

DOMINIQUE DUVAL

**Tentative de description immobilière de quelques représentations  
intégrales de groupes finis (avec l'aide de Guy Rousseau)**

*Séminaire de théorie des nombres de Grenoble*, tome 8 (1979-1980), exp. n° 4, p. 1-22

[http://www.numdam.org/item?id=STNG\\_1979-1980\\_\\_8\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=STNG_1979-1980__8__A4_0)

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Grenoble

TENTATIVE DE DESCRIPTION IMMOBILIERE  
 DE QUELQUES REPRESENTATIONS INTEGRALES  
 DE GROUPES FINIS (avec l'aide de Guy ROUSSEAU)

par Dominique DUVAL

I. - INTRODUCTION.

Dans tout cet exposé,  $p$  désigne un nombre premier,  $G$  le groupe  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ ,  $\mathfrak{H}$  l'ensemble des sous-groupes de  $G$  d'ordre  $p$ ,  $\mathbb{Z}_p$  (resp.  $\mathbb{Q}_p$ ) l'anneau des entiers (resp. le corps des nombres)  $p$ -adiques, et  $\zeta_p$  une racine primitive  $p^{\text{ème}}$  de l'unité fixée dans une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ . Pour tout groupe fini  $\Gamma$ , on note  $\tilde{\Gamma}$  l'élément  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma$  de  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ .

Afin d'étudier la structure galoisienne du groupe des unités d'un corps de nombres abélien réel de type  $(p,p)$  [3], L. Bouvier et J.J. Payan ont cherché à classifier les  $\mathbb{Z}[G]$ -modules  $M$ , libres sur  $\mathbb{Z}$ , tels que  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$  soit isomorphe à un sous  $\mathbb{Q}[G]$ -module de  $\mathbb{Q}[G]/\mathbb{Q} \cdot \tilde{G}$ , à  $\mathbb{Z}[G]$ -isomorphisme près. Ils ont réussi à faire cette classification lorsque la longueur de  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$  (comme  $\mathbb{Q}[G]$ -module) est inférieure ou égale à 3 ; en modifiant un peu leur méthode, j'ai pu ensuite traiter le cas de la longueur 4 [6]. Pour les longueurs supérieures, on a seulement une méthode (pas très agréable) pour obtenir une classification de ces modules à "genre" près [6], c'est-à-dire pour classifier les  $\mathbb{Z}_p$ -réseaux de  $\bigoplus_{H \in \mathfrak{H}'} \mathbb{Q}_p[G/H]/\mathbb{Q}_p \cdot \tilde{G}/H$  stables par  $G$ , modulo  $\text{Aut}_{\mathbb{Q}_p[G]} \left( \bigoplus_{H \in \mathfrak{H}'} \mathbb{Q}_p[G/H]/\mathbb{Q}_p \cdot \tilde{G}/H \right)$ , pour toute partie  $\mathfrak{H}'$  de  $\mathfrak{H}$ .

Sur une suggestion de J.M. Fontaine, j'ai alors demandé à G. Rousseau si la théorie des immeubles de Bruhat-Tits [4] pouvait être utilisée pour étudier ce dernier problème. Après m'avoir expliqué en détail comment traiter le cas de la longueur 2 à l'aide du graphe de  $PGL_2$  (cf. II), G. Rousseau m'a expliqué ce qu'est l'immeuble de  $PGL_n$  (cf. III) et m'a indiqué comment on peut l'utiliser. En IV et V, j'utilise sa méthode pour traiter le cas de la longueur 3. Ce qui suit ne contient aucun résultat nouveau concernant le problème énoncé ci-dessus.

Commençons par modifier l'énoncé du problème, afin de pouvoir plus tard le traduire en termes d'immeubles. Pour tout  $H$  de  $\mathfrak{H}$ , et tout générateur  $\gamma_H$  de  $G/H$ , on obtient un isomorphisme d'algèbres de  $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$  sur  $\mathbb{Q}_p[G/H]/\mathbb{Q}_p \cdot \widetilde{G/H}$  en associant à  $\zeta_p$  l'image de  $\gamma_H$  modulo  $\widetilde{G/H}$ ; on fait ainsi de  $\mathbb{Q}_p[G/H]/\mathbb{Q}_p \cdot \widetilde{G/H}$  un espace vectoriel de dimension 1 sur  $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ , qu'on note  $V_H$ . On peut alors chercher à classer les  $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ -réseaux de  $\bigoplus_{H \in \mathfrak{H}'} V_H$  stables par  $G$ , modulo  $\text{Aut}_{\mathbb{Q}_p(\zeta_p)}[G] \left( \bigoplus_{H \in \mathfrak{H}'} V_H \right)$ . Ce problème est identique au précédent dans les 2 cas suivants :

- $p = 2$  (bien sûr) ;
- $p \geq 3$ ,  $\mathfrak{H}' \neq \mathfrak{H}$ , et il existe un élément  $h$  de  $G \setminus \bigcup_{H \in \mathfrak{H}'} U_H$  tel que  $\gamma_H$  soit l'image de  $h$  modulo  $H$ , pour tout  $H$  de  $\mathfrak{H}'$ .

Lorsque  $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$  et  $p \geq 3$ , je ne sais pas relier ce problème au précédent.

Sous cette nouvelle formulation, on est amené à résoudre un cas particulier du problème énoncé ci-dessus. Soit  $K$  un corps complet pour une valuation discrète  $v$  (normalisée par  $v(K^*) = \mathbb{Z}$ ), soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers de  $K$ ,  $\pi$  une uniformisante, et  $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$  le corps résiduel. On suppose  $k$  fini. Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ , soit  $\Gamma$  un groupe fini, et soit  $\rho$  une représentation de  $\Gamma$  dans  $V$ . On suppose que  $\rho$  est de la forme  $\bigoplus_{i=1}^n \chi_i$ , où  $\chi_i$  est une représentation de  $\Gamma$  dans un  $K$ -espace vectoriel  $V_i$  de dimension 1 (pour  $1 \leq i \leq n$ ), avec  $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ . Donc  $\chi_i$  est un homo-

morphisme de  $\Gamma$  dans  $\text{Aut}_{K[\Gamma]}(V_1)$ , qui est canoniquement isomorphe à  $K^*$ ; on suppose enfin que les  $\chi_i$ , considérés comme des homomorphismes de  $\Gamma$  dans  $K^*$ , sont 2 à 2 distincts. On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des  $\mathcal{O}$ -réseaux de  $V$ , et  $[\mathcal{R}]$  l'ensemble des  $\mathcal{O}$ -réseaux de  $V$  à homothétie près; on note  $M \mapsto [M]$  la projection canonique de  $\mathcal{R}$  sur  $[\mathcal{R}]$ . Le groupe  $\text{PGL}(V)$  agit sur  $[\mathcal{R}]$ . On note  $[\rho(\Gamma)]$  (resp.  $\Lambda$ ) l'image de  $\rho(\Gamma)$  (resp. de  $\text{Aut}_{K[\Gamma]}(V)$ ) dans  $\text{PGL}(V)$ . On va essayer de classifier les éléments de  $\mathcal{R}$  stables par  $\rho(\Gamma)$  modulo  $\text{Aut}_{K[\Gamma]}(V)$ , c'est-à-dire - car  $\text{Aut}_{K[\Gamma]}(V)$  contient  $K^*$ , et  $\Gamma$  est fini - les éléments de  $[\mathcal{R}]$  stables par  $[\rho(\Gamma)]$  modulo  $\Lambda$ .

## II. - LE CAS $n = 2$ .

On garde les hypothèses et notations ci-dessus, et l'on suppose que  $n = 2$ .

### 1. - Graphe.

Notons  $I$  le graphe défini ainsi : les sommets de  $I$  sont les éléments de  $[\mathcal{R}]$ , et deux sommets de  $I$  sont liés par une arête s'ils sont de la forme  $[M_1]$ ,  $[M_2]$ , avec  $M_1 \subset M_2$  et  $M_2/M_1 \simeq k$ . Alors  $I$  est un arbre et chaque sommet de  $I$  est lié à  $(\text{Card}(k)+1)$  autres sommets [7].

A la décomposition  $V = V_1 \oplus V_2$ , on associe le "droit chemin" -noté  $A$ - ayant pour sommets les  $[M^{(1)} \oplus M^{(2)}]$ , où  $M^{(i)}$  est un réseau de  $V_i$  ( $i=1,2$ ). Choisissons une base  $\underline{e} = (e_1, e_2)$  de  $V$  telle que  $V_i = Ke_i$  ( $i=1,2$ ) et notons  $O_A = [\mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2]$ .

