i/M)$ tend vers $t(a \wedge b/M)$. Deux cas se présentent :

1er cas : Pour i arbitrairement grand, $b_i \notin M$, c'est-à-dire que b_i a même type sur M que b ; par hypothèse d'induction, $\text{RM}(a_i/M \cup \{b_i\}) \geq n - 1$, et en remplaçant b_i par b , j'obtiens une suite de types de rang de Morley $\geq n - 1$, qui s'accumulent sur leur limite $t(a/M \cup \{b\})$ ($t(a_i/M) \neq t(a/M)$); par conséquent

$$\text{RM}(a/M \cup \{b\}) \geq n .$$

2e cas : A partir d'un certain rang, tous les b_i sont dans M ; dans ce cas, $\text{RM}(a_i/M \cup \{b_i\}) = \text{RM}(a_i/M) \geq n$, et d'après la 2e clause de l'induction à l'étape précédente, comme le type de $M \wedge a_i \wedge b_i$ tend vers celui de $M \wedge a \wedge b$, $\text{RM}(a/M \cup \{b\}) \geq n$.

Montrons maintenant le 2°. Commençons par construire, grâce à la méthode de HENKIN, un modèle M_i contenant A_i ; cela consiste, si κ est le cardinal de A_i , à introduire κ nouveaux symboles de variables x_λ , $\lambda < \kappa$, et à associer injectivement à chaque formule f à paramètres dans A_i , qui est de la forme $(\exists y) g(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}, y)$, un ordinal $\lambda(f)$ inférieur à κ et supérieur aux indices $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des x_λ apparaissant dans f , et à considérer la théorie comprenant, outre les énoncés satisfaits par les éléments de A_i , les formules

$$(\exists y) g(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}, y) \rightarrow g(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}, x_{\lambda(f)}) .$$

On vérifie sans peine que tout fragment fini de cette théorie est interprétable dans n'importe quel modèle contenant A_i , donc qu'elle est consistante; et toute réalisation de ces x_λ constitue avec A_i un modèle M_i , puisque cet ensemble satisfait le test de Tarski. On remarquera qu'ainsi énumérés ces modèles forment un fermé de l'espace compact des types en $\kappa + \kappa$ variables.

Nous plaçons alors M_i de manière à ce que son type sur $A_i \cup \{a_i\}$ ne dévie pas sur A_i ; par compacité, quitte à extraire une suite, on peut supposer que le type de $M_i \wedge a_i$ a une limite réalisée par $M \wedge a$, où $A \subset M$; M est bien un modèle de T , car il satisfait les énoncés caractéristiques de la construction de HENKIN.

Comme $\text{RM}(a_i/M_i) \geq n + 1 \geq 1$, $a_i \notin M_i$, et par conséquent $a \notin M$; le modèle pre-

mier sur $M \cup \{a\}$ est donc strictement plus grand que M , et il existe b non dans M , satisfaisant D , dont le type sur $M \cup \{a\}$ est isolé par une formule $f(x)$; pour i assez grand, la formule correspondante sur $M_i \cup \{a_i\}$ est satisfaite par un élément b_i satisfaisant D . D'après ce que j'ai montré au 1°, $RM(a_i/M_i \cup \{b_i\}) \geq n$; $t(M_i \wedge a_i \wedge b_i)$ tend vers $t(M \wedge a \wedge b)$, et par hypothèse de récurrence, $RM(a/M \cup \{b\}) \geq n$; or, comme le type de b est isolé sur $M \cup \{a\}$, et non réalisé dans M (ou encore b est algébrique sur $M \cup \{a\}$ et transcendant sur M), le type de b sur $M \cup \{a\}$ dévie sur M ; par symétrie, le type de a sur $M \cup \{b\}$ dévie sur M , et $RM(a/M) > RM(a/M \cup \{b\})$.

COROLLAIRE 1. - Il existe un entier n tel que, pour tout modèle M , et tout $p \in S_1(M)$, $RM(p) \leq n$.

Sinon, il existerait sur un modèle M un type p de rang de Morley ω . Soit a réalisant p ; il existe b satisfaisant D , transcendant sur M et algébrique sur $M \cup \{a\}$; d'après la proposition $RM(a/M \cup \{b\}) \geq \omega$, ce qui est incompatible avec le fait que $t(a/M \cup \{b\})$ est extension déviante de $t(a/M)$.

COROLLAIRE 2. - Pour tout modèle M , et tout $p \in S_1(M)$, $RM(p) = RU(p)$.

Supposons que $RM(p) = n + 1$; soit a réalisant p , et soit b satisfaisant D , algébrique sur $M \cup \{a\}$ et transcendant sur M ; $RM(a/M \cup \{b\}) \geq n$, mais en fait $RM(a/M \cup \{b\}) = n$, car, à cause de la déviation, $RM(a/M \cup \{b\}) < RM(a/M)$. Donc, tout type de rang de Morley $n + 1$ a un fils de rang de Morley n , et cette propriété caractérise le rang U .

Remarque. - Un système formé d'éléments du modèle premier sur $M \cup \{a\}$, satisfaisant D , et algébriquement indépendants sur M , est de cardinal au plus $RM(a/M)$; on prendra garde à ce qu'en général il n'existe pas de tel système de cardinal $RM(a/M)$ (Contre-exemple avec la théorie du groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\omega$).