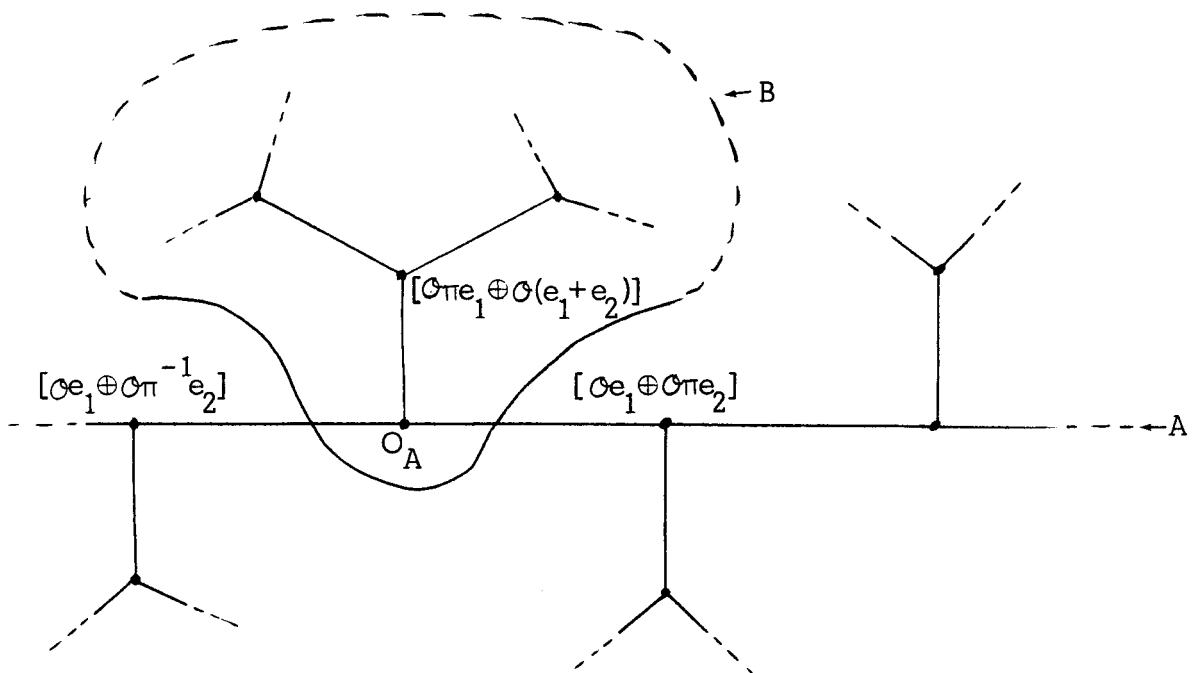
### 2. - Distance.

Notons  $S(I)$  (resp.  $S(A)$ ) l'ensemble des sommets de  $I$  (resp. de  $A$ ). On définit une distance  $d$  sur  $S(I)$  ainsi :  $d([M_1], [M_2]) = m$  (où  $m \in \mathbb{N}$ ) si, quitte à modifier  $M_1$  ou  $M_2$  par une homothétie, on

IV.4

a  $M_1 \subset M_2$  et  $M_2/M_1 \simeq \mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O}$ . En fait,  $d([M_1], [M_2])$  est égal au nombre minimal d'arêtes des chemins joignant  $[M_1]$  à  $[M_2]$ . Cette distance  $d$  est invariante par l'action de  $\text{PGL}(V)$  sur  $S(I)$  [7]. Si  $z$  est un sommet de  $I$ , il existe un unique sommet  $x_z$  de  $A$  tel que  $d(z, x_z) = d(z, S(A))$ . Notons  $B$  l'ensemble des sommets  $z$  de  $I$  tels que  $x_z = O_A$ .

Allure de l'arbre  $I$  (lorsque  $k$  a 2 éléments) :



3. - Action de  $\Lambda$  .

Le groupe  $\Lambda$  est l'image, par  $\underline{e}$ , des matrices  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \in K^*$ ). Or l'image de  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  envoie  $[Oe_1 \oplus O\pi^m e_2]$  sur  $[Oe_1 \oplus O\pi^{m+v(\lambda_2)-v(\lambda_1)} e_2]$ , donc  $\Lambda$  agit sur  $S(A)$  transitivement. Par conséquent, étudier tous les sommets de  $I$  modulo  $\Lambda$  équivaut à étudier les éléments de  $B$  modulo  $\Lambda_{O_A}$ , si  $\Lambda_{O_A}$  désigne le fixateur de  $O_A$  dans  $\Lambda$ , c'est-à-dire l'image des matrices  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{O}^*$ ).

Si deux points de  $B$  sont congrus modulo  $\Lambda_{O_A}$ , ils sont à la

même distance de  $O_A$ . Réciproquement, si deux points distincts de  $B$  sont à la même distance, disons  $m$ , de  $O_A$ , alors ils peuvent s'écrire  $[\mathcal{O}\pi^m e_1 \oplus \mathcal{O}(ae_1 + e_2)]$  et  $[\mathcal{O}\pi^m e_1 \oplus \mathcal{O}(a'e_1 + e_2)]$  avec  $a$  et  $a'$  dans  $\mathcal{O}^*$ , et  $a \not\equiv a' \pmod{\pi^m \mathcal{O}}$ ; donc ils sont congrus modulo l'image dans  $\Lambda_{O_A}$  de la matrice  $\begin{pmatrix} aa'^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . D'où le résultat suivant :

**PROPOSITION.** - L'application de  $[\mathcal{R}]$  dans  $\mathbb{N}$  qui associe à  $z$  sa distance à  $S(A)$  induit une bijection de  $[\mathcal{R}]$  modulo  $\Lambda$  sur  $\mathbb{N}$ .

#### 4. - Action de $\Gamma$ .

Pour tout entier positif  $m$ , et tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma$ , l'image par  $\rho(\gamma)$  du réseau  $\mathcal{O}\pi^m e_1 \oplus \mathcal{O}(e_1 + e_2)$  est le réseau  $\mathcal{O}\pi^m \chi_1(\gamma)e_1 \oplus \mathcal{O}(\chi_1(\gamma)e_1 + \chi_2(\gamma)e_2)$ . Or la matrice de passage de  $(\pi^m e_1, e_1 + e_2)$  à  $(\pi^m \chi_1(\gamma)e_1, \chi_1(\gamma)e_1 + \chi_2(\gamma)e_2)$  est  $\begin{pmatrix} \chi_1(\gamma) & \pi^{-m}(\chi_1(\gamma) - \chi_2(\gamma)) \\ 0 & \chi_2(\gamma) \end{pmatrix}$ . Comme  $\chi_i(\gamma)$  est inversible dans  $\mathcal{O}$  ( $i = 1, 2$ ), car  $\Gamma$  est fini, on voit que le réseau  $\mathcal{O}\pi^m e_1 \oplus \mathcal{O}(e_1 + e_2)$  est stable par  $\rho(\gamma)$  si et seulement si

$$v\left(\frac{\chi_1(\gamma)}{\chi_2(\gamma)} - 1\right) \geq m.$$

Notons  $m_\rho$  le plus grand entier  $m$  tel que  $\frac{\chi_1}{\chi_2}(\gamma) \in 1 + \pi^m \mathcal{O}$  ( $m_\rho$  existe, car on a supposé  $\chi_1$  et  $\chi_2$  distincts). On a obtenu le résultat suivant :

**PROPOSITION.** - Un sommet  $z$  de  $S(I)$  est fixe par  $[\rho(\Gamma)]$  si et seulement si sa distance à  $S(A)$  est inférieure ou égale à  $m_\rho$ .

On a donc obtenu une classification des éléments de  $[\mathcal{R}]$  stables par  $[\rho(\Gamma)]$  modulo  $\Lambda$ , par leur distance à  $S(A)$ , qui parcourt  $\{0, 1, 2, \dots, m_\rho\}$ .

#### IV.6

##### 5. - Application.

Dans le cas particulier qui nous intéresse (cf. I), il est facile de voir que  $m_\rho = 1$ . Il existe donc 2 "genres" de  $\mathbb{Z}$ -réseaux de  $\oplus_{H \in \mathbb{H}'} (\mathbb{Q}[G/H] / \mathbb{Q} \cdot \widetilde{G/H})$  stables par  $G$ . En tenant compte de [6, ch.2], on retrouve ainsi les résultats de [3, ch.I].

##### 6. - Remarque.

En fait,  $I$  est l'immeuble affine de  $PGL(V)$  lorsque  $V$  est de dimension 2 sur  $K$ . Dans ce qui suit, on va construire l'immeuble affine de  $PGL(V)$  lorsque  $V$  est de dimension finie  $n$  quelconque sur  $K$ , et on essaiera de généraliser ce qui précède, au moins au cas  $n = 3$ .

### III. - L'IMMEUBLE AFFINE DE $PGL(V)$ .

Il s'agit seulement ici d'énumérer les résultats qui nous serviront plus loin. Pour une exposition plus détaillée, on pourra se reporter à un exposé de G. Rousseau au séminaire de Nancy-Strasbourg 1979-80, intitulé "L'immeuble de  $GL_n$ ", ou encore à un cours de 3e cycle de Gérardin à Orsay, à paraître (?).

Soient  $K, v, \mathcal{O}, \pi, k, V, n, \mathcal{R}, [\mathcal{R}]$  comme en I.

##### 1. - Définition.

Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des parties finies  $\{[M_1], [M_2], \dots, [M_d]\}$  de  $\mathcal{R}$  telles que, quitte à modifier la numérotation et à remplacer les réseaux par des réseaux homothétiques, l'on ait  $M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_d \subsetneq \pi^{-1}M_1$  (alors bien sûr  $d \leq n$ ).

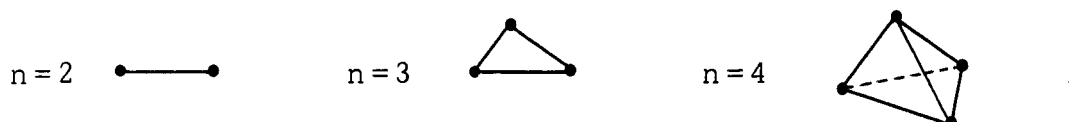
A tout élément  $f$  de  $\mathcal{F}$ , de cardinal  $d$ , on associe un  $(d-1)$  simplexe fermé  $\mathcal{S}_f$  dans un espace affine réel de dimension  $d$ , et une indexation des sommets de  $\mathcal{S}_f$  par les éléments de  $f$ . A tout couple  $(f, f')$  d'éléments de  $\mathcal{F}$  tels que  $f \subset f'$ , on associe une injection

(affine)  $\varphi_{f,f'}$  de  $\mathfrak{S}_f$  dans  $\mathfrak{S}_{f'}$  respectant les indexations.

Alors l'immeuble affine de  $\text{PGL}(V)$ , noté  $I$ , est la somme amalgamée (ou le "recollement"), dans la catégorie des espaces topologiques, des espaces  $\mathfrak{S}_f$  ( $f \in \mathfrak{F}$ ) le long des applications  $\varphi_{f,f'}$  ( $f, f' \in \mathfrak{F}$ ,  $f \subset f'$ ) [1,2.5].

On appelle sommets de  $I$  les images dans  $I$  des sommets des  $\mathfrak{S}_f$  (pour  $f \in \mathfrak{F}$ ). Pour toute partie  $J$  de  $I$ , on note  $S(J)$  l'ensemble des sommets de  $I$  contenus dans  $J$ . Par construction, il existe une bijection naturelle de  $[\mathbb{R}]$  sur  $S(I)$ . On l'utilise pour identifier  $[\mathbb{R}]$  et  $S(I)$ . On appelle facettes de  $I$  les images des simplexes  $\mathfrak{S}_f$  ( $f \in \mathfrak{F}$ ), et chambres de  $I$  les facettes de dimension maximale ( $n-1$ ).

Exemples de chambres :



Une chambre contient  $\binom{n}{d}$  facettes de dimension  $(d-1)$ , pour  $1 \leq d \leq n$ .

## 2. - Appartements.

Pour toute décomposition  $\mathcal{A} : V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$  de  $V$  en somme directe de  $K$ -espaces vectoriels de dimension 1, on note  $A(\mathcal{A})$  la réunion des facettes de  $I$  dont tous les sommets sont de la forme  $[\bigoplus_{i=1}^n M^{(i)}]$ , où  $M^{(i)}$  est un réseau de  $V_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). On appelle  $A(\mathcal{A})$  l'appartement de  $I$  associé à  $\mathcal{A}$ .

Il est clair que  $I$  est la réunion de ses appartements, et qu'à deux décompositions distinctes sont associés deux appartements distincts.

Soit  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$  sur  $K$  telle que  $V_i = Ke_i$  (pour  $1 \leq i \leq n$ ). L'application qui associe au réseau  $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}\pi^{r_i} e_i$  le  $n$ -uplet  $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$  induit une bijection de  $S(A(\mathcal{A}))$  sur le quotient



$\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}$  (où  $\mathbb{Z}$  agit sur  $\mathbb{Z}^n$  par translation). Cette bijection se prolonge en une bijection de  $A(\mathcal{F})$  sur  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ , telle que l'image d'une facette de  $A(\mathcal{F})$  de dimension  $(d-1)$  soit un  $(d-1)$ -simplexe de  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ .

Cette bijection permet de considérer  $A(\mathcal{F})$  comme un espace affine réel euclidien de dimension  $(n-1)$ , d'espace vectoriel associé  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ . Le choix de la base  $\underline{e}$  détermine une origine  $O_{A(\mathcal{F})} = \left[ \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}e_i \right]$  dans  $A(\mathcal{F})$ . On note  $[r_1, \dots, r_n]$  l'image de  $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ .

### 3. - Action de $\text{PGL}(V)$ .

L'action de  $\text{PGL}(V)$  sur  $[\mathcal{R}]$ , c'est-à-dire sur  $S(I)$ , se prolonge naturellement en une action de  $\text{PGL}(V)$  sur  $I$ . Cette action est transitive sur l'ensemble des sommets de  $I$ , et aussi sur l'ensemble des appartements de  $I$ . Considérons une décomposition  $\mathcal{F} : V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ , et  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base telle que  $V_i = \text{Ke}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Alors le fixateur de  $O_{A(\mathcal{F})}$  dans  $\text{PGL}(V)$  est l'image par  $\underline{e}$  de  $\text{GL}_n(\mathcal{O})$  dans  $\text{PGL}(V)$ . Et le stabilisateur de  $A(\mathcal{F})$  dans  $\text{PGL}(V)$  est  $N(\mathcal{F})$ , si  $N(\mathcal{F})$  désigne l'image dans  $\text{PGL}(V)$  des matrices monomiales (i.e. avec un coefficient et un seul non nul dans chaque ligne et chaque colonne) dans la base  $\underline{e}$ .

THEOREME. - Deux facettes quelconques de  $I$  sont contenues dans un même appartement.

Le théorème des diviseurs élémentaires permet de montrer que deux sommets de  $I$  sont dans un même appartement, ou qu'une facette de  $I$  est dans un appartement, mais il ne suffit pas à montrer le théorème. Il faut utiliser la décomposition de Bruhat de  $\text{GL}_n(K)$  [4, 7.3.4].

### 4. - Distance.

Considérons une décomposition  $\mathcal{F} : V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ . On a défini sur  $A(\mathcal{F})$  une structure d'espace affine euclidien, donc en particulier une distance. On peut montrer que cette distance est, à un scalaire positif près,

l'unique distance sur  $A(\mathcal{A})$  invariante par  $N(\mathcal{A})$ .

PROPOSITION. - Cette distance sur  $A(\mathcal{A})$  se prolonge de manière unique en une distance  $d$  sur  $I$  invariante par  $PGL(V)$ .

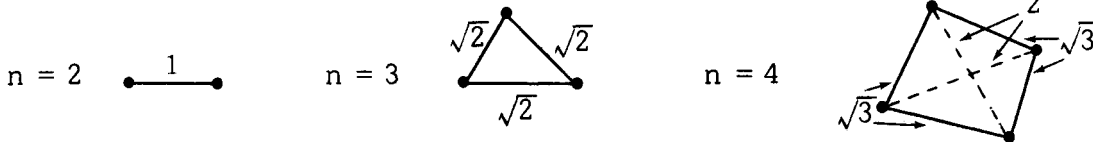
Deux points quelconques de  $I$  sont contenus dans un même appartement (par le théorème ci-dessus), et on a vu que  $PGL(V)$  agit transitivement sur l'ensemble des appartements. Ceci prouve l'unicité de  $d$ ; pour vérifier qu'on a bien défini ainsi une distance sur  $I$ , le seul point délicat est la démonstration de l'inégalité triangulaire. On utilise pour cela une "rétraction" sur un appartement [2, § 1, exercice 24].

De plus,  $I$  est complet pour  $d$ .

Explicitement, si  $x$  et  $y \in A(\mathcal{A})$  et si  $x-y = [r_1, \dots, r_n] \in \mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ , alors  $d(x,y)^2 = (n-1) \sum_{i=1}^n r_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_i r_j$ .

En particulier, pour  $n = 2$  on obtient  $d(x,y) = |r_1 - r_2|$ , donc la restriction de  $d$  à  $S(I)$  est bien la distance définie en II.

Application. Calculons la distance séparant deux sommets distincts  $x$  et  $y$  d'une même chambre de  $I$ . Le théorème des diviseurs élémentaires prouve qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $V$  sur  $K$  telle que  $x = \left[ \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}e_i \right]$  et  $y = \left[ \left( \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}\pi e_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=k+1}^n \mathcal{O}e_i \right) \right]$  avec  $1 \leq k \leq n-1$ ; alors  $y-x = [r_1, \dots, r_n]$  avec  $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 1$  et  $r_{k+1} = \dots = r_n = 0$ , donc  $d(x,y) = \sqrt{k(n-k)}$ . En particulier, une chambre est un  $(n-1)$  simplexe irrégulier pour  $n \geq 4$



Nous aurons besoin du résultat suivant :

THEOREME. - Etant donné un point  $z$  et un appartement  $A$  de  $I$ , il existe un unique point  $x$  de  $A$  tel que  $d(z,x) = d(z,A)$ .

Pour  $n \geq 3$ , si  $z$  est un sommet de  $I$ , alors  $x$  n'est pas forcément un sommet de  $A$ . Nous reviendrons là-dessus en (IV,2).

### 5. - Racines et transvections.

Considérons une décomposition  $\mathcal{B} : V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ . Notons  $C = \{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2 / i \neq j\}$ ,  $C^+ = \{(i,j) \in C / i < j\}$ ,  $C^- = \{(i,j) \in C / i > j\}$ . Pour tout  $(i,j) \in C$ , on définit la racine  $\alpha_{i,j}$  comme l'application de  $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} : \alpha_{i,j}([r_1, \dots, r_n]) = r_i - r_j$ . On a donc défini  $\alpha_{i,j}(x-y)$  pour tous les points  $x$  et  $y$  de  $A(\mathcal{B})$ .

Les propriétés suivantes des racines sont évidentes :

$\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$  (si  $i \neq k$ ),  $\alpha_{ij}(x-y) + \alpha_{ij}(y-z) = \alpha_{ij}(x-z)$   
(où  $(i,j), (j,k) \in C$  et  $x, y, z \in A(\mathcal{B})$ ).

On appelle murs de  $A(\mathcal{B})$  les hyperplans affines dont l'équation peut s'écrire  $\{x \in A(\mathcal{B}) / \alpha_{i,j}(x - O_{A(\mathcal{B})}) = r\}$  pour un  $(i,j) \in C$  et un  $r \in \mathbb{Z}$ .

On appelle demi-appartements de  $A(\mathcal{B})$  les demi-espaces affines fermés limités par un mur, c'est-à-dire dont l'équation peut s'écrire  $\{x \in A(\mathcal{B}) / \alpha_{i,j}(x - O_{A(\mathcal{B})}) \leq r\}$  pour un  $(i,j) \in C$  et un  $r \in \mathbb{Z}$ .

Choisissons une base  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$  sur  $K$  telle que  $V_i = Ke_i$  (pour  $1 \leq i \leq n$ ). Pour tout  $(i,j) \in C$  et tout  $a \in K$ , on note  $u_{i,j}(a)$  l'image dans  $\text{PGL}(V)$ , via  $\underline{e}$ , de la matrice  $(a_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$  où  $a_{k,k} = 1$  (pour  $1 \leq k \leq n$ ),  $a_{k,\ell} = 0$  (pour  $k \neq \ell$  et  $(k,\ell) \neq (i,j)$ ) et  $a_{i,j} = a$ . L'application  $u_{i,j}$  est un isomorphisme de groupes de  $K$  sur son image -notée  $U_{i,j}$ - dans  $\text{PGL}(V)$ .

Si  $(i,j), (k,\ell) \in C$  et  $a, b \in K$ , on a les formules de commutation :  $[u_{i,j}(a), u_{k,\ell}(b)] = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq k \text{ et } i \neq \ell \\ u_{i,\ell}(ab) & \text{si } j = k \text{ et } i \neq \ell \\ u_{k,j}(-ab) & \text{si } i = \ell \text{ et } j \neq k \end{cases}$ . Si  $D$  est

un demi-appartement de  $A(\mathcal{B})$ , d'équation  $\{x \in A(\mathcal{B}) / \alpha_{i,j}(x - O_{A(\mathcal{B})}) \leq r\}$ , on note  $U_D = \{u_{i,j}(a) / a \in K, v(a) \geq r\}$ . Alors  $U_D$  est un sous-groupe

de  $PGL(V)$ , et l'ensemble des points de  $A(\mathcal{D})$  fixes par  $U_D$  est  $D$ .

6. - Fixateur d'une partie d'un appartement.

En plus des notations du §5, soit  $\Delta$  une partie non vide de  $A(\mathcal{D})$ . Notons  $P_\Delta$  le fixateur de  $\Delta$  dans  $PGL(V)$ ,  $N(\mathcal{D})_\Delta$  le fixateur de  $\Delta$  dans  $N(\mathcal{D})$ , et  $U_\Delta$  le sous-groupe de  $PGL(V)$  engendré par les groupes  $U_D$ , pour tous les demi-appartements  $D$  de  $A(\mathcal{D})$  contenant  $\Delta$ .

On montre qu'alors  $U_\Delta$  est distingué dans  $P_\Delta$ ,  $P_\Delta$  est engendré par  $U_\Delta$  et  $N(\mathcal{D})_\Delta$ ,  $N(\mathcal{D})_\Delta$  contient  $U_\Delta \cap N(\mathcal{D})$ ,  $U_\Delta$  ne dépend que de  $\Delta$ , et  $U_\Delta$  est transitif sur l'ensemble des appartements contenant  $\Delta$ .

Soit  $(i, j) \in C$ . S'il existe des demi-appartements de  $A(\mathcal{D})$  de la forme  $\{x \in A(\mathcal{D}) / \alpha_{i,j}(x - O_{A(\mathcal{D})}) \leq r\}$  contenant  $\Delta$ , on note  $D(\Delta, i, j)$  le plus petit d'entre eux et  $U_\Delta^{i,j} = U_{D(\Delta, i, j)}$ ; s'il n'existe pas de tels demi-appartements, on pose  $U_\Delta^{i,j} = \{1\}$ . Alors, pour n'importe quel ordre total sur  $C^+$  (resp.  $C^-$ ), l'ensemble des produits  $\prod_{(i,j) \in C^+ \text{ (resp. } C^-)} u^{i,j}$  (où  $u^{i,j} \in U_\Delta^{i,j}$ ) forme un sous-groupe de  $U_\Delta$  noté  $U_\Delta^+$  (resp.  $U_\Delta^-$ ), et tout  $u$  dans  $U_\Delta$  s'écrit de manière unique  $u = u^+ u^- n$ , avec  $u^+ \in U_\Delta^+$ ,  $u^- \in U_\Delta^-$ , et  $n \in N(\mathcal{D}) \cap U_\Delta$ .

7. - "Bases adaptées".

Gardons les notations des § précédents. Pour tout point  $x$  de  $I$ , notons  $F(x)$  la plus petite facette de  $I$  contenant  $x$ ; elle est incluse dans tout appartement de  $I$  contenant  $x$ . Soit  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$  sur  $K$ . On dit que  $\underline{e}$  est adaptée à  $\mathcal{D}$  si  $Ke_i = V_i$  (pour  $1 \leq i \leq n$ ). Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $A(\mathcal{D})$ . On dit que  $\underline{e}$  est adaptée à  $(\mathcal{D}, x)$  si  $\underline{e}$  est adaptée à  $\mathcal{D}$  et si  $O_{A(\mathcal{D})}$  est un sommet de  $F(x)$ ; on dit que  $\underline{e}$  est adaptée à  $(\mathcal{D}, x, y)$  si  $\underline{e}$  est adaptée à  $(\mathcal{D}, x)$  et si l'on a  $\alpha_{i,j}(y-x) \geq 0$  pour tout  $(i, j) \in C^+$ .

Il est clair qu'on peut trouver une base  $\underline{e}$  adaptée à  $\mathcal{D}$ ; quitte

à multiplier chaque  $e_i$  par un scalaire non nul, on peut supposer que  $\underline{e}$  est adaptée à  $(\mathcal{D}, x)$  ; et quitte à modifier la numérotation des  $V_i$ , on peut supposer que  $\underline{e}$  est adaptée à  $(\mathcal{D}, x, y)$  .

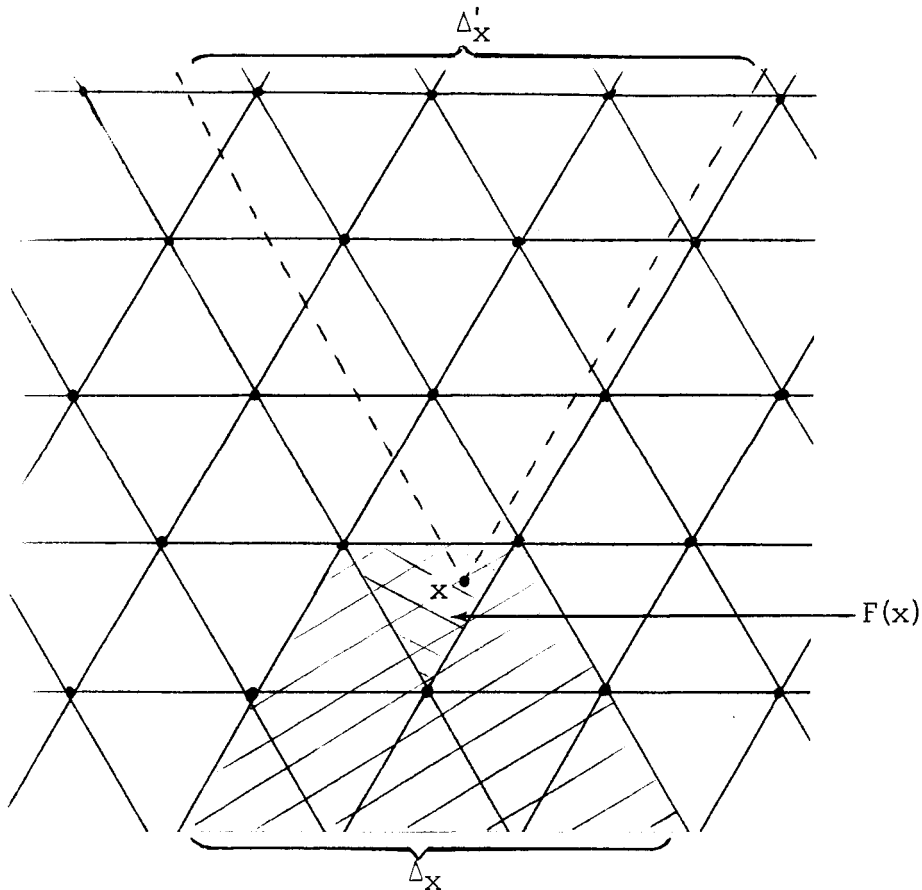
Soit  $x$  un point de  $A(\mathcal{D})$ , et soit  $\underline{e}$  une base adaptée à  $(\mathcal{D}, x)$ . Pour  $(i, j) \in C$ , notons  $n_{i,j}(x)$  le plus petit entier  $n$  tel que  $\alpha_{i,j}(x - O_{A(\mathcal{D})}) \leq n$ . Autrement dit,

$$D(\{x\}, i, j) = D(F(x), i, j) = \{t \in A(\mathcal{D}) / \alpha_{i,j}(t - O_{A(\mathcal{D})}) \leq n_{i,j}(x)\} .$$

Notons  $\Delta_x = \bigcap_{(i,j) \in C^+} D(\{x\}, i, j)$  et  $\Delta'_x = \bigcap_{(i,j) \in C^+} \{t \in A(\mathcal{D}) / \alpha_{i,j}(t - x) \geq 0\}$ .

Donc  $\Delta_x$  contient  $F(x)$ , et, pour tout  $y$  de  $A(\mathcal{D})$ , la base  $\underline{e}$  est adaptée à  $(\mathcal{D}, x, y)$  si et seulement si  $y$  est dans  $\Delta'_x$ .

Exemple ( $n = 3$ )

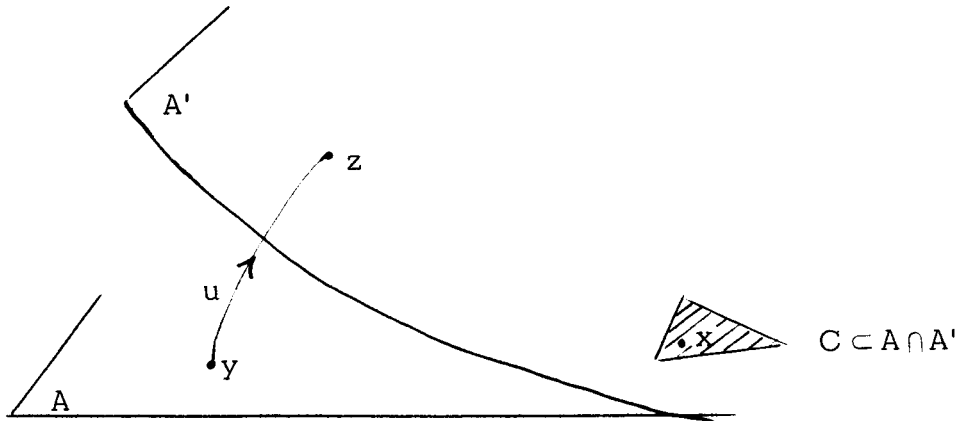


IV. - UTILISATION DE L'IMMEUBLE I .

En plus des notations introduites en III, reprenons toutes les notations de la fin de I . Désormais,  $\mathcal{A}$  désigne la décomposition  $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$  correspondant à  $\rho = \bigoplus_{i=1}^n \chi_i$  , et on note  $A$  l'appartement  $A(\mathcal{A})$  .

1. - Mise en place.

Considérons un sommet  $z$  de  $I$  , et notons  $x$  le point de  $A$  tel que  $d(z,x) = d(z,A)$  (III,5). Choisissons une chambre  $C$  de  $A$  contenant  $x$  , un appartement  $A'$  contenant  $z$  et  $C$  (III,3) et un élément  $u$  de  $U_C$  tel que  $u(A) = A'$  (III,6). Le point  $u^{-1}(z)$  , noté  $y$  , est alors un sommet de  $A$  .



Soit  $\underline{e}$  une base adaptée à  $(\mathcal{A}, x, y)$  . Pour tout ordre total sur  $C^+$  (resp.  $C^-$ ) , on peut écrire  $u$  sous la forme  $u = \prod_{(i,j) \in C^+} u_{i,j}(a_{i,j}) \times \prod_{(i,j) \in C^-} u_{i,j}(a_{i,j}) \times n$  , avec  $v(a_{i,j}) \geq n_{i,j}(x)$  pour tout  $(i,j) \in C$  , et  $n \in N(\mathcal{A})_C$  . Alors  $n$  fixe  $C$  point par point ; or il agit de manière affine sur  $A$  , donc  $n$  fixe  $A$  point par point, et l'on peut supposer que  $n = 1$  sans changer  $A'$  ni  $y$  .

PROPOSITION. - Si  $(i,j) \in C^-$  , alors  $y$  est fixe par  $u_{i,j}(a_{i,j})$  .

En effet,  $u_{i,j}(a_{i,j})$  laisse fixe  $D(\{x\}, i, j) = \{t \in A / \alpha_{i,j}(t - O_A) \leq n_{i,j}(x)\}$  (III,5). Or  $D(\{x\}, i, j)$  contient  $F(x)$  , qui contient  $O_A$  ; on a donc  $n_{i,j}(x) \geq 0$  , et il suffit de montrer que  $\alpha_{i,j}(y - O_A) \leq 0$  . Mais  $\alpha_{i,j}(y - O_A)$

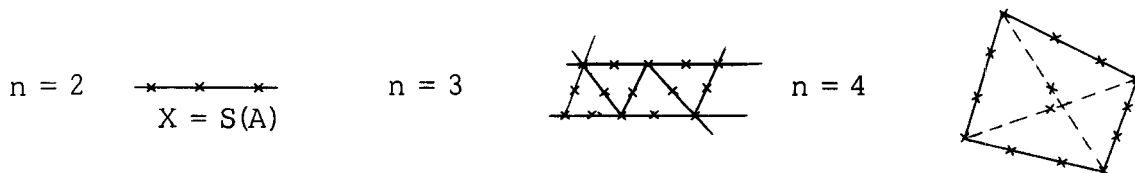
est entier, car  $y$  et  $O_A$  sont des sommets de  $A$  ; et  $\alpha_{i,j}(y-O_A) = \alpha_{i,j}(y-x) + \alpha_{i,j}(x-O_A)$ , avec  $\alpha_{i,j}(y-x) \leq 0$  car  $\underline{e}$  est adaptée à  $(A,x,y)$ , et  $\alpha_{i,j}(x-O_A) \in ]-1,1[$  car  $O_A \in F(x)$ . Donc on a bien  $\alpha_{i,j}(y-O_A) \leq 0 \leq n_{i,j}(x)$ , d'où le résultat.

On peut donc supposer que  $u = \prod_{(i,j) \in C^+} u_{i,j}(a_{i,j})$ . C'est ce que l'on fera désormais. De plus, on choisira un ordre total sur  $C^+$  tel que  $a_{i,j}$  soit le coefficient d'indice  $(i,j)$  de la matrice de  $u$  (pour tout  $(i,j) \in C^+$ ) ; par exemple, l'ordre inverse de l'ordre lexicographique [5, ch.4, exerc.47].

2. - Distance de  $z$  à  $A$  .

On a défini  $x$  par  $d(z,x) = d(z,A)$ . Comme  $d$  est invariante par  $PGL(V)$ , cela a plusieurs conséquences :

■ Sur  $x$  : on doit avoir  $d(y,x) = d(y,F(x))$ . Autrement dit,  $x$  doit appartenir à la partie  $X$  de  $A$  définie par  $X = \{t \in A / \exists y \in S(A), d(y,t) = d(y,F(t))\}$ . Par exemple, en notant  $(x)$  les points de  $X$  :



■ Sur les  $a_{i,j}$  ( $(i,j) \in C^+$ ) : soit  $\Delta_u = \bigcap_{(i,j) \in C^+} \{t \in A / \alpha_{i,j}(t-O_A) \leq v(a_{i,j})\}$  -donc  $\Delta_u$  contient  $\Delta_x$ -. Comme  $\Delta_u$  est fixe par  $u$ , on doit avoir  $d(y,x) = d(y,\Delta_u)$ . On va voir, lorsque  $n$  vaut 3, que ceci permet de majorer les valuations de certains coefficients  $a_{i,j}$ .

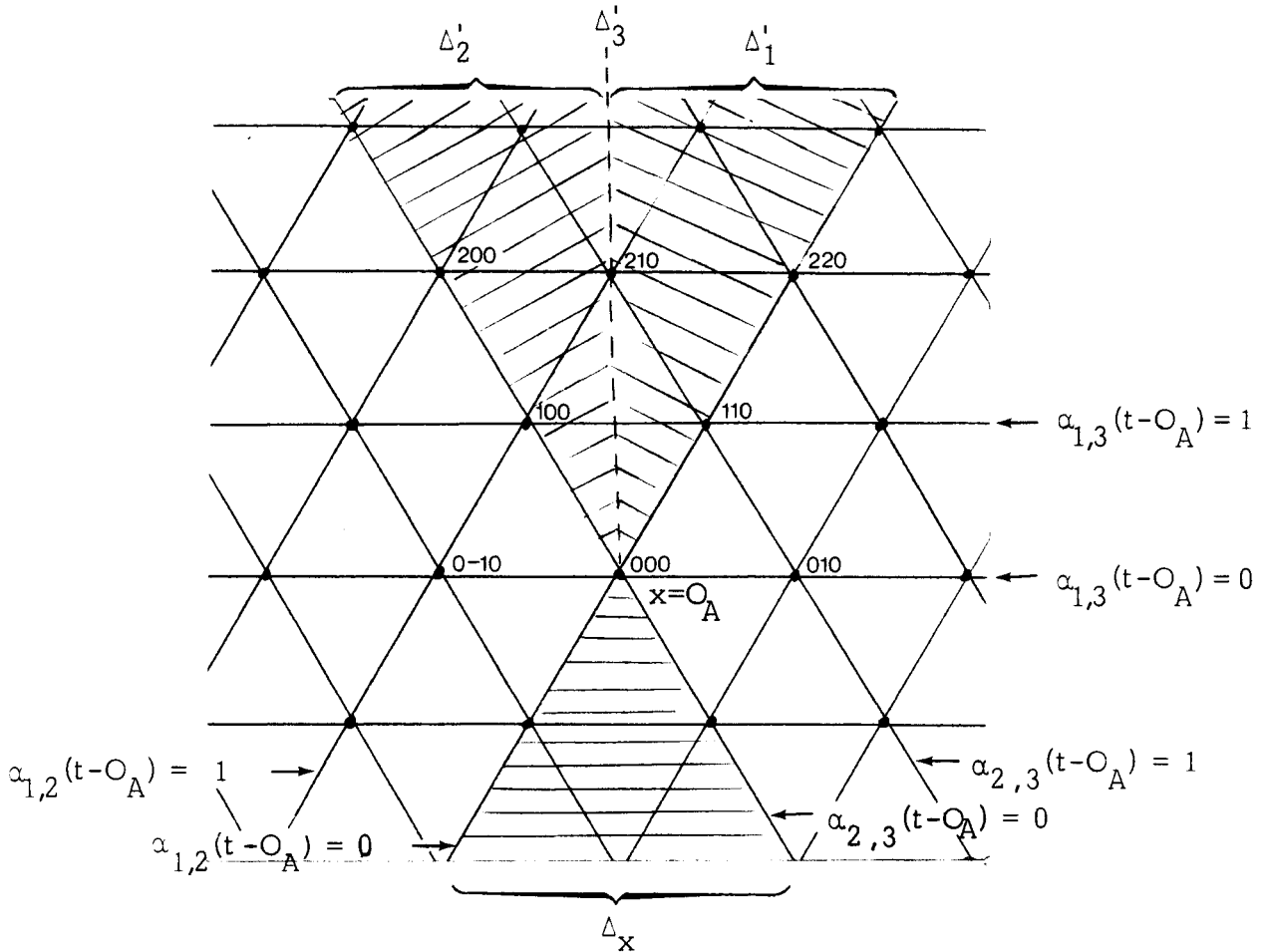
Si  $x$  est un sommet de  $A$ , alors  $F(x) = \{x\}$ ,  $O_A = x$ , et pour tout  $(i,j) \in C^+$  on a  $n_{i,j}(x) = 0$  donc  $v(a_{i,j}) \geq 0$ . Et  $\Delta'_x$  est la réunion disjointe des 4 ensembles  $\{O_A\}$ ,

$$\Delta'_1 = \{t \in A / 0 \leq \alpha_{1,2}(t-O_A) < \alpha_{2,3}(t-O_A)\}$$

$$\Delta'_2 = \{t \in A/O \leq \alpha_{2,3}(t-O_A) < \alpha_{1,2}(t-O_A)\} ,$$

$$\Delta'_3 = \{t \in A/O < \alpha_{1,2}(t-O_A) = \alpha_{2,3}(t-O_A)\} .$$

(Sur les dessins, on désigne par " $r_1 r_2 r_3$ " le point  $O_A + [r_1, r_2, r_3]$  de  $A$ )



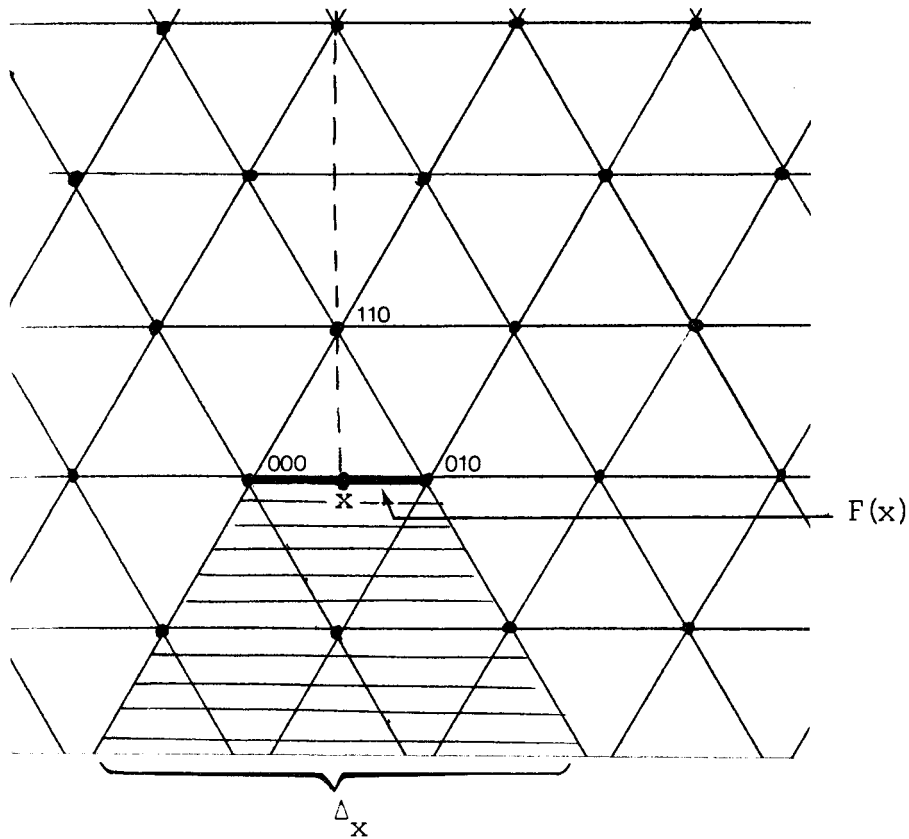
On voit alors qu'on doit avoir  $v(a_{2,3}) = 0$  si  $y \in \Delta'_1$ ,  $v(a_{1,2}) = 0$  si  $y \in \Delta'_2$ , et  $\inf(v(a_{1,3}), v(a_{1,2}a_{2,3})) = 0$  si  $y \in \Delta'_3$ . On peut voir aussi, mais c'est moins facile, que l'on doit avoir  $v(a_{1,3}) = 0$  si  $y \in \Delta'_1$ , et  $v(a_{1,3}^{-1}a_{1,2}a_{2,3}) = 0$  si  $y \in \Delta'_2$ .

Si  $x$  n'est pas un sommet de  $A$ , alors (d'après l'étude de  $X$ )  $x$  est le milieu d'une facette de dimension 1. On peut choisir une base  $\underline{e}$  adaptée à  $(\mathcal{L}, x, y)$  de sorte que  $x - O_A = [0, \frac{1}{2}, 0]$ . Alors  $n_{1,2}(x) = n_{1,3}(x) = 0$ ;  $n_{2,3}(x) = 1$ , donc  $v(a_{1,2}) \geq 0$ ,  $v(a_{1,3}) \geq 0$ ,



et  $v(a_{2,3}) \geq 1$ . Dans ce cas, pour que  $d(y,x) = d(y,F(x))$ , il faut que  $y$  soit sur la médiatrice de  $F(x)$ , qui a pour équation

$\{t \in A / \alpha_{1,2}(t-O_A) - \alpha_{2,3}(t-O_A) = -1\}$ . Et pour que  $y$  soit dans  $\Delta'_x$ , il faut de plus que  $\alpha_{1,3}(y-O_A) \geq 0$ .



On voit qu'on doit avoir  $v(a_{1,3}) = 0$ .

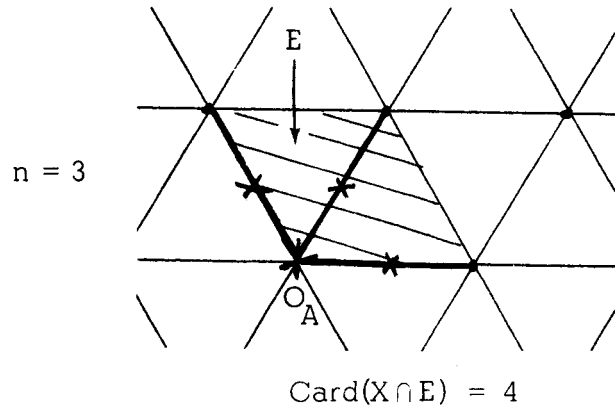
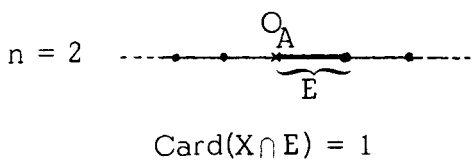
3. - Classes modulo  $\Lambda$ .

Rappelons que  $\Lambda$  est l'image dans  $PGL(V)$  de  $Aut_{K[\Gamma]}(V)$ , qui est constitué dans la base  $\underline{e}$  des matrices diagonales inversibles à coefficients dans  $K$ . Rappelons aussi que l'on veut classifier  $S(I)$  modulo  $\Lambda$ .

Sur  $A$ , l'image de la matrice  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$  (où les  $\lambda_i \in K^*$ ) agit

par la translation de vecteur directeur  $[v(\lambda_1), v(\lambda_2), \dots, v(\lambda_n)] \in \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}$ .  
 Donc l'ensemble  $E = \{t \in A / t = O_A + [r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, 0], r_i \in [0, 1[ \}$  est un domaine fondamental de  $A$  pour l'action de  $\Lambda$ , et  $X \cap E$  est un domaine fondamental de  $X$  pour l'action de  $\Lambda$ .

Exemples :  $(X) = X \cap E$



Notons  $\Lambda_t$  le fixateur dans  $\Lambda$  d'un point  $t$  de  $A$ . Alors  $\Lambda_t$  est l'image des matrices diagonales de  $GL_n(\mathcal{O})$  (dans la base  $\underline{e}$ ).

Il est facile de montrer le résultat suivant : soit  $x \in A$ ,  $z$  et  $z' \in S(I)$ , tels que  $d(z, A) = d(z, x)$  et  $d(z', A) = d(z', x)$ . Soit  $y$  et  $y' \in S(A)$ ,  $u$  et  $u' \in U_{\{x\}}^+$ , tels que  $z = u(y)$  et  $z' = u'(y')$ .

LEMME. - Si  $z$  et  $z'$  sont congrus modulo  $\Lambda_x$ , alors  $y$  et  $y'$  sont égaux.

Supposons donc que  $y' = y$ , et notons  $u = \prod_{(i,j) \in C^+} u_{i,j}(a_{i,j})$ ,  
 $u' = \prod_{(i,j) \in C^+} u_{i,j}(a'_{i,j})$ ,  $u'^{-1} = \prod_{(i,j) \in C^+} u_{i,j}(b'_{i,j})$ . Alors :  $z$  et  $z'$  sont congrus modulo  $\Lambda_x$  si et seulement si

il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{O}^*$  tels que pour tout  $(i, j) \in C^+$  on ait

$$a_{i,j}(y - O_A) \equiv v \left[ \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_j} a_{ij} - a'_{ij} \right) + \sum_{k=i+1}^{j-1} b'_{i,k} \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_j} a_{kj} - a'_{kj} \right) \right] \quad (*)$$

D'où une méthode de classification de  $S(I)$  modulo  $\Lambda$  :

Pour chaque point  $x$  de  $X \cap E$ , on considère une base  $\underline{e}$  adaptée à  $(\mathcal{B}, x)$ , et tous les sommets  $y$  de  $A$  tels que  $d(y, x) = d(y, F(x))$

et que  $y$  soit dans  $\Delta'_x$ . Pour chacun de ces sommets  $y$ , la base  $\underline{e}$  est adaptée à  $(\mathcal{L}, x, y)$  (car  $y$  est dans  $\Delta'_x$ ); on considère alors tous les sommets  $z$  de  $I$  de la forme  $z = u(y)$  avec  $u$  dans  $U_{\{x\}}^+$  tels que  $d(z, A) = d(z, x)$ , modulo  $\Lambda_x$ . On obtient ainsi un représentant de chaque classe de  $S(I)$  modulo  $\Lambda$ .

4. - Stabilité par  $[\rho(\Gamma)]$ .

Soit  $x \in A$ ,  $y \in S(A)$ , et  $\underline{e}$  une base adaptée à  $(\mathcal{L}, x, y)$ . Soit  $\gamma \in \Gamma$ ; alors  $[\rho(\gamma)]$  est l'image dans  $PGL(V)$  de la matrice  $\begin{pmatrix} \chi_1(\gamma) & 0 \\ 0 & \chi_n(\gamma) \end{pmatrix}$  dans la base  $\underline{e}$ . Soit  $u \in U_{\{x\}}^+$ ; on note  $u = \prod_{(i,j) \in C^+} u_{i,j}(a_{i,j})$  et  $u^{-1} = \prod_{(i,j) \in C^+} u_{i,j}(b_{i,j})$ . Soit  $z = u(y)$ . On note enfin  $\chi_{i,j} = \chi_i / \chi_j$  pour tout  $(i,j) \in C$ .

Il est alors facile de voir que  $z$  est fixe par  $[\rho(\Gamma)]$  si et seulement si pour tout  $(i,j) \in C^+$  on a

$$\alpha_{i,j}(y-O_A) \leq \min_{\gamma \in \Gamma} v \left[ (\chi_{i,j}(\gamma) - 1) a_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{j-1} b_{ik} a_{kj} (\chi_{k,j}(\gamma) - 1) \right] \quad (**)$$

Remarque. - Cette condition permet de majorer les  $\alpha_{i,j}(y-O_A)$ , puisque les  $v(a_{i,j})$  sont majorés (car  $d(z, x) = d(z, A)$ ) et les  $v(\chi_{i,j}(\gamma) - 1)$  aussi (car les  $\chi_i$  sont deux à deux distincts).

V. - APPLICATION.

Dans cette dernière partie, on suppose que  $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ ,  $\Gamma = G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ ,  $n = 3$ ,  $V_i = V_{H_i}$  ( $1 \leq i \leq 3$ ), où  $H_1, H_2, H_3$  sont 3 sous-groupes distincts d'ordre  $p$  de  $G$ . De plus, si  $p \geq 3$ , on suppose que la structure de  $K$ -espace vectoriel des  $V_{H_i}$  est définie ainsi : on considère un élément  $h$  de  $G \setminus (H_1 \cup H_2 \cup H_3)$ , et en associant

à  $\zeta_p$  l'image de  $h$ , on obtient un isomorphisme de  $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$  sur  $\mathbb{Q}_p[G/H_i]/\mathbb{Q}_p \cdot \widetilde{G}/H_i$  qui fait de ce dernier module un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ , noté  $V_{H_i}$ .

Calculons  $v(\chi_{i,j}(g)-1)$  pour  $(i,j) \in C$  et  $g \in G$ .

Si  $p=2$ , et si  $k$  est l'entier tel que  $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ , on voit que  $v(\chi_{i,j}(g)-1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } g \in H_k \\ 1 & \text{si } g \notin H_k \end{cases}$ .

Si  $p \geq 3$ , on peut écrire  $g = h^{\alpha_i} h_i^{\beta_i}$  avec  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (pour  $i = 1, 2$  ou  $3$ ), et alors  $\chi_i(g) = \zeta_p^{\alpha_i}$ . Donc

$$v(\chi_{i,j}(g)-1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } g \in \langle h \rangle \\ 1 & \text{si } g \notin \langle h \rangle \end{cases}.$$

Alors le système (\*\*), qui traduit la stabilité de  $z$  sous  $[\rho(G)]$ , s'écrit

$$\begin{cases} \alpha_{1,2}(y-O_A) \leq 1 + v(a_{1,2}) \\ \alpha_{2,3}(y-O_A) \leq 1 + v(a_{2,3}) \\ \alpha_{1,3}(y-O_A) \leq \begin{cases} 1 + \min_{g \in G \setminus \langle k \rangle} v(a_{13}^{-1} a_{12} a_{23} \frac{\chi_{23}(g)-1}{\chi_{13}(g)-1}) & \text{si } p \geq 3 \\ 1 + \min(v(a_{13}), v(a_{12} a_{23})) & \text{si } p = 2 \end{cases} \end{cases}$$

En tenant compte des contraintes sur les valuations des  $a_{i,j}$  vues en (IV,2), on obtient :

■ si  $x \notin S(A)$ , alors  $v(a_{13}) = 0$  et  $v(a_{12} a_{23}) = v(a_{12}) + v(a_{23}) \geq 1$ , donc  $\min(v(a_{13}), v(a_{12} a_{23})) = 0$  et (pour  $p \geq 3$ )

$$\min_{g \in G \setminus \langle k \rangle} v(a_{13}^{-1} a_{12} a_{23} \frac{\chi_{23}(g)-1}{\chi_{13}(g)-1}) = 0.$$

On doit alors avoir  $\alpha_{1,3}(y-O_A) \leq 1$ , ce qui n'est possible que si  $y = O_A + [1, 1, 0]$ .

■ si  $x \in S(A)$  et si  $y \in \Delta'_1$ , alors  $v(a_{23}) = 0$  donc

$\alpha_{23}(y-O_A) \leq 1$  , donc  $y = O_A + [1,1,0]$  .

■ si  $x \in S(A)$  et si  $y \in \Delta'_2$  , alors  $v(a_{1,2}) = 0$  donc  $\alpha_{12}(y-O_A) \leq 1$  , donc  $y = O_A + [1,0,0]$  .

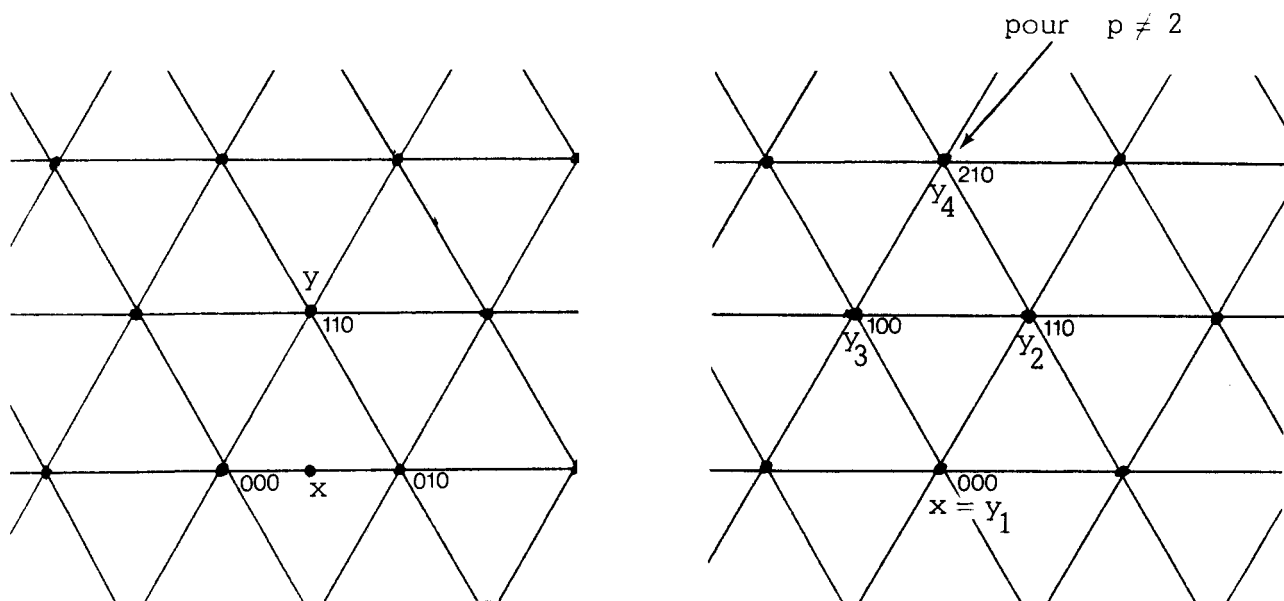
■ si  $x \in S(A)$  et si  $y \in \Delta'_3$  , alors  $\inf(v(a_{13}), v(a_{12}a_{23})) = 0$  .  
Si  $p = 2$  , on doit avoir  $\alpha_{13}(y-O_A) \leq 1$  , ce qui est impossible.

Si  $p \geq 3$  , il est facile de voir que  $\frac{\chi_{23}(g)-1}{\chi_{12}(g)-1}$  est une unité de  $K$  , dont la valeur modulo  $\pi\mathcal{O}$  , notée  $\delta$  , est indépendante de  $g \in G \setminus \langle h \rangle$  (en fait,  $\delta$  dépend de la position respective des 3 groupes  $H_1, H_2, H_3$  dans  $G$ ). On a donc 2 cas à considérer.

Si  $a_{13} \not\equiv a_{12}a_{23}\delta \pmod{\pi\mathcal{O}}$  , alors  $v(a_{13} - a_{12}a_{23}\frac{\chi_{23}(g)-1}{\chi_{12}(g)-1}) = 0$  pour tout  $g \in G \setminus \langle h \rangle$  , donc on doit avoir  $\alpha_{13}(y-O_A) \leq 1$  , ce qui est impossible.

Si  $a_{13} \equiv a_{12}a_{23}\delta \pmod{\pi\mathcal{O}}$  , alors  $v(a_{13}) = v(a_{12}) = v(a_{23}) = 0$  , donc on doit avoir

$$\begin{cases} \alpha_{12}(y-O_A) \leq 1 \\ \alpha_{23}(y-O_A) \leq 1 \end{cases} \text{ , d'où } y = O_A + [2,1,0] \text{ .}$$



Il reste à compter, pour chaque  $y$  convenable, le nombre de sommets  $z$  de  $I$  modulo  $\Lambda_x$  qui lui correspondent. On va voir qu'ici ce nombre est toujours égal à 1 .

Le système (\*) s'écrit ici :

$$\text{il existe } \lambda, \lambda' \in \mathcal{O}^* \text{ tels que } \begin{cases} \alpha_{12}(y-O_A) \leq v(\lambda a_{12} - a'_{12}) \\ \alpha_{23}(y-O_A) \leq v(\lambda' a_{23} - a'_{23}) \\ \alpha_{13}(y-O_A) \leq v[(\lambda \lambda' a_{13} - a'_{13}) - a'_{12}(\lambda' a_{23} - a'_{23})] \end{cases}$$

D'après ce qui précède, on a 5 cas à considérer :

■  $x = y = O_A$  . On voit directement que le seul sommet  $z$  de  $I$  correspondant est  $z = x$  , et qu'il est fixe par  $[\rho(G)]$  .

■  $x = O_A + [0, \frac{1}{2}, 0]$  ,  $y = O_A + [1, 1, 0]$  ,  $v(a_{12}) \geq 0$  ,  $v(a_{23}) \geq 1$  ,  $v(a_{13}) = 0$  (et de même pour les  $a'_{i,j}$ ) . Alors (\*) équivaut à l'existence d'un  $\lambda \in \mathcal{O}^*$  tels que  $1 \leq v(\lambda a_{13} - a'_{13})$  , donc tout  $\lambda$  tel que  $\lambda \equiv a'_{13}/a_{13} \pmod{\pi\mathcal{O}}$  convient. (Donc ce cas donne 3 classes de sommets de  $I$  modulo  $\Lambda$  , puisqu'il y a 3 points de  $X \cap E$  qui s'y ramènent).

■  $x = O_A$  ,  $y = O_A + [1, 1, 0]$  ,  $v(a_{12}) \geq 0$  ,  $v(a_{23}) = v(a_{13}) = 0$  (de même pour les  $a'_{i,j}$ ) . Alors (\*) équivaut à l'existence de  $\lambda$  et  $\lambda' \in \mathcal{O}^*$  tels que  $\begin{cases} 1 \leq v(\lambda a_{23} - a'_{23}) \\ 1 \leq v(\lambda' a_{13} - a'_{13}) \end{cases}$  . Il suffit donc que  $\lambda \equiv a'_{23}/a_{23} \pmod{\pi\mathcal{O}}$  et  $\lambda' \equiv a'_{13}/a_{13} \pmod{\pi\mathcal{O}}$  .

■  $x = O_A$  ,  $y = O_A + [1, 0, 0]$  ,  $v(a_{12}) = 0$  ,  $v(a_{23}) \geq 0$  ,  $v(a_{13}) \geq 0$  , et  $v(a_{13} - a_{12} a_{23}) = 0$  (de même pour les  $a'_{ij}$ ) . Alors (\*) équivaut à

l'existence de  $\lambda$  et  $\lambda' \in \mathcal{O}^*$  tels que  $\begin{cases} 1 \leq v(\lambda a_{12} - a'_{12}) \\ 1 \leq v[(\lambda \lambda' a_{13} - a'_{13}) - a'_{12}(\lambda' a_{23} - a'_{23})] \end{cases}$  .

Il suffit de prendre  $\lambda$  tel que  $\lambda \equiv a'_{12}/a_{12} \pmod{\pi\mathcal{O}}$  , puis  $\lambda'$  tel que

$$\lambda' \equiv \frac{a_{12}(a'_{13} - a'_{12} a'_{23})}{a'_{12}(a_{13} - a_{12} a_{23})} \pmod{\pi\mathcal{O}} .$$

■  $x = O_A$  ,  $y = O_A + [2, 1, 0]$  ,  $p \geq 3$  ,  $v(a_{12}) = v(a_{23}) = v(a_{13}) = 0$  ,

et  $a_{13} = a_{12} a_{23}^\delta \pmod{\pi\mathcal{O}}$  (de même pour les  $a'_{ij}$ ). Alors, pour résoudre

(\*) , il suffit de prendre  $\lambda = \frac{a'_{12}}{a_{12}} + \pi\mu$  et  $\lambda' = \frac{a'_{23}}{a_{23}}$  avec un  $\mu \in \mathcal{O}$  tel

que  $2 \leq v\left(\frac{a'_{12} a'_{23}}{a_{12} a_{23}} a_{13}^{-a'_{13}} + \pi a_{13} \mu \frac{a'_{23}}{a_{23}}\right)$  c'est-à-dire

$$\mu \equiv \frac{1}{a_{12} a'_{23} a_{13}} \cdot \frac{a_{12} a_{23} a'_{13} - a'_{12} a'_{23} a_{13}}{\pi} \pmod{\pi\mathcal{O}} .$$

On retrouve ainsi les résultats de [3, ch.II] , à condition de tenir compte de [6, ch.2] .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] - N. BOURBAKI, Topologie générale, ch.I, Hermann, Paris (1965).
- [2] - N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, ch.IV, Hermann, Paris (1968).
- [3] - L. BOUVIER, J.J. PAYAN, Sur la structure galoisienne du groupe des unités d'un corps abélien de type  $(p,p)$  . Ann. Inst. Fourier (29) 1 (1979), 171-187.
- [4] - F. BRUHAT, J. TITS, Groupes réductifs sur un corps local, I, Publ. Math. I.H.E.S. 41 (1972).
- [5] - L. CHAMBADAL, J.L. OVAERT, Cours de mathématiques, algèbre II, Gauthier-Villars, Paris (1972).
- [6] - D. DUVAL, Sur la structure galoisienne du groupe des unités d'un corps abélien réel de type  $(p,p)$ , J. Number Theory (à paraître).
- [7] - J.P. SERRE, Arbres, amalgames,  $SL_2$ , Astérisque 46 (1977).